

TECHNICKÁ UNIVERSITA V LIBERCI

Fakulta strojní



**VYVAŽOVÁNÍ SETRVAČNÝCH ÚČINKŮ TĚLES
PŘI PERIODICKÉM VRATNÉM POHYBU**

Disertační práce

Liberec 2009

Jiří Ondrášek

TECHNICKÁ UNIVERSITA V LIBERCI

Fakulta strojní

Disertační práce

k získání akademického titulu Doktor (Ph.D.)

ve studijním oboru

Aplikovaná mechanika – Dynamika mechanismů

**VYVAŽOVÁNÍ SETRVAČNÝCH ÚČINKŮ TĚLES
PŘI PERIODICKÉM VRATNÉM POHYBU**

**BALANCING OF INERTIA EFFECTS OF BODIES
DURING PERIODICAL REVERSING MOTION**

Autor:

Jiří Ondrášek

Studijní program:

P2301 – Strojní inženýrství

Studijní obor:

3901V003 – Aplikovaná mechanika

Zaměření:

Dynamika mechanismů

Školící pracoviště:

Katedra mechaniky, pružnosti a pevnosti
Fakulta strojní
Technická univerzita v Liberci
Studentská 2
416 17 Liberec

Školitel:

Doc.Ing. Rudolf Vrzala, CSc.

Liberec, září 2009

Jiří Ondrášek

Prohlášení

Byl jsem seznámen s tím, že na mou doktorskou práci se plně vztahuje zákon 121/2000 o právu autorském, zejména § 60 (školní dílo) a § 35 (o nevýdělečném užití díla k vnitřní potřebě školy).

Beru na vědomí, že TUL má právo na uzavření licenční smlouvy o užití mé práce a prohlašuji, že **s o u h l a s í m** s případným užitím mé práce (prodej, zapůjčení apod.).

Jsem si vědom toho, že užití své doktorské práce či poskytnout licenci k jejímu využití mohu jen se souhlasem TUL, která má právo ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, vynaložených univerzitou na vytvoření díla (až do jejich skutečné výše).

Datum: 23. září 2009

Podpis:

.....

Anotace

Vyvažování setrvačných účinků těles při periodickém vratném pohybu

Ústředním tématem předkládané disertační práce je oblast mechaniky, která se zabývá vyvažováním setrvačných účinků těles případně mechanických systémů. Cílem vyvažování je především snížit, nebo úplně vyloučit, dynamické účinky pohybujících se hmotných těles tak, aby došlo ke snížení potřebného příkonu pohonu a dále ke zmenšení silového namáhání celé mechanické soustavy. Proces vyvažování je realizován s ohledem dosažení ustáleného chodu mechanického systému připojením vyvažujících subsystémů k vyvažované soustavě. Jednotlivé vyvažující subsystémy jsou složeny ze setrvačné hmoty a pružného prvku, kterým je seizmická hmota propojena s vyvažovaným mechanickým systémem. V ustáleném chodu je pohyb vyvažující hmoty protiběžný periodickému vratnému pohybu tělesa, jehož setrvačné účinky jsou vyvažovány. K tomu, aby docházelo k účinnému procesu vyvažování, je třeba správně navrhnout parametry vyvažujících subsystémů. Těmi se rozumí hmotnost a matice setrvačnosti vyvažující hmoty a tuhost pružného elementu. K tomuto účelu byly odvozeny matematické vztahy a navržena metodika jejich výpočtu. Tyto parametry jsou určovány v závislosti na pracovní frekvenci daného strojního zařízení, na průběhu zdvihové závislosti pracovního členu systému a jeho geometricko-hmotnostních charakteristikách.

Na samotný proces vyvažování a jeho aplikaci na mechanické systémy lze nahlížet jako na součást reality. Ta část reality, která je popisována, se nazývá objekt. Aby byl objekt dobře popsán, je nutné vytvořit dobrý model daného objektu. V této práci je především věnována pozornost teoretickému způsobu tvorby modelů. Tento způsob tvorby vychází především z fyzikálních zákonitostí, na jejichž základě jsou hledány vztahy mezi veličinami, které jsou určující z hlediska poznání. Jedná se o matematicko-fyzikální analýzu. Model objektu vzniklý na jejím základě může být složitý a neefektivní, ale pro jeho objektivní popis je nezbytné, aby byl matematicky a fyzikálně popisován a řešen jako celek. To znamená včetně jeho jednotlivých subsystémů: mechanického, elektrického, hydraulického, pneumatického, tepelného atd., tedy byl vytvořen tzv. mechatronický systém. Tento požadavek vyplývá ze skutečnosti, že v praktické realizaci všechny dílčí systémy pracují společně a vzájemně se ovlivňují. Vzhledem k předmětu a cílům práce je zde kladen důraz na tvorbu simulačních modelů složených ze dvou základních reprezentantů, a to mechanické a elektrické soustavy. Proto jsou v řešeršní části této disertační práce naznačeny způsoby sestavení jejich matematického popisu tak, jak se nezávisle vyvinuly v dané oblasti.

S rozvojem numerické matematiky a informatiky se též utvářel nový přístup při tvorbě simulačních modelů. V této souvislosti byl zaveden termín *počítačová mechanika*, která se vyznačuje tím, že kromě vlastního numerického řešení vytvořeného matematického modelu poskytuje též algoritmy pro jeho automatické sestavení. Jednou z možností takového řešení je použití následujících komerčně dostupných expertních programů NX I-DEAS, MSC.ADAMS, MSC.EASY5 a tomu dat mezi nimi. Tímto přístupem je vytvořeno simulační prostředí pro zkoumání složitých nelineárních mechatronických systémů jako celku.

Klíčová slova: dynamika mechanismů, dynamické vyvažování, setrvačné účinky, vyvažovaná soustava, vyvažující subsystém, seizmická hmota, mechatronický systém, matematické a fyzikální modelování, počítačová mechanika

Annotation

Balancing of Inertia Effects of Bodies During Periodical Reversing Motion

The main theme of the submitted thesis is the field of mechanics that is involved in balancing the inertia effects of bodies or mechanical systems, as the case may be. In particular, the aim of balancing is to decrease or totally eliminate the dynamic effects of moving mass bodies in such a way that a decrease of the needed drive input and further a decrease of the power load of the mechanical system as a whole can occur. The process of balancing is carried out with regard to achieving a steady running of the mechanical system by linking the balancing subsystems to the balanced system. The particular balancing subsystems are composed from inertia mass and a flexible element through which seismic mass is interconnected with the balanced mechanical system. In steady running, the motion of the balancing mass is contra-rotating to the periodical reversing motion of a body whose inertia effects are being balanced. In order to achieve an effective process of balancing it is necessary to design the parameters of balancing subsystems correctly, i.e., weight and inertia matrix of balancing mass and flexible element stiffness. For this purpose, mathematical relations have been derived and the methods for their computations have been proposed. Those parameters are determined in dependence on the working frequency of the given machine, the course of law of motion of the working link of a system and its geometrical and mass characteristics.

The process of balancing itself and its application for mechanical systems can be regarded as an integral part of the reality. That part of the reality that is described is termed as an object. In order to describe the object correctly, a good model of the given object is to be created. In this work, attention is paid to the theoretical way of model creation namely. This creation method goes out from physical rules of law above all on the basis of which relations between the quantities which are determinant from the point of view of knowledge are sought. It concerns a mathematical and physical analysis. The model of an object created on its basis may be complicated and non-effective, but for its impartial description it is necessary that it is mathematically and physically described and solved as a whole, i.e., inclusive its particular subsystems: mechanical, electrical, hydraulic, pneumatic, thermal etc., thus, a mechatronic system is created. This requirement results from the fact that in practical implementation, all particular systems work together and interact mutually. Regarding the subject and the goals of the thesis, stress is laid on the creation of simulation models composed from two basic representatives, i.e., mechanical and electrical systems. Therefore, in the search part of this work the methods of creating their mathematical description are indicated in such a way that they are independently developed in the given field.

When developing numerical mathematics and informatics, a new approach to the creation of simulation models has been generated. In this connection, *computing mechanics* is spoken about which is characterized by the fact that in addition to a proper numerical solution of the created mathematical model it provides algorithms for its automatic completion as well. One of the possibilities of such a solution is the use of commercially available NX I-DEAS, MSC.ADAMS, MSC.EASY5 expert programmes and data flow between them. By this approach, a simulation environment for examining complicated non-linear mechatronic systems as a whole can be created.

Keywords: mechanism dynamics, dynamic balancing, inertia effects, balanced system, balancing subsystem, seismic mass, mechatronic system, mathematical and physical simulation, computing mechanics

Předmluva

Předkládaná disertační práce je dovršením mého doktorského studia na Katedře mechaniky, pružnosti a pevnosti Fakulty strojní Technické Univerzity v Liberci. Jedná se o teoretickou práci z oboru aplikovaná mechanika, která zpracovává problematiku vyvažování setrvačných účinků mechatronických systémů. V rámci této problematiky je též řešen problém uvedení takové soustavy s vyvažováním do ustáleného chodu.

Na tomto místě bych rád poděkoval všem lidem, kteří přispěli ke vzniku této práce ať už radou, připomínkami, konkrétní pomocí nebo morální podporou.

Děkuji svému školiteli Doc. Ing. Rudolfu Vrzalovi, CSc. za odborné a organizační vedení mého studia.

Upřímné poděkování náleží Petru Karlovi za poskytnuté rady, podnětné připomínky a zájem o mou práci.

Tato práce by nevznikla bez pochopení a morální podpory mých rodičů a nejbližších rodinných příbuzných po celou dobu mého doktorského studia, za což jim srdečně děkuji.

Tato disertační práce vznikla za podpory projektu v rámci Výzkumného centra „Textil II“ 1M0553.

V Liberci, září 2009

Jiří Ondrášek

Obsah

Anotace	V
Annotation	VI
Předmluva	VII
Seznam obrázků	XI
Seznam tabulek	XIII
Seznam použitých symbolů	XIV
1 Úvod	19
1.1 Předmět a cíle práce.....	20
1.2 Členění práce.....	20
2 Rešeršní část	22
2.1 Vyvažování těles a tlumení kmitů.....	22
2.2 Matematický popis vázaného mechanického systému.....	25
2.3 Matematický popis synchronního motoru s permanentními magnety.....	29
2.3.1 Matematický model synchronního motoru s permanentními magnety ve vektorovém tvaru.....	29
2.3.2 Napěťové rovnice synchronního motoru v komplexním tvaru.....	30
2.3.3 Řídicí struktura pohonu se synchronním motorem v rotujících souřadnicích.....	33
2.4 Skládání abstraktních dynamických systémů.....	37
2.5 Virtuální modelování vázaných mechanických systémů při použití CAx.....	37
3 Návrh dynamického vyvážení	41
3.1 Vyvažující subsystémy.....	41
3.1.1 Parametry vyvažujících subsystémů.....	43
3.1.2 Kriterium střední hodnoty kinetické energie.....	45
3.1.3 Kriterium efektivních hodnot momentu setrvačné dvojice.....	46
3.1.4 Vyjádření hnacího momentu.....	47
3.1.5 Docílení ustáleného chodu systému.....	48
3.2 Pružné elementy.....	51
3.3 Kritéria stupně vyvážení setrvačných účinků.....	53
4 Simulační modely	55
4.1 Matematické modely mechanismů.....	55
4.1.1 Vačkový mechanismus.....	56
4.1.2 Čtyřkloubový mechanismus.....	58
4.2 Zdvihové závislosti.....	60
4.2.1 Zdvihová závislost vačkového mechanismu VM_1.....	61
4.2.2 Zdvihová závislost vačkového mechanismu VM_2.....	62
4.2.3 Zdvihová závislost čtyřkloubového mechanismu.....	63
4.3 Parametry vyvažujících subsystémů.....	65
4.4 Modely pružných elementů vyvažujících subsystémů.....	68
4.5 Model pohonu.....	69
4.6 Parametry rozběhu mechanických systémů.....	71

5 Výsledky simulací	75
5.1 Vačkový mechanismus VM_1	76
5.1.1 Přehled výsledků simulací	76
5.1.2 Zkrut torzních tyčí	80
5.1.3 Průběhy elektrických proudů	82
5.2 Vačkový mechanismus VM_2	83
5.3 Čtyřkloubový mechanismus	85
5.3.1 Přehled výsledků simulací	85
5.3.2 Zkrut torzních tyčí	89
5.4 Zhodnocení	89
5.4.1 Rozšíření intervalu použitelnosti	92
6 Závěr	95
Seznam použité literatury	97
Přílohy	99
A Metoda lineární Parkovy transformace	99
A.1 Prostorové fázory	99
A.2 Parkova transformace	100
A.3 Transformace do rotujících souřadnic	101
B Fourierova řada	102
C Laplaceova transformace	104
C.1 Pravidla Laplaceovy transformace	104
D Diagramy a nomogramy	106
E Katalogové listy motorů Siemens	108
E.1 Siemens 1FT6108-8AF7	108
E.2 Siemens 1FT6108-8SF7	110
F Parametry simulačních modelů	112
F.1 Vačkový mechanismus VM_1	112
F.2 Vačkový mechanismus VM_2	113
F.3 Čtyřkloubový mechanismus	114

Seznam obrázků

Obrázek	Název	Strana
1.2	<i>Blokové schéma mechatronického systému</i>	19
2.1	<i>Rotující těleso</i>	22
2.2	<i>Statické módy deformace tělesa</i>	26
2.3	<i>Vlastní tvary kmitů tělesa</i>	27
2.4	<i>Náhradní schéma synchronního motoru s permanentními magnety</i>	30
2.5	<i>Prostorový fázor statorového proudu</i>	31
2.6	<i>Blokové schéma modelu synchronního motoru s permanent. magnety</i>	32
2.7	<i>Fázorový diagram synchronního motoru řízeného na max. moment</i>	33
2.8	<i>Kaskádní regulační obvod s proudovou, otáčkovou a polohovou z. v.</i>	34
2.9	<i>Blokové schéma mechatronického systému</i>	37
2.10	<i>Blokové schéma možného toku dat mezi programy</i>	38
3.1	<i>Blokové schéma vyvažované soustavy</i>	42
3.2	<i>Blokové schéma mech. soustavy s připojením vyvažujících subsystémů</i>	42
3.3	<i>Úhlová natočení</i>	48
3.4	<i>Čtyřkloubový mechanismus s vyvažováním</i>	50
3.5	<i>Vačkový mechanismus s vyvažováním</i>	51
3.6	<i>Torzni tyč</i>	52
4.1	<i>Vačkový mechanismus</i>	56
4.2	<i>Vačkový mechanismus s vyvažováním</i>	57
4.3	<i>Čtyřkloubový mechanismus</i>	58
4.4	<i>Ojnice</i>	59
4.5	<i>Čtyřkloubový mechanismus s vyvažováním</i>	60
4.6	<i>Převodové funkce vačkového mechanismu VM_1</i>	62
4.7	<i>Převodové funkce vačkového mechanismu VM_2</i>	63
4.8	<i>Převodové funkce čtyřkloubového mechanismu</i>	64
4.9	<i>Torzni tyč</i>	67
4.10	<i>Detail konce FEM-modelu torzni tyče</i>	69
4.11	<i>Žádaný pohyb hnacího členu</i>	73
4.12	<i>Úhlová natočení vyvažované a vyvažujících hmot</i>	73
4.13	<i>Úhlová natočení</i>	74
5.1	<i>Hnací moment VM_1, rozběh, $n_R=600 \text{ ot min}^{-1}$</i>	77
5.2	<i>Hnací moment VM_1, ustálený chod, $n_R=600 \text{ ot min}^{-1}$</i>	77
5.3	<i>Hnací moment VM_1, rozběh, $n_R=750 \text{ ot min}^{-1}$</i>	77
5.4	<i>Hnací moment VM_1, ustálený chod, $n_R=750 \text{ ot min}^{-1}$</i>	78
5.5	<i>Otáčky vačkové hřídele VM_1, $n_R=600 \text{ ot min}^{-1}$</i>	78
5.6	<i>Otáčky vačkové hřídele VM_1, $n_R=750 \text{ ot min}^{-1}$</i>	79
5.7	<i>Silové zatížení vačkového mechanismu VM_1, $n_R=600 \text{ ot min}^{-1}$</i>	79
5.8	<i>Silové zatížení vačkového mechanismu VM_1, $n_R=750 \text{ ot min}^{-1}$</i>	80
5.9	<i>Časový průběh zkrutu torzních tyčí VM_1, $n_R=600 \text{ ot min}^{-1}$</i>	81
5.10	<i>Rozložení tečného napětí torzni tyče, $k_t=1979 \text{ Nm}$</i>	81
5.11	<i>Průběh statorových proudů – bez vyvažování</i>	82
5.12	<i>Průběh statorových proudů – vyvažování první harmonické složky</i>	82
5.13	<i>Průběh statorových proudů – vyvažování druhé harmonické složky</i>	83
5.14	<i>Průběh statorových proudů – vyvažování 1. & 2. harmonické složky</i>	83

Obrázek	Název	Strana
5.15	Hnací moment VM_2, ustálený chod, $n_R=600 \text{ ot min}^{-1}$	84
5.16	Otáčky vačkové hřídele VM_2, $n_R=600 \text{ ot min}^{-1}$	84
5.17	Silové zatížení vačkového mechanismu VM_2, $n_R=600 \text{ ot min}^{-1}$	85
5.18	Hnací moment čtyřkloubového mech., rozběh, $n_R=600 \text{ ot min}^{-1}$	86
5.19	Hnací moment čtyřkloubového mech., ustálený chod, $n_R=600 \text{ ot min}^{-1}$	86
5.20	Hnací moment čtyřkloubového mech., rozběh, $n_R=750 \text{ ot min}^{-1}$	86
5.21	Hnací moment čtyřkloubového mech., ustálený chod, $n_R=750 \text{ ot min}^{-1}$	87
5.22	Otáčky kliky čtyřkloubového mechanismu, $n_R=600 \text{ ot min}^{-1}$	87
5.23	Otáčky kliky čtyřkloubového mechanismu, $n_R=750 \text{ ot min}^{-1}$	88
5.24	Silové zatížení čtyřkloubového mechanismu, $n_R=600 \text{ ot min}^{-1}$	88
5.25	Silové zatížení čtyřkloubového mechanismu, $n_R=750 \text{ ot min}^{-1}$	89
5.26	Vačkový mechanismus VM_1-FIX, vyvažující hmoty fixovány	92
A.1	Prostorový fázor statorového proudu	98
A.2	Transformace souřadných systémů	100
D.1	Nomogram k určení součinitele tvaru α	105
D.2	Diagram k určení součinitele vrubové citlivosti q	105
D.3	Diagram k určení součinitele vlivu velikosti ε_v	106
D.4	Diagram k určení součinitele jakosti povrchu η_p	106
E.1	Technické parametry elektromotoru Siemens 1FT6108-8AF7	107
E.2	Momentová charakteristika elektromotoru Siemens 1FT6108-8AF7	108
E.3	Technické parametry elektromotoru Siemens 1FT6108-8SF7	109
E.4	Momentová charakteristika elektromotoru Siemens 1FT6108-8SF7	110

Seznam tabulek

Tabulka	Název	Strana
2.1	<i>Hodnoty nastavení konstant regulátorů dle metody kritického zesílení</i>	36
3.1	<i>Analogie mezi rotačním a posuvným pohybem</i>	41
4.1	<i>Základní charakteristiky vačkových mechanismů</i>	57
4.2	<i>Koeficienty zdvihové závislosti vačkového mechanismu VM_1</i>	62
4.3	<i>Koeficienty zdvihové závislosti vačkového mechanismu VM_2</i>	63
4.4	<i>Koeficienty zdvihové závislosti čtyřkloubového mechanismu</i>	64
4.5	<i>Parametry vyvažujících subsystémů vačkového mechanismu VM_1</i>	66
4.6	<i>Parametry vyvažujících subsystémů vačkového mechanismu VM_2</i>	66
4.7	<i>Parametry vyvažujících subsystémů čtyřkloubového mechanismu</i>	66
4.8	<i>Jmenovité parametry torzních tyčí</i>	68
4.9	<i>Parametry motorů Siemens a řídicí struktury</i>	70
4.10	<i>Výchozí úhlová natočení seizmických hmot</i>	71
4.11	<i>Spouštěcí časy vyvažujících hmot</i>	72
5.1	<i>Hnací moment vačkového mechanismu VM_1</i>	76
5.2	<i>Nerovnoměrnost chodu vačkového mechanismu VM_1</i>	78
5.3	<i>Reakce v obecné kinematické dvojici vačkového mechanismu VM_1</i>	79
5.4	<i>Zkrut torzních tyčí vačkového mechanismu VM_1, ustálený stav</i>	80
5.5	<i>Kriteria stupně vyvážení vačkového mechanismu VM_2</i>	84
5.6	<i>Hnací moment čtyřkloubového mechanismu</i>	85
5.7	<i>Nerovnoměrnost chodu čtyřkloubového mechanismu</i>	87
5.8	<i>Reakce v kinematické dvojici čtyřkloubového mechanismu</i>	88
5.9	<i>Zkrut torzních tyčí čtyřkloubového mechanismu</i>	89
5.10	<i>Hnací moment vačkového m. VM_1-FIX, vyvažující hmoty fixovány</i>	92
5.11	<i>Nerovnoměrnost chodu vač. m. VM_1-FIX, vyvažující hmoty fixovány</i>	92
5.12	<i>Zatížení vačkového mech. VM_1-FIX, vyvažující hmoty fixovány</i>	93
C.1	<i>Slovník obrazů některých běžně se vyskytujících funkcí</i>	104
F.1	<i>Parametry vyvažujících subsystémů vačkového mechanismu VM_1</i>	111
F.2	<i>Koeficienty zdvihové závislosti vačkového mechanismu VM_2</i>	112
F.3	<i>Parametry vyvažujících subsystémů vačkového mechanismu VM_2</i>	112
F.4	<i>Koeficienty zdvihové závislosti čtyřkloubového mechanismu</i>	114
F.5	<i>Parametry vyvažujících subsystémů čtyřkloubového mechanismu</i>	114

Seznam použitých symbolů

Symbol	Jednotka	Popis
a	$[m]$	vzdálenost rotačních os
a_x	$[m]$	vzdálenost rotačních os ve vertikálním směru
a_y	$[m]$	vzdálenost rotačních os v horizontálním směru
$\mathbf{a}$		vektor zrychlení
A_i	$[rad]$	koeficienty kosinových složek Fourierova rozvoje
b	$[m]$	délka vahadla
b_{ri}	$[-]$	poměrný útlum
B_i	$[rad]$	koeficienty sinových složek Fourierova rozvoje
c_i	$[-]$	součinitel modálního tlumení
c_i^{cr}	$[-]$	součinitel kritického tlumení
d_i	$[Nm\ s^{-1}]$	koeficienty viskózního tlumení
d_t	$[m]$	průměr dané torzní tyče
D	$[m]$	průměr kladky
$D_{\xi\eta}, D_{\xi\zeta}, D_{\eta\zeta}$	$[kg\ m^2]$	deviační momenty setrvačnosti
$\bar{D}$		d'Alembertova setrvačná síla
$\mathbf{D}$		matice tlumení
$e(t)$		regulační odchylka
E	$[Pa]$	Youngův modul pružnosti v tahu/tlaku
E_k	$[J]$	kinetická energie soustavy
E_{nk}	$[J]$	kinetická energie odpovídající příslušné harmonické složce
E_p	$[J]$	potenciální energie soustavy
$\bar{E}_k$	$[J]$	střední hodnota kinetické energie
$\mathbf{E}$		jednotková matice
f	$[Hz]$	frekvence napájecího napětí
f_i	$[Hz]$	vlastní frekvence netlumeného systému
$\mathbf{f}^g$		vektor gravitačních sil
$\mathbf{f}^v$		vektor vazbových podmínek
g	$[m\ s^{-2}]$	gravitační zrychlení
G	$[Pa]$	Youngův modul pružnosti ve smyku
i	$[-]$	počet stupňů volnosti
i_U, i_V, i_W	$[A]$	okamžité fázové proudy
i, j		imaginární jednotka
I	$[kg\ m^2]$	moment setrvačnosti vyvažovaného tělesa
I_d	$[A]$	d -složka fázoru proudu
I_m	$[A]$	amplituda proudu
I_q	$[A]$	q -složka fázoru proudu
I_{red}	$[kg\ m^2]$	moment setrvačnosti hnacího členu
I_{rotor}	$[kg\ m^2]$	moment setrvačnosti rotoru elektromotoru
I_ξ, I_η, I_ζ	$[kg\ m^2]$	momenty setrvačnosti
$\mathbf{i}_s$	$[A]$	vektor statorových proudů
$\mathbf{I}$		matice setrvačnosti
$\bar{\mathbf{I}}^s$		komplexní prostorový fázor proudu
J_l	$[kg\ m^2]$	moment setrvačnosti daného vyvažujícího tělesa

Symbol	Jednotka	Popis
J_p	$[m^4]$	polární kvadratický moment průřezu
J		Jacobiho matice
k_l	$[N\,m^{-1}]$	tuhost daného pružného elementu
k_{tl}	$[N\,m\,rad^{-1}]$	torzní tuhost daného pružného elementu
K		proporcionální složka PID regulátoru
K_E	$[V\,s]$	napěťová konstanta synchronního servomotoru
K_I	$[VA^{-1}]$	proporcionální složka regulátoru proudu
K_M	$[N\,m\,A^{-1}]$	momentová konstanta synchronního servomotoru
K_φ	$[s^{-1}]$	proporcionální složka regulátoru polohy
K_ω	$[A\,s\,rad^{-1}]$	proporcionální složka regulátoru rychlosti
K		matice tuhosti
K_e		matice tuhosti poddajného tělesa
K_t		matice tuhosti vyvažujících subsystémů
$\tilde{K}_e$		zobecněná matice tuhosti poddajného tělesa
l	$[m]$	délka ojnice
l_l	$[m]$	délka dané torzní tyče
l_{tl}	$[m]$	činná délka dané torzní tyče
L_d	$[H]$	indukčnost statorového vinutí v podélné ose
L_q	$[H]$	indukčnost statorového vinutí v příčné ose
L_s	$[H]$	rozptylová indukčnost jedné fáze statorového vinutí
m	$[kg]$	hmotnost vyvažovaného tělesa
M	$[N\,m]$	elektromagnetický moment motoru
$M_h(t)$	$[N\,m]$	hnací moment pohonu
M_{hEff}	$[N\,m]$	efektivní hodnota hnacího momentu pohonu
M_k	$[N\,m]$	krouticí moment
M_l	$[m]$	hmotnost daného vyvažujícího tělesa
M		matice hmotnosti
M_e		matice hmotnosti poddajného tělesa
M_t		matice hmotnosti vyvažujících subsystémů
$\tilde{M}_e$		zobecněná matice hmotnosti poddajného tělesa
$\bar{M}_O^D$		d'Alembertova setrvačná silová dvojice
n	$[ot\,min^{-1}]$	otáčky hnacího členu
n_{max}	$[ot\,min^{-1}]$	maximální hodnota otáček hnacího členu
n_{min}	$[ot\,min^{-1}]$	minimální hodnota otáček hnacího členu
n_R	$[ot\,min^{-1}]$	pracovní otáčky
$\bar{n}$	$[ot\,min^{-1}]$	střední hodnota otáček hnacího členu
N		modální matice
O		nulový vektor
p		nelineární mechanický převod
p	$[m]$	délka kliky
p_p	$[-]$	počet pólových dvojic
P_{nM}		střední hodnota výkonu příslušné harmonické složky momentu setrvačné dvojice
P_M		střední výkon momentu setrvačné dvojice
p		vektor Eulerových parametrů
q	$[m]$	délka vahadla
q_k	$[m], [rad]$	zobecněná souřadnice

Symbol	Jednotka	Popis
q_t		součinitel vrubové citlivosti
Q_k	$[N], [Nm]$	zobecněná síla
$\mathbf{q}$		vektor zobecněných souřadnic
$\mathbf{q}_e$		vektor elastických (normovaných modálních) souřadnic
$\mathbf{q}_\varphi$		vektor úhlových natočení vyvažujících hmot
$\mathbf{q}_y$	$[m], [rad]$	vektor zobecněných posuvů vyvažujících těles
$\mathbf{q}$		vektor modálních souřadnic
$\mathbf{Q}$		vektor zobecněných sil
r	$[-]$	počet nezávislých souřadnic
r_{-1}		integrační složka PID regulátoru
r_0		proporcionální složka PID regulátoru
r_1		derivační složka PID regulátoru
r_{krit}		kritické zesílení
r_S	$[m]$	vzdálenost středu hmotnosti vyvažovaného členu od osy rotace
r_ω	$[-]$	zesílení rychlostního feedforwardu
$\vec{r}$		polohový vektor obecného bodu
$\vec{r}_S$		polohový vektor středu hmotnosti
R_d	$[J]$	Rayleighova disipativní energie soustavy
R_s	$[\Omega]$	odpor jedné fáze statorového vinutí
$\mathbf{r}$		vektor souřadnic
$ R_j $	$[N]$	velikost reakce v kinematické vazbě
$ R_j _{\max}$	$[N]$	maximální hodnota velikosti reakce
s	$[-]$	počet závislých souřadnic
s	$[m]$	posuv vyvažovaného tělesa
t	$[s]$	čas
T_d	$[s]$	derivační časová konstanta PID regulátoru
T_i	$[s]$	integrační časová konstanta PID regulátoru
T_{iI}	$[s]$	integrační časová konstanta regulátoru proudu
$T_{i\omega}$	$[s]$	integrační časová konstanta regulátoru rychlosti
T_{krit}	$[s]$	perioda kmitů na mezi stability
$u(t)$		akční veličina
u_U, u_V, u_W	$[V]$	okamžitá fázová napětí
U_d	$[V]$	d -složka fázoru napětí
U_i	$[V]$	indukované napětí
U_m	$[V]$	amplituda napětí
U_p	$[kgm]$	velikost nevývažku
U_q	$[V]$	q -složka fázoru napětí
$\mathbf{u}$		vektor fyzikálních souřadnic poddajného tělesa
$\mathbf{u}_s$	$[V]$	vektor statorových napětí
$\bar{\mathbf{U}}^s$		komplexní prostorový fázor napětí
$\mathbf{V}$		modální matice
$w(t)$		požadovaná veličina
W	$[J]$	virtuální práce
W_k	$[m^3]$	průřezový modul v krutu
x_l	$[m]$	posuv daného vyvažujícího tělesa
$y(t)$		skutečná veličina

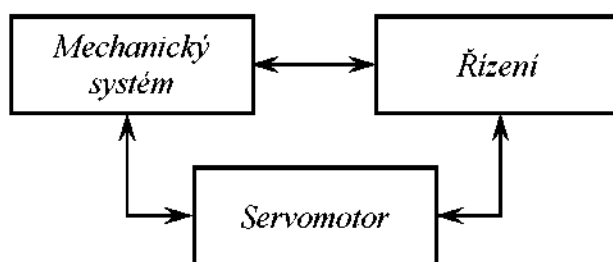
Symbol	Jednotka	Popis
α	$[rad], [^\circ]$	úhel, který je svírán vahadly
α_t		součinitel tvaru
$\tilde{\alpha}$		vektor úhlového zrychlení
β_t		součinitel vrubové citlivosti
γ		vektor modálních souřadnic
δ		nerovnoměrnost chodu
δ_5	$[-]$	tažnost
ε_{bt}		součinitel bezpečnosti
ε_{vt}		součinitel vlivu velikosti části
η_{Pt}		součinitel jakosti povrchu
θ	$[rad]$	elektrický úhel, který vyjadřuje vzájemné natočení rotoru a statoru
ϑ	$[rad], [^\circ]$	úhlové natočení vyvažovaného tělesa
$\vartheta_{\max}$	$[rad], [^\circ]$	zdvih
λ		vektor Lagrangeových multiplikátorů
μ		Poissonův poměr
ξ_l	$[rad]$	zkrut dané torzní tyče
ρ	$[kg\ m^{-3}]$	hustota
$\vec{\rho}$		vektorová vzdálenost obecného bodu od osy rotace tělesa
$\vec{\rho}_s$		vektorová vzdálenost středu hmotnosti od osy rotace
$\sigma_{0,2}$	$[Pa]$	smluvní mez kluzu
σ_{Pt}	$[Pa]$	mez pevnosti
σ_{red}	$[Pa]$	redukované napětí
τ_l	$[Pa]$	tečné napětí dané torzní tyče
τ_C	$[Pa]$	mez únavy v krutu
τ_E	$[s]$	elektrická časová konstanta elektromotoru
τ_M	$[s]$	mechanická časová konstanta elektromotoru
φ^*	$[rad], [^\circ]$	úhlové natočení hnacího členu
φ^*	$[rad], [^\circ]$	žádaný průběh úhlového natočení
Φ		nodální matice
Φ_e		báze ortogonálních deformačních módů pružného tělesa
ψ_l	$[rad], [^\circ]$	úhlové natočení daného vyvažujícího tělesa
ψ_m	$[Wb]$	magnetický tok
Ψ_s	$[Wb]$	vektor spřaženého magnetického toku
$\bar{\Psi}^s$		komplexní prostorový fázor spřaženého mg. toku
ω	$[rad\ s^{-1}]$	mechanická úhlová rychlost
ω_R	$[rad\ s^{-1}]$	pracovní úhlová rychlost
ω_0	$[rad\ s^{-1}]$	úhlová frekvence napájecího napětí, resp. proudu, úhlová rychlost točivého magnetického pole
ω^*	$[rad\ s^{-1}]$	žádaný průběh úhlové rychlosti
Ω	$[rad\ s^{-1}]$	jmenovitá úhlová frekvence
$\vec{\omega}$		vektor úhlové rychlosti
Ω_{0l}	$[rad\ s^{-1}]$	vlastní úhlová frekvence daného vyvažujícího subsystému
Ω_l	$[rad\ s^{-1}]$	vlastní úhlová frekvence netlumeného systému
Ω_0		spektrální matice

1 Úvod

Je všeobecně známo, že při chodu mechanismů vznikají dynamické síly, které jsou příčinou kmitání a zvýšeného zatížení, což omezuje jejich využitelnou pracovní frekvenci. Tedy jsou příčinou většího opotřebení a snížení životnosti. Proto je snaha dynamické síly u většiny strojních zařízení co nejvíce omezit. Setrvačné účinky pohybujících se členů mechanického systému jsou dány rozložením hmot, pasivních odporů, poddajnosti a kinematikou mechanismu. Postup, kterým dochází ke snížení, případně i úplnému odstranění setrvačných účinků, je označován jako vyvažování. Tyto účinky se často vyvažují úpravou rozložení hmot, úpravou tvaru budící funkce, úpravou rozložení tuhosti nebo připojením kmitajícího subsystému. V posledně zmiňovaném způsobu vyvážení se setrvačné účinky jednotlivých těles nebo výsledné setrvačné účinky více těles vyvažují setrvačnými účinky jednotlivých vyvažovacích těles nebo setrvačnými účinky více vyvažovacích těles. Protože jsou dynamické síly obvykle deterministického charakteru, je možné již při samotném návrhu daného mechanického systému stanovit s jistou přesností jejich průběh a příslušné účinky. Věrohodnost teoretického vyjádření dynamických sil úzce souvisí s tvorbou simulačních modelů.

Na proces vyvažování a jeho aplikaci na mechanické systémy lze nahlížet jako na součást reality. Ta část reality, která je popisována, se nazývá objekt. Aby byl objekt dobře popsán, je nutné vytvořit dobrý model daného objektu nebo procesu, který se vytváří za účelem odhadu jeho chování v praktické realizaci či dalším vývojovém stádiu. Existují v podstatě dva způsoby tvorby modelů, a to teoretický a experimentální. V této práci je především věnována pozornost teoretickému způsobu tvorby modelů.

Při tomto způsobu tvorby modelů se využívá především fyzikálních, ale i ekonomických a jiných zákonitostí a na jejich základě se hledají vztahy mezi veličinami, které jsou určující z hlediska poznání. Jedná se o matematicko-fyzikální analýzu. Model objektu vzniklý na jejím základě může být složitý a neefektivní a pro jeho praktickou použitelnost je nutné zavádět jistá přípustná zjednodušení. Složité soustavy mnoha těles lze v mnoha případech nahradit mechanickými modely jednotlivých subsystémů skládajících se v ideálním případě z tuhých těles spojených kinematickými dvojicemi. Avšak v reálném případě jsou jednotlivé členy těchto systémů poddajné a kinematické vazby obsahují vůle a pasivní odpory, které velmi často nelze v řešení zanedbat.



Obr. 1.1: Blokové schéma mechatronického systému

Pro objektivní popis analyzovaného objektu je nezbytné, aby byl matematicky a fyzikálně modelován a řešen jako celek včetně jeho subsystémů: mechanického, elektrického, hydraulického, pneumatického, tepelného atd., tedy byl vytvořen tzv. mechatronický systém, jehož možné blokové schéma je ukázáno na *Obr. 1.1*. Tento požadavek vyplývá ze skutečnosti, že v praktické realizaci všechny dílčí systémy pracují společně a vzájemně se ovlivňují – interagují. Například komplexní řešení mechanického systému včetně jeho pohonu a regulace (mechatronický systém) umožní predikovat, hodnotit a modelově vyzkoušet všechny možné stavy chodu vznikajícího stroje nebo zařízení. Tím je možno vyhnout se

nepředvídatelným situacím, které v praxi vývoj strojních zařízení podstatně zpomalují a prodražují. To přináší časové i finanční úspory. Modelování tedy patří k důležitým nástrojům inženýrského navrhování.

Pro úplnost je nutné doplnit, že druhý způsob tvorby systému je založen na měření provedeném na reálném objektu, rozboru získaných dat a určení vztahů mezi veličinami. Tento způsob vytváření modelu objektu se nazývá experimentální identifikace. Efektivním způsobem tvorby modelů je kombinace teoretického a experimentálního přístupu.

Ke snadnějšímu a rychlejšímu sestavení matematického popisu daného problému a jeho následného řešení v současné době existují robustní nástroje počítačové techniky. Například do algoritmů na řešení dynamiky strojů jsou již běžně včleňovány konečněprvkové moduly, které umožňují efektivnější analýzu poddajných těles. Dále pak moduly určené k implementaci modelu pohonu a řídicích struktur atp. Tímto přístupem je vytvořeno simulační prostředí pro zkoumání složitých nelineárních mechatronických systémů jako celku.

1.1 Předmět a cíle práce

Hlavním předmětem disertační práce je oblast mechaniky, která se zabývá vyvažováním setrvačných účinků těles nebo mechanických systémů. Setrvačné účinky mechanických soustav jsou vyvažovány připojením vyvažujících subsystémů, přičemž tato problematika je řešena s cílem dosáhnout ustáleného chodu mechanických systémů s vyvažováním.

Z předchozích úvah vyplývají následující základní cíle disertační práce:

1. Tvorba matematického modelu mechanického systému s připojením vyvažujících subsystémů. Vyvažující subsystémy jsou určeny k vyvážení setrvačných účinků těles konajících vratný periodický pohyb.
2. Vytvoření metodiky stanovení parametrů vyvažujících subsystémů.
3. Vyřešení způsobu dosažení ustáleného chodu mechanické soustavy s připojením vyvažujících subsystémů.
4. Ověření postupu určení parametrů vyvažujících subsystémů a způsobu dosažení ustáleného chodu na simulačních modelech. Výpočetní modely budou vytvářeny tak, aby co nejvěrněji popisovaly reálný mechanický systém. Budou respektovat významné poddajnosti mechanického systému, bude do nich začleněn matematický popis pohonu a řídicí struktury atp. Tedy bude vytvořen matematický model relativně složitého nelineárního mechatronického systému za účelem odhadu jeho dynamického chování a vlastností v praktické realizaci.

1.2 Členění práce

Při psaní této práce byla snaha o logické a chronologické řazení jednotlivých kapitol a odstavců tak, aby se v textu vyskytovalo co nejméně odkazů na jiné statě obsažených v disertační práci.

Kapitola 2 je věnována všeobecnému přehledu vyvažování těles, především při rotačním pohybu. Jsou zde dále uvedeny základní informace týkající se přístupu při tvorbě modelů vázaných mechanických systémů s uvažováním poddajných členů. Je zde též obsažen matematický popis synchronního servomotoru s permanentními magnety na rotoru a jeho řídicí struktury. V této kapitole je naznačen postup spojování abstraktních dynamických systémů. V závěru kapitoly je uveden přehled a vlastnosti expertních systémů využívaných při řešení problematiky v aplikované mechanice.

Stěžejní třetí kapitola pojednává o problematice vyvažování setrvačných účinků mechanických systémů, kdy pracovní člen vykonává periodický vratný pohyb. Jsou zde odvozeny matematické vztahy k jednoznačnému určení parametrů jednotlivých vyvažujících subsystémů. Dále je věnována pozornost vlastnímu dosažení ustáleného stavu systému s vyvažováním.

Kapitola 4 obsahuje popis simulačních modelů a předpoklady, za kterých probíhalo jejich řešení užitím expertních systémů MSC.ADAMS, MSC.EASY5 a I-DEAS 12 NX. Na těchto modelech byly ověřovány poznatky a závěry obsažené ve třetí kapitole.

V páté kapitole jsou uvedeny stěžejní výsledky jednotlivých výpočtů a provedena jejich analýza.

Poslední závěrečná kapitola shrnuje poznatky a výsledky získané řešením problematiky dynamického vyvažování mechanických soustav a dává doporučení pro další řešení a využití.

V přílohách je uveden základní matematický aparát, na jehož základě byly odvozovány některé výpočtové vztahy. Dále obsahují diagramy a nomogramy potřebné k určení příslušných součinitelů, které se vyskytují ve vztazích ke stanovení meze únavy. Jsou zde též uvedeny katalogové listy vybraných elektromotorů Siemens a souhrnný přehled výpočetních parametrů jednotlivých matematických modelů analyzovaných systémů.

2 Rešeršní část

Při pohybu těles vznikají síly dynamického původu, které se prostřednictvím reakcí přenášejí do rámu strojního zařízení. Mají nežádoucí účinky, jako např. způsobují přídavné namáhání, kmitání, hluk atp. Snahou vývojových pracovníků a konstruktérů je omezit, případně odstranit tyto účinky vhodným rozložením hmot pohybujících se členů mechanického systému, optimalizací zdvihové závislosti pracovního členu nebo připojením vyvažujících kmitajících subsystémů.

Vzhledem k předmětu a cílům práce je zde kladen důraz na tvorbu simulačních modelů složených ze dvou základních reprezentantů, a to mechanické a elektrické soustavy. Budou uvedeny způsoby sestavení jejich matematického popisu, jak se nezávisle vyvinul v dané oblasti. Podrobnější výklad bude věnován matematickému modelu synchronního motoru s permanentními magnety v rotoru a jeho způsobu řízení, protože tato problematika není zcela běžným předmětem při studiu aplikované mechaniky.

2.1 Vyvažování těles a tlumení kmitů

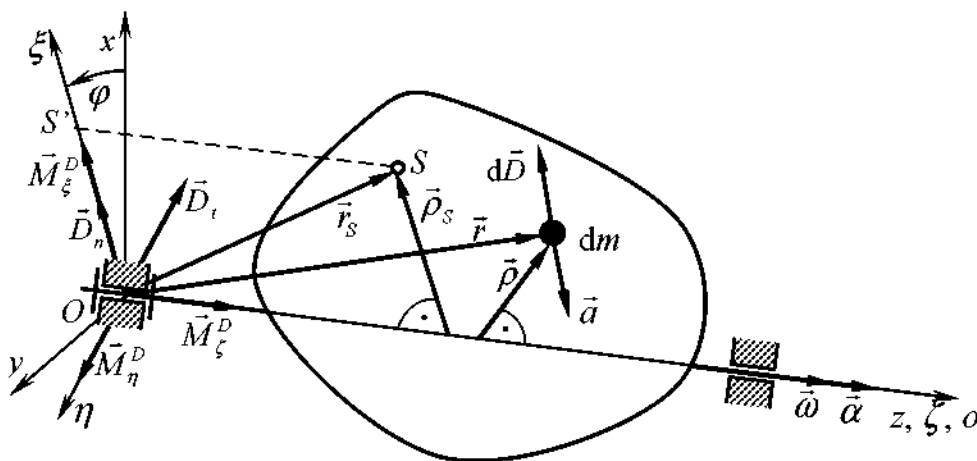
Nechť těleso rotuje úhlovou rychlostí $\vec{\omega}$ a úhlovým zrychlením $\vec{\alpha}$. V prostoru tělesa je zvolen souřadnicový systém $O_{\xi\eta\zeta}$ tak, že střed S hmotnosti leží v rovině $\xi\zeta$ a $o \equiv z \equiv \zeta$. Jeho pohyb je sledován v nepohyblivém systému $Oxyz$, podle **Obr. 2.1**. Na každý element dm hmotnosti tělesa působí za rotace elementární setrvačná síla:

$$d\vec{D} = -\vec{a}dm. \quad (2.1.1)$$

Tyto síly tvoří prostorovou soustavu sil takovou, že všechny elementární síly leží v rovinách kolmých k ose rotace o . Zmíněná prostorová soustava elementárních sil je nahrazena výslednými setrvačnými účinky $\vec{D}$ a $\vec{M}_O^D$ v počátku O . Tyto síly lze dále rozložit:

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \vec{D}_t + \vec{D}_n, \\ \vec{M}_O^D &= \vec{M}_\xi^D + \vec{M}_\eta^D + \vec{M}_\zeta^D. \end{aligned}$$

Protože všechny setrvačné účinky závisejí na rozložení hmoty rotujícího tělesa, lze vhodným uspořádáním, změnou tvaru, přidáním nebo ubráním hmoty docílit toho, aby byly minimalizovány nebo zcela eliminovány, až na setrvačnou dvojici k ose rotace $\vec{M}_\zeta^D$, a k výše uvedeným jevům nedocházelo.



Obr. 2.1: Rotující těleso

Momenty setrvačnosti a deviační momenty charakterizují spolu s hmotností a statickými momenty rozložení hmoty tělesa v prostoru. Jako takové se proto vyskytují i ve výrazech pro dynamické veličiny a v důsledku toho i v příslušných pohybových rovnicích. Jsou funkcí geometrických a hmotnostních parametrů tělesa, říká se jim proto také geometricko-hmotnostní charakteristiky. Na rozdíl od momentů setrvačnosti, které jsou vždy kladné, deviační momenty mohou nabývat kladných, záporných a nulových hodnot. Momenty setrvačnosti a deviační momenty lze souhrnně vyjádřit maticí setrvačnosti:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_{\xi} & -D_{\xi\eta} & -D_{\xi\zeta} \\ -D_{\eta\xi} & I_{\eta} & -D_{\eta\zeta} \\ -D_{\zeta\xi} & -D_{\zeta\eta} & I_{\zeta} \end{bmatrix} = \int_m \begin{bmatrix} \eta^2 + \zeta^2 & -\xi\eta & -\xi\zeta \\ -\eta\xi & \zeta^2 + \xi^2 & -\eta\zeta \\ -\zeta\xi & -\zeta\eta & \eta^2 + \xi^2 \end{bmatrix} dm, \quad (2.1.2)$$

která je maticí symetrického tenzoru druhého řádu – tenzoru setrvačnosti.

Při různé orientaci souřadnicového systému $O_{\xi\eta\zeta}$ v prostoru tělesa dochází ke změnám hodnot deviačních momentů příslušného tělesa od záporných po kladné. Lze tedy najít i takový souřadnicový systém, ke kterému budou deviační momenty nulové. Osy souřadnicového systému, k nimž jsou deviační momenty nulové, se nazývají hlavní osy setrvačnosti. Pokud počátek tohoto souřadnicového systému leží ve středu hmotnosti tělesa, jedná se o hlavní centrální osy setrvačnosti. Momenty setrvačnosti k hlavním osám setrvačnosti nabývají extrémních hodnot (minimum, maximum) a nazývají se hlavní momenty setrvačnosti. Matice setrvačnosti se v tomto případě zjednoduší na tvar:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_{\xi} & 0 & 0 \\ 0 & I_{\eta} & 0 \\ 0 & 0 & I_{\zeta} \end{bmatrix}. \quad (2.1.3)$$

Při určení hlavních os setrvačnosti strojních součástí se využívá toho, že obvykle mají alespoň jednu rovinu symetrie. Má-li homogenní těleso rovinu symetrie $\xi\eta$, pak platí:

$$D_{\xi\zeta} = D_{\eta\zeta} = 0 \quad (2.1.4)$$

a každá přímka kolmá na rovinu symetrie je hlavní osou setrvačnosti. Má-li těleso dvě roviny symetrie, pak jejich průsečnice je hlavní centrální osou setrvačnosti. Je-li těleso rotačně symetrické, tedy má-li osu rotační symetrie, je tato osa hlavní centrální osou setrvačnosti a každé dvě přímky k ní kolmé jsou hlavní osy setrvačnosti pro bod na ose symetrie.

Cílem vyvažování je eliminovat přídavné zatěžující účinky. Tyto přídavné účinky jsou dvojího druhu – silové a momentové. Obojí jsou závislé na úhlové rychlosti $\bar{\omega}$ a úhlovém zrychlení $\bar{\alpha}$. Pro vyvažování je důležité určit, v kolika vyvažovacích rovinách se bude vyvažování provádět a jak velké závaží a kam ho umístit v prostoru vyvažovaného tělesa.

Při statickém vyvažování je snaha vyloučit silové přídavné zatěžující účinky takovým způsobem, že těžiště S rotujícího tělesa bude ležet na ose rotace. Při statickém vyvažování je eliminována tíhová síla, která má podle jedné z definic charakter volného vektoru. Jako taková může měnit libovolně svoje působíště, to znamená, že vyvažovací rovina může být v kterémkoliv místě po délce rotoru. Pro statické vyvažování proto platí, že lze vyvažovat pouze v jedné vyvažovací rovině. Z pohledu statické ekvivalence lze silový účinek jedné síly nahradit silovým účinkem více sil, pak lze staticky vyvažovat i ve více rovinách. Pro vyvažování je zaváděna veličina označovaná pojmem *nevývaha* a pro vzdálenost středu hmotnosti S tělesa od osy rotace nazvané *excentricita*. Statické vyvažování se může provádět buď za klidu, nebo za rotace.

Při čistě dynamickém vyvažování je snaha odstranit momentové přídavné zatěžující účinky. Tyto účinky vznikají, jestliže osa rotace není hlavní osou setrvačnosti. Toto nastává, jsou-li např. na rotoru šikmo nasazeny hmotné kotouče, nehomogenní materiál, atd. V tomto případě je nutné pro nenulové otáčky dosáhnout toho, aby deviační momenty $D_{\xi\zeta}$ a

$D_{\eta\zeta}$ byly nulové. To je cílem dynamického vyvažování. V obou deviačních momentech se vyskytuje osa rotace ζ . To znamená, že pro nulové deviační momenty musí být tato osa rovněž hlavní centrální osou setrvačnosti. Snahou tedy při dynamickém vyvažování je, aby osa rotace byla také hlavní osou setrvačnosti. Vzhledem k tomu, že jsou vyvažovány momentové účinky, které lze modelovat jako silové dvojice, musí být vyvažování prováděno minimálně ve dvou vyvažovacích rovinách. Z pohledu statiky představuje moment dvojici sil, což jsou dvě stejně velké síly na rovnoběžných nositelkách a opačně orientované. Dvě nositelky tak představují minimálně dvě vyvažovací roviny. Stejně jako v případě ekvivalence u sil, platí i ekvivalence u momentů, pak lze dynamicky vyvažovat i ve více rovinách. Toto vyvažování se provádí vždy za rotace.

Souhrnně lze konstatovat, že cílem statického a dynamického vyvažování, které mimo jiné představuje snížení dynamického zatížení v ložiskách na minimální hodnotu, je dosažení takového stavu, aby osa rotace byla hlavní centrální osou setrvačnosti. Problematika tohoto způsobu vyvažování je podrobně popsána např. v [6] a [27].

Uvedený způsob vyvažování rotujících těles – *rotorů* však obvykle vede k přidání vývažků a ke zvětšení hmotového momentu setrvačnosti I_ζ tělesa k ose rotace ζ . Tento nárůst momentu setrvačnosti povede k nárůstu potřebného hnacího momentu mechanického systému. Tento důsledek statického a dynamického vyvažování těles není významný u pracovních členů, které vykonávají pohyb s malou nerovnoměrností chodu. Avšak tato skutečnost se stane rozhodující v případě, kdy je z výrobně-technologických důvodů vyžadována významná změna rychlosti nebo vratný periodický pohyb pracovního členu systému. V tomto případě se značně projeví setrvačné účinky nerovnoměrné rotace tělesa na zatížení pohonného jednotky mechanické soustavy a nárůstu reakcí v mechanickém převodu. Snížení těchto setrvačných účinků lze realizovat připojením vyvažujícího nebo vyvažujících subsystémů k mechanické soustavě, viz [8]. Vyvažující subsystémy jsou sestaveny ze setrvačné hmoty a pružného prvku. Pohyb vyvažovacího tělesa je protiběžný k pohybu tělesa vyvažovaného. Cílem tohoto způsobu vyvažování je snížení dynamických účinků hmotného tělesa s periodickým vratným pohybem tak, že příkon pohonu se zmenší a dále dojde ke snížení silových účinků, které působí v mechanismu. K tomu, aby mechanický systém s vyvažováním pomocí seizmických hmot efektivně pracoval, je třeba ho uvést do stavu ustáleného chodu. S tím úzce souvisí problém dosažení tohoto stavu, který však doposud nebyl uspokojivě vyřešen.

Dalším možným principem k tlumení vibrací, a tím též hluku, strojního zařízení jsou tzv. dynamické hltiče, více v [24]. Základní myšlenka dynamického hltiče spočívá v pružném připojení přídatné hmoty k základní hmotě takovým způsobem, aby se pohyb základní hmoty zklidnil. Tento způsob tlumení vibrací většinou platí pouze pro velmi úzký rozsah budících frekvencí a velmi málo tlumenou soustavu. Proto se dynamický hltič řadí do skupiny tzv. laděných tlumičů.

Požadavek velmi málo tlumených soustav je v praxi málokdy splněn. Přítomnost tlumení způsobí, že dojde ke snížení kmitání základní hmoty. Dále mohou existovat změny budící frekvence, které způsobí rozladění tlumiče. Tato skutečnost může vést k tomu, že se soustava s dynamickým hltičem dokonce dostane do rezonance. Tedy vliv tlumení na potlačení harmonicky buzených vynucených kmitů je významný. V případech, kdy se budící účinky i vlastností kmitajícího objektu za provozu často mění, nelze uspokojivě docílit izolace daného objektu od okolí pasivními konstrukčními prvky, jako jsou pružiny a tlumiče s konstantní tuhostí a tlumením. Je třeba použít systém, který je schopen aktivního přizpůsobení k aktuální situaci podle zadaných kritérií. Jedná se o tzv. aktivní nebo poloaktivní vibroizolaci. Jde o soustavu, která není již čistě mechanická, ale obsahuje též elektronické prvky a je vybavena řídicím systémem. Tedy jedná se o mechatronickou soustavu.

2.2 Matematický popis vázaného mechanického systému

V této části textu je věnována pozornost matematickému popisu vázaného mechanického systému s poddajnými členy, který vede na soustavu diferenciálních rovnic případně doplněných dalšími algebraickými rovnicemi. Ucelené informace o matematickém modelování soustavy těles s poddajnými členy a reálnými vazbami jsou obsaženy v [24].

K sestavení pohybových rovnic vázaného mechanického systému s poddajnými členy se obvykle vychází z Lagrangeových rovnic smíšeného typu, viz [24], které v maticovém vyjádření mají podobu:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \left(\frac{\partial E_k}{\partial \mathbf{q}} \right) + \left(\frac{\partial E_p}{\partial \mathbf{q}} \right) + \left(\frac{\partial R_d}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) = \mathbf{Q} + \left[\frac{\partial \mathbf{f}^V}{\partial \mathbf{q}} \right] \boldsymbol{\lambda}, \quad (2.2.1)$$

ve kterém E_k a E_p vyjadřují kinetickou a potenciální energii mechanické soustavy, R_d tzv. Rayleighova disipativní funkci, a vektor $\mathbf{Q}$ představuje vektor akčních zobecněných sil, jehož složky odpovídají příslušným souřadnicím q_i . K popisu vázaného mechanického systému jsou použity obecně závislé fyzikální souřadnice $\mathbf{q}$ dimenze r , které jsou vázány soustavou s skalárních vazbových podmínek:

$$\mathbf{f}^V(\mathbf{q}, t) = \mathbf{0}. \quad (2.2.2)$$

Pro i -té poddajné těleso lze vektor souřadnic $\mathbf{q}_i$ zapsat ve tvaru:

$$\mathbf{q}_i = [\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i, \mathbf{q}_{ei}],$$

ve kterém $\mathbf{r}_i$ představuje vektor souřadnic, které určují polohu daného tělesa v nepohyblivém souřadném systému $Oxyz$. Orientace tělesa v základním prostoru je dána Eulerovými parametry $\mathbf{p}_i$. Elastické deformace tělesa jsou vyjádřeny vektorem elastických (resp. normovaných modálních) souřadnic $\mathbf{q}_{ei}$.

Dále se v rovnicích (2.2.1) vyskytuje vektor $\boldsymbol{\lambda}$ Lagrangeových multiplikátorů v počtu s , které mají přímou souvislost s reakčními silami v kinematických vazbách obsahujících přebytečné souřadnice. Při výpočtu reakcí lze postupovat podobně jako v principu virtuálních prací, tj. rozpojením soustavy v místě hledané reakce, která se po uvolnění stane silou akční a vstoupí tak do pohybových rovnic, více viz [24]. V případě rovnic (2.2.1) se tedy jedná o soustavu $(r+s)$ algebro-diferenciálních rovnic pro r neznámých souřadnic a s neznámých Lagrangeových multiplikátorů. Vázaný mechanický systém se tak vyznačuje $i = r - s$ stupni volnosti.

Se znalostí kinetické E_k , potenciální E_p a disipativní R_d energie vázaného mechanického systému je možno přistoupit k sestavení pohybových rovnic. Provedením příslušných parciálních a časových derivací v rovnicích (2.2.1) a společně s druhou časovou derivací vazbových podmínek $\mathbf{f}^V$ lze uvést souhrnný zápis těchto rovnic v maticovém vyjádření:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{M}}\dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} \right]^T \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} + \mathbf{f}^s + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} &= \mathbf{Q} + \mathbf{J}^T \boldsymbol{\lambda}, \\ \mathbf{J}\ddot{\mathbf{q}} &= - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}^T} (\mathbf{J}\dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} - 2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}^T} \left(\frac{\partial \mathbf{f}^V}{\partial t} \right) \dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial^2 \mathbf{f}^V}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

ve kterých:

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{f}^V}{\partial \mathbf{q}^T} \quad (2.2.4)$$

vyjadřuje Jacobiho matici soustavy vazbových rovnic. Symboly $\mathbf{M}$, $\mathbf{K}$ a $\mathbf{D}$ představují postupně matice hmotnosti, tuhosti a tlumení celé mechanické soustavy a vektor $\mathbf{f}^s$ je vektor gravitačních sil.

S označením:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1 &= \mathbf{Q} - \mathbf{f}^s - \dot{\mathbf{M}}\dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} \right]^T \dot{\mathbf{q}}, \\ \mathbf{p}_2 &= - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}^T} (\mathbf{J}\dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} - 2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}^T} \left(\frac{\partial \mathbf{f}^v}{\partial t} \right) \dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial^2 \mathbf{f}^v}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

Ize soustavu rovnic (2.2.3) přepsat do tvaru vhodného pro numerickou integraci:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & -\mathbf{J}^T \\ \mathbf{J} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 - \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{K}\mathbf{q} \\ \mathbf{p}_2 \end{bmatrix}. \quad (2.2.6)$$

Jedná se o soustavu $(r+s)$ algebro-diferenciálních rovnic pro r neznámých obecně závislých fyzikálních souřadnic $\mathbf{q}$ a s neznámých Lagrangeových multiplikátorů λ .

Protože se mnohá reálná tělesa za provozních podmínek chovají více či méně jako poddajná, je nutné tuto skutečnost mnohdy ve výpočetních modelech respektovat. Kromě tzv. „velkých“ geometricky nelineárních pohybů konají pružná tělesa i „malé“ pohyby dané jejich deformacemi, které jsou superponovány na velké pohyby. Jako velké pohyby jsou označovány pohyby srovnatelné s pohyby těles modelovaných jako tuhá. Je přijat předpoklad pouze elastických deformací těchto těles, jejichž popis závisí na přijatém modelu rozložení deformačního pole. V dynamice poddajných těles je jejich poddajnost charakterizována maticí tuhosti. Pokud se jedná o rozložení hmotnosti, je nutné obecně respektovat časovou změnu polohy těžiště i matice hmotnosti.

Při popisu poddajných těles v rámci dynamiky velkých pohybů se často využívá metody konečných prvků, jejichž nevýhodou je velký rozměr fyzikálních souřadnic $\mathbf{u}$. Proto se deformační pole poddajného tělesa aproximuje několika vhodně zvolenými funkcemi – deformačními módy. Jako deformačních módů lze použít kombinace statických tvarů deformace tělesa, která respektují okrajové podmínky. A dále pak několika vlastních tvarů kmitání odpovídajících kmitání ukotveného tělesa, jejichž počet závisí na rozsahu frekvencí, které mají být ve výpočtu zachyceny. Tento typ redukce bývá v literatuře označován jako Craig-Bamptonova metoda, která je popsána např. v [11], [12], [13].

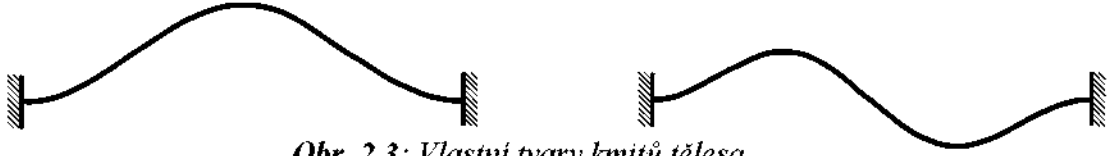
Při Craig-Bamptonově metodě jsou geometrické souřadnice $\mathbf{u}$ dimenze n výchozí soustavy přeskupeny tak, že jsou odděleny ty souřadnice $\mathbf{u}_B$ rozměru n se stupni volnosti, ve kterých jsou definovány kinematické vazby k ostatním členům mechanického systému, případně působíště přenášených silových účinků. Na ostatní souřadnice $\mathbf{u}_I$ dimenze $(n - n)$ bude aplikována modální transformace těchto souřadnic. Kmitavé chování poddajného tělesa se tak vyjádří kombinací deformačních módů:

- Statických módů deformace tělesa – vektory, které jsou tvořeny amplitudami posuvů jednotlivých uzlových bodů při jednotkovém zobecněném posuvu příslušného jednomu ze stupňů volnosti, ve kterém jsou definovány okrajové podmínky, přičemž ostatní jsou zadrženy. Na **Obr. 2.2** jsou ukázány dva z možných případů statických deformačních módů nosníku. V prvním případě se jedná o jednotkový posuv levého konce nosníku ve svislém směru a ve druhém případě jde o jednotkové natočení téhož konce.



Obr. 2.2: Statické módy deformace tělesa

- Vlastních tvarů kmitání poddajného tělesa ukotveného v těch stupních volnosti, ve kterých jsou předepsány okrajové podmínky. Na *Obr. 2.3* jsou ukázány první dva vlastní módy kmitání nosníku, který je pevně uchycen na obou koncích.



Obr. 2.3: Vlastní tvary kmitů tělesa

Dynamické chování konzervativní soustavy lze popsat diferenciální rovnicí ve fyzikálních souřadnicích:

$$\mathbf{M}_e \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}_e \mathbf{u} = \mathbf{f}. \quad (2.2.7)$$

Za předpokladu, že rovnici pro volné kmitání konzervativního systému vyhovuje řešení:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{U} e^{st}, \quad (2.2.8)$$

lze formulovat:

$$\left(s^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{eBB} & \mathbf{M}_{eBI} \\ \mathbf{M}_{eIB} & \mathbf{M}_{eII} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{eBB} & \mathbf{K}_{eBI} \\ \mathbf{K}_{eIB} & \mathbf{K}_{eII} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{u}_B \\ \mathbf{u}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_B \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (2.2.9)$$

Tento zápis vyjadřuje skutečnost, že u matic hmotnosti $\mathbf{M}_e$ a tuhosti $\mathbf{K}_e$ celé soustavy jsou prvky přeskupeny tak, aby jedna část souřadnic $\mathbf{u}_B$ rozměru n odpovídala těm stupňům volnosti, ve kterých jsou definovány okrajové podmínky. Zanedbáním setrvačných sil ve vztahu (2.2.9) lze stanovit závislost mezi vektory $\mathbf{u}_B$ a $\mathbf{u}_I$ ve tvaru podmínky statické rovnováhy:

$$\mathbf{K}_{eIB} \mathbf{u}_B + \mathbf{K}_{eII} \mathbf{u}_I = \mathbf{0} \quad (2.2.10)$$

a odtud pro regulární matici $\mathbf{K}_{eII}$ plyne:

$$\mathbf{u}_I = -\mathbf{K}_{eII}^{-1} \mathbf{K}_{eIB} \mathbf{u}_B.$$

Potom výslednou transformaci souřadnic $\mathbf{u}$ do vektoru $\mathbf{u}_B$ vyjadřuje následující vzorec:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_B \\ \mathbf{u}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{K}_{eII}^{-1} \mathbf{K}_{eIB} \end{bmatrix} \mathbf{u}_B, \quad (2.2.11)$$

kde sloupce matice představují statické módy deformace tělesa.

U druhé skupiny souřadnic $\mathbf{u}_I$ dimenze $(u - n)$, v jejichž směru nejsou předepsány okrajové podmínky, je užita modální transformace do vektoru modálních souřadnic γ rozměru m , což lze zapsat ve tvaru:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_B \\ \mathbf{u}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \Phi \end{bmatrix} \gamma, \quad (2.2.12)$$

přičemž modální matice Φ splňuje rovnici:

$$(s^2 \mathbf{M}_{eII} + \mathbf{K}_{eII}) \Phi = \mathbf{0}.$$

Sloučení statických a modálních posuvů tělesa je vyjádřeno lineární kombinací podle vztahu:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_B \\ \mathbf{u}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{K}_{eII}^{-1} \mathbf{K}_{eIB} & \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_B \\ \gamma \end{bmatrix} = \mathbf{V} \mathbf{q}^*, \quad (2.2.13)$$

kde celková transformační matice $\mathbf{V}$ je dimenze $(u \times (n+m))$ a stavový vektor $\mathbf{q}^*$ se smíšeným typem souřadnic je rozměru $(n+m)$. U stavového vektoru $\mathbf{q}^*$ je první část souřadnic v geometrických souřadnicích a druhá v modálních. Tento vzorec představuje výslednou

transformaci souřadnic $\mathbf{u}$ do vektoru $\mathbf{q}^*$. Zobecněné matice hmotnosti $\tilde{\mathbf{M}}_e$ a tuhosti $\tilde{\mathbf{K}}_e$ redukovaného modelu jsou dány následujícími vztahy:

$$\tilde{\mathbf{M}}_e = \mathbf{V}^T \mathbf{M}_e \mathbf{V}, \quad \tilde{\mathbf{K}}_e = \mathbf{V}^T \mathbf{K}_e \mathbf{V}. \quad (2.2.14)$$

Deformační módy, které jsou uspořádány ve sloupcích matice $\mathbf{V}$, tvoří ortogonální soustavu, protože matice hmotnosti $\tilde{\mathbf{M}}_e$ a tuhosti $\tilde{\mathbf{K}}_e$ nejsou obecně diagonální. Řešením problému vlastních hodnot ve tvaru:

$$(\tilde{\mathbf{K}}_e - \lambda \tilde{\mathbf{M}}_e) \mathbf{q}^* = 0 \quad (2.2.15)$$

jsou vypočteny vlastní vektory, které jsou uspořádány ve sloupcích modální matice $\mathbf{N}$. Tato matice vyjadřuje transformaci báze deformačních módů do ekvivalentní ortogonální báze s modálními souřadnicemi $\mathbf{q}_e$. Tato transformace je vyjádřena maticovým zápisem:

$$\mathbf{N} \mathbf{q}_e = \mathbf{q}^*. \quad (2.2.16)$$

Potom výslednou transformaci vektoru fyzikálních souřadnic $\mathbf{u}$ do vektoru modálních souřadnic $\mathbf{q}_e$ představuje vztah:

$$\mathbf{u} = \mathbf{V} \mathbf{q}^* = \mathbf{V} \mathbf{N} \mathbf{q}_e = \Phi_e \mathbf{q}_e, \quad \mathbf{V} \mathbf{N} = \Phi_e, \quad (2.2.17)$$

ve kterém modální matice Φ_e je báze ortogonálních deformačních módů poddajného tělesa. Ortogonální deformační módy však nereprezentují vlastní vektory původního systému, ale pouze přiřadí k danému deformačnímu módu příslušnou vlastní frekvenci.

U reálných objektů dochází při pohybu k disipaci energie. V důsledku úbytku kinetické energie dochází k tlumení volných kmitů. Tlumení je souhrn složitých nevratných procesů, které se dále projevují fázovým posuvem mezi průběhem budící síly a vynucené výchylky, nejednoznačnou závislostí mezi silou a výchylkou – *hysterezní smyčka*, omezením amplitudy výchylky především v rezonanci, postupným zanikáním volného kmitání, nárůstem teploty, atp. Tlumení se obvykle rozlišuje na:

- vnitřní:
 - v materiálu pružného prvku – *materiálové tlumení*,
 - v nepohyblivých spojeních různých částí pružného objektu jako jsou lisované, nýtované spoje nebo svary – *konstrukční tlumení*,
- vnější:
 - vlivem odporu vnějšího prostředí,
 - vlivem pasivních odporů v kinematických dvojicích.

V rámci poddajných modelů těles se jedná zejména o materiálové tlumení, které je popsáno modelem lineárního, neboli viskózního, tlumení. V tomto případě jsou tlumicí účinky úměrné vektoru modálních rychlostí $\dot{\mathbf{q}}_e$. U těchto systémů lze zavést skalární veličinu R_d zvanou Rayleighova disipativní funkci vyjádřenou prostřednictvím kvadratické formy:

$$R_d = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_e^T \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}}_e. \quad (2.2.18)$$

Matice tlumení $\mathbf{D}$ bývá obecně symetrická a obsahuje koeficienty viskózního tlumení d_{ij} , které jsou obvykle konstantní. V případě ortogonálních vlastních tvarů kmitání těles je vhodné definovat matici tlumení užitím diagonální matice koeficientů modálního tlumení c_i , $i=1, \dots, (n+m)$, přičemž tento součinitel tlumení může nabývat rozdílných hodnot pro každý z vlastních tvarů. Jedním z možných způsobů jeho zavedení je pomocí poměrného útlumu b_{ri} , který vyjadřuje poměr součinitele modálního tlumení c_i vzhledem ke kritickému tlumení c_i^{cr} daného módu. Kritické tlumení je definováno jako tlumení, při kterém se odezva systému stává aperiodickou.

Nechť výraz:

$$m_i \ddot{q}_{ei} + c_i \dot{q}_{ei} + k_i q_{ei} = 0 \quad (2.2.19)$$

yjadřuje pohybovou rovnici jednoduchého harmonického oscilátoru, ve které koeficienty m_i , k_i a c_i představují postupně zobecněnou hmotnost, zobecněnou tuhost a modální tlumení vztahující se k i -tému módu. Předpokládané řešení vztahu (2.2.19) ve tvaru:

$$q_{ei} = e^{\lambda t}$$

vede na charakteristickou rovnici:

$$m_i \lambda^2 + c_i \lambda + k_i = 0, \quad (2.2.20)$$

jejímž řešením je výraz:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-c_i \pm j\sqrt{4m_i k_i - c_i^2}}{2m_i}. \quad (2.2.21)$$

Kritické tlumení i -tého tvaru plyne z podmínky eliminace imaginární části kořenů charakteristické rovnice, proto je toto tlumení dáno výrazem:

$$c_i^{cr} = 2\sqrt{m_i k_i}. \quad (2.2.22)$$

Je tedy numericky vyčísleno ze známých hodnot zobecněné hmotnosti m_i a zobecněné tuhosti k_i i -tého módu. Potom jednotlivé koeficienty modálního tlumení c_i jsou stanoveny na základě poměrného útlumu b_{ri} vztahem:

$$c_i = b_{ri} c_i^{cr}, \quad (2.2.23)$$

ve kterém hodnoty poměrného útlumu b_{ri} jsou vhodným způsobem voleny. Rovnici (2.2.19) tedy vyhovuje řešení:

$$q_{ei} = e^{-b_{ri}\Omega_i t} e^{j(\Omega_i \sqrt{1-b_{ri}^2} t)}, \quad \Omega_i = \sqrt{\frac{k_i}{m_i}}, \quad f_i = \frac{\Omega_i}{2\pi}, \quad (2.2.24)$$

kde Ω_i je vlastní úhlová frekvence a f_i značí vlastní frekvenci netlumeného systému. Daný tvar kmitu bude zcela tlumený, jestliže hodnota poměrného útlumu bude: $b_{ri} = 1$.

2.3 Matematický popis synchronního motoru s permanentními magnety

Při následujících výpočetních simulacích se předpokládá, že pohon analyzovaných mechanických systémů bude realizován 3fázovým synchronním elektromotorem s permanentními magnety, kterými je vytvářen budící magnetický tok rotoru. Tento typ motoru se především používá v servopohonech, u kterých se vyžaduje vysoká dynamika a polohová přesnost. Používá se pro pohony nízkých a středních výkonů (výkony přibližně do 50 kW). Při vektorovém řízení tohoto typu elektromotoru se téměř výhradně používá kaskádní uspořádání regulačního obvodu se třemi hierarchicky uspořádanými zpětnými vazbami: proudovou, rychlostní a polohovou. Pro potřeby simulace byl použit DQ-model, který vychází z matematického popisu synchronního stroje a využívá transformace statorových souřadnic na rotorové. Samotný model tohoto elektromotoru včetně jeho řídicí struktury vede na soustavu diferenciálních rovnic. Ucelené informace o matematickém popisu tohoto typu elektromotoru lze vyhledat v [3], [22], [23] a [25].

2.3.1 Matematický model synchronního motoru s permanentními magnety ve vektorovém tvaru

Při odvození základních rovnic matematického modelu synchronního motoru s permanentními magnety byly zavedeny následující zjednodušující předpoklady:

- Průběh magnetické indukce ve vzduchové mezeře i průběh indukovaného napětí je harmonický. Při výpočtech je třeba zohlednit skutečnost, že motory s vyniklými póly na rotoru mají různou magnetickou vodivost v podélném a příčném směru.

- Parametry elektromotoru, tzn. indukčnost L_s a odpor R_s , jsou konstantní a stejné ve všech třech fázích.
- Ztráty v železe jsou zanedbány.
- Tlumicí vinutí na rotoru není provedeno.
- Magnetizační charakteristika je lineární.
- Není připojen nulový vodič.

Při napájení statoru třífázovým proudem s harmonickým napětím vznikne točivé elektromagnetické pole, jehož úhlová rychlost ω_0 je úměrná frekvenci f napájecího napětí. Jednotlivá fázová napětí lze vyjádřit následujícími rovnicemi:

$$u_U = U_m \cos \omega_0 t, \quad u_V = U_m \cos(\omega_0 t + \frac{2}{3}\pi), \quad u_W = U_m \cos(\omega_0 t + \frac{4}{3}\pi), \quad (2.3.1)$$

Za předpokladu, že všechna tři statorová vinutí jsou prostorově symetrická, je matematický model synchronního motoru s permanentními magnety na rotoru ve vektorovém tvaru dán vztahy:

$$\mathbf{u}_s = R_s \mathbf{i}_s + \frac{d\boldsymbol{\psi}_s}{dt}, \quad \boldsymbol{\psi}_s = L_s \mathbf{i}_s + \boldsymbol{\psi}_m e^{j\theta}, \quad (2.3.2)$$

ve kterých je $\boldsymbol{\psi}_s$ spřažený magnetický tok permanentních magnetů natočených o úhel θ a L_s je rozptylová indukčnost statorového vinutí. Dále při zavedení předpokladu symetrie statorových vinutí platí v každém okamžiku následující podmínka pro proudy:

$$i_U + i_V + i_W = 0, \quad (2.3.3)$$

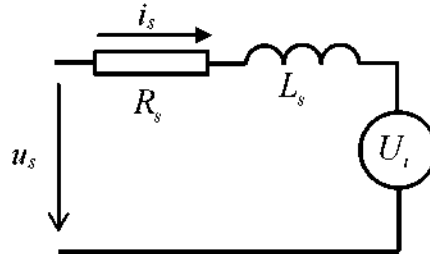
ve které jsou:

$$i_U = I_m \cos \omega_0 t, \quad i_V = I_m \cos(\omega_0 t + \frac{2}{3}\pi), \quad i_W = I_m \cos(\omega_0 t + \frac{4}{3}\pi), \quad (2.3.4)$$

a kde platí:

$$I_m = \frac{U_m}{R_s}. \quad (2.3.5)$$

Náhradní schéma jedné fáze tohoto motoru je uvedeno na **Obr. 2.4**, ve kterém R_s je odpor jedné fáze statorového vinutí a U_i je napětí indukované magnetickým tokem $\boldsymbol{\psi}_m$.



Obr. 2.4: Náhradní schéma synchronního motoru s permanentními magnety

2.3.2 Napěťové rovnice synchronního motoru v komplexním tvaru

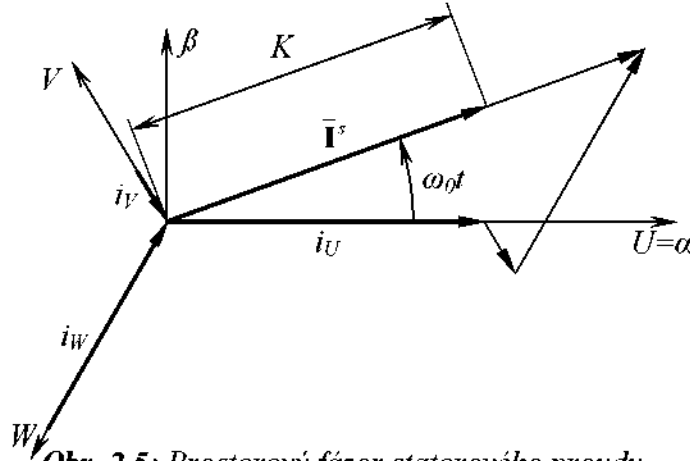
Matematický popis synchronního motoru se zjednoduší zavedením komplexních prostorových fázorů, podrobnější informace jsou uvedeny v příloze A. Působení okamžitých hodnot proudů i_U, i_V, i_W lze nahradit jediným proudem $\bar{\mathbf{I}}^s$ – *komplexní prostorový fázor statorového proudu*, který je na **Obr. 2.5**.

Napěťové rovnice (2.3.2) ve vektorovém tvaru jsou v pevných souřadnicích statoru dány vztahem:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{U}}^s &= R_s \bar{\mathbf{I}}^s + \frac{d\bar{\boldsymbol{\psi}}^s}{dt}, & \bar{\boldsymbol{\psi}}^s &= L_s \bar{\mathbf{I}}^s + \bar{\boldsymbol{\psi}}_m e^{j\theta}, \\ \bar{\mathbf{U}}^s &= R_s \bar{\mathbf{I}}^s + L_s \frac{d\bar{\mathbf{I}}^s}{dt} + \frac{d}{dt} (\bar{\boldsymbol{\psi}}_m e^{j\theta}). \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

K transformaci rovnice (2.3.6) z pevných souřadnic (α, β) do rotorových souřadnic (d, q) rotujících úhlovou rychlostí ω_0 je nutné použít vztahů:

$$\bar{\mathbf{I}}^s = \bar{\mathbf{I}}^r e^{j\omega_0 t}, \quad \bar{\mathbf{U}}^s = \bar{\mathbf{U}}^r e^{j\omega_0 t}. \quad (2.3.7)$$



Obr. 2.5: Prostorový fázor statorového proudu

Užitím matematických výrazů (2.3.7) na fázory proudu $\bar{\mathbf{I}}^s$ a napětí $\bar{\mathbf{U}}^s$ vyjádřených v souřadnicích (α, β) lze psát:

$$\bar{\mathbf{U}}^r e^{j\omega_0 t} = R_s \bar{\mathbf{I}}^r e^{j\theta} + L_s \frac{d}{dt} (\bar{\mathbf{I}}^r e^{j\theta}) + \frac{d}{dt} (\bar{\Psi}_m e^{j\theta}), \quad \theta = \omega_0 t. \quad (2.3.8)$$

Provedením naznačených časových derivací na pravé straně rovnice (2.3.8) je obdržén výraz:

$$\bar{\mathbf{U}}^r = R_s \bar{\mathbf{I}}^r + L_s \frac{d\bar{\mathbf{I}}^r}{dt} + j\omega_0 L_s \bar{\mathbf{I}}^r + j\omega_0 \bar{\Psi}_m. \quad (2.3.9)$$

Rozepsáním fázorů proudu a napětí do složkového tvaru:

$$\bar{\mathbf{I}}^r = I_d + jI_q, \quad \bar{\mathbf{U}}^r = U_d + jU_q$$

a dosazením do rovnice (2.3.8) je vypočteno:

$$U_d + jU_q = R_s (I_d + jI_q) + L_s \frac{d}{dt} (I_d + jI_q) + j\omega_0 L_s (I_d + jI_q) + j\omega_0 \Psi_m. \quad (2.3.10)$$

Porovnáním reálných a imaginárních částí rovnice (2.3.10) lze formulovat napěťové rovnice ve složkovém tvaru v rotujících souřadnicích (d, q) úhlovou rychlostí ω_0 takto:

$$\begin{aligned} U_d &= R_s I_d + L_d \frac{dI_d}{dt} - \omega_0 \Psi_q = R_s I_d + L_d \frac{dI_d}{dt} - \omega_0 L_q I_q, \\ U_q &= R_s I_q + L_q \frac{dI_q}{dt} + \omega_0 \Psi_d = R_s I_q + L_q \frac{dI_q}{dt} + \omega_0 (L_d I_d + \Psi_m), \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

ve kterých jsou:

$$\begin{aligned} \Psi_d &= L_d I_d + \Psi_m, \\ \Psi_q &= L_q I_q, \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

kde ω_0 je elektrická úhlová rychlost a rovněž i rotujícího souřadného systému (d, q) , L_d a L_q značí indukčnosti statorového vinutí v podélné a příčné ose, R_s odpor jedné fáze statorového vinutí a $\Psi_m = konst$ představuje magnetický tok rotoru vyvolaný permanentními magnety. V rovnicích (2.3.11) je dán vztah mezi elektrickou úhlovou rychlostí ω_0 – rychlost otáčení magnetického pole statoru a mechanickou úhlovou rychlostí ω – rychlost rotace rotoru motoru rovnicí:

$$\omega_0 = p_p \omega, \quad (2.3.13)$$

ve které p_p udává počet pólových dvojic elektromotoru.

Moment motoru je:

$$M = \frac{3}{2} p_p \operatorname{Im}[\bar{\psi}^* \bar{I}] = \frac{3}{2} p_p \operatorname{Im}[(\psi_d - j\psi_q)(I_d + jI_q)] = \frac{3}{2} p_p (\psi_d I_q - \psi_q I_d) \quad (2.3.14)$$

Dosazením vztahů (2.3.12) do výrazu (2.3.14) a jednoduchou matematickou úpravou je získán konečný předpis pro vyjádření momentu:

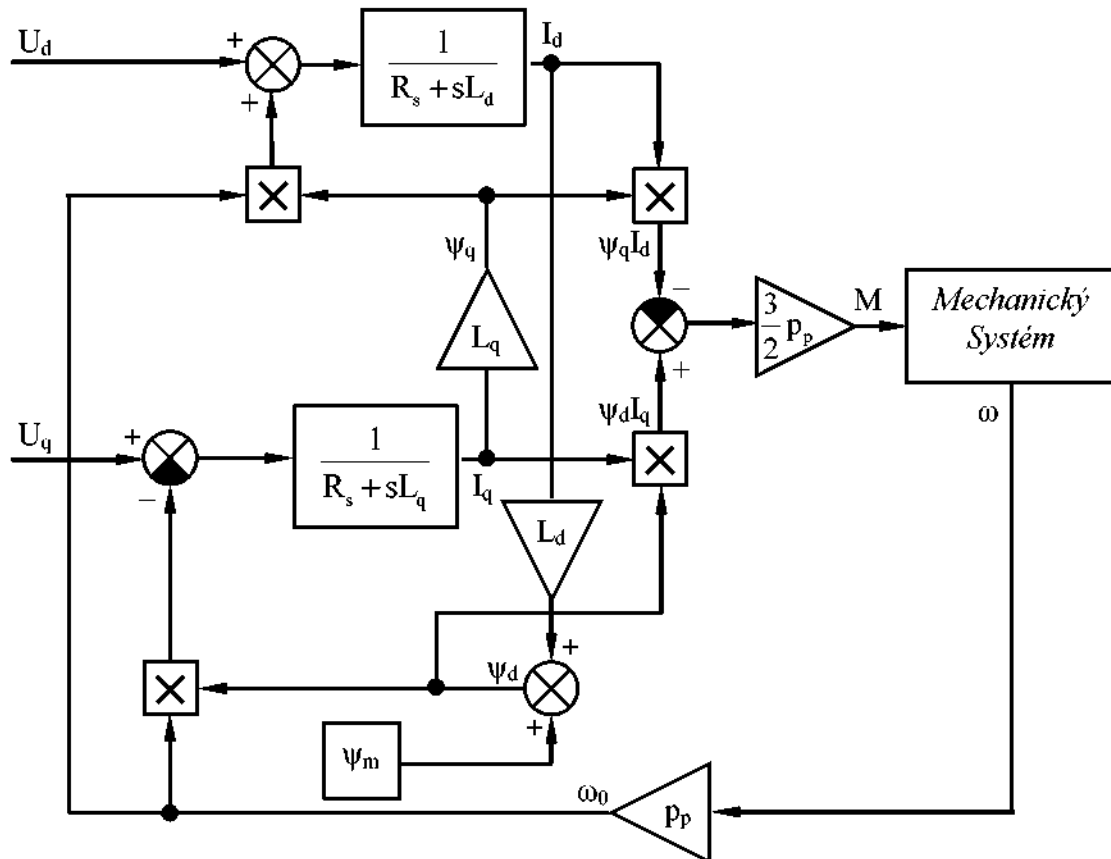
$$M = \frac{3}{2} p_p [\psi_m I_q + (L_d - L_q) I_d I_q]. \quad (2.3.15)$$

První součin v hranaté závorce představuje hlavní složku momentu. Druhý výraz je označován jako reluktanční moment a vyskytuje se jen tehdy, má-li synchronní motor vyniklé póly na rotoru, pro které platí $L_d \neq L_q$, v opačném případě je $L_d = L_q$.

Protože pro vytvoření matematického modelu pohonu a řízení a následné řešení rovnic se s výhodou využívá obrazových přenosů, je účelné převést soustavu diferenciálních rovnic (2.3.11) a (2.3.12) společně s momentovou rovnicí (2.3.14) Laplaceovou transformací na soustavu algebraických rovnic:

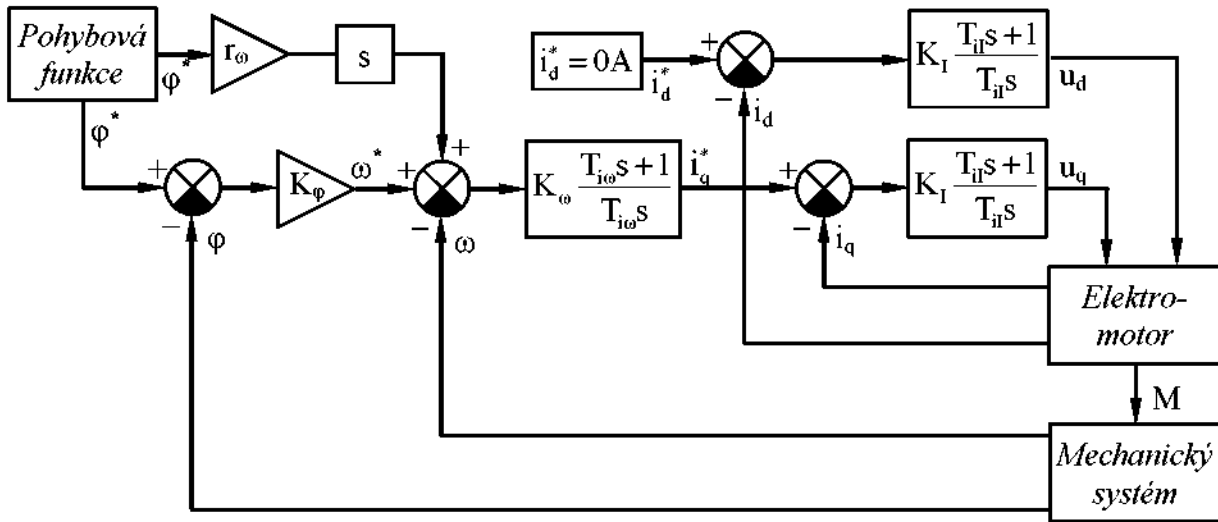
$$\begin{aligned} U_d &= R_s I_d + sL_d I_d - \omega_0 \psi_q = (R_s + sL_d) I_d - \omega_0 \psi_q, \\ U_q &= R_s I_q + sL_q I_q + \omega_0 \psi_d = (R_s + sL_q) I_q + \omega_0 \psi_d, \\ \psi_d &= L_d I_d + \psi_m, \\ \psi_q &= L_q I_q, \\ M &= \frac{3}{2} p_p (\psi_d I_q - \psi_q I_d). \end{aligned} \quad (2.3.16)$$

Blokové schéma modelu synchronního motoru s permanentními magnety vytvořené podle vztahů (2.3.16) je ukázáno na *Obr. 2.6*.



Obr. 2.6: Blokové schéma modelu synchronního motoru s permanentními magnety

Při vektorovém řízení synchronního motoru s permanentními magnety na rotoru se téměř výhradně používá kaskádní uspořádání regulačního obvodu se třemi hierarchicky uspořádanými zpětnými vazbami, viz **Obr. 2.8**. Udržování požadované hodnoty proudu, otáček, případně polohy zajišťují regulátory, viz [28]. V praxi se nejvíce uplatnily lineární regulátory typu PID, to je regulátor se složkou proporcionální, integrační a derivační. Proporcionální složka ovlivňuje rychlost a přesnost regulace, integrační složka odstraňuje ustálenou regulační odchylku na skokovou změnu řídicí veličiny, ale značně zhoršuje stabilitu a dynamické vlastnosti regulačního obvodu a derivační složka rozšiřuje frekvenční pásmo a má stabilizační účinky.



Obr. 2.8: Kaskádní regulační obvod s proudovou, otáčkovou a polohovou zpětnou vazbou

Vztah mezi výstupní veličinou – akční veličinou $u(t)$ a vstupní veličinou – regulační odchylkou $e(t)$ je popsán diferenciální rovnicí:

$$u(t) = K \left(e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt} \right) \quad (2.3.19)$$

Proporcionální složka regulátoru je:

$$K = r_0,$$

integrační složka:

$$\frac{K}{T_i} = r_{-1}$$

a derivační složka:

$$KT_d = r_1.$$

Konstanta T_i představuje integrační časovou konstantu regulátoru a T_d derivační časovou konstantu regulátoru. Regulační odchylku $e(t)$ lze psát výrazem:

$$e(t) = w(t) - y(t), \quad (2.3.20)$$

který vyjadřuje rozdíl mezi požadovanou veličinou $w(t)$ a skutečným výstupem ze systému $y(t)$. Pokud některá ze složek nabývá nulové hodnoty, pak se jedná o jednodušší regulátory typu P, PI, nebo PD. Přenos regulátoru PID je zřejmě:

$$R(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) = r_0 + \frac{r_{-1}}{s} + r_1 s. \quad (2.3.21)$$

Základní zpětnou vazbu tvoří proudová regulace. Jejím úkolem je urychlit a zkvalitnit regulaci proudu. Bez použití proudové regulace by byla jakákoliv změna proudu výrazně

zpomalována vlivem indukčnosti vinutí stroje a účinkem vnitřního indukovaného napětí, která svou orientací působí proti napájecímu napětí, tedy snižuje protékající proud a tím i moment stroje. Odchylka žádaného i_s^* a skutečného i_s proudu je proudovým regulátorem převedena na požadované napětí u_s na motoru. Jako regulační prvek se zde většinou používá PI regulátor, jehož přenos je dán výrazem:

$$K_I \frac{T_{II}s + 1}{T_{II}s} \quad (2.3.22)$$

Standardně jsou elektrické regulované pohony využívány v rychlostním režimu, kdy regulovanou veličinu představuje mechanická úhlová rychlost ω . V případě servomotorů musí být regulační smyčka uzavřená a motor musí obsahovat snímač rychlosti hřídele. Hodnota skutečné úhlové rychlosti stroje ω se porovnává s požadovanou ω^* , přičemž regulační odchylka vstupuje do rychlostního regulátoru a je jím převedena na požadovaný proud i_s^* . Ten je zaveden na vstup regulátorů proudu. Regulátor rychlosti bývá nejčastěji typu PI, jehož přenos je:

$$K_\omega \frac{T_{I\omega}s + 1}{T_{I\omega}s} \quad (2.3.23)$$

U synchronních elektromotorů je přítomnost snímače polohy hřídele nezbytná, řídicí systém pohonu musí vždy znát informaci o elektrickém úhlu θ natočení hřídele. Správné naladění rychlostní smyčky je rozhodující pro dobrou činnost polohové regulace.

Rychlostní regulační smyčky bývá často nadřazena regulace polohová. Především se jedná o aplikace pohonů v obráběcích strojích, robotice a manipulační technice. Regulovanou veličinu zde představuje úhel natočení φ rotoru stroje, obecně lze hovořit o poloze koncového – *pracovního* členu mechanismu, který je motorem poháněn. Měření skutečné polohy se většinou realizuje jako nepřímé, tj. využije se snímač polohy umístěný na motoru a poloha pracovního členu se dopočítává ze znalosti převodových poměrů poháněného mechanismu. V případě mechanismů s minimálními vůlemi, nebo tam, kde je velikost vůle známá a neměnná, lze takto dosahovat velmi vysoké přesnosti polohování. Pokud jsou neurčitosti poháněného mechanismu proměnné či neznámé a požadovaná přesnost polohování vysoká, je nutno použít přímé odměřování polohy. Mechanismus musí být vybaven dalším snímačem polohy, jehož informace se zavádí do řídicí jednotky servomotoru jako informace o skutečné poloze. Vstupním signálem polohového regulátoru je okamžitá odchylka žádané φ^* a skutečné φ polohy vyjádřená vztahem:

$$\Delta\varphi(t) = \varphi^*(t) - \varphi(t) \quad (2.3.24)$$

Polohová zpětná vazba se uzavírá pomocí regulátoru typu P, protože vztah mezi rychlostí a polohou hřídele stroje je jednoznačně definován. Jeho polohové zesílení K_φ má význam požadované úhlové rychlosti při jednotkové odchylce požadované a skutečné polohy. Výstupem polohového regulátoru je tedy žádaná úhlová rychlost ω^* .

Pro zvýšení polohové přesnosti se používají přídavné signály zavedené na vstup rychlostního regulátoru. Nejčastějším případem řízení pohonu s přídavným řídicím signálem je rychlostní feedforward. Kromě signálu žádané polohy φ^* je řídicím systémem vypočtena i žádaná úhlová rychlost ω^* a po vynásobení váhovým koeficientem r_ω přidána ke stávajícímu vstupu rychlostního regulátoru. Popsaný způsob řízení s předkorekčním signálem je realizován dopřednou větví blokového schématu na *Obr. 2.8*. Pro zesílení $r_\omega = 1$ je přenos polohové smyčky též ideální, tedy jednotkový.

Pro nastavení jednotlivých konstant regulátorů existuje celá řada metod a postupů, které lze rozdělit do dvou základních skupin, a sice metody experimentální a globální. Mezi nejznámější experimentální metody patří metoda Ziegler-Nicholse, přičemž znalost přenosu

respektive parametrů regulované soustavy není klíčová. Naopak globální metody vyžadují znalost přenosu soustavy, protože pracují s charakteristickým polynomem systému. Mezi nejznámější metody tohoto druhu náleží:

- metoda relativního tlumení,
- metoda bezpečnosti ve fázi,
- metoda kompenzačního seřízení,
- metoda optimálního modulu,
- metoda požadovaného modelu,
- metoda násobného dominantního pólu.

Protože problematika nastavení hodnot jednotlivých konstant příslušných regulátorů není stěžejní vzhledem k cílům a předmětu této práce, bude v dalším textu popsána jednoduchá metoda Ziegler-Nicholse, též metoda kritického zesílení, viz [28]. Tato metoda umožňuje nastavení regulátoru za provozních podmínek. Jedná se o metodu, kdy dochází k nastavení konstant cyklicky podle následujícího postupu:

1. Nejprve dojde k nastavení derivační a integrační konstanty regulátoru na nulu, tj. $r_{-1} = r_1 = 0$, resp. $T_d = 0$, $T_i = \infty$.
2. Postupně od nulové hodnoty dochází ke zvyšování proporcionální konstanty r_0 tak, až se celý systém rozkmitá, to znamená, že dosáhne meze stability. Tato konstanta nechť je označena jako kritické zesílení r_{krit} . Perioda kmitů na mezi stability je označena jako T_{krit} .
3. Konstanty regulátoru jsou dále nastaveny podle následující tabulky **Tab. 2.1**:

Tab. 2.1: Hodnoty nastavení konstant regulátorů podle metody kritického zesílení

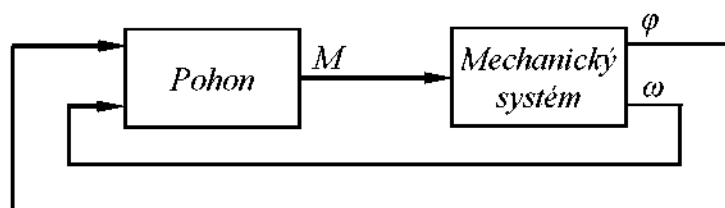
Typ regulátoru	r_0	T_i	T_d
P	$0.50 \cdot r_{krit}$		
PI	$0.45 \cdot r_{krit}$	$0.85 \cdot T_{krit}$	
PID	$0.60 \cdot r_{krit}$	$0.50 \cdot T_{krit}$	$0.125 \cdot T_{krit}$
PD	<i>Zkusmo na optimální hodnotu</i>		$0.125 \cdot T_{krit}$

Integrační regulátor se nastaví tak, že dochází ke změně integrační časové konstanty T_i takovým způsobem, že pro hodnotu $T_i = T_{ik}$ je dosaženo meze stability. Potom nejvhodnější nastavení integrační časové konstanty je $T_i = 2T_{ik}$ pro kmitavý tlumený průběh regulačního procesu, resp. $T_i = 4T_{ik}$ pro aperiodický průběh.

Tento postup předpokládá uvedení regulačního pochodu na mez stability. To je v praktické realizaci z důvodů technologických a mnohdy bezpečnostních nepřípustné, avšak při znalosti matematického modelu řízeného mechanického systému je tento postup použitelný. Na základě numerických simulací jsou stanoveny časové průběhy dynamického chování soustavy a tím dojde k určení hodnot kritického zesílení r_{krit} a hodnot periody kmitů na mezi stability T_{krit} pro jednotlivé typy regulátorů v regulačních smyčkách. Při samotném hledání konstant regulátorů u kaskádní struktury regulace se logicky postupuje od vnitřní regulační smyčky – *proudové* k vnější – *polohové*. Nejobtížnějším krokem bývá většinou seřízení rychlostního regulátoru, tj. nalezení konstant K_{ω} a $T_{1\omega}$. Poté nalezení proporcionálního zesílení K_{φ} již nečiní větší potíže.

2.4 Skládání abstraktních dynamických systémů

Jedním z možných postupů vytvoření simulačního modelu spojené soustavy je postup skládání abstraktních dynamických systémů s kauzální orientací vstup – výstup, viz [28]. Jednotlivé abstraktní dynamické systémy jsou nejčastěji popsány buď stavovým, nebo přenosovým popisem. Toto spojování je velmi jednoduché, protože výstupy jednoho modelu jsou vstupy modelu druhého, jak je naznačeno na **Obr. 2.9**. V tomto obrázku představuje blok *Pohon* matematický model elektromotoru včetně řízení a blok *Mechanický systém* model soustavy mnoha těles s poddajnými členy. Vstupem bloku *Mechanický systém* je elektromagnetický moment elektromotoru M , který je zároveň výstupem bloku *Pohon*. Obdobně výstupy bloku *Mechanický systém* jsou např. skutečné úhlové natočení φ a skutečná úhlová rychlost ω sledované hřídele, přičemž tyto veličiny jsou zároveň vstupy bloku *Pohon*.



Obr. 2.9: Blokové schéma mechatronického systému

Hlavním cílem sestavení modelu je stanovení časového průběhu dynamického chování soustavy, které spočívá v numerickém řešení vzniklé soustavy diferenciálních rovnic nebo soustavy algebro-diferenciálních rovnic. Dalšími z možných cílů je studium vlastností daného systému simulacemi, návrh řízení zkoumané soustavy, samotný návrh daného systému, jeho optimalizace, atd.

Dalším z možných způsobů spojování fyzikálních soustav je mnohopólové modelování, o kterém je podrobně pojednáno v [28].

Nevýhody dosavadní praxe oddělené analýzy mechanické soustavy a syntézy elektrických a regulačních obvodů jsou tímto řešením do jisté míry minimalizovány.

2.5 Virtuální modelování vázaných mechanických systémů při použití CAX

S rozvojem numerické matematiky a informatiky byl zároveň utvářen nový přístup při tvorbě simulačních modelů. Řada dříve používaných výpočetních postupů (přibližné metody, grafické metody) ztratila i v mechanice strojů svůj význam a do popředí vystoupily metody numerické. Ty umožnily nejen řešení úloh, které pro svou náročnost vůbec být řešeny nemohly, ale vznikla i možnost zdokonalit předtím používané matematické modely respektováním dalších vlivů a tím docílit lepší shody výsledků získaných matematickým modelováním se skutečným chováním reálných mechanických soustav. Vlivy se rozumí např. uvažování poddajných těles a reálných vazeb v modelech mechanických soustav, vzájemné ovlivňování různých typů fyzikálních systémů, atd. V této souvislosti bylo zavedeno označení *počítačová mechanika*, která se vyznačuje tím, že kromě vlastního numerického řešení vytvořeného matematického modelu poskytuje též algoritmy pro jeho automatické sestavení na základě popisu geometrie a známých fyzikálních vlastností modelu reálné soustavy. Umožňuje tak inženýrům, aby se soustředili na ty kroky v procesu návrhu vznikající mechanické soustavy, ve kterých je dosud lidská činnost nezastupitelná, totiž na vytváření fyzikálních modelů řešených objektů a na analýzu a interpretaci získaných výsledků. Současně nabízí prostor pro optimalizaci chování strojů.

Softwarové prostředky používané v aplikované mechanice lze z hlediska jejich zaměření rozdělit do dvou velkých skupin:

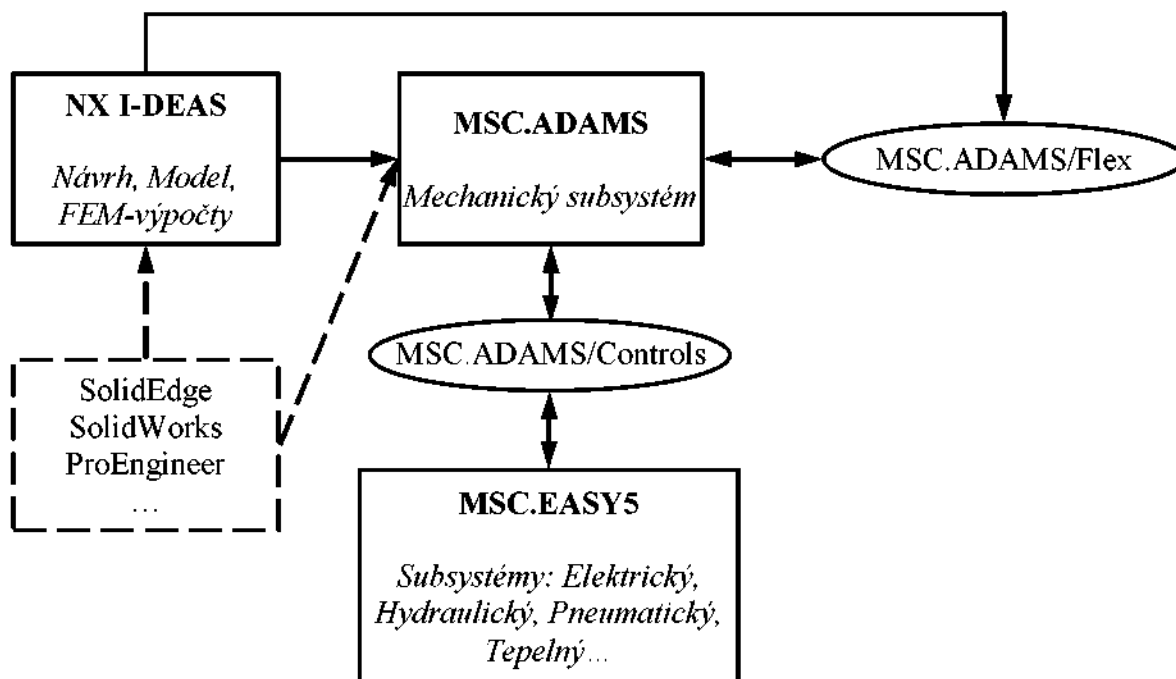
- obecné programy bez speciálního zaměření,
- specializované programy.

Do první skupiny lze zařadit programy vytvořené jako prostředky usnadňující řešení matematických modelů, které je však samy nesestavují. Ty musí sestavit řešitel. Mezi takové programy náleží např. MSC.EASY5, MATLAB, MATRIX_x, MATHCAD, MAPLE, MATHEMATICA,...

Druhá skupina programů si klade za cíl nejenom řešení uživatelem dodaného výpočetního modelu, ale i jeho sestavení. V oblasti mechaniky je lze dále rozdělit:

- programy založené na metodě konečných prvků řešící problémy mechaniky kontinua. Mezi které lze zařadit např. ANSYS, MSC.MARC, MSC.NASTRAN, NX NASTRAN, ABAQUS, FLUENT,...
- programy řešící problematiku mechaniky soustav mnoha těles. K nejznámějším náleží: MSC.ADAMS, MOTION, MECH, SIMPACK, ...

Obě jmenované skupiny se v poslední době sblíží a jsou společně integrovány do velkých programů pro CAD (z anglického Computer Aided Design), jako jsou: NX I-DEAS, NX nebo Pro/ENGINEER.



Obr. 2.10: Blokové schéma možného toku dat mezi programy

Jednou z možností virtuálního modelování vázaných mechanických systémů je použití následujících komerčně dostupných expertních systémů I-DEAS 12 NX, MSC.ADAMS, MSC.EASY5 a toku dat mezi nimi podle blokového schéma na **Obr. 2.10**. Prostřednictvím kterých jsou vytvářeny simulační modely složitých nelineárních systémů a prováděna jejich výpočetní analýza. Mezi takové systémy lze zařadit např. proces vyvažování aplikovaný na řízený mechanický systém, jehož setrvačné účinky mají být minimalizovány. Protože při řešení problematiky vyvažování byla možnost využít vzájemného propojení výkonných expertních systémů podle blokového schématu na **Obr. 2.10**, je uvedena jejich stručná charakteristika a vymezena oblast technických problémů, které lze těmito prostředky řešit.

- MSC.EASY5:

Je to inženýrský program určený k modelování, navrhování a řešení dynamických systémů charakterizovaných diferenciálními, diferenčními, algebro-diferenciálními a algebraickými rovnicemi. Tyto typy systémů pokrývají širokou škálu inženýrských systémů zahrnující: mechanické, elektrické, hydraulické, pneumatické, tepelné, číslicově-analogové řídicí systémy, atd. Pracuje s vytvářením simulačního modelu pomocí skládání funkčně-kauzálních modelů. Je to postup skládání abstraktních dynamických systémů s kauzální orientací vstup – výstup. Jednotlivé abstraktní dynamické systémy jsou nejčastěji popsány buď stavovým popisem, nebo přenosovým popisem. MSC.EASY5 obsahuje velké množství takových předpřipravených modelů – bloků, které uživatel spojuje interaktivně graficky na monitoru. Tyto bloky jsou členěny do několika tematicky orientovaných knihoven podle typu systému. Vedle nich může samotný uživatel vytvářet své vlastní typy modelů a knihoven včetně grafických značek a uživatelského rozhraní vstupních parametrů. Otevřená architektura MSC.EASY5 poskytuje propojení s dalšími nástroji CAE jako jsou např. MSC.ADAMS, MSC.NASTRAN, MATLAB/Simulink, a jiné.

- MSC.ADAMS:

Jde o programový balík pro simulaci pohybu soustav mnoha těles. Je stavěn modulárně a je neustále inovován a rozšiřován. Obsahuje nástroje k modelování, samotné analýze a vizualizaci. Součástí systému jsou robustní algoritmy pro řešení kinematiky, statiky, kinetostatiky a dynamiky soustav mnoha těles. Tyto algoritmy vedou v obecném případě na vlastní sestavení pohybových rovnic řešené mechanické soustavy a k jejich následnému numerickému řešení. Pohybové rovnice jsou sestavovány použitím Lagrangeových rovnic smíšeného typu, kdy se jedná o soustavu algebro-diferenciálních rovnic. Systém MSC.ADAMS umožňuje analýzu poddajných těles prostřednictvím modulu MSC.ADAMS/Flex ve spolupráci s programy pro MKP jako jsou např. NX I-DEAS, NX NASTRAN, MSC.NASTRAN, aj. Modul MSC.ADAMS/Controls umožňuje začlenit matematický model vytvořený v prostředí MSC.ADAMS do blokového schématu definovaného v programových systémech MSC.EASY5, případně MATLAB/Simulink. Eventuálně existuje možnost přímého importu modelu pohonu a řízení do prostředí MSC.ADAMS. Prostřednictvím modulu MSC.ADAMS/Exchang dochází k importu a exportu geometrie těles v podobě dat ve formátech Parasolid, STEP, IGES nebo DWG/DXF. Na jednotlivé geometrické entity tímto způsobem načtených těles lze již jednoduše definovat zatěžující síly a kinematické vazby.

- NX I-DEAS, NX:

Jedná se komplexní CAD/CAM/CAE systémy zahrnující podporu širokého spektra činností související s konstrukcí a výrobou strojních zařízení. Umožňují systematicky postupovat od prvního ideového návrhu přes výpočty, simulace a analýzy, modelování jednotlivých dílů i celých sestav, tvorbu výkresové dokumentace, programování NC obráběcích a měřicích strojů a simulaci obrábění až po kontrolu kvality, správu dat a projektů a integraci do podnikového informačního systému.

NX je moderní modulární systém s plnou asociativitou všech spolupracujících modulů, postavený nad jednotnou grafickou objektově orientovanou databází. To umožňuje souběžnou práci týmu řešitelů (Collaborative Engineering). V praxi to znamená, že již v určité fázi rozpracovanosti modelu lze současně provádět pevnostní, kinematické a dynamické výpočty, ale i další analýzy a simulace postavené na základě metody konečných prvků. Souběžně s projektanty mohou konstruktéři zpracovávat výkresovou dokumentaci, technologové mohou

připravovat NC programy. Tzv. *Master Model Koncept* zajišťuje jednoznačné provedení změn ve všech těchto navazujících činnostech. Znamená to, že model je určujícím prvkem, na němž jsou prováděny všechny modifikace, které se přenášejí do všech rozpracovaných aplikací.

3 Návrh dynamického vyvážení

Snížení setrvačných účinků mechanických soustav bude realizováno připojením vyvažujících subsystémů k vyvažované soustavě, viz [8]. Samotný vyvažující subsystém je sestaven ze setrvačné hmoty, která je prostřednictvím pružného prvku připojena k vyvažovanému mechanickému systému, a samotného pružného prvku. Pohyb vyvažovacího tělesa je protiběžný k pohybu tělesa vyvažovaného. Cílem takto realizovaného způsobu vyvažování je snížení, resp. úplné potlačení, dynamických účinků hmotného tělesa s periodickým vratným pohybem tak, že příkon pohonu se zmenší a dále dojde ke snížení silového zatížení celé mechanické soustavy. Samotná setrvačná hmota je charakterizována maticí setrvačnosti a hmotností, pružný prvek tuhostí. Ke správné funkci vyvažujících subsystémů je nutné stanovit prvky matice setrvačnosti, respektive hmotnost, vyvažující hmoty a tuhost pružného prvku. Největší přínos vyvažujících subsystémů nastává v ustáleném chodu mechanické soustavy, ve kterém je vykonávána pracovní funkce vyvažovaného stroje. S tím úzce souvisí problém uvedení soustavy s vyvažováním do tohoto stavu. Je tedy třeba navrhnout takový způsob rozběhu mechanického systému s vyvažováním setrvačných účinků pracovního členu, jehož cílem je řízené a kontrolované dosažení ustáleného stavu této soustavy.

V následujícím textu bude provedeno odvození k výpočtu potřebných parametrů vyvažujících subsystémů. Toto odvození bude nabývat obecné platnosti, jak pro periodický vratný rotační pohyb, tak i pro periodický vratný posuvný pohyb. Bude však ukázáno pouze pro rotační pohyb, protože mezi translačním a rotačním pohybem existuje jistá analogie. Tato analogie je založená na stejném tvaru rovnic popisující stejný jev jak v translačním, tak i v rotačním pohybu. Přehled analogických veličin je uveden v tabulce *Tab. 3.1*.

Tab. 3.1: Analogie mezi rotačním a posuvným pohybem

	Periodický vratný rotační pohyb	Periodický vratný posuvný pohyb
Hmota vyvažovaného tělesa	$I \text{ [kgm}^2\text{]}$	$m \text{ [kg]}$
Zobecněná souřadnice vyvažovaného tělesa	$\vartheta \text{ [rad]}$	$s \text{ [m]}$
Hmoty vyvažujících těles	$J_i \text{ [kgm}^2\text{]}$	$M_i \text{ [kg]}$
Tuhosti pružných prvků	$k_\vartheta \text{ [Nm rad}^{-1}\text{]}$	$k_i \text{ [Nm}^{-1}\text{]}$
Zobecněné souřadnice vyvažujících těles	$\psi_i \text{ [rad]}$	$x_i \text{ [m]}$

3.1 Vyvažující subsystémy

Ve snaze o dynamické vyvážení setrvačných sil mechanického systému podle *Obr. 3.1*, jehož pracovní člen o momentu setrvačnosti I vykonává periodický vratný rotační pohyb, jsou zavedeny následující předpoklady:

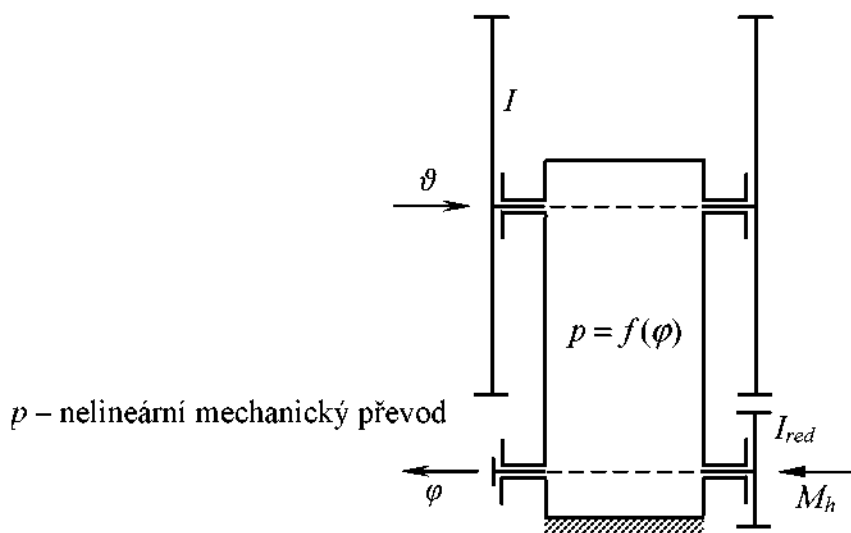
- Vstupní člen soustavy o momentu setrvačnosti I_{red} vykonává rovnoměrný rotační pohyb, tzn.:

$$\varphi = \Omega t + \varphi_0, \quad \dot{\varphi} = \Omega, \quad \ddot{\varphi} = 0, \quad (3.1.1)$$

kde Ω značí jmenovitou úhlovou frekvenci.

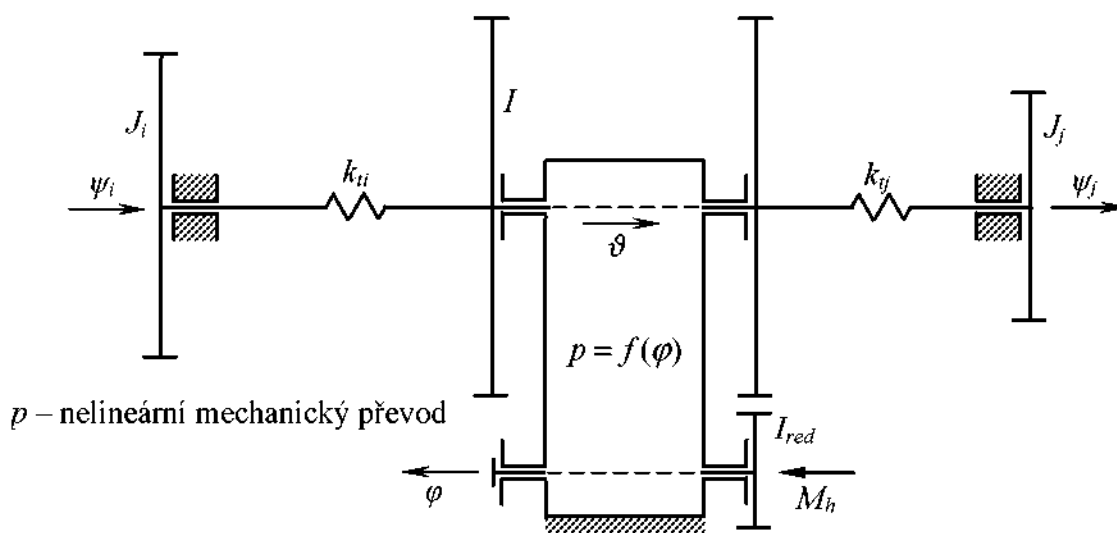
- Setrvačné účinky všech členů, které jsou řazeny před vstupním členem, jsou redukovány na vstupní člen.

- Mechanické převody mezi členy řazenými před vstupním členem a tímto členem jsou konstantní, tj. $I_{red} = konst.$
- Setrvačné účinky vyvažovaného členu o momentu setrvačnosti I k ose rotace jsou dominantní.
- Setrvačné účinky těles vložených mezi vstupním a vyvažovaným členem jsou redukovány příslušným způsobem na tato tělesa.
- Všechny členy vyvažované soustavy jsou dokonale tuhé.
- Kinematické vazby mezi jednotlivými členy vyvažované soustavy jsou ideální.
- Na vyvažovanou soustavu nepůsobí žádné akční síly.



Obr. 3.1: Blokové schéma vyvažované soustavy

Vyvážení setrvačných účinků vyvažovaného členu lze realizovat připojením jednoho nebo několika vyvažujících subsystémů, podle blokového schématu na Obr. 3.2. Samotný vyvažující subsystém je sestaven z pružného členu o dané tuhosti k_{ti} a setrvačné hmoty o definovaném momentu setrvačnosti J_i , $i = 1, 2, \dots$. V případě vyvažování setrvačných účinků periodického vratného rotačního pohybu se zpravidla jedná o torzní tyč. Ta je jedním koncem uchycena k vyvažovanému tělesu s momentem setrvačnosti I a druhým koncem k vyvažující hmotě. Setrvačná hmota vývažku, jejíž pohyb je dán úhlovým natočením ψ_i , je uložena rotačně na rámu stroje s osou rotace totožnou s osou kývání vyvažovaného tělesa.



Obr. 3.2: Blokové schéma mechanické soustavy s připojením vyvažujících subsystémů

3.1.1 Parametry vyvažujících subsystémů

K vyvážení dynamických sil mechanického systému je nutné správně stanovit parametry připojených vyvažujících subsystémů. K jejich určení bude výhodné vyjádřit obecnou zdvihovou závislost $\vartheta = f(\varphi)$ součtem konečného počtu harmonických složek Fourierova rozvoje:

$$\vartheta = A_0 + \sum_n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi), \quad n=1,2,\dots,N. \quad (3.1.2)$$

První a druhou časovou derivací je stanovena rychlost a zrychlení vyvažovaného členu:

$$\begin{aligned} \dot{\vartheta} &= p(\varphi)\dot{\varphi}, & p(\varphi) &= \sum_n n(-A_n \sin n\varphi + B_n \cos n\varphi), \\ \ddot{\vartheta} &= p(\varphi)\ddot{\varphi} + \frac{\partial p(\varphi)}{\partial \varphi} \dot{\varphi}^2, & \frac{\partial p(\varphi)}{\partial \varphi} &= -\sum_n n^2(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi). \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

V rovnici (3.1.3) funkce $p(\varphi)$ představuje geometricky nelineární mechanický převod mezi hnacím členem soustavy a vyvažovaným tělesem.

Vlastní pohybové rovnice soustavy jsou sestaveny použitím Lagrangeových rovnic druhého druhu:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_k} + \frac{\partial E_p}{\partial q_k} = Q_k, \quad (3.1.4)$$

ve kterých q_k jsou zobecněné souřadnice, $\dot{q}_k$ zobecněné rychlosti a Q_k zobecněné síly. Výrazy pro vyjádření kinetické E_k a potenciální E_p energie mechanického systému jsou:

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} \left[(I_{red} + p^2(\varphi)I) \dot{\varphi}^2 + \sum_l J_l \dot{\psi}_l^2 \right], \\ E_p &= \frac{1}{2} \sum_l k_l \xi_l^2, \quad \xi_l = \vartheta(\varphi) - \psi_l, \quad l=1,2,\dots,L, \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

kde ξ_l vyjadřuje vzájemné natočení vyvažovaného tělesa I a příslušné vyvažující hmoty J_l . V případě torzních tyčí se jedná o zkrut ξ_l . Symbol L představuje počet vyvažujících soustav připojených k vyvažovanému systému, který je roven nejvýše počtu N harmonických složek Fourierova rozvoje zdvihové závislosti. Souhrnně je možné vektor zobecněných souřadnic vyjádřit v následujícím tvaru:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \varphi \\ \mathbf{q}_\psi \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_\psi = [\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_l, \dots, \psi_L]. \quad (3.1.6)$$

Obdobně pro vektor zobecněných rychlostí lze psát:

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\mathbf{q}}_\psi \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{q}}_\psi = [\dot{\psi}_1, \dot{\psi}_2, \dots, \dot{\psi}_l, \dots, \dot{\psi}_L]. \quad (3.1.7)$$

Nechť na mechanickou soustavu podle **Obr. 3.1** působí pouze silová dvojice o momentu M_h , kterou pomocí algebraického vektoru lze vyjádřit jako:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_h \\ \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

ve kterém $\mathbf{0}$ představuje nulový vektor o rozměru L . Podle principu virtuálních prací platí:

$$\delta W = \delta \mathbf{q}^T \mathbf{M} = \delta \mathbf{q}^T \mathbf{Q}, \quad (3.1.8)$$

kde

$$\delta \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \delta \varphi \\ \delta \mathbf{q}_\psi \end{bmatrix}, \quad \delta \mathbf{q}_\psi = [\delta \psi_1, \delta \psi_2, \dots, \delta \psi_l, \dots, \delta \psi_L],$$

potom vektor zobecněných sil je:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} M_h \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (3.1.9)$$

Stanovením příslušných derivací kinetické energie E_k v Lagrangeových rovnicích (3.1.4):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}} \right) &= (I_{red} + p^2(\varphi)I) \ddot{\varphi} + 2Ip(\varphi) \frac{\partial p(\varphi)}{\partial \varphi} \dot{\varphi}^2, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\psi}_l} \right) &= J_l \ddot{\psi}_l, \quad l=1,2,\dots,L, \\ \frac{\partial E_k}{\partial \varphi} &= Ip(\varphi) \frac{\partial p(\varphi)}{\partial \varphi} \dot{\varphi}^2 \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

a potenciální energie E_p :

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_p}{\partial \varphi} &= \sum_i k_{ii} \xi_i \frac{\partial \xi_i}{\partial \varphi} = \frac{\partial \mathcal{V}(\varphi)}{\partial \varphi} \sum_i k_{ii} \xi_i = p(\varphi) \sum_i k_{ii} \xi_i, \\ \frac{\partial E_p}{\partial \psi_l} &= -k_{il} \xi_l, \\ \xi_i &= \mathcal{V}(\varphi) - \psi_i, \quad l=1,2,\dots,L, \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

lze určit $(L+1)$ vlastních pohybových rovnic, kdy první z nich je vyjádřena vztahem:

$$\begin{aligned} (I_{red} + p^2(\varphi)I) \ddot{\varphi} + Ip(\varphi) \frac{\partial p(\varphi)}{\partial \varphi} \dot{\varphi}^2 + p(\varphi) \sum_i k_{ii} \xi_i &= M_h, \\ \xi_i &= \varphi - \psi_i, \quad l=1,2,\dots,L. \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

Zbývajících L nezávislých rovnic lze zapsat v maticovém vyjádření:

$$\mathbf{M}_l \ddot{\mathbf{q}}_\psi + \mathbf{K}_l \mathbf{q}_\psi = \mathcal{V} \mathbf{K}_l \mathbf{E}, \quad (3.1.13)$$

ve kterém $\mathbf{M}_l$ je diagonální matice hmotnosti obsahující momenty setrvačnosti I_l vyvažujících hmot. Matice $\mathbf{K}_l$ vyjadřuje diagonální matice tuhosti, která obsahuje torzní tuhosti k_{il} jednotlivých pružných prvků. Symbol $\mathbf{E}$ představuje jednotkovou matici. Vektor $\mathbf{q}_\psi$ je tvořen prvky ψ_l , $l=1,2,\dots,L$. Rovnici (3.1.13) lze dále upravit:

$$\ddot{\mathbf{q}}_\psi + \mathbf{\Omega}_0^2 \mathbf{q}_\psi = \mathcal{V} \mathbf{\Omega}_0^2 \mathbf{E} \quad (3.1.14)$$

zavedením spektrální matice mechanické soustavy $\mathbf{\Omega}_0$, která je definována výrazem:

$$\mathbf{\Omega}_0^2 = \mathbf{M}_l^{-1} \mathbf{K}_l.$$

Za předpokladu rovnoměrné rotace hnacího členu soustavy dané podmínkou (3.1.1) lze stanovit partikulární řešení soustavy nezávislých diferenciálních rovnic (3.1.14) pro ustálený chod mechanického systému:

$$\psi_l = A_0 + \sum_n \frac{n\Omega_{0l}^2}{\Omega_{0l}^2 - (n\Omega)^2} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi), \quad (3.1.15)$$

jehož první a druhá časová derivace vyjadřují úhlovou rychlost a úhlové zrychlení vyvažujících hmot:

$$\dot{\psi}_l = \sum_n \frac{n\Omega\Omega_{0l}^2}{\Omega_{0l}^2 - (n\Omega)^2} (-A_n \sin n\varphi + B_n \cos n\varphi), \quad (3.1.16)$$

$$\ddot{\psi}_l = -\sum_n \frac{(n\Omega\Omega_{0l})^2}{\Omega_{0l}^2 - (n\Omega)^2} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi). \quad (3.1.17)$$

Z požadavku vyváženosti mechanické soustavy, který je stanoven podmínkou:

$$M_h = 0Nm,$$

a při dosazení rovnice (3.1.15) do první vlastní pohybové rovnice (3.1.12) lze odvodit následující matematické vyjádření:

$$-I \sum_n (n\Omega)^2 (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) + \sum_n \left\{ \left[\sum_l k_{ll} \left(1 - \frac{\Omega_{0l}^2}{\Omega_{0l}^2 - (n\Omega)^2} \right) \right] (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \right\} = 0. \quad (3.1.18)$$

Porovnáním koeficientů u kosinových a sinových složek členů rovnice (3.1.18) plynou vztahy pro výpočet příslušných parametrů J_l a k_{ll} vyvažujícího subsystému v závislosti na velikosti vyvažované hmoty I , jmenovité úhlové frekvenci Ω strojního zařízení a n -té vyvažované harmonické složce rozvoje zdvihové závislosti:

$$I + \sum_l \left(\frac{k_{ll}}{\Omega_{0l}^2 - (n\Omega)^2} \right) = 0, \quad \Omega_{0l}^2 = \frac{k_{ll}}{J_l}, \quad l = 1, 2, \dots, L. \quad (3.1.19)$$

V obecném případě je počet rovnic (3.1.19) shodný s počtem N harmonických složek Fourierova rozvoje zdvihové závislosti (3.1.2). Tzn., že by se muselo k vyvažovanému tělesu připojit N vyvažujících soustav s momenty setrvačnosti vyvažujících hmot J_l a torzními tuhostmi pružných prvků k_{ll} k úplnému vyvážení setrvačných účinků vyvažovaného tělesa. Protože počet uspořádaných dvojic J_l a k_{ll} je dvojnásobný vzhledem k počtu rovnic (3.1.19), je nutné např. momenty setrvačnosti vývažků J_l zvolit a tuhosti k_{ll} dopočítat.

Avšak v praktické realizaci může být vyvážení setrvačných účinků všech harmonických složek zdvihové závislosti velmi obtížně proveditelné. Především tehdy, kdy je zdvihová závislost složena z relativně velkého počtu harmonických složek. Ve skutečnosti bude možné připojit k vyvažované hmotě jen několik málo vyvažujících subsystémů, které by eliminovaly setrvačné účinky příslušných n -tých složek Fourierova rozvoje zdvihové závislosti.

Nyní se naskytá otázka, které složky Fourierova rozvoje zdvihové závislosti budou dominantní a budou nejvíce svými účinky přispívat k velikosti setrvačných sil, a tedy které potlačit připojením příslušných vyvažujících subsystémů. Ne vždy to nutně musí být ty, u kterých se vyskytují největší hodnoty koeficientů u členů rozvoje zdvihové závislosti. K tomuto rozhodnutí poslouží kritérium střední hodnoty kinetické energie a kritérium efektivních hodnot momentu setrvačné dvojice.

3.1.2 Kritérium střední hodnoty kinetické energie

Kritérium střední hodnoty kinetické energie vyvažovaného členu za předpokladu rovnoměrné rotace hnacího členu systému vychází z rovnice:

$$\bar{E}_k = \frac{1}{T} \int_T E_k(t) dt = \frac{1}{2} I \frac{1}{T} \int_T \dot{\vartheta}^2 dt, \quad (3.1.20)$$

kde z vyjádření zdvihové závislosti ve tvaru Fourierova rozvoje podle (3.1.2) plyne časovou derivací:

$$\dot{\vartheta} = \sum_n n\Omega (-A_n \sin n\varphi + B_n \cos n\varphi), \quad \varphi = \Omega t + \varphi_0. \quad (3.1.21)$$

Zavedením substituce:

$$a_n = n\Omega B_n, \quad b_n = -n\Omega A_n \quad (3.1.22)$$

lze psát:

$$\dot{\vartheta} = \sum_n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi). \quad (3.1.23)$$

Konečně kritérium střední hodnoty kinetické energie vyvažovaného tělesa při dosazení (3.1.23) do (3.1.20) lze vyjádřit následujícím vztahem:

$$\bar{E}_k = \frac{1}{2} I \frac{1}{T} \int_T \dot{\vartheta}^2 dt = \frac{1}{4} I \Omega^2 \sum_n n^2 (B_n^2 + A_n^2), \quad (3.1.24)$$

protože podle Parsevalova teorému, viz (B.8) v příloze B, platí:

$$\frac{1}{T} \int_T \dot{\vartheta}^2 dt = \frac{1}{2} \sum_n (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{2} \Omega^2 \sum_n n^2 (B_n^2 + A_n^2).$$

Podle vztahu (3.1.24) lze stanovit střední hodnotu kinetické energie $\bar{E}_k$ ze součtu příspěvků kinetických energií jednotlivých harmonických složek:

$$E_{nk} = \frac{1}{4} I (n\Omega)^2 (B_n^2 + A_n^2), \quad (3.1.25)$$

tedy lze formulovat jednoduchý výraz:

$$\bar{E}_k = \sum_n E_{nk}. \quad (3.1.26)$$

Ty harmonické složky zdvihové závislosti, jejíž příspěvky kinetických energií E_{nk} nabývají největších hodnot a mají tudíž největší podíl na střední hodnotě kinetické energie vyvažovaného členu mechanické soustavy, je účelné vyvažovat.

3.1.3 Kritérium efektivních hodnot momentu setrvačné dvojice

Nechť osa rotace vyvažovaného tělesa je hlavní osou setrvačnosti tohoto tělesa a hnací člen soustavy koná rovnoměrný rotační pohyb. Potom podle d'Alembertova principu je velikost výsledné setrvačné dvojice dána výrazem:

$$|\vec{M}^D| = I \ddot{\vartheta}. \quad (3.1.27)$$

Rovnici (3.1.27) s dosazením vztahu (3.1.3) pro úhlové zrychlení $\ddot{\vartheta}$ lze zapsat:

$$M^D = I \sum_n n^2 (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \Omega^2, \quad (3.1.28)$$

přičemž na základě předpokladu je:

$$\varphi = \Omega t + \varphi_0, \quad \dot{\varphi} = \Omega, \quad \ddot{\varphi} = 0.$$

V dalším kroku je výhodné pro následující úvahy vyjádřit rovnici pro moment setrvačné dvojice (3.1.28) v komplexním a v komplexně sdruženém tvaru:

$$M^D = \sum_n \left(c_n e^{in\Omega t} \right), \quad \overline{M^D} = \sum_n \left(c_{-n} e^{-in\Omega t} \right), \quad (3.1.29)$$

ve kterém jsou podle (B.6) přílohy B:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2} I (n\Omega)^2 (A_n - iB_n), \\ c_{-n} &= \frac{1}{2} I (n\Omega)^2 (A_n + iB_n) = \overline{c_n}. \end{aligned} \quad (3.1.30)$$

Užitím vztahů (3.1.29) je možné definovat střední výkon momentu setrvačné dvojice vyvažovaného tělesa výrazem:

$$P_M = \frac{1}{T} \int_T M^D \overline{M^D} dt,$$

který je podle (B.8) přílohy B roven:

$$P_M = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2} I^2 (n\Omega)^4 (A_n^2 + B_n^2) \right] = \sum_{n=0}^{\infty} P_{nM}. \quad (3.1.31)$$

Střední hodnota výkonu n -té harmonické složky je tedy vyjádřena předpisem:

$$P_{nM} = \frac{1}{2} I^2 (n\Omega)^4 (A_n^2 + B_n^2), \quad (3.1.32)$$

pomocí kterého je zavedena efektivní hodnota n -té harmonické složky momentu setrvačné dvojice definičním vztahem:

$$M_{nEff}^D = \sqrt{P_{nM}} = \frac{1}{\sqrt{2}} I (n\Omega)^2 \sqrt{A_n^2 + B_n^2}. \quad (3.1.33)$$

Ta efektivní hodnota n -té harmonické složky momentu setrvačné dvojice M_{nEff}^D podle (3.1.33), která nabývá největší velikosti, se stává kritériem k vyvážení účinků příslušné harmonické složky zdvihové závislosti.

3.1.4 Vyjádření hnacího momentu

Za předpokladu rovnoměrné rotace hnacího členu soustavy s vyvažováním dojde ke zjednodušení první vlastní pohybové rovnice systému (3.1.12):

$$Ip(\varphi) \frac{\partial p(\varphi)}{\partial \varphi} \dot{\varphi}^2 + p(\varphi) \sum_l k_{il} \xi_l = M_h, \quad (3.1.34)$$

ve které:

$$\begin{aligned} \xi_l &= \vartheta(\varphi) - \psi_l, & l &= 1, 2, \dots, L, \\ \varphi &= \Omega t + \varphi_0, & \dot{\varphi} &= \Omega, & \ddot{\varphi} &= 0. \end{aligned}$$

Dosazením vztahů (3.1.2) a (3.1.15) do výrazu pro vzájemné natočení vyvažovaného tělesa a vyvažujících hmot lze odvodit:

$$\xi_l = \sum_n \frac{(n\Omega)^2}{(n\Omega)^2 - \Omega_{0l}^2} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi). \quad (3.1.35)$$

Sloučením rovnic (3.1.34) a (3.1.35) vychází:

$$p(\varphi) \left[I\Omega^2 \frac{\partial p(\varphi)}{\partial \varphi} + \sum_l k_{il} \sum_n \frac{(n\Omega)^2}{(n\Omega)^2 - \Omega_{0l}^2} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \right] = M_h. \quad (3.1.36)$$

Vyjádřením derivace převodu:

$$\frac{\partial p(\varphi)}{\partial \varphi} = - \sum_n n^2 (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi)$$

v (3.1.36) a záměnou sumací je možné vypočítat:

$$p(\varphi) \sum_n \left\{ (n\Omega)^2 \left[\sum_l \left(\frac{k_{il}}{(n\Omega)^2 - \Omega_{0l}^2} \right) - I \right] (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \right\} = M_h. \quad (3.1.37)$$

A dále zavedením substituce:

$$C_n = (n\Omega)^2 \left[\sum_l \left(\frac{k_{il}}{(n\Omega)^2 - \Omega_{0l}^2} \right) - I \right], \quad \Omega_{0l}^2 = \frac{k_{il}}{J_l}, \quad l = 1, 2, \dots, L \quad (3.1.38)$$

dojde k jednoduchému vyjádření vztahu pro potřebný hnací moment pohonu dané mechanické soustavy:

$$M_h = p(t)q(t), \quad (3.1.39)$$

ve kterém jsou:

$$p(t) = \sum_n n(-A_n \sin n\varphi + B_n \cos n\varphi), \quad q(t) = \sum_n C_n (A_n \sin n\varphi + B_n \cos n\varphi). \quad (3.1.40)$$

Vztahem (3.1.39) je vyjádřen součin dvou trigonometrických řad $p(t)$ a $q(t)$, pro které podle (B.9) přílohy B platí nerovnost:

$$\left| \frac{1}{T} \int_0^T p(t) \overline{q(t)} dt \right| \leq \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T |p(t)|^2 dt} \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T |q(t)|^2 dt}. \quad (3.1.41)$$

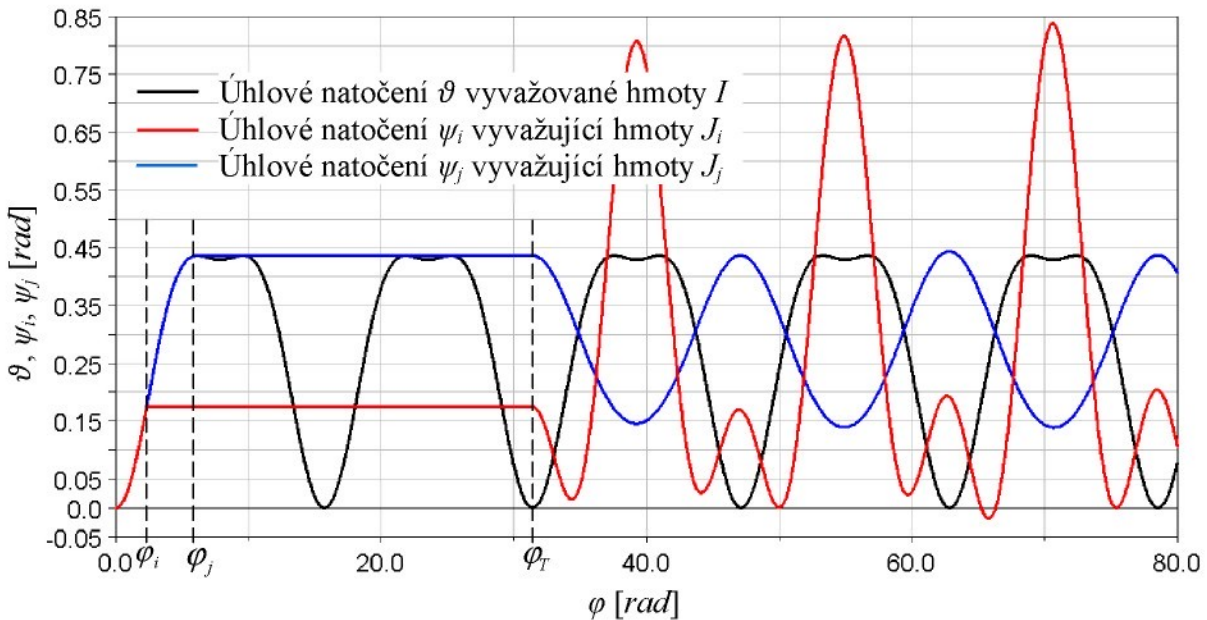
Tuto nerovnost lze podle (B.8) dále upravit:

$$\left| \frac{1}{T} \int_0^T p(t) \overline{q(t)} dt \right| \leq \frac{1}{2} \sqrt{\sum_n n^2 (A_n^2 + B_n^2)} \sqrt{\sum_n C_n^2 (A_n^2 + B_n^2)} = \tilde{M}_h, \quad (3.1.42)$$

ve které koeficient C_n je dán rovnicí (3.1.38) a A_n, B_n jsou koeficienty rozvoje zdvihové závislosti do Fourierovy řady. Samotné číslo $\tilde{M}_h$ nemá konkrétní fyzikální význam, jedná se pouze o kvantitativní vyjádření součinu trigonometrických řad $p(t)$ a $q(t)$. Intuitivně se dá předpokládat, jestliže bude $\tilde{M}_h$ nabývat nejmenších hodnot bude též minimalizována efektivní hodnota potřebného hnacího momentu M_{hEff} mechanické soustavy s vyvažováním. A následné výpočetní simulace tuto skutečnost prokázaly. Minimalizace efektivní hodnoty hnacího momentu je jedním z cílů vyvažování setrvačných účinků tělesa pomocí vyvažujících, resp. seizmických, hmot. Tedy hodnota čísla $\tilde{M}_h$ bude následně nabývat význam při stanovení parametrů J_l a k_{tl} samotných vyvažujících subsystémů.

3.1.5 Docílení ustáleného chodu systému

Předcházející odvození byla prováděna za předpokladu, že daný mechanický systém je ve stavu ustáleného chodu. Pro správnou funkci takové soustavy jsou též důležité délky časových intervalů, po které probíhají přechodové děje, tzn. rozběh systému na pracovní frekvenci stroje a jeho zastavení. V praxi by mohlo být uvedení takové soustavy do tohoto stavu problematické, především v tom případě, kdy je vyžadováno, např. z technologických důvodů, razantní najetí na příslušné pracovní otáčky stroje. Dosud tato problematika u systémů s vyvažováním setrvačných účinků nebyla uspokojivě vyřešena.



Obr. 3.3: Úhlová natočení

Jedním z možných způsobů rozběhu mechanického systému s vyvažováním setrvačných účinků pracovního členu je takové provedení, jehož cílem je řízené a kontrolované dosažení ustáleného stavu této soustavy. Na **Obr. 3.3**, který představuje úhlová natočení jednotlivých pohybujících se hmot soustavy v závislosti na úhlu natočení hnacího členu, je ukázán princip takového rozběhu. Toho by mohlo být dosaženo způsobem, jehož podstata spočívá v tom, že nejprve dojde k natočení vyvažujících hmot do takových poloh, které jsou shodné nebo blízké polohám, jež jsou splňovány při vzájemném pohybu jednotlivých členů mechanického systému v ustáleném stavu pro dané tuhosti k_{tl} pružných prvků a dané momenty setrvačnosti vyvažujících hmot J_l . Tyto počáteční podmínky ψ_{l0} je možné určit na základě soustavy rovnic (3.1.15) při stanoveném úhlovém natočení φ_l hnacího členu. V **Obr. 3.3** jsou dány úhlovými natočeními φ_i a φ_j , kterým odpovídá $\psi_l(\varphi = \varphi_i) = \psi_{l0}$ a $\psi_l(\varphi = \varphi_j) = \psi_{l0}$. V těchto polohách jsou jednotlivá vyvažující tělesa zajištěna proti pohybu zádržným systémem, jehož aktivním prvkem může být např. elektromagnetická spojka, která na základě průchodu proudu je buď sepnuta, nebo vypnuta. Poté dojde k rozběhu pouze samotného vyvažovaného mechanismu na pracovní úhlovou rychlost ω_R , které obecně nemusí být shodná se jmenovitou úhlovou frekvencí Ω , na kterou je navrhováno vyvažování setrvačných sil mechanického systému. Během tohoto rozběhu se vyvažující hmoty stále nacházejí ve stanovených polohách ψ_{l0} . Následně v přesně definovaném okamžiku dojde k uvolnění vyvažujících hmot a k jejich uvedení do pohybu, který je na počátku podpořen silovými účinky pružných elementů. Daný okamžik odblokování vyvažujících těles lze odvodit z úhlového natočení $\varphi(t = T) = \varphi_T$ hnacího členu soustavy. Na **Obr. 3.3** je ukázán popisovaný děj pro vyvažování účinků dvou harmonických složek zdvihové závislosti.

K tomu, aby mechanický systém s vyvažováním setrvačných účinků fungoval uvedeným způsobem, je nutné doplnit jeho řídicí strukturu o další algoritmy. Ty musí zajistit v přijatelné přesnosti synchronizaci spuštění, případně zablokování, zádržných systémů s pohybem jednotlivých členů vyvažované soustavy v době trvání přechodových dějů. Dále je vhodné, aby celý systém byl poháněn řízeným servopohonem, protože musí být splněny vzhledem ke způsobu rozběhu počáteční polohy jednotlivých těles. K technické realizaci zmiňovaného způsobu rozběhu je třeba vybavit seismické hmoty snímači polohy, jejichž výstupní signál bude zpracováván řídicím systémem. Informaci o okamžitém natočení hnacího členu soustavy lze získat pomocí komutačního snímače, který je nedílnou součástí vybavení elektromotorů. U rotačních motorů se jedná nejčastěji o vícepólový resolver.

Tento způsob rozběhu má tu výhodu, že při najetí mechanického systému s vyvažováním na pracovní frekvenci ω nedochází k přechodu přes některou z rezonancí připojených vyvažujících subsystémů, které jsou stanoveny následujícími matematickými výrazy:

$$\Omega_{0l} = \sqrt{\frac{k_{tl}}{J_l}}, \quad l=1,2,\dots,L. \quad (3.1.43)$$

Nejvíce se toto skutečnost bude týkat případu, kdy dochází k vyvažování první harmonické složky zdvihové závislosti (3.1.2). Aby rovnice (3.1.19) pro $n=1$ byla splněna, musí první vlastní úhlová frekvence vyhovovat nerovnosti:

$$\Omega_{01} = \sqrt{\frac{k_{t1}}{J_1}} < \Omega,$$

protože I , J_1 a k_{t1} nabývají z fyzikální podstaty vždy kladných hodnot. Řešením rovnice (3.1.19) je možné vypočítat i záporné hodnoty proměnných J_1 a k_{t1} .

Protože počáteční natočení vyvažujících těles je počítáno užitím vztahů (3.1.15), které jsou též závislé na momentech setrvačnosti J_l a torzních tuhostech k_{tl} , budou tvořit společně s podmínkami vyváženosti (3.1.19) soustavu rovnic k jednoznačnému stanovení příslušných parametrů jednotlivých vyvažujících subsystémů. Na základě soustavy rovnic (3.1.15) a (3.1.19) je tedy hledána taková množina uspořádaných dvojic J_l a k_{tl} pro $l=1,2,\dots,L$, aby

hodnota čísla $\tilde{M}_h$ podle rovnice (3.1.42) byla minimální. Avšak tato podmínka není nezbytně nutná k výpočtu potřebných parametrů vyvažujících subsystémů, dává pouze informaci o relaci hodnot uspořádaných dvojic J_i a k_{ti} k možné efektivní hodnotě potřebného hnacího momentu pohonu. Ne vždy nejmenší hodnota parametru $\tilde{M}_h$ bude odpovídat skutečně realizovatelným řešením soustavy rovnic (3.1.15) a (3.1.19). Vždy bude nutné posuodit, zda předcházejícím postupem stanovené hodnoty momentů setrvačnosti J_i vyvažujících hmot a torzní tuhosti k_{ti} pružných prvků jsou reálné. Tedy daný vyvažující subsystém je uskutečnitelný vzhledem k technickým a technologickým možnostem, samotnému provedení a začlenění k vyvažované soustavě. Mohou nastat takové případy řešení, kdy vyvažující tělesa budou velmi hmotná, tuhosti pružných prvků zase naopak malé, případně deformace pružin příliš velké atp.

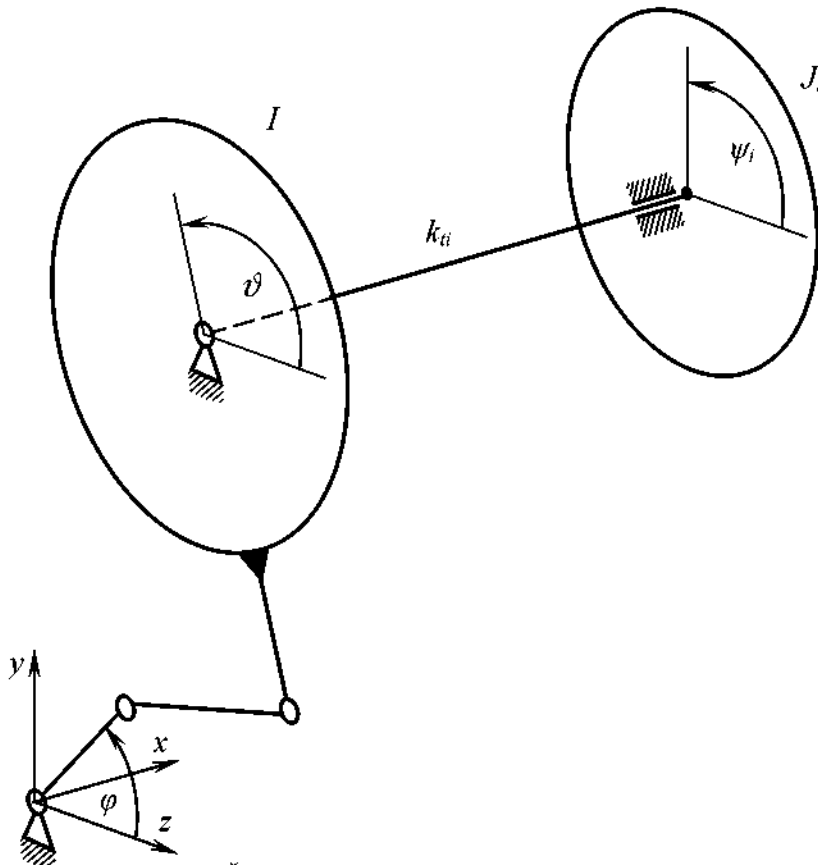
Pro vyvážení setrvačných účinků hmoty o momentu setrvačnosti I jedním vyvažujícím subsystémem, který vyvažuje i -tou harmonickou složku zdvihové závislosti, mají vztahy (3.1.15) a (3.1.19) podobu:

$$\begin{aligned}\psi_i &= A_0 + \sum_n \frac{\Omega_{0i}^2}{\Omega_{0i}^2 - (n\Omega)^2} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi), \quad n=1,2,\dots,N, \\ 0 &= I + \frac{k_{ti}}{\Omega_{0i}^2 - (i\Omega)^2},\end{aligned}\tag{3.1.44}$$

ve kterých je zavedeno:

$$\Omega_{0i}^2 = \frac{k_{ti}}{J_i}.$$

Na **Obr. 3.4** je ukázáno kinematické schéma vyvažovaného čtyřkloubového mechanismu se zařazením jednoho vyvažujícího subsystému.



Obr. 3.4: Čtyřkloubový mechanismus s vyvažováním

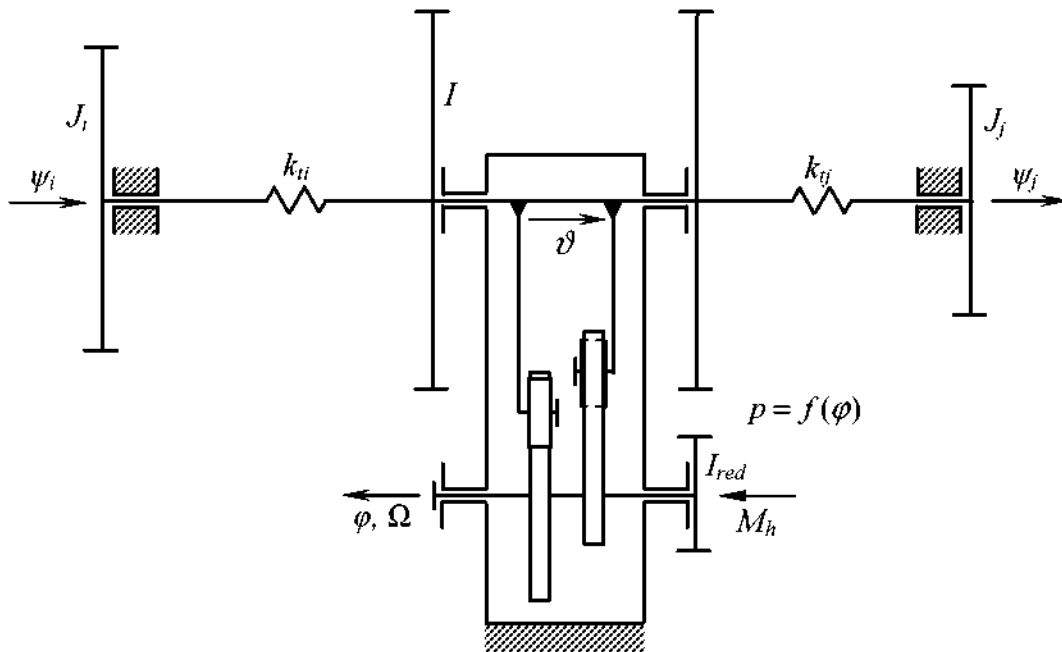
Obdobně pro setrvačnou hmotu I vyvažovanou dvěma vyvažujícími systémy, které vyvažují i -tou a j -tou harmonickou složku zdvihové závislosti, lze stanovit:

$$\begin{aligned}\psi_i &= A_0 + \sum_n \frac{\Omega_{0i}^2}{\Omega_{0i}^2 - (n\Omega)^2} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi), \\ \psi_j &= A_0 + \sum_n \frac{\Omega_{0j}^2}{\Omega_{0j}^2 - (n\Omega)^2} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi), \\ 0 &= I + \frac{k_{ti}}{\Omega_{0i}^2 - (i\Omega)^2} + \frac{k_{tj}}{\Omega_{0j}^2 - (j\Omega)^2}, \\ 0 &= I + \frac{k_{ti}}{\Omega_{0i}^2 - (j\Omega)^2} + \frac{k_{tj}}{\Omega_{0j}^2 - (j\Omega)^2}, \quad n=1,2,\dots,N\end{aligned}\tag{3.1.45}$$

přičemž:

$$\Omega_{0i}^2 = \frac{k_{ti}}{J_i}, \quad \Omega_{0j}^2 = \frac{k_{tj}}{J_j}.$$

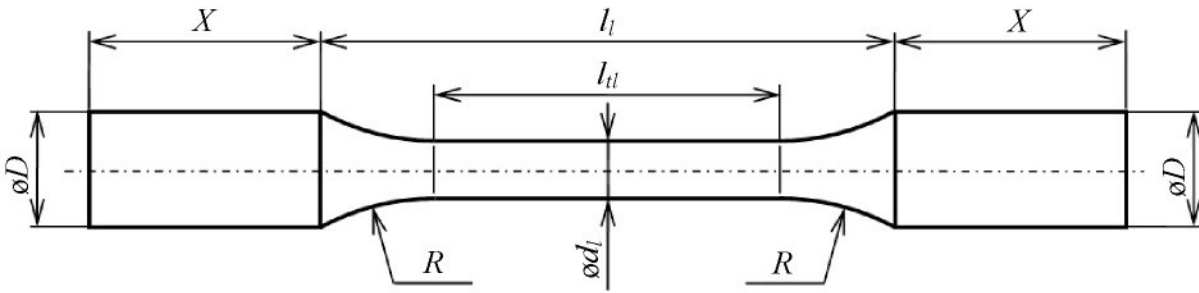
Na **Obr. 3.5** je ukázáno kinematické schéma vyvažovaného vačkového mechanismu se zařízením dvou vyvažujících subsystémů.



Obr. 3.5: Vačkový mechanismus s vyvažováním

3.2 Pružné elementy

Jako pružný element každého z vyvažujících subsystémů byla s výhodou zvolena torzní tyč. Je to jednoduchá pružina založená na zkrutné poddajnosti tyče, která má v činné délce l_t kruhový průřez o průměru d_t , viz **Obr. 3.6**. Na obou koncích bývá opatřena upevňovacími hlavicemi pro uchycení ke spojovaným součástem. Toto spojení může být v závislosti na přenášeném krouticím momentu M_{kt} realizováno nalisováním propojovaných součástí, polygonovými spoji, svěrnými spoji, případně upevňovací hlavice mohou být opatřeny drážkováním, atp. Pro lepší využití materiálu se též mohou konstruovat svazky plochých tyčí, které jsou lehčí a mají větší životnost. Při konstrukci je nutné vyloučit ohybové namáhání tyče např. jejím uložením ve vedení a zajistit tak jen namáhání v krutu.



Obr. 3.6: Torzní tyč

Velkou výhodou torzních tyčí je, že její setrvačné účinky jsou zanedbatelné vzhledem k vyvažovanému tělesu a vyvažujícím hmotám a zatěžovací charakteristika je lineární. Rozměry samotné tyče byly navrhovány s ohledem k její požadované tuhosti k_{tl} , prostorové zástavbě stroje a velikosti tečných napětí τ_t , které je definováno následující rovnicí:

$$\tau_t = \frac{M_{kl}}{W_{kl}}, \quad (3.2.1)$$

ve které M_{kl} značí krouticí moment a W_{kl} průřezový modul v krutu. Pro tyč stálého průřezu se spočítá podle vzorce:

$$W_{kl} = \frac{\pi}{16} d_l^3, \quad (3.2.2)$$

kde d_l je průměr tyče.

Vyjádřením krouticího momentu M_k jako součinu torzní tuhosti tyče k_{tl} a úhlu vzájemného natočení konců tyče ξ_l a dosazením vztahu (3.2.2) pro výpočet průřezového modulu v krutu W_{kl} do (3.2.1) lze stanovit maximální tečné napětí τ_t podle:

$$\tau_t = \frac{16k_{tl}\xi_l}{\pi d_l^3}. \quad (3.2.3)$$

Velikost tohoto napětí τ_t musí být porovnána s mezí únavy τ_C ve střídavém krutu, kterou lze předpokládat u zušlechťených ocelí vzhledem k mezi pevnosti v tahu σ_{Pt} podle přepočtu:

$$\tau_t \leq \tau_C = 0.25\sigma_{Pt}, \quad (3.2.4)$$

viz více v [4] a [10]. Protože tento vztah byl stanoven na základě zkoušek meze únavy v krutu na tyčích o průměru $\phi 10mm$, je nutné při jiném průměru d_l tyče uvažovat o vlivu velikosti části, který je vyjádřen součinitelem vlivu velikosti ε_{vt} . Mez únavy v krutu τ_C s rostoucím průměrem klesá.

U strojních součástí se běžně vyskytují změny průřezu a tvaru, které odpovídají funkčním a konstrukčním požadavkům. Jedná se např. o nalisování, osazení, zápichy, drážky, závity atd. Na součástech tak vznikají podmínky pro lokální zvýšení nominálních napětí. Souhrnně jsou označovány uvedené změny tvaru součástí termínem konstrukční vruby. Ty jsou charakterizovány svými nominálními rozměry, na jejichž základě bývá stanoven součinitel tvaru α_t v případě namáhání součásti krutem. Tento součinitel je závislý na geometrickém tvaru vrubu a tvaru průřezu součásti, ale ne na materiálu a velikosti napětí. Skutečný vliv vrubu při cyklickém namáhání je však menší, než by vyplývalo z teoretického součinitele tvaru, proto je dále zaveden součinitel vrubu β_t . Ten se při běžných výpočtech určí z rovnice:

$$\beta_t = 1 + q_t(\alpha_t - 1), \quad (3.2.5)$$

pro případ cyklického namáhání součásti krutem. Ve vztahu (3.2.5) je zaveden součinitel vrubové citlivosti q_t , který vyjadřuje poměr meze kluzu a meze pevnosti materiálu. Pro potřeby konstruktérů a výpočtářů byly zpracovány diagramy a nomogramy, pomocí kterých je možno stanovit velikosti součinitele tvaru α_t a součinitele vrubové citlivosti q_t , např. v [10].

Též kvalita povrchové vrstvy materiálu je určující pro nukleaci únavové trhliny. Jakost povrchu v důsledku jeho způsobu opracování má velký vliv na skutečnou mez únavy. Vliv způsobu opracování povrchu součásti je vyjádřen tzv. součinitelem jakosti povrchu η_{Pt} pro případ cyklického namáhání součásti krutem. Pro běžné výpočty byly opět vypracovány diagramy k určení součinitele jakosti povrchu. Z diagramů je patrné, že s rostoucí pevností materiálu klesá součinitel jakosti povrchu η_{Pt} a tím i mez únavy τ_C .

Zavedením všech výše uvedených vlivů do (3.2.4) a ještě suvažováním činitele bezpečnosti ε_b lze stanovit hodnotu meze únavy ve střídavém krutu podle:

$$\tau_C = 0.25\sigma_{Pt} \frac{\varepsilon_v \eta_{Pt}}{\varepsilon_b \beta_t} \geq \tau_t. \quad (3.2.6)$$

Dosazením nerovnice (3.2.6) do vztahu (3.2.3) je možné jednoznačně určit průměr torzní tyče:

$$d_t \geq \sqrt[3]{\frac{16\varepsilon_b \beta_t k_{tl} \xi_l}{\pi 0.25 \varepsilon_v \eta_{Pt} \sigma_{Pt}}}. \quad (3.2.7)$$

Ze známého definičního vztahu pro výpočet torzní tuhosti k_{tl} tyče:

$$k_{tl} = \frac{GJ_{pt}}{l_{tl}}, \quad (3.2.8)$$

ve kterém G značí modul pružnosti ve smyku a J_{pt} polární moment setrvačnosti plochy průřezu k ose tyče, je možné stanovit závislost činné délky torzní tyče l_{tl} na jejím průměru d_t jako:

$$l_{tl} = \frac{E\pi d_t^4}{64(1+\mu)k_{tl}}. \quad (3.2.9)$$

V rovnici (3.2.8) byl ještě vyjádřen modul pružnosti ve smyku G a polární moment setrvačnosti plochy průřezu J_{pt} pomocí následujících definičních vztahů:

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}, \quad J_{pt} = \frac{\pi d_t^4}{32},$$

přičemž E je Youngův modul pružnosti v tahu/tlaku a μ Poissonův poměr.

3.3 Kriteria stupně vyvážení setrvačných účinků

Jedním z kritérií stupně vyvážení byla zvolena nerovnoměrnost chodu hnacího členu soustavy. Ani v ustáleném chodu nemívají hnací členy u reálného stroje konstantní rychlost. Tato skutečnost je způsobena tím, že zatížení nemá zpravidla konstantní průběh, nebo ve stroji dochází k pohybu mechanismů s periodicky se měnícím převodem, takže jejich geometricko-hmotnostní charakteristiky se mění. Časový průběh rychlosti vstupního členu systému má tedy periodický charakter:

$$\dot{\varphi}(t) = \dot{\varphi}(t+T). \quad (3.3.1)$$

Chod strojového agregátu proto bývá charakterizován střední, resp. nominální, rychlostí $\dot{\varphi}_n$ a nerovnoměrností chodu δ . Střední rychlost je dána vztahem:

$$\dot{\varphi}_n = \frac{1}{T} \int_0^T \dot{\varphi}(t) dt. \quad (3.3.2)$$

Nerovnoměrnost je smluvně definována jako:

$$\delta = \frac{\dot{\varphi}_{\max} - \dot{\varphi}_{\min}}{\dot{\varphi}_n}. \quad (3.3.3)$$

Čím menší bude hodnota nerovnoměrnosti chodu δ , tím lepšího stupně vyvážení bude dosaženo.

Dalším z možných kritérií je efektivní hodnota hnacího momentu pohonu, která je vyjádřena s využitím rovnice (3.1.39) následujícím vztahem:

$$M_{hEff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T |M_h(t)|^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T |p(t)q(t)|^2 dt}. \quad (3.3.4)$$

Jedná se o myšlený náhradní konstantní moment, který dodá systému stejný střední výkon jako moment časově proměnný, neboli střední výkon momentu odpovídá kvadrátu jeho efektivní hodnoty. Z matematického hlediska se jedná o kvadratický průměr periodicky proměnné funkce. Opět bude platit, že menší efektivní hodnota hnacího momentu pohonu vypovídá o lepším stupni vyvážení.

Dále lze očekávat příznivý vliv vyvažujících subsystémů na velikost silového zatížení převodového mechanismu mezi hnacím a pracovním členem soustavy, jako je např. vačkový mechanismus, čtyřkloubový mechanismus, aj., a tedy i přenosu silových účinků mezi jednotlivými členy a do rámu stroje. Následkem této skutečnosti dojde ke snížení dynamického namáhání jednotlivých dílů stroje a ke zvýšení dynamické únosnosti prvků, které vytvářejí kinematické propojení mezi jednotlivými členy mechanického systému, jako jsou např. ložiska, kuličkové šrouby, matice kuličkových šroubů, řemenové a řetězové převody, převody ozubenými koly, spojky, atd. Každá z kinematických vazeb mechanického systému je charakterizována velikostí $|R_i|$ výsledné reakce vazbou přenášené. Mechanické systémy s příznivějším stupněm vyvážení mají nižší hodnoty velikostí reakcí.

Kvantitativně lze jednotlivá kritéria vyčíslit podle rovnice:

$$b_v = 1 - \frac{v}{v_z}, \quad v = \delta, M_{hEff}, |R_i|, \quad (3.3.5)$$

kde index Z udává příslušnost k mechanické soustavě bez vyvažování. V procentuálním vyjádření se jedná o míru změny sledované veličiny u soustavy s vyvažováním vzhledem k soustavě bez vyvažování setrvačných účinků. V případě kladných hodnot bude docházet k příznivým účinkům vyvažujících subsystémů na chod vyvažovaného tělesa, případně mechanismu.

4 Simulační modely

V současné době se vyskytuje celá řada různorodých strojních zařízení a mechanismů určených k užívání v rozličných oborech lidské činnosti. Účelem každého takového zařízení je především usnadnění a zvýšení efektivity a produktivity lidského konání. Jak již bylo uvedeno, drtivá většina těchto zařízení se za chodu projevuje dynamickými účinky, které jsou dále přenášeny do okolí a výrazně ovlivňují jejich rozsah použitelnosti a životnost. Z důvodu různorodosti těchto zařízení není možné analyzovat všechny. Proto jsou předmětem následujících analýz dva typy mechanických systémů, které transformují rotační pohyb hnacího členu na periodický vratný rotační pohyb pracovního členu. Jedná se o vačkový mechanismus s vahadlem a kladkou a čtyřkloubový mechanismus.

Cílem tvorby matematických modelů bylo, vzhledem k předmětu disertační práce, dosáhnout snížení dynamických účinků příslušného analyzovaného objektu. K tomuto účelu byly využity závěry obsažené v kapitole 3. Prostřednictvím počítačové mechaniky, jejíž základ je naznačen v kapitole 2, bylo vytvořeno množství simulačních modelů řízených mechanických systémů, ať už s vyvažováním setrvačných účinků pracovního členu, nebo bez vyvažování.

Základním prvkem každého modelu mechanického systému je model tuhého tělesa, kterému je třeba při řešení úloh dynamiky přiřadit geometricko-hmotnostní charakteristiky, přičemž ty jsou závislé na rozložení hmoty v daném objemu tělesa. Toto rozložení je vyjádřeno hustotou ρ . V mnoha případech se může jednat o velmi komplikované geometrické tvary, kdy určení těchto charakteristik není zcela triviální. Proto geometrické modely jednotlivých součástí byly s výhodou vytvářeny v systému NX I-DEAS. Součásti byly dále sestaveny do funkčních podsestav odpovídajících jednotlivým tělesům kinematické struktury analyzovaných mechanismů, na jejichž základě byly zjišťovány hmotnosti, matice setrvačnosti a polohy středů hmotnosti příslušných členů mechanické soustavy. V programovém prostředí MSC.ADAMS byly následně definovány kinematické vazby jednotlivých těles, poddajná tělesa užitím tzv. superelementů, stanoveny vstupní a výstupní signály pro potřeby matematického popisu pohonu a jeho regulační struktury a vytvořeno silové působení na hnací člen systému. Samotné superelementy byly vytvářeny v systému NX I-DEAS prostřednictvím konečnoprvkového modelu definovaném na geometrii příslušného poddajného tělesa. Ke každému takovému tělesu byly přiřazeny základní materiálové charakteristiky, které jsou vyjádřeny modulem pružnosti v tahu E , modulem pružnosti ve smyku G , resp. Poissonovým poměrem μ . Simulační modely pohonu a řízení byly v prostředí MSC.EASY5 zhotoveny na základě soustavy rovnic (2.3.16) a blokových schémat na obrázcích *Obr. 2.6* a *Obr. 2.8*. Poté byla generována knihovna funkcí modelu pohonu a řízení, která byla posléze implementována do systému MSC.ADAMS.

V MSC.ADAMS též probíhalo numerické řešení pohybových rovnic matematického modelu řešeného objektu, sestavených pomocí Lagrangeových rovnic smíšeného typu.

4.1 Matematické modely mechanismů

Matematické modely byly vytvářeny na základě již realizovaných strojních zařízení s reálnými hmotovými parametry jednotlivých členů a reálnými zdvihovými závislostmi. Konkrétně se jednalo o mechanismy zajišťující příraz útkové nitě v pracovním cyklu tkacího stroje. Tato fáze pracovního cyklu je uskutečňována právě vačkovým, nebo čtyřkloubovým mechanismem. Vyvažování setrvačných sil těchto mechanismů bylo navrhováno pro jmenovitou úhlovou frekvenci

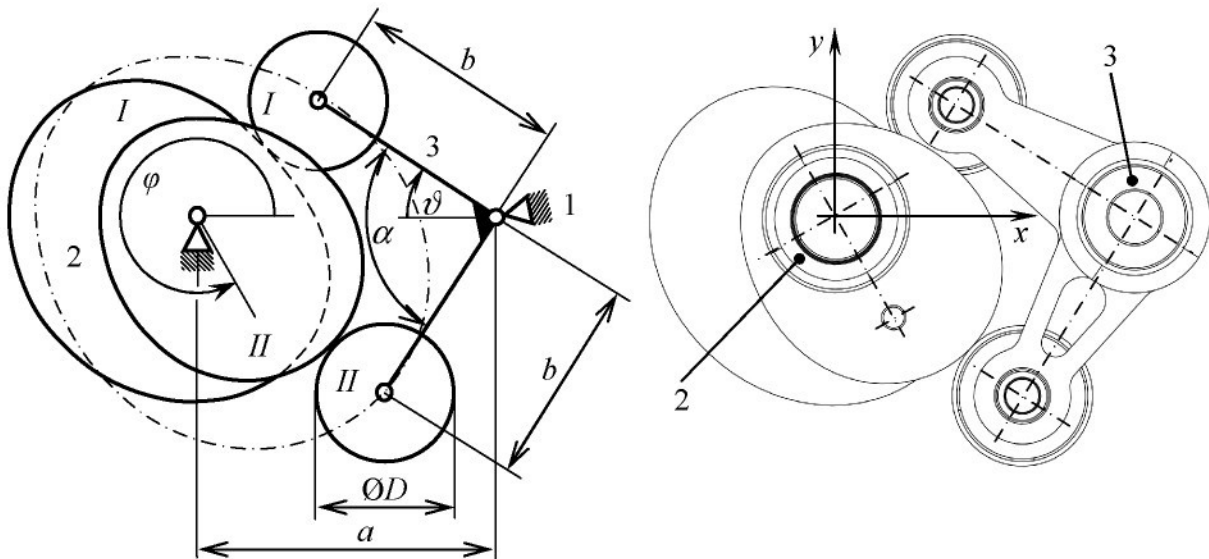
$$\Omega = 20\pi \text{ rads}^{-1} \approx 600 \text{ ot min}^{-1}.$$

Proces vyvažování byl realizován připojením jednoho, resp. dvou, vyvažujících subsystémů v závislosti na vyvažované, resp. vyvažovaných, harmonických složkách rozvoje zdvihové závislosti.

4.1.1 Vačkový mechanismus

Vačkovým mechanismem je obvykle označován tříčlenný mechanismus s jedním stupněm volnosti, který obsahuje alespoň jednu vačku spojenou s hnaným členem minimálně jednou obecnou kinematickou dvojicí. Při relativním pohybu mezi vačkou a vahadlem dochází ke změně smyslu přenášené normálové reakce. K tomu, aby byl během pohybu zajištěn stálý styk hnaného členu s vačkou, bývá vačkový mechanismus doplněn nadbytečnou kinematickou vazbou. Příslušná vazba je podle **Obr. 4.1** tvořena další radiální vačkou *II* a vahadlem s kladkou *II*. Tvar činné plochy vačky bývá stanoven syntézou, která vychází ze znalosti zdvihové závislosti $\vartheta(\varphi)$ daného vačkového mechanismu a jeho rozměrových parametrů.

Ucelené a podrobné informace o syntéze a analýze vačkových mechanismů a vaček jsou obsaženy v publikaci [9].



Obr. 4.1: Vačkový mechanismus

Jedním z objektů určených k vyvážení setrvačných účinků je vačkový mechanismus s radiální dvojvačkou, jehož parametry podle kinematického schématu na **Obr. 4.1** jsou:

- $a = 170\text{mm}$ vzdálenost rotačních os vačkové hřídele a pracovního členu mechanismu,
- $b = 120\text{mm}$ délka vahadel,
- $D = 80\text{mm}$ průměr kladek,
- $\alpha = 90^\circ$ úhel, který svírají vahadla.

Byly analyzovány dva vačkové mechanismy – VM_1 a VM_2, jejichž základní rozměry a hmotnostní charakteristiky vačkové hřídele byly prakticky totožné. Rozdíl mezi nimi spočíval ve vyjádření zdvihové závislosti, viz oddíl 4.2 a velikosti momentu setrvačnosti I vyvažovaného tělesa k ose rotace.

Výpočetní model soustavy vytvořený v systému MSC.ADAMS se vyznačuje následujícími základními vlastnostmi:

- Jedná se o prostorovou soustavu tří tuhých těles včetně rámu. Pohybujícími se členy soustavy jsou vačková hřídel 2 a pracovní člen 3. Možné konstrukční provedení

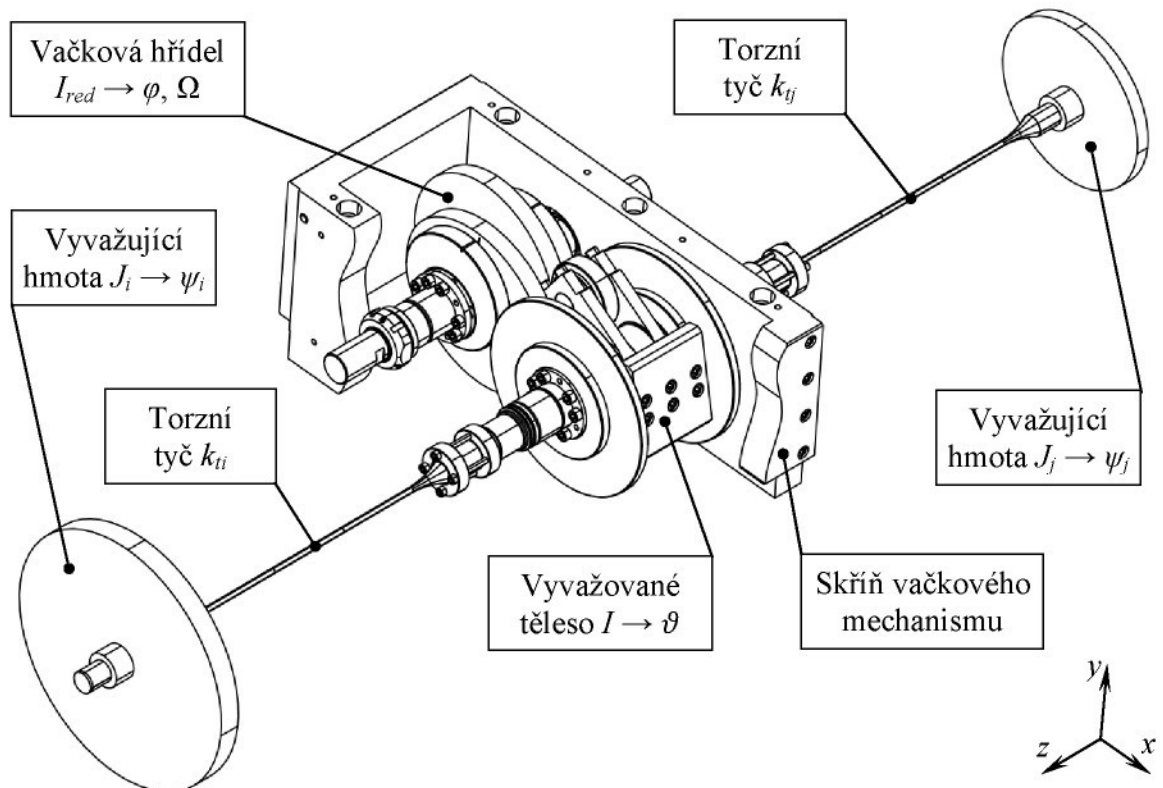
takové soustavy, již s připojením dvou vyvažujících subsystémů k vyvažovanému tělesu, je ukázáno na **Obr. 4.2**.

- Základní geometricko-hmotnostní charakteristiky jsou uvedeny v **Tab. 4.1**, ve které I_{red} představuje moment setrvačnosti samotné vačkové hřídele a momenty setrvačnosti pohybujících se těles redukováných na vačkovou hřídel (viz předpoklady řešení v oddíle 3.1) a r_S vzdálenost středu hmotnosti vyvažovaného členu od osy rotace.

Tab. 4.1: Základní charakteristiky vačkových mechanismů

		VM 1	VM 2
Zdvihová závislost		<i>Sudá goniometrická funkce</i>	<i>Trigonometrická Fourierova řada</i>
Vačková hřídel	$I_{red} [kg \cdot m^2]$	0.74	0.74
		<i>Čistě dynamicky vyvážená</i>	<i>Čistě dynamicky vyvážená</i>
Vyvažovaný (pracovní) člen	$m [kg]$	145	–
	$r_S [m]$	0.0047	–
	$I [kg \cdot m^2]$	0.61	0.25
			<i>Čistě dynamicky vyvážený</i>

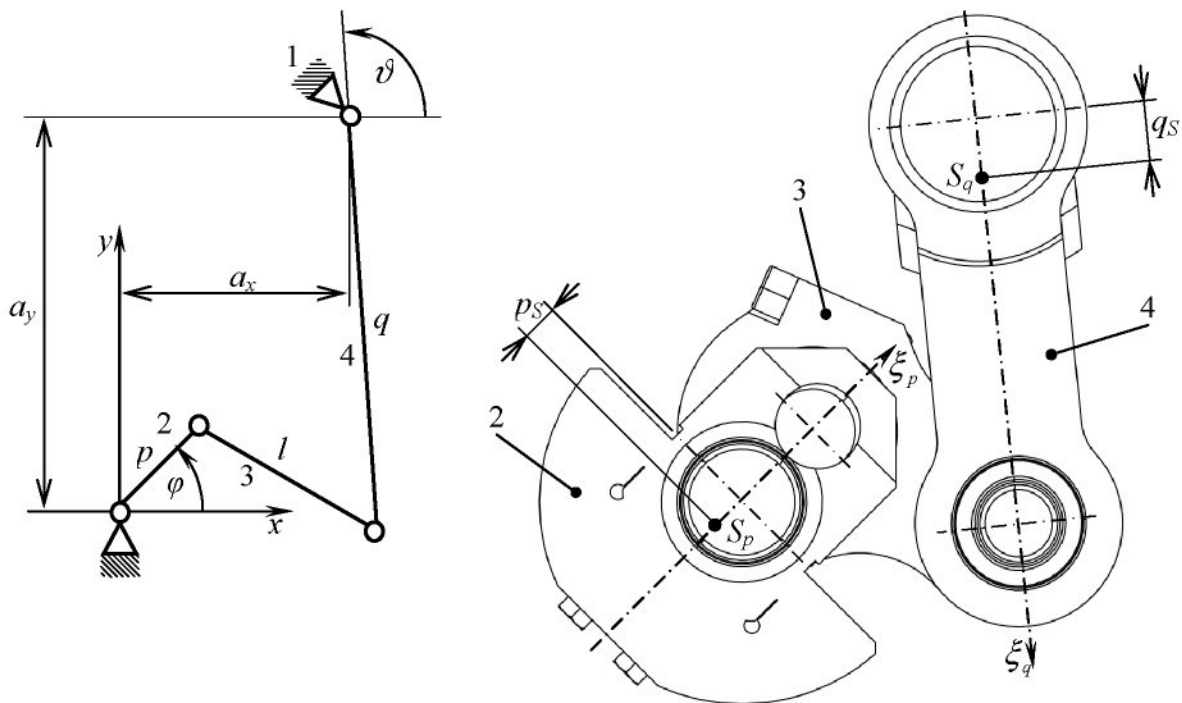
- Mezi jednotlivými tělesy byly definovány ideální kinematické vazby, tzn. bez vůlí a pasivních odporů, takovým způsobem, aby se v systému nevyskytovaly nadbytečné vazbové podmínky.
- Analyzované mechanické soustavy se nacházely v tíhovém poli o gravitačním zrychlení $g = -9.80665 ms^{-2}$.



Obr. 4.2: Vačkový mechanismus s vyvažováním

4.1.2 Čtyřkloubový mechanismus

Čtyřkloubový mechanismus, jehož kinematické schéma je na **Obr. 4.3**, patří do skupiny čtyřčlenných mechanismů, přičemž jeho členy jsou vázány čtyřmi rotačními kinematickými dvojicemi. Podle délek jednotlivých členů se může člen 2 nebo 4, případně oba, buď otáčet v plném úhlu 2π jako klika, nebo kývat jako vahadlo, více viz [5]. Na obrázku **Obr. 4.3** je znázorněno kinematické schéma klikovahadlového mechanismu, jehož člen 2 – *klika* vykonává rotační pohyb a člen 4 – *vahadlo* koná periodický vratný rotační pohyb. Člen 3 bývá označován jako *ojnice* a její pohyb je obecným rovinným. Je zřejmé, že takový mechanismus se vyznačuje nekonstantním převodem a tedy je příčinou vzniku dynamických silových účinků.



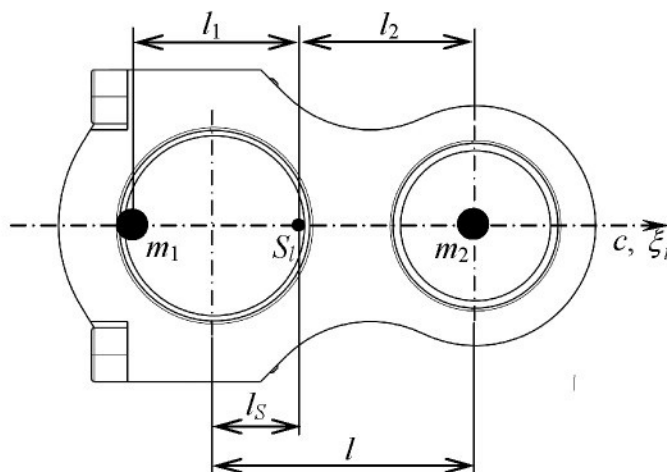
Obr. 4.3: Čtyřkloubový mechanismus

Výpočet parametrů vyvažujících subsystémů je závislý především na setrvačných účincích pracovního členu a jeho zdvihové závislosti. Dále je též zaveden předpoklad rovnoměrného pohybu hnacího členu systému, což znamená, že se jeho setrvačné účinky neprojeví ve vlastní pohybové rovnici. Avšak ojnice při svém pohybu je příčinou vzniku dalších setrvačných účinků, které bude nutné alespoň částečně zohlednit při procesu vyvažování. Jestliže osa c ojnice bude zároveň i centrální osou setrvačnosti, lze provést náhradu ojnice dvěma hmotnými body podle **Obr. 4.4**. Tato náhrada spočívá v rovnocennosti dynamických vlastností samotného hmotného tělesa a jeho modelu pomocí soustavy hmotných bodů. Tato ekvivalence tedy odpovídá shodnému vyjádření geometricko-hmotnostních charakteristik, tj. hmotnosti, středu hmotnosti a matice setrvačnosti.

Bude-li použita náhrada dvěma hmotnými body, musí tyto ležet na centrální ose c a splňovat následující podmínky:

$$\begin{aligned} m_1 &= m_{11} + m_{12}, \\ 0 &= m_{11}l_1 - m_{12}l_2, \\ I_{1s} &= m_{11}l_1^2 + m_{12}l_2^2, \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

ve kterých m_l je hmotnost ojnice a I_{ls} je moment setrvačnosti ke středu S_l hmotnosti. Jedná se o tři podmínky pro čtyři neznámé parametry m_{l1} , m_{l2} , l_1 a l_2 , tedy jeden je volitelný. Jeden z hmotných bodů o hmotnosti m_{l2} je umístěn do středu kinematické dvojice spojující ojnici 3 s vahadlem 4 a tím je známa jeho poloha určená vzdáleností l_2 od středu S_l hmotnosti.



Obr. 4.4: Ojnice

Simulační model čtyřkloubového mechanismu, který byl vytvořen v systému MSC.ADAMS, se vyznačuje následujícími vlastnostmi:

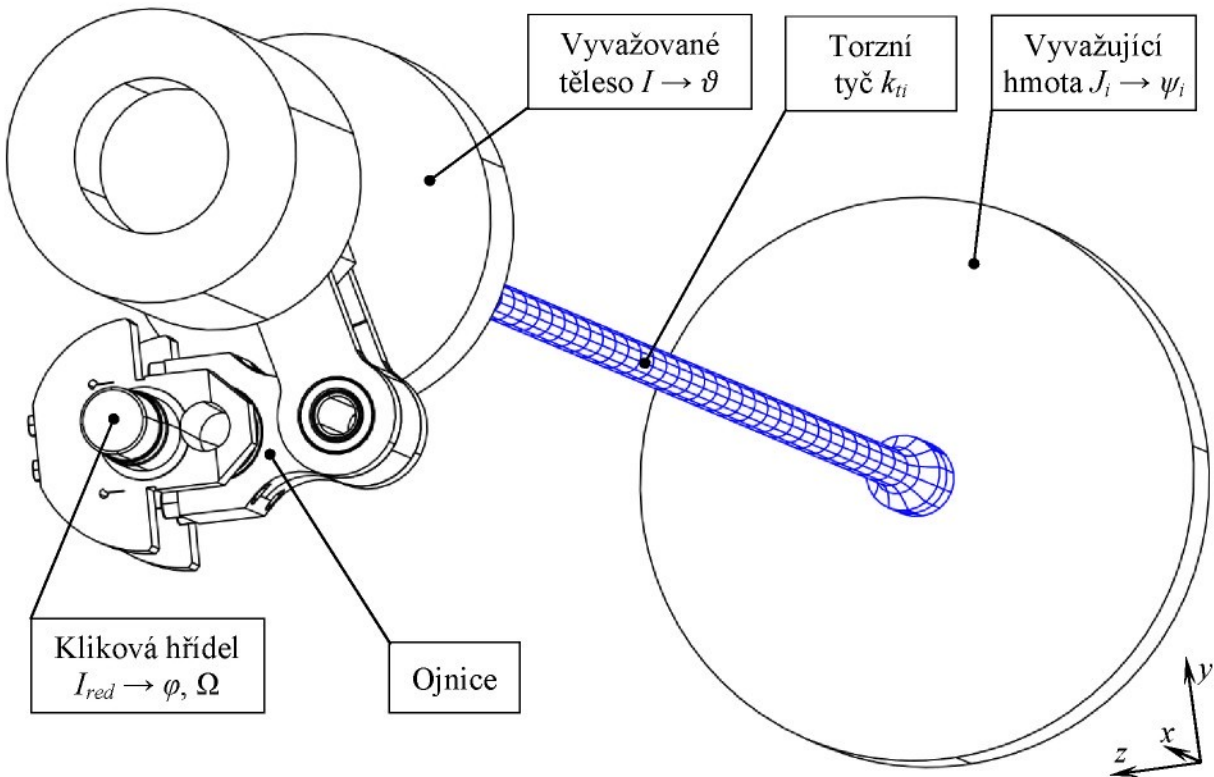
- Jedná se o prostorovou soustavu čtyř tuhých těles včetně rámu. Pohybujícími se členy soustavy jsou kliková hřídel 2, ojnice 3 a pracovní člen 4, který je pevně připojen k vahadlu. Možné konstrukční provedení takové soustavy, již s připojením jednoho vyvažujícího subsystému, je ukázáno na Obr. 4.5.
- Rozměrové parametry podle kinematického schématu na Obr. 4.3 jsou následující:
 - $a_x = 0.091m$ vzdálenost rotační osy vahadla 3 od rotační osy kliky 2 ve vertikálním směru,
 - $a_y = 0.145m$ vzdálenost rotační osy vahadla 3 od rotační osy kliky 2 v horizontálním směru,
 - $p = 0.0385m$ délka kliky 2,
 - $l = 0.087m$ délka ojnice 3,
 - $q = 0.155m$ délka vahadla 4,
- Základní geometricko-hmotnostní charakteristiky jednotlivých těles podle obrázků Obr. 4.3 a Obr. 4.4:
 - Kliky 2:
 - $m_p = 22.2kg$ hmotnost samotné kliky,
 - $I_{red} = 0.59 kgm^2$ moment setrvačnosti samotné kliky k ose rotace a momenty setrvačnosti příslušných těles redukováných na kliku (viz předpoklady řešení v oddíle 3.1),
 - $p_S = 0.0004m$ poloha středu hmotnosti,
 - Ojnice 3:
 - $m_l = 4.9kg$ hmotnost,
 - $I_{Sl} = 0.0162kgm^2$ moment setrvačnosti ke středu hmotnosti,
 - $l_S = 0.0292m$ poloha středu hmotnosti,
 - Vyvažovaný (pracovní) člen 4:
 - $m_q = 95kg$ hmotnost,
 - $I_q = 0.5714 kgm^2$ moment setrvačnosti k ose rotace,
 - $q_S = 0.0051m$ poloha středu hmotnosti,

- Číselné vyjádření náhrady ojnice 3 dvěma hmotnými body užitím rovnic (4.1.1):

$$m_{l1} = 2.463kg, \quad l_1 = 0.0572m,$$

$$m_{l2} = 2.437kg, \quad l_2 = l - l_s = 0.0578m,$$
- Přepočtený moment setrvačnosti vyvažovaného tělesa pro stanovení parametrů vyvažujících subsystémů:

$$I = I_q + m_{l2}q^2 = 0.63kgm^2,$$
- Mezi jednotlivými tělesy byly definovány ideální kinematické vazby, tzn. bez vůlí a pasivních odporů, takovým způsobem, aby se v systému nevyskytovaly nadbytečné vazbové podmínky.
- Analyzované mechanické soustavy se nacházely v tíhovém poli o gravitačním zrychlení $g = -9.80665ms^{-2}$.



Obr. 4.5: Čtyřkloubový mechanismus s vyvažováním

4.2 Zdvihové závislosti

Funkce přiřazující času t polohovou veličinu určitého členu mechanického systému se nazývá pohybovou funkcí tohoto členu.

Pohyb mezi hnacím členem a hnaným členem mechanismu bývá vyjádřen zdvihovou závislostí $\vartheta = f(\varphi)$. Pohyb hnacího členu je tedy popsán nezávislou pohybovou funkcí $\varphi(t)$ a pohyb hnaného členu závislou pohybovou funkcí $\vartheta(t)$. Nezávisle proměnná φ probíhá v intervalu $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle rad$, kterému odpovídá periodický kývavý pohyb vyvažovaného tělesa v intervalu $\vartheta \in \langle 0, \vartheta_{max} \rangle rad$. Veličina ϑ_{max} bývá označována zdvihem příslušného mechanického systému. Zdvihové závislosti $\vartheta(\varphi)$ s rotujícím hnacím členem jsou tedy periodické funkce s periodou 2π , resp. 360° . Přední úvrať u těchto funkcí nastává při:

$$\varphi = 2(k-1)\pi rad$$

pro každé kladné celé číslo k . Příklady zdvihových závislostí mechanismů, pro které bylo navrhováno vyvažování setrvačných účinků, jsou uvedeny na obrázcích *Obr. 4.6*, *Obr. 4.7* a *Obr. 4.8*.

Časové derivace pohybové funkce $\vartheta(t)$ souvisí s vyjádřením zdvihové závislosti $\vartheta(\varphi)$ mechanické soustavy podle následujících vztahů:

$$\begin{aligned}\dot{\vartheta} &= \frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi} \dot{\varphi} = \vartheta' \dot{\varphi}, \\ \ddot{\vartheta} &= \frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi} \ddot{\varphi} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \varphi^2} \dot{\varphi}^2 = \vartheta' \ddot{\varphi} + \vartheta'' \dot{\varphi}^2.\end{aligned}\tag{4.2.1}$$

V rovnicích (4.2.1) představuje ϑ' převod a ϑ'' derivaci převodu. Souhrnně jsou zdvihová závislost, převod a derivace převodu označovány jako převodové funkce. Jednotlivé převodové funkce jsou též nazývány převodovými funkcemi nultého, prvního a druhého řádu.

Systematický výklad k problematice návrhu a volby zdvihových závislostí vačkokloubových mechanismů je uveden v publikaci [9]. V této knize je též obsažen široký soubor různých typů zdvihových závislostí.

O tom, které harmonické složky rozvoje zdvihové závislosti budou svými účinky nejvíce přispívat k velikosti setrvačných sil, je posuzováno na základě kritéria střední hodnoty kinetické energie a efektivních hodnot momentu setrvačné dvojice. Obě kritéria jsou uvedena v oddílu 3.1 a jsou dána vztahy (3.1.26) a (3.1.33). Střední hodnota kinetické energie $\bar{E}_k$ vyvažovaného tělesa je určena součtem jednotlivých příspěvků kinetických energií příslušných harmonických složek:

$$E_{nk} = \frac{1}{4} I (n\Omega)^2 (B_n^2 + A_n^2), \quad n=1,2,\dots,10.\tag{4.2.2}$$

Efektivní hodnota n -té harmonické složky momentu setrvačné dvojice vyvažovaného tělesa je definována výrazem:

$$M_{nEff}^D = \frac{1}{\sqrt{2}} I (n\Omega)^2 \sqrt{A_n^2 + B_n^2}, \quad n=1,2,\dots,10.\tag{4.2.3}$$

V obou případech je účelné vyvažovat ty složky rozvoje zdvihové závislosti, jejichž příspěvky dosahují největších hodnot.

4.2.1 Zdvihová závislost vačkového mechanismu VM_1

Pohyb vyvažované hmoty vačkového mechanismu VM_1 o momentu setrvačnosti $I=0.61\text{kgm}^2$ byl dán zdvihovou závislostí, která je definována matematickým vyjádřením popisujícím sudou goniometrickou funkcí:

$$\vartheta(\varphi) = \sum_{n=0}^2 A_n \cos n\varphi,\tag{4.2.4}$$

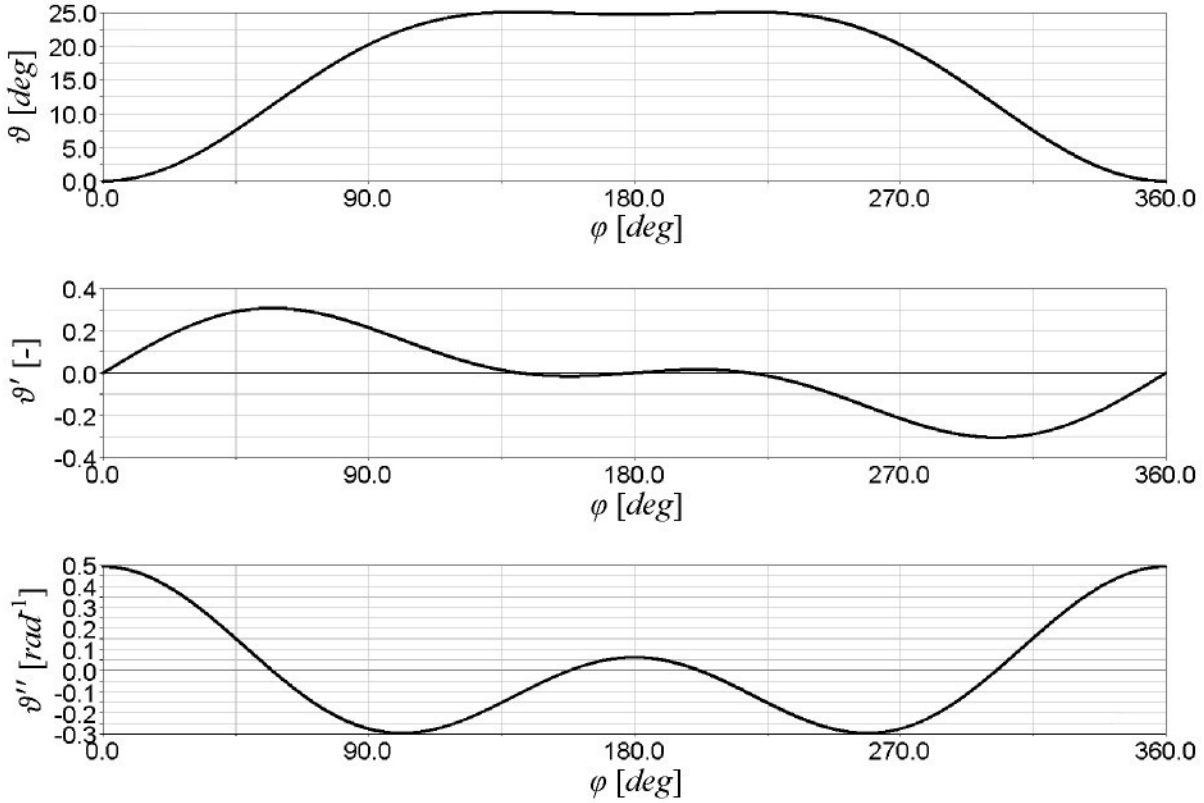
přičemž zdvih je:

$$\vartheta_{\max} = 0.138\pi \text{ rad} \approx 25^\circ.$$

Příslušné koeficienty A_n zdvihové závislosti podle (4.2.4) spolu s hodnotami veličin E_{nk} a M_{nEff}^D jsou uvedeny v *Tab. 4.2*. Průběhy převodových funkcí jsou ukázány na *Obr. 4.6*.

Tab. 4.2: Koeficienty zdvihové závislosti vačkového mechanismu VM_1

n	A_n [rad]	B_n [rad]	E_{nk} [J]	M_{nEff}^D [J]
0	0.2838119	–	–	–
1	– 0.214737	–	11.3776748	149.8620362
2	– 0.069075	–	4.7091392	192.8260178

**Obr. 4.6:** Převodové funkce vačkového mechanismu VM_1

4.2.2 Zdvihová závislost vačkového mechanismu VM_2

Pohyb vyvažované hmoty vačkového mechanismu VM_2 o momentu setrvačnosti $I = 0.25 \text{ kgm}^2$ byl dán zdvihovou závislostí, která byla rozvinuta do *deseti* složek trigonometrické Fourierovy řady:

$$\vartheta(\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{10} A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi, \quad (4.2.5)$$

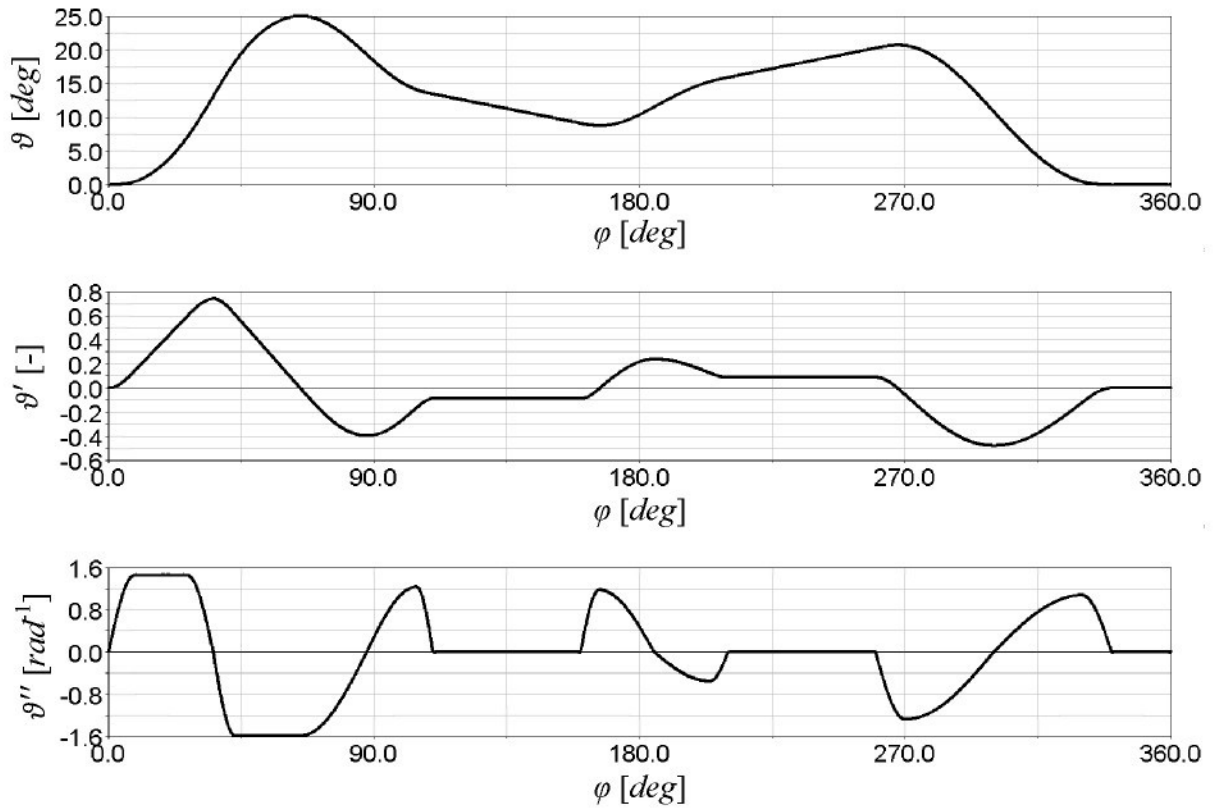
u které zdvih dosahuje hodnoty:

$$\vartheta_{\max} = 0.138\pi \text{ rad} \approx 25^\circ.$$

Koeficienty jednotlivých harmonických složek jsou uvedeny v **Tab. 4.3**. V této tabulce jsou dále uvedeny příspěvky kinetické energie E_{nk} a efektivní hodnota M_{nEff}^D každého ze členů Fourierova rozvoje zdvihové závislosti a jejich pořadí podle významnosti. Porovnáním hodnot u veličin E_{nk} a M_{nEff}^D plyne skutečnost, že je nejvíce výhodné vyvažovat účinky *druhé* a *páté* harmonické složky rozvoje zdvihové závislosti. Průběhy převodových funkcí vačkového mechanismu VM_2 jsou ukázány na **Obr. 4.7**.

Tab. 4.3: Koeficienty zdvihové závislosti vačkového mechanismu VM_2

n	A_n [rad]	B_n [rad]	E_{nk} [J]		M_{nEff}^D [J]	
0	0.22000782600	–	–		–	
1	–0.06377872470	0.01759931902	1.0800954	4	46.1738330	9
2	–0.12774046858	0.08795262682	23.7396475	1	432.9442734	2
3	–0.04558871879	0.01309648055	4.9961521	3	297.9229438	3
4	–0.00625070118	–0.01285389355	0.8065198	5	159.5998104	5
5	0.01573516699	–0.02502725120	5.3910172	2	515.7868099	1
6	0.00358595209	–0.00328022802	0.2097987	6	122.1005235	6
7	0.00122933995	–0.00287307038	0.1180712	8	106.8648711	7
8	0.00074491081	–0.00032376486	0.0104178	10	36.2779855	10
9	0.00244553442	–0.00177713459	0.1826485	7	170.8895257	4
10	–0.00039011696	0.00115592027	0.0367234	9	85.1405108	8

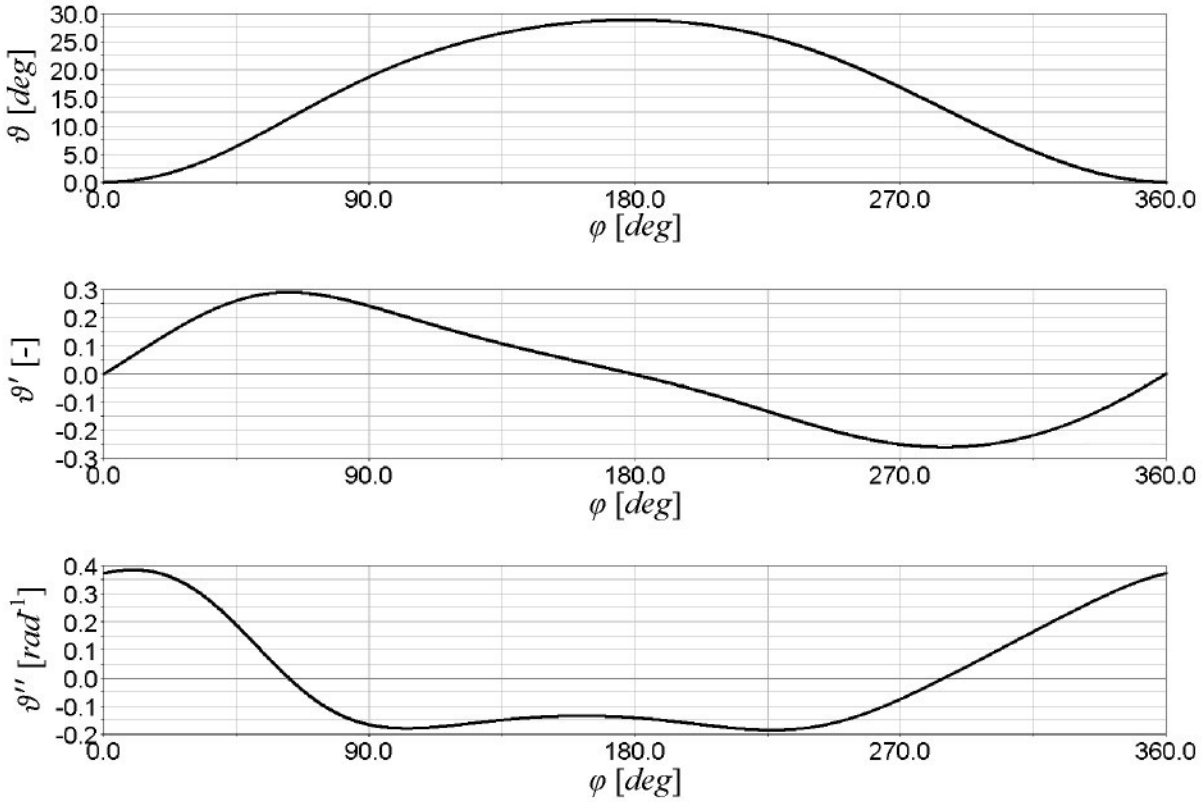
**Obr. 4.7:** Převodové funkce vačkového mechanismu VM_2

4.2.3 Zdvihová závislost čtyřkloubového mechanismu

Pro vyjádření zdvihové závislosti čtyřkloubového mechanismu je možné odvodit, nebo vyhledat např. v [9], následující vztah:

$$\begin{aligned}
 \vartheta(\varphi) = & \arctan \frac{p \sin \varphi}{\sqrt{a^2 + b^2 + p \cos \varphi}} + \\
 & + \arccos \frac{2\sqrt{a^2 + b^2} p \cos \varphi - a^2 + b^2 + p^2 + l^2 + q^2}{2q\sqrt{a^2 + b^2 + p^2 + 2\sqrt{a^2 + b^2} p \cos \varphi}}.
 \end{aligned} \tag{4.2.6}$$

Rozměrové parametry $a = 0.091m$, $b = 0.145m$, $p = 0.0385m$, $l = 0.087m$ a $q = 0.155m$ nabývají význam podle kinematického schématu mechanismu na **Obr. 4.3**. Průběhy převodových funkcí této zdvihové závislosti jsou ukázány na **Obr. 4.8**.



Obr. 4.8: Převodové funkce čtyřkloubového mechanismu

Tab. 4.4: Koeficienty zdvihové závislosti čtyřkloubového mechanismu

n	$A_n [rad]$	$B_n [rad]$	$E_{nk} [J]$	$M_{nEff}^D [J]$
0	0.28053850702	–	–	–
1	– 0.25004457540	0.01286576321	38.9783494792	440.3285686
2	– 0.02973463415	0.00096557797	2.2013201564	209.2843443
3	– 0.00115693242	– 0.00376158462	0.0866719295	62.2910466
4	0.00022536547	– 0.00090258429	0.0086099624	26.1773548
5	0.00014321680	– 0.00001719955	0.0003234351	6.3420364
6	0.00003213329	0.00002233648	0.0000342808	2.4776593
7	– 0.00000122745	0.00000641149	0.0000012983	0.5625444
8	– 0.00000158545	0.00000098150	0.0000001384	0.2098785
9	– 0.00000027108	– 0.00000017630	0.0000000053	0.0460640
10	0.00000000338	– 0.00000008522	0.0000000005	0.0149985

Jak již bylo uvedeno výše, je vhodné vzhledem ke stanovení parametrů vyvažujících subsystémů vyjádřit zdvihovou závislost čtyřkloubového mechanismu konečným počtem harmonických složek Fourierovy řady:

$$\vartheta(\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{10} A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi. \quad (4.2.7)$$

Tato závislost byla rozvinuta do deseti harmonických složek, přičemž jednotlivé koeficienty mají číselné vyjádření podle *Tab. 4.4*. Největší hodnota výkyvu je:

$$\vartheta_{\max} = 0.5016511477 \text{ rad} \approx 28.74^\circ.$$

Na základě porovnání číselných hodnot veličin E_{nk} a $M_{n\text{Eff}}^D$, uvedených též v *Tab. 4.4*, je zřejmé, že je třeba vyvažovat účinky *první* a *druhé* harmonické složky tohoto rozvoje zdvihové závislosti čtyřkloubového mechanismu.

4.3 Parametry vyvažujících subsystémů

Ke správné funkci vyvažování je nutné stanovit jmenovité parametry, a sice hmotový moment setrvačnosti J_l vyvažujícího tělesa a torzní tuhost k_{tl} pružného členu, vyvažujících subsystémů pro danou jmenovitou úhlovou frekvenci Ω , zdvihovou závislost $\vartheta(\varphi)$ mechanismu a velikost momentu setrvačnosti I vyvažovaného tělesa. K tomuto účelu poslouží soustava rovnic (3.1.15) a (3.1.19). Počet těchto rovnic je dvojnásobný vzhledem k počtu vyvažovaných složek zdvihové závislosti. Tedy při volbě počátečních natočení ψ_{l0} seismických hmot definované úhlovým natočením φ_{l0} hnacího členu je možné jednoznačně stanovit torzní tuhosti $k_{tl}(\psi_{l0})$ pružných elementů a momenty setrvačnosti $J_l(\psi_{l0})$ vyvažujících hmot. Volba počátečních natočení ψ_{l0} vyvažujících těles závisí na způsobu uvedení samotných těles do této polohy, na konstrukčním provedení vyvažujících subsystémů, na prostorové zástavbě stroje, atp. Dále s využitím rovnice (3.1.42) lze na zvoleném intervalu $\psi_{l0} \in \langle \psi_{l0\min}, \psi_{l0\max} \rangle$ nalézt takové hodnoty parametrů vyvažujících subsystémů, aby hodnota veličiny $\tilde{M}_h$ byla minimální. V tomto případě bude též docházet k minimalizaci efektivní hodnoty potřebného hnacího momentu $M_{h\text{Eff}}$ soustavy s vyvažováním.

Rovnice (3.1.15) a (3.1.19) s uvažováním počátečních natočení ψ_{l0} vyvažujících hmot jsou přeformulovány do následujícího tvaru:

$$\begin{aligned} \psi_{l0} &= A_0 + \sum_{n=1}^{10} \frac{\Omega_{0l}^2}{\Omega_{0l}^2 - (n\Omega)^2} (A_n \cos n\varphi_{l0} + B_n \sin n\varphi_{l0}), \\ I + \sum_l \left(\frac{k_{tl}}{\Omega_{0l}^2 - (k\Omega)^2} \right) &= 0, \quad \Omega_{0l}^2 = \frac{k_{tl}}{J_l}. \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

Společně se vztahem (3.1.42):

$$\tilde{M}_h = \frac{1}{2} \sqrt{\sum_{n=1}^{10} n^2 (A_n^2 + B_n^2)} \sqrt{\sum_{n=1}^{10} C_n^2 (A_n^2 + B_n^2)}, \quad (4.3.2)$$

kde

$$C_n = (n\Omega)^2 \left[\sum_l \left(\frac{k_{tl}}{(n\Omega)^2 - \Omega_{0l}^2} \right) - I \right],$$

je možné jednoznačně napočítat parametry vyvažujících subsystémů s největší efektivitou vyvažování na zvoleném intervalu $\psi_{l0} \in \langle \psi_{l0\min}, \psi_{l0\max} \rangle$. Ve výše uvedených rovnicích (4.3.1) a (4.3.2) indexy l a k nabývají hodnot příslušných vyvažovaných harmonických složek rozvoje zdvihové závislosti. Tento způsob výpočtu jednotlivých parametrů vyvažujících subsystémů byl především uplatněn při návrhu vyvažování setrvačných účinků vačkového mechanismu VM_2. U vačkového mechanismu VM_1 dosahovaly vyvažující hmoty, v případě vyvažování účinků jednotlivých harmonických složek, úhlového natočení, které

odpovídalo hodnotě zdvihu $v_{\max}^0$. V případě vyvažování účinků obou harmonických složek bylo natočení ψ_{20} vyvažující hmoty, která odpovídá vyvažování druhé harmonické složky, stanoveno iterativním způsobem tak, aby bylo dosaženo nejlepšího efektu vyvážení. Stejným způsobem bylo postupováno při návrhu vyvažujících subsystémů čtyřkloubového mechanismu, u něhož jsou dominantní první dvě harmonické složky.

V následujících tabulkách jsou uvedeny konkrétní hodnoty nominálních parametrů vyvažujících subsystémů pro jednotlivé analyzované mechanické soustavy. Pro vačkový mechanismus VM_1 a čtyřkloubový mechanismus byly tyto parametry navrženy pro vyvážení setrvačných účinků *první*, *druhé* harmonické složky a jejich lineární kombinaci. V případě vačkového mechanismu VM_2 jsou vyvažovány jednotlivě *první* až *pátá* harmonická složka a kombinace *druhé* a *páté* harmonické složky, které jsou podle výše definovaných kritérií dominantní svými setrvačnými účinky.

Tab. 4.5: Parametry vyvažujících subsystémů vačkového mechanismu VM_1

l -tá harmonická složka	k_{tl} [Nm]	J_l [kgm ²]	ψ_{l0} [deg]
1	1438	0.9047	25
2	1272	0.0928	25
1 & 2	1	1.2450	25
	2	0.1534	10

Tab. 4.6: Parametry vyvažujících subsystémů vačkového mechanismu VM_2

l -tá harmonická složka	k_{tl} [Nm]	J_l [kgm ²]	ψ_{l0} [deg]
1	650	0.4823	15.2779
2	1878	0.2268	14.4319
3	650	0.0197	27.3158
4	350	0.0057	6.7775
5	1100	0.0117	-25.1460
2 & 5	2	0.2272	15.0000
	5	0.0108	-25.0000

Tab. 4.7: Parametry vyvažujících subsystémů čtyřkloubového mechanismu

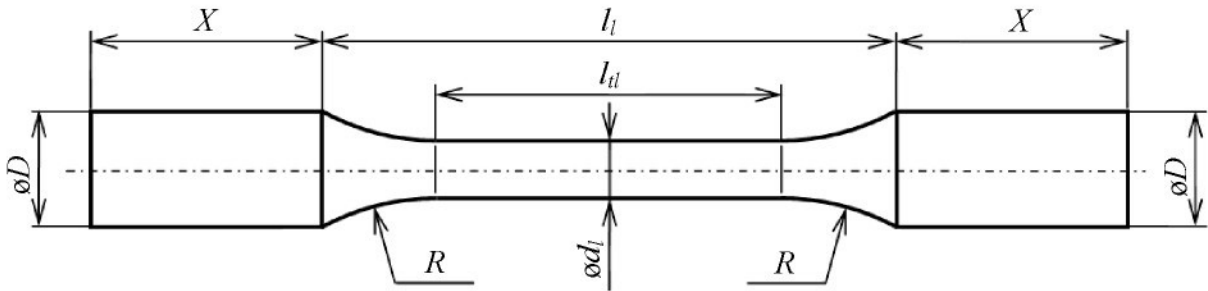
l -tá harmonická složka	k_{tl} [Nm]	J_l [kgm ²]	ψ_{l0} [deg]
1	1330	0.7238	28.7712
2	501	0.0334	28.7712
1 & 2	1	0.8265	28.7712
	2	0.0643	10

Jestliže jsou již známy konkrétní hodnoty tuhostí k_{tl} pružných prvků pro dané pracovní podmínky a hmotnostní charakteristiky vyvažovaného členu systému, je nutné navrhnout jeho tvar s příslušnými jmenovitými rozměry. Vzhledem k tomu, že vyvažované těleso koná vratný periodický rotační pohyb, optimálním pružným prvkem je torzní tyč, viz **Obr. 4.9**. Jejím charakteristickými rozměry jsou průměr d_l a činná délka l_{tl} , které jsou závislé na materiálových charakteristikách, tuhosti k_{tl} a deformaci ξ_l torzní tyče.

Na výrobu torzních tyčí se používají oceli s velkou pevností, s vysokou mezí pružnosti, houževnatostí a mezí únavy. Z hlediska únavové životnosti je důležitá vysoká metalurgická čistota a kvalitní neoduhličený povrch, viz [20]. Tyto požadavky splňují oceli třídy 14, které

bývají označovány jako *pružinové oceli*. Mez únavy se dále zvyšuje další úpravou povrchu např. broušením, leštěním, kuličkováním, nebo otryskáváním (balotinováním). Předpokládá se tedy, že tyče budou vyrobeny z pružinové oceli 14 260 s níže uvedenými pevnostními a materiálovými charakteristikami:

$\sigma_{P_{\min}} = 1600 \text{ MPa}$	minimální mez pevnosti,
$\sigma_{0.2} = 1300 \text{ MPa}$	smluvní mez kluzu,
$\delta_5 = 9\%$	tažnost,
$E = 2.13 \cdot 10^5 \text{ MPa}$	Youngův modul pružnosti v tahu/tlaku,
$G = 0.79 \cdot 10^5 \text{ MPa}$	modul pružnosti v krutu,
$\mu = 0.348$	Poissonův poměr,
$\rho = 7850 \text{ kgm}^{-3}$	hustota.



Obr. 4.9: Torzní tyč

Samotný zkrut ξ_l torzní tyče podle oddílu 3.1 je dán vztahem (3.1.35), který má následující matematické vyjádření:

$$\xi_l = \sum_{n=1}^{10} \frac{(n\Omega)^2}{(n\Omega)^2 - \Omega_{0l}^2} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi).$$

Užitím tohoto vztahu byly stanoveny maximální hodnoty zkrutné deformace $\xi_{l\max}$ torzní tyče na intervalu $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle \text{ rad}$, které jsou pro jednotlivé vyvažující subsystémy číselně vyjádřeny v **Tab. 4.8**. Číselné hodnoty $\xi_{l\max}$ byly v dalším užity při výpočtu průměrů d_l pro požadované tuhosti k_{tl} . Pro velikost průměru d_l byl v oddílu 3.2 odvozen vztah (3.2.7), ve kterém byla ještě za součinitel vrubu β_t dosazena rovnice (3.2.5) a jehož vyjádření je:

$$d_l \geq \sqrt[3]{\frac{64\varepsilon_b [1 + q_t(\alpha_t - 1)] k_{tl} \xi_{l\max}}{\pi \varepsilon_{vt} \eta_{Pt} \sigma_{P_{\min}}}}. \quad (4.3.3)$$

Do výrazu (4.3.3) byly dosazeny na základě nomogramů a diagramů, obsažených v [10] nebo v příloze D, následující číselné hodnoty jednotlivých součinitelů:

$\varepsilon_b = 1.3$	součinitel bezpečnosti,
$q_t \doteq 1$	součinitel vrubové citlivosti,
$\alpha_t \doteq 1$	součinitel tvaru,
$\varepsilon_{vt} = 0.8$	součinitel vlivu velikosti,
$\eta_{Pt} = 0.975$	součinitel jakosti povrchu pro předepsanou drsnost povrchu $R_a = 0.2 \mu\text{m}$.

V oddílu 3.2 byly dále odvozeny matematické vztahy pro výpočet činné délky torzní tyče:

$$l_{tl} = \frac{E \pi d_l^4}{64(1 + \mu) k_{tl}}$$

a určení velikosti tečného napětí:

$$\tau_{l\max} = \frac{16 k_{tl} \xi_{l\max}}{\pi d_l^3}. \quad (4.3.4)$$

Obě veličiny pro jednotlivé pružné prvky jsou číselně uvedeny v **Tab. 4.8**. Z důvodu komplexního popisu geometrického tvaru zkrutné tyče podle **Obr. 4.9** jsou ještě uvedeny navrhované rozměry upevňovacích hlavíc:

$$D = 50\text{mm},$$

$$R = 100\text{mm},$$

$$X = 50\text{mm}.$$

Tab. 4.8: Jmenovité parametry torzních tyčí

	<i>l</i> -tá har. sl.		k_{tl} [Nm]	ξ_{lmax} [°]	d_l [mm]	l_{tl} [mm]	τ_{lmax} [MPa]
VM_1	1		1438	27	24.2	1838	245
	2		1272	36	25.6	2602	245
	1&2	1	1979	27	27.0	2070	245
		2	1827	24	25.2	1700	245
VM_2	1		650	16	15.8	740	235
	2		1878	25	26.0	1875	240
	3		650	42	21.6	2580	240
	4		350	30	15.7	1338	240
	5		1100	24	21.4	1470	240
	2&5	2	1925	26	26.5	1974	240
		5	1014	30	22.4	1913	240
	Čtyř- kloubový mech.	1		1330	31	24.8	2192
2		501	40	19.6	2270	240	
1&2		1	1518	31	25.8	2250	245
		2	904	23	19.8	1310	240

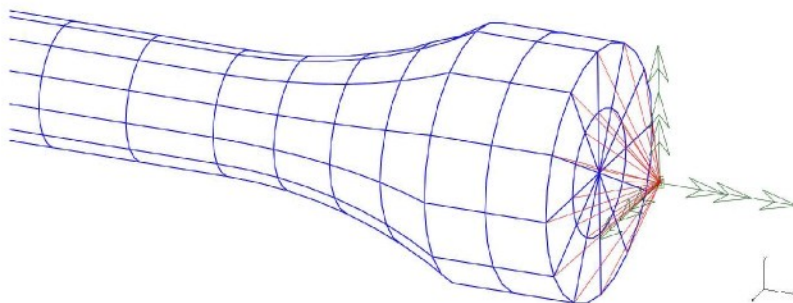
4.4 Modely pružných elementů vyvažujících subsystémů

Torzní tyče byly ve všech simulačních modelech definovány jako poddajná tělesa. K popisu obecného poddajného tělesa (kontinua) bylo využito metody konečných prvků. V konečnoprvkovém programu NX I-DEAS byly generovány na základě FEM-modelů torzních tyčí tzv. superelementy. Ty jsou charakterizovány svou spektrální a modální maticí Φ_e , přičemž jejich poddajnost je vyjádřena maticí tuhosti $K(q_e)$. Matice hmotnosti $M(q_e)$ je zjednodušena zavedením tzv. invariantů setrvačnosti, které jsou počítány z konečnoprvkového modelu příslušného tělesa na základě rozložení hmoty do jednotlivých uzlů, jejich polohových vektorů v nedeformovaném stavu a těch částí modální matice Φ_e , které jsou svázány s příslušnými uzlovými body prostřednictvím vektorů fyzikálních souřadnic u_p v těchto uzlech. Deformační pole jednotlivých torzních tyčí bylo zpravidla aproximováno 30 deformačními módy.

Při tvorbě mapované konečnoprvkové sítě byly použity parabolické nosníkové elementy, nebo parabolické objemové elementy. Volba elementů byla závislá na tom, jak věrně byl zachycen tvar samotných torzních tyčí, jaké vlivy měly být při výpočtech zohledněny, na počtu superelementů, které popisovaly deformační vlastnosti torzních tyčí, a jaké fyzikální veličiny byly sledovány. Parabolické nosníkové elementy jsou tvořeny třemi uzlovými body, které se vyznačují šesti stupni volnosti na uzlu. Parabolické objemové elementy ve tvaru šestistěnů obsahují dvacet uzlových bodů, umístěných ve vrcholech a ve středu každé z hran, se třemi stupni volnosti na jeden uzlu. V každém uzlu jsou počítány posuvy ve směru os kartézského souřadného systému.

V případě užití objemových elementů jsou na obou koncích FEM-modelu torzní tyče, v její ose, definovány uzlové body, ze kterých paprskovitě směřovaly dokonale tuhé elementy do uzlů umístěných v ploše průřezu upevňovacích hlavíc. V těchto dvou uzlových bodech byly definovány okrajové podmínky, ve kterých poté byly vytvořeny pevné vazby

k příslušným tuhým členům daného mechanického systému. Na **Obr. 4.10** je ukázána část popisovaného konečnoprvkového modelu torzní tyče.



Obr. 4.10: Detail konce FEM-modelu torzní tyče

Ve všech modelech popisujících deformační pole torzních tyčí byly hodnoty poměrného útlumu zvoleny podle:

$$\begin{aligned} b_{ri} &= 0.01, & f_i &\in \langle 0, 100 \rangle \text{ Hz}, \\ b_{ri} &= 0.1, & f_i &\in \langle 100, 1000 \rangle \text{ Hz}, \\ b_{ri} &= 1, & f_i &> 1000 \text{ Hz}. \end{aligned}$$

4.5 Model pohonu

Buzení hnacího členu u všech analyzovaných objektů bylo realizováno hnacím momentem, počítaným pomocí modelu pohonu a řízení. Předpokládá se, že samotný pohon jednotlivých mechanických systémů bude realizován třífázovým synchronním elektromotorem s permanentními magnety v rotoru. Pro potřeby výpočetních simulací byl použit DQ-model, který vychází z matematického popisu synchronního stroje a využívá transformace statorových souřadnic na rotorové. Jak již bylo uvedeno v kapitole 2, k řízení tohoto typu elektromotoru se používá kaskádní uspořádání regulačního obvodu. Matematický popis elektromotoru a jeho řízení byl definován v MSC.EASY5 na základě soustavy rovnic (2.3.16) a podle blokových schémat na **Obr. 2.6** a **Obr. 2.8**.

V rovnicích (2.3.16) matematického modelu synchronního stroje je třeba číselně vyjádřit elektrický odpor jedné fáze statorového vinutí R_s , D a Q-složky indukčnosti statorového vinutí L_d a L_q , spřažený magnetický tok permanentních magnetů ψ_m a počet pólových dvojic p_p . Katalogové listy výrobců sice ve většině případů udávají informace o hodnotách některých technických parametrů daného typu motoru, ale bez bližšího vysvětlení. Např. firma Siemens udává tzv. trojfázovou indukčnost statoru L_D a je jen možné se domnívat, že se jedná o D-složku L_d statorové indukčnosti použitou v matematickém DQ-modelu. Dále je nutné identifikovat hodnotu spřaženého magnetického toku ψ_m , který úzce souvisí s hodnotami napěťové konstanty K_E . Podle publikace [25] má spřažený magnetický tok permanentních magnetů ve vektorovém modelu synchronního servomotoru stejnou úlohu jako napěťová konstanta v modelu vycházejícím z analogie se stejnosměrným strojem, tj.:

$$\psi_m = K_E. \quad (4.5.1)$$

Napěťová konstanta K_E bývá definována jako efektivní sdružené nebo fázové napětí vztahované na jednotku rychlosti. Jako nejvhodnější způsob ke zjištění potřebných parametrů se jeví provedení experimentálních měření, avšak v době návrhu příslušného strojního zařízení a následných výpočetních simulací nejsou vytipované elektromotory mnohdy k dispozici.

Na základě prvotních kinetostatických výpočtů všech tří mechanických systémů byl optimalizován výběr servomotoru. U všech mechanismů v této fázi výpočetních simulací

nebyl uvažován proces vyvažování setrvačných účinků. Při tomto výběru byl zohledněn rozsah pracovních otáček strojního zařízení, který byl porovnáván vzhledem ke jmenovitým otáčkám elektromotoru, a velikost efektivní hodnoty potřebného hnacího momentu mechanického systému, která byla srovnávána se jmenovitým momentem servomotoru. V konečném důsledku byly pro pohony mechanických soustav vytipovány následující synchronní servomotory:

- Siemens 1FT6108-8AF7, jehož napěťová konstanta má podle katalogu hodnotu:
 $K_E = 108 \text{ V/1000 ot/min.}$

Tento synchronní servomotor je určen k pohonu vačkového mechanismu VM_1 a čtyřkloubového mechanismu.

- Siemens 1FT6108-8SF7, jehož napěťová konstanta má podle katalogu hodnotu:
 $K_E = 92 \text{ V/1000 ot/min.}$

Tento synchronní servomotor je určen k pohonu vačkového mechanismu VM_2.

Velikost spřaženého toku ψ_m každého z elektromotorů byla tedy přepočtena ze znalosti napěťové konstanty K_E podle vztahu:

$$\psi_m = K_E \frac{60}{2\pi 1000 \sqrt{3}} \quad (4.5.2)$$

Ve vztahu (4.5.2) se předpokládá, že napěťová konstanta K_E synchronních servomotorů Siemens je udávána jako sdružené napětí na 1000 ot/min.

Dále bylo prostřednictvím kinetostatických simulací zjištěno, že je výhodné zařadit mezi elektromotory a příslušné mechanické systémy mechanický převod s převodovým poměrem:

$$i = 4,$$

který by mohl být realizován např. planetovou převodovkou. Ten zajistí optimální využití silových a otáčkových dispozic navrhovaných servomotorů pro předpokládaný rozsah pracovních otáček strojních zařízení:

$$n_R \in \langle 550, 750 \rangle \text{ ot min}^{-1}.$$

Příloha E obsahuje katalogové listy s technickými parametry obou elektromotorů, prostřednictvím kterých byly stanoveny příslušné konstanty vyskytující se v DQ-modelu synchronního servomotoru. Do matematických modelů servomotorů Siemens 1FT6108 a regulačních struktur v polohovém režimu byly dosazeny číselné hodnoty jednotlivých parametrů podle **Tab. 4.9**.

Tab. 4.9: Parametry motorů Siemens a řídicí struktury

Popis veličiny	Veličina	1FT6108 -8AF7	1FT6108 -8SF7
moment setrvačnosti rotoru servomotoru	$I_{rotor} [\text{kg m}^2]$	0.0291	0.0291
počet pólových dvojic	$p_p [-]$	4	4
elektrický odpor jedné fáze	$R_s [\Omega]$	0.065	0.048
D-složka indukčnosti	$L_D [\text{mH}]$	1.5	1.1
Q-složka indukčnosti	$L_Q [\text{mH}]$	1.5	1.1
spřažený magnetický tok permanent. magnetů	$\psi_m [\text{Wb}]$	0.5954	0.5072
proporcionální složky regulátorů proudu	$K_I [\text{VA}^{-1}]$	5	5
časové integrační konstanty regulátorů proudu	$T_{il} [\text{ms}]$	0.5	0.5
proporcionální složka regulátoru rychlosti	$K_\omega [\text{A s rad}^{-1}]$	5	5
časová integrační konstanta regulátoru rychlosti	$T_{i\omega} [\text{ms}]$	80	80
proporcionální složka regulátoru polohy	$K_\varphi [\text{s}^{-1}]$	5	5
zesílení rychlostního feedforwardu	$r_\omega [-]$	1	1

V katalogových listech bývá též často uvedena elektrická časová konstanta motoru:

$$\tau_E = L_D / R_s \quad (4.5.3)$$

a mechanická časová konstanta elektromotoru:

$$\tau_M = \frac{I_{rotor} R_s}{K_M K_E} \quad (4.5.4)$$

Ve vztahu (4.5.4) symbol K_M označuje momentovou konstantu. Na základě elektrické a mechanické časové konstanty je dobré provést kontrolu číselného vyjádření dosazovaných veličin do DQ-modelu příslušného elektromotoru. Pokud bude dosažena shoda časových konstant spočtených podle (4.5.3) a (4.5.4) a obsažených v katalogu příslušného motoru, pak parametry dosazované do matematického modelu motoru jsou správné. Nebo jejich prostřednictvím lze též dopočítat potřebné parametry, které nejsou výrobcem v katalogu motorů přímo uvedeny.

4.6 Parametry rozběhu mechanických systémů

Pro matematické modely všech tří typů analyzovaných mechanismů s vyvažováním setrvačných účinků bylo vytvořeno stejné schéma jejich rozběhu a uvedení do ustáleného stavu. Samotný děj rozběhu mechanismů a natočení vyvažovacích těles do příslušných poloh ψ_{i0} probíhal v několika časových intervalech. Počáteční poloha pracovních členů byla v čase $t = 0s$ stanovena přední úvratí, která je dána úhlovým natočením hnacího členu:

$$\varphi = 2(k-1)\pi \text{ rad}$$

pro každé kladné celé číslo k , viz průběhy zdvihových závislostí v 4.2. Vyvažovací tělesa byla v čase $t = 0s$ v takové poloze, ve které se pružné elementy nacházejí v nedeformovaném stavu. Z těchto poloh došlo k postupnému natočení jednotlivých vyvažovacích (seizmických) hmot do výchozích pozic podle **Tab. 4.10**, které bylo uskutečněno působením silové dvojice:

$$M_{z_i} = k_{\theta} \xi_i(t) \quad (4.6.1)$$

Ve vztahu (4.6.1) je zkrutná deformace pružného prvku dána rozdílem úhlu natočení vyvažovaného tělesa a seizmické hmoty:

$$\xi_i = \vartheta(\varphi) - \psi_i(t) \quad (4.6.2)$$

Tab. 4.10: Výchozí úhlová natočení vyvažovacích hmot

	l -tá harmonická složka		φ_l [deg]	ψ_{i0} [deg]
VM_1	1		141.0038	25.0000
	2		141.0038	25.0000
	1&2	1	141.0038	25.0000
		2	53.1719	10.0000
VM_2	1		38.4500	15.2779
	2		37.2750	14.4319
	3		65.0000	27.3158
	4		26.2000	6.7775
	5		0.0000	-25.1460
	2&5	2	38.0625	15.0000
		5	0.0000	-25.0000
Čtyřkloubový mechanismus	1		178.7605	28.7712
	2		178.7605	28.7712
	1&2	1	178.7605	28.7712
		2	58.0514	10.0000

Poté došlo v čase $t=T$, kdy se pracovní člen mechanického systému opět nacházel v přední úvratí pro $k=3$, k uvolnění vyvažujících těles stanovené podmínkou:

$$M_{zi}=0Nm, \quad t \in \langle T, \infty \rangle.$$

V tomto okamžiku T již prakticky dosahují vyvažované mechanismy předepsaných pracovních otáček n_R . Příslušné okamžiky T uvolnění vyvažujících (seizmických) hmot jsou uvedeny v **Tab. 4.11** pro jednotlivé mechanické systémy při sledovaných pracovních otáčkách.

Tab. 4.11: Spouštěcí časy vyvažujících hmot

n_R [ot min ⁻¹]	Vačkový mechanismus V_M1	Vačkový mechanismus VM_2	Čtyřkloubový mechanismus
	T [s]	T [s]	T [s]
550	1.6755	–	1.6640
570	1.6693	–	1.6580
580	1.6665	–	1.6555
600	1.6608	1.689	1.6500
750	1.6280	–	1.6190

Požadovaný průběh úhlové rychlosti ω^* hnacích členů byl generován ve výpočetních modelech jednotlivých mechatronických systémů podle následujícího matematického vyjádření:

$$\begin{aligned}
 \omega^* &= \frac{30}{t_1 - t_0} \alpha_{0i} \Delta_{01}^2 (\Delta_{01} - 1)^2, & t \in \langle 0, t_1 \rangle, & t_1 = 0.35s, \\
 \omega^* &= 0 \text{ rad s}^{-1}, & t \in \langle t_1, t_2 \rangle, & t_2 = 0.65s, \\
 \omega^* &= \frac{30}{t_3 - t_2} \alpha_{ij} \Delta_{23}^2 (\Delta_{23} - 1)^2, & t \in \langle t_2, t_3 \rangle, & t_3 = 1.0s, \\
 \omega^* &= 0 \text{ rad s}^{-1}, & t \in \langle t_3, t_4 \rangle, & t_4 = 1.3s, \\
 \omega^* &= \omega_R \Delta_{45}^3 (10 - 15\Delta_{45} + 6\Delta_{45}^2), & t \in \langle t_4, t_5 \rangle, & t_5 = 1.7s, \\
 \omega^* &= \omega_R, & t \in \langle t_5, \infty \rangle, &
 \end{aligned} \tag{4.6.3}$$

přičemž bylo zavedeno:

$$\alpha_{0i} = \varphi_i - \varphi_0, \quad \alpha_{ij} = \varphi_j - \varphi_i,$$

kde:

$$\varphi_0 = \varphi^*(t=t_0) = 0 \text{ rad}, \quad \varphi_i = \varphi^*(t=t_1) = \varphi(\psi_{i0}), \quad \varphi_j = \varphi^*(t=t_3) = \varphi(\psi_{j0}).$$

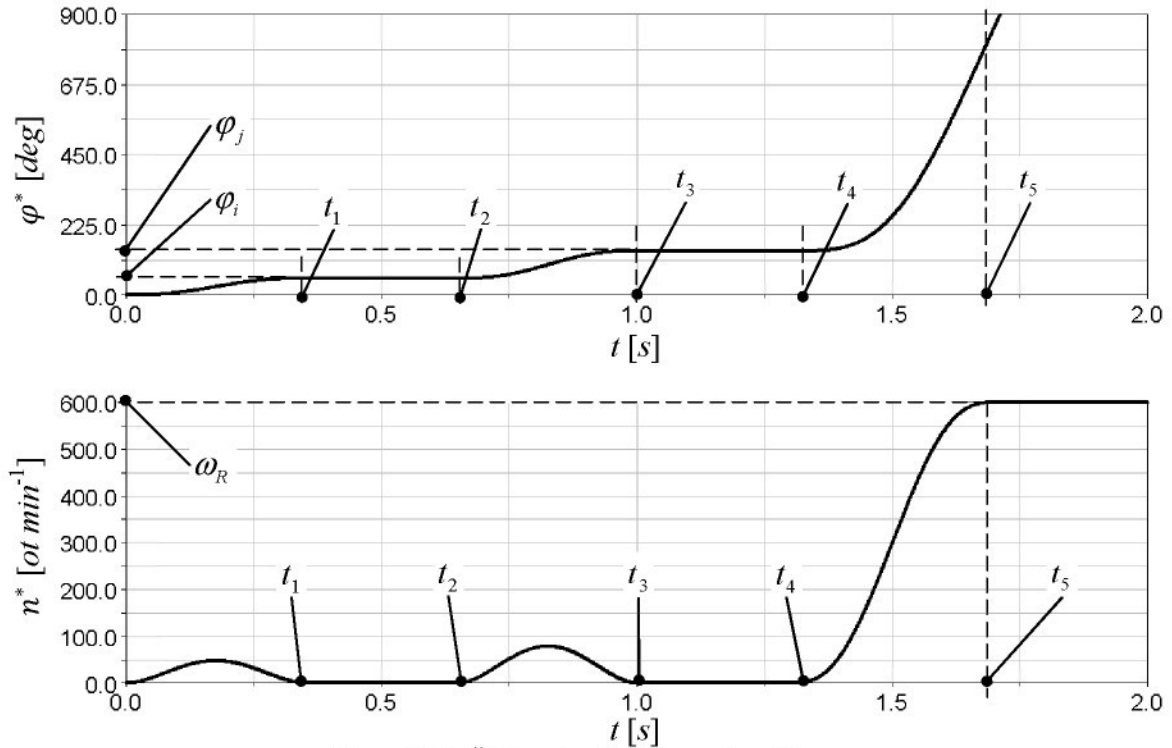
Ve vztazích (4.6.3) jsou dále definovány výrazy nezávisle proměnné $\Delta_{ki} = f(t)$ podle:

$$\Delta_{01} = \frac{t}{t_1}, \quad \Delta_{23} = \frac{t - t_2}{t_3 - t_2}, \quad \Delta_{45} = \frac{t - t_4}{t_5 - t_4}. \tag{4.6.4}$$

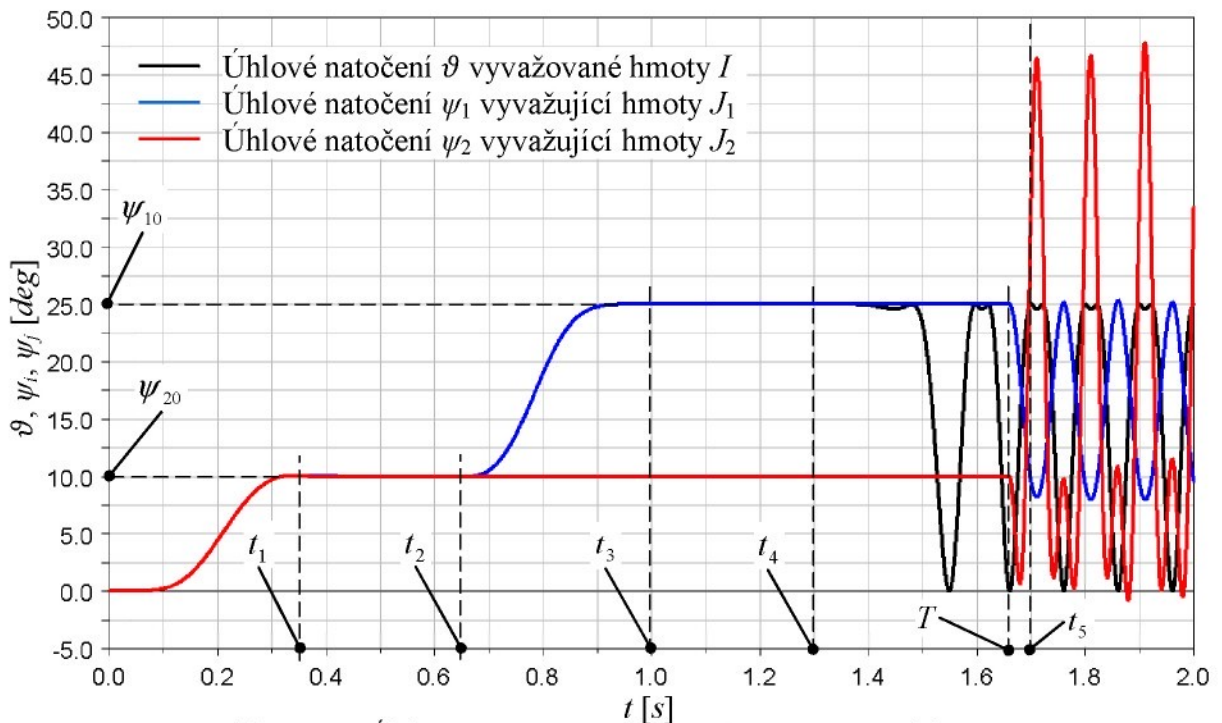
Časovou integrací rovnic (4.6.3) je stanoven požadovaný průběh úhlu natočení hnacích členů:

$$\varphi^* = \int_0^t \omega^*(\tau) d\tau. \tag{4.6.5}$$

Na **Obr. 4.11** je ukázán časový průběh žádaného pohybu vačkové hřídele mechanismu VM_1 pro pracovní otáčky $n_R = 600 \text{ ot min}^{-1}$, tj. $\omega_R = 20\pi \text{ rad s}^{-1}$, počítaného dle (4.6.3) a (4.6.5). V tomto obrázku jsou vyznačeny mezní hodnoty jednak nezávislé proměnné t , tak i závislých proměnných φ^* a n^* .

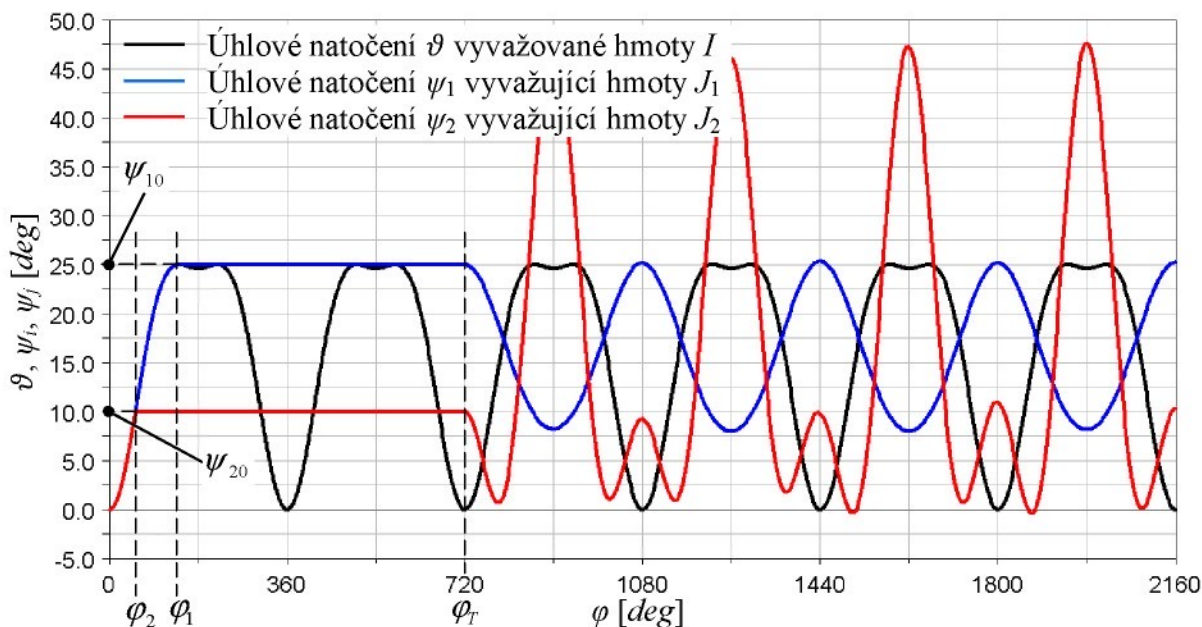


Obr. 4.11: Žádaný pohyb hnacího čleu



Obr. 4.13: Úhlová natočení vyvažované a vyvažujících hmot

Výše popsáný způsob rozběhu a dosažení ustáleného stavu mechanických soustav názorně dokumentují obrázky **Obr. 4.12** a **Obr. 4.13**. V těchto obrázcích jsou označeny mezní hodnoty příslušných časových intervalů a počáteční úhlová natočení vyvažovacích (seizmických) hmot, ze kterých budou v definovaném okamžiku T uvolněny. Tyto průběhy pohybu vyvažované a seizmických hmot byly napočítány pro vačkový mechanismus VM_1 s vyvažováním účinků *první* a *druhé* harmonické složky zdvihové závislosti. Pracovní otáčky tohoto systému jsou v tomto případě $n_R = 600 \text{ ot min}^{-1}$, tj. $\omega_R = 20\pi \text{ rad s}^{-1}$, která je shodná se jmenovitou úhlovou frekvencí Ω .



Obr. 4.12: Úhlová natočení

5 Výsledky simulací

Vlivem vyvažování se očekává snížení potřebného příkonu pohonu, dále pak zmenšení silového zatížení samotného mechanismu a zklidnění chodu stroje v ustálené oblasti. Proto byl přínos vyvažování setrvačných účinků mechanismů vyhodnocován na základě časových průběhů mechanických veličin, kterými jsou:

- Potřebný hnací moment M_h pohonu.

Kvantitativním vyjádřením časového průběhu potřebného hnacího momentu je jeho efektivní hodnota M_{hEff} , která je dána matematickým výrazem (3.3.4). Podle definice se jedná o myšlený náhradní konstantní moment, který dodá systému stejný střední výkon jako moment časově proměnný.

- Otáčky n hnacího členu systému:
 - o vačková hřídel v případě vačkových mechanismů,
 - o klika čtyřkloubového mechanismu.

Míra zklidnění chodu strojového agregátu je vyjádřena nerovnoměrností chodu δ , která je smluvně definována vztahem (3.3.3). Tento výraz formulován pro průběh otáček hnacího členu v ustálené oblasti chodu stroje má podobu:

$$\delta = \frac{n_{\max} - n_{\min}}{\bar{n}} \quad (5.1)$$

Ve vzorci (5.1) $n_{\max}$, resp. $n_{\min}$, označuje maximální, resp. minimální, otáčky vačkové hřídele vačkových mechanismů nebo kliky v případě čtyřkloubového mechanismu. Symbol $\bar{n}$ představuje střední otáčky hnacích členů. Maximální, minimální a střední hodnoty otáček byly stanoveny z vypočtených průběhů otáček analyzovaných mechanických systémů na příslušné délce časového intervalu a poté dosazeny do rovnice (5.1).

- Velikost silové reakce $|R|$ v mechanismu:
 - o maximální hodnota velikosti reakce $|R|_{\max}$ v obecné kinematické dvojici vačkových mechanismů,
 - o maximální hodnota velikosti reakce $|R|_{\max}$ v kinematické dvojici mezi vahadlem a ojnicí v případě čtyřkloubového mechanismu.

Souhrnně byl tedy přínos dynamického vyvažování setrvačných účinků těles, resp. mechanických soustav, v ustálené oblasti chodu analyzovaného systému posuzován na základě číselných hodnot:

- M_{hEff} efektivní hodnota hnacího momentu pohonu,
- δ nerovnoměrnost chodu hnacího členu soustavy,
- $|R|_{\max}$ maximální velikost reakce v kinematické vazbě.

Sledované veličiny M_{hEff} , $|R|_{\max}$ a δ u soustav s vyvažováním byly dále pak poměrově vyjádřeny vzhledem k soustavě bez vyvažování podle definičního vztahu (3.3.5):

$$b_v = \left(1 - \frac{v}{v_z}\right) \cdot 100 [\%], \quad v = \delta, M_{hEff}, |R|_{\max},$$

ve kterém index Z udává příslušnost k mechanické soustavě bez vyvažování. Tímto způsobem byl číselně vyhodnocován přínos jednotlivých vyvažujících subsystémů na analyzované mechanické soustavy. Jestliže veličina b_v nabývá kladných hodnot, je přínos procesu vyvažování pozitivní a vyvažování plní svůj účel.

Jak již bylo uvedeno v předchozí kapitole 4, vyvažování setrvačných účinků mechanismů bylo navrhováno pro jmenovitou úhlovou frekvenci:

$$\Omega = 20\pi \text{ rads}^{-1} \approx 600 \text{ ot min}^{-1},$$

kteřé odpovídají jmenovité parametry jednotlivých vyvažujících subsystémů. Avšak mnohá strojní zařízení nejsou určena k provozu pouze ve velmi úzkém rozsahu otáček v okolí jejich pracovní frekvence, ale většinou pracují v daleko širším rozsahu, který je dán potřebným pracovním procesem příslušného stroje. V technické praxi se jedná např. o procesy technologické, výrobní, dopravní atp. Proto byla účinnost vyvažování sledována na chování a vlastnostech vyvažovaných mechanických soustav na intervalu otáček:

$$n_R \in \langle 550, 750 \rangle \text{ ot min}^{-1}.$$

Veškeré sledované mechanické veličiny, jejich časové závislosti a dále pak jejich prostřednictvím stanovené příslušné charakteristické parametry řešených systémů jsou předloženy formou grafů a tabulek. Na jejich základě jsou na konci této kapitoly formulovány vlastnosti a zákonitosti, které nabývají obecné platnosti pro všechny analyzované typy mechanických systémů.

5.1 Vačkový mechanismus VM_1

V případě vačkového mechanismu VM_1 byly vytvořeny výpočetní modely pro rozbor vlivu vyvážení setrvačných účinků *první*, *druhé* harmonické složky zdvihové závislosti a jejich vzájemné kombinace. Zmiňovaná zdvihová závislost je stanovena sudou goniometrickou funkcí, která je složena právě ze dvou harmonických složek, viz oddíl 4.2.1. Proto v tomto případě bude možné jednoznačně vyjádřit přínos vyvažování účinků jednotlivých složek a jejich kombinace u vyvažované soustavy vzhledem k nevyvažované. Výpočty probíhaly pro výše zmiňovaný rozsah pracovních otáček.

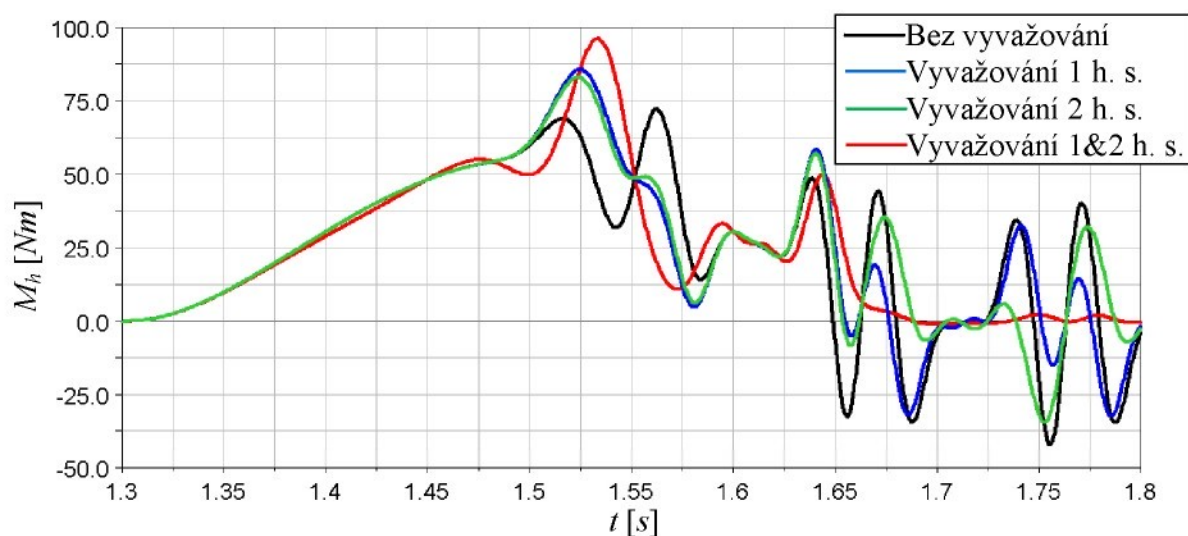
5.1.1 Přehled výsledků simulací

V tabulce **Tab. 5.1** jsou číselně vyjádřeny efektivní hodnoty M_{hEff} potřebného hnacího momentu pohonu v ustálené oblasti chodu stroje a procentuální vyjádření jejich změn u vyvažovaných soustav vzhledem k nevyvažované. Červeně jsou zdůrazněny ty efektivní hodnoty hnacího momentu, které se vztahují k mechanickým systémům, u kterých nenastalo snížení tohoto parametru vzhledem k vačkovému mechanismu VM_1 bez vyvažování setrvačných účinků.

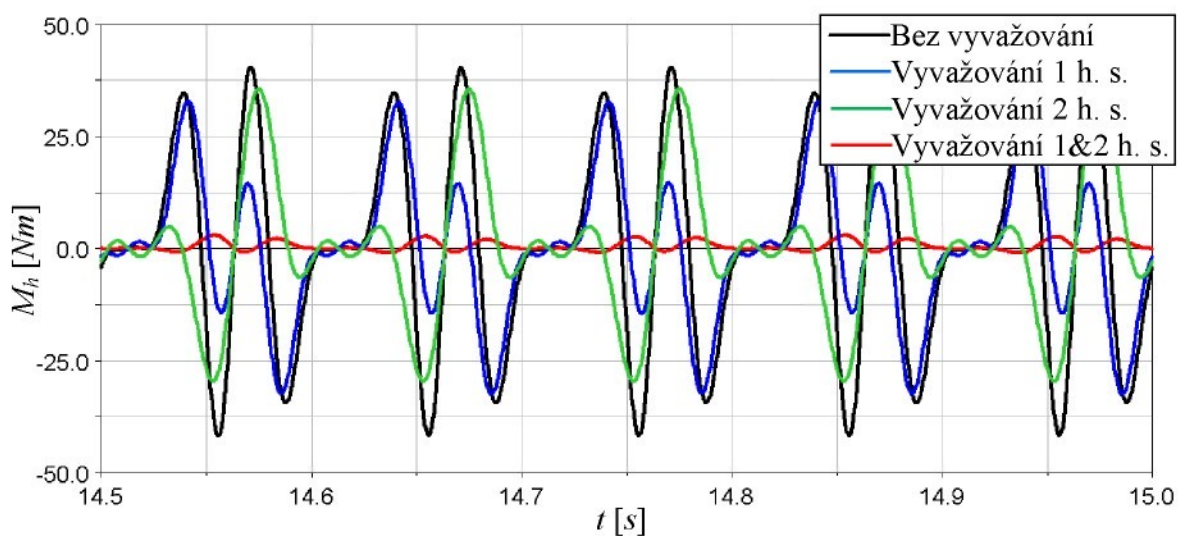
Tab. 5.1: Hnací moment vačkového mechanismu VM_1

n_R [ot min ⁻¹]	Bez vyvažování	Vyvažovaná první h. s.		Vyvažovaná druhá h. s.		Vyvažované první dvě h. s.	
	M_{hEff} [Nm]	M_{hEff} [Nm]	$b_{M_{hEff}}$ [%]	M_{hEff} [Nm]	$b_{M_{hEff}}$ [%]	M_{hEff} [Nm]	$b_{M_{hEff}}$ [%]
550	19.1	14.0	26.7	–	–	26.4	– 38.2
570	20.4	14.4	29.4	–	–	10.4	49.0
580	21.0	14.8	29.5	25.4	– 21.0	6.2	70.5
600	22.4	15.8	29.5	16.0	28.6	1.2	94.6
750	33.2	26.5	20.2	32.7	1.5	22.8	31.3

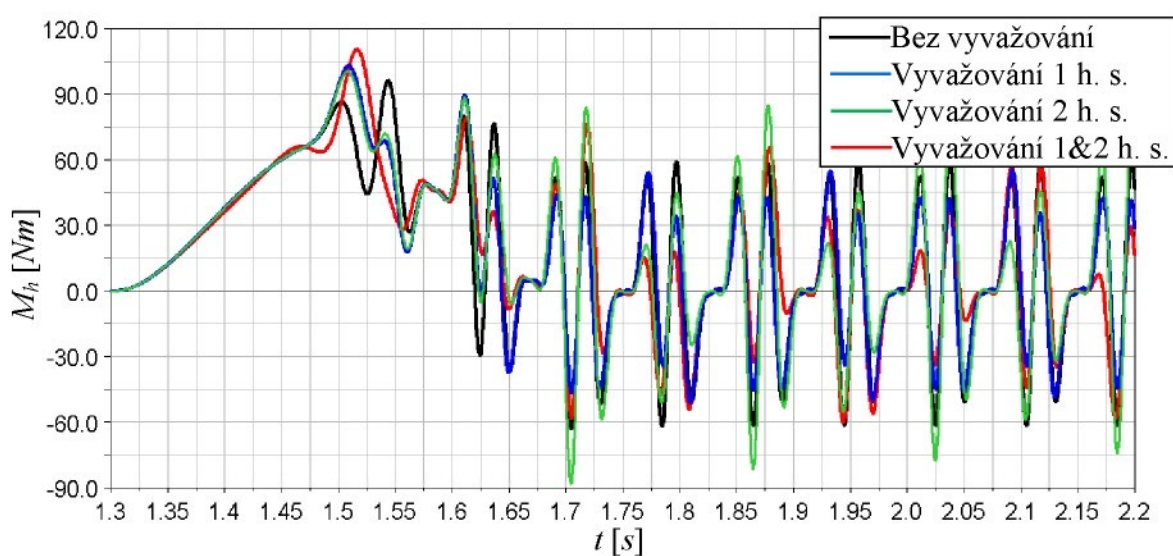
Na obrázcích **Obr. 5.1** až **Obr. 5.4** je ukázán průběh hnacích momentů M_h potřebných jednak k rozběhu jednotlivých analyzovaných provedení vačkového mechanismu VM_1, tak i pro jejich ustálený chod při žádaných pracovních otáčkách $n_R = 600$ a 750 ot min^{-1} .



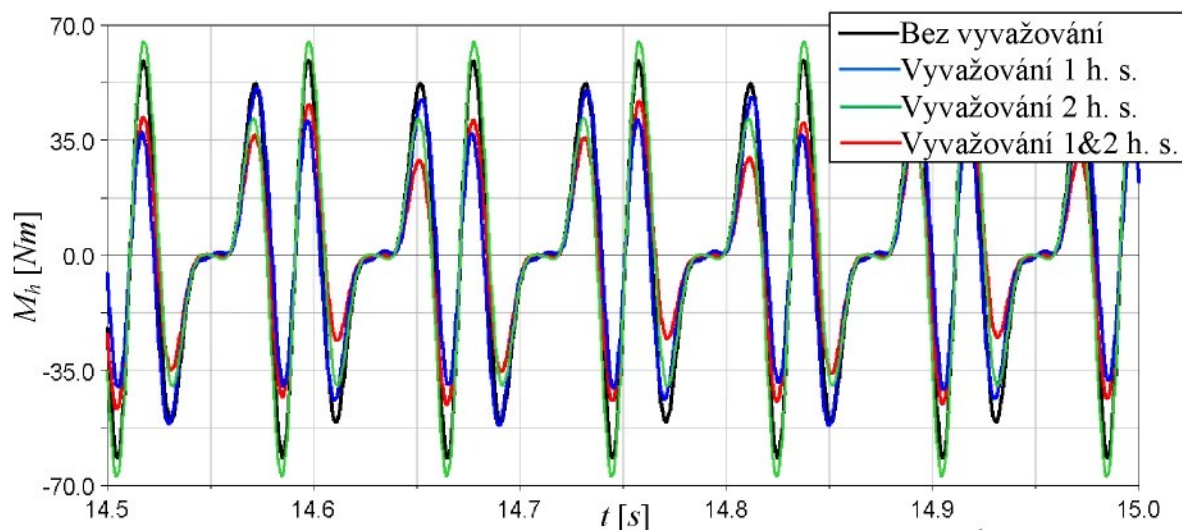
Obr. 5.1: Hnací moment VM_1, rozběh, $n_R=600 \text{ ot min}^{-1}$



Obr. 5.2: Hnací moment VM_1, ustálený chod, $n_R=600 \text{ ot min}^{-1}$



Obr. 5.3: Hnací moment VM_1, rozběh, $n_R=750 \text{ ot min}^{-1}$



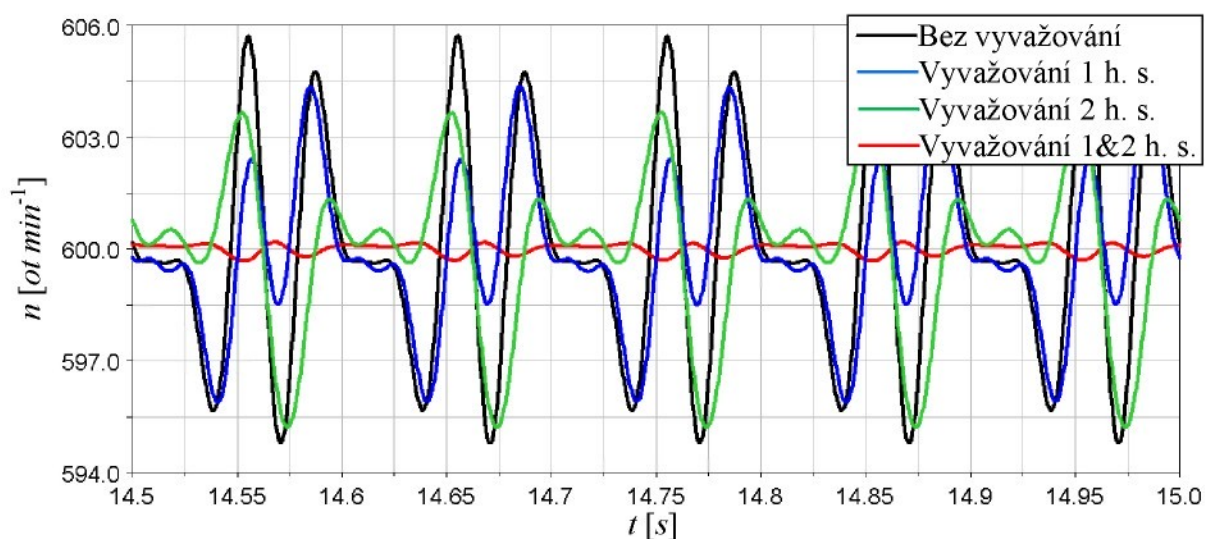
Obr. 5.4: Hnací moment VM_1, ustálený chod, $n_R=750 \text{ ot min}^{-1}$

V Tab. 5.2 jsou číselně vyjádřeny hodnoty nerovnoměrnosti chodu δ v ustáleném chodu stroje a jejich poměrové vyjádření u vyvažovaných soustav vzhledem k nevyvažované. Červeně jsou zvýrazněny ty případy, u kterých nenastal příznivý vliv vyvažujících subsystémů na chod stroje při požadovaných pracovních otáčkách.

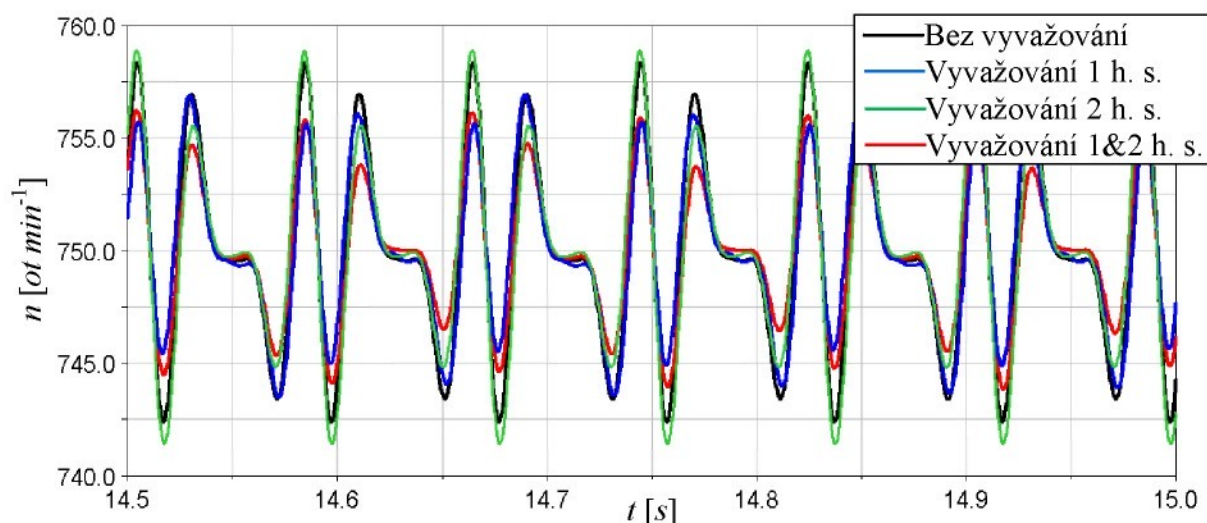
Na Obr. 5.5 a Obr. 5.6 je znázorněn časový průběh otáček vačkové hřídele v ustáleném chodu systému, přičemž ten byl spočten pro žádané hodnoty pracovních otáček: $n_R = 600$ a 750 ot min^{-1} .

Tab. 5.2: Nerovnoměrnost chodu vačkového mechanismu VM_1

n_R [ot min ⁻¹]	Bez vyvažování	Vyvažovaná první h. s.		Vyvažovaná druhá h. s.		Vyvažované první dvě h. s.	
	δ [-]	δ [-]	b_δ [%]	δ [-]	b_δ [%]	δ [-]	b_δ [%]
550	0.017	0.016	5.9	–	–	0.026	– 52.9
570	0.018	0.015	16.7	–	–	0.010	44.4
580	0.018	0.015	16.7	0.022	– 22.2	0.006	66.7
600	0.018	0.015	16.7	0.015	16.7	0.001	94.4
750	0.021	0.017	19.0	0.023	– 9.5	0.017	19.0



Obr. 5.5: Otáčky vačkové hřídele VM_1, $n_R=600 \text{ ot min}^{-1}$

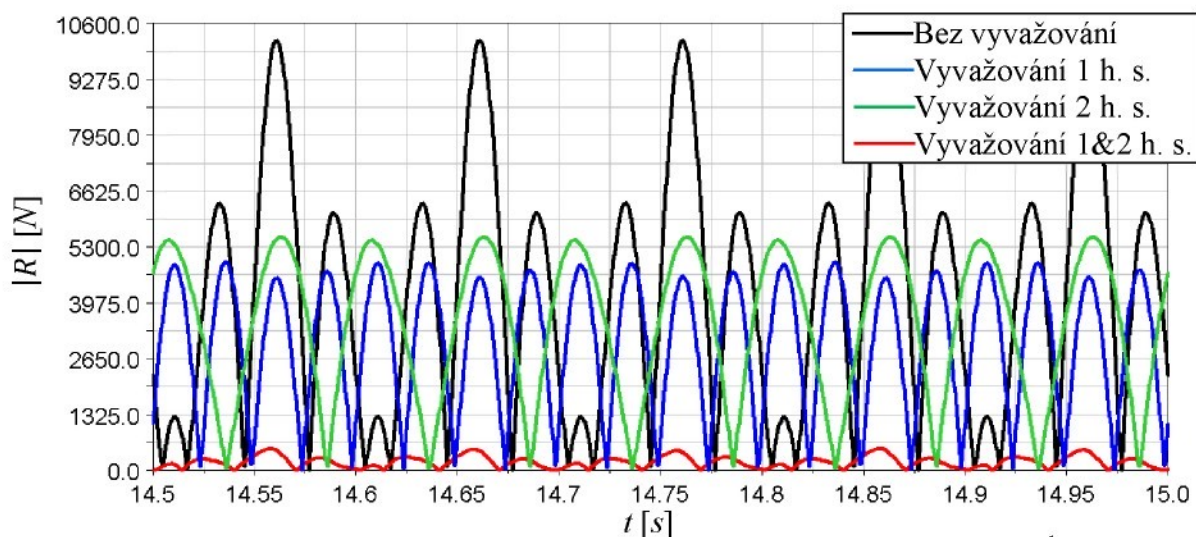


Obr. 5.6: Otáčky vačkové hřídele VM_1, $n_R=750 \text{ ot min}^{-1}$

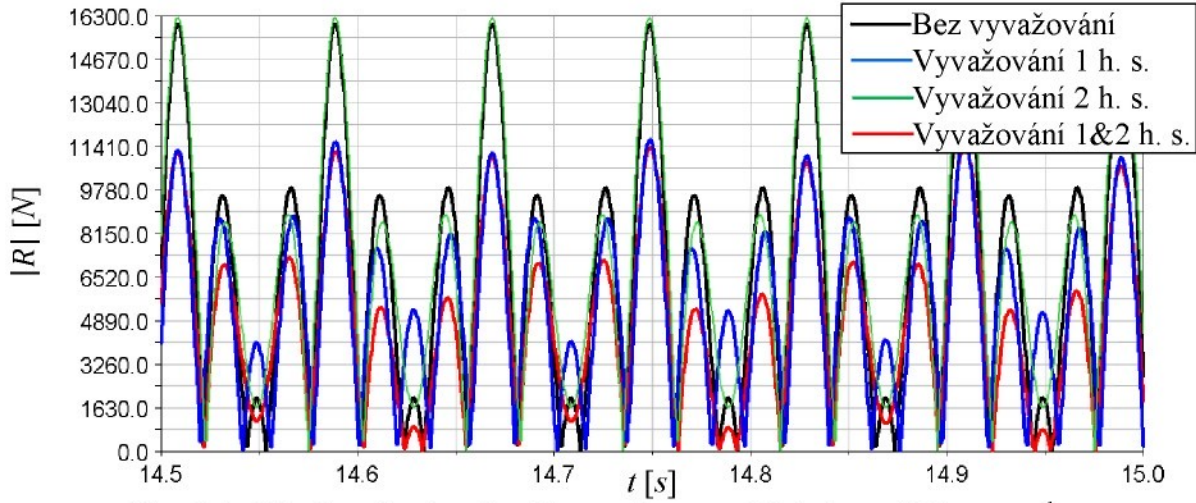
Na Obr. 5.7 a Obr. 5.8 je porovnáváno silové zatížení vačkového mechanismu při ustáleném chodu a při pracovních otáčkách $n_R = 600$ a 750 ot min^{-1} . Silovým zatížením se rozumí velikost reakce mezi kladkou vahadla a samotnou vačkou, jejíž maximální hodnoty jsou uvedeny v tabulce Tab. 5.3 pro každý z řešených mechanických systémů VM_1 a pro žádanou hodnotu pracovních otáček. Opět jsou zvýrazněny ty hodnoty, u kterých nedošlo ke zlepšení tohoto kritéria vlivem dynamického vyvažování při daných otáčkách stroje.

Tab. 5.3: Reakce v obecné kinematické dvojici vačkového mechanismu VM_1

n_R [ot min ⁻¹]	Bez vyvažování	Vyvažovaná první h. s.		Vyvažovaná druhá h. s.		Vyvažované první dvě h. s.	
	$ R _{\max}$ [N]	$ R _{\max}$ [N]	$b_{ R }$ [%]	$ R _{\max}$ [N]	$b_{ R }$ [%]	$ R _{\max}$ [N]	$b_{ R }$ [%]
550	8600	6200	27.9	—	—	11200	-30.2
570	9200	5600	39.1	—	—	5000	45.7
580	9500	5300	44.2	11000	-15.8	3100	67.4
600	10200	5000	51.0	5800	43.1	600	94.1
750	16100	11600	27.9	16300	-1.2	11800	26.7



Obr. 5.7: Silové zatížení vačkového mechanismu VM_1, $n_R=600 \text{ ot min}^{-1}$



Obr. 5.8: Silové zatížení vačkového mechanismu VM_1, $n_R=750 \text{ ot min}^{-1}$

5.1.2 Zkrut torzních tyčí

Torzní tyč náleží k nejvíce exponovaným členům mechanického systému. Míra jejího zatížení a též i životnost je závislá na její zkrutné deformaci při stanoveném rozsahu jmenovitých otáček. V tabulce **Tab. 5.4** jsou uvedeny největší hodnoty zkrutu ξ_l , který byl vyhodnocován z rozdílů časových průběhů úhlů natočení ϑ vyvažovaného členu vačkového mechanismu a ψ_l příslušné vyvažující hmoty:

$$\xi_l = \vartheta - \psi_l, \quad l = 1, 2.$$

Tyto hodnoty byly počítány pro oblast ustáleného stavu. Po dobu přechodového děje sice může v některých případech docházet k větším hodnotám zkrutu, avšak ty jsou významné z hlediska statického zatěžování torzních tyčí. V tomto případě je nutné kontrolovat napjatost tyčí vzhledem k mezi kluzu daného materiálu, tedy stanovit, zda již nedochází k plastickým deformacím pružného prvku vyvažujícího subsystému.

Tab. 5.4: Zkrut torzních tyčí vačkového mechanismu VM_1, ustálený stav

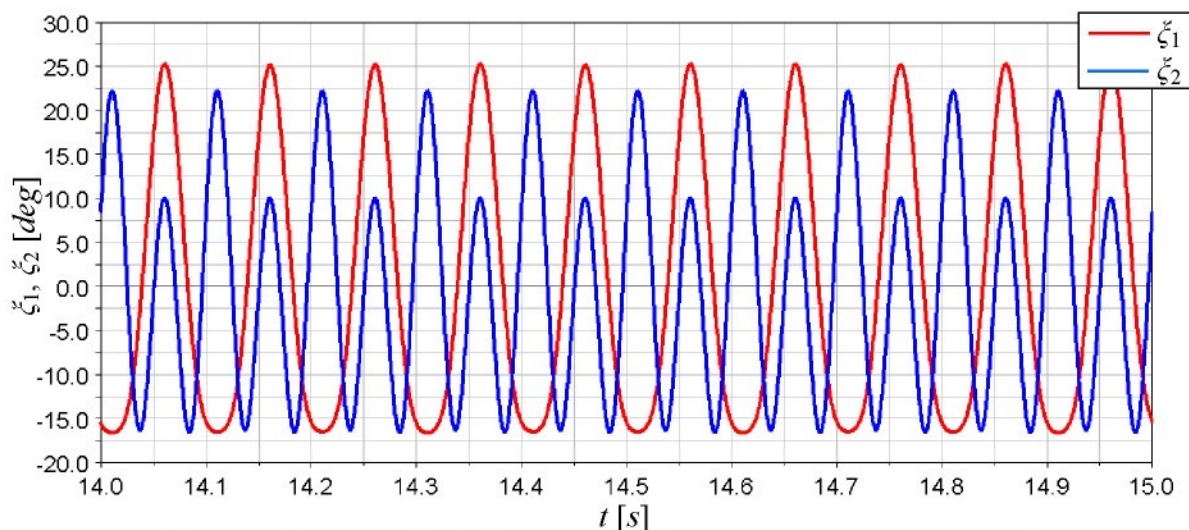
n_R [ot min ⁻¹]	Vyvažovaná první h. s.		Vyvažovaná druhá h. s.		Vyvažované první dvě harmonické složky			
	$ \xi_1 _{\max}$ [°]	τ [MPa]	$ \xi_2 _{\max}$ [°]	τ [MPa]	$ \xi_1 _{\max}$ [°]	τ [MPa]	$ \xi_2 _{\max}$ [°]	τ [MPa]
550	32.0	290	—	—	32.1	287	45.4	461
570	28.9	260	—	—	28.9	258	30.0	304
580	27.5	248	62.5	420	27.5	246	26.3	267
600	25.4	230	34.7	234	25.3	226	23.2	235
750	21.8	197	19.1	129	23.0	205	20.8	211

Na Obr. 5.9 jsou ukázány průběhy zkrutu torzních tyčí při vyvažování setrvačných účinků obou harmonických složek zdvihové závislosti VM_1. Toto vyvažování probíhalo při pracovních otáčkách $n_R = 600 \text{ ot min}^{-1}$. V Tab. 5.4 jsou červeně označeny hodnoty zkrutu, u nichž je překročena mez únavy τ_C . Číselné vyjádření této meze je podle (3.2.6) dáno vztahem:

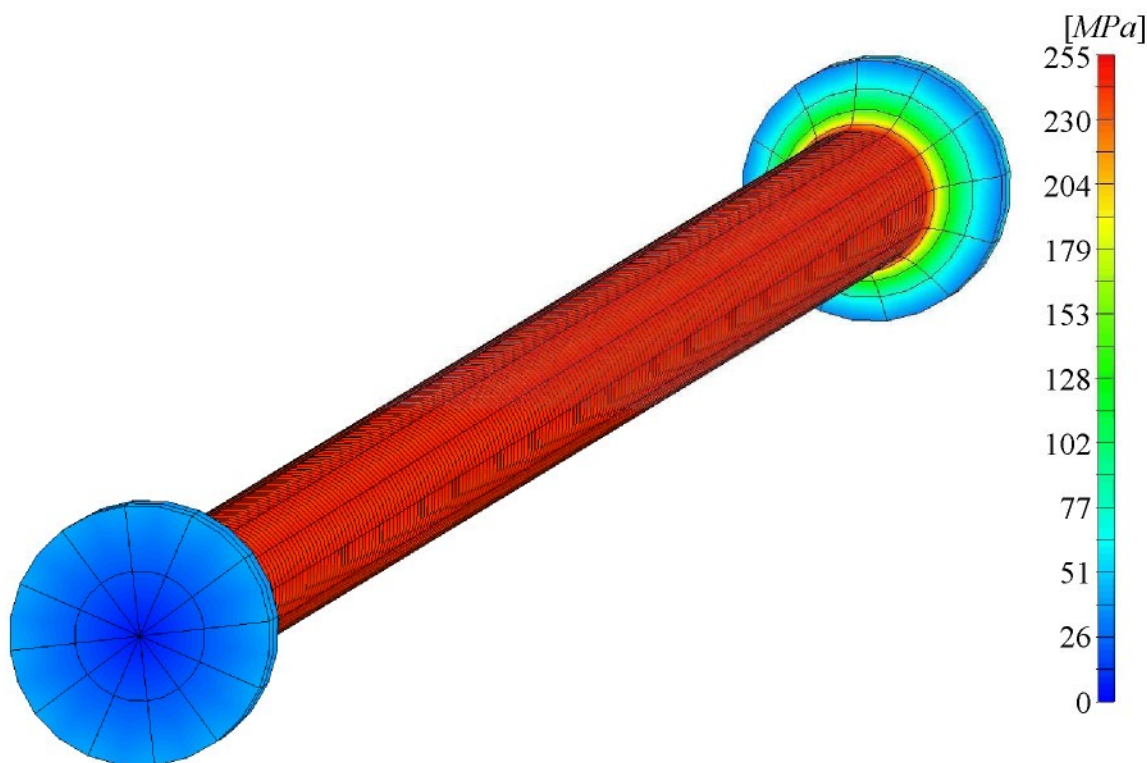
$$\tau_C = \frac{\sigma_{Ptmin}}{4} \frac{\varepsilon_{vt} \eta_{Pt}}{\varepsilon_b [1 + q_t (\alpha_t - 1)]} \geq \tau_l. \quad (5.2)$$

Dosazením příslušných hodnot z oddílu 4.3 do rovnice (5.2) vychází pro mez únavy v krutu:

$$\tau_C \in 240 \text{ MPa}.$$



Obr. 5.9: Časový průběh zkrutu torzních tyčí VM_1, $n_R=600 \text{ ot min}^{-1}$



Obr. 5.10: Rozložení tečného napětí torzní tyče, $k_t = 1979 \text{ Nm}$

Na Obr. 5.10 je uvedena ukázka rozložení tečných napětí τ_t torzní tyče o zkrutné tuhosti $k_{tI} = 1979 \text{ Nm rad}^{-1}$. Rozložení napětí bylo stanoveno metodou konečných prvků v systému NX I-DEAS za následujících předpokladů:

- elementům byly definovány materiálové charakteristiky pružinové oceli 14 260,
- uzlovým bodům v čelní ploše jednoho z konců tyče byly zamezeny veškeré posuvy,
- uzlové body v čelní ploše druhého z konců tyče byly prostřednictvím tuhého elementu spojeny s uzlovým bodem, umístěným v ose tyče. Tomuto bodu bylo předepsáno natočení kolem podélné osy tyče o velikosti $|\xi_1|_{\max} = 27^\circ$.

Poddajnost této torzní tyče je jedním ze základních parametrů, spolu s příslušným momentem setrvačnosti seismické hmoty, vyvažujícího subsystému, který eliminuje právě účinky první harmonické složky při procesu vyvažování obou složek zdvihové závislosti VM_1.

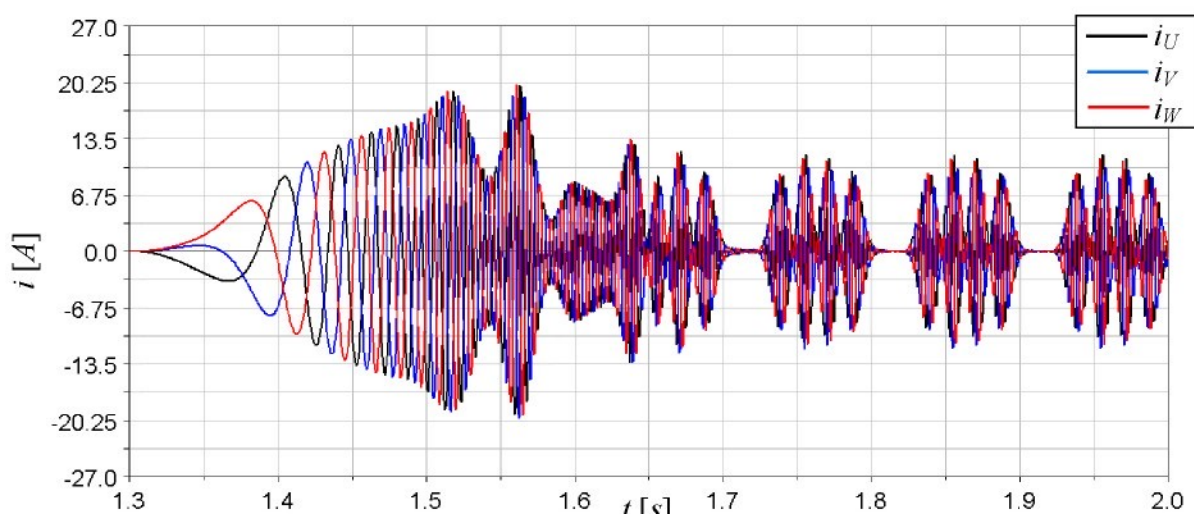
Hodnoty tečných napětí stanovených analytickým výpočtem podle (4.3.4) a metodou konečných prvků jsou mírně odlišné. Tato skutečnost je způsobena rozdílem v přístupu výpočtu hodnot tečných napětí prostřednictvím těchto metod. V případě MKP, kdy je prostorová napjatost tyče vyjádřena redukováným napětím σ_{red} a pro čistý krut platí podle teorie HMH přepočet:

$$\tau_l = \frac{\sigma_{lred}}{\sqrt{3}}, \quad (5.3)$$

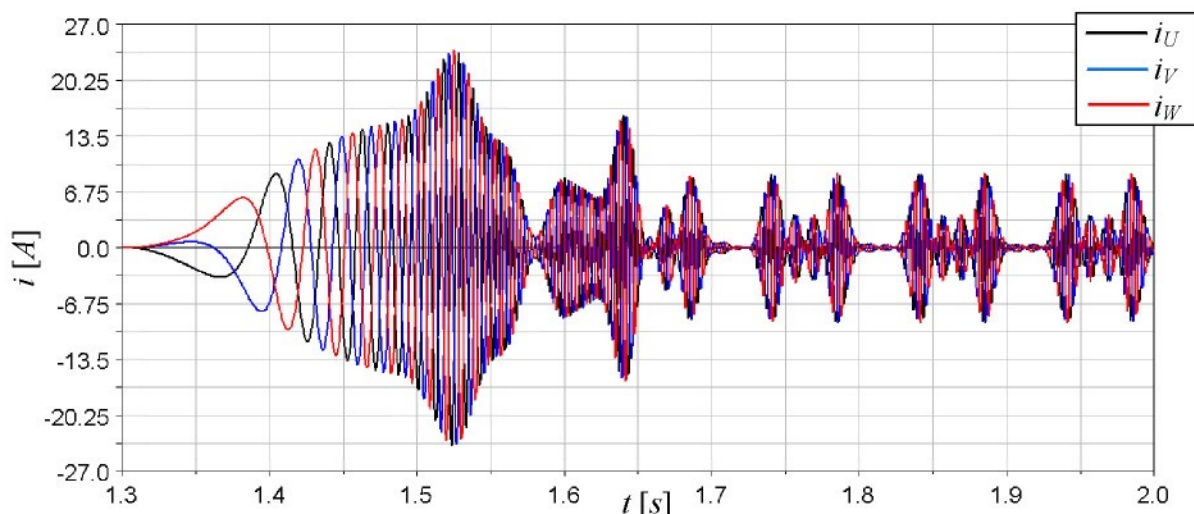
jsou velikosti tečných napětí přibližně o 5% vyšší.

5.1.3 Průběhy elektrických proudů

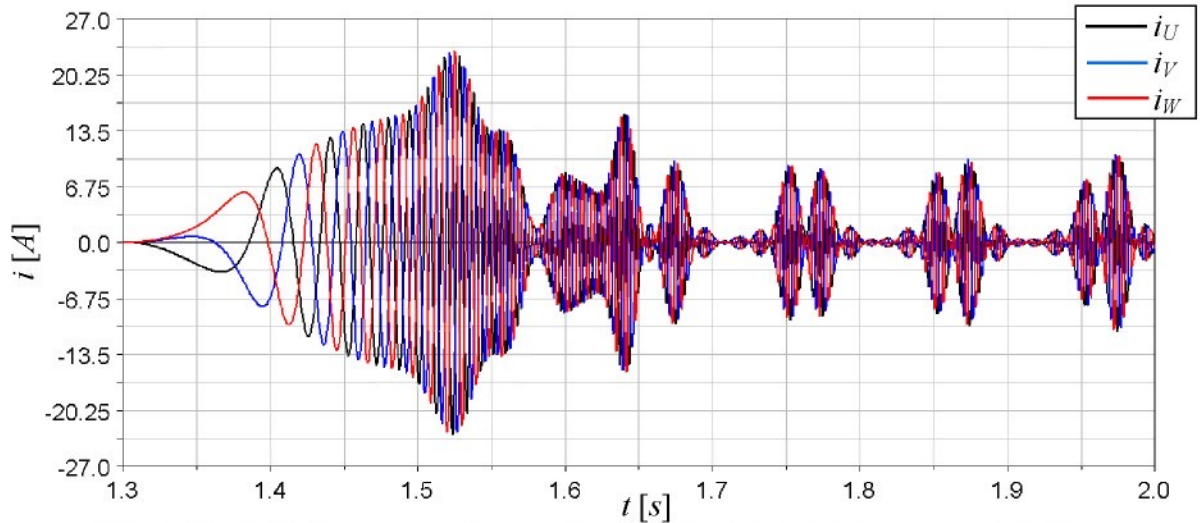
Na základě komplexního modelu mechatronického systému je možné stanovit časové závislosti nejen mechanických veličin, ale i elektrických, protože jeho součástí je i matematický popis pohonu včetně regulační struktury příslušného motoru. Na **Obr. 5.11** až **Obr. 5.14** je předložen teoretický průběh satorových proudů vypočtených na základě simulací matematického modelu mechatronického systému vačkového mechanismu VM_1. Tyto časové závislosti jsou spočteny pro všechna provedení tohoto mechanismu při pracovních otáčkách $n_R = 600 \text{ ot min}^{-1}$. Z těchto průběhů lze určit např. maximální hodnoty satorových proudů, které slouží ke kontrole návrhu příslušného elektromotoru.



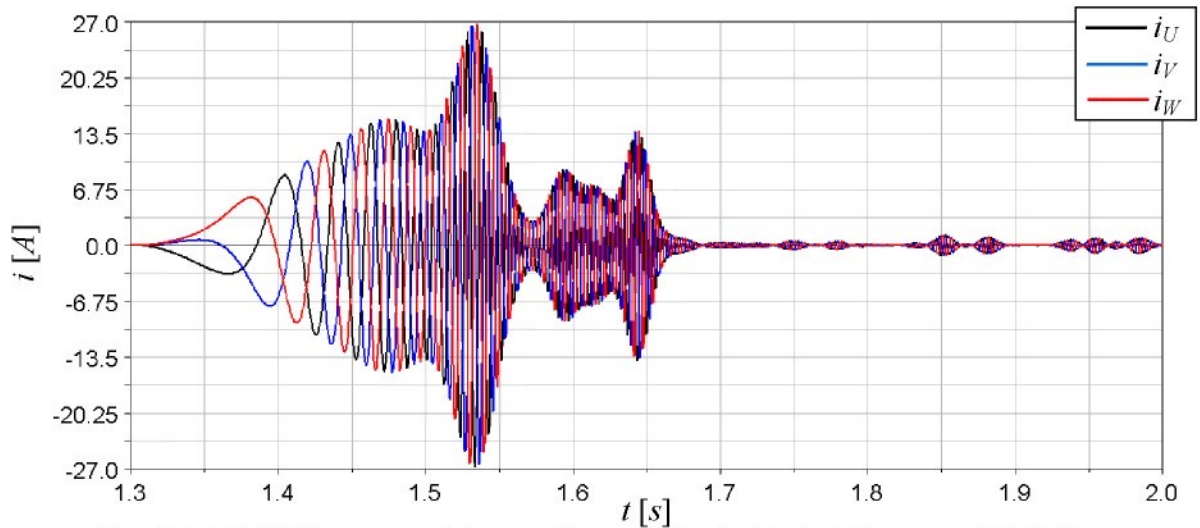
Obr. 5.11: Průběh satorových proudů – bez vyvažování



Obr. 5.12: Průběh satorových proudů – vyvažování první harmonické složky



Obr. 5.13: Průběh statorových proudů – vyvažování druhé harmonické složky



Obr. 5.14: Průběh statorových proudů – vyvažování 1. & 2. harmonické složky

5.2 Vačkový mechanismus VM_2

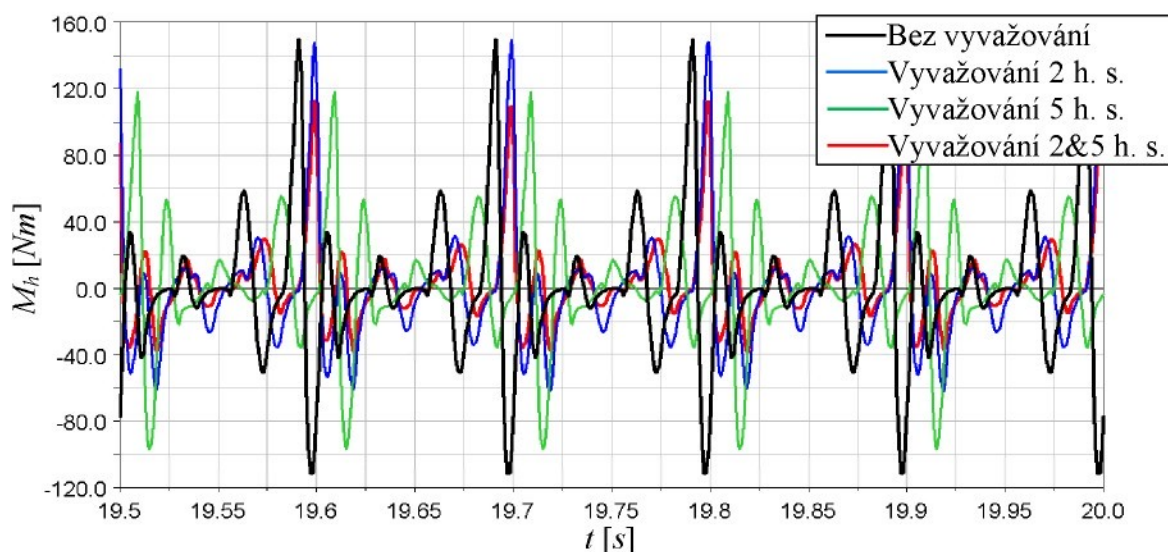
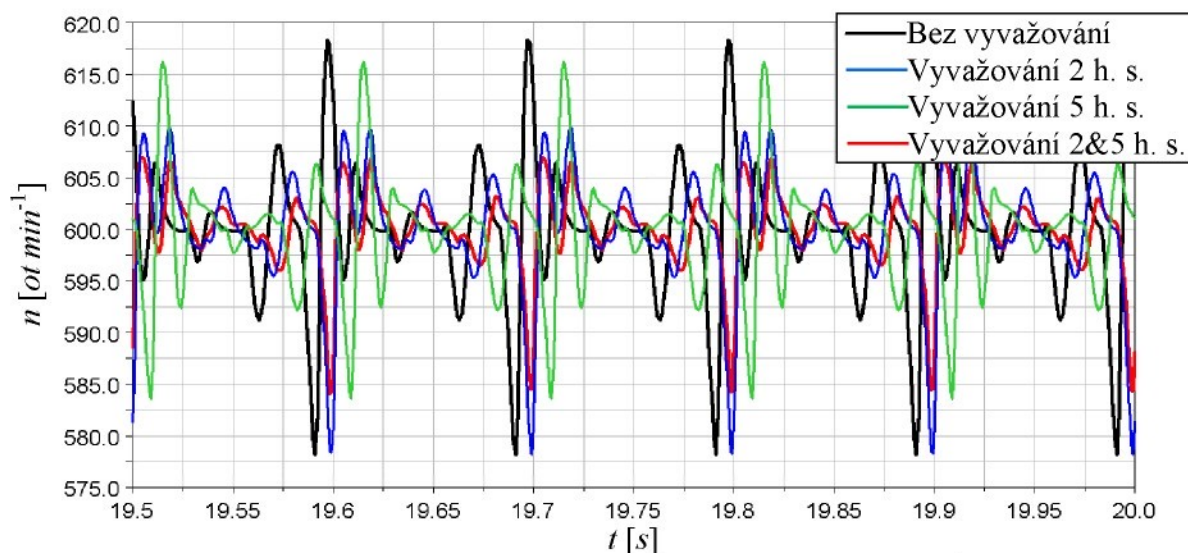
Stejným způsobem jako u vačkového mechanismu VM_1, tak i v případě vačkového mechanismu VM_2 byly kvantifikovány časové závislosti sledovaných mechanických veličin. Na analýze tohoto mechanického systému bylo ukázáno, že i pro zdvihové závislosti relativně komplikovaného průběhu lze uvedeným postupem stanovit takové parametry vyvažujících subsystémů, aby docházelo k účinnému vyvažování. Samotná zdvihová závislost vačkového mechanismu VM_2 je popsána v oddíle 4.2.2.

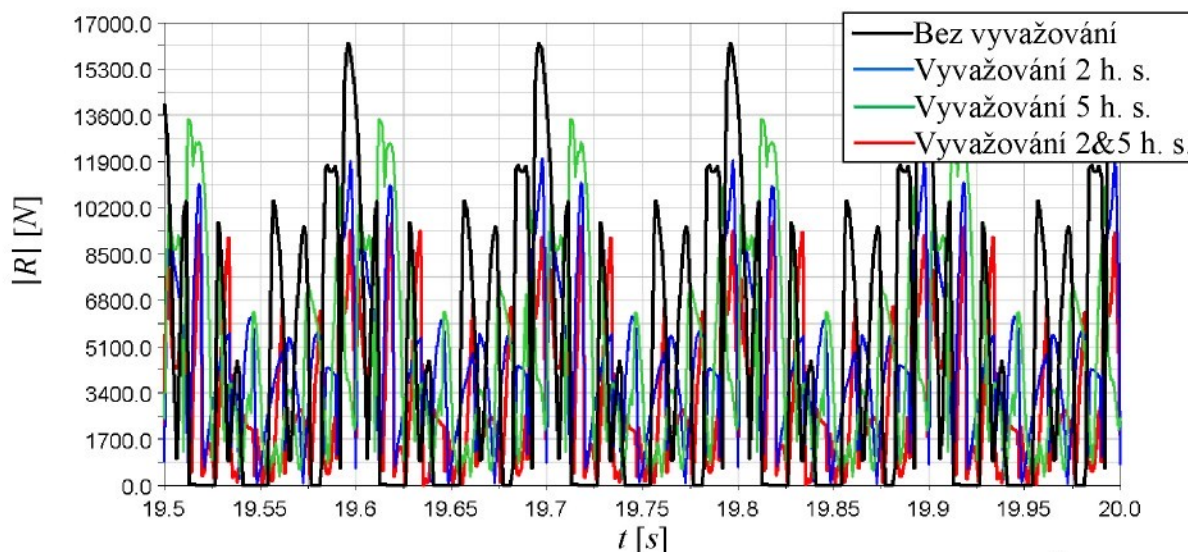
Rozborem této zdvihové závislosti podle oddílů 3.1.2 a 3.1.3 bylo zjištěno, že dominantními harmonickými složkami jsou *druhá* a *pátá*. Tedy především setrvačné účinky těchto dvou složek rozvoje zdvihové závislosti je účelné vyvažovat. Prostřednictvím výpočetních modelů byla číselně vyjádřena kritéria vyvážení setrvačných účinků jednotlivé *první* až *páté* harmonické složky a kombinace *druhé* a *páté* harmonické složky, viz *Tab. 5.5*. Výpočetní simulace probíhaly pouze pro žádané pracovní otáčky $n_R = 600 \text{ ot min}^{-1}$, které odpovídají jmenovité úhlové frekvenci Ω , na kterou byly navrhovány charakteristické parametry jednotlivých vyvažujících subsystémů. V posledním sloupci *Tab. 5.5* je ukázáno pořadí účelnosti vyvažování účinků příslušných složek, které celkem dobře koresponduje s uspořádáním z hlediska dominance těchto složek uvedeným v *Tab. 4.3*.

Tab. 5.5: Kritéria stupně vyvážení vačkového mechanismu VM_2

$n_R = 600 \text{ ot min}^{-1}$	M_{hEff} [Nm]	$b_{M_{hEff}}$ [%]	δ [-]	b_δ [%]	$ R _{max}$ [N]	$b_{ R }$ [%]	Pořadí [-]
Bez vyvažování	43.4	—	0.067	—	16300	—	—
Vyvažovaná 1 h. s.	40.5	6.7	0.063	6.0	15000	7.8	4
Vyvažovaná 2 h. s.	36.0	17.1	0.053	20.9	12100	25.8	2
Vyvažovaná 3 h. s.	40.9	5.8	0.060	10.4	13600	16.6	3
Vyvažovaná 4 h. s.	42.0	3.2	0.062	7.5	15300	6.1	5
Vyvažovaná 5 h. s.	34.0	21.7	0.055	17.9	13500	17.2	1
Vyvažovaná 2&5 h. s.	25.4	41.5	0.039	41.8	10000	38.7	—

Na **Obr. 5.15** až **Obr. 5.17** jsou postupně představeny časové závislosti potřebného hnacího momentu M_h pohonu, otáček n vačkové hřídele a velikosti $|R|$ silového zatížení vačkového mechanismu VM_2 v oblasti ustáleného chodu. Tyto průběhy jsou prezentovány pro mechanický systém bez vyvažování a dále pak s vyvažováním setrvačných účinků *druhé*, *páté* harmonické složky zdvihové závislosti a jejich vzájemné kombinace.

**Obr. 5.15:** Hnací moment VM_2, ustálený chod, $n_R=600 \text{ ot min}^{-1}$ **Obr. 5.16:** Otáčky vačkové hřídele VM_2, $n_R=600 \text{ ot min}^{-1}$



Obr. 5.17: Silové zatížení vačkového mechanismu VM_2, $n_R=600 \text{ ot min}^{-1}$

5.3 Čtyřkloubový mechanismus

Obdobným způsobem jako u vačkového mechanismu VM_1 probíhal rozbor možnosti a efektivity vyvážení setrvačných účinků čtyřkloubového mechanismu. Z předešlých analýz jeho zdvihové závislosti bylo známo, že jsou dominantní, v daném pořadí, *první* a *druhá* harmonická složka. Proto cílem návrhu dynamického vyvážení bylo snížení, případné úplné potlačení, jejich setrvačných účinků na daném intervalu pracovních otáček n_R . K vyjádření kvality vyvažování vzhledem k nevyvažované soustavě byla opět použita již výše zmiňovaná kritéria, která jsou postupně číselně vyjádřena v:

- **Tab. 5.6** efektivní hodnoty hnacího momentu M_{hEff} pohonu,
- **Tab. 5.7** nerovnoměrnost chodu kliky,
- **Tab. 5.8** maximální hodnoty velikosti reakce v kinematické vazbě mezi ojnicí a vahadlem.

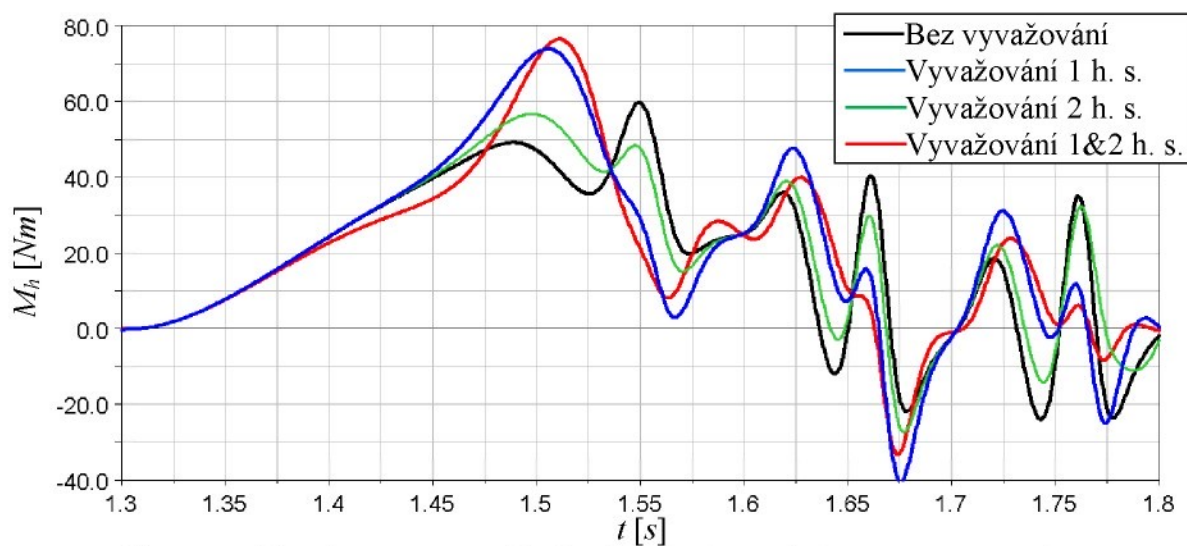
V tabulkách jsou červeně zvýrazněny hodnoty parametrů u těch případů, kdy nedošlo ke kladnému efektu procesu vyvažování. Jednotlivé tabulky byly sestaveny na základě časových závislostí odpovídajících mechanických veličin. Příklady jednotlivých časových průběhů jsou ukázány na Obr. 5.18 až Obr. 5.25.

5.3.1 Přehled výsledků simulací

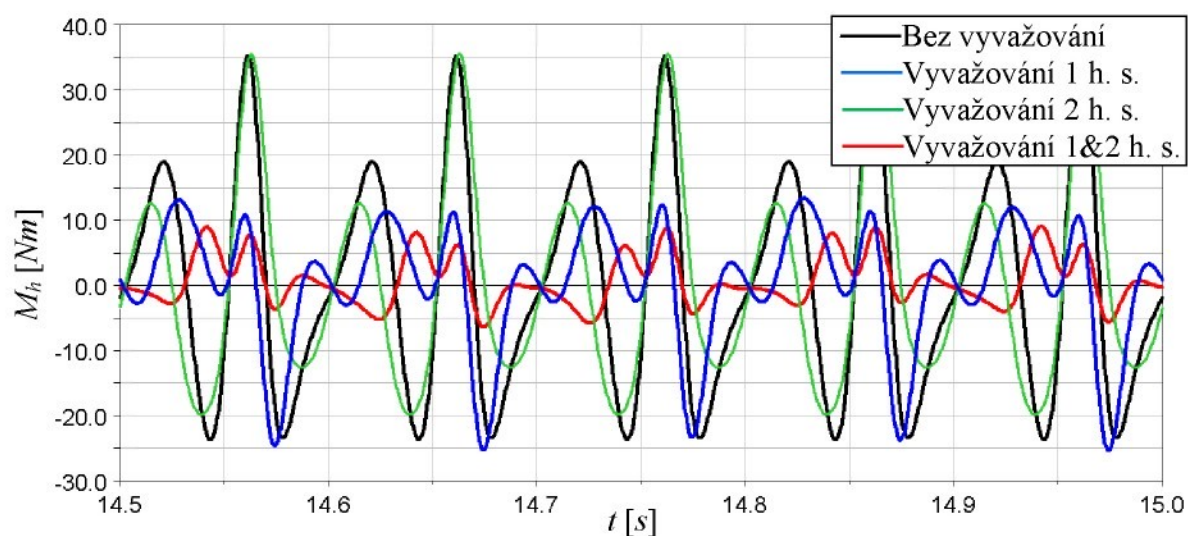
- **Hnací moment**

Tab. 5.6: Hnací moment čtyřkloubového mechanismu

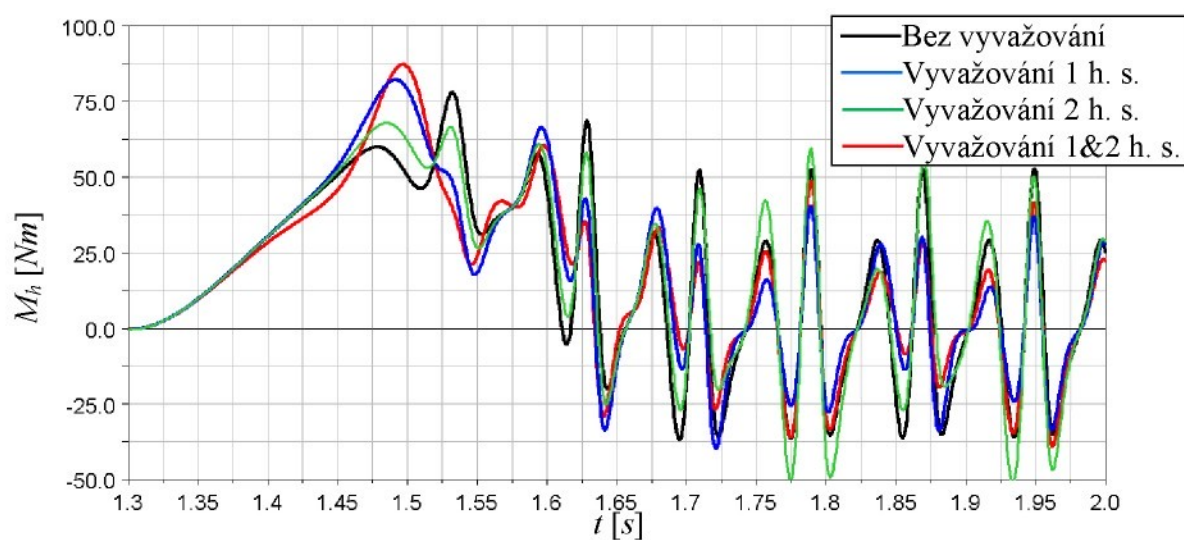
n_R [ot min ⁻¹]	Bez vyvažování	Vyvažovaná první h. s.		Vyvažovaná druhá h. s.		Vyvažované první dvě h. s.	
	M_{hEff} [Nm]	M_{hEff} [Nm]	$b_{M_{hEff}}$ [%]	M_{hEff} [Nm]	$b_{M_{hEff}}$ [%]	M_{hEff} [Nm]	$b_{M_{hEff}}$ [%]
550	14.1	11.0	22.0	—	—	—	—
570	15.1	9.2	39.1	—	—	56.5	-274.2
580	15.6	8.8	43.6	30.0	-92.3	13.5	13.5
600	16.6	8.6	48.2	15.9	4.2	3.6	78.3
750	25.2	16.5	34.5	26.3	-4.4	16.6	34.1



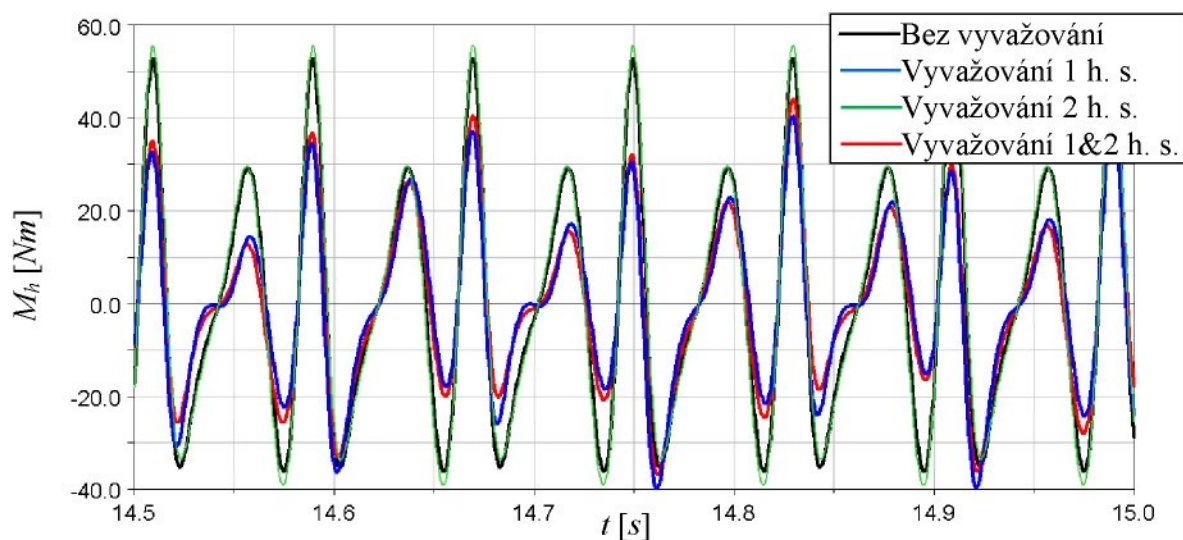
Obr. 5.18: Hnací moment čtyřkloubového mech., rozběh, $n_R=600 \text{ ot min}^{-1}$



Obr. 5.19: Hnací moment čtyřkloubového mech., ustálený chod, $n_R=600 \text{ ot min}^{-1}$



Obr. 5.20: Hnací moment čtyřkloubového mech., rozběh, $n_R=750 \text{ ot min}^{-1}$

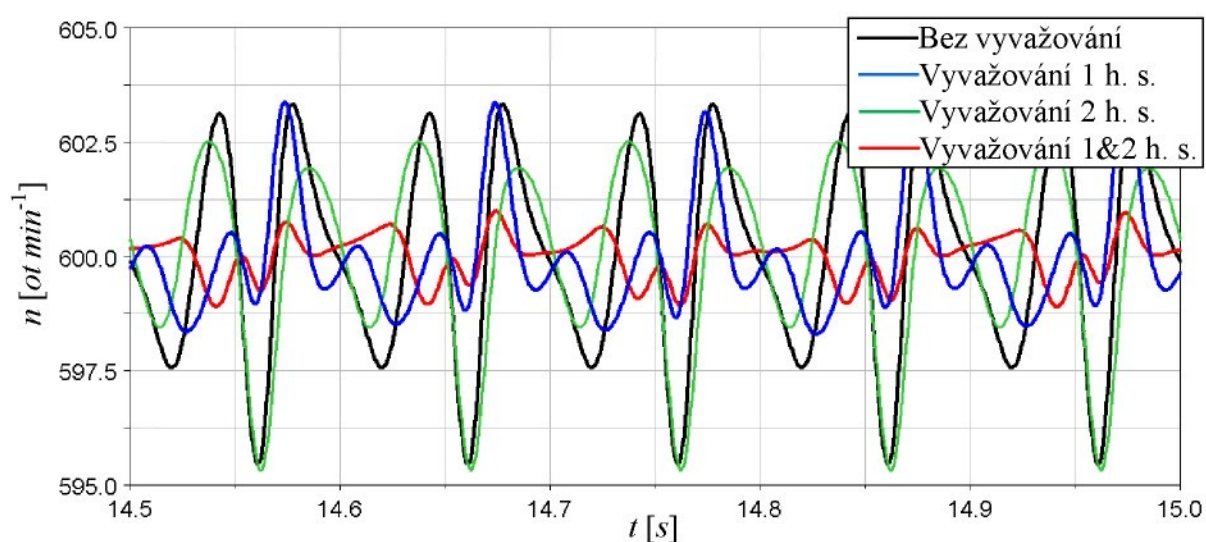


Obr. 5.21: Hnací moment čtyřkloubového mech., ustálený chod, $n_R=750 \text{ ot min}^{-1}$

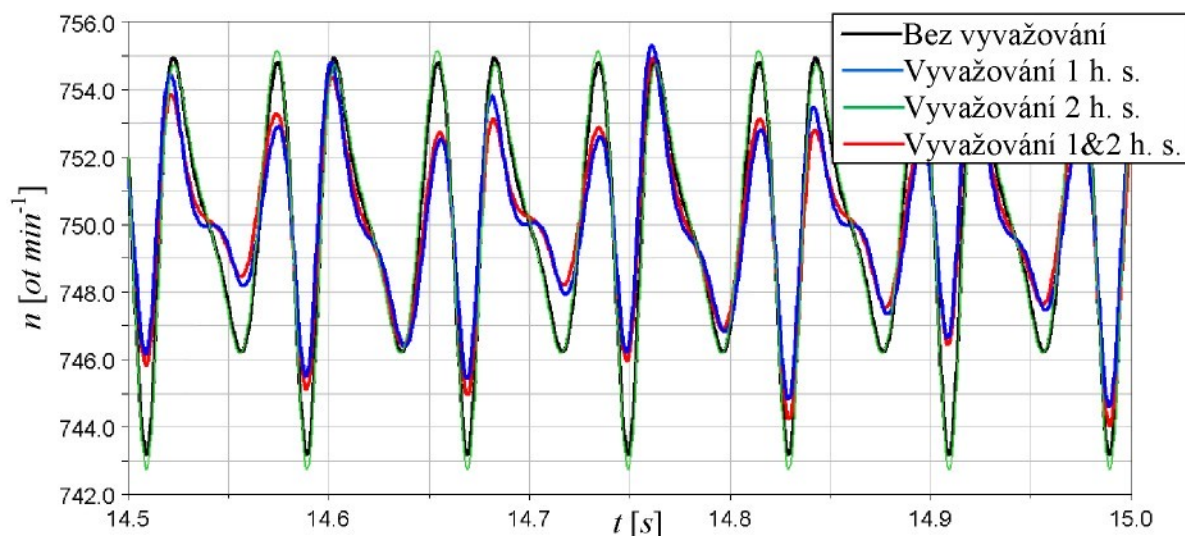
- Nerovnoměrnost chodu kliky

Tab. 5.7: Nerovnoměrnost chodu čtyřkloubového mechanismu

n_R [ot min ⁻¹]	Bez vyvažování	Vyvažovaná první h. s.		Vyvažovaná druhá h. s.		Vyvažované první dvě h. s.	
	δ [-]	δ [-]	b_δ [%]	δ [-]	b_δ [%]	δ [-]	b_δ [%]
550	0.012	0.010	16.7	—	—	—	—
570	0.013	0.009	30.8	—	—	0.053	- 307.7
580	0.013	0.008	38.5	0.025	- 92.3	0.012	7.7
600	0.013	0.008	38.5	0.012	7.7	0.003	76.9
750	0.017	0.012	29.4	0.016	5.9	0.012	29.4



Obr. 5.22: Otáčky kliky čtyřkloubového mechanismu, $n_R=600 \text{ ot min}^{-1}$

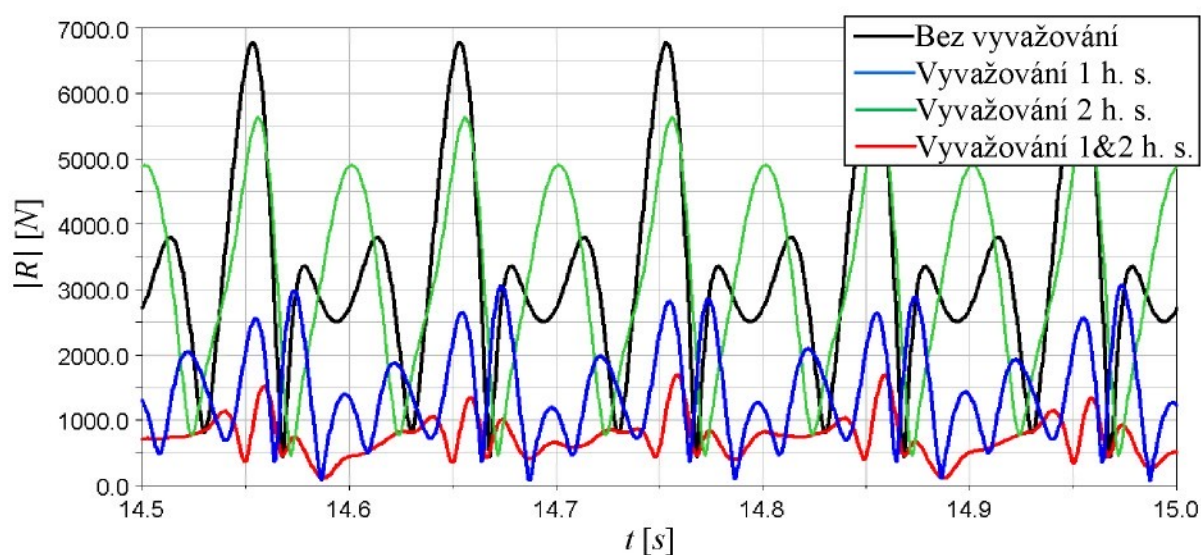


Obr. 5.23: Otáčky kliky čtyřkloubového mechanismu, $n_R=750 \text{ ot min}^{-1}$

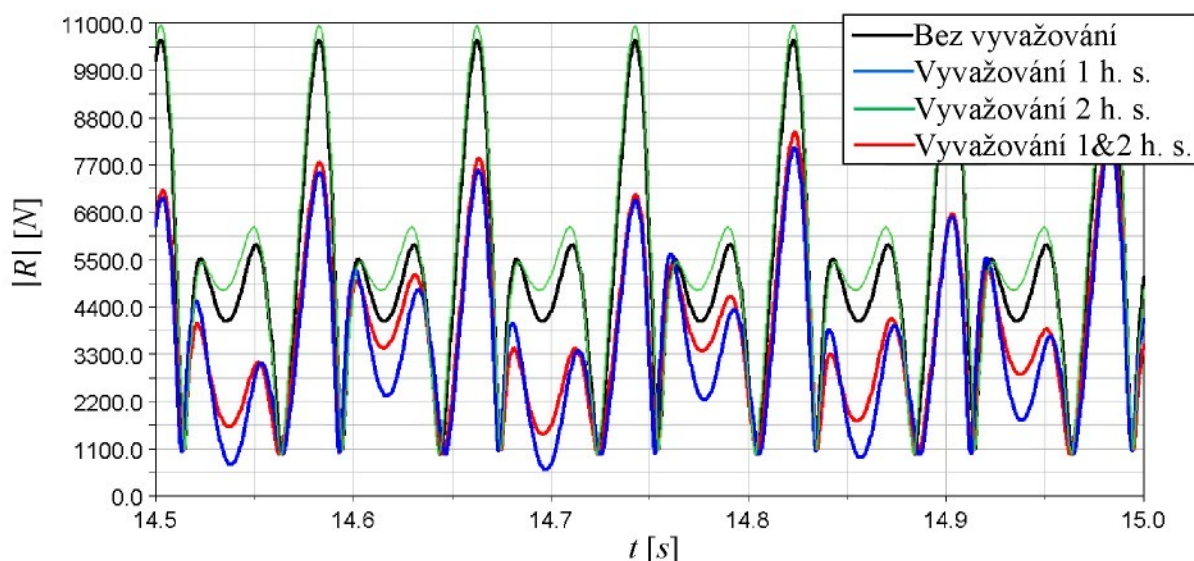
- Silové zatížení

Tab. 5.8: Reakce v kinematické dvojici čtyřkloubového mechanismu

n_R [ot min ⁻¹]	Bez vyvažování	Vyvažovaná první h. s.		Vyvažovaná druhá h. s.		Vyvažované první dvě h. s.	
	$ R _{\max}$ [N]	$ R _{\max}$ [N]	$b_{ R }$ [%]	$ R _{\max}$ [N]	$b_{ R }$ [%]	$ R _{\max}$ [N]	$b_{ R }$ [%]
550	5700	3300	42.1	—	—	—	—
570	6200	2900	53.2	—	—	13500	-117.7
580	6400	2900	54.7	10700	-67.2	4000	37.5
600	6800	3000	55.9	5600	17.6	1100	83.8
750	10700	7300	31.8	11000	-2.8	7800	27.1



Obr. 5.24: Silové zatížení čtyřkloubového mechanismu, $n_R=600 \text{ ot min}^{-1}$



Obr. 5.25: Silové zatížení čtyřkloubového mechanismu, $n_R=750 \text{ ot min}^{-1}$

5.3.2 Zkrut torzních tyčí

Pro zkrut torzních tyčí vyvažujících subsystémů čtyřkloubového mechanismu platí stejné skutečnosti jako v případě torzních tyčí vyvažujících subsystémů vačkových mechanismů, viz oddíl 5.1.2.

Tab. 5.9: Zkrut torzních tyčí čtyřkloubového mechanismu

n_R [ot min ⁻¹]	Vyvažovaná první h. s.		Vyvažovaná druhá h. s.		Vyvažované první dvě harmonické složky			
	$ \xi_1 _{\max}$ [°]	τ [MPa]	$ \xi_2 _{\max}$ [°]	τ [MPa]	$ \xi_1 _{\max}$ [°]	τ [MPa]	$ \xi_2 _{\max}$ [°]	τ [MPa]
550	38.2	461	—	—	—	—	—	—
570	34.2	304	—	—	34.5	271	103.3	1070
580	32.6	267	72.0	436	32.8	258	43.9	454
600	31.0	235	33.1	196	30.0	236	22.2	230
750	24.3	211	14.4	85	24.6	193	15.2	157

5.4 Zhodnocení

Závěry, které vyplývají z provedených výpočetních simulací, jsou formulovány v následujících odstavcích:

1. Z uskutečněných výpočetních simulací jednotlivých matematických modelů je patrný příznivý vliv vyvažujících subsystémů na chod analyzovaných mechanických soustav. Chod vyvažovaného (pracovního) tělesa se vyznačuje v ustálené oblasti periodickým vratným pohybem. K nejvyšší účinnosti vyvážení dochází při žádaných otáčkách n_R stroje, které odpovídají jmenovité úhlové frekvenci Ω , na kterou jsou navrhovány charakteristické parametry příslušných vyvažujících subsystémů, tj. moment setrvačnosti J_l vyvažující hmoty a zkrutná tuhost k_{tl} torzní tyče. Mezi žádanou hodnotou otáček n_R a žádanou pracovní úhlovou rychlostí ω_R platí vztah:

$$\omega_R = \frac{\pi n_R}{30}. \quad (5.4.1)$$

Kladný účinek procesu vyvažování v oblasti ustáleného chodu systému se především projevuje:

- Snížením efektivní hodnoty potřebného hnacího momentu M_{heff} pohonu.
- Zklidněním chodu příslušného strojového agregátu, který je dán snížením nerovnoměrnosti chodu δ hnacího členu daného systému.
- Snížením silového zatížení vyvažované mechanické soustavy.

V důsledku těchto tří základních závěrů dále dochází:

- ke snížení příkonu stroje,
- ke snížení velikosti reakčních sil,
- ke snížení pasivních odporů,
- ke zvýšení dynamické únosnosti samotných členů vyvažované mechanické soustavy,
- ke zvýšení dynamické únosnosti, resp. životnosti, prvků, které vytvářejí kinematická propojení mezi jednotlivými členy mechanického systému, jako jsou např. ložiska, kuličkové šrouby, matice kuličkových šroubů, řemenové a řetězové převody, převody ozubenými koly, spojky, atd.

2. Z provedených simulací, v případě vačkového mechanismu VM_1 a čtyřkloubového mechanismu, je patrný velmi razantní pokles účinnosti vyvažování setrvačných účinků při žádané pracovní úhlové rychlosti ω_R , která je pod jmenovitou úhlovou frekvencí Ω . Při těchto nižších otáčkách dochází v krajních polohách k překmitávání příslušné vyvažující hmoty z důvodu vyšší hodnoty momentu setrvačnosti, než na které byl vyvažující subsystém naladěn. Tento jev způsobuje s klesající pracovní úhlovou rychlostí postupně nárůst zatížení pohonu, nerovnoměrnosti chodu stroje a silového zatížení systému do takové míry, až dojde k úplné ztrátě příznivého účinku procesu vyvažování. Tento jev se stává velmi výrazným při vyvažování setrvačných účinků *druhé* a vyšších harmonických složek zdvihové závislosti, jak je zřejmé z číselného vyjádření vybraných mechanických veličin formou tabulek.

Naopak se zvyšováním požadované pracovní úhlové rychlosti ω_R nad jmenovitou úhlovou frekvencí Ω jsou sice uváděné charakteristiky vyvažování mechanického systému příznivější vzhledem k soustavě bez vyvažování, avšak postupně dochází ke snižování úrovně vyvážení setrvačných účinků. To je způsobeno tím, že vyvažující hmota nedosahuje při pohybu potřebných krajních poloh, protože její hmotový moment setrvačnosti má nižší hodnotu vzhledem k žádaným pracovním otáčkám.

Popisované vlastnosti způsobu vyvažování setrvačných účinků mechanických systémů se tímto stávají značně omezující. A to především z hlediska použitelnosti při větším rozsahu pracovních otáček. Z uvedených poznatků plyne, že zmiňovaný způsob vyvažování je vhodný pro taková strojní zařízení, jejichž pracovní proces probíhá v úzce vymezeném intervalu pracovních otáček n_R .

3. Doposud byla věnována pozornost vlastnostem soustav s vyvažováním v ustáleném stavu, avšak z hlediska správné funkce musí být do tohoto stavu nejprve uvedena. Ustáleného stavu je dosaženo takovým způsobem, že nejprve dojde k natočení vyvažujících hmot do předepsaných počátečních poloh ψ_{i0} , ve kterých jsou zafixovány. Následně dojde k rozběhu samotného vyvažovaného systému na pracovní otáčky n_R . Poté jsou v definovaném okamžiku T vyvažující hmoty uvedeny do pohybu, který je podporován silovými účinky torzních tyčí. Jejich uvedení do pohybu vede k poklesu sledovaných mechanických veličin v oblasti ustáleného chodu. Tato skutečnost je zřejmá z provedených výpočetních simulací.

Při tomto postupu rozběhu je příznačný nárůst okamžité hodnoty potřebného hnacího momentu v porovnání s nevyvažovaným mechanismem, protože je třeba zpočátku překonat vratné síly torzních tyčí vyvažujících subsystémů. Ty jsou přímo závislé na velikostech torzních tuhostí k_{ti} . Tento jev lze vysledovat na časových závislostech průběhu potřebného

hnacího momentu M_h a zvýšeném odběru proudů i_U , i_V a i_W v době trvání rozběhu, viz obrázky *Obr. 5.1*, *Obr. 5.3*, *Obr. 5.18*, *Obr. 5.20* a *Obr. 5.11* až *Obr. 5.14*.

4. V případě vyvažování setrvačných účinků obou složek zdvihové závislosti vačkového mechanismu VM_1, viz oddíl 4.2.1, by mělo dojít v ustáleném chodu k jejich úplnému eliminování za těchto podmínek:

- pracovní úhlová rychlost je rovna jmenovité úhlové frekvenci, tj.: $\omega_R = \Omega$,
- na tento mechanický systém nepůsobí žádné akční síly, kromě tíhy,
- kinematické vazby mezi tělesy jsou ideální.

K jejich naprosté eliminaci nedošlo z několika příčin:

- U vyvažovaného členu soustavy se vyskytuje statická nevyváženost, jejímž kvantitativním vyjádřením je tzv. nevyvážek:

$$U_p = mr_s. \quad (5.4.2)$$

Po dosazení číselných hodnot podle *Tab. 4.1* má velikost $U_p = 0.68 \text{ kgm}$. Velikost tohoto nevyvážku je dána na základě geometrického modelu reálného tuhého tělesa vytvořeném v systému NX I-DEAS. Tato skutečnost byla do výpočetních modelů záměrně zavedena, protože v technické praxi, kromě rotorových systémů, dochází zřídka k naprostému dynamickému vyvážení těles, především jsou-li tvarově členitá a relativně hmotná.

- Jednou z dalších příčin je ta, že hnací člen nevykoná rovnoměrný pohyb při dynamickém buzení soustavy momentem, který je počítán prostřednictvím modelu pohonu. To se projeví v pohybové rovnici (3.1.12) tím, že první člen na její levé straně není roven nule, jak se předpokládalo na základě rovnoměrné rotace hnacího členu. Tedy tato část setrvačných účinků nebyla předmětem vyvažování.

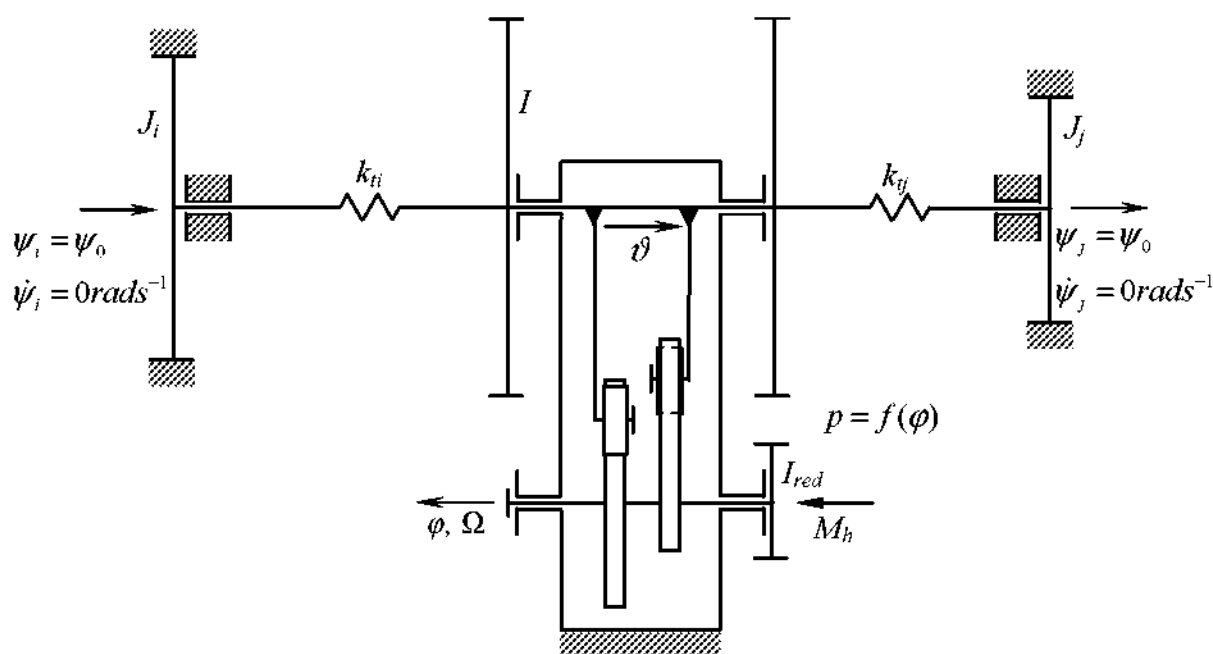
- Při odvozování vztahů pro výpočet charakteristických parametrů vyvažujících subsystémů se předpokládá nehmotný pružný prvek (torzní tyč), který se vyznačuje jen svou tuhostí. Avšak v simulačních modelech byly tyto prvky nahrazeny poddajnými tělesy, u kterých kromě samotné poddajnosti je nutné respektovat rozložení hmotnosti, viz rovnice (2.2.3). Opět se tento fakt projeví dalšími setrvačnými účinky, které nebyly zahrnuty do procesu vyvažování.

Všechny tři výše uvedené příčiny se tedy projeví svými setrvanými účinky na průběhu sledovaných mechanických veličin v ustáleném chodu mechanické soustavy, viz *Obr. 5.2*, *Obr. 5.5* a *Obr. 5.7*. Ovšem zdaleka největší podíl vlivu na jejich průběh a velikost vykazují dynamické síly od hmotných poddajných těles, kterými jsou torzní tyče vyvažujících subsystémů.

5. Porovnáním plyne, že maximální velikosti zkrutu $|\xi_l|_{\max}$ torzních tyčí stanovených na základě výpočetních simulací, viz *Tab. 5.4* a *Tab. 5.9*, dosahují menších hodnot ve vztahu se stejnými veličinami, které byly určeny analytickými výpočty. Podle rovnice (3.1.35) byly pro jmenovitou úhlovou frekvenci $\Omega = 20\pi \text{ rad s}^{-1}$ napočteny maximální hodnoty zkrutu ξ_l jednotlivých torzních tyčí, které jsou souhrnně uvedeny v *Tab. 4.8*. Ty jsou nejen závislé na dané jmenovité úhlové frekvenci Ω , ale i na parametrech vyvažujících subsystémů k_{il} , J_l a zdvihové závislosti $\vartheta(\varphi)$. Rozdílnost hodnot zkrutu plyne ze skutečnosti, že v matematických modelech byly pružné prvky vyvažujících subsystémů nahrazeny poddajnými tělesy, u kterých bylo definováno materiálové tlumení a u kterých bylo uvažováno kromě odpovídající tuhosti též s rozložením hmotových charakteristik, viz oddíl 4.4.

5.4.1 Rozšíření intervalu použitelnosti

V rámci zkoumání možností použitelnosti mechanických soustav s vyvažováním setrvačných účinků na širším rozsahu pracovních otáček n_R bylo analyzováno provedení s označením VM_1-FIX, jehož simulační model vychází z jednoho z matematických modelů vačkového mechanismu VM_1, viz blokové schéma na *Obr. 5.26*. Tento výchozí model VM_1 byl vytvořen pro analýzu procesu vyvažování setrvačných účinků obou harmonických složek zdvihové závislosti, viz oddíl 4.2.1. Parametry a předpoklady obou simulačních modelů jsou totožné, viz kapitola 4 nebo příloha F.1. Jen obě vyvažující hmoty v případě vačkového mechanismu VM_1-FIX byly natočeny do takových počátečních poloh ψ_0 , aby v oblasti ustáleného stavu systému byla minimalizována efektivní hodnota potřebného hnacího momentu pohonu.



Obr. 5.26: Vačkový mechanismus VM_1-FIX, vyvažující hmoty fixovány

Použitím Lagrangeovy rovnic druhého druhu byla odvozena v rámci kinetostatického řešení vlastní pohybová rovnice mechanického systému VM_1-FIX podle blokového schématu na *Obr. 5.26* v následujícím tvaru:

$$p(\varphi) \left[I \Omega^2 \frac{\partial p(\varphi)}{\partial \varphi} + (k_{ti} + k_{tj}) (\vartheta(\varphi) - \psi_0) \right] = M_h, \quad \psi_i = \psi_j = \psi_0. \quad (5.4.3)$$

Jednotlivé proměnné v rovnici (5.4.3) nabývají význam podle kapitoly 3, přičemž byl zaveden předpoklad rovnoměrné rotace hnacího členu soustavy, viz podmínka (3.1.1).

Matematické vyjádření efektivní hodnoty hnacího momentu je dáno podle vztahu:

$$M_{hEff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T |M_h|^2 dt}, \quad (5.4.4)$$

ve kterém perioda T je stanovena výrazem:

$$T = \frac{2\pi}{\Omega}. \quad (5.4.5)$$

Vztah (5.4.4) lze dále s využitím (5.4.5) a použitím substituce:

$$d\varphi = \Omega dt \quad (5.4.6)$$

upravit do tvaru:

$$M_{hEff} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |M_h|^2 d\varphi}. \quad (5.4.7)$$

Dosazením (5.4.3) do (5.4.7) byla odvozena poměrně komplikovaná funkce $M_{hEff} = f(\psi_0)$, z jejíhož minima je možné určit optimální natočení ψ_0 vyvažujících hmot. V případě výpočtu určitého integrálu v rovnici (5.4.7) užitím sumace lze formulovat rekurentní vzorec:

$$M_{hEff}^i = \sqrt{\frac{\Delta\varphi}{2\pi} \sum_{n=0}^N |M_{hm}^i|^2}, \quad \Delta\varphi = \frac{2\pi}{N}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N, \quad (5.4.8)$$

$$M_{hm}^i = p(n\Delta\varphi) \left[I\Omega^2 \frac{\partial}{\partial\varphi} (p(n\Delta\varphi)) + (k_{ti} + k_{tj}) (\vartheta(n\Delta\varphi) - \psi_0^i) \right],$$

ve kterém N značí počet vzorků nezávisle proměnné φ na intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$ a i příslušnou iteraci. Na základě vztahu (5.4.8) je již možné vhodnou iterační metodou v několika krocích stanovit optimální hodnotu natočení ψ_0 takovou, aby hodnota veličiny M_{hEff} byla minimální. Popsaným způsobem byly číselně stanoveny příslušné hodnoty natočení vyvažujících hmot:

$$\psi_0 = \psi_1 = \psi_2 = 12^\circ,$$

ve kterých byly trvale fixovány po celou dobu chodu mechanického systému podle **Obr. 5.26**, jehož zdvihová závislost je tvořena sudou goniometrickou funkcí, viz oddíl 4.2.1.

Je zde využito jevu rekuperace energie, tedy přeměny potenciální energie torzní tyče na kinetickou energii pohybujícího se tělesa, v tomto případě vyvažovaného (pracovního) členu soustavy. V obou úvratích je potenciální energie torzní tyče maximální. Při pohybu pracovního členu do úvratě je toto těleso brzděno silovými účinky torzní tyče a naopak při jeho pohybu z úvratě je urychlováno. Avšak nevýhodou takového řešení je zvýšené zatížení rámu stroje od reakční síly torzní tyče, která je úměrná zkrutnému momentu:

$$M_{kl} = k_{ti} (\vartheta(\varphi) - \psi_0).$$

Silové působení torzních tyčí se projeví na průbězích sledovaných mechanických veličin, jejichž charakteristické parametry jsou uvedeny v tabulkách **Tab. 5.10** až **Tab. 5.12**. Z těchto tabulek je patrný pozitivní vliv účinků torzních tyčí na chod systému v ustálené oblasti v intervalu žádaných pracovních otáček:

$$n_R \in \langle 550, 750 \rangle \text{ ot min}^{-1}.$$

Z důvodu porovnání účinnosti jednotlivých provedení byly pro stejný rozsah otáček ještě stanoveny stejné charakteristiky mechanických veličin vačkového mechanismu VM_1 jednak bez vyvažování setrvačných účinků, tak i s vyvažováním setrvačných účinků obou harmonických složek zdvihové závislosti.

Tab. 5.10: Hnací moment vačkového mechanismu VM_1-FIX, vyvažující hmoty fixovány

	Bez vyvažování	VM_1 Vyvažované první dvě h. s.		VM_1-FIX Vyvažující hmoty fixovány	
n_R [ot min ⁻¹]	M_{hEff} [Nm]	M_{hEff} [Nm]	$b_{M_{hEff}}$ [%]	M_{hEff} [Nm]	$b_{M_{hEff}}$ [%]
550	19.1	26.4	-38.2	3.7	80.6
600	22.4	1.2	94.6	6.1	72.8
650	25.8	9.2	64.3	9.4	63.6
700	29.4	16.3	44.6	13.1	55.4
750	33.2	22.8	31.3	17.0	48.8

Tab. 5.11: Nerovnoměrnost chodu vačkového mech. VM_1-FIX, vyvažující hmoty fixovány

	Bez vyvažování	VM_1 Vyvažované první dvě h. s.		VM_1-FIX Vyvažující hmoty fixovány	
n_R [ot min ⁻¹]	δ [–]	δ [–]	b_δ [%]	δ [–]	b_δ [%]
550	0.017	0.026	– 52.9	0.004	76.5
600	0.018	0.001	94.4	0.005	72.2
650	0.019	0.008	57.9	0.007	63.2
700	0.020	0.013	35.0	0.009	55.0
750	0.021	0.017	19.0	0.011	47.6

Tab. 5.12: Zatížení vačkového mechanismu VM_1-FIX, vyvažující hmoty fixovány

	Bez vyvažování	VM_1 Vyvažované první dvě h. s.		VM_1-FIX Vyvažující hmoty fixovány	
n_R [ot min ⁻¹]	$ R _{\max}$ [N]	$ R _{\max}$ [N]	$b_{ R }$ [%]	$ R _{\max}$ [N]	$b_{ R }$ [%]
550	8600	11200	– 30.2	8000	7.0
600	10200	600	94.1	8200	19.6
650	12000	4600	61.7	8400	30.0
700	14000	8400	40.0	8700	37.9
750	16100	11800	26.7	8900	44.7

Simulacemi se ukázalo, aby strojní zařízení s možností vyvažováním setrvačných účinků mohlo být provozováno na co nejširším rozsahu otáček, musí pracovat ve dvou režimech:

- V režimu s kmitajícími vyvažujícími hmotami,
- V režimu s fixovanými hmotami ve stanovených polohách.

Volba režimu provozu je tedy závislá na účinnosti využití vlastností vyvažujících subsystémů podle těchto základních kritérií:

- Velikost zatížení pohonu, které je vyjádřeno efektivní hodnotou hnacího momentu M_{hEff} pohonu,
- Nerovnoměrnost chodu δ strojového agregátu,
- Velikost silového zatížení vyvažovaného mechanického systému.

Režim s kmitajícími vyvažujícími hmotami v případě tohoto analyzovaného mechanického systému je výhodnější v rozmezí pracovních otáček:

$$n_R \in \langle 600, 650 \rangle \text{ ot min}^{-1}.$$

Mimo tuto oblast je účelné provozovat dané strojní zařízení v režimu s fixovanými vyvažujícími hmotami.

6 Závěr

Nosným tématem disertační práce je oblast mechaniky, která se věnuje vyvažování setrvačných účinků těles nebo mechanických systémů. Snížení setrvačných účinků je realizováno připojením vyvažujícího nebo vyvažujících subsystémů k mechanické soustavě. Vyvažující subsystémy jsou sestaveny ze setrvačné hmoty a pružného prvku. Pohyb vyvažovacího tělesa je protiběžný k pohybu tělesa vyvažovaného. Cílem tohoto způsobu vyvažování je snížení dynamických účinků hmotného tělesa s periodickým vratným pohybem tak, že příkon pohonu se zmenší a dále dojde ke snížení silových účinků, které působí v mechanismu. V obecném případě je možné připojit k vyvažované soustavě několik vyvažujících subsystémů, určených k omezení, případně úplnému odstranění, dynamických účinků stejného počtu dominantních harmonických složek zdvihové závislosti.

K tomu, aby mechanický systém s vyvažováním pomocí vyvažujících (seizmických) hmot efektivně pracoval, je třeba správně stanovit charakteristické parametry vyvažujících subsystémů, kterými jsou hmotový moment setrvačnosti J_i vyvažujícího tělesa a tuhost k_i pružného prvku. Tyto parametry jsou závislé na jmenovité úhlové frekvenci Ω strojního zařízení, na hmotovém momentu setrvačnosti I vyvažovaného tělesa, zdvihové závislosti $\vartheta(\varphi)$ vyvažovaného mechanického systému a na řádu harmonické složky rozvoje zdvihové závislosti, jejíž setrvačné účinky jsou vyvažovány. V rámci této práce byla též vypracována metodika výpočtu těchto parametrů.

Podmínkou správné funkce soustavy s vyvažováním je její uvedení do stavu ustáleného chodu. V praxi může být dosažení ustáleného stavu takové soustavy problematické, především v tom případě, kdy je vyžadováno, např. z technologických důvodů, razantní najetí na příslušné pracovní otáčky stroje. Tohoto stavu je dosaženo takovým způsobem, že dojde nejprve k rozběhu samotného vyvažovaného systému na žádané pracovní otáčky n_R a poté v definovaném okamžiku T k uvedení vyvažujících hmot z předepsaných počátečních poloh ψ_{i0} do pohybu. V praktické realizaci tato skutečnost znamená, že musí být v každém časovém okamžiku známa poloha pracovního členu ϑ , resp. hnacího členu φ , a vyvažujících hmot ψ_i . Z toho důvodu musí být alespoň jeden z těchto členů vybaven snímačem polohy, přičemž výstupní signál je podle zadaného algoritmu zpracováván řídicím systémem.

Z důvodu zvýšeného nárůstu okamžité hodnoty potřebného hnacího momentu v době trvání rozběhu je vhodné, aby pohon byl vybaven synchronním servomotorem, u kterého existuje možnost řízené momentové a proudové přetížitelnosti. Příčinou nárůstu rozběhového momentu je překonání vratných sil pružných prvků vyvažujících subsystémů, které posléze svými silovými účinky podporují uvedení vyvažujících hmot z předepsaných počátečních poloh ψ_{i0} do pohybu.

K ověření tohoto způsobu vyvažování a rozběhu vyvažovaného mechanického systému do oblastí ustáleného chodu bylo vytvořeno množství matematických modelů dvou typů mechanismů, které transformují rotační pohyb hnacího členu na periodický vratný rotační pohyb pracovního členu. Jedná se o vačkový a čtyřkloubový mechanismus. Součástí komplexního modelu procesu vyvažování byl i matematický popis synchronního servomotoru včetně jeho řídicí struktury. Pro potřeby simulace tohoto elektromotoru byl použit tzv. DQ-model, který vychází z matematického popisu synchronního stroje a využívá transformace statorových souřadnic na rotorové.

K tvorbě těchto modelů bylo využito moderních prostředků počítačové mechaniky. Tento přístup se vyznačuje tím, že kromě vlastního numerického řešení vytvořeného matematického modelu poskytuje též algoritmy pro jeho automatické sestavení na základě popisu geometrie a známých fyzikálních vlastností modelu reálné soustavy. V tomto případě probíhalo řešení v prostředí expertních programů I-DEAS 12 NX, MSC-ADAMS a MSC-EASY5.

Na základě teoretických výpočtů lze konstatovat, že vlivem připojení vyvažujícího subsystému, případně vyvažujících subsystémů, k vyvažovanému mechanismu dojde v ustáleném chodu stroje:

- ke snížení efektivní hodnoty potřebného hnacího momentu celého strojního zařízení,
- ke snížení příkonu stroje,
- ke snížení nerovnoměrnosti chodu mechanického systému,
- ke snížení silového zatížení vyvažovaného mechanismu,
- ke snížení velikosti reakčních sil,
- ke zvýšení dynamické únosnosti samotných členů vyvažované mechanické soustavy
- ke zvýšení dynamické únosnosti prvků, které vytvářejí kinematické propojení mezi jednotlivými členy mechanického systému, jako jsou např. ložiska, kuličkové šrouby, matice kuličkových šroubů, řemenové a řetězové převody, převody ozubenými koly, spojky, atd.

Protože vyvažující subsystém, případně vyvažující subsystémy, je navrhován na požadovanou jmenovitou úhlovou frekvenci Ω stroje, dochází k nejlepšímu stupni vyvážení při této úhlové rychlosti. Stupeň vyvážení především závisí na počtu připojených vyvažujících subsystémů, na typu vyvažované mechanické soustavy a na průběhu zdvihové závislosti pracovního členu stroje. Mimo tuto jmenovitou úhlovou frekvenci dochází ke snížení stupně vyvážení mechanické soustavy, případně dochází k úplné ztrátě příznivého účinku procesu vyvažování. Tento jev nastává při žádané pracovní úhlové rychlosti v oblasti pod jmenovitou úhlovou frekvencí Ω stroje. Z uvedených poznatků plyne, že zmiňovaný způsob vyvažování je vhodný pro taková strojní zařízení, jejichž pracovní proces probíhá v úzce vymezeném intervalu pracovních otáček. Takovými zařízeními mohou být například mechanická zařízení pro dlouhodobé experimentální zkoušky, nebo stroje určené pro velkosériovou produkci.

V rámci zkoumání možností použitelnosti mechanických soustav s vyvažováním setrvačných účinků na širším rozsahu pracovních otáček je navrženo takové provedení, u kterého jsou využívány dva režimy chodu:

- režim s kmitající vyvažující hmotou, resp. hmotami,
- režim s fixovanou hmotou, resp. hmotami, ve stanovené poloze.

Volba režimu provozu je závislá na účinnosti využití vlastností vyvažujícího subsystému, resp. subsystémů, s ohledem na velikost příkonu pohonu a velikosti sil působících v mechanickém systému. Avšak nevýhodou chodu strojového agregátu v režimu s fixovanou hmotou, resp. hmotami, je zvýšené zatížení rámu stroje od reakční síly torzní tyče, resp. tyčí.

Vzhledem k tomu, že se jedná pouze o teoretickou práci, je nutné poznatky a závěry stanovené na jejím základě ověřit na experimentálním zařízení. Podle uvedeného postupu a kritérií již proběhl návrh parametrů samotné vyvažované mechanické soustavy a příslušných vyvažujících subsystémů a byl vytipován vhodný elektromotor. Na základě již stanovených parametrů bylo uskutečněno i konstrukční zpracování tohoto stendu, jehož jednotlivé dílce jsou v současné době vyráběny. Souběžně s těmito aktivitami byla též navržena metodika experimentálních měření na tomto zkušebním zařízení. Dále bude podrobně vypracován algoritmus jeho řízení, podle kterého bude naprogramována řídicí jednotka.

Na způsob rozběhu a dosažení ustáleného chodu mechanického systému s vyvažováním setrvačných účinků na pracovní frekvenci byla podána patentová přihláška.

Seznam použité literatury

- [1] Brepta, R., Půst, L., Turek, F.: *Mechanické kmitání*, SOBOTÁLES, ISBN 80-901684-8-5, Praha 1994
- [2] Černoch, S.: *Strojně technická příručka, Svazek 1*, SNTL, Praha 1977
- [3] Diblík, M.: *Elektrické pohony pro dynamicky náročné aplikace*, Disertační práce, Technická univerzita v Liberci, Liberec 2006
- [4] Höschl, C.: *Pružnost a pevnost ve strojírenství*, SNTL/ALFA, Praha 1971
- [5] Juliš, K., Brepta, R., kol.: *Mechanika I. Díl – Statika a kinematika*, Technický průvodce 66, SNTL, Praha 1987
- [6] Juliš, K., Brepta, R., kol.: *Mechanika II. díl – Dynamika*, Technický průvodce 66, SNTL, Praha 1987
- [7] Koloc, Z., Ondrášek, J.: *Dynamical balancing of mechanical systems*, 14th International Conference Strutex, November 26.-28.2007, pp. 351 – 357, ISBN 978-80-7372-271-5, Technical University of Liberec 2007
- [8] Koloc, Z., Plaček B., Mlynář J., Karel P.: *Způsob vyvažování dynamických účinků hmotného tělesa s periodickým vratným pohybem a zařízením k provádění tohoto způsobu*, přihláška vynálezu, číslo dokumentu: 2440-96, registrační číslo: PS3132CZ
- [9] Koloc, Z., Václavík, M.: *Váčkové mechanismy*, SNTL/ALFA, Praha 1988
- [10] Michalec, J., kolektiv: *Pružnost a pevnost II*, Vydavatelství ČVUT, ISBN 80-01-01087-2, Praha 1994
- [11] Miláček, S.: *Vybrané kapitoly z dynamiky*, Vydavatelství ČVUT, ISBN 80-01-02770-8, Praha 2003
- [12] MSC-ADAMS. User's Reference Manual. Mechanical Dynamics
- [13] NX I-DEAS. User's Reference Manual.
- [14] Ondrášek, J., Medůna, O. & Petriková, I.: *Modeling of Mechatronic Systems with Focus on Textile Machines*, ATP&P Journal, 1, 2007, pp. 289 – 295, ISSN 1336-5010
- [15] Ondrášek, J., Medůna, O., Petriková, I., Bušek, M.: *Metodika řízení mechanických systémů se zaměřením na textilní stoje*, Průběžná zpráva o realizaci projektu za rok 2008, Výzkumné centrum „Textil II“, ISRN TUL – VCT2/A(TS) - - 08/11/CZ - - CZ + řízení systému, Technická univerzita v Liberci, 2008
- [16] Ondrášek, J., Medůna, O., Petriková, I., Hruš, T.: *Metodika řízení mechanických systémů se zaměřením na textilní stoje*, Průběžná zpráva o realizaci projektu za rok 2007, Výzkumné centrum „Textil II“, ISRN TUL – VCT2/A(TS) - - 08/11/CZ - - CZ + řízení systému, Technická univerzita v Liberci, 2007
- [17] Ondrášek, J., Petriková, I.: *Model of Weaving Machine Cotrolled Mechanical System*, X. International Conference ToMM, September 2.-4.2008, pp. 439 – 446, ISBN 978-80-7372-370-5, Technical University of Liberec 2008
- [18] Ondrášek, J., Plaček B.: *Vyvažování přírazového mechanismu tkacího stroje pomocí dynamického absorberu*, IX. International Conference ToMM 2004, str. 579 – 584, ISBN 80-7083-847-7, Technical University of Liberec 2004
- [19] Pešík, L.: *Části strojů 1. díl*, Technická univerzita v Liberci, ISBN 978-80-7372-319-4, Liberec 2008
- [20] Pluhař, J., kolektiv: *Nauka o materiálech*, SNTL/ALFA, Praha 1989
- [21] Rektorys, K.: *Přehled užití matematiky*, SNTL, Praha 1981
- [22] Rydlo, P.: *Řízení elektrických střídavých pohonných*, skriptum TU v Liberci, ISBN 80-7372-117-1, Liberec 2006
- [23] Skalický, J.: *Elektrické servopohony*, VUT v Brně, ISBN 80-214-1484-7, Brno 1999
- [24] Slavík, J., Stejskal, V., Zeman, V.: *Základy dynamiky strojů*, Vydavatelství ČVUT, ISBN 80-01-01622-6, Praha 1997

- [25] Souček, P.: *Servomechanismy ve výrobních strojích*, Vydavatelství ČVUT, ISBN 80-01-02902-6, Praha 2004
- [26] Souček, P., Bubák, A.: *Vybrané statě z kmitání v pohonech výrobních strojů*, Česká technika – nakladatelství ČVUT, ISBN 978-80-01-04048-5, Praha 2008
- [27] Stejskal, V., Brousil, J., Stejskal, S.: *Mechanika III*, Vydavatelství ČVUT, ISBN 80-01-00918-1, Praha 1993
- [28] Valášek, M., kolektiv: *Mechatronika*, Vydavatelství ČVUT, ISBN 80-01-01276-X, Praha 1995

Přílohy

A Metoda lineární Parkovy transformace

Metoda lineární Parkovy transformace umožňuje přechod od trojfázové soustavy, která se používá k napájení elektrických strojů na ekvivalentní dvojfázovou soustavu. K tomuto účelu se definují tzv. prostorové vektory – fázory. Díky této transformaci se snižuje počet diferenciálních rovnic modelu. Běžně se v literatuře hovoří o přechodu na dvousložkový model nebo o transformaci 3/2 (resp. 2/3 jedná-li se o zpětnou transformaci). Podrobné informace jsou dostupné v [22].

U střídavých trojfázových motorů je výsledné chování stroje dáno současným působením všech tří fází statoru, konkrétně se jedná o statorové proudy i_U , i_V a i_W , které těmito fázemi protékají. Z definice trojfázové napájecí soustavy s úhlovou frekvencí ω_0 vyplývá, že okamžité hodnoty těchto proudů jsou určeny rovnicemi:

$$i_U = I_m \cos \omega_0 t, \quad i_V = I_m \cos \left(\omega_0 t + \frac{2}{3} \pi \right), \quad i_W = I_m \cos \left(\omega_0 t + \frac{4}{3} \pi \right). \quad (\text{A.1})$$

Ze symetrie statorových vinutí platí v každém okamžiku následující podmínka pro proudy:

$$i_U + i_V + i_W = 0. \quad (\text{A.2})$$

A.1. Prostorové fázory

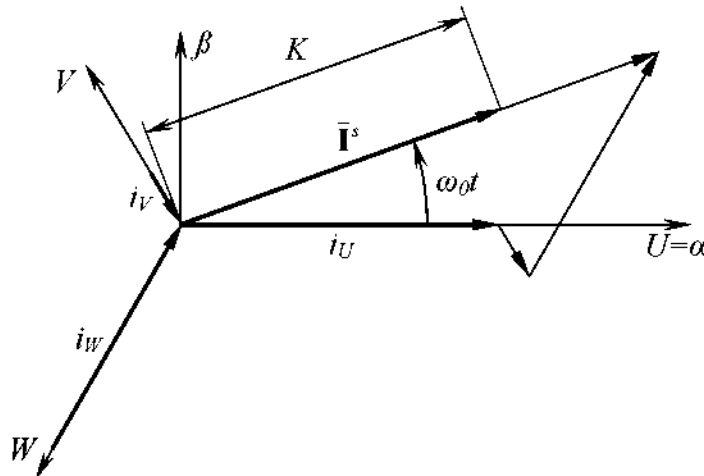
Matematický popis synchronního motoru se zjednoduší zavedením komplexních prostorových fázorů. Působení okamžitých hodnot proudů i_U , i_V , i_W lze nahradit jediným proudem $\bar{\mathbf{I}}^s$ – komplexní prostorový fázor statorového proudu, který je zobrazen na *Obr. A.1*, a je dán následujícím vztahem:

$$\bar{\mathbf{I}}^s = K(i_U + i_V \bar{\mathbf{a}} + i_W \bar{\mathbf{a}}^2), \quad (\text{A.3})$$

přičemž

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{a}} &= e^{j\frac{2}{3}\pi} = \cos \frac{2}{3}\pi + j \sin \frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \bar{\mathbf{a}}^2 &= e^{j\frac{4}{3}\pi} = \cos \frac{4}{3}\pi + j \sin \frac{4}{3}\pi = -\frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Fázor $\bar{\mathbf{a}}$ je jednotkový fázor, který určuje orientaci fázových vinutí v prostoru souřadnic pevně spojených se státorem. Horní index s značí, že prostorový fázor, v tomto případě proudu, je vyjádřen v souřadnicích pevně spojených se státorem.



Obr. A.1: Prostorový fázor statorového proudu

Okamžité hodnoty proudů, vyjádřeny vztahy (A.1), při využití rovnic (A.4) a rovnosti:

$$\cos \alpha = \frac{1}{2} (e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}) \quad (\text{A.5})$$

lze vyjádřit v exponenciálním tvaru následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} i_U &= I_m \cos \omega_0 t = \frac{1}{2} I_m (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}), \\ i_V &= I_m \cos(\omega_0 t + \frac{2}{3}\pi) = \frac{1}{2} I_m (\bar{a} e^{j\omega_0 t} + \bar{a}^2 e^{-j\omega_0 t}), \\ i_W &= I_m \cos(\omega_0 t + \frac{4}{3}\pi) = \frac{1}{2} I_m (\bar{a}^2 e^{j\omega_0 t} + \bar{a} e^{-j\omega_0 t}). \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Dosazením těchto vztahů do rovnice (A.3) a použitím rovností:

$$\bar{a}\bar{a} = \bar{a}^2, \quad \bar{a}\bar{a}^2 = 1, \quad \bar{a}^2\bar{a}^2 = \bar{a}, \quad 1 + \bar{a} + \bar{a}^2 = 0 \quad (\text{A.7})$$

lze získat výraz pro prostorový fázor $\bar{\mathbf{I}}^s$ v exponenciálním tvaru:

$$\bar{\mathbf{I}}^s = K \frac{3}{2} I_m e^{-j\omega_0 t}. \quad (\text{A.8})$$

Tento prostorový fázor rotuje úhlovou rychlostí ω s amplitudou $K \frac{3}{2} I_m$. Koeficient K může nabývat libovolných hodnot. Při volbě $K=1$ má transformovaný prostorový fázor velikost danou fyzikální skutečností. Při volbě $K = \frac{2}{3}$ platí rovnost $i_\alpha = i_U$ a při volbě $K = \sqrt{\frac{2}{3}}$ platí invariantnost výkonů.

Obdobným způsobem je možné definovat prostorové fázory napětí $\bar{\mathbf{u}}_s$ a magnetického toku $\bar{\Psi}_s$ ve tvaru:

$$\bar{\mathbf{u}}^s = K(u_U + u_V \bar{a} + u_W \bar{a}^2) \quad (\text{A.9})$$

a

$$\bar{\Psi}^s = K(\psi_U + \psi_V \bar{a} + \psi_W \bar{a}^2). \quad (\text{A.10})$$

A.2. Parkova transformace

Ve statorových souřadnicích (α, β) , kde reálná osa je shodná s osou vinutí fáze U , lze vyjádřit z rovnice (A.3) při dosazení výrazu (A.4) za jednotkový fázor $\bar{a}$ prostorový fázor proudu $\bar{\mathbf{I}}^s$ ve složkovém tvaru:

$$\bar{\mathbf{I}}^s = I_\alpha^s + j I_\beta^s = K \left[\left(i_U - \frac{1}{2} i_V - \frac{1}{2} i_W \right) + j \frac{\sqrt{3}}{2} (i_V - i_W) \right]. \quad (\text{A.11})$$

Porovnáním levé a pravé strany rovnice (A.11) je možné psát:

$$\begin{aligned} I_\alpha^s &= \text{Re}\{\bar{\mathbf{I}}^s\} = K \frac{1}{2} [2i_U - (i_V + i_W)], \\ I_\beta^s &= \text{Im}\{\bar{\mathbf{I}}^s\} = K \frac{\sqrt{3}}{2} (i_V - i_W). \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Z podmínky (A.2) je:

$$i_V + i_W = -i_U \quad (\text{A.13})$$

a dosazením $K = \frac{2}{3}$ lze rovnice (A.12) vyjádřit následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} I_\alpha^s &= i_U, \\ I_\beta^s &= \frac{\sqrt{3}}{3} (i_V - i_W). \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Jestliže je znám prostorový fázor proudu $\bar{\mathbf{I}}^s$ ve složkovém tvaru, je možné vypočítat při $K = \frac{2}{3}$ a využití podmínky (A.2) okamžité hodnoty proudů v jednotlivých vinutích statoru takto:

$$\begin{aligned} i_U &= \operatorname{Re}\{\bar{\mathbf{I}}^s\} = I_\alpha^s, \\ i_V &= \operatorname{Re}\{\bar{\mathbf{I}}^s \bar{\mathbf{a}}^2\} = -\frac{1}{2} I_\alpha^s + \frac{\sqrt{3}}{2} I_\beta^s, \\ i_W &= \operatorname{Re}\{\bar{\mathbf{I}}^s \bar{\mathbf{a}}\} = -\frac{1}{2} I_\alpha^s - \frac{\sqrt{3}}{2} I_\beta^s. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

A.3. Transformace do rotujících souřadnic

Pro transformaci fázoru do nového souřadného systému platí takové pravidlo, že fázor definovaný v jednom souřadném systému se převádí do nového, který rotuje vyšší úhlovou rychlostí, pouhým přenásobením činitelem $e^{-j\omega_0 t}$. Jestliže je známa hodnota fázoru proudu $\bar{\mathbf{I}}^s$ ve stojícím souřadném systému (α, β) , lze ho transformovat do obecného systému (d, q) rotujícího úhlovou rychlostí ω pomocí vztahu:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{I}}^r &= \bar{\mathbf{I}}^s e^{-j\omega_0 t}, \\ I_d^r + jI_q^r &= (I_\alpha^s + jI_\beta^s) e^{-j\omega_0 t}. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Zpět z rotujícího systému (d, q) do stojícího systému (α, β) se použije inverzního vztahu:

$$\bar{\mathbf{I}}^s = \bar{\mathbf{I}}^r e^{j\omega_0 t}. \quad (\text{A.17})$$

Obě transformační rovnice (A.16) a (A.17) je možné vyjádřit ve shodě s **Obr. A.2** ve složkovém tvaru:

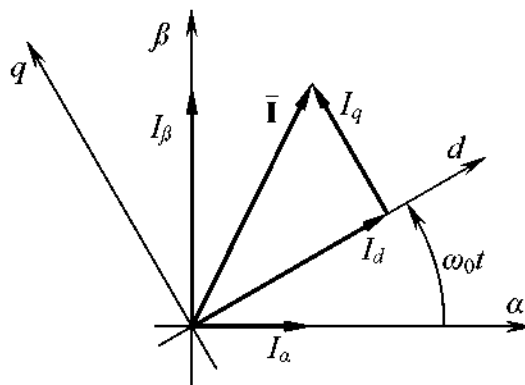
$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{I}}^r &= I_d^r + jI_q^r = (I_\alpha^s + jI_\beta^s)(\cos \omega_0 t - j \sin \omega_0 t), \\ \bar{\mathbf{I}}^s &= I_\alpha^s + jI_\beta^s = (I_d^r + jI_q^r)(\cos \omega_0 t + j \sin \omega_0 t). \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Pro složky prostorového fázoru proudu $\bar{\mathbf{I}}^s$ ze stojícího do rotujícího souřadného systému platí rovnice:

$$I_d^r = I_\alpha^s \cos \omega_0 t + I_\beta^s \sin \omega_0 t, \quad I_q^r = -I_\alpha^s \sin \omega_0 t + I_\beta^s \cos \omega_0 t. \quad (\text{A.19})$$

Pro zpětnou transformaci lze odvodit následující předpis:

$$I_\alpha^s = I_d^r \cos \omega_0 t - I_q^r \sin \omega_0 t, \quad I_\beta^s = I_d^r \sin \omega_0 t + I_q^r \cos \omega_0 t. \quad (\text{A.20})$$



Obr. A.2: Transformace souřadných systémů

B Fourierova řada

Fourierova řada slouží k vyjádření rozvoje funkce prostřednictvím goniometrických funkcí na daném konečném intervalu. Pomocí této řady lze rozložit i značně komplikované funkce, které by jinak byl problém zobrazit. Více poznatků lze nalézt v [21] a [26].

Každé reálné funkci $f(t)$ takové, že na daném intervalu $0 < t < T$ existuje integrál:

$$\int_0^T |f(t)| dt$$

lze přiřadit nekonečnou trigonometrickou řadu:

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t) = c_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \cos(k\omega t + \psi_k), \quad (\text{B.1})$$

kde

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Koeficienty a_0, a_k, b_k jsou definovány tzv. Eulerovými – Fourierovými vzorci:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos k\omega t dt, \\ b_k &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin k\omega t dt, \quad k = 1, 2, \dots, \infty. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Pro $k=0$ platí:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt.$$

Dále platí:

$$|c_k| = \frac{1}{2} \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad \psi_k = -\arctan\left(\frac{b_k}{a_k}\right). \quad (\text{B.3})$$

V praxi se funkce $f(t)$ aproximuje konečným rozvojem, kde dochází ke sčítání jen přes několik prvních členů, přičemž se obecně s narůstajícím počtem členů zvyšuje přesnost této aproximace.

Jestliže existuje integrál:

$$\int_0^T [f(t)]^2 dt,$$

potom Fourierova řada je trigonometrickou řadou, jejíž koeficienty a_k, b_k minimalizují každou kvadratickou odchylku vyjádřenou vztahem:

$$\frac{1}{T} \int_0^T [f(t) - s_n(t)]^2 dt,$$

kde $s_n(t)$ jsou částečné součty řady (B.1) použité k aproximaci funkce $f(t)$ ve tvaru:

$$\begin{aligned} s_0(t) &= \frac{1}{2}a_0 \\ &\vdots \\ s_n(t) &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t). \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Jestliže trigonometrická řada (B.1) konverguje stejnoměrně na daném intervalu $0 < t < T$, pak koeficienty a_k, b_k dané vztahy (B.2) jsou Fourierovy koeficienty funkce $f(t)$.

Fourierovu řadu funkce $f(t)$ na intervalu $0 < t < T$ lze zapsat v komplexním tvaru:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (c_k e^{ik\omega t}), \quad (\text{B.5})$$

přičemž koeficienty c_k lze vyjádřit prostřednictvím koeficientů a_k, b_k jako:

$$c_0 = \frac{1}{2} a_0, \quad c_k = \frac{1}{2} (a_k - ib_k), \quad c_{-k} = \frac{1}{2} (a_k + ib_k) = \overline{c_k}. \quad (\text{B.6})$$

Jestliže budou dosazeny za a_k, b_k vztahy (B.2) lze koeficienty c_k vyjádřit ve tvaru:

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-ik\omega t} dt. \quad (\text{B.7})$$

Využitím ortogonálnosti členů Fourierovy řady je možné odvodit tzv. Parsevalův teorém:

$$\frac{1}{T} \int_0^T [f(t)]^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \overline{f(t)} dt = \frac{1}{4} a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2, \quad (\text{B.8})$$

ve kterém $\overline{f(t)}$ představuje komplexně sdruženou funkci k $f(t)$. Vztah platí za předpokladu, že existuje integrál na pravé straně rovnice (B.8).

Pro každé dvě funkce $f(t)$ a $g(t)$ na intervalu $0 < t < T$ platí nerovnost:

$$\left| \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \overline{g(t)} dt \right| \leq \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt} \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T |g(t)|^2 dt}, \quad (\text{B.9})$$

která je v matematice označována jako Schwarzova-Cauchyova-Buňakovského nerovnost.

C Laplaceova transformace

Laplaceova transformace patří do skupiny integrálních transformací, viz např. v [1] a [21]. Používá se především pro řešení lineárních obyčejných a parciálních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty. Tato transformace má řadu předností, jako jsou např.:

- Převod diferenciálních rovnic na algebraické, jejichž řešení je již známé a jednoduché.
- Nalezení homogenního a partikulárního řešení v jednom kroku.
- Zavedení obrazového přenosu, frekvenčního přenosu, blokovou algebru atd.

Obraz po částech spojitě funkce $f(t)$ nezávisle proměnné t po Laplaceově transformaci je definován:

$$L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = F(s), \quad (C.1)$$

kde s je komplexní proměnná, $f(t)=0$ pro $t < 0$ a funkce $f(t)$ je exponenciálního řádu. Funkce $f(t)$ reálné proměnné t se nazývá exponenciálního řádu, jestliže existuje takové reálné číslo σ (index růstu), že platí:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |f(t)e^{-\sigma t}| = 0.$$

Originál funkce $f(t)$ k obrazu $F(s)$ se nalezne podle Riemannova – Mellinova vztahu:

$$L^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(s)e^{st} dt = f(t), \quad (C.2)$$

ve kterém i značí imaginární jednotku.

C.1. Pravidla Laplaceovy transformace

1. Linearita transformace:

$$L\left\{\sum_{i=1}^n c_i f_i(t)\right\} = \sum_{i=1}^n c_i F_i(s), \quad (C.3)$$

kde c_i jsou nezávislé na t , např. obecně komplexní konstanty.

2. Derivace spojitě funkce v originále:

Nechť funkce $f(t)$ je spojitá na otevřeném intervalu $(0, +\infty)$, za předpokladu, že všechny derivace $f'(t), f''(t), \dots, f^{(n)}(t)$ mají obrazy, je definován obraz n -té derivace $f(t)$ výrazem:

$$L\left\{\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(+0) - s^{n-2} f'(+0) - \dots - f^{(n-1)}(+0). \quad (C.4)$$

3. Obraz integrace předmětu:

Nechť funkce $f(t)$ je předmětem standardního typu, pak je jím i její integrál a platí:

$$L\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{s} F(s). \quad (C.5)$$

4. Obraz konvoluce:

Nechť funkce $f(t), g(t)$ jsou předměty standardního typu, mající obrazy $F(s), G(s)$, pak platí:

$$L\left\{\int_0^t f(\tau)g(t-\tau) d\tau\right\} = L\left\{\int_0^t f(t-\tau)g(\tau) d\tau\right\} = F(s)G(s). \quad (C.6)$$

5. Posunutí v originále:

$$L\{f(t-T)\} = F(s)e^{-sT}. \quad (C.7)$$

6. Posunutí v obraze:

$$L\{f(t)e^{\alpha t}\} = F(s-\alpha). \quad (C.8)$$

7. Derivace obrazu podle komplexní nezávisle proměnné s :

$$L\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s). \quad (C.9)$$

8. Změna měřítka nezávisle proměnné t :

$$L\{f(\alpha t)\} = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{s}{\alpha}\right). \quad (C.10)$$

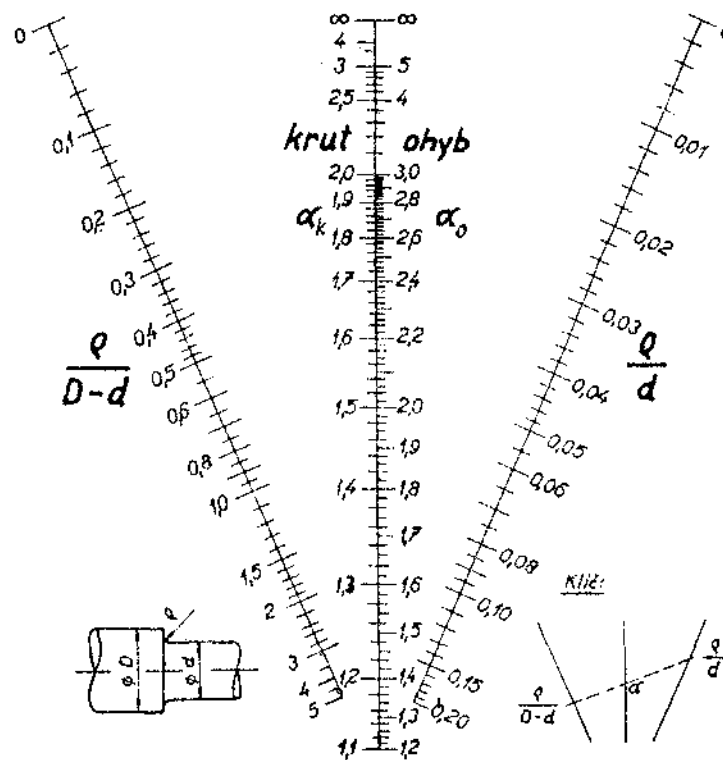
9. Limity – Tauberovy teorémy:

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} sF(s) = \lim_{t \rightarrow +0} f(t) = f(+0), \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s). \quad (C.11)$$

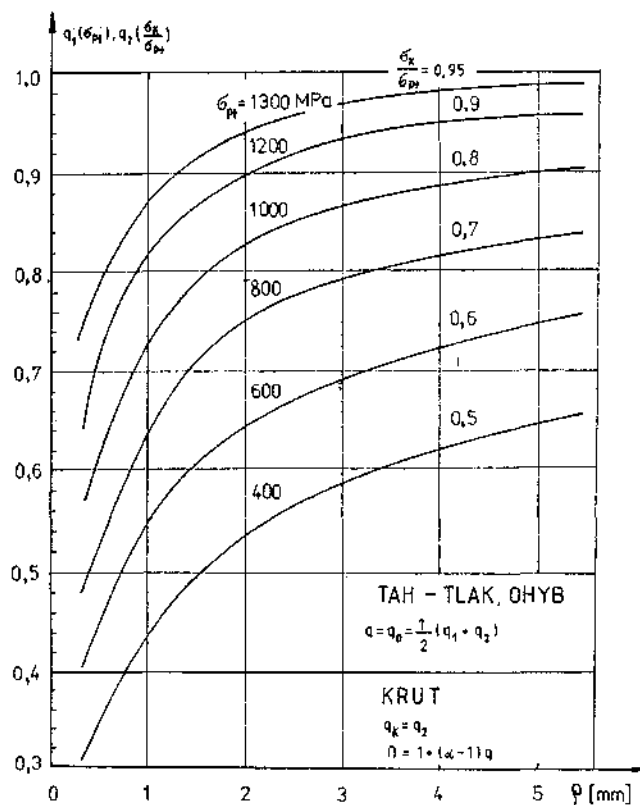
Tab. C.1: Slovník obrazů některých běžně se vyskytujících funkcí

Obraz: $L\{f(t)\} = F(s)$	Originál: $f(t)$
1	Diracova funkce $\delta(t)$
$\frac{1}{s}$	Heavisideova funkce: $H(t) = 0$ pro $t < 0$ $H(t) = 0.5$ pro $t = 0$ $H(t) = 1$ pro $t > 0$
$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\sin \omega t$
$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\cos \omega t$
$\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$	$\sinh \omega t$
$\frac{s}{s^2 - \omega^2}$	$\cosh \omega t$
$\frac{1}{s^2 + 2as + \omega^2 + a^2}$	$\frac{1}{\omega} e^{-at} \sin \omega t$
$\frac{s}{s^2 + 2as + \omega^2 + a^2}$	$e^{-at} \left(\cos \omega t - \frac{a}{\omega} \sin \omega t \right)$
$\frac{n!}{s^{(n+1)}}$	t^n
$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{s^{(k+1)}}$	Taylorova řada: $a_0 + a_1 t + \frac{a_2}{2!} t^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} t^k$
$F_T(s) \frac{1}{1-e^{-sT}}$	Periodicky se opakující funkce s periodou T : $\sum_{k=0}^{\infty} H(t-kT) f_T(t-kT),$ $f_T(t) = [H(t) - H(t-kT)] f(t)$

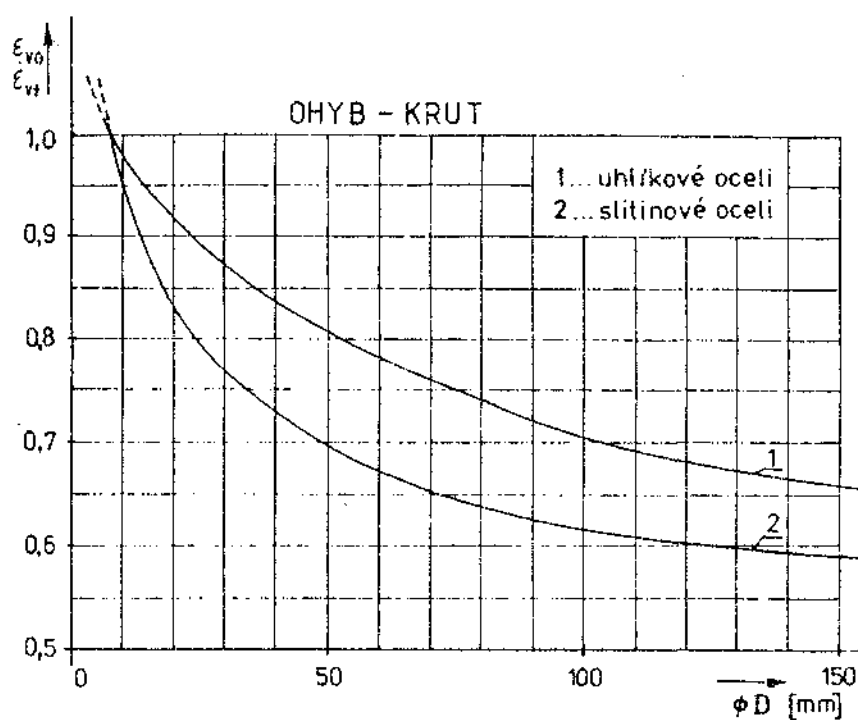
D Diagramy a nomogramy



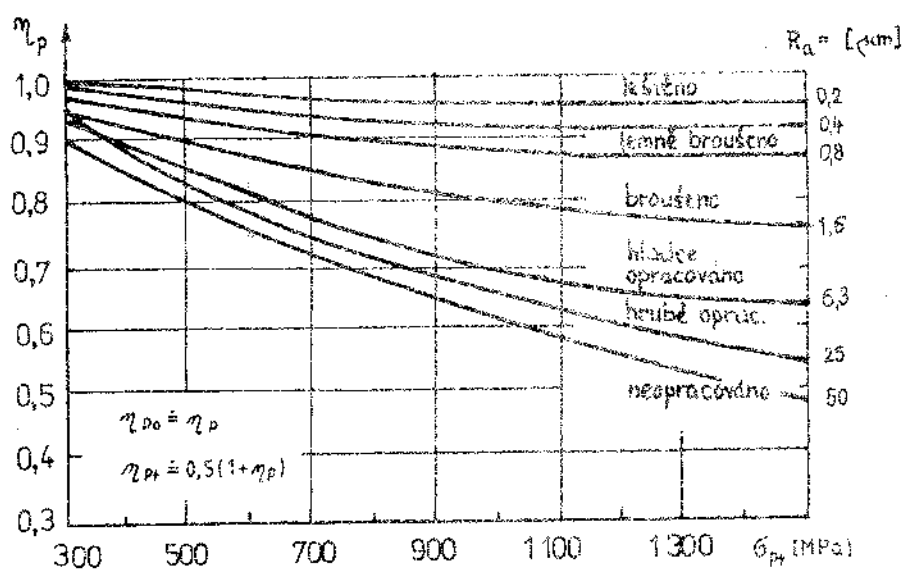
Obr. D.1: Nomogram k určení součinitele tvaru α



Obr. D.2: Diagram k určení součinitele vrubové citlivosti q



Obr. D.3: Diagram k určení součinitele vlivu velikosti ε_v



Obr. D.4: Diagram k určení součinitele jakosti povrchu η_p

E Katalogové listy motorů Siemens

E.1. Siemens 1FT6108-8AF7

Matematický model tohoto typu servomotoru byl použit pro pohon vačkového mechanismu VM_1 a čtyřkloubového mechanismu.

Table 3-27 1FT6108 natural cooling

1FT6108				
Technical data	Code	Units	-8AF7□	
Engineering data				
Rated speed	n_N	rpm	3000	
Number of poles	2p		8	
Rated torque (100 K)	$M_{N(100\text{ K})}$	Nm	37	
Rated current (100K)	I_N	A	25	
Stall torque (60K)	$M_{0(60\text{ K})}$	Nm	58	
Stall torque (100K)	$M_{0(100\text{ K})}$	Nm	70	
Stall current (60K)	$I_{0(60\text{ K})}$	A	33	
Stall current (100K)	$I_{0(100\text{ K})}$	A	41	
Moment of inertia (with brake)	J_{mot}	10^{-4} kgm^2	291	
Moment of inertia (without brake)	J_{mot}	10^{-4} kgm^2	260	
Optimum operating point				
Optimum speed	n_{opt}	rpm	2500	
Optimum power	P_{opt}	kW	12.0	
Limiting data				
Max. permissible speed (mech.)	n_{max}	rpm	5600	
Maximum torque	M_{max}	Nm	220	
Maximum current	I_{max}	A	198	
Physical constants				
Torque constant	k_T	Nm/A	1.70	
Voltage constant	k_E	V/1000 rpm	108	
Winding resistance at 20 °C	R_{ph}	Ohm	0.065	
Rotating field inductance	L_D	mH	1.5	
Electrical time constant	T_{el}	ms	23	
Shaft torsional stiffness	c_t	Nm/rad	92000	
Mechanical time constant	T_{mech}	ms	1.8	
Thermal time constant	T_{th}	min	55	
Weight with brake	m	kg	60	
Weight without brake	m	kg	55.5	

Obr. E.1: Technické parametry elektromotoru Siemens 1FT6108-8AF7

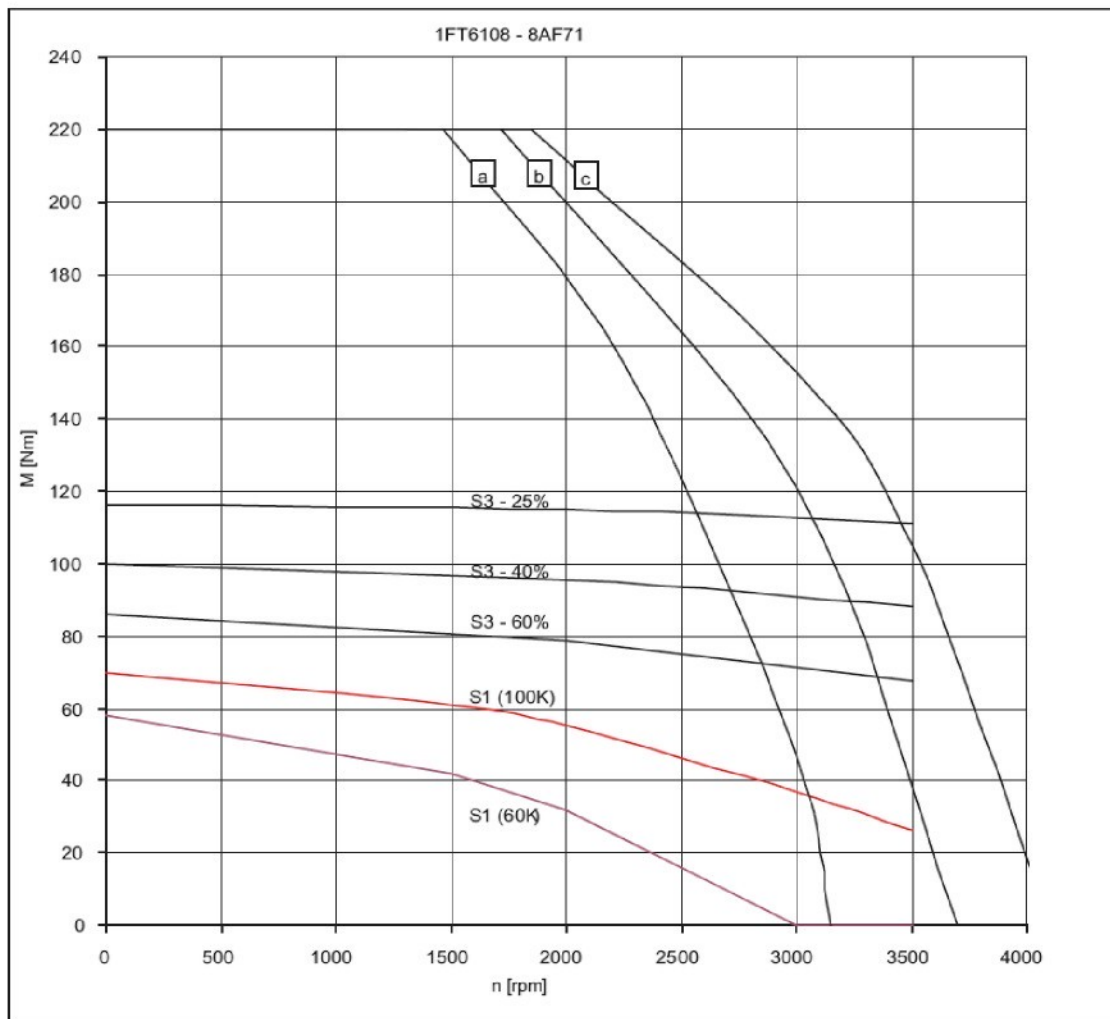


Fig. 3-45 Speed-torque diagram 1FT6108-8AF7

- [a] MASTERDRIVES MC, $V_{DC \text{ link}} = 540 \text{ V (DC)}$, $V_{Mot} = 340 \text{ V}_{rms}$
- [b] SIMODRIVE 611 (UE), $V_{DC \text{ link}} = 540 \text{ V (DC)}$ and MASTERDRIVES MC (AFE), $V_{DC \text{ link}} = 600 \text{ V (DC)}$, $V_{Mot} = 380 \text{ V}_{rms}$
- [c] SIMODRIVE 611 (ER), $V_{DC \text{ link}} = 600 \text{ V (DC)}$, $V_{Mot} = 425 \text{ V}_{rms}$

Obr. E.2: Momentová charakteristika elektromotoru Siemens 1FT6108-8AF7

E.2. Siemens 1FT6108-8SF7

Matematický model tohoto typu servomotoru byl použit pro pohon vačkového mechanismu VM_2.

Table 3-39 1FT6108 force ventilated

1FT6108				
Technical data	Code	Units	-8SF7□	
Engineering data				
Rated speed	n_N	rpm	3000	
Number of poles	2p		8	
Rated torque (100 K)	$M_{N(100 K)}$	Nm	70	
Rated current (100K)	I_N	A	53	
Stall torque (60K)	$M_{0(60 K)}$	Nm	75	
Stall torque (100K)	$M_{0(100 K)}$	Nm	90	
Stall current (60K)	$I_{0(60 K)}$	A	51	
Stall current (100K)	$I_{0(100 K)}$	A	62	
Moment of inertia (with brake)	J_{mot}	10^{-4} kgm ²	291	
Moment of inertia (without brake)	J_{mot}	10^{-4} kgm ²	260	
Optimum operating point				
Optimum speed	n_{opt}	rpm	3000	
Optimum power	P_{opt}	kW	22.0	
Limiting data				
Max. permissible speed (mech.)	n_{max}	rpm	5600	
Maximum torque	M_{max}	Nm	220	
Maximum current	I_{max}	A	231	
Physical constants				
Torque constant	k_T	Nm/A	1.45	
Voltage constant	k_E	V/1000 rpm	92	
Winding resistance at 20 °C	R_{ph}	Ohm	0.048	
Rotating field inductance	L_D	mH	1.1	
Electrical time constant	T_{el}	ms	23.0	
Shaft torsional stiffness	c_t	Nm/rad	92000	
Mechanical time constant	T_{mech}	ms	1.8	
Thermal time constant	T_{th}	min	20	
Weight with brake	m	kg	66	
Weight without brake	m	kg	61.5	

Obr. E.3: Technické parametry elektromotoru Siemens 1FT6108-8SF7

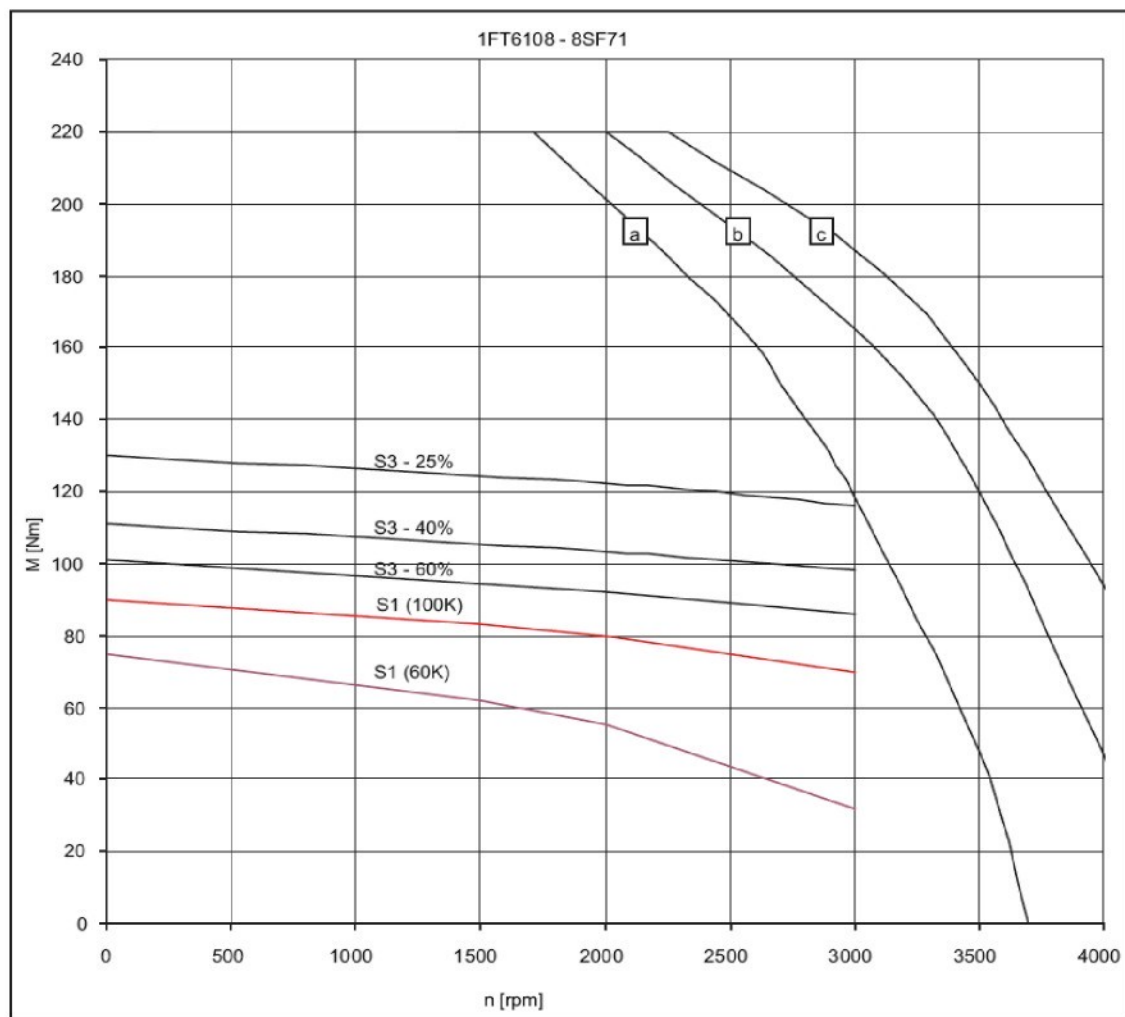


Fig. 3-65 Speed-torque diagram 1FT6108-8SF7□

- [a] MASTERDRIVES MC, $V_{DC \text{ link}} = 540 \text{ V (DC)}$, $V_{mot} = 340 V_{rms}$
- [b] SIMODRIVE 611 (UE), $V_{DC \text{ link}} = 540 \text{ V (DC)}$ and MASTERDRIVES MC (AFE), $V_{DC \text{ link}} = 600 \text{ V (DC)}$, $V_{mot} = 380 V_{rms}$
- [c] SIMODRIVE 611(ER), $V_{DC \text{ link}} = 600 \text{ V (DC)}$, $V_{mot} = 425 V_{rms}$

Obr. E.4: Momentová charakteristika elektromotoru Siemens 1FT6108-8SF7

F Parametry simulačních modelů

- $\Omega = 20\pi \text{ rads}^{-1} \approx 600 \text{ ot min}^{-1}$ jmenovitá úhlová frekvence,
- $i = 4$ převodový poměr mezi motorem a hnacím členem mechanických systémů,
- $g = 9.80665 \text{ ms}^{-2}$ gravitační zrychlení,
- Matematické vyjádření zdvihové závislosti:

$$\vartheta(\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{10} A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi. \quad (\text{F.1})$$

F.1. Vačkový mechanismus VM_1

Viz kinematické schéma na *Obr. 4.1*.

- $a = 170 \text{ mm}$ vzdálenost rotačních os vačkové hřídele a vahadla,
- $b = 120 \text{ mm}$ délka vahadel,
- $\alpha = 90^\circ$ úhel, který svírají vahadla,
- $I_{red} = 0.74 \text{ kgm}^2$ moment setrvačnosti vačkové hřídele – čistě dynamicky vyvážená,
- $I = 0.61 \text{ kgm}^2$ moment setrvačnosti vyvažovaného (pracovního) členu k ose rotace,
- $m = 145 \text{ kg}$ hmotnost vyvažovaného (pracovního) členu,
- $r_S = 0.0047 \text{ m}$ vzdálenost středu hmotnosti vyvažovaného (pracovního) členu od osy rotace,
- Koeficienty zdvihové závislosti, viz vztah (F.1):
 - o $A_0 = 0.2838119 \text{ rad}$,
 - o $A_1 = -0.214737 \text{ rad}$,
 - o $A_2 = -0.069075 \text{ rad}$,
- Parametry vyvažujících subsystémů, viz *Tab. F.1*:

Tab. F.1: Parametry vyvažujících subsystémů vačkového mechanismu VM_1

l -tá harmonická složka	$k_{il} [\text{Nm}]$	$J_l [\text{kgm}^2]$	$\psi_{l0} [\text{deg}]$
1	1438	0.9047	25
2	1272	0.0928	25
1 & 2	1	1.2450	25
	2	0.1534	10

- Parametry modelu pohonu:
 - o $I_{rotor} = 0.0291 \text{ kg m}^2$ moment setrvačnosti rotoru servomotoru,
 - o $p_p = 4$ počet pólových dvojic,
 - o $R_s = 0.065 \Omega$ elektrický odpor jedné fáze,
 - o $L_D = 1.5 \text{ mH}$ D-složka indukčnosti,
 - o $L_Q = 1.5 \text{ mH}$ Q-složka indukčnosti,
 - o $\psi_m = 0.5954 \text{ Wb}$ spřažený magnetický tok permanentních magnetů,
 - o $K_I = 5 \text{ VA}^{-1}$ proporcionální složky regulátorů proudu,
 - o $T_{il} = 0.5 \text{ ms}$ časové integrační konstanty regulátorů proudu,
 - o $K_\omega = 5 \text{ A s rad}^{-1}$ proporcionální složka regulátoru rychlosti,

- $T_{\omega} = 80ms$ časová integrační konstanta regulátoru rychlosti,
- $K_{\varphi} = 5 s^{-1}$ proporcionální složka regulátoru polohy,
- $r_{\omega} = 1$ zesílení rychlostního feedforwardu,

F.2. Vačkový mechanismus VM_2

Viz kinematické schéma na *Obr. 4.1*.

- $a = 170 mm$ vzdálenost rotačních os vačkové hřídele a pracovního členu mechanismu,
- $b = 120 mm$ délka vahadel,
- $\alpha = 90^\circ$ úhel, který svírají vahadla,
- $I_{red} = 0.74 kgm^2$ moment setrvačnosti vačkové hřídele – čistě dynamicky vyvážená,
- $I = 0.25 kgm^2$ moment setrvačnosti vyvažovaného (pracovního) členu k ose rotace – čistě dynamicky vyvážený,
- Koeficienty zdvihové závislosti podle vztahu (F.1), viz *Tab. F.2*:

Tab. F.2: Koeficienty zdvihové závislosti vačkového mechanismu VM_2

n	$A_n [rad]$	$B_n [rad]$
0	0.22000782600	–
1	– 0.06377872470	0.01759931902
2	– 0.12774046858	0.08795262682
3	– 0.04558871879	0.01309648055
4	– 0.00625070118	– 0.01285389355
5	0.01573516699	– 0.02502725120
6	0.00358595209	– 0.00328022802
7	0.00122933995	– 0.00287307038
8	0.00074491081	– 0.00032376486
9	0.00244553442	– 0.00177713459
10	– 0.00039011696	0.00115592027

- Parametry vyvažujících subsystémů, viz *Tab. F.3*:

Tab. F.3: Parametry vyvažujících subsystémů vačkového mechanismu VM_2

l -tá harmonická složka	$k_l [Nm]$	$J_l [kgm^2]$	$\psi_{l0} [deg]$
1	650	0.4823	15.2779
2	1878	0.2268	14.4319
3	650	0.0197	27.3158
4	350	0.0057	6.7775
5	1100	0.0117	– 25.1460
2 & 5	2	0.2272	15.0000
	5	0.0108	– 25.0000

- Parametry modelu pohonu:
 - $I_{rotor} = 0.0291 \text{ kg m}^2$ moment setrvačnosti rotoru servomotoru,
 - $p_p = 4$ počet pólových dvojic,
 - $R_s = 0.048 \Omega$ elektrický odpor jedné fáze,
 - $L_D = 1.1 \text{ mH}$ D-složka indukčnosti,
 - $L_Q = 1.1 \text{ mH}$ Q-složka indukčnosti,
 - $\psi_m = 0.5072 \text{ Wb}$ spřažený magnetický tok permanentních magnetů,
 - $K_I = 5 \text{ V A}^{-1}$ proporcionální složky regulátorů proudu,
 - $T_{II} = 0.5 \text{ ms}$ časové integrační konstanty regulátorů proudu,
 - $K_\omega = 5 \text{ A s rad}^{-1}$ proporcionální složka regulátoru rychlosti,
 - $T_{I\omega} = 80 \text{ ms}$ časová integrační konstanta regulátoru rychlosti,
 - $K_\varphi = 5 \text{ s}^{-1}$ proporcionální složka regulátoru polohy,
 - $r_\omega = 1$ zesílení rychlostního feedforwardu,

F.3. Čtyřkloubový mechanismus

Viz kinematické schéma na *Obr. 4.3*.

- Rozměrové parametry:
 - $a = 0.091 \text{ m}$ vzdálenost rotační osy vahadla 3 od rotační osy kliky 2 ve vertikálním směru,
 - $b = 0.145 \text{ m}$ vzdálenost rotační osy vahadla 3 od rotační osy kliky 2 v horizontálním směru,
 - $p = 0.0385 \text{ m}$ délka kliky 2,
 - $l = 0.087 \text{ m}$ délka ojnice 3,
 - $q = 0.155 \text{ m}$ délka vahadla 4,
- Základní geometricko-hmotnostní charakteristiky jednotlivých těles:
 - Kliky 2:
 - $m_p = 22.2 \text{ kg}$ hmotnost samotné kliky,
 - $I_{red} = 0.59 \text{ kgm}^2$ moment setrvačnosti samotné kliky k ose rotace a momenty setrvačnosti těles redukovaných na kliku,
 - $p_S = 0.0004 \text{ m}$ poloha středu hmotnosti,
 - Ojnice 3:
 - $m_l = 4.9 \text{ kg}$ hmotnost,
 - $I_{Sl} = 0.0162 \text{ kgm}^2$ moment setrvačnosti ke středu hmotnosti,
 - $l_S = 0.0292 \text{ m}$ poloha středu hmotnosti,
 - Vyvažovaný (pracovní) člen 4:
 - $m_q = 95 \text{ kg}$ hmotnost,
 - $I_q = 0.5714 \text{ kgm}^2$ moment setrvačnosti k ose rotace,
 - $q_S = 0.005 \text{ m}$ poloha středu hmotnosti,
- Číselné vyjádření náhrady ojnice 3 dvěma hmotnými body užitím rovnic (4.1.1), Viz *Obr. 4.4*:
 - $m_{l1} = 2.463 \text{ kg}, \quad l_1 = 0.0572 \text{ m},$
 - $m_{l2} = 2.437 \text{ kg}, \quad l_2 = l - l_S = 0.0578 \text{ m},$
- Přepočtený moment setrvačnosti vyvažovaného tělesa pro stanovení parametrů vyvažujících subsystémů:

$$I = I_q + m_{l2} q^2 = 0.63 \text{ kgm}^2,$$

- Koeficienty zdvihové závislosti podle vztahu (F.1), viz **Tab. F.4**:

Tab. F.4: Koeficienty zdvihové závislosti čtyřkloubového mechanismu

n	A_n [rad]	B_n [rad]
0	0.28053850702	–
1	– 0.25004457540	0.01286576321
2	– 0.02973463415	0.00096557797
3	– 0.00115693242	– 0.00376158462
4	0.00022536547	– 0.00090258429
5	0.00014321680	– 0.00001719955
6	0.00003213329	0.00002233648
7	– 0.00000122745	0.00000641149
8	– 0.00000158545	0.00000098150
9	– 0.00000027108	– 0.00000017630
10	0.00000000338	– 0.00000008522

- Parametry vyvažujících subsystémů, viz **Tab. F.5**:

Tab. F.5: Parametry vyvažujících subsystémů čtyřkloubového mechanismu

l -tá harmonická složka	k_{tl} [Nm]	J_l [kgm ²]	ψ_{l0} [deg]
1	1330	0.7238	28.7712
2	501	0.0334	28.7712
1 & 2	1	0.8265	28.7712
	2	0.0643	10

- Parametry modelu pohonu:
 - $I_{rotor} = 0.0291 \text{ kg m}^2$ moment setrvačnosti rotoru servomotoru,
 - $p_p = 4$ počet pólových dvojic,
 - $R_s = 0.065 \Omega$ elektrický odpor jedné fáze,
 - $L_D = 1.5 \text{ mH}$ D-složka indukčnosti,
 - $L_Q = 1.5 \text{ mH}$ Q-složka indukčnosti,
 - $\psi_m = 0.5954 \text{ Wb}$ spřažený magnetický tok permanentních magnetů,
 - $K_f = 5 \text{ VA}^{-1}$ proporcionální složky regulátorů proudu,
 - $T_{il} = 0.5 \text{ ms}$ časové integrační konstanty regulátorů proudu,
 - $K_\omega = 5 \text{ A s rad}^{-1}$ proporcionální složka regulátoru rychlosti,
 - $T_{i\omega} = 80 \text{ ms}$ časová integrační konstanta regulátoru rychlosti,
 - $K_\varphi = 5 \text{ s}^{-1}$ proporcionální složka regulátoru polohy,
 - $r_\omega = 1$ zesílení rychlostního feedforwardu,

Disertační práce: Vyvažování setrvačných účinků těles při periodickém vratném pohybu

Autor: Jiří Ondrášek

Studijní program: P2301 – Strojní inženýrství

Studijní obor: 3901V003 – Aplikovaná mechanika

Zaměření: Dynamika mechanismů

Pracoviště: Katedra mechaniky, pružnosti a pevnosti
Fakulta strojní
Technická univerzita v Liberci

Školitel: Doc.Ing. Rudolf Vrzala, CSc.

Rozsah práce: 92 stran textu,
17 stran příloh,
66 obrázků,
31 tabulek.

Sazba: provedena v programu Microsoft Office Word 2007

Vydání: první

Náklad: 5 výtisků

TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI
FAKULTA STROJNÍ



**VYVAŽOVÁNÍ SETRVAČNÝCH ÚČINKŮ TĚLES
PŘI PERIODICKÉM VRATNÉM POHYBU**

(Teze disertační práce)

JIŘÍ ONDRÁŠEK

Září 2009

Disertační práce: Vyvažování setrvačných účinků těles
při periodickém vratném pohybu

Autor: Jiří Ondrášek

Studijní program: P2301 – Strojní inženýrství

Studijní obor: 3901V003 – Aplikovaná mechanika

Zaměření: Dynamika mechanismů

Pracoviště: Katedra mechaniky, pružnosti a pevnosti
Fakulta strojní
Technická univerzita v Liberci

Školitel: Doc.Ing. Rudolf Vrzala, CSc.

Sazba: provedena v programu Microsoft Office Word 2007

Vydání: první

Náklad: 35 výtisků

VYVAŽOVÁNÍ SETRVAČNÝCH ÚČINKŮ PŘI PERIODICKÉM VRATNÉM POHYBU

(Teze disertační práce)

Autor:	JIŘÍ ONDRÁŠEK
Studijní program:	P2301 Strojní inženýrství
Studijní obor (zaměření):	3901V003 Aplikovaná mechanika (Dynamika mechanismů)
Školící pracoviště:	Katedra mechaniky, pružnosti a pevnosti
Školitel:	Doc. Ing. Rudolf Vrzala, CSc.

Disertace je k dispozici v Univerzitní knihovně – Voroněžská 13, Liberec.

Liberec 2009

Recenzenti:

Termín a miesto obhajoby:

Budova „P“ TUL Komenského 2, 460 01 Liberec (učebna P10)

ISBN: 978-80-7372-520-4

Anotace

Ústředním tématem předkládané disertační práce je oblast mechaniky, která se zabývá vyvažováním setrvačných účinků těles případně mechanických systémů. Cílem vyvažování je především snížit, nebo úplně vyloučit, dynamické účinky pohybujících se hmotných těles tak, aby došlo ke snížení potřebného příkonu pohonu a dále ke zmenšení silového namáhání celé mechanické soustavy. Proces vyvažování je realizován s ohledem dosažení ustáleného chodu mechanického systému připojením vyvažujících subsystémů k vyvažované soustavě. Jednotlivé vyvažující subsystémy jsou složeny ze setrvačné hmoty a pružného prvku, kterým je seizmická hmota propojena s vyvažovaným mechanickým systémem. V ustáleném chodu je pohyb vyvažující hmoty protiběžný periodickému vratnému pohybu tělesa, jehož setrvačné účinky jsou vyvažovány. K tomu, aby docházelo k účinnému procesu vyvažování, je třeba správně navrhnout parametry vyvažujících subsystémů. Těmi se rozumí hmotnost a matice setrvačnosti vyvažující hmoty a tuhost pružného elementu. K tomuto účelu byly odvozeny matematické vztahy a navržena metodika jejich výpočtu. Tyto parametry jsou určovány v závislosti na pracovní frekvenci daného strojního zařízení, na průběhu zdvihové závislosti pracovního členu systému a jeho geometricko-hmotnostních charakteristikách.

Na samotný proces vyvažování a jeho aplikaci na mechanické systémy lze nahlížet jako na součást reality. Ta část reality, která je popisována, se nazývá objekt. Aby byl objekt dobře popsán, je nutné vytvořit dobrý model daného objektu. V této práci je především věnována pozornost teoretickému způsobu tvorby modelů. Tento způsob tvorby vychází především z fyzikálních zákonitostí, na jejichž základě jsou hledány vztahy mezi veličinami, které jsou určující z hlediska poznání. Jedná se o matematicko-fyzikální analýzu. Model objektu vzniklý na jejím základě může být složitý a neefektivní, ale pro jeho objektivní popis je nezbytné, aby byl matematicky a fyzikálně popisován a řešen jako celek. To znamená včetně jeho jednotlivých subsystémů: mechanického, elektrického, hydraulického, pneumatického, tepelného atd., tedy byl vytvořen tzv. mechatronický systém. Tento požadavek vyplývá ze skutečnosti, že v praktické realizaci všechny dílčí systémy pracují společně a vzájemně se ovlivňují. Vzhledem k předmětu a cílům práce je zde kladen důraz na tvorbu simulačních modelů složených ze dvou základních reprezentantů, a to mechanické a elektrické soustavy.

S rozvojem numerické matematiky a informatiky se též utvářel nový přístup při tvorbě simulačních modelů. V této souvislosti byl zaveden termín *počítačová mechanika*, která se vyznačuje tím, že kromě vlastního numerického řešení vytvořeného matematického modelu poskytuje též algoritmy pro jeho automatické sestavení. Jednou z možností takového řešení je použití následujících komerčně dostupných expertních programů NX I-DEAS, MSC.ADAMS, MSC.EASY5 a toku dat mezi nimi. Tímto přístupem je vytvořeno simulační prostředí pro zkoumání složitých nelineárních mechatronických systémů jako celku.

Klíčová slova: dynamika mechanismů, dynamické vyvažování, setrvačné účinky, vyvažovaná soustava, vyvažující subsystém, seizmická hmota, mechatronický systém, matematické a fyzikální modelování, počítačová mechanika

Annotation

The main theme of the submitted thesis is the field of mechanics that is involved in balancing the inertia effects of bodies or mechanical systems, as the case may be. In particular, the aim of balancing is to decrease or totally eliminate the dynamic effects of moving mass bodies in such a way that a decrease of the needed drive input and further a decrease of the power load of the mechanical system as a whole can occur. The process of balancing is carried out with regard to achieving a steady running of the mechanical system by linking the balancing subsystems to the balanced system. The particular balancing subsystems are composed from inertia mass and a flexible element through which seismic mass is interconnected with the balanced mechanical system. In steady running, the motion of the balancing mass is contra-rotating to the periodical reversing motion of a body whose inertia effects are being balanced. In order to achieve an effective process of balancing it is necessary to design the parameters of balancing subsystems correctly, i.e., weight and inertia matrix of balancing mass and flexible element stiffness. For this purpose, mathematical relations have been derived and the methods for their computations have been proposed. Those parameters are determined in dependence on the working frequency of the given machine, the course of law of motion of the working link of a system and its geometrical and mass characteristics.

The process of balancing itself and its application for mechanical systems can be regarded as an integral part of the reality. That part of the reality that is described is termed as an object. In order to describe the object correctly, a good model of the given object is to be created. In this work, attention is paid to the theoretical way of model creation namely. This creation method goes out from physical rules of law above all on the basis of which relations between the quantities which are determinant from the point of view of knowledge are sought. It concerns a mathematical and physical analysis. The model of an object created on its basis may be complicated and non-effective, but for its impartial description it is necessary that it is mathematically and physically described and solved as a whole, i.e., inclusive its particular subsystems: mechanical, electrical, hydraulic, pneumatic, thermal etc., thus, a mechatronic system is created. This requirement results from the fact that in practical implementation, all particular systems work together and interact mutually. Regarding the subject and the goals of the thesis, stress is laid on the creation of simulation models composed from two basic representatives, i.e., mechanical and electrical systems.

When developing numerical mathematics and informatics, a new approach to the creation of simulation models has been generated. In this connection, *computing mechanics* is spoken about which is characterized by the fact that in addition to a proper numerical solution of the created mathematical model it provides algorithms for its automatic completion as well. One of the possibilities of such a solution is the use of commercially available NX I-DEAS, MSC.ADAMS, MSC.EASY5 expert programmes and data flow between them.

Keywords: mechanism dynamics, dynamic balancing, inertia effects, balanced system, balancing subsystem, seismic mass, mechatronic system, mathematical and physical simulation, computing mechanics

Obsah

Anotace	III
Annotation	IV
Seznam použitých symbolů	VI
1 Úvod	9
1.1 Předmět a cíle práce.....	9
2 Rešeršní část	10
2.1 Vyvažování těles.....	10
2.2 Matematický popis vázaného mechanického systému.....	10
2.3 Matematický model synchronního motoru s permanentními magnety.....	12
2.4 Skládání abstraktních dynamických systémů.....	14
3 Návrh dynamického vyvážení	15
3.1 Kriteria stupně vyvážení setrvačných účinků.....	17
4 Simulační modely	18
4.1 Zdvihové závislosti.....	18
4.2 Parametry vyvažujících subsystémů.....	20
4.3 Modely pružných elementů vyvažujících subsystémů.....	20
4.4 Model pohonu.....	21
5 Výsledky simulací	22
5.1 Vačkový mechanismus VM_1.....	22
5.2 Vačkový mechanismus VM_2.....	23
5.3 Čtyřkloubový mechanismus.....	23
6 Závěr	24
Seznam použité literatury	26
Přehled publikovaných prací	27

Seznam použitých symbolů

Symbol	Jednotka	Popis
a	$[m]$	vzdálenost rotačních os
a_x	$[m]$	vzdálenost rotačních os ve vertikálním směru
a_y	$[m]$	vzdálenost rotačních os v horizontálním směru
A_i	$[rad]$	koeficienty kosinových složek Fourierova rozvoje
b	$[m]$	délka vahadla
B_i	$[rad]$	koeficienty sinových složek Fourierova rozvoje
D	$[m]$	průměr kladky
$\mathbf{D}$		matice tlumení
E_k	$[J]$	kinetická energie soustavy
E_p	$[J]$	potenciální energie soustavy
$\mathbf{E}$		jednotková matice
$\mathbf{f}^g$		vektor gravitačních sil
$\mathbf{f}^v$		vektor vazbových podmínek
g	$[m\ s^{-2}]$	gravitační zrychlení
i	$[-]$	počet stupňů volnosti
i, j		imaginární jednotka
I	$[kg\ m^2]$	moment setrvačnosti vyvažovaného tělesa
I_d	$[A]$	d -složka fázoru proudu
I_q	$[A]$	q -složka fázoru proudu
I_{red}	$[kg\ m^2]$	moment setrvačnosti hnacího členu
I_{rotor}	$[kg\ m^2]$	moment setrvačnosti rotoru elektromotoru
$\mathbf{i}_s$	$[A]$	vektor statorových proudů
J_l	$[kg\ m^2]$	moment setrvačnosti dané vyvažující hmoty
$\mathbf{J}$		Jacobiho matice
k_{tl}	$[N\ m\ rad^{-1}]$	torzní tuhost daného pružného elementu
K		proporcionální složka PID regulátoru
K_E	$[V\ s]$	napěťová konstanta synchronního servomotoru
K_I	$[VA^{-1}]$	proporcionální složka regulátoru proudu
K_M	$[N\ m\ A^{-1}]$	momentová konstanta synchronního servomotoru
K_φ	$[s^{-1}]$	proporcionální složka regulátoru polohy
K_ω	$[A\ s\ rad^{-1}]$	proporcionální složka regulátoru rychlosti
$\mathbf{K}$		matice tuhosti
$\mathbf{K}_e$		matice tuhosti poddajného tělesa
$\mathbf{K}_t$		matice tuhosti vyvažujících subsystémů
$\tilde{\mathbf{K}}_e$		zobecněná matice tuhosti poddajného tělesa
l	$[m]$	délka ojnice
L_d	$[H]$	indukčnost statorového vinutí v podélné ose
L_q	$[H]$	indukčnost statorového vinutí v příčné ose
L_s	$[H]$	rozptylová indukčnost jedné fáze statorového vinutí
M	$[N\ m]$	elektromagnetický moment motoru
$M_h(t)$	$[N\ m]$	hnací moment pohonu

Symbol	Jednotka	Popis
M_{hEff}	$[N\ m]$	efektivní hodnota hnacího momentu pohonu
$\mathbf{M}$		matice hmotnosti
$\mathbf{M}_e$		matice hmotnosti poddajného tělesa
$\mathbf{M}_I$		matice hmotnosti vyvažujících subsystémů
$\tilde{\mathbf{M}}_e$		zobecněná matice hmotnosti poddajného tělesa
n	$[ot\ min^{-1}]$	otáčky hnacího členu
n_R	$[ot\ min^{-1}]$	pracovní otáčky
$\mathbf{O}$		nulový vektor
p		nelineární mechanický převod
p	$[m]$	délka kliky
p_p	$[-]$	počet pólových dvojic
q	$[m]$	délka vahadla
$\mathbf{q}$		vektor zobecněných souřadnic
$\mathbf{q}_\psi$	$[m], [rad]$	vektor zobecněných posuvů vyvažujících těles
$\mathbf{q}_*$		vektor modálních souřadnic
$\mathbf{Q}$		vektor zobecněných sil
r	$[-]$	počet nezávislých souřadnic
r_S	$[m]$	vzdálenost středu hmotnosti vyvažovaného členu od osy rotace
r_ω	$[-]$	zesílení rychlostního feedforwardu
R_d	$[J]$	Rayleighova disipativní energie soustavy
R_s	$[\Omega]$	odpor jedné fáze statorového vinutí
$\mathbf{r}$		vektor souřadnic
$ R_i $	$[N]$	velikost reakce v kinematické vazbě
$ R_i _{\max}$	$[N]$	maximální hodnota velikosti reakce
s	$[-]$	počet závislých souřadnic
t	$[s]$	čas
T_i	$[s]$	integrační časová konstanta PID regulátoru
T_{il}	$[s]$	integrační časová konstanta regulátoru proudu
$T_{i\omega}$	$[s]$	integrační časová konstanta regulátoru rychlosti
U_d	$[V]$	d -složka fázoru napětí
U_i	$[V]$	indukované napětí
U_q	$[V]$	q -složka fázoru napětí
$\mathbf{u}$		vektor fyzikálních souřadnic poddajného tělesa
$\mathbf{u}_s$	$[V]$	vektor statorových napětí
$\mathbf{V}$		modální matice
α	$[rad], [^\circ]$	úhel, který je svírán vahadly
$\tilde{\alpha}$		vektor úhlového zrychlení
γ		vektor modálních souřadnic
δ		nerovnoměrnost chodu
θ	$[rad]$	elektrický úhel, který vyjadřuje vzájemné natočení rotoru a statoru
ϑ	$[rad], [^\circ]$	úhlové natočení vyvažovaného tělesa

Symbol	Jednotka	Popis
$\vartheta_{\max}$	$[rad], [^\circ]$	zdvih
λ		vektor Lagrangeových multiplikátorů
ξ_l	$[rad]$	torzní deformace pružného prvku
ρ	$[kg\ m^{-3}]$	hustota
φ	$[rad], [^\circ]$	úhlové natočení hnacího členu
φ^*	$[rad], [^\circ]$	žádaný průběh úhlového natočení
ψ_l	$[rad], [^\circ]$	úhlové natočení daného vyvažujícího tělesa
ψ_m	$[Wb]$	magnetický tok
ω	$[rad\ s^{-1}]$	mechanická úhlová rychlost
ω_R	$[rad\ s^{-1}]$	pracovní úhlová rychlost
ω_0	$[rad\ s^{-1}]$	úhlová frekvence napájecího napětí, resp. proudu, úhlová rychlost točivého magnetického pole
ω^*	$[rad\ s^{-1}]$	žádaný průběh úhlové rychlosti
Ω	$[rad\ s^{-1}]$	jmenovitá úhlová frekvence
$\vec{\omega}$		vektor úhlové rychlosti
Ω_{0l}	$[rad\ s^{-1}]$	vlastní úhlová frekvence daného vyvažujícího subsystému

1 Úvod

Je všeobecně známo, že při chodu mechanismů vznikají dynamické síly, které jsou příčinou kmitání a zvýšeného zatížení, což omezuje jejich využitelnou pracovní frekvenci. Tedy jsou příčinou většího opotřebení a snížení životnosti. Proto je snaha dynamické síly u většiny strojních zařízení co nejvíce omezit. Setrvačné účinky pohybujících se členů mechanického systému jsou dány rozložením hmot, pasivních odporů, poddajností a kinematikou mechanismu. Postup, kterým dochází ke snížení, případně i úplnému odstranění setrvačných účinků, je označován jako vyvažování. Tyto účinky se často vyvažují úpravou rozložení hmot, úpravou tvaru budící funkce, úpravou rozložení tuhosti nebo připojením kmitajícího subsystému. V posledně zmiňovaném způsobu vyvážení se výsledné setrvačné účinky více těles vyvažují setrvačnými účinky vyvažovacích těles. Protože jsou dynamické síly obvykle deterministického charakteru, je možné již při samotném návrhu daného mechanického systému stanovit s jistou přesností jejich průběh a příslušné účinky. Věrohodnost teoretického vyjádření dynamických sil úzce souvisí s tvorbou simulačních modelů.

Na proces vyvažování a jeho aplikaci na mechanické systémy lze nahlížet jako na součást reality. Ta část reality, která je popisována, se nazývá objekt. Aby byl objekt dobře popsán, je nutné vytvořit dobrý model daného objektu nebo procesu, který se vytváří za účelem odhadu jeho chování v praktické realizaci či dalším vývojovém stádiu. Pro objektivní popis analyzovaného objektu je nezbytné, aby byl matematicky a fyzikálně modelován a řešen jako celek včetně jeho subsystémů: mechanického, elektrického, hydraulického, pneumatického, tepelného atd., tedy byl vytvořen tzv. mechatronický systém. Tento požadavek vyplývá ze skutečnosti, že v praktické realizaci všechny dílčí systémy pracují společně a vzájemně se ovlivňují – interagují.

1.1 Předmět a cíle práce

Hlavním předmětem disertační práce je oblast mechaniky, která se zabývá vyvažováním setrvačných účinků těles nebo mechanických systémů. Setrvačné účinky mechanických soustav jsou vyvažovány připojením vyvažujících subsystémů, přičemž tato problematika je řešena s cílem dosáhnout ustáleného chodu mechanických systémů s vyvažováním.

Z předchozích úvah vyplývají následující základní cíle disertační práce:

1. Tvorba matematického modelu mechanického systému s připojením vyvažujících subsystémů. Vyvažující subsystémy jsou určeny k vyvážení setrvačných účinků těles konajících vratný periodický pohyb.

2. Vytvoření metodiky stanovení parametrů vyvažujících subsystémů.

3. Vyřešení způsobu dosažení ustáleného chodu mechanické soustavy s připojením vyvažujících subsystémů.

4. Ověření postupu určení parametrů vyvažujících subsystémů a způsobu dosažení ustáleného chodu na simulačních modelech. Výpočetní modely budou vytvářeny tak, aby co nejvěrněji popisovaly reálný mechanický systém. Budou respektovat významné poddajnosti mechanického systému, bude do nich začleněn matematický popis pohonu a řídicí struktury atp. Tedy bude vytvořen matematický model relativně složitého nelineárního mechatronického systému.

2 Rešeršní část

2.1 Vyvažování těles

Při pohybu těles vznikají síly dynamického původu, které se prostřednictvím reakcí přenášejí do rámu strojního zařízení. Mají nežádoucí účinky, jako např. způsobují přídavné namáhání, kmitání, hluk atp. Tyto přídavné účinky jsou dvojího druhu – silové a momentové. Obojí jsou závislé na úhlové rychlosti $\dot{\omega}$ a úhlovém zrychlení $\ddot{\alpha}$ rotujícího tělesa. Cílem vyvažování je omezit, případně odstranit, tyto účinky jednak:

1. Vhodným rozložením hmot pohybujících se členů mechanického systému. Tento způsob vyvažování bývá označován statickým nebo dynamickým vyvažováním. Cílem statického a dynamického vyvažování, které mimo jiné představuje snížení dynamického zatížení v ložiskách na minimální hodnotu, je dosažení takového stavu, aby osa rotace byla hlavní centrální osou setrvačnosti. Podrobné informace k tomuto způsobu vyvažování jsou obsaženy např. v [2].

2. Optimalizací zdvihové závislosti pracovního členu, viz [5].

3. Připojením vyvažujících kmitajících subsystémů. Statické a dynamické vyvažování rotujících těles však obvykle vede k přidání vývažků a ke zvětšení hmotového momentu setrvačnosti tělesa k ose rotace a tedy k nárůstu setrvačných sil těchto těles při nerovnoměrném pohybu. Tento důsledek lze zmírnit připojením vyvažujícího nebo vyvažujících subsystémů k mechanické soustavě. Vyvažující subsystémy jsou sestaveny ze setrvačné hmoty a pružného elementu. Pohyb vyvažovacího tělesa je protiběžný k pohybu tělesa vyvažovaného. Cílem tohoto způsobu vyvažování je snížení dynamických účinků hmotného tělesa s periodickým vratným pohybem tak, že příkon pohonu se zmenší a dále dojde ke snížení silových účinků, které působí v mechanismu, viz [4].

2.2 Matematický popis vázaného mechanického systému

K sestavení pohybových rovnic vázaného mechanického systému s poddajnými členy se obvykle vychází z Lagrangeových rovnic smíšeného typu, viz [16], k jehož popisu jsou obvykle použity obecně závislé fyzikální souřadnice $\mathbf{q}$ dimenze r , které jsou vázány soustavou s skalárních vazbových podmínek:

$$\mathbf{f}^V(\mathbf{q}, t) = \mathbf{0}. \quad (2.1)$$

Vázaný mechanický systém se tak vyznačuje $i = r - s$ stupni volnosti. Pro i -té poddajné těleso lze vektor souřadnic $\mathbf{q}_i$ zapsat ve tvaru:

$$\mathbf{q}_i = [\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i, \mathbf{q}_{ei}]^T,$$

ve kterém $\mathbf{r}_i$ představuje vektor souřadnic, které určují polohu daného tělesa v nepohyblivém souřadném systému $Oxyz$. Orientace tělesa v základním prostoru je dána Eulerovými parametry $\mathbf{p}_i$. Elastické deformace tělesa jsou vyjádřeny vektorem elastických (resp. normovaných modálních) souřadnic $\mathbf{q}_{ei}$.

Se znalostí kinetické E_k , potenciální E_p a disipativní R_d energie vázaného mechanického systému je možno přistoupit k sestavení pohybových rovnic a společně s druhou časovou derivací vazbových podmínek $\mathbf{f}^V$ lze uvést souhrnný zápis těchto rovnic v maticovém vyjádření:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{M}}\dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} \right]^T \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} + \mathbf{f}^s + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} &= \mathbf{Q} + \mathbf{J}^T \boldsymbol{\lambda}, \\ \mathbf{J}\ddot{\mathbf{q}} &= -\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}^T} (\mathbf{J}\dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} - 2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}^T} \left(\frac{\partial \mathbf{f}^V}{\partial t} \right) \dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial^2 \mathbf{f}^V}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

ve kterých:

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{f}^V}{\partial \mathbf{q}^T} \quad (2.3)$$

vyjadřuje Jacobiho matici soustavy vazbových rovnic. Symboly $\mathbf{M}$, $\mathbf{K}$ a $\mathbf{D}$ představují postupně matice hmotnosti, tuhosti a tlumení celé mechanické soustavy a vektor $\mathbf{f}^s$ je vektor gravitačních sil. Dále lze soustavu rovnic (2.2) přepsat do tvaru vhodného pro numerickou integraci:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & -\mathbf{J}^T \\ \mathbf{J} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 - \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{K}\mathbf{q} \\ \mathbf{p}_2 \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

Jedná se o soustavu $(r+s)$ algebro-diferenciálních rovnic pro r neznámých obecně závislých fyzikálních souřadnic $\mathbf{q}$ a s neznámých Lagrangeových multiplikátorů $\boldsymbol{\lambda}$.

Při popisu poddajných těles se často využívá metody konečných prvků, jejichž nevýhodou je velký rozměr fyzikálních souřadnic $\mathbf{u}$. Proto se deformační pole poddajného tělesa aproximuje několika vhodně zvolenými funkcemi – deformačními módy. Jako deformačních módů lze použít kombinace statických tvarů deformace tělesa, které respektují okrajové podmínky, a několika vlastních tvarů kmitání odpovídajících kmitání volného tělesa, jejichž počet závisí na rozsahu frekvencí, které mají být ve výpočtu zachyceny [16], [6], [7], [8].

Za předpokladu, že rovnici pro volné kmitání konzervativního systému vyhovuje řešení:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{u}e^{i\Omega t}, \quad (2.5)$$

lze formulovat:

$$\left(-\Omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (2.6)$$

Tento zápis vyjadřuje skutečnost, že u matice hmotnosti $\mathbf{M}$ a tuhosti $\mathbf{K}$ celé soustavy jsou prvky přeskupeny tak, aby jedna část souřadnic $\mathbf{u}_1$ rozměru m odpovídala těm stupňům volnosti, ve kterých jsou definovány okrajové podmínky. U druhé skupiny souřadnic $\mathbf{u}_2$ se užije modální transformace do vektoru modálních souřadnic $\boldsymbol{\gamma}$ rozměru n , což lze zapsat ve tvaru:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{K}_{22}^{-1}\mathbf{K}_{21} & \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \boldsymbol{\gamma} \end{bmatrix} = \mathbf{V}\mathbf{q}^*. \quad (2.7)$$

V předchozí rovnici byla zavedena modální matice $\mathbf{V}$ o rozměru $(u, m+n)$ a vektor $\mathbf{q}^*$ modálních souřadnic. Dále zobecněné matice hmotnosti $\tilde{\mathbf{M}}$ a tuhosti $\tilde{\mathbf{K}}$ redukovaného modelu jsou dány následujícími vztahy:

$$\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V}, \quad \tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{V}^T \mathbf{K} \mathbf{V}. \quad (2.8)$$

Řešením problému vlastních hodnot matic hmotnosti $\tilde{\mathbf{M}}$ a tuhosti $\tilde{\mathbf{K}}$ dojde k převodu vektoru souřadnic $\mathbf{q}^*$ do normovaných modálních souřadnic $\mathbf{q}_e$.

2.3 Matematický model synchronního motoru s permanentními magnety

Při následných výpočetních simulacích se předpokládá, že pohon analyzovaných mechanických systémů bude realizován 3fázovým synchronním elektromotorem s permanentními magnety, kterými je vytvářen budicí magnetický tok rotoru, viz např. [1], [15], [17]. Při vektorovém řízení tohoto typu elektromotoru se téměř výhradně používá kaskádní uspořádání regulačního obvodu se třemi hierarchicky uspořádanými zpětnými vazbami: proudovou, rychlostní a polohovou. Pro potřeby simulace byl použit DQ-model, který vychází z matematického popisu synchronního stroje a využívá transformace statorových souřadnic na rotorové. Při odvození základních rovnic matematického modelu synchronního motoru byly zavedeny následující zjednodušující předpoklady:

- Průběh magnetické indukce ve vzduchové mezeře i průběh indukovaného napětí je harmonický. Při výpočtech je třeba zohlednit skutečnost, že motory s vyniklými póly na rotoru mají různou magnetickou vodivost v podélném a příčném směru.

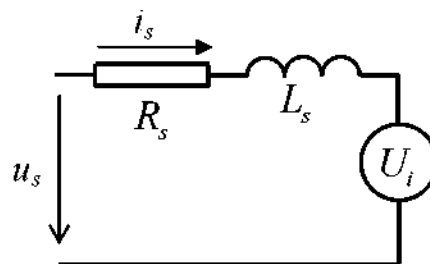
- Parametry elektromotoru, tzn. indukčnost L_s a odpor R_s , jsou konstantní a stejné ve všech třech fázích.

- Ztráty v železe jsou zanedbány.
- Tlumičí vinutí na rotoru není provedeno.
- Magnetizační charakteristika je lineární.
- Není připojen nulový vodič.

Za předpokladu, že všechna tři statorová vinutí jsou prostorově symetrická, je matematický model synchronního motoru s permanentními magnety na rotoru ve vektorovém tvaru dán vztahy:

$$\mathbf{u}_s = R_s \mathbf{i}_s + \frac{d\boldsymbol{\psi}_s}{dt}, \quad \boldsymbol{\psi}_s = L_s \mathbf{i}_s + \boldsymbol{\psi}_m e^{j\theta}, \quad (2.9)$$

ve kterých je $\boldsymbol{\psi}_s$ spřažený magnetický tok permanentních magnetů natočených o úhel θ a L_s je rozptylová indukčnost statorového vinutí. Náhradní schéma jedné fáze tohoto motoru je uvedeno na **Obr. 2.1**, ve kterém R_s je odpor jedné fáze statorového vinutí a U_i je napětí indukované magnetickým tokem $\boldsymbol{\psi}_m$.



Obr. 2.1: Náhradní schéma synchronního motoru s permanentními magnety

Napěťové rovnice synchronního servomotoru vyjádřené ve složkovém tvaru v rotujících souřadnicích (d, q) mají tvar:

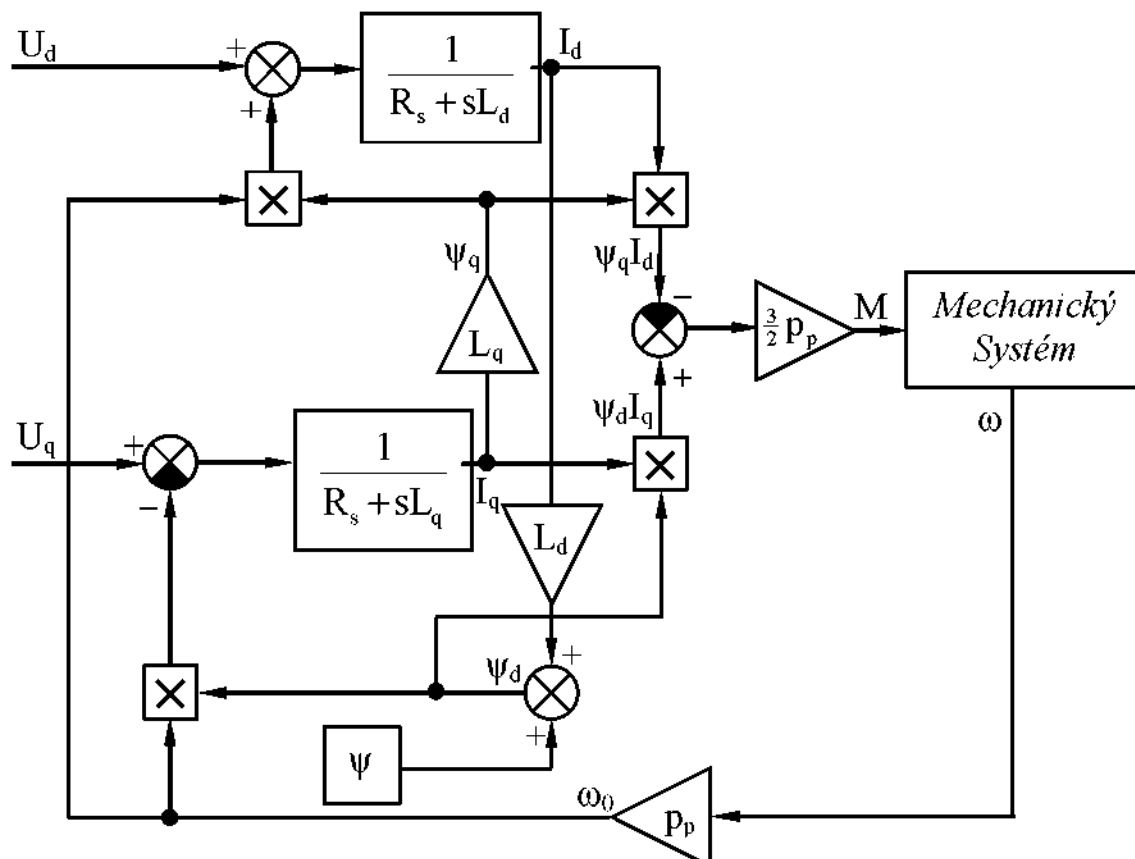
$$\begin{aligned} U_d &= R_s I_d + L_d \frac{dI_d}{dt} - \omega_0 L_q I_q, \\ U_q &= R_s I_q + L_q \frac{dI_q}{dt} + \omega_0 (L_d I_d + \boldsymbol{\psi}_m), \end{aligned} \quad (2.10)$$

kde ω_0 je elektrická úhlová rychlost rotoru a rovněž i rotujícího souřadného systému (d, q). L_d a L_q značí indukčnosti statorového vinutí v podélné a příčné ose a $\psi_m = \text{const}$ představuje magnetický tok rotoru vyvolaný permanentními magnety.

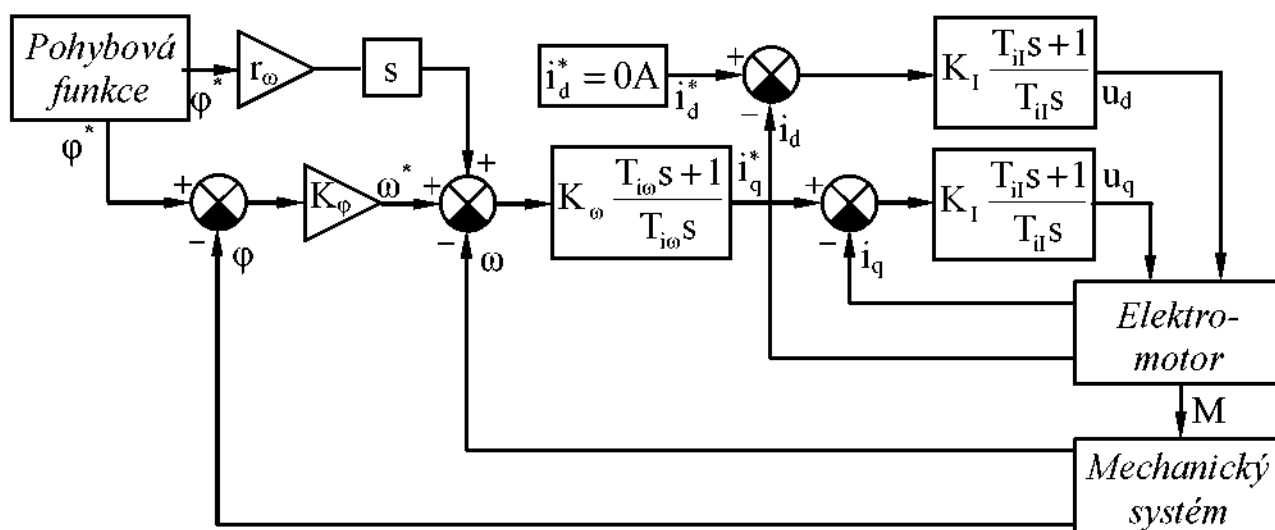
Moment motoru je pak dán výrazem:

$$M = \frac{3}{2} p_p [\psi_m I_q + (L_d - L_q) I_d I_q]. \quad (2.11)$$

Blokové schéma modelu synchronního motoru s permanentními magnety sestavené podle výše uvedených rovnic (2.10) a (2.11) je ukázáno na **Obr. 2.2**.



Obr. 2.2: Blokové schéma modelu synchronního motoru s permanentními magnety

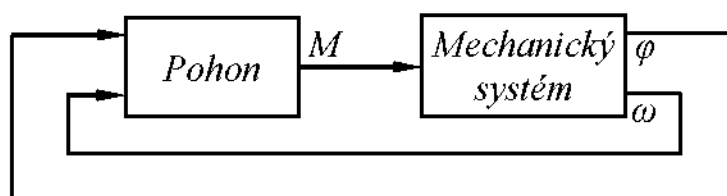


Obr. 2.3: Kaskádní regulační obvod s proudovou, otáčkovou a polohovou zpětnou vazbou

Vektorové řízení synchronního motoru je dáno podmínkou $I_d = 0\text{A}$, pak je vektor statorového proudu $\mathbf{i}$ kolmý na vektor magnetického toku $\boldsymbol{\psi}$ a moment motoru M je maximální. Při vektorovém řízení synchronního motoru s permanentními magnety na rotoru se téměř výhradně používá kaskádní uspořádání regulačního obvodu se třemi hierarchicky uspořádanými zpětnými vazbami – viz **Obr. 2.3**. Proudovým smyčkám s regulátorem typu PI je nadřazena smyčka otáčková s regulátorem úhlové rychlosti, v tomto případě opět typu PI. Žádaná hodnota otáček ω^* , která je výstupem regulátoru polohy, v tomto případě typu P, je srovnávána se skutečnou hodnotou ω .

2.4 Skládání abstraktních dynamických systémů

Jedním z možných postupů vytvoření simulačního modelu spojené soustavy je postup skládání abstraktních dynamických systémů s kauzální orientací vstup – výstup, viz [19]. Jednotlivé abstraktní dynamické systémy jsou nejčastěji popsány buď stavovým, nebo přenosovým popisem. Toto spojování je velmi jednoduché, protože výstupy jednoho modelu jsou vstupy modelu druhého, jak je naznačeno na **Obr. 2.4**. V tomto obrázku představuje blok *Pohon* matematický model elektromotoru včetně řízení a blok *Mechanický systém* model soustavy mnoha těles s poddajnými členy. Vstupem bloku *Mechanický systém* je elektromagnetický moment elektromotoru M , který je zároveň výstupem bloku *Pohon*. Obdobně výstupy bloku *Mechanický systém* jsou např. skutečné úhlové natočení φ a skutečná úhlová rychlost ω sledované hřídele, přičemž tyto veličiny jsou zároveň vstupy bloku *Pohon*.



Obr. 2.4: Blokové schéma mechatronického systému

Hlavním cílem sestavení modelu je stanovení časového průběhu dynamického chování soustavy, které spočívá v numerickém řešení vzniklé soustavy diferenciálních rovnic nebo soustavy algebro-diferenciálních rovnic. Dalšími z možných cílů je studium vlastností daného systému simulacemi, návrh řízení zkoumané soustavy, samotný návrh daného systému, jeho optimalizace, atd. Nevýhody dosavadní praxe oddělené analýzy mechanické soustavy a syntézy elektrických a regulačních obvodů jsou tímto řešením do jisté míry minimalizovány.

3 Návrh dynamického vyvážení

Ve snaze o dynamické vyvážení setrvačných sil mechanického systému, jehož pracovní člen o momentu setrvačnosti I vykonává periodický vratný rotační pohyb, jsou zavedeny následující předpoklady:

- Vstupní člen soustavy o momentu setrvačnosti I_{red} vykonává rovnoměrný rotační pohyb, tzn.:

$$\varphi = \Omega t + \varphi_0, \quad \dot{\varphi} = \Omega, \quad \ddot{\varphi} = 0, \quad (3.1)$$

ve které Ω značí jmenovitou úhlovou frekvenci.

- Setrvačné účinky všech členů, které jsou řazeny před vstupním členem, jsou redukovány na vstupní člen.

- Mechanické převody mezi členy řazenými před vstupním členem a tímto členem jsou konstantní, tj. $I_{red} = konst.$

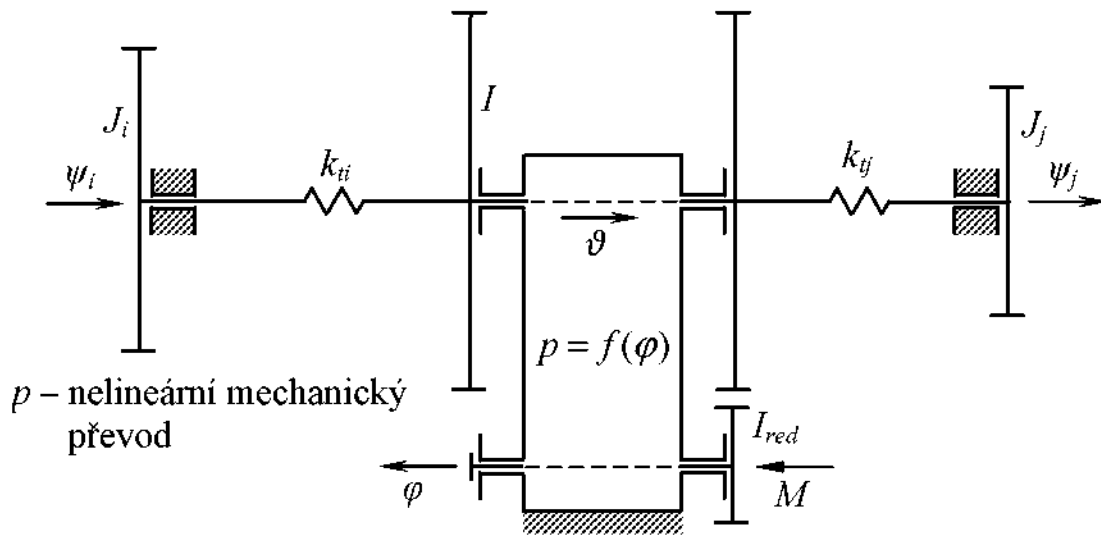
- Setrvačné účinky vyvažovaného členu o momentu setrvačnosti I k ose rotace jsou dominantní.

- Setrvačné účinky těles vložených mezi vstupním a vyvažovaným členem jsou redukovány příslušným způsobem na tato tělesa.

- Všechny členy vyvažované soustavy jsou dokonale tuhé.

- Kinematické vazby mezi jednotlivými členy vyvažované soustavy jsou ideální.

- Na vyvažovanou soustavu nepůsobí žádné akční síly.



Obr. 3.1: Blokové schéma mechanické soustavy s připojením vyvažujících subsystémů

K vyvážení dynamických sil mechanického systému je nutné správně stanovit parametry připojených vyvažujících subsystémů. K jejich určení bude výhodné vyjádřit obecnou zdvihovou závislost $\vartheta = f(\varphi)$ součtem konečného počtu harmonických složek Fourierova rozvoje:

$$\vartheta = A_0 + \sum_n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi), \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (3.2)$$

První a druhou časovou derivací je stanovena rychlost a zrychlení vyvažovaného členu:

$$\begin{aligned} \dot{\vartheta} &= p(\varphi) \dot{\varphi}, & p(\varphi) &= \sum_n n(-A_n \sin n\varphi + B_n \cos n\varphi), \\ \ddot{\vartheta} &= p(\varphi) \ddot{\varphi} + \frac{\partial p(\varphi)}{\partial \varphi} \dot{\varphi}^2, & \frac{\partial p(\varphi)}{\partial \varphi} &= -\sum_n n^2 (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi). \end{aligned} \quad (3.3)$$

V rovnici (3.3) funkce $p(\varphi)$ představuje geometricky nelineární mechanický převod mezi hnacím členem soustavy a vyvažovaným tělesem.

Použitím Lagrangeových rovnic druhého druhu lze určit $(L+1)$ vlastních pohybových rovnic mechanické soustavy podle **Obr. 3.1**, kdy první z nich je vyjádřena vztahem:

$$(I_{red} + p^2(\varphi)I)\ddot{\varphi} + Ip(\varphi)\frac{\partial p(\varphi)}{\partial \varphi}\dot{\varphi}^2 + p(\varphi)\sum_l k_{tl}\xi_l = M_h, \quad (3.4)$$

$$\xi_l = \vartheta - \psi_l, \quad l = 1, 2, \dots, L.$$

Zbývajících L nezávislých rovnic lze zapsat v maticovém vyjádření:

$$\mathbf{M}_l \ddot{\mathbf{q}}_\psi + \mathbf{K}_l \mathbf{q}_\psi = \vartheta \mathbf{K}_l \mathbf{E}, \quad (3.5)$$

ve kterém $\mathbf{M}_l$ je diagonální maticí hmotnosti obsahující momenty setrvačnosti I_l vyvažujících hmot. Matice $\mathbf{K}_l$ vyjadřuje diagonální maticí tuhosti, která obsahuje torzní tuhosti k_{tl} jednotlivých pružných prvků. Symbol $\mathbf{E}$ představuje jednotkovou matici. Vektor $\mathbf{q}_\psi$ je tvořen prvky ψ_l , $l = 1, 2, \dots, L$. Symbol L představuje počet vyvažujících soustav připojených k vyvažovanému systému, který je roven nejvýše počtu N harmonických složek Fourierova rozvoje zdvihové závislosti.

Za předpokladu rovnoměrné rotace hnacího členu soustavy dané podmínkou (3.1) lze stanovit partikulární řešení soustavy nezávislých diferenciálních rovnic (3.5) pro ustálený chod mechanického systému:

$$\psi_l = A_0 + \sum_n \frac{n\Omega_{0l}^2}{\Omega_{0l}^2 - (n\Omega)^2} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi). \quad (3.6)$$

Z požadavku vyváženosti mechanické soustavy, který je stanoven podmínkou $M_h = 0Nm$, a na základě rovnic (3.4) a (3.6) lze odvodit matematické vyjádření pro výpočet příslušných parametrů J_l a k_{tl} vyvažujícího subsystému v závislosti na velikosti vyvažované hmoty I , jmenovité úhlové frekvenci Ω strojního zařízení a n -té vyvažované harmonické složce rozvoje zdvihové závislosti:

$$I + \sum_l \left(\frac{k_{tl}}{\Omega_{0l}^2 - (n\Omega)^2} \right) = 0, \quad \Omega_{0l}^2 = \frac{k_{tl}}{J_l}, \quad l = 1, 2, \dots, L. \quad (3.7)$$

V obecném případě je počet rovnic (3.7) shodný s počtem N harmonických složek Fourierova rozvoje zdvihové závislosti (3.2). Tzn., že by se muselo k vyvažovanému tělesu připojit N vyvažujících soustav k úplnému vyvážení setrvačných účinků vyvažovaného tělesa. Protože počet uspořádaných dvojic J_l a k_{tl} je dvojnásobný vzhledem k počtu rovnic (3.7), je nutné např. momenty setrvačnosti vývažků J_l zvolit a tuhosti k_{tl} dopočítat. Avšak v praktické realizaci může být vyvážení setrvačných účinků všech harmonických složek zdvihové závislosti velmi obtížně proveditelné. Ve skutečnosti bude možné připojit k vyvažované hmotě jen několik málo vyvažujících subsystémů, které by eliminovaly setrvačné účinky příslušných n -tých složek Fourierova rozvoje zdvihové závislosti.

Předcházející odvození byla prováděna za předpokladu, že daný mechanický systém je ve stavu ustáleného chodu. V praxi by mohlo být uvedení takové soustavy do tohoto stavu problematické, především v tom případě, kdy je vyžadováno, např. z technologických důvodů, razantní najetí na příslušné pracovní otáčky stroje. Jedním z možných způsobů rozběhu mechanického systému s vyvažováním setrvačných účinků pracovního členu je takové provedení, jehož cílem je řízené a kontrolované dosažení ustáleného stavu této soustavy. Toho by mohlo být dosaženo způsobem, jehož podstata spočívá v tom, že

nejprve dojde k natočení vyvažujících hmot do takových poloh, které jsou shodné nebo blízké polohám, jež jsou splňovány při vzájemném pohybu jednotlivých členů mechanického systému v ustáleném stavu pro dané tuhosti k_{il} pružných prvků a dané momenty setrvačnosti vyvažujících hmot J_l . Tyto počáteční podmínky ψ_{l0} je možné určit na základě soustavy rovnic (3.6) při stanoveném úhlovém natočení φ_l hnacího členu. V těchto polohách jsou jednotlivá vyvažující tělesa zajištěna proti pohybu zádržným systémem. Poté dojde k rozběhu pouze samotného vyvažovaného mechanismu na pracovní úhlovou rychlost ω_R , které obecně nemusí být shodná se jmenovitou úhlovou frekvencí Ω , na kterou je navrhováno vyvažování setrvačných sil mechanického systému. Během tohoto rozběhu se vyvažující hmoty stále nacházejí ve stanovených polohách ψ_{l0} . Následně v přesně definovaném okamžiku dojde k uvolnění vyvažujících hmot a k jejich uvedení do pohybu, který je na počátku podpořen silovými účinky pružných elementů.

3.1 Kriteria stupně vyvážení setrvačných účinků

Jedním z kritérií stupně vyvážení byla zvolena nerovnoměrnost chodu hnacího členu soustavy, která je smluvně definována jako:

$$\delta = \frac{\dot{\phi}_{\max} - \dot{\phi}_{\min}}{\dot{\phi}_n}, \quad (3.8)$$

přičemž $\dot{\phi}_n$ je střední, resp. nominální, úhlová rychlost. Dalším z možných kritérií je efektivní hodnota hnacího momentu pohonu M_{hEff} . Jedná se o myšlený náhradní konstantní moment, který dodá systému stejný střední výkon jako moment časově proměnný, neboli střední výkon momentu odpovídá kvadrátu jeho efektivní hodnoty. Dále lze očekávat příznivý vliv vyvažujících subsystémů na velikost silového zatížení $|R|$ převodového mechanismu mezi hnacím a pracovním členem soustavy, jako je např. vačkový mechanismus, čtyřkloubový mechanismus, aj., a tedy i přenosu silových účinků mezi jednotlivými členy a do rámu stroje. Ve všech třech případech bude platit, že čím menší budou hodnoty uvedených veličin, tím lepšího stupně vyvážení bude dosaženo.

Kvantitativně lze jednotlivá kriteria vyčíslit podle rovnice:

$$b_v = 1 - \frac{v}{v_Z}, \quad v = \delta, M_{hEff}, |R|, \quad (3.9)$$

kde index Z udává příslušnost k mechanické soustavě bez vyvažování. V případě kladných hodnot bude docházet k příznivým účinkům vyvažujících subsystémů na chod vyvažovaného tělesa, případně mechanismu.

Zdvihová závislost vačkového mechanismu VM_1

Pohyb vyvažované hmoty vačkového mechanismu VM_1 o momentu setrvačnosti $I=0.61\text{kgm}^2$ byl dán zdvihovou závislostí, která je definována matematickým vyjádřením popisujícím sudou goniometrickou funkcí:

$$\vartheta(\varphi) = \sum_{n=0}^2 A_n \cos n\varphi, \quad (4.1)$$

přičemž zdvih $\vartheta_{\max} = 0.138\pi \text{ rad} \approx 25^\circ$ a příslušné koeficienty jsou: $A_0 = 0.2838119\text{rad}$, $A_1 = -0.214737\text{rad}$, $A_2 = -0.069075\text{rad}$.

Zdvihová závislost vačkového mechanismu VM_2

Pohyb vyvažované hmoty vačkového mechanismu VM_2 o momentu setrvačnosti $I=0.25\text{kgm}^2$ byl dán zdvihovou závislostí, která byla rozvinuta do *deseti* složek trigonometrické Fourierovy řady:

$$\vartheta(\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{10} A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi, \quad (4.2)$$

u které zdvih dosahuje hodnoty: $\vartheta_{\max} = 0.138\pi \text{ rad} \approx 25^\circ$. Koeficienty jednotlivých harmonických složek jsou uvedeny v **Tab. 4.1**.

Tab. 4.1: Koeficienty zdvihové závislosti vačkového mechanismu VM_2 a čtyřkloubového mechanismu

n	Vačkový mechanismus VM_1		Čtyřkloubový mechanismus	
	$A_n [\text{rad}]$	$B_n [\text{rad}]$	$A_n [\text{rad}]$	$B_n [\text{rad}]$
0	0.22000782600	–	0.28053850702	–
1	– 0.06377872470	0.01759931902	– 0.25004457540	0.01286576321
2	– 0.12774046858	0.08795262682	– 0.02973463415	0.00096557797
3	– 0.04558871879	0.01309648055	– 0.00115693242	– 0.00376158462
4	– 0.00625070118	– 0.01285389355	0.00022536547	– 0.00090258429
5	0.01573516699	– 0.02502725120	0.00014321680	– 0.00001719955
6	0.00358595209	– 0.00328022802	0.00003213329	0.00002233648
7	0.00122933995	– 0.00287307038	– 0.00000122745	0.00000641149
8	0.00074491081	– 0.00032376486	– 0.00000158545	0.00000098150
9	0.00244553442	– 0.00177713459	– 0.00000027108	– 0.00000017630
10	– 0.00039011696	0.00115592027	0.00000000338	– 0.00000008522

Zdvihová závislost čtyřkloubového mechanismu

Jak již bylo uvedeno výše, je vhodné vzhledem ke stanovení parametrů vyvažujících subsystémů vyjádřit zdvihovou závislost čtyřkloubového mechanismu konečným počtem harmonických složek Fourierovy řady (4.2). Tato závislost byla rozvinuta do *deseti* harmonických složek, přičemž jednotlivé koeficienty mají číselné vyjádření podle **Tab. 4.1**. Největší hodnota výkyvu je: $\vartheta_{\max} = 0.5016511477 \text{ rad} \approx 28.74^\circ$.

4.2 Parametry vyvažujících subsystémů

Ke správné funkci vyvažování je nutné stanovit jmenovité parametry, a sice hmotový moment setrvačnosti J_l vyvažujícího tělesa a torzní tuhost k_{tl} pružného členu, vyvažujících subsystémů pro danou jmenovitou úhlovou frekvenci Ω , zdvihovou závislost $\vartheta(\varphi)$ mechanismu a velikost momentu setrvačnosti I vyvažovaného tělesa. K tomuto účelu poslouží soustava rovnic (3.6) a (3.7). V následujících tabulkách jsou uvedeny konkrétní hodnoty nominálních parametrů vyvažujících subsystémů pro jednotlivé analyzované mechanické soustavy. Pro vačkový mechanismus VM_1 a čtyřkloubový mechanismus byly tyto parametry navrženy pro vyvážení setrvačných účinků *první*, *druhé* harmonické složky a jejich lineární kombinaci. V případě vačkového mechanismu VM_2 jsou vyvažovány jednotlivě *první* až *pátá* harmonická složka a kombinace *druhé* a *páté* harmonické složky, které jsou podle výše definovaných kritérií dominantní svými setrvačnými účinky.

Tab. 4.2: Parametry vyvažujících subsystémů vačkového mechanismu VM_1

l -tá harmonická sl.	k_{tl} [Nm]	J_l [kgm ²]	ψ_{l0} [deg]
1	1438	0.9047	25
2	1272	0.0928	25
1 & 2	1	1.2450	25
	2	0.1534	10

Tab. 4.3: Parametry vyvažujících subsystémů vačkového mechanismu VM_2

l -tá harmonická sl.	k_{tl} [Nm]	J_l [kgm ²]	ψ_{l0} [deg]
1	650	0.4823	15.2779
2	1878	0.2268	14.4319
3	650	0.0197	27.3158
4	350	0.0057	6.7775
5	1100	0.0117	-25.1460
2 & 5	2	0.2272	15.0000
	5	0.0108	-25.0000

Tab. 4.4: Parametry vyvažujících subsystémů čtyřkloubového mechanismu

l -tá harmonická sl.	k_{tl} [Nm]	J_l [kgm ²]	ψ_{l0} [deg]
1	1330	0.7238	28.7712
2	501	0.0334	28.7712
1 & 2	1	0.8265	28.7712
	2	0.0643	10

4.3 Modely pružných elementů vyvažujících subsystémů

Torzní tyče byly ve všech simulačních modelech definovány jako poddajná tělesa. K popisu obecného poddajného tělesa (kontinua) bylo využito metody konečných prvků. V konečnoprvkovém programu NX I-DEAS byly generovány na základě FEM-modelů torzních tyčí tzv. superelementy. Ty jsou charakterizovány svou spektrální a modální maticí Φ_e , přičemž jejich poddajnost je vyjádřena maticí tuhostí $\mathbf{K}(\mathbf{q}_e)$. Matice hmotnosti

$\mathbf{M}(\mathbf{q}_e)$ je zjednodušena zavedením tzv. invariantů setrvačnosti, které jsou počítány z konečnoprvkového modelu příslušného tělesa na základě rozložení hmoty do jednotlivých uzlů, jejich polohových vektorů v nedeformovaném stavu a těch částí modální matice Φ_e , které jsou svázány s příslušnými uzlovými body prostřednictvím vektorů fyzikálních souřadnic $\mathbf{u}_p$ v těchto uzlech. Deformační pole jednotlivých torzních tyčí bylo zpravidla aproximováno 30 deformačními módy.

4.4 Model pohonu

Buzení hnacího členu u všech analyzovaných objektů bylo realizováno hnacím momentem, počítaným pomocí modelu pohonu a řízení. Matematický popis elektromotoru a jeho řízení byl definován v MSC.EASY5 na základě soustavy rovnic (2.10) a (2.11) a podle blokových schémat na **Obr. 2.2** a **Obr. 2.3**.

Pro pohony mechanických soustav byly vytypovány na základě kinetostatických řešení následující synchronní servomotory:

- Siemens 1FT6108-8AF7, jehož napěťová konstanta $K_E = 108 \text{ V/1000 ot/min}$, je určen k pohonu vačkového mechanismu VM_1 a čtyřkloubového mechanismu.
- Siemens 1FT6108-8SF7, jehož napěťová konstanta $K_E = 92 \text{ V/1000 ot/min}$, je určen k pohonu vačkového mechanismu VM_2.

Velikost spřaženého toku ψ_m každého z elektromotorů musí být přepočtena ze znalosti napěťové konstanty K_E podle vztahu:

$$\psi_m = K_E \frac{60}{2\pi 1000 \sqrt{3}}.$$

Dále bylo prostřednictvím kinetostatických simulací zjištěno, že je výhodné zařadit mezi elektromotory a příslušné mechanické systémy mechanický převod s převodovým poměrem $i = 4$. Ten zajistí optimální využití silových a otáčkových dispozic navrhovaných servomotorů pro předpokládaný rozsah pracovních otáček $n_R \in \langle 550, 750 \rangle \text{ ot/min}^{-1}$.

Do matematických modelů servomotorů Siemens 1FT6108 a regulačních struktur v polohovém režimu byly dosazeny číselné hodnoty jednotlivých parametrů dle **Tab. 4.5**.

Tab. 4.5: Parametry motorů Siemens a řídicí struktury

Popis veličiny	Veličina	1FT6108 -8AF7	1FT6108 -8SF7
moment setrvačnosti rotoru servomotoru	$I_{rotor} [\text{kg m}^2]$	0.0291	0.0291
počet pólových dvojic	$p_p [-]$	4	4
elektrický odpor jedné fáze	$R_s [\Omega]$	0.065	0.048
D-složka indukčnosti	$L_D [\text{mH}]$	1.5	1.1
Q-složka indukčnosti	$L_Q [\text{mH}]$	1.5	1.1
spřažený magnetický tok permanent. magnetů	$\psi_m [\text{Wb}]$	0.5954	0.5072
proporcionální složky regulátorů proudu	$K_I [\text{VA}^{-1}]$	5	5
časové integrační konstanty regulátorů proudu	$T_{il} [\text{ms}]$	0.5	0.5
proporcionální složka regulátoru rychlosti	$K_\omega [\text{A s rad}^{-1}]$	5	5
časová integrační konstanta regulátoru rychlosti	$T_{i\omega} [\text{ms}]$	80	80
proporcionální složka regulátoru polohy	$K_\phi [\text{s}^{-1}]$	5	5
zesílení rychlostního feedforwardu	$r_\omega [-]$	1	1

5 Výsledky simulací

Vlivem vyvažování se očekává snížení potřebného příkonu pohonu, dále pak zmenšení silového zatížení samotného mechanismu a zklidnění chodu stroje v ustálené oblasti. Proto byl přínos vyvažování setrvačných účinků mechanismů vyhodnocován na základě časových průběhů mechanických veličin v této oblasti, kterými jsou:

- Potřebný hnací moment M_h pohonu, který je vyjádřen efektivní hodnotou M_{hEff} .
- Otáčky n hnacího členu systému, které jsou vyjádřeny nerovnoměrností chodu δ .
- Největší velikost silové reakce $|R|_{max}$ v mechanismu.

Sledované veličiny M_{hEff} , $|R|_{max}$ a δ u soustav s vyvažováním byly poměrově vyjádřeny vzhledem k soustavě bez vyvažování podle vztahu (3.9). Jestliže veličina b_v nabývá kladných hodnot, je přínos procesu vyvažování pozitivní a vyvažování plní svůj účel.

5.1 Vačkový mechanismus VM_1

Tab. 5.1: Hnací moment vačkového mechanismu VM_1

n_R [ot/min]	Bez vyvažování	Vyvažovaná první h. s.		Vyvažovaná druhá h. s.		Vyvažované první dvě h. s.	
	M_{hEff} [Nm]	M_{hEff} [Nm]	$b_{M_{hEff}}$ [%]	M_{hEff} [Nm]	$b_{M_{hEff}}$ [%]	M_{hEff} [Nm]	$b_{M_{hEff}}$ [%]
550	19.1	14.0	26.7	–	–	26.4	– 38.2
570	20.4	14.4	29.4	–	–	10.4	49.0
580	21.0	14.8	29.5	25.4	– 21.0	6.2	70.5
600	22.4	15.8	29.5	16.0	28.6	1.2	94.6
750	33.2	26.5	20.2	32.7	1.5	22.8	31.3

Tab. 5.2: Nerovnoměrnost chodu vačkového mechanismu VM_1

n_R [ot/min]	Bez vyvažování	Vyvažovaná první h. s.		Vyvažovaná druhá h. s.		Vyvažované první dvě h. s.	
	δ [–]	δ [–]	b_δ [%]	δ [–]	b_δ [%]	δ [–]	b_δ [%]
550	0.017	0.016	5.9	–	–	0.026	– 52.9
570	0.018	0.015	16.7	–	–	0.010	44.4
580	0.018	0.015	16.7	0.022	– 22.2	0.006	66.7
600	0.018	0.015	16.7	0.015	16.7	0.001	94.4
750	0.021	0.017	19.0	0.023	– 9.5	0.017	19.0

Tab. 5.3: Reakce v obecné kinematické dvojici vačkového mechanismu VM_1

n_R [ot/min]	Bez vyvažování	Vyvažovaná první h. s.		Vyvažovaná druhá h. s.		Vyvažované první dvě h. s.	
	$ R _{max}$ [N]	$ R _{max}$ [N]	$b_{ R }$ [%]	$ R _{max}$ [N]	$b_{ R }$ [%]	$ R _{max}$ [N]	$b_{ R }$ [%]
550	8600	6200	27.9	–	–	11200	– 30.2
570	9200	5600	39.1	–	–	5000	45.7
580	9500	5300	44.2	11000	– 15.8	3100	67.4
600	10200	5000	51.0	5800	43.1	600	94.1
750	16100	11600	27.9	16300	– 1.2	11800	26.7

5.2 Vačkový mechanismus VM_2

Tab. 5.4: Kriteria stupně vyvážení vačkového mechanismu VM_2

$n_R = 600 \text{ ot min}^{-1}$	M_{hEff} [Nm]	$b_{M_{hEff}}$ [%]	δ [-]	b_δ [%]	$ R _{max}$ [N]	$b_{ R }$ [%]
Bez vyvažování	43.4	—	0.067	—	16300	—
Vyvažovaná 1 h. s.	40.5	6.7	0.063	6.0	15000	7.8
Vyvažovaná 2 h. s.	36.0	17.1	0.053	20.9	12100	25.8
Vyvažovaná 3 h. s.	40.9	5.8	0.060	10.4	13600	16.6
Vyvažovaná 4 h. s.	42.0	3.2	0.062	7.5	15300	6.1
Vyvažovaná 5 h. s.	34.0	21.7	0.055	17.9	13500	17.2
Vyvažovaná 2&5 h. s.	25.4	41.5	0.039	41.8	10000	38.7

5.3 Čtyřkloubový mechanismus

Tab. 5.5: Hnací moment čtyřkloubového mechanismu

n_R [ot/min]	Bez vyvažování	Vyvažovaná první h. s.		Vyvažovaná druhá h. s.		Vyvažované první dvě h. s.	
	M_{hEff} [Nm]	M_{hEff} [Nm]	$b_{M_{hEff}}$ [%]	M_{hEff} [Nm]	$b_{M_{hEff}}$ [%]	M_{hEff} [Nm]	$b_{M_{hEff}}$ [%]
550	14.1	11.0	22.0	—	—	—	—
570	15.1	9.2	39.1	—	—	56.5	— 274.2
580	15.6	8.8	43.6	30.0	— 92.3	13.5	13.5
600	16.6	8.6	48.2	15.9	4.2	3.6	78.3
750	25.2	16.5	34.5	26.3	— 4.4	16.6	34.1

Tab. 5.6: Nerovnoměrnost chodu čtyřkloubového mechanismu

n_R [ot/min]	Bez vyvažování	Vyvažovaná první h. s.		Vyvažovaná druhá h. s.		Vyvažované první dvě h. s.	
	δ [-]	δ [-]	b_δ [%]	δ [-]	b_δ [%]	δ [-]	b_δ [%]
550	0.012	0.010	16.7	—	—	—	—
570	0.013	0.009	30.8	—	—	0.053	— 307.7
580	0.013	0.008	38.5	0.025	— 92.3	0.012	7.7
600	0.013	0.008	38.5	0.012	7.7	0.003	76.9
750	0.017	0.012	29.4	0.016	5.9	0.012	29.4

Tab. 5.7: Reakce v kinematické dvojici čtyřkloubového mechanismu

n_R [ot/min]	Bez vyvažování	Vyvažovaná první h. s.		Vyvažovaná druhá h. s.		Vyvažované první dvě h. s.	
	$ R _{max}$ [N]	$ R _{max}$ [N]	$b_{ R }$ [%]	$ R _{max}$ [N]	$b_{ R }$ [%]	$ R _{max}$ [N]	$b_{ R }$ [%]
550	5700	3300	42.1	—	—	—	—
570	6200	2900	53.2	—	—	13500	— 117.7
580	6400	2900	54.7	10700	— 67.2	4000	37.5
600	6800	3000	55.9	5600	17.6	1100	83.8
750	10700	7300	31.8	11000	— 2.8	7800	27.1

6 Závěr

Na základě teoretických výpočtů lze konstatovat, že vlivem připojení vyvažujícího subsystému, případně vyvažujících subsystémů, k vyvažovanému mechanismu dojde v ustáleném chodu stroje:

- ke snížení efektivní hodnoty potřebného hnacího momentu celého strojního zařízení,
- ke snížení příkonu stroje,
- ke snížení nerovnoměrnosti chodu mechanického systému,
- ke snížení silového zatížení vyvažovaného mechanismu,
- ke snížení velikosti reakčních sil,
- ke zvýšení dynamické únosnosti samotných členů vyvažované mechanické soustavy
- ke zvýšení dynamické únosnosti prvků, které vytvářejí kinematické propojení mezi jednotlivými členy mechanického systému, jako jsou např. ložiska, kuličkové šrouby, matice kuličkových šroubů, řemenové a řetězové převody, převody ozubenými koly, spojky, atd.

Podmínkou správné funkce soustavy s vyvažováním je její uvedení do stavu ustáleného chodu. V praxi může být dosažení ustáleného stavu takové soustavy problematické, především v tom případě, kdy je vyžadováno, např. z technologických důvodů, razantní najetí na příslušné pracovní otáčky stroje. Tohoto stavu je dosaženo takovým způsobem, že dojde nejprve k rozběhu samotného vyvažovaného systému na žádané pracovní otáčky n_R a poté v definovaném okamžiku T k uvedení vyvažujících hmot z předepsaných počátečních poloh ψ_{i0} do pohybu. V praktické realizaci tato skutečnost znamená, že musí být v každém časovém okamžiku známa poloha pracovního členu ϑ , resp. hnacího členu φ , a vyvažujících hmot ψ_i . Z toho důvodu musí být alespoň jeden z těchto členů vybaven snímačem polohy, přičemž výstupní signál je podle zadaného algoritmu zpracováván řídicím systémem.

Protože vyvažující subsystém, případně vyvažující subsystémy, je navrhován na pažadovanou jmenovitou úhlovou frekvenci Ω stroje, dochází k nejlepšímu stupni vyvážení při této úhlové rychlosti. Stupeň vyvážení především závisí na počtu připojených vyvažujících subsystémů, na typu vyvažované mechanické soustavy a na průběhu zdvihové závislosti pracovního členu stroje. Mimo tuto jmenovitou úhlovou frekvenci dochází ke snížení stupně vyvážení mechanické soustavy, případně dochází k úplné ztrátě příznivého účinku procesu vyvažování. Tento jev nastává při žádané pracovní úhlové rychlosti v oblasti pod jmenovitou úhlovou frekvencí Ω stroje. Z uvedených poznatků plyne, že zmiňovaný způsob vyvažování je vhodný pro taková strojní zařízení, jejichž pracovní proces probíhá v úzce vymezeném intervalu pracovních otáček. Takovými zařízeními mohou být například zkušební zařízení pro dlouhodobé experimentální zkoušky, nebo stroje určené pro velkosériovou produkci.

V rámci zkoumání možností použitelnosti mechanických soustav s vyvažováním setrvačných účinků na širším rozsahu pracovních otáček je navrženo takové provedení, u kterého jsou využívány dva režimy chodu:

- režim s kmitající vyvažující hmotou, resp. hmotami,
- režim s fixovanou hmotou, resp. hmotami, ve stanovené poloze.

Volba režimu provozu je závislá na účinnosti využití vlastností vyvažujícího subsystému, resp. subsystémů, s ohledem na velikost příkonu pohonu a velikosti sil působících v mechanickém systému. Avšak nevýhodou chodu strojového agregátu v režimu

s fixovanou hmotou, resp. hmotami, je zvýšené zatížení rámu stroje od reakční síly torzní tyče, resp tyčí.

K tvorbě matematických modelů bylo využito moderních prostředků počítačové mechaniky. Tento přístup se vyznačuje tím, že kromě vlastního numerického řešení vytvořeného matematického modelu poskytuje též algoritmy pro jeho automatické sestavení na základě popisu geometrie a známých fyzikálních vlastností modelu reálné soustavy. V tomto případě probíhalo řešení v prostředí expertních systémů I-DEAS 12 NX, MSC-ADAMS a MSC-EASY5.

Vzhledem k tomu, že se jedná pouze o teoretickou práci, je nutné poznatky a závěry stanovené na jejím základě ověřit na experimentálním zařízení. Podle uvedeného postupu již proběhl návrh parametrů samotné vyvažované mechanické soustavy a příslušných vyvažujících subsystémů a byl vytipován vhodný elektromotor. Na základě již stanovených parametrů bylo uskutečněno i konstrukční zpracování tohoto stendu, jehož jednotlivé dílce jsou v současné době vyráběny. Souběžně s těmito aktivitami byla též navržena metodika experimentálních měření na tomto zkušebním zařízení. Dále bude podrobně vypracován algoritmus jeho řízení, podle kterého bude naprogramována řídicí jednotka.

Na způsob rozběhu a dosažení ustáleného chodu mechanického systému s vyvažováním setrvačných účinků na pracovní frekvenci byla podána patentová přihláška.

Disertační práce vznikla za podpory projektu v rámci Výzkumného centra „Textil II“ 1M0553.

Seznam použité literatury

- [1] Diblík, M.: *Elektrické pohony pro dynamicky náročné aplikace*, Disertační práce, Technická univerzita v Liberci, Liberec 2006
- [2] Juliš, K., Brepta, R., kol.: *Mechanika II. díl – Dynamika*, Technický průvodce 66, SNTL, Praha 1987
- [3] Koloc, Z., Ondrášek, J.: *Dynamical balancing of mechanical systems*, 14th International Conference Strutex, November 26.-28.2007, pp. 351 – 357, ISBN 978-80-7372-271-5, Technical University of Liberec 2007
- [4] Koloc, Z., Plaček B., Mlynář J., Karel P.: *Způsob vyvažování dynamických účinků hmotného tělesa s periodickým vratným pohybem a zařízením k provádění tohoto způsobu*, přihláška vynálezu, číslo dokumentu: 2440-96, registrační číslo: PS3132CZ
- [5] Koloc, Z., Václavík, M.: *Váčkové mechanismy*, SNTL/ALFA, Praha 1988
- [6] Miláček, S.: *Vybrané kapitoly z dynamiky*, Vydavatelství ČVUT, ISBN 80-01-02770-8, Praha 2003
- [7] MSC-ADAMS. User's Reference Manual. Mechanical Dynamics
- [8] NX I-DEAS. User's Reference Manual.
- [9] Ondrášek, J., Medúna, O. & Petříková, I.: *Modeling of Mechatronic Systems with Focus on Textile Machines*, ATP&P Journal, 1, 2007, pp. 289 – 295
- [10] Ondrášek, J., Medúna, O., Petříková, I., Bušek, M.: *Metodika řízení mechanických systémů se zaměřením na textilní stoje*, Průběžná zpráva o realizaci projektu za rok 2008, Výzkumné centrum „Textil II“, ISRN TUL – VCT2/A(TS) - - 08/11/CZ - - CZ + řízení.systemu, Technická univerzita v Liberci, 2008
- [11] Ondrášek, J., Medúna, O., Petříková, I., Hruš, T.: *Metodika řízení mechanických systémů se zaměřením na textilní stoje*, Průběžná zpráva o realizaci projektu za rok 2007, Výzkumné centrum „Textil II“, ISRN TUL – VCT2/A(TS) - - 08/11/CZ - - CZ + řízení.systemu, Technická univerzita v Liberci, 2007
- [12] Ondrášek, J., Petříková, I.: *Model of Weaving Machine Cotrolled Mechanical System*, X. International Conference ToMM, September 2.-4.2008, pp. 439 – 446, ISBN 978-80-7372-370-5, Technical University of Liberec 2008
- [13] Ondrášek, J., Plaček B.: *Vyvažování přírazového mechanismu tkacího stroje pomocí dynamického absorbérů*, IX. International Conference ToMM 2004, str. 579 – 584, ISBN 80-7083-847-7, Technical University of Liberec 2004
- [14] Rektorys, K.: *Přehled užité matematiky*, SNTL, Praha 1981
- [15] Rydlo, P.: *Řízení elektrických střídavých pohonů*, skriptum TU v Liberci, ISBN 80-7372-117-1, Liberec 2006
- [16] Slavík, J., Stejskal, V., Zeman, V.: *Základy dynamiky strojů*, Vydavatelství ČVUT, ISBN 80-01-01622-6, Praha 1997
- [17] Souček, P.: *Servomechanismy ve výrobních strojích*, Vydavatelství ČVUT, ISBN 80-01-02902-6, Praha 2004
- [18] Souček, P., Bubák, A.: *Vybrané statě z kmitání v pohonech výrobních strojů*, Česká technika – nakladatelství ČVUT, ISBN 978-80-01-04048-5, Praha 2008
- [19] Valášek, M., kolektiv: *Mechatronika*, Vydavatelství ČVUT, ISBN 80-01-01276-X, Praha 1995

Přehled publikovaných prací

- [1] Ondrášek, J., Petříková, I.: *Modeling of Control Mechanic Systems by Using CAX Program Appliances*, 15th International Conference Strutex, December 1. – 3. 2008, pp. 641 – 652, ISBN 978-80-7372-418-4, Technical University of Liberec 2008
- [2] Ondrášek, J., Petříková, I.: *Model of Weaving Machine Cotrolled Mechanical System*, X. International Conference ToMM, September 2. – 4. 2008, pp. 439 – 446, ISBN 978-80-7372-370-5, Technical University of Liberec 2008
- [3] Founě, F., Ondrášek, J., Šidlof, P., Škop, P., Kačor, P.: *Možnosti zlepšení dynamických vlastností servomechanismů s vratným pohybem akumulací energie v úvratích*, X. International Conference ToMM, September 2. – 4. 2008, pp. 221 – 228, ISBN 978-80-7372-370-5, Technical University of Liberec 2008
- [4] Ondrášek, J., Petříková, I.: *Model of Weaving Machine Cotrolled Mechanical System*, Workshop on the Transfer Innovation to Curriculum of Mechatronics, October 8. – 10. 2008, pp. 49 – 56, ISBN 978-80-7372-386-6, Liberec 2008
- [5] Ondrášek, J., Petříková, I., Medůna, O.: *Mechatronic Model of Weaving Loom*, National Conference with International Participation Engineering Mechanics 2008, May 12. – 15. 2008, pp. 170 – 171, ISBN 978-80-87012-11-6, Svatka 2008
- [6] Koloc, Z., Ondrášek, J.: *Dynamical balancing of mechanical systems*, 14th International Conference Strutex, November 26. – 28. 2007, pp. 351 – 357, ISBN 978-80-7372-271-5, Technical University of Liberec 2007
- [7] Ondrášek, J., Medůna, O., Petříková, I.: *Modeling of Mechatronic Systems with Focus on Textile Machines*, International Conference MMaMS 2007, pp. 295 – 301, ISBN 978-80-8073-874-7, Slovensko, Herľany 2007
- [8] Ondrášek, J., Medůna, O. & Petříková, I.: *Modeling of Mechatronic Systems with Focus on Textile Machines*, článek v recenzovaném periodiku vědeckých a inženýrských publikací ATP&P Journal, 1, 2007, pp. 289 – 295, ISSN 1336-5010
- [9] Ondrášek, J., Medůna, O., Petříková, I., Hruš, T.: *Methods of Control Mechanics Systems with Focus on Textile Machines*, 13th International Conference Strutex, November 27. – 29. 2006, pp. 499 – 506, ISBN 80-7372-135-X, Technical University of Liberec 2006
- [10] Ondrášek, J., Plaček B.: *Vyvažování přírazového mechanismu tkacího stroje pomocí dynamického absorberu*, IX. International Conference ToMM 2004, str. 579 – 584, ISBN 80-7083-847-7, Technical University of Liberec 2004
- [11] Kavan, P., Ondrášek, J., Šidlof, P.: *Dynamická analýza rámu tkacího stroje*, IX. International Conference ToMM 2004, str. 421 – 426, ISBN 80-7083-847-7, Technical University of Liberec 2004
- [12] Koloc, Z., Václavík, M., Ondrášek, J.: *Comparison of Standard and New Radial Cam Stepping Mechanisms*, 8th IFToMM International Symposium on Theory of Machines and Mechanisms, 28. 8. – 1. 9. 2001, Romania, Bucuresti 2001
- [13] Ondrášek, J.: *Analýza bidlového a prohozního mechanismu*, Aplikovaná mechanika 2000, 3.4 – 6.4 2000, str. 327 – 330, ISBN 80-7083-388-2, Technická univerzita v Liberci 2000

Vydala: Technická univerzita v Liberci, Hájkova 6, Liberec
Fakulta strojní TU v Liberci
Stav ke dni: 29. 9. 2009
Č.j.: 82/09
Číslo publikace: 55-082-09

