TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI

FAKULTA TEXTILNÍ

Disertační práce

2004

Stanislav Vopička

TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI

FAKULTA TEXTILNÍ

STANISLAV VOPIČKA

DISERTAČNÍ PRÁCE

POPIS GEOMETRIE VYZTUŽUJÍCÍHO SYSTÉMU V TKANINOVÝCH KOMPOZITECH

2004

TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI

FAKULTA TEXTILNÍ

Katedra textilních materiálů

POPIS GEOMETRIE VYZTUŽUJÍCÍHO SYSTÉMU V TKANINOVÝCH KOMPOZITECH

Stanislav Vopička

Školitel: Doc. Ing. Bohumila Košková, CSc., TU Liberec

Školitel specialista: Prof. RNDr. Ing. Miloslav Košek, CSc., TU Liberec

Rozsah práce

Počet stran:	233
Počet obrázků:	117
Počet tabulek:	14

UNIVERZITNÍ KNIHOVNA
TECHNICKÉ UNIVERZITY V LIBERCI

3146115280

KTM
2343-1

U592T

MÍSTOPŘÍSEŽNÉ PROHLÁŠENÍ

Místopřísežně prohlašuji, že jsem disertační práci vypracoval samostatně s použitím uvedených přístrojů, literatury a navržených postupů.

V Liberci, dne 1.1. 2004

Stanislav Vopička

PODĚKOVÁNÍ

Děkuji všem, kteří mi poskytli cenné rady a informace při vypracování disertační práce. Především svým školitelům doc. Ing. Bohumile Koškové, CSc. a prof. RNDr. Ing. Miloslavu Koškovi, CSc. za vynikající vedení a spolupráci, dále prof. Ing. Jiřímu Militkému, CSc., doc. RNDr. Aleši Linkovi, CSc., doc. Ing. Michalu Šejnohovi, Ph.D., RNDr. Janu Pickovi, CSc., doc. RNDr. Petru Volfovi, CSc., pracovníkům Ústavu struktury a mechaniky hornin AV ČR v Praze a všem ostatním, kteří svými radami a připomínkami přispěli ke vzniku této práce.

Stanislav Vopička

OBSAH

1 Úvod 9

1.1 Současný stav řešené problematiky 11

1.2 Způsob řešení 15

2 Kompozitní materiály s tkanou výztuží 19

2.1 Klasifikace kompozitních výztuží 19

2.2 Vliv struktury na výsledné vlastnosti 21

2.3 Základní přístup k popisu 24

2.4 Ideální tkanina – základní pojmy 26

2.5 Periodická jednotková strukturní buňka (PUC) 30

2.6 Popis ideální struktury tkaniny 34

2.7 Popis ideální struktury tkaninového kompozitu 37

2.8 Ideální popis zvlnění podél osy vlákenného svazku 38

2.8.1 Neutrální rovina tkané výztuže 38

2.8.2 Úhel provázání ϕ 39

2.8.3 Úhel sklonu ψ 40

2.8.4 Rozdílový úhel $\Delta\psi$ 40

2.8.5 Výška a délka vazné vlny nebo půlvlny 41

2.8.6 Úhel sklonu a provázání pro harmonický průběh 42

2.9 Popis a aproximace reálného zvlnění vlákenného svazku 42

2.9.1 Harmonická aproximace 44

2.9.2 Polynomická aproximace 45

2.9.3 Ostatní metody 46

2.10 Aproximace funkcí SPLINE 47

2.11 Aproximace pomocí Waveletových funkcí 50

3 Fourierova transformace 53

3.1 Přehled forem Fourierovy transformace 53

3.2 Komplexní čísla 54

3.3 Signály a vlny 55

3.4 Fourierova řada 56
3.4.1 Matematický tvar 57
3.4.2 Elektrotechnický tvar 58
3.4.3 Komplexní tvar 60
3.5 Analogová Fourierova transformace 61
3.6 Trigonometrický polynom 63
3.7 Diskrétní Fourierova transformace 63
3.8 Nedostatky diskrétní Fourierovy transformace 67
3.9 Rozmazání spektra (leakage) 67
3.10 Aplikace na kompozit 70

4 Statistická analýza 73
4.1 Statistické zpracování dat 74
4.1.1 Základní výběrové charakteristiky 76
4.1.2 Typy spojitého rozdělení 79
4.1.3 Použité statistické systémy 87
4.2 Statistická analýza popisu vrstev výztuže 89
4.2.1 Statistika spektrálních čar 89
4.2.2 Oscilátorické rozdělení 90
4.3 Náhodné procesy 93
4.3.1 Popis náhodného procesu 94
4.3.2 Charakteristiky náhodného procesu 96
4.3.2.1 Teoretické charakteristiky 97
4.3.2.2 Stacionarita a ergodičnost 98
4.3.2.3 Empirické charakteristiky 102
4.3.2.4 Odhady charakteristik 104
4.3.2.5 Sdružená hustota pravděpodobnosti 106
4.3.3 Korelace ve frekvenční oblasti 106
4.3.3.1 Spektrum korelace 107
4.3.3.2 Výkonová spektrální hustota 109
4.4 Simulace korelace 112
4.5 Aplikace pro kompozit 115

4.5.1 Korelace a konvoluce ... 115
4.5.2 Diskrétní korelace ... 118
4.5.3 Střednice vlákenného svazku jako realizace náhodného procesu ... 119

5 Experimentální část ... 121

5.1 Popis studovaného kompozitu ... 121
5.1.1 Základní parametry zkoumaných C/C kompozitů ... 121
5.1.2 Postup přípravy studovaných C/C kompozitů ... 124
5.1.3 Příprava nábrusů příčných řezů ... 127
5.1.4 Měřené strukturní parametry C/C kompozitu ... 128
5.2 Metodika vyhodnocení skutečné geometrie výztuže ... 130
5.2.1 Snímání povrchu řezů ... 131
5.2.2 Určení souřadnic ... 132
5.2.3 Aproximace průběhu střednice ... 134
5.2.4 Aplikace aproximovaných průběhů ... 136
5.2.5 Využití strukturních parametrů a statistických charakteristik ... 137
5.3 Přesnost ... 140
5.4 Statistická analýza z hlediska náhodných signálů ... 141
5.5 Seznam použitých přístrojů a vybavení ... 144

6 Výsledky experimentu ... 146

6.1 Volná textilie ... 146
6.2 Tkaná výztuž v kompozitu ... 149
6.2.1 Amplitudové spektrum ... 149
6.2.2 Aproximace geometrie vlákenných svazků ... 152
6.2.3 Distribuce hodnot úhlu sklonu ψ ... 155
6.2.4 Vliv lisovacího tlaku ... 159

7 Statistické zpracování výsledků ... 163

7.1 Amplitudová a fázová spektra ... 164
7.2 Vzájemná korelace vrstev výztuže ... 169
7.2.1 Výpočet vzájemné korelace ... 169
7.2.2 Typické výsledky ... 171

7.3 Statistika náhodného procesu 176
7.3.1 Popis algoritmů a programů 177
7.3.2 Některé výsledky 179

8 Diskuse výsledků 188
8.1 Použité metody studia struktury 188
8.1.1 Popis pomocí Fourierovy transformace 188
8.1.2 Aproximace podélné osy vlákenných svazků 191
8.1.3 Histogramy úhlu sklonu 193
8.1.4 Statistický popis spekter 196
8.1.5 Korelace 198
8.1.6 Náhodné procesy 199
8.2 Příspěvek k poznání struktury 204
8.2.1 Informace ze snímků struktury 205
8.2.2 Studium průběhu střednice 206
8.2.3 Histogram úhlu sklonu 208
8.2.4 Některé závěry 212
8.3 Porovnání s volnou textilií 215

9 Využití výsledků 216
9.1 Virtuální vlákenný svazek 217
9.2 Použití virtuální reality 219

10 Závěr 224

11 Seznam použité literatury 228

Anotace 235

Přehled použitých symbolů a zkratek

C/C kompozit - kompozit uhlík/uhlík

prekurzor - výchozí materiál, látka

5HS - pětivazný atlas (5-harness satin)

8HS - osmivazný atlas (8-harness satin)

tex - jednotka délkové hmotnosti, jemnosti

HM - vysokomodulová vlákna (high modulus)

UHM - ultra vysokomodulová vlákna (ultra high modulus)

E-sklo - elektrotechnické sklo

PUC - základní (jednotková) buňka periodické struktury (Periodic Unit Cell)

DFT - diskrétní Fourierova transformace

LCP - polymer s tekutými krystaly (liquid crystal polymer)

LCD - displej z tekutých krystalů (liquid crystal display)

HS-PE - vysoce pevný polyethylen (high strength)

PBO - poly-para-fenylenbenzobisxazol

PTO - poly-para-fenylenbenzobisthiazol

PMC - kompozit s polymerní matricí (polymer matrix composite)

CMC - kompozit s uhlíkovou matricí (carbon matrix composite)

L - log-normální rozdělení

N - normální rozdělení

W - Weibullovo rozdělení

1 Úvod

V posledních letech se oblast materiálového inženýrství zaměřila na nové trendy ve výrobě a využívání konstrukčních materiálů pro všechna odvětví průmyslu. Vývoj těchto materiálů, kterých existuje celá řada druhů, se v posledních letech orientuje na skupinu tzv. *textilních kompozitů* [6, 25]. Tyto materiály dnes patří mezi nejpokrokovější a nejperspektivnější materiály pro nastupující století či tisíciletí. Vývoj kompozitů podnítily kosmické projekty a náročné letecké konstrukce, které vyžadovaly vysoké měrné hodnoty materiálových vlastností vzhledem k materiálům konvenčním.

Zhruba lze říci, že kompozit je heterogenní systém sestávající ze dvou hlavních složek. Jednou je nespojitě rozložený vyztužující systém, který je fixován druhou, spojitě rozloženou složkou, matricí. Textilní kompozit obvykle obsahuje několik vrstev textilní výztuže umístěných na sebe. Základním typem kompozitů jsou jednoosé lamináty, kde matrice je vyztužena jednosměrně orientovanými nekonečnými vlákennými svazky (pramenci, rovingy), podstatně lepší vlastnosti však vykazuje dvouosý laminát s navzájem zkříženými svazky. Další pokrok zajistily kompozity *tkaninové*, kde výztuží je textilní tkanina. Tkaná textilie se používá ve vazbě plátno, kepr a atlas.

Tkaninový kompozit má v mnoha směrech spoustu výhod oproti klasickému křížově vrstvenému laminátu. U tkaninových lze textilní vazbou zvýšit rovnoměrné rozložení vlákenných svazků ve vrstvách výztuže, což zvyšuje homogenitu vlastností kompozitního systému. Vyztužující systém tkaninových kompozitů je souměrný, což rovněž zlepšuje mechanické vlastnosti. Další výhodou tkaninových kompozitů jsou snížené výrobní náklady z důvodů levnější produkce dvousměrně orientovaných tkaninových výztuží v textilní výrobě.

Kompozitní systémy s tkaninovou výztuží jsou připravovány prepregovou technologií z několika vrstev tkaniny lisováním [3]. V důsledku technologie jejich přípravy je skutečná geometrie celého vyztužujícího systému poměrně složitá a značně odlišná jak od předpokládaného sinusového průběhu [90, 91], tak od geometrie volných tkaných textilií [27, 90]. Při výrobě může docházet k deformaci svazků, mikroskopickému skluzu nebo mechanickému zaklínění jednotlivých vrstev tkaniny.

Struktura kompozitu není zcela pravidelná, v mikroskopickém měřítku dochází na straně jedné k nahromadění vlákenné výztuže (yarn nesting) [91] a na straně druhé ke vzniku mikroobjemů s menším množstvím výztuže. Ukazuje se, že zmíněná změna geometrie výztuže závisí na textilní vazbě – plátno, kepr, atlas.

Struktura má vliv na elastické vlastnosti. O velikosti tahového modulu pružnosti rozhoduje podíl úseků vláken orientovaných ve směru napětí. Vlákenné svazky vykazují zvlnění, tedy modul pružnosti bude záviset na průběhu zvlnění, čili typu použité vazby. Ze tři sledovaných vazeb, plátnové, keprové a atlasové má poslední nejvíce rovných úseků a tudíž by měla mít nejvyšší modul pružnosti. Experimenty tuto skutečnost potvrdily. Za jinak stejných podmínek, tj. při stejném objemovém podílu vláken a stejném lisovacím tlaku, se vyšší zvlnění vlákenných svazků výztuže u kompozitů s plátnovou vazbou projevilo poklesem hodnot dynamického modulu pružnosti o 30 až 35% ve srovnání s atlasovou výztuží 5HS [37, 38].

Vliv struktury potvrzuje i to , že modul pružnosti měřený dynamickou metodou v hlavních směrech výztuže je citlivější na druh vazby tkaniny než na elastické vlastnosti použitého vlákna [13]. Cyklickou impregnací kompozitu vhodnou syntetickou pryskyřicí jakožto prekurzoru matrice lze zvýšit především smykový modul vzorků orientovaných podél hlavních směrů výztuže a tahový modul vzorků orientovaných diagonálně k těmto směrům, tj. pod úhlem 45° [3, 13].

Speciální postavení mezi tkaninovými kompozity mají kompozity uhlík-uhlík, nebo zkráceně C/C kompozity. Výztuží jsou tkaniny z uhlíkových vláken, matricí je skelný uhlík. Jejich velkou předností je to, že uhlíkový řetězec ve vláknech (grafitové molekuly) vykazuje vysoký modul pružnosti a vysokou pevnost, protože roviny atomárních vrstev jsou vysoce orientovány ve směru osy vlákenného svazku. Nežádoucí vlastností C/C kompozitů je nízká odolnost vůči oděru. Tato problematika je doposud cílem vývoje bio-kompatibilních kompozitů pro medicínské aplikace [30].

Technicky důležité a někdy i neobvyklé materiálové vlastnosti kompozitů C/C jsou zejména tyto:

- *tepelné*: záporný součinitel délkové teplotní roztažnosti, vysoká tepelná stabilita, vysoká tepelná vodivost, nehořlavost (do 400°C)

- *chemické*: odolnost vůči korozi, biologická snášenlivost s živými organismy, odolnost vůči chemikáliím, nerozpustnost
- *elektrické*: vysoká elektrická vodivost (pouze grafitová vlákna), odolnost vůči UV záření
- *mechanické*: vysoká pevnost, vysoký modul pružnosti, nízká měrná hmotnost, nízká odolnost vůči oděru, nízký součinitel tření

Důkladná strukturní analýza kompozitních materiálů je důležitým předpokladem pro modelování jejich mechanických vlastností. Z dobrého pochopení vztahů mezi strukturou a vlastnostmi vychází i hledání cest pro dosažení lepšího využití vlastností jednotlivých složek. Z takto naznačeného zásadního významu kvantitativního a srozumitelného popisu struktury tkaninových kompozitů vychází cíl práce:

- Nalezení vhodného experimentálního postupu pro pozorování struktury. Jako optimální se jeví mikrofotografie řezů strukturou a jejich základní zpracování (zajištění řezů, snímání povrchu, obrazová analýza).
- Vytvoření matematického modelu popisujícího skutečnou geometrii tkaninové výztuže a aproximace průběhu vazné vlny v reálném kompozitu.
- Výpočet základních strukturních parametrů tkaninové výztuže, aplikace vhodných metod pro zjištění jejích charakteristik, grafické a početní zpracování.
- Aplikace metod statistické analýzy a náhodných procesů k posouzení nahodilé složky výsledků (statistická rozdělení, korelační funkce).
- Vyhodnocení použitých metod a význam výsledků pro technologii.

1.1 Současný stav řešené problematiky

Tkaná struktura představuje jedno ze základních strukturních uspořádání v oblasti textilních produktů. Jednoduchosti tkaných struktur se začalo využívat v technických aplikacích, neboť právě mechanické vlastnosti výsledného produktu lze poměrně jednoduše predikovat prostřednictvím strukturní jednotky (střídy) textilní vazby. Možnost predikce mechanických vlastností vedla k užití textilií v netextilních technických aplikacích, například tkanin ve funkci výztuže kompozitních materiálů. Ukázalo se, že geometrie výztuže ve formě tkaniny určuje přenos zatěžujících sil v kompozitu a volbou vazby výztuže lze ovlivňovat jeho mechanické vlastnosti.

V tuto chvíli se otevřela nová oblast kompozitní vědy, kdy byla položena otázka „*Do jaké míry lze vlastnosti kompozitu predikovat a jaký vliv na jeho vlastnosti má vazba vyztužující tkaniny*". V prvopočátku se při tvorbě modelů vycházelo ze základních poznatků struktury volné textilie. Výchozím bodem popisu charakteru tkaných vazeb byla jejich *periodická struktura.* Elementární buňka, která je základním prvkem struktury, se používá např. při modelování jejich fyzikálních vlastností. K jejímu určení bylo však nejprve nutné popsat tvar vlákenných svazků. Představy o geometrii provazujícího vlákenného svazku byly zpočátku velmi idealizované a nebyly v dobrém souladu se skutečností. Další geometrické modely již ve svých konstrukcích vycházely z modelů minulých a určitým způsobem se snažily vylepšit jejich nedostatky.

Přesně vzato, je nutno rozlišovat mezi geometrickými a fyzikálními modely. Geometrický model vychází z určité představy o průběhu provazujících soustav a snaží se ji popsat jednoduchými geometrickými prostředky. Fyzikální model kromě geometrie struktury uvažuje i silové působení ve struktuře, interakci svazků, která se projeví změnou tvaru svazků. Jeho úkolem je optimálně vystihnout tvar základní strukturní jednotky a silové působení uvnitř ní. Někdy se naopak vychází ze silového působení a geometrie se mu přizpůsobuje. Prakticky se však mezi fyzikálním a čistě geometrickým modelem nedělají rozdíly, což je spíše na škodu věci.

Jeden z prvních a nejznámějších geometrických modelů je *Peirceův model provázání* formulovaný v polovině třicátých let minulého století.

Pro odvození základních rovnic popisujících provázání vychází z několika předpokladů [69].

- Příze je kruhového průřezu, deformace je zanedbána.
- Průběh vazné vlny se skládá pouze z přímkových a kružnicových úseků.
- Příze je dokonale ohebná bez působení vnitřních sil.

Snadno lze tímto způsobem modelovat základní vazby, plátno nemá vodorovný úsek, kepr a atlas jej obsahují, u atlasu je delší. Původní *Peirceovo odvození matematických vztahů* [69, 21] vycházející z aproximace tvaru vazné vlny obloukovými a přímkovými úseky vedlo k nesouladu se skutečností, například pro úhly provázání ϕ.

Odlišný přístup měl *Olofssonův model provázání* [69, 21], který byl odvozen z tvaru ohybové čáry vetknutého nosníku, jde tedy o fyzikální model. Vycházel z předpokladu, že v každém bodě vlákenného svazku existuje rovnováha mezi výsledným momentem vnějších sil a momentem vnitřních sil. Deformace vlákenného svazku je z části trvalá a do určité míry vratná [27, 47, 67].

Olofssonův model odvozený z tvaru ohybové čáry vetknutého nosníku naráží ve svých vztazích na řadu teoretických problémů:

- Do jaké míry je možné předpokládat bodově působící reakci ve vazném bodě?
- Jsou příčné řezy při ohybu rovinné nebo se deformují?
- Platí úměra mezi křivostí odlehčeného a zatíženého nosníku?

Hlavní nevýhoda tohoto modelu je v tom, že k určení osy vlákenného svazku je nutno použít eliptických integrálů, pro které není analytický výraz, jsou pouze tabelovány. V současné době to však již zásadní problém není, protože je lze vypočítat. Není to však triviální problém, znalost příslušné speciální matematiky je žádoucí.

Olofsson také zjistil, že tečny ohybové čáry mají ve vzdálených bodech charakter asymptot k hyperbole. Na základě tohoto principu byl odvozen tzv. *hyperbolický model provázání* [69], který není možné prakticky využít pro modelování celé délky vazné vlny. Význam těchto modelů je v současné době již jen historický. Kompletní popis těchto modelů je obsažen v disertační práci Sirkové [76] a v práci prof. Noska [69].

Další geometrické modely se liší zejména tím, jakým způsobem popisují osu vlákenného svazku. Nejjednodušší je použít *sinusového modelu* [49, 57-61, 70], který svým charakterem a tvarem dobře kopíruje křivku provazující nitě volné textilie. Z matematického hlediska se jedná o velice jednoduchý model. Souhlas se skutečností závisí na míře zvlnění, čím více je zvlněná nit, tím horší souhlas. Při větším zvlnění dochází k výraznější deformaci a jednoduchá sinusová funkce již průběh nevystihne dostatečně věrně. Velkou předností tohoto popisu je názorný geometrický význam všech parametrů. Tento přístup je využitelný u jednoduchých struktur, kde je zhruba zachován periodický charakter provazujících multifilů, zejména u textilie s plátnovou vazbou. Pro další tkané struktury je využitelnost metody omezena.

Jednoduchá aproximace, kterou ve své práci rozpracovali Jortner [29] a Yurgartis [91], je využití *polynomické funkce*. Jedná se o velmi jednoduchý způsob aproximace, kdy je průběh osy vlákenného svazku aproximován polynomem *n*-tého řádu. Základní nevýhodou oproti předchozímu přístupu je to, že koeficienty polynomu nemají žádnou názornou interpretaci, jsou to jen čísla a výslede uvidíme teprve z grafu. Předností práce je uvažování skutečného geometrického průběhu svazků výztuže, nedostatkem pak omezení pouze na jednu vaznou vlnu.

Další kategorie modelů vychází z teoreticky dvourozměrné periodické struktury textilií. Vycházejí ze skutečnosti, že základním strukturním elementem tkaniny je periodická jednotková buňka – *Periodic Unit Cell (PUC)*. Strukturu buňky získávají z průběhů vlákenných svazků, navazují tedy na předchozí modely. Tkanina je tvořena periodickým opakováním (translací) jednotkové buňky. Modelová představa *PUC* je základem pro tvorbu fyzikálně-geometrických modelů [6, 22, 25, 56, 70, 94].

Základem modelů kompozitů s tkanou výztuží jsou modely tkaniny, zejména s jednotkovou buňkou, upravené tak, aby vystihly základní rys kompozitu – vrstvy kladené na sebe. Ve zjednodušené formě se tedy mohou použít i na volné textilie. Jedny z prvních modelů struktury kompozitních materiálů, jejichž úkolem byla zejména předpověď elastických vlastností, jsou:

- mozaikový model,
- model zvlněných vláken,
- model založený na efektu přemostění.

Nejjednodušším modelem je *model mozaikový* [25], který vystihuje skutečné provázání tkaniny rozmístěním vazných bodů. Model považuje vazný bod za průnik dvou soustav přímých vláknových svazků. Odpovídá tedy přibližně křížově vrstvenému laminátu, neuvažuje zvlnění vazných nití [22, 24]. Není vhodný pro plátnovou vazbu, velmi přibližně vystihuje keprovou a atlasovou vazbu.

Druhý model, tzv. *model zvlněných vláken* [25], vychází z mozaikového modelu, ale navíc uvažuje zvlnění osnovy a útku ve vazném bodě. Model předpokládá sinusový průběh zvlnění a nejlépe vystihuje plátnovou vazbu, ostatní vazby s teoreticky rovnými úseky popisuje hůře.

Posledním modelem je *model přemostění* [25], který je kombinací obou předchozích přístupů. Ve vazném bodě uvažuje sinusové zvlnění, na které navazují rovné úseky. Délkou rovných úseků lze vystihnout základní geometrii všech tří vazeb.

Tyto modely nacházejí uplatnění především pro predikci mechanických vlastností kompozitů s tkanou výztuží a to i pro vazby obsahující volně kladené, neprovázané (flotující) úseky, tj. kepr a atlas. Při použití je nutno rozlišovat geometrické a efektivní parametry modelu. Geometrické vycházejí ze skutečné struktury, efektivní pak z nejlepšího souhlasu předpovědi a experimentu, ovšem za předpokladu, že materiálové vlastnosti složek struktury jsou známy s dostatečnou přesností. Pak je možno, např. pomocí nelineární optimalizace, o níž je zmínka například v části 7.2.2, určit parametry pro nejlepší shodu. Z porovnání geometrických a efektivních parametrů lze posoudit úspěšnost modelu. Výsledky jsou dosti citlivé na délky sinusového a rovného úseku, protože zatkané úseky (sinusový průběh) mají vyšší lokální tuhost než oblasti neprovázaných úseků.

S rostoucím významem kompozitních materiálů se objevují počítačové balíky pro geometrické modely. Jedná se především o systém WiseTex týmu profesora Lomova z Katholicke Universiteit Leuven v Belgii, který slouží k popisu deformačních charakteristik tkanin v základní strukturní buňce. Předpokládá se však ideální tkanina. Vstupem je popis geometrických a fyzikálních vlastností vlákenných svazků, výstupem jsou 3D obrázky volné tkaniny, její elastické a další vlastnosti [52, 54, 64, 87].

Všechny zmíněné modely vycházejí z idealizovaných představ o geometrii tkaninové výztuže a kromě práce [91] žádný další přístup nevychází z experimentálních dat, popisujících reálnou strukturu. Práce Yurgartise [91] využívající polynomickou aproximaci podnítila řešitele grantového projektu GAČR 106/96/0596 k návrhu původní metody popisu geometrie zvlnění vlákenných svazků pomoci *diskrétní Fourierovy transformace (DFT)* [32, 34, 84].

Metoda popisu pomocí DFT spočívá v rozkladu skutečného průběhu střednice vlákenného svazku na jeho harmonické složky. Její další rozpracování a ověření jejích možností se stalo tématem předložené práce. Na Technické univerzitě v Liberci se asi s ročním časovým odstupem začalo používat zhruba podobného přístupu při modelování průběhu příze ve volných textiliích. [76, 77, 78].

Základem metody je však analytická Fourierova řada, jejíž koeficienty se určují podle definice analytickou integrací. To vede k zásadnímu omezení, protože integrál lze vypočíst jen pro velmi jednoduché matematicky popsané průběhy (obdélník, trojúhelník), které se skutečným průběhem příze prakticky nesouvisejí. Pravděpodobně z tohoto důvodu se v těchto pracích volí opačný postup, předpokládá se spektrum tvořené několika harmonickými a z něj se odvozuje průběh osy svazku. Tyto práce též uvádějí skutečný průběh příze ve formě fotografií řezů. Jak se z něho získá spektrum či aproximace, nelze posoudit, protože v citovaných publikacích [76, 77, 78] není metoda ani zhruba popsána. Totéž se týká publikovaného dvourozměrného spektra textilií.

Z tohoto neúplného výčtu modelů je zřejmé, že většinu modelů je možné využít pro modelování a výpočet strukturních a fyzikálních parametrů u volných tkaných textilií s jednoduchou plátnovou vazbou mírně zvlněnou, tedy ideální textilie. Pro složitější vazby se již shoda se skutečností zhoršuje. U kompozitů, kde v technologickém procesu dochází k výrazné deformaci vlákenných svazků, jsou většinou již nepoužitelné. To byl jeden z důvodů, proč jsme se pokusili o nové geometrické modely struktury.

1.2 Způsob řešení

Na počátku jsme vycházeli na základě studia literatury ze známých modelů a pokusili se aproximovat průběh osy vlákenného svazku v kompozitu polynomem, což se nám jevilo nejschůdnější. Brzy jsme však přišli na mnohé záludnosti této aproximace při použití vysokého řádu polynomu, což bylo vzhledem ke kvaziperiodicitě svazku nutné. Okamžitě jsme ji opustili. Některé podrobnosti lze najít v části 2.9.2.

Další z metod navazuje zcela přímo na metodu předešlou, k aproximaci se používá polynomické funkce *spline*, tvořené standardně polynomem třetího stupně. Dá se dosáhnout dobré aproximace, avšak zásadní nevýhodou je to, že neexistuje žádná přijatelná geometrická interpretace koeficientů polynomu. Tuto metodu blíže popisujeme v následující kapitole (sekce 2.10). Na toto téma byla autorem předložené disertace vypracována i diplomová práce [90].

Průběh osy vlákenných svazků je pro jednoduché vazby za ideálních podmínek periodický a v některých případech blízký harmonickému. To platí zejména pro volné textilie.

V kompozitech se poruší především harmonický průběh, pokud předtím existoval, ale dochází i k narušení periodicity, každá perioda, či z textilního hlediska vazná vlna, je poněkud jiná. V teorii obvodů se obecné periodické průběhy úspěšně zpracovávají pomocí Fourierovy řady. Byla tedy nasnadě otázka, zda by tento přístup nebylo možné aplikovat i na strukturu kompozitů. S ohledem na diskrétní charakter dat (souřadnice vlákenného svazku jsme odečítali s určitým, i když s malým, krokem – 0,01mm) se jako optimální hodí metoda *diskrétní Fourierovy transformace – DFT* [32, 34, 84].

Princip metody DFT spočívá v rozkladu obecného průběhu osy vlákenného svazku na jeho harmonické složky. Každé z harmonických přísluší jedna čára amplitudového a fázového spektra. Již spektrum samotné dává určité kvalitativní údaje o struktuře. Ve spektru je vždy jedna z harmonických nejvýznamnější, z ní lze přibližně určit délku vazné vlny. Na základě rozložení amplitud v okolí dominantní harmonické lze usuzovat na zkreslení harmonického průběhu. Dále lze výběrem významných harmonických volit různý stupeň aproximace průběhu osy vlákenného svazku. Pokusy jsme zjistili, že pro uspokojivou aproximaci postačuje pět až patnáct nejvýraznějších harmonických v závislosti na složitosti aproximovaného průběhu [28, 31, 34, 42, 84]. Typické výsledky spekter, jejich vyhodnocení i možnosti aproximace uvádíme v různých částech kap. 6.

Jako všechny výrobní procesy, i proces výroby kompozitu je zatížen systematickou i nahodilou chybou. Nahodilá chyba se projeví výrazně zejména ve struktuře. Proto je nutno respektovat tento jev při vyhodnocování výsledků. Strukturu jsme tudíž snímali na mnoha vzorcích těchto výrobků, které by měly být teoreticky identické. Výsledky jsme pak zpracovali statistickými metodami. Z teoretického hlediska jsme průběh vlákenného svazku považovali za náhodný proces. Výsledky jsou v kap. 7.

V předchozích částech jsem naznačili základní obsah některých kapitol, nyní následuje systematický výčet:

- Kap. 2 až 4 lze považovat ze teoretické. Některé z nich možná obsahují všeobecně známé věci v širším rozsahu, než je nezbytné. Vložili jsme je na doporučení vedlejšího školitele zejména z toho důvodu, že tato práce by měla sloužit též jako studijní materiál pro diplomanty a doktorandy, kteří budou na ni navazovat při řešení mnohých mezioborových problémů textilního materiálového inženýrství.

- V kap. 2 je popsána výroba kompozitu a jeho struktura. Zejména jsou však uvedeny parametry struktury, které se v dalších částech vyhodnocují. Na jejím konci je přehled aproximačních metod.
- Kap. 3 podrobně popisuje všechny formy Fourierovy transformace. Ke konci je popis DFT a zejména upozornění na úskalí při jejím použití.
- Kap. 4 je věnována nahodilé složce výsledků. První část se zabývá statistickým popisem náhodné veličiny, druhá se zaměřuje na náhodné procesy. V této kapitole jsou však i části aplikované přímo na studovaný kompozit.
- Experimentální část je v kap. 5 až 8. S ohledem na rozsah experimentu a jeho výsledků se zaměřuje pouze na popis a zhodnocení metodiky experimentu, na zpracování dat a na prezentaci typických výsledků.
- Kap. 5 popisuje experiment, jednak přípravu kompozitu, jednak snímání jeho struktury. Dále jsou zde nastíněny základní i specifické metody zpracování obrazových dat.
- Kap. 6 uvádí typické výsledky. Začíná prezentací spekter, pokračuje popisem efektivní aproximace svazku, uvádí distribuce úhlu sklonu a končí hledáním souvislostí mezi strukturou a technologickým procesem.
- Kap. 7 se zabývá statistikou. V kratší první části obsahuje statistická rozdělení spekter, zbývající část se zabývá náhodnými procesy. Velký praktický význam má zejména prezentace výsledků korelace.
- Kap. 8 diskutuje dosažené výsledky jak z hlediska metodického (přednosti, nedostatky a omezení použitých metod), tak z hlediska přínosu k poznání struktury.
- Kap. 9 popisuje zajímavou a nestandardní aplikaci získaných výsledků a v závěrečné kapitole je shrnut význam práce.

2 Kompozitní materiály s tkanou výztuží

V této kapitole vysvětlíme poměrně ucelený a na druhé straně všeobecný přehled současného stavu znalostí o struktuře textilních materiálů a kompozitů na nich založených. Některá z těchto témat pak v dalších kapitolách podrobně rozpracujeme a sumarizujeme nové poznatky.

2.1 Klasifikace kompozitních výztuží

Textilní výztuže pro kompozitní materiály se využívají především díky flexibilitě, nízké hmotnosti a dostatečné pevnosti textilií. Kompozity vyztužené plošnou textilií jsou nejčastěji připravovány ve formě laminátů. Jednotlivé textilní vrstvy – *laminy*, jsou prosyceny prekurzorem matrice, nakladeny na sebe a zalisovány, případně tepelně zpracovány. Moderní třírozměrné textilní výztuže výrazně omezují delaminaci mezi vrstvami (tj. oddělení vrstev tkaninového laminátu), neboť jejich trojrozměrná struktura vzniká provázáním rovnoběžných textilních vrstev dalším systémem vlákenných svazků, vedeným kolmo k rovině těchto vrstev [6, 12, 25].

Strukturu první generace kompozitů s textilní výztuží tvořilo několik na sobě uložených vrstev složených z matrice a jednosměrně orientovaných nekonečných vláken. Použití těchto struktur se ukázalo být velmi efektivním; vlákna byla ukládána tak, aby ve výsledné struktuře ležela ve směru zatížení (působící síly). Současně s tím se však objevila řada problémů. Oba směry kolmé k osám těchto vláken vykazovaly velmi nízké tuhosti a pevnosti.

Aby se zabránilo těmto problémům, nabízela se dvě řešení:

- použít vícesměrnou laminu,
- použít plošnou textilii jako vyztužující prvek.

Problémy nízkých pevností a tuhostí v rovině vrstvy se podařilo podstatně snížit aplikováním 2D textilie. Studium celkové vnitřní struktury těchto kompozitů vedlo k odhalení *interlaminárních* a *intralaminárních* sil a následně k odhalení problému delaminace kompozitu, která se objevovala i u kompozitů s plošnou textilní výztuží.

Podrobným studiem příčin vzniku delaminace byly odhaleny rizikové faktory, které vedou k poruchám ve struktuře kompozitů vyztužených plošným vlákenným systémem:

- v důsledku příliš vysoké tloušťky laminátu,
- při únavovém zatěžování,
- dynamickým účinkem působící síly,
- rázovým zatěžováním,
- po vzniku trhliny nebo další poruchy ve struktuře,
- při koncentraci napětí.

Podle směru kladení výztuže lze kompozity klasifikovat jako systémy, vyztužené:

- jednosměrně (1d) – vláknové,
- dvousměrně (2d) – tkaninové nebo křížově vrstvený laminát,
- třísměrně *(3d)* – laminát vrstvený pod úhly (0°, 45°, 90°),
- vícesměrné (multiaxiální) – laminát či textilie vrstvené pod úhly (0°, ±45°, 90°).

Současné textilní výztuže, plošné (2D) a objemové (3D), lze z hlediska struktury a technologie výroby rozdělit na [65]:

- tkané
  - 2D
    - pravoúhlé (s platnovou, s keprovou a atlasovou vazbou)
    - triaxiální (trojosé)
  - 3D
    - šikmo protkané (vrstva k vrstvě)
    - pravoúhle setkané
    - sandvičově tkané
- pletené
  - osnovní pleteniny (2D, 3D)
  - zátažné pleteniny (2D, 3D)
- splétané
  - 2D
    - dvouosé prýmky
    - trojosé prýmky
  - 3D
    - hadicové prýmky
    - čtvercové (čtvercové ujímané a další)
- 3D netkané
  - vrstvená vlákenná rouna
  - vpichované s vloženou osnovou nebo útkem
  - adhezně vázané
  - kolmo kladené

Největší využití mají výztuže dvousměrné, neboť se používají k výrobě jednovrstvých i vícevrstvých kompozitů. Jednovrstvé kompozity se nepoužívají přímo pro technickou aplikaci, ale z převážné většiny se používají pro přípravu *prepregů* (polotovar). Prepregy jsou impregnované laminy, připravené prosycením jedné vrstvy vyztužujícího systému matricí nebo jejím prekurzorem. Vyztužující systém je tvořen úhlově kladenými vlákennými svazky či textilií zvolené vazby (2D).

Výztuž kompozitů používaná v konstrukčních aplikacích je většinou tvořena z několika vrstev prepregů. Takovýto vrstevnatý kompozit tvořený z několika jednovrstvých vláknových nebo tkaninových lamin se nazývá laminát. Orientace každé z lamin výztuže je určena dle konstrukčního návrhu. Laminy mohou být ze stejného či různého materiálu.

V případě rozdílných materiálů výztuže mluvíme o *hybridních kompozitech*, které jsou projektovány ke specifickému účelu využití. Takovéto kompozity mohou jako vyztuž použít například kombinaci skleněných a grafitových vláken. Umístění vláken v kompozitu se řídí dle požadavku na výsledný materiál. Grafitová vlákna jakožto zástupce vysoce tuhé a pevné kompozitní složky mohou být umístěna ve vnějších vrstvách, kde je tahové napětí při ohybu nejvyšší.

Nevýhoda těchto kompozitů je případná špatná adheze mezi vyztužujícími vrstvami a matricí, a následné nebezpečí delaminačního procesu, který má za následek zborcení kompozitní struktury a degradaci mechanických vlastností. Předcházet tomuto jevu napomáhají povrchové úpravy, jejichž jedním z úkolů je zvýšit adhezi obou materiálů a zajistit vznik co nejpevnější chemické vazby [1, 79].

2.2 Vliv struktury na výsledné vlastnosti

Textilní materiály patři z hlediska struktury mezi velmi komplikované. Všeobecně se uvádějí tři základní řádově odlišné hierarchické úrovně struktury [52]. Ve zjednodušené podobě, avšak s dostatečně vypovídající hodnotou, lze úrovně struktury popsat takto:

- Mikrostruktura, která z hlediska textilního je tvořena elementárními vlákny, jež tvoří základní stavební jednotky všech textilních útvarů. Charakteristickým rozměrem je průměr, který je řádu μm.

- Mezostruktura, jejímž typickým představitelem jsou vlákenné svazky, které obsahují tisíce vláken. V porovnání s vlákny je její charakteristický rozměr (efektivní průměr) o několik řádů vyšší.
- Makrostruktura obsahující tisíce vlákenných svazků. Typickým příkladem jsou tkaniny či pleteniny. Typický rozměr, délka či šířka, je zpravidla tisícinásobkem průměru vlákenného svazku.

Toto dělení je ideální a typické zejména pro textilní materiály [52], je však možné jej použít i na moderní aplikace, mj. kompozity. Z hlediska kompozitního inženýrství [6, 16] je základním mikrostrukturním elementem tzv. *roving* (pramenec, vlákenný svazek neboli multifil), neboť elementární vlákno se v technické praxi jako výztuž nepoužívá. Mezostrukturou je pak struktura vyztužující textilie a makrostrukturou je vlastní laminát (vrstevnatý kompozit).

Samozřejmě, toto dělení je velmi hrubé, každá úroveň se dá rozdělit do několika dílčích úrovní. Podrobnější popis lze nalézt ve specializovaným publikacích. Ve světě se podrobně celkovým popisem textilních struktur zabývá například Lomov na KU Leuven v Belgii [52-54, 64], u nás pak Šejnoha ze stavební fakulty ČVUT [94].

Z hlediska vlastností a aplikací má zásadní význam *synergický efekt*, který v nejjednodušší formě říká, že veškeré vlastnosti struktury vyšší úrovně nejsou jen prostým součtem vlastností jejích nižších součástí. Díky různému vzájemnému uspořádání obrovského množství prvků nižší úrovně jsou výsledné vlastnosti jiné a často dosahují neočekávaných hodnot, objevují se i vlastnosti nové.

Výsledné vlastnosti jsou výslednicí dvou efektů:

- Materiálové vlastnosti složek nižší úrovně, které se na sledované vlastnosti projeví jako jejich součet či násobek, pokud jsou shodné.
- Struktura, tj. provázání složek nižší úrovně, která výslednou vlastnost může výrazně ovlivnit oběma směry a tu považujeme za hlavní příčinu synergického jevu.

Právě na synergickém efektu, tj. vlivu struktury je založeno praktické využívání textilních výrobků. Protože struktura rozhodujícím způsobem ovlivňuje výsledné vlastnosti, je nutno ji uvažovat ve všech typech modelů a čím složitější model je použit, tím přesnější znalost struktury je nutno zajistit.

Struktura na různé úrovni má opravdu rozhodující vliv na materiálové vlastnosti. Existují dva krajní typy materiálů:

- Izotropní, které mají vlastnosti ve všech směrech stejné.
- Anizotropní, u nichž se základní vlastnost systematicky (zákonitě) mění se směrem, v němž je měřena. Daleko zajímavější však je to, že tato závislost vykazuj různý stupeň symetrie v závislosti na struktuře.

Jako typické anizotropní materiály jsou uváděny monokrystaly, díky pravidelnému upořádání atomů, což je nejnižší stavební jednotka struktury. Textilie se vyznačují rovněž pravidelným uspořádáním struktury, jedná se tedy o zobecněné krystaly. Vykazují rovněž anizotropii svých vlastností, ale ne tak přesně a reprodukovatelně jako monokrystaly. Samozřejmě, mezi oběma krajními možnostmi existuje řada přechodů, nejznámější jsou polykrystaly, typické příklady polykrystalů jsou kovy, složené z mnoha velmi malých naprosto náhodně orientovaných krystalitů. Další technicky důležitý případ tvoří textury, což jsou polykrystaly, avšak krystalky mají přednostní orientaci, nejsou tedy uspořádány zcela náhodně. Zmiňujeme se zde o nich proto, že uhlíková vlákna C/C kompozitu jsou poměrně vysoce uspořádané textury.

Tkaninové kompozity, kterými se v této práci zabýváme, jako všechny jiné kompozity obsahují jak vyztužující textilní složku - *reinforcement*, tak pojivo – *matrix,* matrici. Vyztužující složkou je tkanina. S hlediska výše uvedeného dělení o nich je možné zhruba říci, že:

- V hierarchii struktur patří tkaninové kompozity do makrostruktur, viz například dělení podle Lomova [52, 53].
- Synergický efekt se projevuje zejména v důsledku vlastností a uspořádání vrstev výztuže a interakcí na rozhraní mezi pojivem a výztuží.
- Pojivo je izotropní, výztuž anizotropní, kompozit by měl vykazovat anizotropní vlastnosti.

2.3 Základní přístup k popisu

Matematický popis struktury materiálu nazýváme geometrickým strukturním modelem. Reálná struktura jakéhokoliv materiálu je příliš složitá na to, aby ji bylo možné přesně matematicky popsat. Důvodů je několik, zejména v důsledku zákonů termodynamiky, technologických procesů a dalších jevů každá struktura nutně obsahuje nahodilou složku.

U kompozitů jsou to nepravidelnosti v geometrii a rozložení výztuže a také strukturní defekty (póry nebo trhliny). Každá realizace struktury se v důsledku této nahodilé složky bude poněkud lišit od ostatních. Proto naprosto přesný popis struktury konkrétní realizace nemá ani zvláštní odborný význam. Na druhé straně současné možnosti teorie, počítačů i experimentální techniky (rozsah a automatizace měření) umožňují zahrnout do modelu i nahodilou složku.

Význam geometrických modelů struktury je v tom, že jsou východiskem pro strukturní modely, z nichž se odhadují nebo počítají materiálové vlastnosti, případně jsou východiskem pro projektování materiálů. Cílem je tedy získat dostatečně věrohodný popis struktury a z něho odvodit odpovídající model.

K popisu či modelování struktury je tedy nutno přistupovat různě podle toho, jaké informace co do rozsahu a přesnosti požadujeme. Proto při popisu struktury obecně uvažujeme rozdílné modely, jimiž jsou:

- ideální struktura,
- reálná struktura,
- virtuální struktura.

Ideální struktura postihuje základní zákonitosti reálné struktury a zanedbává mnoho vlivů, často je to pouze výsledek teoretických modelů. Nemusí být tedy založena na experimentu, např. fotografii řezu materiálem. Nahodilá složka je vyloučena. Jejím nejdůležitějším rysem je jednoduchost a obvykle i dokonalá periodicita, která je důsledkem vyloučení nahodilé složky. Bývá základem jednoduchých modelů pro odhad materiálových vlastností.

Reálná struktura je struktura získaná z experimentu, obvykle to jsou fotografie řezů materiálem. Obsahuje tudíž i nahodilou složku, není tedy přesně periodická. Uvažuje i technologické vlivy, které mohou např. vést ke změně tvaru základních jednotek struktury oproti tvaru předpokládanému v ideálním modelu. Nevýhodou je, že se liší od řezu k řezu i na témže vzorku. Navíc z důvodu experimentálních omezení neobsahuje všechny nezbytné informace. Z fotografie jednoho rovinného řezu lze jen obtížně usuzovat na prostorovou strukturu. Na druhé straně lze z jediného vhodně vybraného řezu získat poměrně přesné základní informace o struktuře. Nicméně i přes tato omezení stojí reálná struktura v porovnání předchozím typem na vyšší úrovni a může sloužit k získání přesnějších modelů.

Nahodilou složkou struktury lze popsat pouze statisticky. Parametry struktury se považují za statistické veličiny a snahou je určit nejen jejich základní statistické údaje (parametry) jako je střední hodnota a směrodatná odchylka, ale úplný statistický popis (charakteristiky), což je statistické rozdělení. Určení statistického rozdělení pak vyžaduje velké množství dat, v tomto případě je to velké množství náhodně vybraných řezů. Jako minimální rozsah se pro statistické zpracování uvádí kolem 500 řezů, což je experimentálně velice náročné. Ze souboru dat lze pak pro základní parametry struktury určit jejich statistická rozdělení.

Pomocí generátorů náhodných čísel pro takto určená statistická rozdělení je možné počítačem generovat další struktury, přesněji řezy, které by měly být nerozlišitelné od původních. Mluví se o generování virtuální struktury [34, 35, 36, 85], z níž lze tvořit modely blízké modelům reálné struktury v téměř neomezeném množství. V případě vlákenných svazků ve vyšších strukturách, například. tkaninách, by jednotlivým úrovním modelů mohly odpovídat:

- Ideální vlákenný svazek, který je východiskem řady teoretických modelů [55], z nichž nejcitovanější je asi Peircův model [22, 25, 69, 76]. Tyto modely jsou popsány poměrně jednoduchou matematickou funkcí, vlákenný svazek je dokonale periodický, má neměnný kruhový průřez.
- Reálný vlákenný svazek se získává z fotografií řezů například kompozitem. V důsledku technologického zpracování dochází k deformacím tohoto svazku. Průběh kolem podélné osy není již dokonale periodický, průřez není kruhový, ale například čočkovitý, a jeho plocha se mění.

V zásadě jsou možné dva přístupy:

a) Náhodné řezy strukturou, nebo pouze jeden řez, které umožní podrobně popsat jen geometrii, jež na řezu dominuje, např. průběh podélné osy svazku. Pro jeden vzorek získáme geometrické údaje jen pro tento konkrétní svazek. Pokud je řezů opravdu mnoho (alespoň stovky) a jsou skutečně nahodilé i co do směru, lze v principu popsat i prostorovou geometrii, ale jen statisticky, buď pomocí statistických rozdělení (charakteristik), nebo jen prostřednictvím základních statistických parametrů (střední hodnota, směrodatná odchylka).

b) Pomocí systematicky snímaných rovnoběžných řezů (obdoba počítačové tomografie) lze získat prostorový model vlákenného svazku, který k základním rovinným údajům poskytne další důležité prostorové informace. V tomto případě se jedná o reálnou strukturu jediného vzorku.

- Virtuální vlákenný svazek [35, 36] získáme statistickým zpracováním velkého množství řezů, což je ve shodě s bodem 2a. Z podrobné znalosti statistiky můžeme generovat náhodné řezy strukturou nerozlišitelné od reálných. Naopak odstraněním náhodné složky můžeme přejít k ideálnímu vlákennému svazku odvozenému z experimentu.

2.4 Ideální tkanina – základní pojmy

Definice provázání nití (vlákenných svazků) je základem pro výrobu tkanin. V textilním oboru se pro tento popis používají speciální a přesně definované pojmy, které zde uvedeme jednak proto, že usnadní pochopení struktury, jednak proto, že se používají v technologii, a v neposlední řadě pro úplnost popisu.

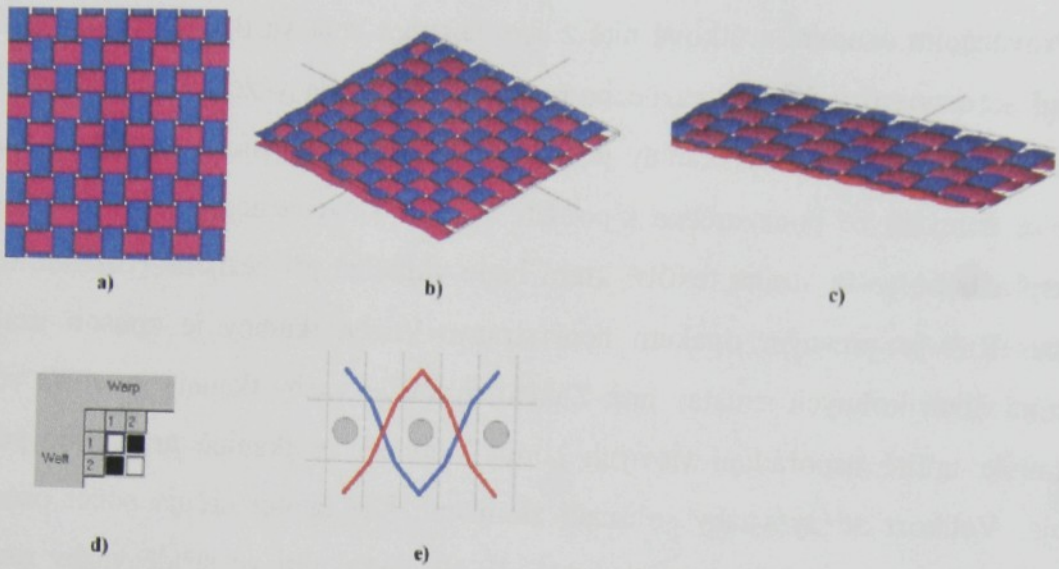
Podle základní definice je *tkanina* plošná textilie tvořená dvěma kolmo provázanými soustavami vlákenných svazků, nití. Podélná soustava nití se nazývá *osnova*, do které je kolmo zanášen *útek*. Podle definice je osnova podélná soustava provazujících nití tkaniny. Na tkanině je směr osnovy identifikován podle zapošitého pevného okraje. Útek určuje šířku textile a jedná se o příčně provazující soustavu nití. Útková nit je zatkávána pomocí prošlupního ústrojí. Důsledkem provázání nití dochází k zakřivení a následnému zkrácení ve tkanině. Toto zkrácení osnov a útků se nazývá *setkání* a uvádí se v procentech [%].

Provázáním osnovní a útkové nitě z líce na rub a zpět ve tkanině vzniká *vazný bod.* Rozlišují se osnovní a útkové vazné body podle niti, která váže na lícní straně tkaniny. Definici *lícní* a *rubní* strany tkaniny je možné chápat takto. Líc tkaniny je ta strana, se kterou se zamýšlí, že bude určena k použití, bude vystavena negativním vlivům vnějšího působení a bude to ta strana textile, která bude viditelná při běžném využívání textilního výrobku. Rub je přesným opakem lícní strany. Vazba tkaniny je způsob vzájemného provázání obou kolmých soustav nití. Základem každé vazby tkaniny je *střída vazby.* Ta představuje určité uspořádání vazných bodů, které se ve tkanině pravidelně periodicky opakuje. Velikost střídy vazby se značí zlomkem, kde čitatel určuje počet osnovních a jmenovatel počet útkových vazných bodů. Podle počtu nití ve střídě vazby rozlišujeme vaznost (trojvazný, čtyřvazný, atd.).

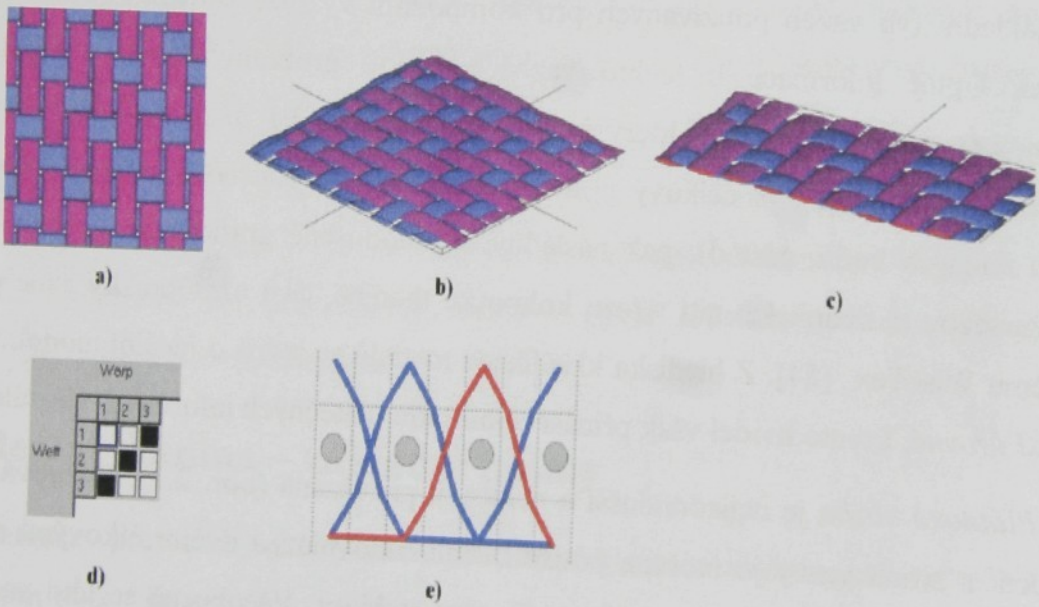
Základní typ vazeb používaných pro kompozitní výztuže jsou *plátnová, keprová* a *atlasová.* Úplné informace o těchto vazbách budou probrány dále, na tomto místě odkazujeme na grafický popis, který je po řadě na obr. 2.1 až obr. 2.4. V horní části obrázků, části a) až c), je celkový pohled na tkaninu s příslušnou vazbou. Dole je pak schéma vazných bodů, část d), pak následuje zjednodušené grafické znázornění průběhu dvou za sebou následujících nití v řezu kolmo ke tkanině, část e). Obrázky jsme připravili v systému WiseTex [54]. Z hlediska klasifikace modelů se jedná o ideální model, tj. *model nejnižší úrovně.* I tento model však přináší celou řadu užitečných informací, viz dále.

Plátnová vazba je nejjednodušší a nehustěji provázaná (obr. 2.1). Plátnová vazba je oboulícní a střída vazby je tvořena pouze dvěmi osnovními a dvěmi útkovými nitěmi. Je využívána pro svoji jednoduchost a rozměrovou stabilitu. Všeobecně se této vazby užívá v aplikacích, ve kterých je vyžadována velká pevnost a trvanlivost tkaniny a kde pevnost použitých vláken není závislá na velikosti ohybového namáhání.

Keprová vazba je charakteristická tím, že osnovní a útkové nitě provazují nejméně přes dvě nebo pod dvě příčně uložené nitě (obr. 2.2). Zároveň se v každém řádku vazba posouvá o jeden vazný bod vpravo nebo vlevo. Na tkanině se vytváří šikmé řádkování a podle směru rozeznáváme kepr pravý a levý. Označují se stejně jako směr zákrutu přízí: pravý písmenem „Z" a levý písmenem „S". Na tkanině je zřetelný směr ubíhajících lícních vazných bodů. Sklon ubíhajících řádků závisí na velikosti dostavy obou soustav nití. Keprová vazba se dělí na osnovní a útkovou podle druhu volných nití na líci tkaniny.

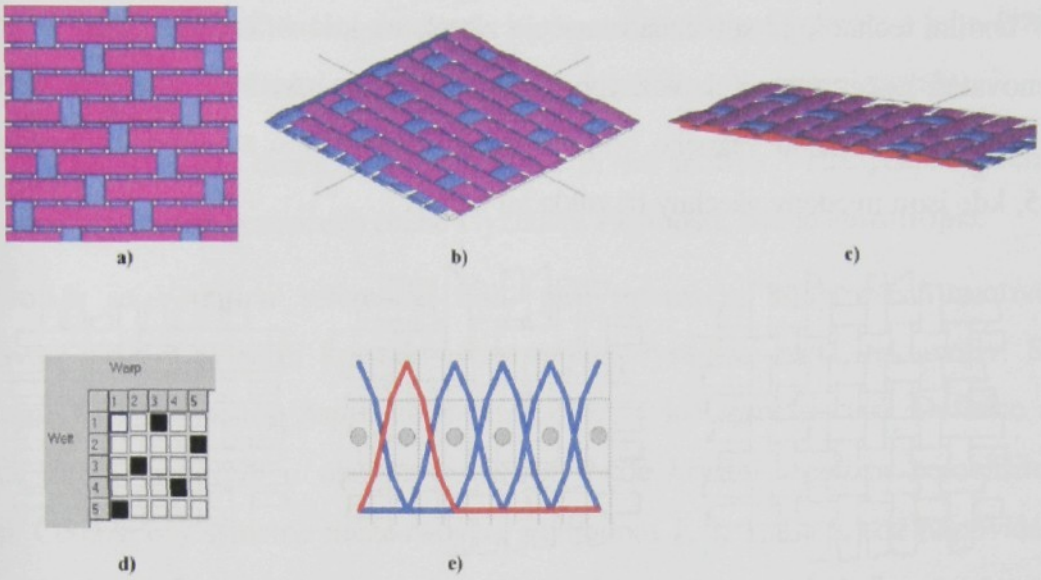


Obr. 2.1 Vazba plátnová

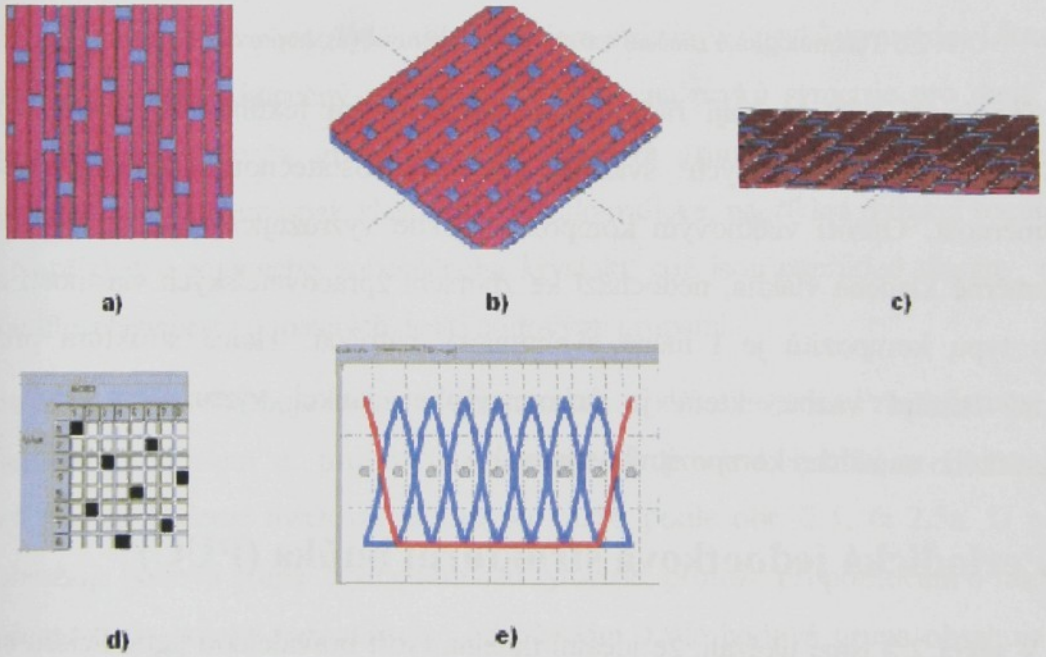


Obr. 2.2 Vazba keprová

U *atlasové vazby* se nitě provazují stejným způsobem jako u vazby keprové, jen s tím rozdílem, že v každém řádku se vazba posouvá o více jak jednu nit. (obr. 2.3 a obr. 2.4). Vazné body jsou ve střídě pravidelně rozložené a vzájemně se nedotýkají. Pro svůj hladký povrch a nejmenší počet vazných bodů zabezpečující vyšší elastické moduly je nejvhodnější pro konstrukci uhlíkových tkanin a kompozitů. Z praktického hlediska však vykazuje výrazně nižší odolnost proti smyku vrstev. Vzhledem k velkému sklonu atlasových výztuží kompozitních materiálů k delaminaci vrstev je v současné době dávána přednost výztužím s plátnovou vazbou [12].



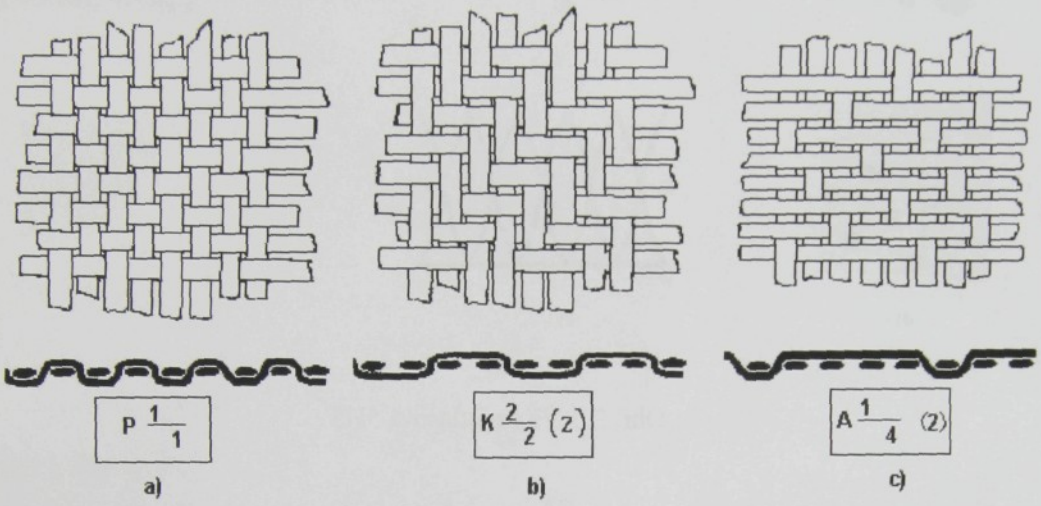
Obr. 2.3 Vazba atlasová 5HS



Obr. 2.4 Vazba atlasová 8HS

Stejně jako keprové vazby dělí se i atlasové vazby na osnovní a útkové. Atlas s nejmenším počtem obou soustav nití je atlas pětivazný, 5HS, který je na obr. 2.3, zatímco na obr. 2.4 jde o osmivazný atlas, 8HS. Označení 5HS či 8HS je převzato z anglického jazyka, kde HS znamená „Harness Satin" – provazující atlas, úvodní číslice pak vaznost. Toto značení není v rozporu se zlomkem, který představuje technologické značení způsobu provázání.

V textilní technologii se vazba označuje zlomkem, kde v čitateli je počet osnovních a ve jmenovateli počet útkových vazných bodů. Za ním je uvedeno postupné číslo, které udává místo následujícího vazného bodu. Příklady použití této zásady jsou ilustrovány na obr. 2.5, kde jsou uvedeny všechny tři základní vazby.



Obr. 2.5 Technologické značení vazeb, vazba plátnová (a), keprová (b) a atlasová (c)

Tkaninové výztuže mají řadu výhod oproti jiným textilním výztužím. Provázání kolmých soustav vlákenných svazků zaručuje dostatečnou tvarovou stabilitu a rovnoměrnost. Oproti vláknovým kompozitům, kde vyztužujícím systémem jsou pouze jednosměrně kladená vlákna, nedochází ke zhoršení zpracovatelských vlastností a výroba tohoto typu kompozitů je i méně ekonomicky náročná. Tkaná struktura představuje základní textilní vazbu, která je schopna plnit funkci výztuže ve všech směrech mechanického namáhání kompozitního materiálu.

2.5 Periodická jednotková strukturní buňka (PUC)

V sekci 2.2 jsme ukázali, že ideální tkanina tvoří pravidelnou periodickou strukturu, kterou je možné nazvat zobecněný dvourozměrný krystal. Popis krystalů je uveden v mnoha monografiích, zde bude výklad omezen na několik základních údajů, nutných k pochopení dalšího textu.

Základní vlastnosti krystalu lze vyjádřit třemi větami (třetí je možná zbytečná):

- Krystal vzniká pravidelným opakování určitého motivu na přímce, rovině či prostoru a zcela jej vyplňuje.

- Periodicita rozmístění motivu vede k symetrii struktury krystalu a jeho fyzikálních veličin, což je základní a technicky široce využívaná vlastnost krystalu.
- Poněvadž je na druhé straně rozložení prvků motivu v různých směrech různé, budou v různých směrech různé i fyzikální vlastnosti, což je anizotropie.

Zvolí-li se v motivu referenční bod, pak referenční body všech motivů tvoří krystalovou mříž. K symetrii krystalu přispívá jak krystalová mříž, tak motiv. Symetrii popisujeme prvky symetrie, například *n*-četná osa, rovina symetrie atd. Definice *n*-četné osy říká, že při potočení o úhel α (α=360/*n*) bude krystal v poloze nerozlišitelné od původní. Četnost osy symetrie může nabývat jen hodnot 1, 2, 3, 4 a 6, což odpovídá známé zkušenosti, že rovinu lze bez mezer pokrýt obecnými rovnoběžníky (*n*=1, α=360), obdélníky (*n*=2, α=180), rovnostrannými trojúhelníky (*n*=3, α=120), čtverci (*n*=4, α=90) a pravidelnými šestiúhelníky (*n*=6, α=60).

V krystalu existuje obecně několik navzájem svázaných prvků symetrie. Ukazuje se, že těchto kombinací je konečný a malý počet. Skupina prvků symetrie pro daný krystal tvoří bodovou a prostorou grupu symetrie. Bodová grupa definuje všechny fyzikální vlastnosti, prostorová grupa pak vlastnosti krystalografické, například difrakci roentgenova záření. Například u rovinného zobecněného krystalu, což jsou například tkaniny, existuje deset rozdílných symetrií popsaných desíti bodovými grupami.

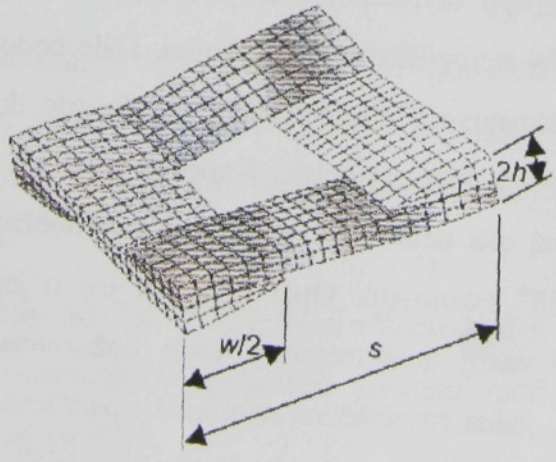
Bodová grupa obsahuje seznam významných prvků symetrie. Pro *n*-četnou osu se uvádí její četnost číslem *n*, pro rovinu symetrie se používá symbol *m* (mirror). Jako zajímavý příklad budeme uvažovat plátnovou vazbu podle obr. 2.1, či 2.5a. U plátnové vazby obsahuje bodová grupa čtyřčetnou osu symetrie, protože při pootočení o úhel 90° se plátno dostane do polohy nerozlišitelné od původní. Dále bodová grupa obsahuje rovinu symetrie rovnoběžnou s osnovou. Čtyřčetná osa ji převede do směru útku, proto tato dvojice tvoří jen jeden nový prvek symetrie. Konečně je zde rovina symetrie svírající úhel 45° s osnovou. Čtyřčetná osa nebo rovina symetrie rovnoběžná s osnovou ji převede na rovinu svírající úhel 135° s osnovou. Opět se jedná jen o jeden nový prvek symetrie. Bodová grupa plátnové vazby nese označení *4mm*, což znamená čtyřčetnou osu, a dvě odlišné roviny symetrie, jedna rovnoběžná například s osnovou, druhá s ní svírá úhel 45°. Ve skutečnosti jsou 4 roviny symetrie, navzájem svírají úhel 45°.

Periodická struktura tkanin vede k anizotropii jejich vlastností. To znamená, že fyzikální veličina, například modul pružnosti v tahu, může nabývat různých hodnot v různém směru. Na druhé straně tato fyzikální vlastnost bude vykazovat symetrii příslušné bodové grupy nebo vyšší, což je ve fyzice známo jako Neumannův princip.

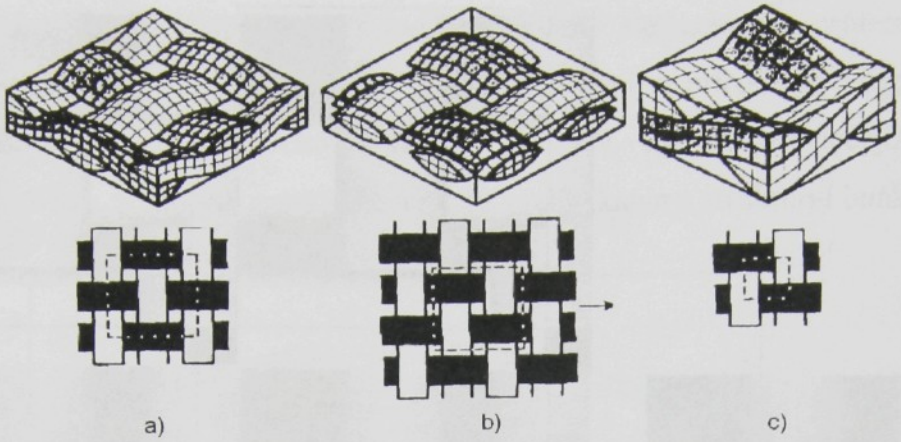
Jako příklad uvažujme plátnovou vazbu s bodovou grupou *4mm*. Z existence čtyřčetné osy automaticky plyne, že rovinný modul pružnosti v tahu musí při pootočení o 90° nabývat téže hodnoty. Celkově grupa symetrie zajistí, že polární diagram modulu pružnosti v tahu bude mít čtyřčetnou osu symetrie, dále dvě soustavy dvou navzájem kolmých os symetrie. Tyto soustavy jsou pootočeny o úhel 45°. Z toho plyne, že postačuje změřit rovinný modul pružnosti jen v rozsahu úhlů 0 až 45° od osnovy nebo útku.

U krystalů se místo motivů používá termín buňka, strukturní buňka, či elementární buňka, pro označení základní jednotky struktury. V literatuře se často mluví o periodické jednotkové buňce (Periodic Unit Cell – *PUC*). Naproti tomu u metody konečných prvků se používá termínu Representative Volume Element – *RVE*. Význam strukturní buňky je v tom, že její dvourozměrnou translací lze vytvořit například tkaninu [6, 59, 61]. Příklad strukturní buňky pro plátnovou vazbu je na obr. 2.6 a obr. 2.7.

Podobně jak se to diskutuje u krystalů, i u tkanin lze strukturní buňku ve struktuře tkaniny volit mnoha způsoby. Musí pouze splňovat podmínku, aby dvourozměrným posouváním vytvořila tkaninu předepsané vazby. U plátnové vazby se v literatuře uvádějí tři základní typy elementární buňky, úplná, střídová, redukovaná, které jsou po řadě schématicky znázorněny na obr. 2.7, poslední z nich pak poněkud podrobněji v drátovém modelu na obr. 2.6 [6].



Obr. 2.6 Periodická jednotková buňka tkané výztuže (PUC)



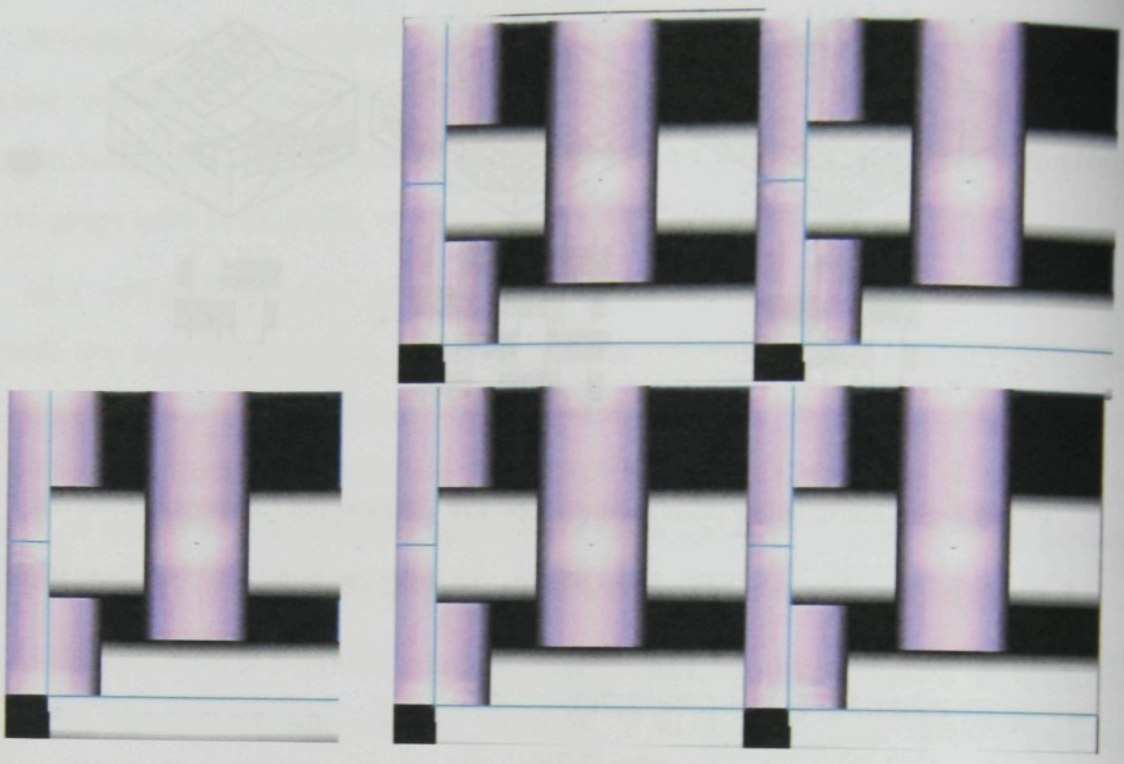
Obr. 2.7 Strukturní buňky plátnové vazby, úplná (a), střídová (b), redukovaná buňka (c)

S cílem je navzájem odlišit, byly těmto strukturním buňkám přiděleny následující praktické názvy:

- úplná strukturní buňka (obr. 2.7a),
- střídová strukturní buňka (obr. 2.7b),
- redukovaná strukturní buňka (obr. 2.7c).

Jednotlivé typy se navzájem liší velikostí, jejich plocha postupně klesá. Další buňky jsou odvozeny na základě redukce úplné strukturní buňky. Dále se buňky liší symetrií. Pouze úplná strukturní buňka má symetrii plátnové vazby *4mm*. Ostatní mají jen dvoučetnou osu. Protože střídová buňka obsahuje jako jediná podélně neořezaná vlákna, má v konstrukci modelů pro nestandardní použití, například metodu konečných prvků, největší význam. Výhodou je i to, že vlákna jsou oříznuta v příčném směru, tím se zjednoduší navazování, skládání, okrajové podmínky apod.

I když se zdá na první pohled stanovení strukturní buňky jako jednoduchá i když zajímavá záležitost, prakticky tomu tak není, zejména pokud se jedná o vizualizaci trojrozměrných struktur. V práci [64] bylo zjištěno, že ve stanovení hranic strukturní buňky plátna je chyba i v sytému WiseTex [54]. Na obr. 2.8 vlevo je strukturní buňka plátnové vazby. Neodpovídá žádné z buněk uvedených výše, to by však nevadilo, protože další volby jsou možné. Horší je však to, že jejím posuvem nedostaneme plátnovou vazbu, jak ukazuje obrázek vpravo o velikosti 2x2 buňky. Ořezání základní strukturní buňky je chybné. U obrázků poněkud ruší vyznačení hranice základní buňky v barevném originále modrou čarou, které bohužel nebylo dodrženo. Při jeho respektování by bylo vše v pořádku.



Obr. 2.8 Elementární buňka plátnové vazby v systému WiseTex
(elementární buňka, složení čtyř buněk)

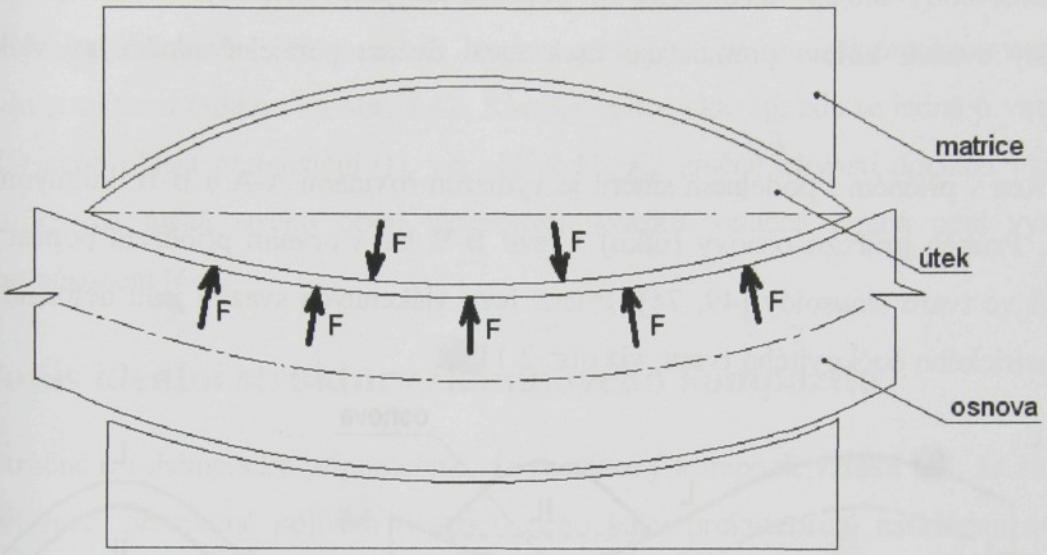
2.6 Popis ideální struktury tkaniny

Při tvorbě tkaniny z vlákenných svazků dochází k jejich provázání, jehož úkolem je zajistit soudržnost tkaniny. Podélné zvlnění jak osnovy, tak útku vede ke snaze nití narovnat se, působí tedy podélné síly. Ve vazném bodě se snaha o napřímení projeví tlakovým silovým působením, které je zjednodušeně vysvětleno na řezu vazným bodem na obr. 2.9[1]. Osnova a útek jsou působícími silami přitlačeny k sobě a v důsledku tření „drží" tkanina pohromadě.

Během procesu tkaní tedy dochází k trvalé deformaci vlákenných svazků. Díky elastickým vlastnostem vláken deformace vyvolá síly, která působí tlakem ve vazném bodě, a díky tření tím drží vlákna v žádaných polohách, jak již bylo vysvětleno v předchozím odstavci. V důsledku těchto sil dochází k podélnému prodloužení vláken, geometricky se však na struktuře objeví daleko výraznější příčné deformace, které mají výraznou trvalou složku.

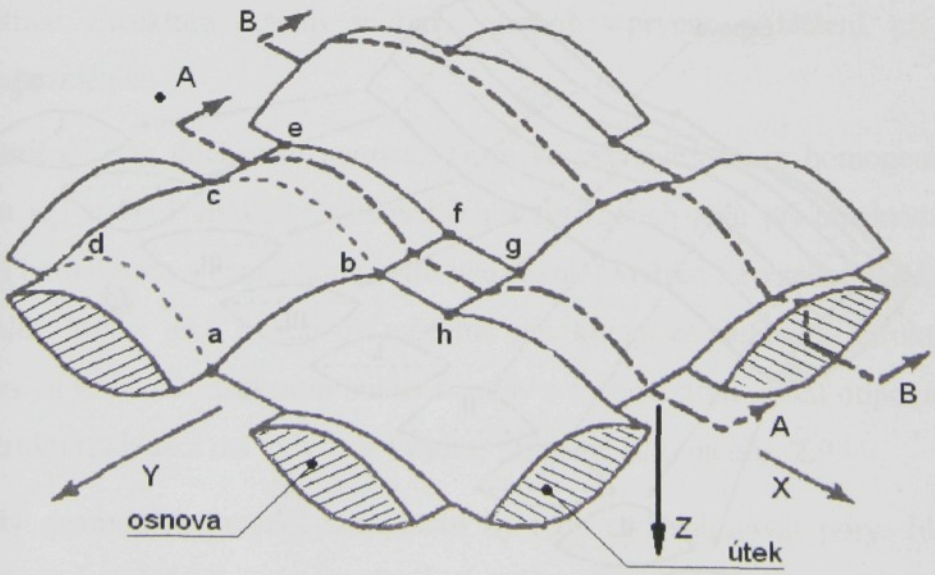
[1] Matrici bychom neměli uvažovat, pro vysvětlení přídržných sil je zbytečná.

Dochází nejen k deformaci podélného průřezu, ale zejména průřezu příčného. Deformace podélného průřezu má formu známého zvlnění, u příčného průřezu se projeví změnou kruhového tvaru na čočkový, viz též obr. 2.9. Tyto deformace již byly vzaty kvalitativně v úvahu při popisu geometrie modelů vazby tkanin a strukturní buňky.



Obr. 2.9 Silové působení ve vazném bodě

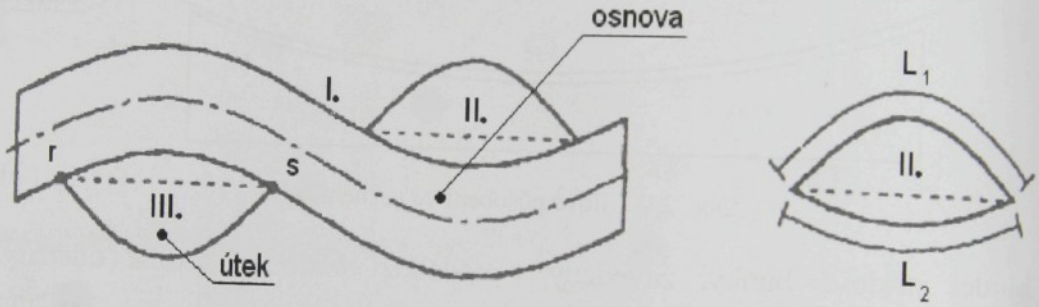
Model střídové buňky, zavedený v předchozí části, je natolik důležitý, že se v literatuře podrobně popisuje. Naik [66] vymezil ve strukturní buňce několik oblastí, pomocí kterých jsou charakterizovány detaily celého systému provázání (obr. 2.10).



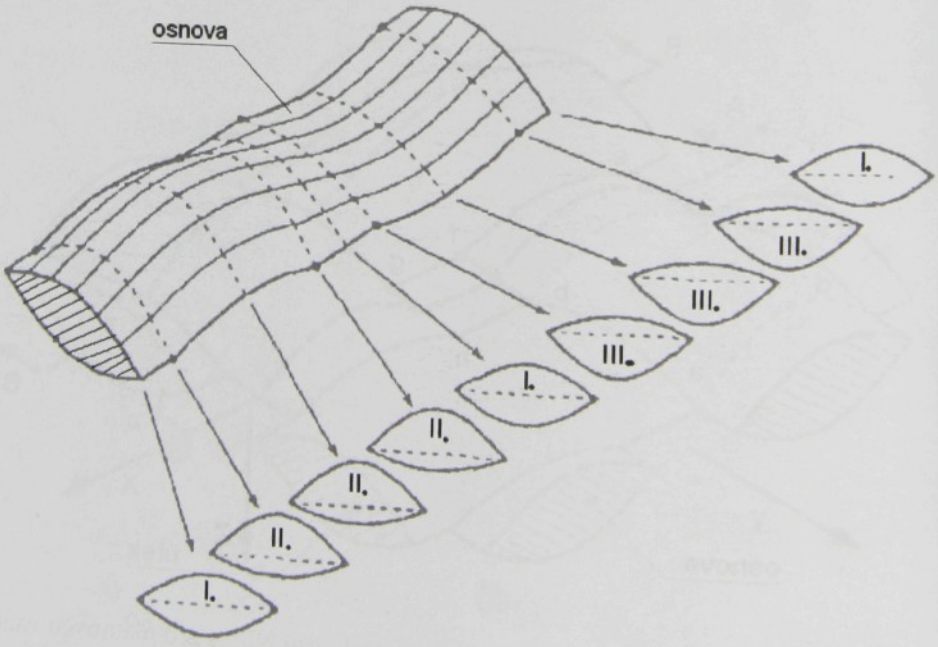
Obr. 2.10 Charakteristické oblasti střídové strukturní buňky pro plátnovou vazbu

První oblast je definována jako rovina vymezená body *a,b,c,d*, kde se překrývají oba na sebe kolmé vlákenné svazky. V naší terminologii je tato oblast nazývána jako *vazný bod*. Oblast vymezena body *b,f,g,h,* je nazývána jako *díra* a je to oblast, kde není rovina tkaniny zakryta ani jednou z provazujících soustav vlákenných svazků. Poslední oblast je vymezena body *b,c,e,f,* a můžeme ji pojmenovat jako *oblast přemostění*, kde jeden vlákenný svazek kolmo přemosťuje úsek mezi dvěma paralelně uloženými vlákennými svazky.

Řez v příčném i podélném směru je vymezen rovinami A-A a B-B, kolmými k ploše plátna. Průběh průřezu osnovy (útku) v řezu B-B lze v prvním přiblížení popsat pomocí zvlnění ve tvaru sinusoidy [49, 74]. Příčné řezy vlákenných svazků jsou deformovány do nesymetrického čočkovitého tvaru, viz obr. 2.11.



Obr. 2.11 Deformace příčných řezů vlákenných svazků v místě vazného bodu



Obr. 2.12 Periodická změna příčného průřezu vlákenného svazku podél jeho osy

Na obrázku jsou zřetelná oblasti přemostění (I) a oblast vazného bodu, (II) a (III). Příčný řez vlákenného svazku je charakterizován délkou horní (L1) a spodní (L2) strany čočkovitého tvaru (obr. 2.11 vpravo). Stejně dobře a možná názorněji lze však použít poloměry křivosti [33, 65]. Tvar příčného průřezu vlákna se v rámci strukturní buňky mění mezi dvěma krajními tvary, jeden z nich je na obr. 2.11 vpravo a druhý vznikne jeho zrcadlovým překlopením. Názorně je změna příčného tvaru vlákenného svazku při průchodu strukturní buňkou na obr. 2.12. Římské číslice ukazují, zda se jedná o vazný bod (II a III) nebo oblast přemostění (I), viz obr. 2.11. Ke změně křivosti dochází v příčném průřezu jen na místě stryku obou vlákenných svazků, opačná strana není vystavena silovému působení [66].

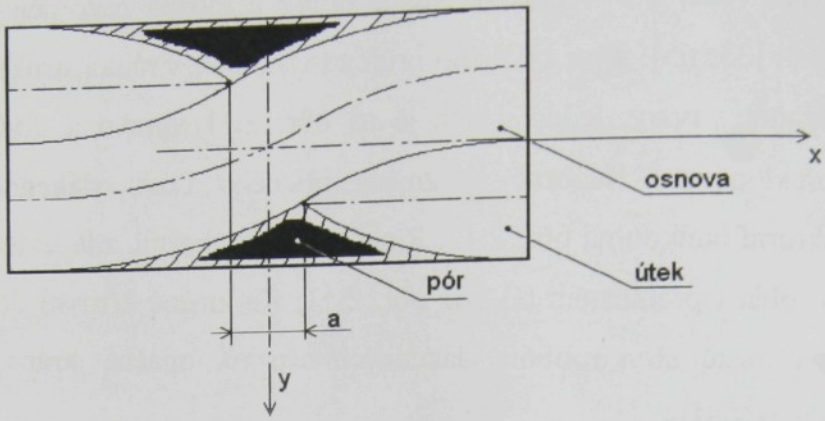
2.7 Popis ideální struktury tkaninového kompozitu

Stručně a schématicky připomeňme, že tkaninový kompozit vzniká tak, že se vrstvy tkané výztuže, prosycené pojivem (matricí) nebo jejím prekurzorem naskládají na sebe. V lisovací formě jsou podrobeny tepelně mechanickému zpracování. Nejjednodušší ideální model kompozitu předpokládá, že během skládání nedošlo k deformaci tkaniny a že vrstvy přesně lícují a jsou přesně rovnoběžné. Dále se předpokládá, že silové působení se strany matrice na vlákenné svazky je zanedbatelné. Přesněji řečeno, působící síla je vždy podstatně větší na vnitřní straně vlákenného svazku než síla působící vně vazného bodu se strany matrice. Struktura tkaniny se tedy, alespoň v prvním přiblížení, při vložení do kompozitu nezměnila.

Ke změně však dochází u matrice. Ta je ve výchozím stavu homogenní isotropní. V důsledku její vysoké viskozity, chemických a fyzikálních jevů při tepelném zpracování se však její homogenita v rámci kompozitu neuchová. Dochází ke vzniku defektů v podobě pórů a trhlin. Stejně jako u tkaniny můžeme pro kompozit definovat strukturní buňku. Nejpřirozenější je použít strukturní buňky tkaniny a z obou stran přidat odpovídající vrstvu matrice. Strukturní buňka má tedy tvar kvádru, přibližně jako na obr. 2.9.

Každý geometrický model kompozitu by tedy měl zahrnovat póry. Ideální model samozřejmě předpokládá, že póry vznikají v každé buňce, v každé buňce mají tentýž tvar a polohu. Příklad idealizovaných pórů v kompozitní buňce je na obr. 2.13 [66]. Póry se předpokládají v místě špatně přístupném, tj. většina jejich objemu je v oblasti přemostění.

Tento typ pórů, který je charakteristický pro tkaninové kompozity, bývá v literatuře nazýván jako „*crimp voids*“ [85].



Obr. 2.13 Strukturní buňka kompozitu s póry

Výskytu těchto pórů nelze zcela zabránit. V ideálním kompozitu jsou poruchy systematicky rozmístěny a mají pouze několik základních tvarů, které se ovšem periodicky opakují.

2.8 Ideální popis zvlnění podél osy vlákenného svazku

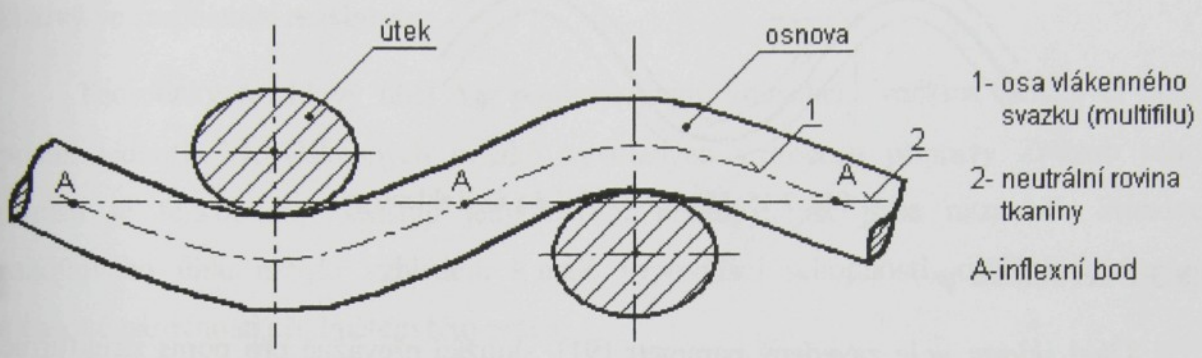
Podélné zvlnění vlákenného svazku je nejvýraznější charakteristikou jak samotné tkaniny, tak tkané výztuže v kompozitu. Určuje základní fyzikální vlastnosti tkaniny a má výrazný vliv především na modul elasticity tkaninového kompozitu. Průběh podélného zvlnění lze také snadno experimentálně zjišťovat a kvantitativně popsat. Této oblasti bylo v minulosti věnováno mnoho výzkumné aktivity, což dokazuje řada experimentálních i teoretických prací, a zastává i pevné místo v monografiích [23, 24, 29, 69, 76, 91].

V této části především popíšeme, které geometrické veličiny se u zvlnění podélné osy sledují a podáme jejich přesnou definici. Mnohé z těchto pojmů jsou dále často používány a rovněž se uvádějí jejich průběhy či hodnoty. Proto se domníváme, že přesný popis je na místě. Přehled zejména nových metod používaných k matematickému popisu či tvorbě matematických modelů je předmětem následující části.

2.8.1 Neutrální rovina tkané výztuže

Základním pojmem v oblasti tkaných textilií je *neutrální rovina tkaniny*. Z textilního hlediska je přesné definování tohoto pojmu obtížné.

Z matematického pohledu se jedná o rovinu, která prochází inflexními body periodického průběhu osy vlákenného svazku (obr. 2.14) [34, 91]. Neutrální rovina tkaniny je důležitým komparačním prvkem, neboť k ní je vždy vztažena veškerá deformace nejen výztuže, ale i celého kompozitu.



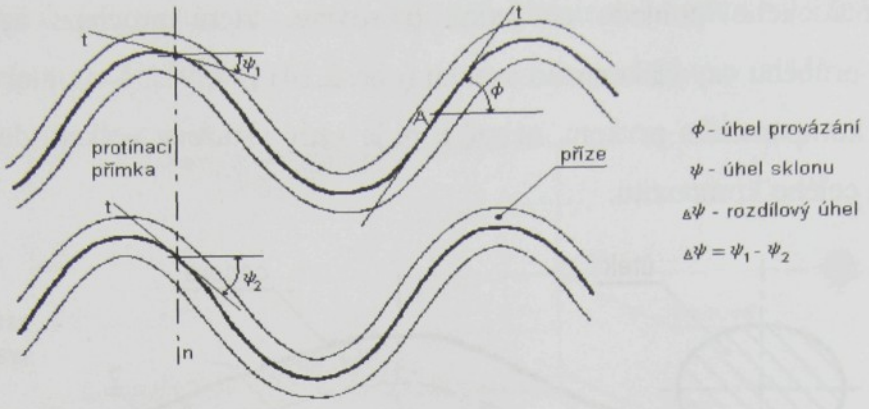
Obr. 2.14 Strukturní parametry tkané výztuže

U periodických a zároveň harmonických průběhů (např. plátnová vazba) prochází neutrální rovina tkaniny také střední vzdáleností mezi dvěma sousedními lokálními extrémy vlákenného svazku. Úhel, který svírají osa vlákenného svazku s neutrální rovinou tkaniny v inflexním bodě, je jeden z nejdůležitějších parametrů, úhel provázání, viz dále, který významně kvantifikuje geometrický charakter kompozitní výztuže [21, 29, 91].

Pro úplnost uveďme, že lze definovat rovinu vlákenného svazku, jako rovinu, kterou prochází periodicky zvlněná osa vlákenného svazku. Je kolmá k neutrální rovině a obvykle splývá s nákresnou. Průsečíkem neutrální roviny s nákresnou je pak souřadnicová osa svazku.

2.8.2 Úhel provázání ϕ

V literatuře je tento parametr nazýván také jako *úhel zvlnění* [69]. Úhel provázání ϕ je definován jako úhel, který svírá tečna k ose vlákenného svazku v inflexním bodě a neutrální rovina tkané výztuže (obr. 2.15). Z geometrického hlediska je to úhel směrnice v inflexním bodě. Jeho hodnoty se výrazně mění i při nepatrné deformaci za působení tlakové síly, čímž se úhel provázání řadí k jedním z nejdůležitějších parametrů strukturní analýzy [69]. V případě deformace je však obtížné inflexní bod přesně definovat, jeho jasná definice je jen pro jednoduché matematické modely.



Obr. 2.15 Úhel provázání ϕ a úhel sklonu ψ

2.8.3 Úhel sklonu ψ

Úhel sklonu ψ je zavedený parametr [91], sloužící převážně pro popis strukturních změn tkané výztuže u kompozitních materiálů. Je možné jej definovat jako úhel mezi tečnou k zvlněné ose příze v libovolném bodě a neutrální rovinou tkané výztuže (obr. 2.15). Úhel provázání je jeho speciálním případem. Úhel sklonu je schopen zachytit lokální deformace a tvarové tendence ve tkané výztuži. Jeho definování a způsob vyhodnocování patří z pohledu strukturní analýzy kompozitních materiálů k jedné z nejdůležitějších strukturních operací a jeho vyhodnocení má nezastupitelné místo při popisu struktury.

2.8.4 Rozdílový úhel $\Delta\psi$

Zatímco všechny předchozí parametry charakterizovaly jediné vlákno, rozdílový úhel se vztahuje ke dvěma vláknům. Je to tedy parametr, který charakterizuje kompozit. Rozdílový úhel je definován jako rozdíl úhlů sklonu dvou vlákenných svazků a to ve stejném bodě (obr. 2.15) [29, 91]. Pokud jsou vlákenné svazky sousedních vrstev v přesném zákrytu shodují se tvarově, je rozdílový úhel nulový. Pokud nejsou, rozdílový úhel se mění. Mění se i v případě, že oba vlákenné svazky jsou naprosto identické a jsou jen posunuty o pevnou vzdálenost. Je to tím, že se odečítají směrnice.

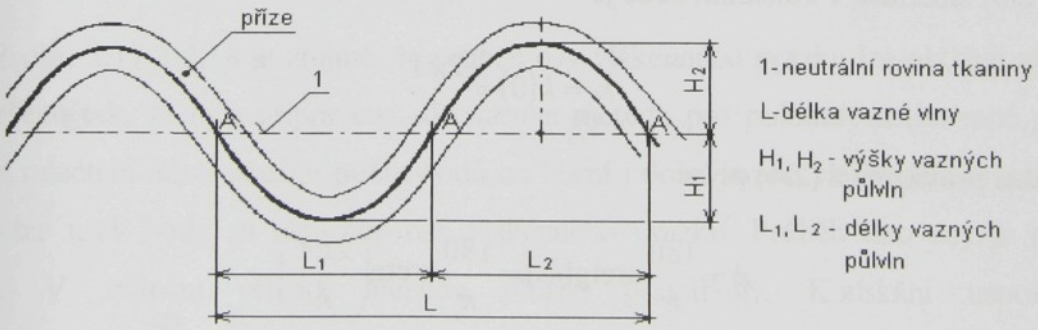
Uvažujme nejjednodušší případ dvou posunutých sinusovek $\sin(x)$ a $\sin(x+\varphi)$, kde φ je fázový posuv v radiánech. Jejich směrnice jsou $\cos(x)$ a $\cos(x+\varphi)$ a tudíž úhly sklonu a tedy i rozdílový úhel jsou jimi jednoznačně určeny. Rozdíl těchto funkcí se však periodicky mění podél souřadné osy vlákna, ležící v neutrální rovině, které přísluší nezávisle proměnná x.

Amplituda rozdílu závisí na fázovém posuvu φ, roste s růstem tohoto posuvu a největší hodnoty nabývá pro svazky s opačnou fázi. Průběh rozdílového úhlu se však dá vyjádřit jen graficky. Daleko lepší přístup je proto použít fázového nebo relativního délkového posuvu vln. Relativní posuv se vztahuje k vlnové délce a snadno se převede na fázový ve stupních či radiánech.

Teoreticky rozdílový úhel $\Delta\psi$ popisuje jiným způsobem velikost skluzu či fázový posun jednotlivých vlákenných svazků vyvolaných v procesu přípravy Způsob tohoto popisu je těžkopádný, existují jednodušším přístupy, jak jsme naznačili. Stanovení rozdílového úhlu nebylo vzhledem k malé vypovídací schopnosti, obtížné interpretaci a časové náročnosti předmětem této práce.

2.8.5 Výška a délka vazné vlny nebo půlvlny

Výška vazné vlny či půlvlny H_1, H_2 je uvažována jako maximální kolmá vzdálenost mezi osou vlákenného svazku a neutrální rovinou tkané výztuže (obr. 2.16). V případě symetrie průběhu vzhledem k neutrální rovině, například funkce sinus, jsou obě výšku stejné. V zahraniční odborné literatuře se v souvislosti s kompozitními materiály převážná většina pojmů přebírá z matematické terminologie [6, 29, 91]. Ekvivalentem pojmu výška půlvlny je amplituda či maximální amplituda.



Obr. 2.16 Výška a délka vazné půlvlny

Délka vazné půlvlny L_1, L_2 je nejkratší vzdálenost mezi dvěma inflexními body ležícími v rovině tkané výztuže (obr. 2.16). Jestliže na líci váže nit přes stejný počet nití jako na rubu, jsou teoreticky délky vazných půlvln L_1 a L_2 totožné a naměřené hodnoty není nutné pro vyhodnocení separovat (např. plátno). U vazeb, kdy osnova nebo útek na líci váže přes jiný počet nití než na rubu (např. atlas), je nutné vyhodnocovat tyto parametry odděleně.

2.8.6 Úhel sklonu a provázání pro harmonický průběh

Pro úhel sklonu a úhel provázání lze odvodit jednoduché a užitečné vztahy, pokud souřadnici y vlákenného svazku můžeme popsat harmonickou funkcí

$$y(x) = A \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right), \tag{2.1}$$

kde A je výška a λ je délka vazné vlny. Ve fyzice se tyto veličiny nazývají po řadě amplituda a vlnová délka. Fázovou konstantu pro jednoduchost neuvažujeme, na výsledek nemá žádný vliv. Derivace této funkce má tvar

$$k(x) = y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{2\pi A}{\lambda} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right). \tag{2.2}$$

Úhel sklonu ψ ve stupních v bodě o souřadnici x je pak

$$\psi(x) = \frac{180}{\pi} \operatorname{arctg}(k(x)). \tag{2.3}$$

Úhel provázání ϕ je definován jako směrnice tečny v inflexním bodě osy vlákenného svazku. Při jejím popisu pomocí harmonické funkce (2.1) je inflexní bod např. x=0, λ, 2λ, ... Po dosazení těchto hodnot do (2.2) funkce kosinus nabývá hodnoty jedna, takže podle (2.3) směrnice v inflexním bodě je

$$k_o = k(0) = \frac{2\pi A}{\lambda} \tag{2.4}$$

a pro úhel provázání z (2.4) plyne

$$\phi = \frac{180}{\pi} \operatorname{arctg}(k_o) = \frac{180}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{2\pi A}{\lambda}\right). \tag{2.5}$$

2.9 Popis a aproximace reálného zvlnění vlákenného svazku

Typické příklady řezů kompozitem podél osy jednoho ze systémů vlákenných svazků je na obr. 2.17 a obr. 2.18. V této fázi se soustředíme pouze na průběh zvlnění. V porovnání s ideálním modelem vidíme výrazné odchylky:

- Jednotlivé svazky jsou navzájem posunuty a to dosti výrazně, to je zřetelné zejména u plátnové vazby na obr. 2.17.

- Jejich průběh se může lišit od nejjednoduššího harmonického, tj. sinového nebo kosinového, což se projeví zvláště u atlasové vazby na obr. 2.18.
- Tloušťka svazku kolísá zejména v závislosti na jeho pořadí, některé jsou jako celek tlustší, jiné tenčí, viz obr. 2.17. U téhož svazku se může tloušťka měnit i ve směru řezu. První odchylku lze vysvětlit posunutím vrstev ve směru kolmém k rovině řezu. Pak se může odříznout jen podstatně tenčí část vlákenného svazku. Kolísání tloušťky podél svazku může být vyvoláno mírným pootočením vrstvy tkaniny při skládání vrstev kompozitu.

Obr. 2.17 Příčný řez kompozitem s tkanou výztuží plátnové vazby

Obr. 2.18 Příčný řez kompozitem s tkanou výztuží atlasové vazby

Z obr. 2.17 a 2.18 je zřejmé, že průběh osy vlákenného svazku lze obtížně zjistit. To je vyřešeno tak, že byla připravena softwarová metoda pro poloautomatizované přesné a detailní odečtení dostatečného počtu bodů na horní i dolní straně vlákenného svazku [34]. Z nich lze určit body na neutrální ose vlákenného svazku. Průběh této osy je poměrně složitý. V žádném případě nebude přesně periodický. K získání uspokojivého kvantitativního popisu osy vlákenného svazku je tedy nutno přistoupit ke složitějším matematickým metodám, než k těm, které byly uvedeny dříve.

Úkolem je najít funkci, která by měla tyto vlastnosti:

- Aproximovala by průběh neutrální osy s dostatečnou a volitelnou přesností.
- Parametry aproximující funkce by měly mít jasný fyzikální význam a mělo by být možné z nich odvodit všechny geometrické a případně další parametry neutrální osy či vlákenného svazku.

- Aproximace by měla být automatická a její výsledek by měl mít také grafickou podobu, z níž by bylo možné posoudit kvalitu aproximace.

V úvahu připadaly zejména tyto možnosti:

- aproximace harmonickou funkcí,
- aproximace polynomem,
- přístup pomocí spline,
- wavelety,
- přístup pomocí Fourierovy řady.

Většinu z těchto možností jsme vyzkoušeli, dosažené výsledky a jejich diskuse jsou v dalších kapitolách této práce.

2.9.1 Harmonická aproximace

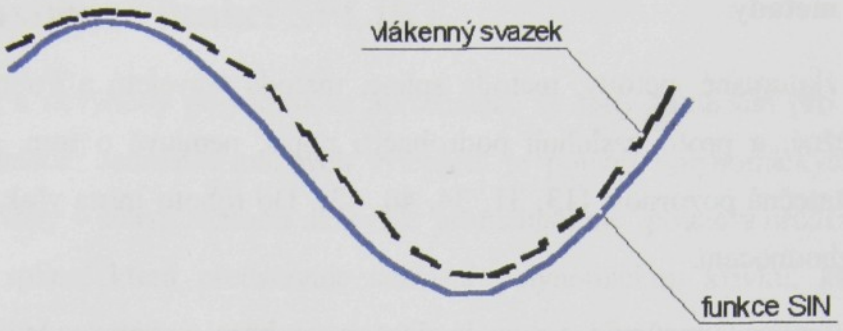
Při pohledu na periodický a harmonický průběh vazné vlny základní plátnové vazby je nejsnazší vytvořit model, kde základem je obecná goniometrická (harmonická) funkce *sinus* nebo *kosinus*. U volné textilie je poměrně vysoká amplituda zvlnění, takže aproximace není dobrá, tvar vlákenného svazku a křivka sinusové funkce jsou odlišné. Jiný případ nastává v případě aproximace vlákenného svazku tkaniny již zapracované v kompozitní struktuře. Zde vlivem deformačních sil při lisování je výška vazné vlny vlákenného svazku výrazně nižší a aproximační křivka se tvarově shoduje se skutečným průběhem (obr. 2.19). Příčinou shody je však především nižší přesnost odečítání souřadnic a tím i méně detailů. Využití goniometrické funkce je omezeno na plátnovou vazbu. U vazeb typu kepr a atlas jsou vlákenné svazky silně deformovány.

Ve zcela obecném tvaru je funkce sinus nebo kosinus plně popsána třemi parametry: amplitudou, vlnovou délkou[2] a fázovou konstantou. Vyhledání všech tří parametrů za podmínky nejlepšího souhlasu se zadanými body patří mezi úlohy nelineárního programování.

V moderních výpočetních systémech (MatLab), existují spolehlivé procedury pro vyhledání optimálních parametrů. Tato metoda by se tedy dala plně automatizovat.

---

[2] Běžně se při výčtu parametrů používá frekvence či úhlová frekvence, protože se obvykle uvažuje časový průběh, tj. kmity. Zde však jde o vlny, prostorový průběh, proto je vlnová délka (vlnová konstanta), na místě.



Obr. 2.19 Porovnání průběhů vlákenného svazku a funkce sinus

Předností této aproximace je to, že harmonická funkce je velmi jednoduchá, výpočet lze plně automatizovat a navíc lze poměrně snadno určit všechny geometrické parametry vlákenného svazku definované v předchozí části. I přes tuto výhodu a úspěch u plátnové vazby jsme od této aproximace ustoupili, protože je automatickým a základním výsledkem další metody – *Fourierovy řady*.

2.9.2 Polynomická aproximace

V principu lze každou soustavu bodů, které popisují smysluplnou funkční závislost, aproximovat pomocí polynomu dostatečně vysokého řádu. Ve statistice se mluví o polynomické regresi či metodě nejmenších čtverců a výpočetní algoritmus je implementován prakticky ve všech novějších systémech. V případě aproximace zvlnění je hlavní problém v tom, že se jedná o přibližně periodickou funkci, řád polynomu by musel být poměrně vysoký.

Výhodou této metody je její okamžitá dostupnost a snadný výpočet většiny geometrických parametrů, definovaných v předchozí části. Derivace polynomu je velmi jednoduchá, je běžně implementována, takže není problém určit směrnici a příslušné úhly. Nevýhodou, kromě vysokého stupně polynomu je to, že dobře aproximuje pouze v rozsahu jedné periody vlákenného svazku. Dále není žádná fyzikální či technická interpretace koeficientů polynomu, které jsou k dispozici jako jediný výsledek aproximace.

V této souvislosti poznamenejme, že metoda spline v principu rovněž používá polynomu, ovšem nízkého (třetího) stupně a na krátkém úseku. Příklad aplikace polynomické regrese bude proto uveden později při popisu metody spline a budou porovnány výsledky obou metod. Pro úplnost ještě uveďme, že jsme polynomické metody použili pro aproximaci jiných výsledků.

2.9.3 Ostatní metody

Ostatní zkoumané metody, metoda spline, metoda waveletů a Fourierova řada již nejsou tak běžné, a proto zasluhují podrobnější popis, nemluvě o tom, že jim byla již věnována dostatečná pozornost [13, 31, 34, 40, 42]. Do tohoto místa však náleží diskuse, posouzení a zhodnocení.

Metoda spline umožňuje velmi kvalitní aproximaci, existuje řada nejrůznějších modifikací. K aproximaci se obvykle používá polynomu třetího stupně, provádí po krátkých úsecích (obvykle zahrnují 4 body) a zajišťuje plynulou a hladnou návaznost jednotlivých úseků. Aproximační křivka prochází všemi body. Mezi nevýhody patří především to, že získání geometrických parametrů vlákenného svazku z aproximační funkce není snadné, navíc koeficienty aproximace nemají žádnou fyzikální a ani geometrickou interpretaci.

Metoda waveletů se objevila teprve v nedávné době a její hlavní použití je asi jinde. Podrobněji nebyla metodika rozpracována, je uvedena pouze jen jako zajímavost. Její nedostatky jsou stejné nebo dokonce horší než u metody spline.

Metodu Fourierovy řady lze charakterizovat takto:

- Aplikuje se na periodické funkce.
- V diskrétní podobě lze aplikovat na vzorky periodických či jiných funkcí, v tom případě je nalezení parametrů plně automatizované. Pak mluvíme o *diskrétní Fourierově transformaci – DFT.*
- Všechny vypočtené koeficienty mají názorný fyzikální i geometrický význam. Jedná se o základní a vyšší harmonickou.
- Při použití všech koeficientů u DFT se dosáhne úplné shody se vzorky, snižováním počtu lze volit stupeň aproximace a vybrat přijatelné optimum.

Zváží-li se, že zvlnění vlákenného svazku je kvaziperiodická funkce, která se může blížit periodické, že jsou známy vzorky této funkce, tj. pravidelně odečítané body a že lze volit míru aproximace, je metoda konečné Fourierovy řady, či přesněji diskrétní Fourierovy transformace (DFT), ideálním řešením. Proto je mu věnována samostatná kapitola.

2.10 Aproximace funkcí SPLINE

Výhody a nevýhody polynomické aproximace se staly základem pro hledání nových metod aproximace. Jedním z možných vylepšení je použití polynomických funkcí, které nejsou definovány v celém rozsahu nezávisle proměnné, ale pouze v určitém úseku. Jedná se o funkci spline, která představuje sumární polynomickou křivku, která je složena z několika polynomů definovaných na daných úsecích celého rozsahu nezávislé proměnné. Jinými slovy řečeno: křivka je tvořena několika polynomy, přičemž každý je definován na určitém úseku nezávislé proměnné. Křivky v místech přechodu jsou spojité a hladké.

Tento způsob optimalizuje vliv lokální neperiodicity průběhu vlákenného svazku výztuže. Kvalita aproximace se výrazně zlepšila i u výztuží s narušenou periodicitou průběhu vazných vln (např. atlas). Použití splinové funkce představuje další dimenzi v analýze struktury kompozitních materiálů, neboť zmiňovaný postup již zcela vychází z představy o vytvoření matematického modelu struktury kompozitního materiálů.

Vytváření matematických modelů je založeno na mnoha postupech, které vycházejí z metod interpolace a aproximace funkcí či experimentálních dat. Obecně se provádí náhrada funkce $f(x)$, zadané hodnotami $\{x_i, y_i\}$, $i=1,\ldots..., N$, vhodnou aproximující funkcí $g(x)$. Tato aproximující funkce $g(x)$ je často volena jako lineární kombinace dílčích funkcí $g_j(x)$

$$g(x) = \sum_{j=1}^{m} c_j \, g_j(x) . \tag{2.6}$$

Jednotlivé elementární funkce $g_j(x)$ jsou polynomy, racionální lomené funkce, tj. podíly polynomů, trigonometrické funkce, exponenciální funkce a pod. Stupeň aproximace závisí na zadané úloze a vyjadřuje se jako vzdálenost hodnot $y(x_i)$ a y_i mezi aproximující a aproximovanou funkcí v daných bodech $\{x_i\}$, $i=1,\ldots..., M$.

Zvláštním případem aproximace je interpolace, při které se sestrojuje funkce $g(x)$ tak, aby procházela zadanými body $\{x_i, y_i\}$, $i=1, \ldots, M$, a současně splňovala podmínky určující její tvar. Při interpolaci musí být v definovaných bodech ξ_i, $i=1,\ldots, N$, nazývaných uzlové body interpolace, funkce $f(x)$ a $g(x)$ shodné ve funkčních hodnotách a hodnotách zvolených derivací

$$f^{(j)}(\xi_i) = g^{(j)}(\xi_i) \qquad i = 1, \ldots, \mathrm{N}, \quad j = 0, \ldots, r_i . \tag{2.7}$$

Symbol $f^{(j)}$ označuje j-tou derivaci a r_i nejvyšší řád derivace v i-tém uzlu, ve které je shodná aproximující i aproximovaná funkce. Interpolace se v technické praxi využívá v mnoha oblastech, z nichž uvedeme ty nejvýznamnější:

- náhrada složitých funkcí $f(x)$ nebo funkcí, které nelze jednoduše vyčíslit,
- numerická derivace a integrace,
- kreslení grafů závislosti zadané tabulkou.

K nejznámějším interpolačním postupům patří polynomická interpolace, pomocí které se hledá polynom $g(x)$ nejmenšího možného stupně, splňující podmínku (2.7). Úloha má právě jedno řešení a hledaný polynom je m-tého stupně

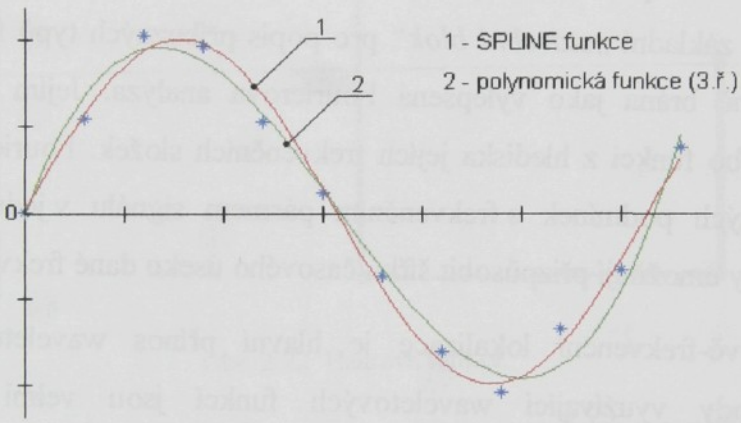
$$m = \sum_{i=1}^{N} r_i + (\mathrm{N\text{-}1}). \tag{2.8}$$

V této práci byl implementován algoritmus založený na aproximaci pomocí kubického spline. Pro aproximaci byla délka vzorku rozdělena na devět úseků s deseti uzlovými body, ve kterých byla funkce spojitá. Polynomickou aproximaci bylo vygenerováno devět polynomických funkcí, kterými byly proloženy souřadnice provazující vazné vlny tkané výztuže. K aproximaci byl využit software Adstat 1.1.

Jestliže je požadavek pouze na shodu ve funkčních hodnotách, potom platí $r_i=0$, $i=1$, ...,N, a N-tice bodů ξ_i, $i=1,\ldots, N$, je interpolována jednoznačně polynomem $(N\text{-}1)$-ního stupně. Používání polynomické interpolace je jednoduché, ale je s ním spojena řada nevýhod. Polynomická funkce je složena z elementárních funkcí definovaných na celé reálné ose, což vede u funkcí vyšších řádů ke vzniku velkého počtu lokálních maxim, minim a inflexních bodů, které neodpovídají průběhu funkce $f(x)$ [17, 74]. Navíc v tomto případě budou lokálně definované funkce v místě návaznosti, tj. v uzlech spojité ve funkčních hodnotách, ale ne hodnotách prvních derivací, v místě návaznosti může být ostrý zlom.

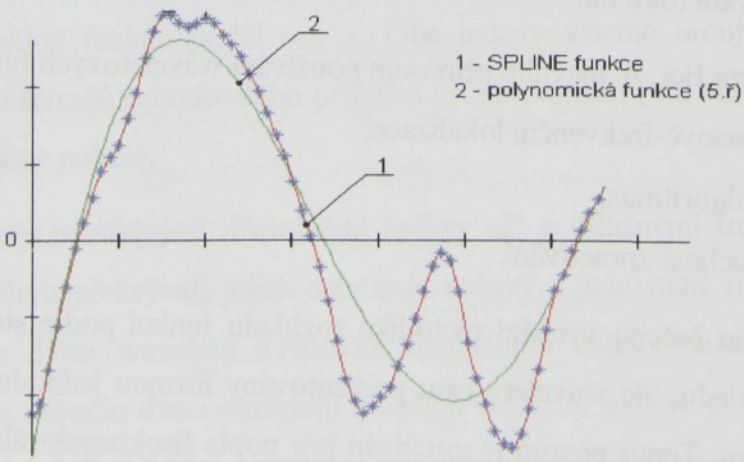
Na tomto principu lze definovat obecnou polynomickou spline funkci $S_m(x)$ s uzly $a=\xi_1<\xi_2<\xi_3<\ldots<\xi_N=b$. Splinová funkce je na každém úseku $[\xi_j, \xi_{j+1}]$, $j=1, \ldots, N\text{-}1$, reprezentována polynomem m-tého stupně. Jestliže je v některém bodě x_i derivace $S_m^{(1)}(\xi_i)$ nespojitá, jedná se o defektní splinovou funkci. Nejpoužívanější splinové funkce jsou lineární, kvadratické a kubické.

Lineární spline je nejjednodušší a funkci $f(x)$ interpoluje přímkovými úseky mezi dvěma uzlovými body. *Kvadratický spline* je spojitý v první derivaci a funkci $f(x)$ interpoluje polynomickými křivkami druhého stupně. Mezi nejvýznamnější představitele spline polynomů patří *kubický spline.* Je spojitý v prvních dvou derivacích, z čehož vyplývá možnost sestrojení hladké křivky první derivace. Úseky mezi dvěma uzlovými body nahrazuje polynomy třetího stupně, které jsou z hlediska přesnosti aproximace nejvhodnější. Kromě zmíněných způsobů aproximace existuje ještě celá řada technik tvorby matematických modelů, které své uplatnění nacházejí především v oblasti počítačové grafiky.



Obr. 2.20 Aproximace pomocí spline a polynomické funkce *periodického* průběhu

Na obr. 2.20 je znázorněna aproximace pomocí polynomické a splinové funkce. Periodické průběhy vazných vln tkaných výztuží jsou aproximovány téměř ve shodné kvalitě pomocí polynomické či splinové funkce. Hlavním přínosem aproximace je výrazné zvýšení kvality aproximace u těch průběhů, kde je periodicita silně narušena (obr. 2.21).



Obr. 2.21 Aproximace pomocí spline a polynomické funkce *neperiodického* průběhu

Obrázky jasně dokazují, že využití funkce spline pro aproximaci průběhu vazné vlny je účinné i v případě, kdy je silně narušena periodicita a polynomická funkce již není schopna zvyšováním řádu poskytnout kvalitní aproximaci vlákenného svazku výztuže.

2.11 Aproximace pomocí Waveletových funkcí

Wavelety nacházejí hlavní využití převážně v elektrotechnice pro analýzu elektrického signálu. Je možné říci, že wavelet je jednoduchá vlnová funkce vycházející z předpokladu o určitých vlastnostech neznámého průběhu.

Nastavení všech parametrů vychází vždy z jedné *„mateřské" waveletové funkce*, která slouží jako základní *„stavební blok"* pro popis příbuzných typů funkcí. Waveletová analýza je obecně brána jako vylepšená Fourierova analýza. Jejím úkolem je popsat vstupní signál nebo funkci z hlediska jejích frekvenčních složek. Fourierova transformace pracuje za běžných podmínek s frekvenčním pásmem signálu v jednotlivých časových úsecích. Wavelety umožňují přizpůsobit šířku časového úseku dané frekvenci [88].

Tato časově-frekvenční lokalizace je hlavní přínos waveletů oproti ostatním metodám. Metody využívající waveletových funkcí jsou velmi často využívány v neparametrických regresních modelech širokého spektra funkcí, které umožňují komplexní analýzu.

Existují tři oblasti, ve kterých se wavelety nejčastěji používají:

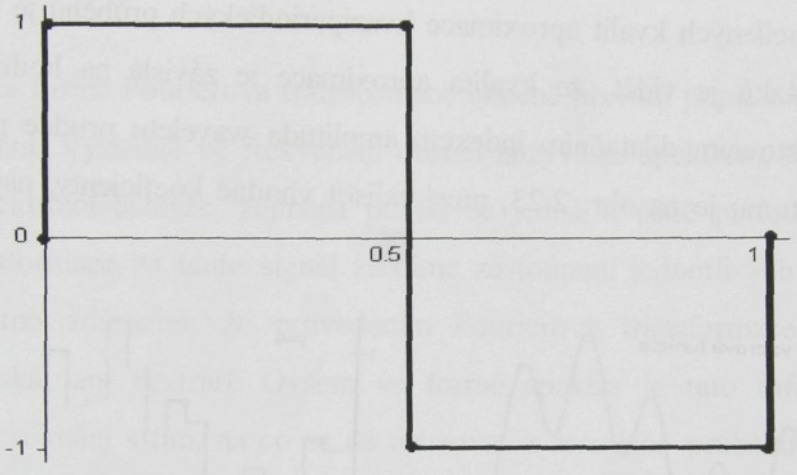
- zpracování signálu (např.elektrotechnika),
- obrazová analýza,
- zhušťování toku dat.

V závěru lze říci, že hlavním přínosem používání waveletových funkcí je:

- dobrá časově-frekvenční lokalizace,
- rychlý algoritmus,
- jednoduchost zpracování.

Jak již bylo řečeno vychází metodika rozkladu funkcí podle stejné analogie jako u Fourierova rozkladu, ale wavelety jsou prezentovány formou jednoduchého přístupu, tzv. *Haarova systému.* Tento postup je používán pro popis širokospektrálních analýz a na jeho bázi jsou pak generovány další systémy využívající wavelety.

Samotná Fourierova transformace bude blíže popsána v další kapitole. Jen ve zkratce zde bude nastíněn princip a postup využívající Haarova systému, který je nadstavbou diskrétní Fourierovy transformace (DFT). V současné době existují ovšem daleko lepší systémy a od Haarova se upouští, zde ji uvedeme pro její jednoduché vlastnosti. Haarův systém obsahuje Haarovy wavelety ve formě soustavy Haarových funkcí. Základní Haarova funkce je definována podle obr. 2.22 [5].



Obr. 2.22 Haarova funkce

Takto definovaná Haarova funkce ψ se nazývá „mateřský wavelet", který generuje celou škálu waveletů s dvěma základními parametry – *dilatační index* (*j*) a *translační index* (*k*). Každý nově vzniklý wavelet je indexován oběma indexy j,k:

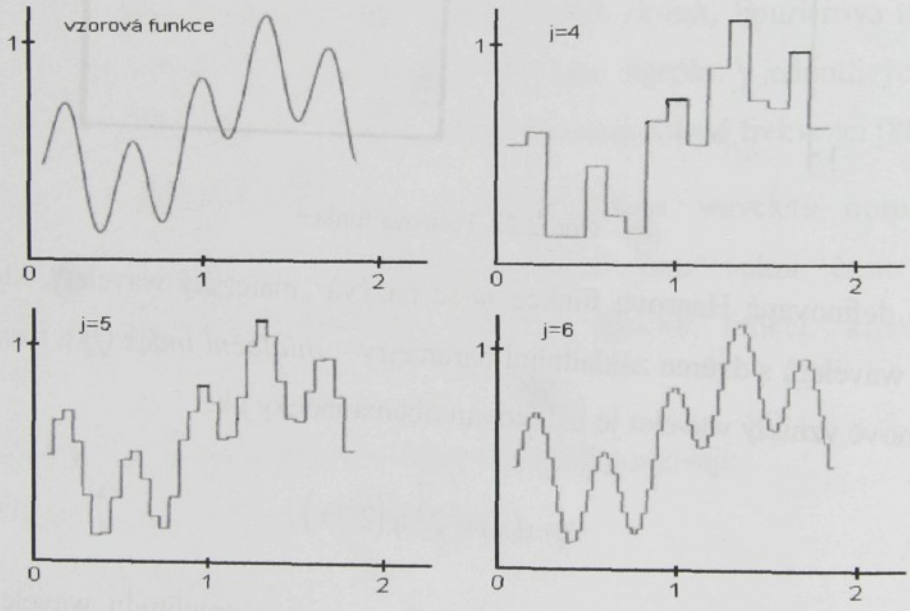
$$\psi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \psi\left(2^{-j} x\right) \tag{2.9}$$

Dilatační index „j" určuje šířku ve směru osy *x* a amplitudu waveletu, translační index „k" určuje skluz funkce podél osy *x*. Oba indexy vlastně určují výšku, délku a polohu jednotlivých schodů schodovitého průběhu při aproximaci (viz obr. 2.23). Mateřský wavelet má oba indexy nulové.

Dva wavelety se stejnými dilatačními indexy „j" a odlišnými translačními indexy „k" se nikdy nemohou překrývat, jejich součin je nulový a jsou tudíž ortogonální. Totéž platí i pro součin dvou waveletů s různými dilatačními indexy nezávisle na hodnotě translačního indexu. Součin dvou waveletů s oběma stejnými indexy je roven jedné. Jsou tedy též ortonormální. Integrál přes wavelet je však nulový, což je zřejmé mj. z obr. 2.22.

S rostoucím dilatačním indexem amplituda waveletu prudce stoupá, nabývá stejných záporných i kladných hodnot a jeho šířka stejně prudce klesá, takže čtverec jeho plochy zůstává jednotkový. To je vysvětlení kladné mocniny v amplitudě. V limitním případě, kdy parametr $j \to \infty$, je wavelet nekonečně úzký a nabývá nekonečné kladné i záporné hodnoty v tomtéž bodě, v počátku souřadné osy. Jedná se vlastně o superpozici dvou δ-funkcí v počátku souřadné osy, přitom jedna z nich má opačné znaménko.

Příklady docílených kvalit aproximace kvaziperiodických průběhů je možné vidět na obr. 2.23. Z obrázků je vidět, že kvalita aproximace je závislá na hodnotě dilatačního indexu „j". S rostoucím dilatačním indexem amplituda waveletu prudce roste, viz (2.9). Její pokles, jak tomu je na obr. 2.23, musí zajistit vhodné koeficienty, např. c_i ve vztahu (2.6).



Obr. 2.23 Způsoby aproximace pomocí Haarova waveletu, zvyšování rozlišení v závislosti na hodnotě dilatačního indexu

Tuto metodu jsme dále nerozvíjeli, neboť výpočet by byl značně komplikovaný. Mj. též z důvodu, že v principu nelze volbou dilatačního indexu zajistit hladkou křivku, ze které by bylo možné odečítat významný parametr – úhel sklonu ψ. Dalším problémem je složitost získávání ostatních strukturních parametrů, jejichž výpočet není možné pomocí waveletů automatizovat. Přestože jsou wavelety výhodnější z hlediska analýzy lokalizovaných defektů, z DFT je možné získat rovnou požadované geometrické parametry.

3 Fourierova transformace

Ačkoliv je Fourierova transformace známa již několik století, přes veškerý pokrok a nabídku moderních metod stále zůstává základním, jednoduchým a velmi účinným prostředkem v mnoha oblastech. Základní myšlenka pro využití Fourierovy transformace pro popis osy vlákenných svazků čili střednice je v tom, že se jedná o kvaziperiodický průběh.

V původní formě Fourierova transformace obecně převádí popis z časové oblasti do oblasti frekvenční. Výsledek ve frekvenční oblasti nazýváme spektrem. V elektrotechnice se mluví o spektrální analýze, zejména pokud se jedná o čistě periodický průběh. Po provedení transformace na tento signál získáme zastoupení jednotlivých harmonických v signálu. Je nutno zdůraznit, že provedením Fourierovy transformace se žádná další informace nezíská, ani neztratí. Ovšem ve formě spektra je tato informace mnohem názornější, v porovnání s tím, na co se dá usuzovat z časového průběhu. Pokud je nutné získat maximum informací o vlákenném svazku v kompozitu, je přirozené pokusit se na střednici aplikovat Fourierovou transformaci.

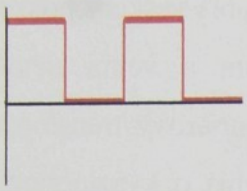
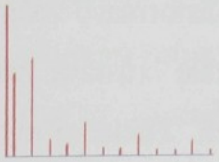
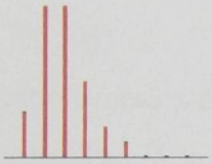
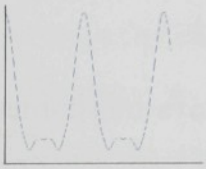
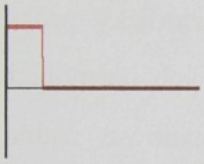
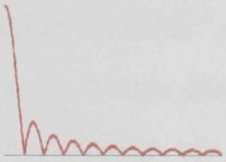
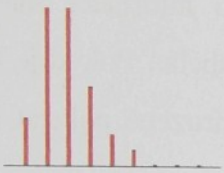
Přestože je Fourierova transformace běžně používána, je nutno být při její aplikaci obezřetný. To se týká zejména interpretace výsledků. Proto v této kapitole bude Fourierova transformace rozepsána podrobněji s cílem popsat všechny její podstatné vlastnosti.

3.1 Přehled forem Fourierovy transformace

Matematický tvar Fourierovy transformace závisí na typu signálu. Je možné uvažovat tyto typy:

- spojitý periodický
- spojitý neperiodický
- diskrétní s nekonečně mnoha prvky
- diskrétní s konečným počtem prvků

Přehledně jsou tvar spektra, jeho další základní vlastnosti a typy Fourierovy transformace znázorněny v tab. 3.1. Použité zkratky jsou FŘ – Fourierova řada, FT – (analogová) Fourierova transformace, DFT – diskrétní Fourierova transformace.

Signál (t)	Rozsah	Spektrum (k)	Rozsah	Typ FT
	Nekonečný (periodický)		a) Konečný b) Nekonečný	FŘ
	a) Konečný b) Nekonečný		Nekonečný (periodický)	FT
	a) Konečný b) Nekonečný c) Nekonečný		a) Nekonečný b) Konečný c) Nekonečný	FT
	Konečný (periodický)		Konečný (periodický)	DFT

Tab. 3.1 Základní vlastnosti a typy Fourierovy transformace

3.2 Komplexní čísla

Efektivní využití Fourierovy transformace předpokládá práci s komplexními čísly. Komplexní číslo[1] $\hat{A}$ je možné napsat ve čtyřech tvarech:

- geometrický $\hat{A}=[a_1,a_2]$
- složkový[2] $\hat{A}=a_1+j\,a_2$
- goniometrický $\hat{A}=A_o(\cos\varphi+j\,\sin\varphi)$
- komplexní $\hat{A}=A_o\,e^{j\varphi}$

V těchto vztazích jsou a_1 a a_2 po řadě reálná a imaginární složka, A_o je amplituda či modul a φ je fáze, přesněji fázová konstanta, či fázový úhel.

[1] Komplexní čísla důsledně značíme stříškou nad symbolem, jak je běžné v elektrotechnice.

[2] V souladu s elektrotechnikou značíme imaginární jednotku jako „j“.

V praxi se nejčastěji používá tvar složkový, který je při ručních výpočtech vhodný pro sčítání a odečítání, a tvar exponenciální, určený pro ruční násobení, dělení a obecnou mocninu. Převod tvaru exponenciálního na složkový je jednoduchý a plyne přímo z goniometrického tvaru, což je vlastně jen jiný zápis exponenciálního vyjádření:

$$\begin{aligned} a_1 &= A_0 \cos\varphi \\ a_2 &= A_0 \sin\varphi \end{aligned} \tag{3.1}$$

Z těchto vztahů lze odvodit opačný převod podle následujících vztahů:

$$\begin{aligned} A_0 &= \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \\ \varphi &= \operatorname{arctg}(a_2, a_1) \end{aligned} \tag{3.2}$$

Zpětný převod, pokud jde o fázi, je poněkud komplikovanější, protože funkce arctg(x) vrací fázový úhel v intervalu ⟨-π/2, π/2⟩, zatímco fázový úhel komplexního čísla je v intervalu ⟨-π, π). Při ručním výpočtu je nutno pro zápornou reálnou složku k funkci arctg (a_2/a_1) přičíst či odečíst π podle toho, zda je číslo ve třetím či čtvrtém kvadrantu. Naštěstí MatLab a další jazyky mají na tuto operaci speciální funkci arctg2(a_2, a_1), která vypočte fázový úhel v intervalu ⟨-π, π). Prvním argumentem této funkce je imaginární složka, druhým reálná složka.

3.3 Signály a vlny

Fourierova transformace byla původně odvozena pro signál, tj. pro průběh v časové oblasti. Nejjednodušší harmonický signál má tvar

$$u(t) = U_0 \sin(\omega t + \varphi). \tag{3.3}$$

kde $u(t)$ je okamžitá hodnota, někdy též nesprávně amplituda, U_0 je amplituda[3], ω je úhlová frekvence a φ fázová konstanta. Pro úhlovou frekvenci platí

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}, \tag{3.4}$$

kde f je frekvence a T perioda.

[3] Někdy též maximální amplituda, aby se odlišila od okamžité amplitudy.

Průběh (3.3) se nazývá kmit. Fyzikální příklady kmitů jsou harmonický časový průběh napětí, proudu, intenzity elektrického či magnetického pole apod. V případě kmitu jde obecně o časovou závislost. V případě střednice vlákenného svazku jde však o sinusovou či kosinusovou závislost výchylky na souřadnici, jedná se více o vlnu než kmit. Vlna je obecně popsána vztahem[4]

$$u(x,t) = U_o \sin(\omega t + kx + \varphi), \tag{3.5}$$

kde k je vlnová konstanta, pro níž platí

$$k = \frac{\omega}{v} = 2\pi \frac{f}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}, \tag{3.6}$$

kde v je rychlost šíření vlny a λ vlnová délka.

Pokud ve vztahu (3.5) položíme t=0, získá se „zmražená vlna"

$$u(x,t) = U_o \sin(kx + \varphi), \tag{3.7}$$

což je harmonický průběh $u(x)$ pro prostorovou nezávisle proměnnou x, tedy přesně to, co potřebujeme.

3.4 Fourierova řada

Fourierova řada se používá pro převod periodické funkce mezi souřadnicovou a vlnovou oblastí. Obvykle se uvádí ve třech ekvivalentních tvarech:

- matematický tvar vhodný pro odvozování základních vztahů
- elektrotechnická forma vhodná, např. pro spektrální analýzu
- komplexní forma, vhodná pro oba případy, další výhodou je jednoduchý zápis, nevýhodou je menší srozumitelnost

Všechny tvary zde budou postupně uvedeny. Cílem je ukázat, jak lze přejít od jednoho k druhému, a nastínit fyzikální význam.

---

[4] V tomto případě jde o vlnu šířící se zprava doleva. Běžně se před členem kx uvádí znaménko minus pro přirozenější směr šíření zleva doprava. Pro další postup je však znaménko plus výhodnější.

V případě nutnosti bude naznačeno odvození. Periodickou funkci v prostorové oblasti značíme $u(x)$. Předpokládá se, že její perioda je λ_o. Ve vlnové oblasti se ovšem jako nezávisle proměnné používá vlnového čísla k_o, které souvisí s vlnovou délkou známým vztahem

$$k_o = \frac{2\pi}{\lambda_o}. \tag{3.8}$$

Dále používáme tyto symboly:

- $u(x)$ ..... periodická funkce v prostorové oblasti
- A_n, B_n, C_n, D_n ..... koeficienty Fourierovy řady pro různá vyjádření
- φ_n, ψ_n ..... fáze komplexních koeficientů
- x ..... souřadnice (nezávisle proměnné) v prostorové oblasti
- k_o ..... vlnová konstanta jako nezávisle proměnná (souřadnice) ve vlnové oblasti
- $\lambda_o = 2\pi/k_o$ ..... vlnová délka

3.4.1 Matematický tvar

Periodickou funkci v prostorové oblasti $u(x)$ s periodou (vlnovou délkou) λ_o lze vyjádřit pomocí Fourierovy řady tímto vztahem

$$u(x) = \frac{A_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(nk_o x) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(nk_o x), \tag{3.9}$$

kde k_o je vlnová konstanta, která s vlnovou délkou λ_o souvisí vztahem (3.8).

Tento tvar je výhodný zejména pro odvození obecných vztahů pro výpočet koeficientů A_n, B_n a v jiných matematických úvahách. Naproti tomu se členy této reprezentace interpretují fyzikálně či elektrotechnicky velmi obtížně.

Na základě toho, že funkce

$$\sqrt{\frac{2}{\lambda o}}\cos(nx), \quad \sqrt{\frac{2}{\lambda o}}\sin(mx) \tag{3.10}$$

jsou ortonormální na intervalu $\langle 0, \lambda_o \rangle$, lze pro koeficienty A_n, B_n odvodit vztahy:

$$A_n = \frac{2}{\lambda_o}\int_0^{\lambda_o} u(x)\cos(nk_\omega x)\mathrm{d}x, \quad n = 0, 1, 2,...$$
$$B_n = \frac{2}{\lambda_o}\int_0^{\lambda_o} u(x)\sin(nk_\omega x)\mathrm{d}x, \quad n = 1, 2,... \tag{3.11}$$

Pomocí těchto vztahů lze vypočítat koeficienty A_n, B_n, pokud je funkce $u(x)$ zadána analyticky. Prakticky to lze ovšem jen v nejjednodušších případech (obdélníkové či pilové kmity, jednocestné či dvoucestné usměrnění v elektrotechnice).

O funkcích cos(nx) a sin(mx) se říká, že jsou ortogonální na intervalu $\langle 0, \lambda_o \rangle$, protože platí

$$\int_0^{\lambda_o} \cos(nk_\omega x)\sin(mk_\omega x)\mathrm{d}x = \frac{\lambda o}{2}\delta(m-n), \tag{3.12}$$

kde $\delta(k)$ je *Kroneckerovo delta*, definované pro celá čísla k takto

$$\delta(k) = 1 \text{ pro } k = 0$$
$$\delta(k) = 0 \text{ jinde.} \tag{3.13}$$

Ortogonální funkce cos(nx) a sin(mx) se chovají jako navzájem kolmé vektory pro $m \neq n$. Pokud je ještě integrál (3.12) roven jedné pro $m=n$, pak říkáme, že tyto funkce jsou ortonormální. Tuto podmínku splňují funkce (3.10).

3.4.2 Elektrotechnický tvar

Vztah (3.9) pro Fourierovu řadu lze snadno převést na tvar

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \cos(nk_\omega x + \varphi_n). \tag{3.14}$$

Tento tvar je vhodný pro fyzikální interpretaci Fourierovy řady. Periodickou funkci $u(x)$ lze vyjádřit jako superpozici obecně nekonečného počtu harmonických vln s vlnovými čísly nk_o, amplitudami D_n a fázovými konstantami φ_n, kde n=0,1,2, ...,∞. Pokud si uvědomíme vztah (3.8) mezi vlnovou konstantou a vlnovou délkou a za dominantní považujeme první harmonickou, což je zpravidla splněno, lze to říci ještě srozumitelněji.

Periodickou funkci $u(x)$ lze vyjádřit jako superpozici obecně nekonečného počtu harmonických vln s vlnovými délkami λ_o/n, amplitudami D_n a fázovými posuvy φ_n-φ_1 vůči první harmonické, kde n = 1, 2, ..., ∞. Amplitudy a fázové konstanty, či fázové posuvy, tvoří spektrum, mluvíme o amplitudovém a fázovém spektru. Graficky se vynášejí amplitudy a fáze ve formě čárového grafu s ekvidistantní vzdáleností svislých čar. Často se však uvádí v grafické formě jen amplitudové spektrum, protože se snadno interpretuje a obsahuje mnoho zřejmých informací. Fázové spektrum je však stejně důležité a pokud by se na něj zapomnělo, může se ze vztahu (3.14) získat úplně jiný výsledek. Z matematického popisu (3.9) lze dojít k elektrotechnickému (3.14) pomocí vztahů (3.2), viz sekce 3.2 pojednávající o komplexních číslech. Převodní vztahy od matematického popisu k elektrotechnickému mají tedy tvar

$$\begin{aligned} D_n &= \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \\ \varphi_n &= \operatorname{arctg} 2(-B_n, A_n). \end{aligned} \tag{3.15}$$

Zpětný převod je ještě jednoduší

$$\begin{aligned} A_n &= D_n \cos\varphi_n \\ B_n &= D_n \sin\varphi_n. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Tyto vztahy platí pro n = 1, 2, ... Pro n = 0 pak platí (3.14) a z (3.9) plyne

$$D_o = \frac{A_o}{2}. \tag{3.17}$$

Stejně dobře lze ve vztahu (3.14) použít i funkci sinus. Pak má Fourierova řada tvar

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \sin(nk_\omega x + \psi_n). \tag{3.18}$$

Pro převodní vztahy lze psát

$$\begin{aligned} D_n &= \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \\ \psi_n &= \operatorname{arctg}(A_n, B_n). \end{aligned} \tag{3.19}$$

Zpětný převod je pak

$$\begin{aligned} A_n &= D_n \cos\psi_n \\ B_n &= D_n \sin\psi_n \end{aligned} \tag{3.20}$$

Tyto vztahy platí pro n = 1, 2, ... Pro n = 0 pak platí (3.17).

3.4.3 Komplexní tvar

Běžně se v elektrotechnice požívá komplexní tvar pro Fourierovu řadu, který má řadu výhod, zejména snadné odvozování, jednoduché vztahy. Na druhé straně je jeho nevýhodou vyšší stupeň abstrakce. Umožňuje jak výpočet koeficientů, tak jejich snadnou interpretaci. Z tohoto tvaru se nejsnadněji přechází na diskrétní Fourierovu transformaci (DFT), proto bude popsán poněkud podrobněji.

Fourierova řada v komplexní reprezentaci se definuje vztahem

$$u(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{C}_n \, e^{jnk_o x}, \tag{3.21}$$

kde $\hat{C}_n$ jsou obecně komplexní koeficienty, které se vypočtou pomocí vztahů

$$\hat{C}_m = \frac{1}{\lambda_o} \int_{-\frac{\lambda_o}{2}}^{\frac{\lambda_o}{2}} u(x) \, e^{-jmk_o x} \, dx \, . \tag{3.22}$$

Integrovat se musí přes vlnovou délku, počátek však není pevně stanoven. Zde byly zvoleny integrační meze symetricky. Je ale fakt, že vhodnou volbou počátku integrace se může popis spektra, zejména fázového, zjednodušit. Někdy se pro stručnost o vztazích (3.21) a (3.22) mluví jako o přímé a zpětné komplexní Fourierově transformaci.

Koeficienty $\hat{C}_n$ lze vypočítat z definice (3.21) s využitím toho, že funkce

$$\sqrt{\frac{1}{\lambda_o}} e^{jnx}, \quad \sqrt{\frac{1}{\lambda_o}} e^{jmx} \tag{3.23}$$

jsou ortonormální na intervalu délky λ_o

$$\frac{1}{\lambda_o} \int_0^{\lambda_o} e^{jnk_o x} \, e^{jmk_o x} \, dx = \delta(m\text{-}n), \tag{3.24}$$

kde $\delta(k)$ je Kroneckerovo delta, definované pro celá čísla k takto:

$$\begin{aligned} \delta(k) &= 1 \text{ pro } k = 0 \\ \delta(k) &= 0 \text{ jinde} \end{aligned} \tag{3.25}$$

Komplexní koeficienty $\hat{C}_n$ se obvykle píší v exponenciálním tvaru

$$\hat{C}_n = C_{no} \, e^{j\varphi_n}, \tag{3.26}$$

kde C_{no} je amplituda a φ_n fáze n-té harmonické. Pro jednoduchost nebudeme někdy používat dva indexy, komplexní koeficient se důsledně značí stříškou nad symbolem, jeho amplituda je tentýž symbol bez stříšky. Pro komplexní koeficienty - harmonické, jejich amplitudy a fáze pak platí vztahy

$$\hat{C}_n = \hat{C}^*_{-n} \rightarrow C_{no} = C_{-no}\,;\ \varphi_n = -\varphi_{-n}. \tag{3.27}$$

S využitím vztahů (3.26) a (3.27) lze komplexní řadu (3.21) převést na reálný tvar

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{C}_n \mathrm{e}^{jnk_o x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{no} \mathrm{e}^{jnk_o x} \mathrm{e}^{j\varphi n} = \\ &= C_{no} \mathrm{e}^{j\varphi o} + \sum_{n=1}^{\infty} C_{no} \mathrm{e}^{jnk_o x} \mathrm{e}^{j\varphi n} + \sum_{n=-\infty}^{-1} C_{no} \mathrm{e}^{jnk_o x} \mathrm{e}^{j\varphi n} = \\ &= C_{no} \mathrm{e}^{j\varphi o} + \sum_{n=1}^{\infty} C_{no} \mathrm{e}^{jnk_o x} \mathrm{e}^{j\varphi n} + \sum_{n=1}^{\infty} C_{no} \mathrm{e}^{-jnk_o x} \mathrm{e}^{-j\varphi n} = \\ &= C_{oo} \mathrm{e}^{j\varphi o} + \sum_{n=1}^{\infty} C_{no} (\mathrm{e}^{j(nk_o x + \varphi n)} + \mathrm{e}^{-j(nk_o x + \varphi n)}) = \\ &= C_{oo} \mathrm{e}^{j\varphi o} + \sum_{n=1}^{\infty} 2C_{no} \cos(nk_o x + \varphi_n). \end{aligned} \tag{3.28}$$

Přitom bylo použito definice

$$\cos(x) = \frac{\mathrm{e}^{jx} - \mathrm{e}^{-jx}}{2}. \tag{3.29}$$

Porovná-li se poslední část (3.28) a (3.14), je vidět, že fáze harmonických souhlasí, zatímco pro amplitudy platí

$$C_n = \frac{D_n}{2}, \quad C_o = D_o, \quad \varphi_o = 0. \tag{3.30}$$

Poslední vztahy popisují vzájemný přechod mezi elektrotechnickým a komplexním tvarem Fourierovy řady.

3.5 Analogová Fourierova transformace

Zcela obecně je analogová Fourierova transformace definována jako dvojice

$$\hat{U}(jk) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x) \mathrm{e}^{-jkx} \mathrm{d}x \tag{3.31}$$

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{U}(jk)\, e^{jkx} dk \tag{3.32}$$

První vztah (3.31) se nazývá přímá Fourierova transformace, která převádí funkci $u(x)$ souřadnice x, kterou někdy nazýváme originál, na spektrální funkci $\hat{U}(jk)$ vlnového čísla k, případně vlnové délky $\lambda = 2\pi/k$. Té se někdy říká obraz. Na funkci $u(x)$ nejsou kladeny žádné omezující podmínky kromě té, aby integrál (3.31) existoval (kvadratická integrovatelnost). Obecně komplexní funkce $\hat{U}(jk)$ představuje amplitudové a fázové spektrum reálné funkce, originálu $u(x)$. Aby se zdůraznil její komplexní charakter, používá se často v argumentu imaginární jednotka j.Této konvence bylo dodrženo i zde, i když by její komplexní charakter měl být zřejmý ze stříšky nad symbolem. Druhý vztah (3.32) je definicí inverzní Fourierovy transformace, která umožní ze znalosti spektrální funkce $\hat{U}(jk)$ určit originál jako funkci souřadnic $u(x)$.

Obě transformace, přímá i inverzní, se běžně používají a někdy se v literatuře jejich definice mohou v detailech lišit – přehození znaménka, nebo násobení obou vztahů konstantou $1/\sqrt{2\pi}$. Z hlediska aplikací je důležitá ta okolnost, že obě funkce nemohou být současně nenulové pouze v určité oblasti nezávisle proměnné. Je-li jedna nenulová jen v určité oblasti, druhá se rozprostírá od $-\infty$ do $+\infty$. Analogová Fourierova transformace v sobě zahrnuje i ostatní transformace, zejména Fourierovu řadu.

Fourierova transformace je definována vztahy a (3.31) a (3.32), tedy se neodvozuje. Nicméně v literatuře se vysvětluje, že k přímé Fourierově transformaci lze dojít limitním přechodem z definice koeficientů komplexní Fourierovy řady (3.22). Při použití poněkud jiného značení má n-tý koeficient tvar

$$\hat{U}_n = \hat{U}(n) = \hat{U}(nk_o) = \frac{1}{\lambda_o} \int_{-\frac{\lambda_o}{2}}^{\frac{\lambda_o}{2}} u(x) e^{-jmk_o x} dx . \tag{3.33}$$

Protože originál $u(x)$ je obecně neperiodický, navíc se může rozprostírat od $-\infty$ do $+\infty$, plyne z toho, že vlnová délka roste nade všechny meze. Pro vlnovou konstantu (3.8) pak platí

$$\lambda_o \to \infty \Rightarrow k_o = \frac{2\pi}{\lambda_o} \to 0 . \tag{3.34}$$

Je tedy nutno v (3.32) integrovat rovněž od $-\infty$ do $+\infty$. Protože vlnová konstanta konverguje k nule, diskrétní funkce $\hat{U}_n$, definovaná na spočetné množině bodů $n = 0, 1, 2, ..., -1, -2, ...$, přejde ve funkci definovanou všude.

$$k_o \to 0 \Rightarrow nk_o \to k \ldots \hat{U}_n = \hat{U}(nk_o) \to \hat{U}(k) \tag{3.35}$$

Na základě posledních dvou vztahů obdržíme definici (3.31)[5].

V důsledku konvergence vlnové konstanty k nule, přejde sumace v komplexní řadě (3.21) na integraci, a tím dostaneme (3.32).

3.6 Trigonometrický polynom

Fourierova řada v obecném případě obsahuje nekonečný počet harmonických, jejichž amplitudy s rostoucím řádem n-té harmonické klesají, v nejhorším případě nepřímo úměrně řádu harmonické, tj. alespoň jako $1/n$. Z praktického hlediska je tedy vliv velmi vysokých harmonických zanedbatelný a v řadě (3.9), (3.14), (3.21) apod. lze uvažovat pouze prvních N nevýznamnějších harmonických. Pak má například řada (3.14) tvar

$$u(x) = \sum_{n=0}^{N} D_n \cos(nk_o x + \varphi_n). \tag{3.36}$$

a nazývá se trigonometrický polynom. V praktických aplikacích se běžně používá právě tento typ k efektivní aproximaci periodického průběhu. Těsně souvisí i s diskrétní Fourierovou transformací.

3.7 Diskrétní Fourierova transformace

Diskrétní Fourierova transformace se týká signálů konečné délky ekvidistantně vzorkovaných. Vzorkováním rozumíme odečtení hodnoty signálu v pravidelně rozložených bodech.

---

[5] Nevysvětlili jsme, jaký důsledek má to, že výraz $1/\lambda_o$ před integrálem v (3.33) konverguje k nule. Ten zajistí, aby pravá strana v (3.33) zůstala konečná. Navíc se nejedná o přesné odvození, ale pouze o vysvětlení.

Předpokládejme, že signál *u(x)* má délku *L* a na ní volíme *N* stejně vzdálených vzorků. Pak je vzdálenost mezi vzorky

$$\Delta x = \frac{L}{N} \tag{3.37}$$

a signál je potom popsán hodnotami v místě vzorků

$$u_n = u(x_n) = u(n\Delta x) \qquad n = 0, 1, 2, ...N-1, \tag{3.38}$$

tj. celkem *N* údaji v prostorové oblasti.

Přímá diskrétní Fourierova transformace přiřadí těmto vzorkům *N* spektrálních čar $\hat{U}_0$, $\hat{U}_1$,....$\hat{U}_{N-1}$ ve vlnové oblasti podle vztahu

$$\hat{U}_m = \sum_{n=0}^{N-1} u_n e^{-j\frac{2\pi}{N}nm} \qquad m = 0, 1, 2, ...N-1. \tag{3.39}$$

Zpětná diskrétní Fourierova transformace provádí opačnou operaci: *N* spektrálním čarám $\hat{U}_0$, $\hat{U}_1$,....$\hat{U}_{N-1}$ ve vlnové oblasti přiřadí *N* vzorků signál v prostorové oblasti podle vztahu

$$u_n = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \hat{U}_m e^{j\frac{2\pi}{N}nm} \qquad n = 0,1,2,.....N-1. \tag{3.40}$$

Lze ukázat, že pro komplexní spektrální čáry $\hat{U}_n$ platí v případě lichého *N*

$$\hat{U}_i = \hat{U}^*_{N-i}, \quad i = 1, ..., \frac{N-1}{2}. \tag{3.41}$$

Pro sudé *N* se tento vztah píše poněkud složitěji. Důležité je však to, že jak přímá, tak inverzní DFT má stejný počet parametrů. Pro sudý počet vzorků přímá DFT vyžaduje *N* vzorků a dává (*N*/2)+1 nezávislých amplitud a (*N*/2)-1 nezávislých fázových konstant spektrálních čar. Inverzní DFT postupuje opačně. Pro lichý počet vzorků to platí obdobně, (*N*+1)/2 amplitud a (*N*-1)/2 fázových konstant.

S přihlédnutím ke vztahu (3.41) by nemělo překvapit, že při zobrazení celého amplitudového spektra výška spektrálních čar nejprve klesá, po překročení poloviny spektra však začíná růst. Levá i pravá část jsou samozřejmě symetrické. Totéž platí pro fáze, v tom případě levá i pravá část jsou antisymetrické. Stačí tedy zobrazit maximálně polovinu spektra.

V definici transformace se nikde nevyskytuje vzdálenost Δx mezi vzorky signálu, ani vzdálenost Δk mezi spektrálními čarami, pouze vybrané či vypočítané hodnoty. Ke vztahu mezi nimi dojdeme numerickou integrací vztahu (3.22) pro výpočet komplexních spektrálních čar. Označíme

$$\begin{aligned} x_n &= n\Delta x \qquad n = 0, 1, 2, \ldots N-1 \\ k_m &= m\Delta k \qquad m = 0, 1, 2, \ldots N-1 \\ u_n &= u(x_n) = u(n\Delta x) \qquad n = 0, 1, 2, \ldots N-1 \\ \hat{U}_m &= \hat{U}(k_m) = \hat{U}(m\Delta k) \qquad m = 0, 1, 2, \ldots N-1 \\ L &= \lambda_o = N\Delta x. \end{aligned} \tag{3.42}$$

Integraci v mírně upraveném vztahu (3.22) nahradíme sčítáním přes ekvidistantní vzorky $u(x_o)$, $u(x_1)$, ..., $u(x_{N-1})$, takže

$$\hat{U}_m = \frac{1}{\lambda_o}\int_0^{\lambda_o} u(x)\mathrm{e}^{-jmk_o x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda_o}\sum_{n=0}^{N-1} u(x_n)\mathrm{e}^{-jmk_o x_n}\Delta x\,. \tag{3.43}$$

S použitím vztahů v (3.42) poslední výraz upravíme na

$$\hat{U}_m = \hat{U}(m\Delta k) = \frac{\Delta x}{N\Delta x}\sum_{n=0}^{N-1} u(x_n)\mathrm{e}^{-jn\Delta x m\Delta k} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} u_n \mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\Delta x m\Delta k}, \quad m = 0, 1, \ldots N-1\,. \tag{3.44}$$

Porovnáme-li vztahy (3.40) a (3.44), zjistíme, že se shodují, pokud platí

$$\frac{2\pi}{N} nm = n\Delta x m\Delta k \qquad n, m = 0,1,2,\ldots\ldots N-1\,, \tag{3.45}$$

což je splněno, když

$$\Delta x\Delta k = \frac{2\pi}{N}\,. \tag{3.46}$$

Toto je základní vztah mezi intervalem vzorkování a intervalem mezi spektrálními čarami. Dále uvedeme některé jeho praktické důsledky.

Je-li délka signálu L a použijeme-li N vzorků, pak platí

$$\Delta x = \frac{L}{N} \qquad \Delta k = \frac{2\pi}{L}\,. \tag{3.47}$$

Důležitý je zejména druhý vztah, z něhož plyne, že vzdálenost mezi spektrálními čarami závisí pouze na délce signálu L, nikoliv na počtu vzorků. Počet vzorků ovšem určuje rozsah spektra. Maximální vlnová konstanta je

$$k_{\max} = (N-1)\Delta k = (N-1)\frac{2\pi}{L}. \tag{3.48}$$

Pro polohy spektrálních čar určené vlnovou konstantou platí

$$k_m = m\Delta k = m\frac{2\pi}{L} \qquad m = 0,1,2,\ldots N-1. \tag{3.49}$$

Odtud též automaticky plyne předchozí vztah.

Kromě vlnové konstanty můžeme též použít vlnové délky. Protože $k=2\pi/\lambda$, získáme snadno vztah

$$\lambda_m = m\Delta\lambda = \frac{L}{m} \qquad m = 0,1,2,\ldots N-1. \tag{3.50}$$

Vlnová délka je nepřímo úměrná řádu harmonické, což jen potvrzuje správnost odvození. Pro praktické účely je použití vlnových délek nevhodné, protože spektrum je silně zhuštěno na začátku grafu.

Závěrem je nutno upozornit na tato praktická omezení:

- Lze snadno ukázat ze vztahů (3.39) a (3.40), že jak vzorky, tak spektrum jsou periodické. Délka periody ve vzorcích je $N\Delta x$, ve spektru pak $N\Delta k$.
- Ze druhého výrazu ve vztahu (3.47) plyne, že vzdálenost mezi spektrálními čarami je určena pouze délkou vzorkovaného úseku. To odpovídá i klasické Fourierově řadě, zde je odstup spektrálních čar určen vlnovou délkou. V případě DFT jej lze zkrátit rozšířením délky vzorkovaného úseku[6], pokud však existuje. Přidáním nulových vzorků měníme informační obsah, protože periodický průběh v souřadnicové oblasti bude obsahovat prázdné úseky, což asi není správné.
- Při stejném odstupu lze počet spektrálních čar zvyšovat počtem vzorků. Dostatečným počtem vzorků lze dosáhnout toho, že pro analyticky zadaný průběh důležité harmonické získané Fourierovou řadou a DFT se téměř shodují.

[6] U klasické Fourierově řady lze integrovat přes několik vlnových délek, avšak na tvaru spektra se to nemusí projevit.

3.8 Nedostatky diskrétní Fourierovy transformace

Diskrétní Fourierova transformace je velmi efektivní metoda, která dává velmi rychle a s minimální námahou požadované výsledky. Na druhé straně její nekritické používání může vést k vážným chybám, které se těžko zjišťují a navíc mohou mít nedozírné následky.

V literatuře se běžně upozorňuje na dvě takové chyby:

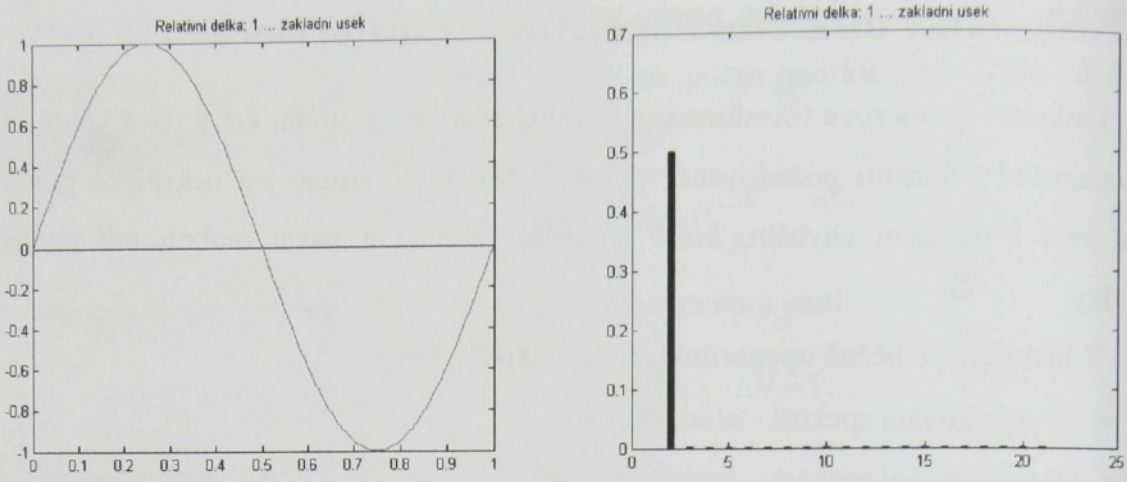
- Dvojníkování spektra - *aliasing*.
- Rozmazávání spektra – *leakage*.

Podmínku pro získání správného spektra specifikuje *Shanonův teorém*, který říká, že vzorkovací frekvence musí být alespoň dvojnásobkem maximální frekvence signálu. Pokud to není splněno ve spektru se objeví další spektrální čáry, které tam nepatří. Podle své polohy se nazývají dvojníci. V souřadnicové oblasti Shanonova věta požaduje vzorkování alespoň dvakrát na vlnovou délku. Tento požadavek je v našem případě splněn, a proto jev dvojníkování nemůže nastat. Každá spektrální čára má fyzikální význam. Nevhodnou volbou délky vzorkovaného intervalu se však může projevit rozmazáváním spektra, které bude mít více čar, než je nezbytně nutné. Podrobně o tom pojednává následující část.

3.9 Rozmazání spektra (leakage)

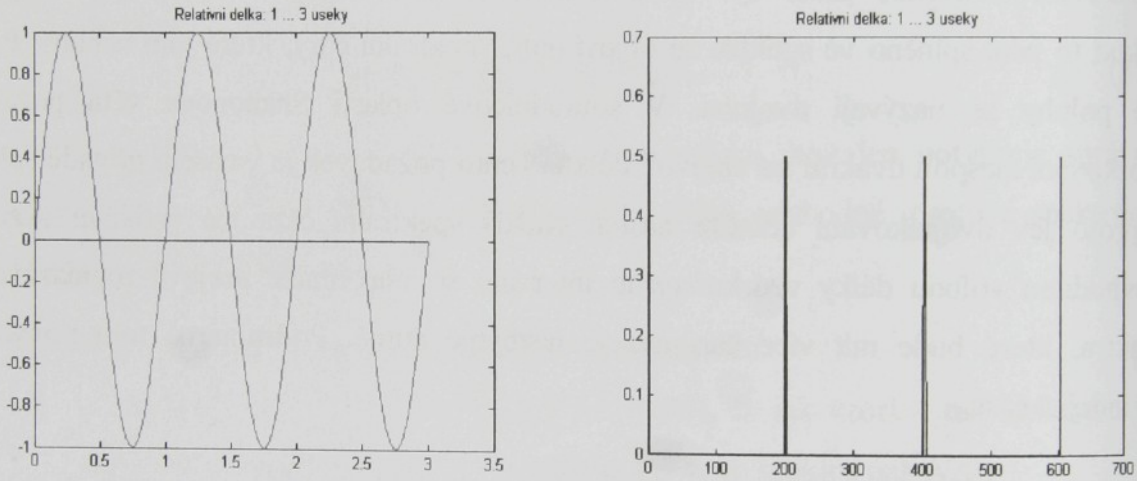
K rozmazání spektra dochází, pokud se při DFT nevzorkuje přesně jedna či několik period. Je nutno si uvědomit, že DFT předpokládá diskrétní periodický průběh jak v prostorové, tak vlnové oblasti. To znamená, že vzorkovaný průběh se v prostorové oblasti neustále opakuje, totéž platí pro spektrum. Lépe to možná ilustrují následující obrázky.

Uvažujme harmonický průběh v prostorové oblasti a vzorkujme přesně jednu vlnu, jak je tomu na obr. 3.1a. Ve spektru na obr. 3.1b je vidět jen jednu spektrální čáru, jak se dalo předpokládat. Průběh v prostorové oblasti je periodický, jak potvrzuje obr. 3.2a, kde jsou vedle sebe tři vzorkované úseky. Stejně tak je spektrum periodické, jak plyne z obr. 3.2b, kde jsou též tři úseky.



a) b)

Obr. 3.1 Harmonický průběh vzorkované vlny (a), spektrum s jednou spektrální čarou (b)

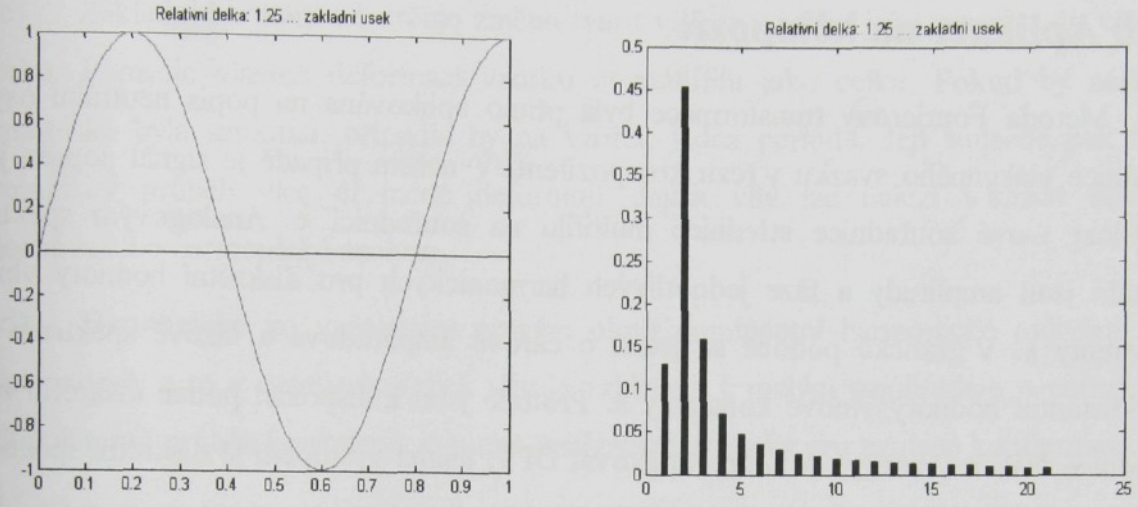


a) b)

Obr. 3.2 Periodický harmonický průběh v prostorové oblasti (a), periodické spektrum (b)

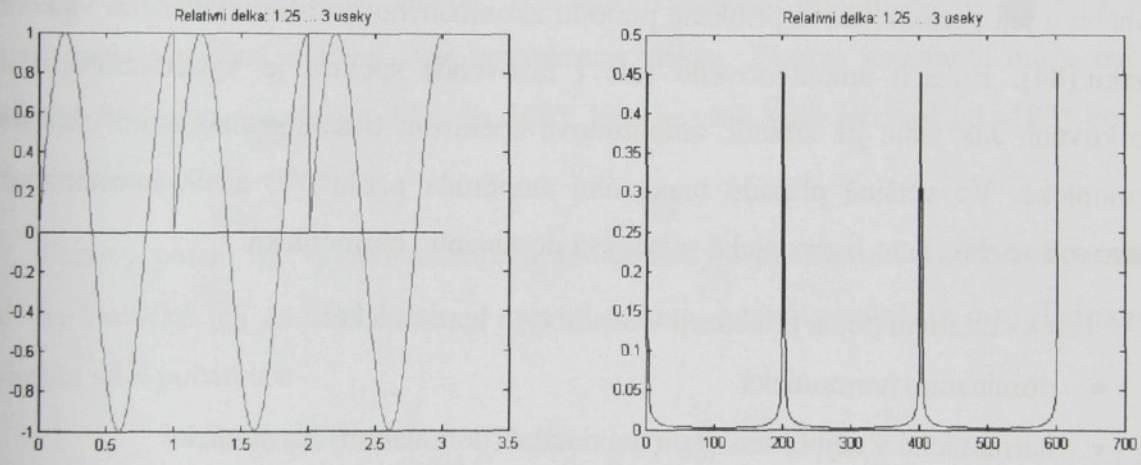
Nyní vzorkujme tentýž průběh tak, že se zabere jedna a čtvrt vlny, jak ukazuje obr. 3.3a. Ve spektru na obr. 3.3b je vidět několik výrazných spektrálních čár, rozložených v blízkosti jediné čáry při přesném vzorkování. Ta však stále zůstává dominantní. Vysvětlení je na obr. 3.4a. Složením vzorkovaných úseků dostaneme sice periodický, ale nikoliv harmonický průběh, jak jsme předpokládali.

Odtud je zřejmé, že spektrum na obr. 3.3b odpovídá jinému průběhu v prostorové oblasti než harmonickému. Ve vlnové oblasti odpovídá periodickému průběhu na obr. 3.4a rozmazané periodické spektrum, jak upozorňuje obr. 3.4b, jehož detail v okolí maxim je na obr. 3.3b, Vše je formálně v pořádku.



a) b)

Obr. 3.3 Harmonický průběh vzorkované vlny (1 a 1/4 vlny) (a), spektrum s několika spektrálními čarami (b)



a) b)

Obr. 3.4 Periodický neharmonický průběh v prostorové oblasti (a), rozmazané periodické spektrum

Tento příklad ukazuje, že vzorkování na celý počet vlnových délek je velmi důležité. Rozmazání spekter se výrazně nesnižuje tím, že vzorkujeme větší počet vlnových délek. Spektrum při vzorkování na deset a čtvrt vlnové délky se podobá spektru získaného vzorkováním pro jednu a čtvrt vlnové délky, které je na obr. 3.3b. Pouze maximum se posouvá k vyšším harmonickým a zvýrazněných harmonických přibývá. V elektronice se tento problém řeší váhovou funkcí, která omezí rozmazání spektra, avšak na koncích vzorkovaného úseku snižuje funkční hodnoty.

3.10 Aplikace na kompozit

Metoda Fourierovy transformace byla přímo aplikována na popis neutrální osy či střednice vlákenného svazku v řezu kompozitem. V našem případě je signál popsán jako závislost y-ové souřadnice střednice multifilu na souřadnici x. Analogovým spektrem signálu jsou amplitudy a fáze jednotlivých harmonických pro diskrétní hodnoty vlnové konstanty k. V grafické podobě se jedná o čárové amplitudové a fázové spektrum pro ekvidistantní hodnoty vlnové konstanty k. Protože jsou k dispozici pouze diskrétní body střednice vláken (vzorky), je nutno aplikovat DFT, jejímž výstupem je diskrétní spektrum, které má méně spektrálních čar než analogové.

Ve spektru jsou různě zastoupeny vyšší i nižší harmonické, ale amplituda jedné z nich nabývá výrazného maxima. Tato harmonická se nazývá maximální harmonická průběhu a její perioda udává přibližně periodu zkoumaného průběhu zvlněného vlákenného svazku [84]. Rozsah amplitudového (ale i fázového) spektra je výsledkem zvoleného vzorkování. Jak jsme již zmínili, amplitudové spektrum obsahuje maximum okolo vyšší harmonické. Ve většině případů maximální amplituda přísluší 7. až 9. harmonické pro plátnovou vazbu. Tato harmonická se nazývá dominantní harmonická.

Pro kvalitativní popis přicházejí v úvahu tyto harmonické:

- dominantní harmonická
- harmonické v nejbližším okolí maximální (dominantní) harmonické
- základní harmonická, tj. s číslem 1, a její nejbližší sousední harmonické
- harmonické ve vzdálenějším okolí od maximální harmonické

Základní význam jednotlivých skupin je zhruba tento:

a) Maximální harmonická má největší význam, protože určuje periodicitu geometrického průběhu vlákna, tedy vlnovou délku jeho zvlnění. Její hodnota je délka vzorku dělená číslem harmonické. Podíl se ještě musí zaokrouhlit na přirozené číslo. Pokud se ostatní harmonické odstraní, dostane se čistě harmonický tvar vlákna.

b) Harmonické v nejbližším okolí maximální harmonické, například je-li dominantní harmonická osmá, jedná se přibližně o 5., 6., 7., a potom 9., 10., 11. harmonickou. Dolní z nich (5., 6., 7) ovlivňují silně průběh vlákna v rozsahu několika vlnových délek. Horní pak mění tvar v rámci jedné vazné vlny. Kvantitativně lze jejich vliv ilustrovat graficky.

c) Základní harmonická určuje změnu tvaru vlákna v celém jeho rozsahu, tj. v celém vzorku. Popisuje vlastně deformaci vzorku či multifilu jako celku. Pokud by základní harmonická byla samotná, připadla by na vzorek jedna perioda. Její sousedé pak tento harmonický průběh více či méně deformují. Jejich vliv lze nalézt v každé učebnici pojednávající o harmonické analýze.

d) Harmonické ve vzdáleném pravém okolí dominantní harmonické ovlivňují tvar jedné periody a to v detailech. Jejich vliv je vzhledem k malým amplitudám nepatrný. Jak ovlivňují tento průběh konkrétně, je nutno analyzovat graficky pro zvolené konfigurace.

Fázové spektrum popisuje posuv jednotlivých harmonických vůči sobě navzájem. Pokud jsou všechny fázové konstanty nulové, všechny harmonické mají v počátku vlákna nulovou hodnotu. Fázové spektrum způsobí, že tato podmínka není splněna, a tím se tvar vlákna může dosti podstatně změnit, tzn. že při stejném amplitudovém spektru může fázové spektrum silně ovlivnit tvar aproximace vlákna. Fázová konstanta může nabývat libovolné hodnoty v rozsahu od 0° do 360°, lépe je však volit interval od -180° do 180° nebo v radiánech od $-\pi$ do $+\pi$.

Fázový posuv lze vyjádřit názorněji geometrickým posuvem. Je-li fázová konstanta h-té harmonické φ_h radiánů, pak je první nulová hodnota průběhu h-té harmonické posunuta vůči počátku o

$$\Delta_h = \frac{\varphi_h}{\pi} \cdot \lambda_h = \frac{\varphi_h}{\pi} \cdot \frac{L}{h}, \tag{3.51}$$

kde L je délka vzorku. Kladná hodnota znamená posuv vlevo, záporná vpravo.

Původ jednotlivých složek amplitudového a fázového spektra v technologickém procesu lze jen obtížně určit.

Uvažujeme tyto fáze zpracování kompozitu:

a) Tkanina v důsledku výrobních nepřesností není ideální, ani osy jednotlivých vláken nemají nejen harmonický ale ani přísně periodický průběh. To znamená, že původ mnohých harmonických je již zde a jejich příčinou může být obecně kvaziperiodicita, která se projevuje zejména jako odchylka od ideálního harmonického průběhu.

b) K výraznému fázovému posuvu dojde při kladení vrstev na sebe, nelze je uložit přesně v zákrytu. Zde je hlavní příčina složitého průběhu fázového spektra.

c) K menšímu posuvu vrstev dojde i při lisování, což je dodatečná a asi i konečná příčina změny fázového spektra. Výrazně se zde mění tvar vláken, tím se podstatně změní amplitudové spektrum (zvětší se amplitudy i počet harmonických).

Aproximace pomocí DFT je vhodná pro získání konkrétních strukturních parametrů vlákenného systému tkané výztuže. Ukazuje se, že pokud se vyberou jen nejvýznamnější harmonické, můžeme poměrně přesně aproximovat průběh osy multifilu pomocí několika málo parametrů (10 až 20). Z aproximačních křivek, které představují průběh os jednotlivých vlákenných svazků tkaninové výztuže, bylo možné získat strukturní parametry, jako je úhel provázání ϕ či úhel sklonu ψ, délku a výšku vazné vlny L, H a ostatní parametry periodicity (fázový posuv $\Delta\varphi$) [41], jejich popis je v části 2.8.

4 Statistická analýza

Technologie přípravy kompozitů je velice složitá, což znamená, že není možné během jejich realizace dodržet striktně všechny podmínky a udržet všechny parametry na předepsaných hodnotách. Nutně se uplatňují náhodné odchylky od předpokládaných podmínek a hodnot parametrů. Jinými slovy, nelze dosáhnout toho, aby struktura všech výrobků byla naprosto shodná. Totéž platí i o materiálových vlastnostech jednotlivých složek struktury, v případě tkaninového kompozitu zejména matrice a vláken. Protože struktura výrazně ovlivňuje výsledné vlastnosti, má to za následek, že se nejen každá nová výroba liší co do parametrů, např. pevnosti, od předchozí, ale liší se i jednotlivé výrobky v rámci téže výrobní šarže a dokonce ani jednotlivé části téhož výrobku nejsou zcela totožné. V případě laboratorní přípravy se mluví o vzorcích místo o výrobcích a tohoto termínu budeme také používat.

Z předchozí části vyplývá, že vlastnosti jednotlivých vzorků se nutně musí poněkud lišit. Každý parametr bude tedy mít konstantní složku a k ní se bude přidávat složka nahodilá. Úkolem statistiky je právě určit obě tyto složky co nejpřesněji, a tím získat nejen vyčerpávající informace o stávajících výsledcích, ale i případné podklady pro to, jak upravit technologii.

Statistiku lze chápat ve dvou smyslech. V obvyklém slova smyslu se jedná o prezentaci hromadných dat, s čímž se setkáváme zejména ve sdělovacích prostředcích, například jako čtvrtletní zprávy Statistického úřadu. V našem případě jde však o matematickou statistiku, která se zabývá kvantitativním popisem náhodných jevů. Jejím úkolem je získat maximum exaktních informací o studovaném ději. V tomto případě jde o náročnou vědní disciplínu a její plné pochopení je podmínkou správné interpretace jejích závěrů. Pokud se to nezvládne, může nesprávná interpretace výsledků vést ke zdánlivému potvrzení lidové charakteristiky statistiky jako „Přesné výpočty s nepřesnými čísly".

Podstatnou složkou statistické teorie je statistická analýza, která směřuje k poznání zákonitostí, jimiž se náhodné veličiny a náhodné procesy řídí. Vychází ze souboru dat, která se získají z experimentu, a jejím cílem je získat objektivní popis sledované veličiny nebo procesu. Způsob, jako se to dělá, je zhruba popsán v této kapitole.

4.1 Statistické zpracování dat

Základním pojmem statistiky je pravděpodobnost. Obvykle se vysvětluje na systému, v němž náhodná veličina může nabývat několika diskrétních hodnot – hrací kostka. V našem případě se však jedná o spojitou náhodnou veličinu, kterou označíme X, a která může nabývat libovolných hodnot v určitém intervalu. Hodnotu, kterou náhodná veličina X nabývá, označíme x.

Základním problémem statistiky je určit rozdělení náhodné veličiny, které lze popsat dvěmi ekvivalentními způsoby:

- distribuční funkce
- hustota pravděpodobnosti

Distribuční funkce je definována takto:

Distribuční funkcí náhodné veličiny X nazveme reálnou funkci $F(x)$, definovanou pro každé reálné x vztahem

$$F(x) = P(X \leq x), \tag{4.1}$$

kde $P(X \leq x)$ je pravděpodobnost toho, že náhodná veličina X bude mít hodnotu menší nebo rovnou x. Spojitá rozdělení náhodné veličiny jsou obecně definována na reálné ose, ale pro konkrétní rozdělení může být definiční obor užší. Pro distribuční funkci platí tyto podmínky:

- je neklesající funkcí v definičním oboru
- rozsahem funkčních hodnot je uzavřený interval $\langle 0, 1 \rangle$

Hustota pravděpodobnosti $f(x)$ slouží k určení pravděpodobnosti $\mathrm{d}P$ toho, že náhodná veličina X nabývá hodnoty v infinitesimálním intervalu $(x, x+\mathrm{d}x)$,

$$\mathrm{d}P = f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{4.2}$$

Pak pravděpodobnost toho, že náhodná veličina X nabývá hodnoty x v intervalu $\langle a, b \rangle$ je dána vztahem

$$P(a \leq x < b) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x. \tag{4.3}$$

Názorně je možné vztah (4.3) vysvětlit tak, že pravděpodobnost toho, že náhodná veličina X má hodnoty z intervalu $\langle a, b\rangle$ je možno vyjádřit obsahem plochy, která je ohraničena svislými přímkami x=a, x=b, vodorovnou osou a grafem hustoty pravděpodobnosti $f(x)$.

Ze vztahu (4.3) a definice (4.1) vyplývá, že pro distribuční funkci náhodné veličiny se spojitým rozdělením platí

$$F_x(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\mathrm{d}x \,. \tag{4.4}$$

Z tohoto vztahu též vyplývá, že hustotu pravděpodobnosti získáme derivací distribuční funkce

$$f(x) = \frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} \,. \tag{4.5}$$

Distribuční funkce a hustota pravděpodobnosti tedy podávají stejnou informaci, každá však v jiné formě.

Výše jsme ukázali, že obecně je distribuční funkce $F(x)$ neklesající na intervalu $(-\infty, +\infty)$, tedy monotónní, a mění se na tomto intervalu od 0 do 1. Také platí obráceně, že jakákoliv funkce definovaná na reálné ose či její části, která splňuje výše uvedené podmínky, je funkcí distribuční. Z toho plyne, že distribučních funkcí je neomezený počet. Ovšem pro všechna prakticky významná rozdělení byly již dávno definovány.

Mezi hustotou pravděpodobnosti a distribuční funkcí platí jednoduché vztahy (4.4) a (4.5). Distribuční funkce je určitým integrálem hustoty pravděpodobnosti, kde obecně platí, že dolní mez je $-\infty$ a horní mez je bod, v němž distribuční funkci počítáme. Proto také teoreticky nezáleží na faktu, zda k popisu rozložení použijeme distribuční funkci či hustotu pravděpodobnosti.

Z praktického hlediska je zde podstatný rozdíl, který je založen na vztahu mezi derivací a integrací dané funkce:

- Derivace zdůrazňuje detaily na teoretickém průběhu a zvýrazňuje chyby na experimentální křivce, například šum, náhodné odchylky.
- Integrace zmenšuje detaily na teoretickém průběhu a potlačuje chyby na experimentální křivce, tzn. že působí právě naopak.

Z těchto vlastností vyplývá skutečnost, že při teoretickém popisu konkrétního rozdělení se dává přednost hustotě pravděpodobnosti před distribuční funkcí, které si jsou pro všechna praktická rozdělení velmi podobné. Graficky se proto často znázorňuje jen hustota pravděpodobnosti. Teoreticky je tedy vhodnější použít právě hustoty pravděpodobnosti.

Z praktického hlediska je tomu právě naopak. Uvažuje-li se případ zpracování experimentálních dat, která jsou náhodným výběrem z určitého rozdělení, je počet těchto dat omezený a většinou je jich i poměrně málo. Prakticky lze z experimentálních dat sestavit distribuční funkci. Stanovení hustoty pravděpodobnosti je podstatně méně přesné, proto se obvykle dává přednost histogramu.

Na grafických výstupech s oběma funkcemi, které dále uvádíme, se potvrzuje naše kvalitativní tvrzení, že integrace chyby potlačuje, zatímco derivace chyby zvýrazňuje - průběh distribuční funkce je hladší v porovnání s tvarem hustoty pravděpodobnosti. Z několika výrazných maxim na histogramu, z něhož se aproximuje experimentální křivka hustoty pravděpodobnosti, tedy ještě neplyne, že se jedná o superpozici několika rozdělení. Naopak, snadno se dá simulací ukázat, že obvykle jde o nedostatek vstupních dat. Pokud by se počet vstupních dat zvětšoval a typ rozdělení se neměnil, extrémy na křivce hustoty pravděpodobnosti by se zpravidla postupně zmenšovaly, až by jich většina vymizela.

Z výše provedeného odhadu relativní chyby distribuční funkce a hustoty pravděpodobnosti lze vysvětlit praktický požadavek na minimální počet dat. Uvádí se, že minimální počet dat ve výběru náhodné veličiny by měl být alespoň 500. Při dělení histogramu na deset tříd tak na třídu připadne v průměru padesát dat a průměrná relativní chyba je 2%, při dělení na dvacet tříd je průměrná relativní chyba 4%, což jsou již přijatelné hodnoty. Relativní chyba pro střední a horní část distribuční funkce bude v tomto případě hluboko pod 1%.

4.1.1 Základní výběrové charakteristiky

Statistická analýza se provádí na základě reprezentativního vzorku, tj. náhodného výběru. Reprezentativní výběr splňuje tyto dvě podmínky:

- Všechny prvky výběru $\{x_i\}$, $i = 1,\ldots,$ N a jsou chápány jako náhodné veličiny, které se řídí stejným zákonem rozdělení, tzn. že výběr je *homogenní*.

- Hodnoty x_i zahrnuté do výběru jsou vybrány nezávisle na sobě. Výběr kterékoliv z nich neovlivňuje hodnotu žádného dalšího prvku výběru.

Základním úkolem statistické analýzy je nalézt na základě náhodného výběru příslušné rozdělení náhodné veličiny. Obvykle se však tato úloha redukuje na nalezení či přesněji odhad parametrů tohoto rozdělení. Nejznámějšími z nich jsou střední hodnota a rozptyl.

Dovolíme si připomenout rozdíl mezi parametry a charakteristikami toho či onoho rozdělení, protože těchto pojmů dále často používáme. Parametry jsou číselné údaje získané z rozdělení na základě odvozených vztahů. Tyto parametry mají přesně definovaný názorný význam a řadu vlastností. Nejznámějšími parametry jsou střední hodnota a směrodatná odchylka. Například směrodatná odchylka σ má ten názorný význam, že u normálního rozdělení do intervalu $(\mu\text{-}3\sigma, \mu\text{+}3\sigma)$ padne 99,7% všech hodnot. Symbolem μ je označena střední hodnota. Charakteristikami rozumíme funkce, které popisují rozdělení, je to například hustota pravděpodobnosti. Parametry v nich vystupují jako konstanty.

V zásadě rozlišujeme dva typy těchto parametrů:

- Statistické (teoretické) parametry, například statistické momenty. Pro ně se z analytické formy hustoty pravděpodobnosti či distribuční funkce odvozují obecné výrazy pro jejich výpočet. Pokud bychom znali číselné hodnoty parametrů tohoto rozdělení, dostali bychom přesné hodnoty. Jedná se o jednoznačná čísla a přesně určenými hodnotami. Jejich určení je teoreticky nemožné, protože bychom potřebovali výběr s nekonečně mnoha prvky.

- Výběrové (empirické) parametry, které se počítají z hodnot prvků náhodného výběru. Protože těchto prvků je málo, dostáváme pouze odhad skutečných statistických parametrů. Při rostoucím počtu prvků se ovšem odhad zpřesňuje. Jedná se o náhodná čísla a jejich střední hodnoty se blíží statistickým parametrům pro rostoucí počet prvků výběru.

Nejčastěji prakticky užívané statistické parametry výběru jsou střední hodnota a rozptyl. Úplný praktický soubor parametrů pak tvoří střední hodnota, rozptyl, směrodatná odchylka, variační koeficient, šikmost a špičatost.

V následující části pro úplnost uvedeme jejich stručné a názorné definice, přesný popis je předmětem učebnic statistiky.

a) *Střední hodnota* (1. obecný moment.) $E(X)$ je definována vztahem

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \mathrm{d}x , \tag{4.6}$$

kde x je spojitá náhodná veličina, $f(x)$ je hustota pravděpodobnosti. V případě náhodného výběru, pokud splňuje normální rozdělení, je nejlepší aproximací střední hodnoty aritmetický průměr

$$E(x) = \mu \doteq \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i . \tag{4.7}$$

b) *Rozptyl* $D(X)$ je definován

$$D(X) = \operatorname{var} X = E(X - E(X))^2 . \tag{4.8}$$

Charakterizuje rozptýlenost hodnot náhodné veličiny kolem její střední hodnoty, neboli střední kvadratickou odchylku náhodné veličiny od její střední hodnoty. Je také označován jako druhý centrální moment (první centrální moment je roven nule)[1]. V případě náhodného výběru, který splňuje normální rozdělení, lze rozptyl počítat ze všeobecně známého vztahu

$$D(x) = \sigma^2 \doteq \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2 . \tag{4.9}$$

c) Často se používá druhá odmocnina z rozptylu $D(X)$, která se nazývá *směrodatná odchylka* σ a vyjadřuje v podstatě střední velikost odchylek jednotlivých hodnot od střední hodnoty. Je dána vztahem

$$\sigma = \sqrt{\operatorname{var} X} . \tag{4.10}$$

---

[1] U obecného n-tého momentu se ve výrazu (4.6) používá n-tá mocnina x. U centrálního momentu je to n-tá mocnin výrazu (x-E(x)). Proto je první centrální moment nulový.

Směrodatná odchylka má názornou interpretaci. V učebnicích statistiky se ukazuje, že u normálního rozdělení do intervalu $(\mu-3\sigma, \mu+3\sigma)$ padne 99,7% všech hodnot, tj. prakticky všechny hodnoty.

d) *Variační koeficient* v můžeme charakterizovat poměrem směrodatné odchylky a aritmetického průměru a lze ho použít jako míru relativní variability. Podle definice platí vztah

$$v = \frac{\sqrt{\operatorname{var} X}}{E(x)} = \frac{\sigma}{\mu}. \tag{4.11}$$

e) *Šikmost* je číslo, které charakterizuje nesouměrnost rozdělení. Poskytuje představu o tvaru rozdělení co do souměrnosti, resp. nesouměrnosti. Šikmost souměrného rozdělení je nulová. Při větší koncentraci hodnot vpravo bude šikmost nabývat kladné hodnoty, zatímco v opačném případě bude záporná. Šikmost jako třetí normovaný centrální moment je definována vztahem

$$g_3 = \frac{E(X - E(X))^3}{\left[E(X - E(X))^2\right]^{3/2}}. \tag{4.12}$$

f) *Špičatost* je číslo, které charakterizuje koncentraci prvků souboru v blízkosti určité hodnoty. Dává představu o tvaru rozdělení co do špičatosti nebo plochosti. Při větší koncentraci prvků souboru kolem dané hodnoty dostaneme vyšší číselné hodnoty než v případě plochého rozdělení. Špičatost jako čtvrtý normovaný centrální moment je definován vztahem

$$g_4 = \frac{E(X - E(X))^4}{\left[E(X - E(X))^2\right]^2}. \tag{4.13}$$

4.1.2 Typy spojitého rozdělení

Rozdělení existuje teoreticky nekonečně mnoho. Rozdělení, která se v praxi vyskytují, je však jen několik a ta z nich, která jsou pro nás z hlediska aplikace pro kompozity významná, zde popíšeme. Uvedeme pouze základní charakteristiky.

Normální rozdělení je nejznámější model rozdělení spojité náhodné veličiny, používaný běžně v technické praxi. Při opakovaném měření téže veličiny za stejných podmínek způsobují náhodné vlivy různé odchylky od skutečné hodnoty měřené veličiny.

Tato veličina má náhodné rozdělení, jestliže její hodnota vzniká vlivem různých náhodných složek, vlivů a veličin, které jsou navzájem nezávislé, je jich značný počet a každá z nich ovlivňuje výslednou veličinu jen velmi málo. Normální rozdělení má hustotu pravděpodobnosti

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right];\quad (-\infty < x < \infty),\ \sigma > 0 \tag{4.14}$$

a distribuční funkci

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\exp\left[-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]dy \quad ; -\infty < x < \infty, \tag{4.15}$$

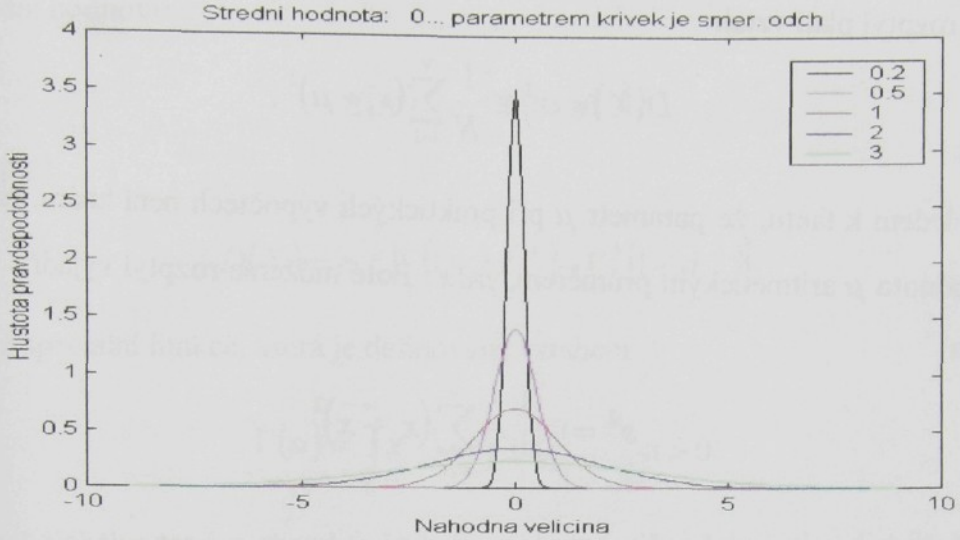
kde parametry μ a σ jsou po řadě střední hodnota a směrodatná odchylka. Pro svou univerzálnost a jednoduchost se často používá jako aproximace jednovrcholových a zhruba symetrických spojitých, ale i nespojitých náhodných veličin. V rozděleních hraje nejvýznamnější roli, což potvrzuje centrální limitní věta.

Distribuční funkci normálního rozdělení nelze vyjádřit žádným explicitním výrazem. Za tímto účelem máme k dispozici tabulky, kde jsou hodnoty distribuční funkce normovaného normálního rozdělení N(0, 1), tj. s parametry $\mu = 0$, $\sigma = 1$ tabelovány. Tato distribuční funkce je také v každém technickém programovém balíku, např. MatLab. Někdy se tato funkce značí symbolem „*erf*", pravděpodobně od „*error function*".

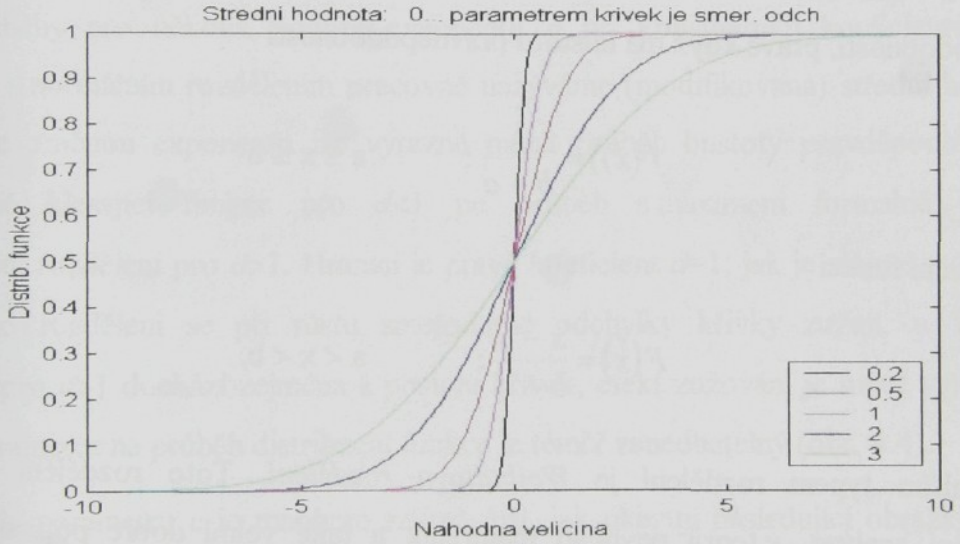
Normální rozdělení je popsáno dvěma parametry: střední hodnotou a směrodatnou odchylkou. Pro získání představy o jejich vlivu na průběhy obou charakteristik (hustoty pravděpodobnosti a směrodatné odchylky) je na obr. 4.1 a 4.2[2] znázorněn vliv směrodatné odchylky při konstantní střední hodnotě. Čím menší je směrodatná odchylka, tím je maximum hustoty pravděpodobnosti ostřejší. Střední hodnota, při konstantní směrodatné odchylce, pouze posouvá funkcemi ve směru osy x.

---

[2] Obrázky 4.1 až 4.7 byly připraveny v MatLabu a bez úprav převzaty do této práce. Pracovní charakter obrázků plyne především z popisu, který se snaží obrázky přesně popsat. Pro ilustraci vlivu parametrů považujeme tyto obrázky postačující.



Obr. 4.1 Hustota pravděpodobnosti normálního rozdělení s různými parametry σ



Obr. 4.2 Distribuční funkce normálního rozdělení s různými parametry σ

Distribuční funkce je rovněž v okolí střední hodnoty tím strmější, čím nižší je směrodatná odchylka. Výsledky opakovaného měření obvykle považujeme za výběr ze statistického souboru s normálním rozdělením. Mluvíme o výběrovém souboru s normálním rozdělením a jeho výběrové parametry se určí takto (viz část 4.1.1):

Pro střední hodnotu, tj. výběrový průměr, platí známý vztah

$$E(X) = \mu \cong \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i \,, \tag{4.16}$$

kde N je rozsah výběru, x je hodnota náhodné veličiny.

Pro rozptyl platí vztah

$$D(X)=\sigma^2 \cong \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)^2 . \tag{4.17}$$

Vzhledem k faktu, že parametr μ při praktických výpočtech není znám, nahrazuje se střední hodnota μ aritmetickým průměrem, $\mu \cong \bar{x}$. Poté můžeme rozptyl vyjádřit výběrovým rozptylem

$$s^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2 . \tag{4.18}$$

Rovnoměrné rozdělení je nejjednodušším typem rozdělení pro oboustranně omezenou náhodnou veličinu. Náhodná veličina X má rovnoměrné rozdělení pravděpodobnosti, právě když má hustotu pravděpodobnosti

$$f(x))=\frac{1}{b-a}; \qquad a \le x \le b \tag{4.19}$$

a distribuční funkci

$$F(x)=\frac{x-a}{b-a}; \qquad a < x < b. \tag{4.20}$$

Dalším typem rozdělení je *Weibullovo rozdělení*. Toto rozdělení se používá v operační analýze, v teorii pevnosti materiálů, a také velmi dobře popisuje životnost zařízení, u kterých se projevuje opotřebení a únava materiálu.

Náhodná veličina X má Weibullovo rozdělení pravděpodobnosti s parametry c a d, právě když má hustotu pravděpodobnosti

$$f(x)=cdx^{d-1}\exp(-cx^d); \qquad x \in (0, \infty),\ c > 0,\ d \ge 0 \tag{4.21}$$

a distribuční funkci

$$F(x)=1-e^{-cx^d}; \qquad x \ge 0. \tag{4.22}$$

Základní statistické charakteristiky tohoto rozdělení je možné určit z těchto vztahů:

Střední hodnota

$$E(X) = c^{-\frac{1}{d}} \Gamma\left(1 + d^{-1}\right) \tag{4.23}$$

Rozptyl

$$D(X) = c^{-\frac{2}{d}} \left[\Gamma\left(1 + 2d^{-1}\right) - \Gamma^2\left(1 + d^{-1}\right)\right] \tag{4.24}$$

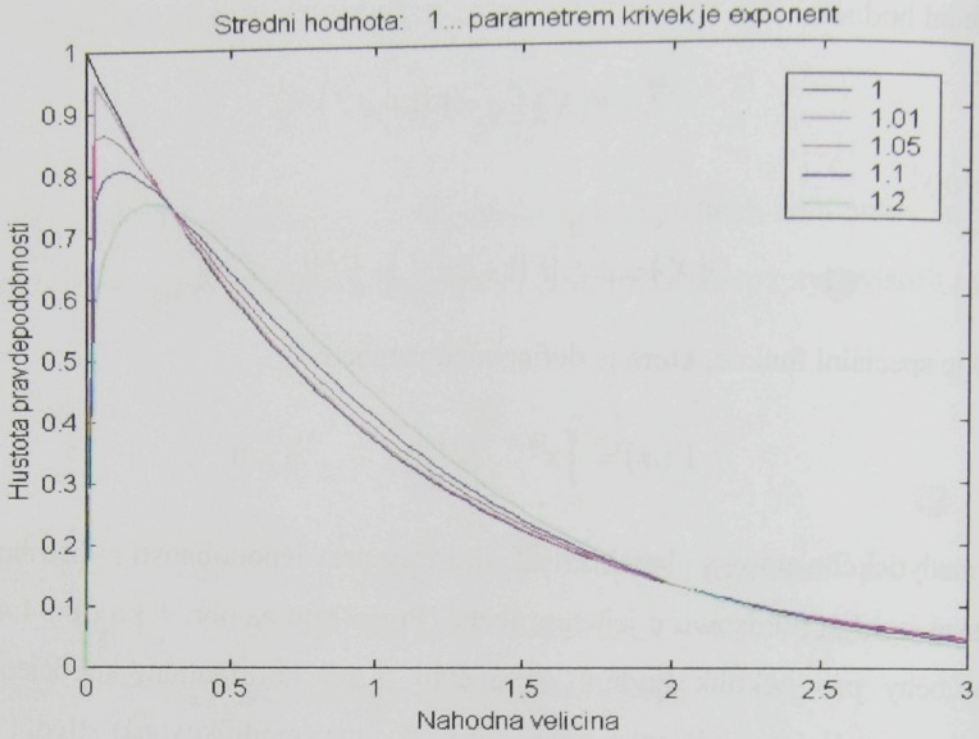
kde $\Gamma(a)$ je speciální funkce, která je definována vztahem

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} \cdot e^{-x} \mathrm{d}x\,; \qquad a > 0. \tag{4.25}$$

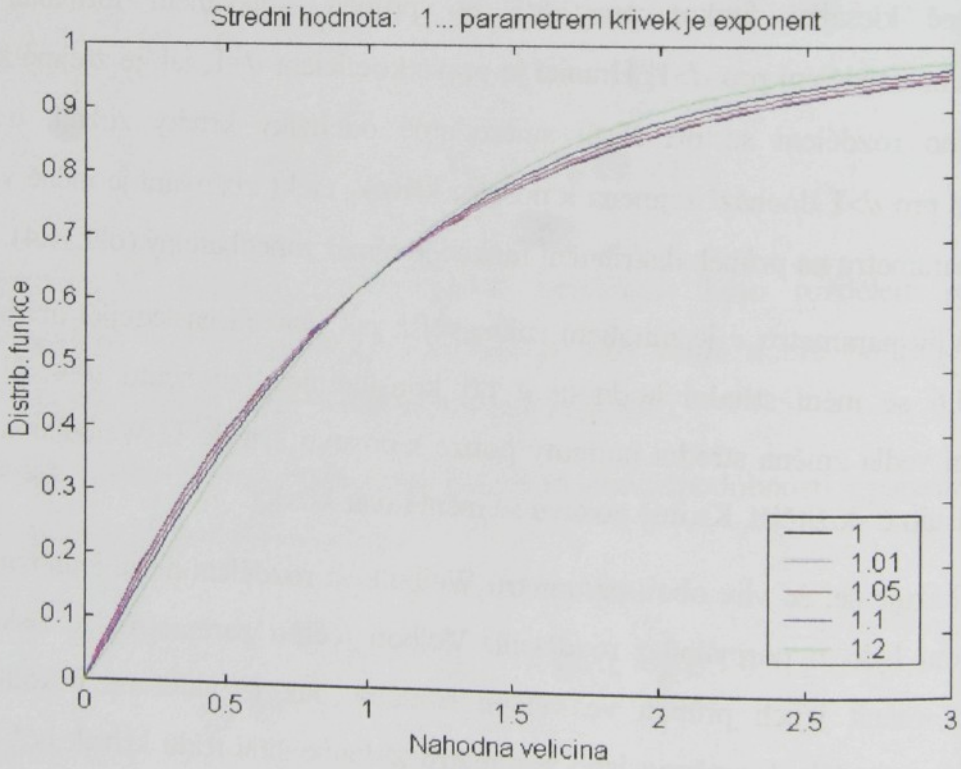
Z analytického popisu charakteristik (hustoty pravděpodobnosti a distribuční funkce) nelze získat jasnější představu o jejich průběhu. Proto jsou na obr. 4.3 a obr. 4.4 vykresleny jejich průběhy pro několik hodnot exponentu d při konstantním koeficientu c, který v analogii s normálním rozdělením pracovně nazýváme (modifikovaná) střední hodnota. Je zřejmé, že změnou exponentu lze výrazně měnit průběh hustoty pravděpodobnosti, od monotónně klesající funkce pro $d<1$ po průběh s maximem formálně podobným normálnímu rozdělení pro $d>1$. Hranicí je právě koeficient $d=1$, jak je zřejmé z obr. 4.3. U normálního rozdělení se při růstu směrodatné odchylky křivky zužují, u Weibullova rozdělení pro $d>1$ dochází zejména k posuvu křivek, efekt zužování je méně výrazný. Vliv tohoto parametru na průběh distribuční funkce je téměř zanedbatelný (obr. 4.4).

Vliv parametru c je mnohem zajímavější, jak ukazují následující obrázky. Na obr. 4.5 a 4.6 se mění střední hodnota c při konstantním exponentu $d=4$. U normálního rozdělení vedla změna střední hodnoty pouze k posuvu křivek. U Weibullova rozdělení je vliv podstatně složitější. Kromě posuvu se mění i tvar křivky.

Ukazuje se, že vliv obou parametrů Weibullova rozdělení nelze jednoznačně oddělit, jako tomu bylo u normálního rozdělení. Volbou těchto parametrů lze získat širší třídu křivek a měnit jejich průběh ve větším rozsahu. Jak je vidět na několika průbězích Weibullova rozdělení, změnou jeho parametrů získáme širší třídu křivek než pro normální rozdělení. Z toho by měla vyplynout možnost, že alespoň pro určitá normální rozdělení lze nalézt Weibullovo rozdělení, které je jim velmi podobné.

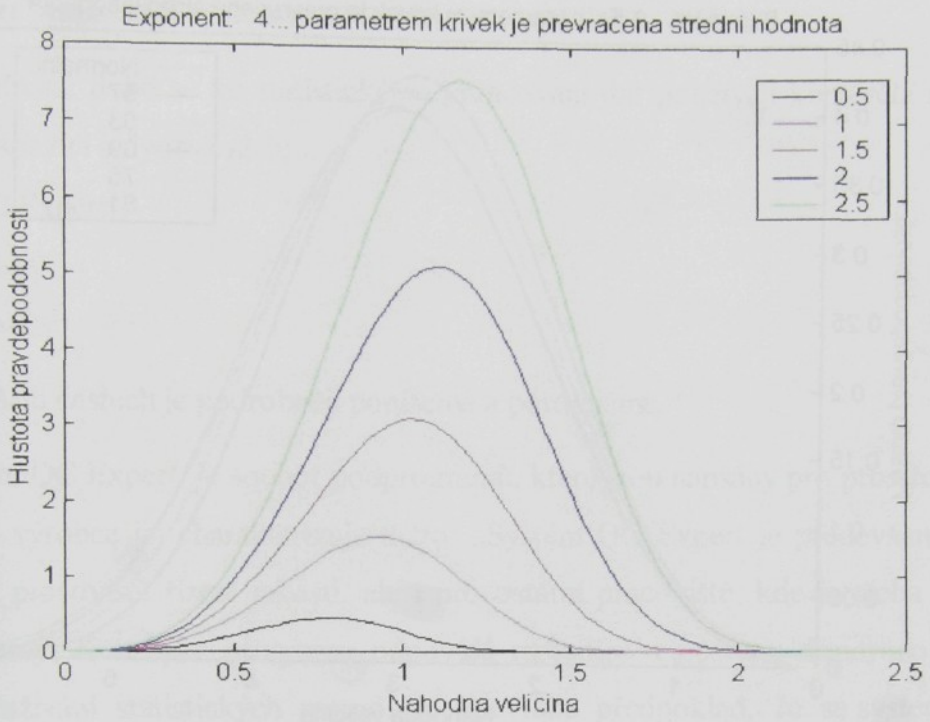


Obr. 4.3 Hustota pravděpodobnosti Weibullova rozdělení pro různé exponenty *d*

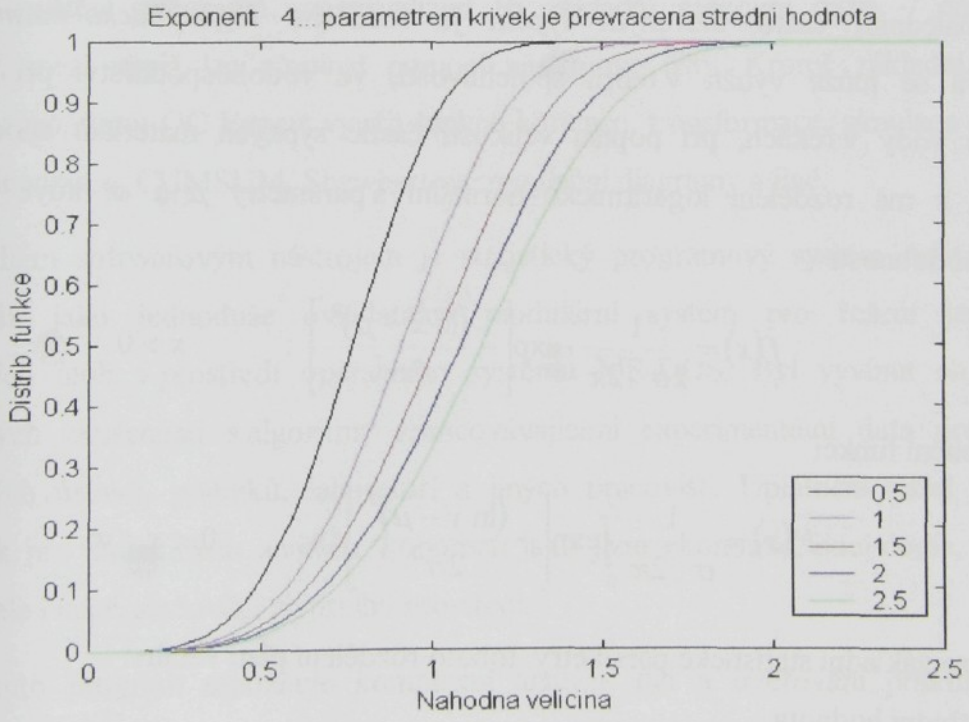


Obr. 4.4 Distribuční funkce Weibullova rozdělení pro různé exponenty *d*

Podmínkou ovšem je, že normální rozdělení je definováno pouze pro kladné hodnoty náhodné proměnné, četnost jeho hodnot na záporné ose je zanedbatelná. Tuto variantu jsme vyzkoušeli v systému MatLab pro normální rozdělení N(3,1).

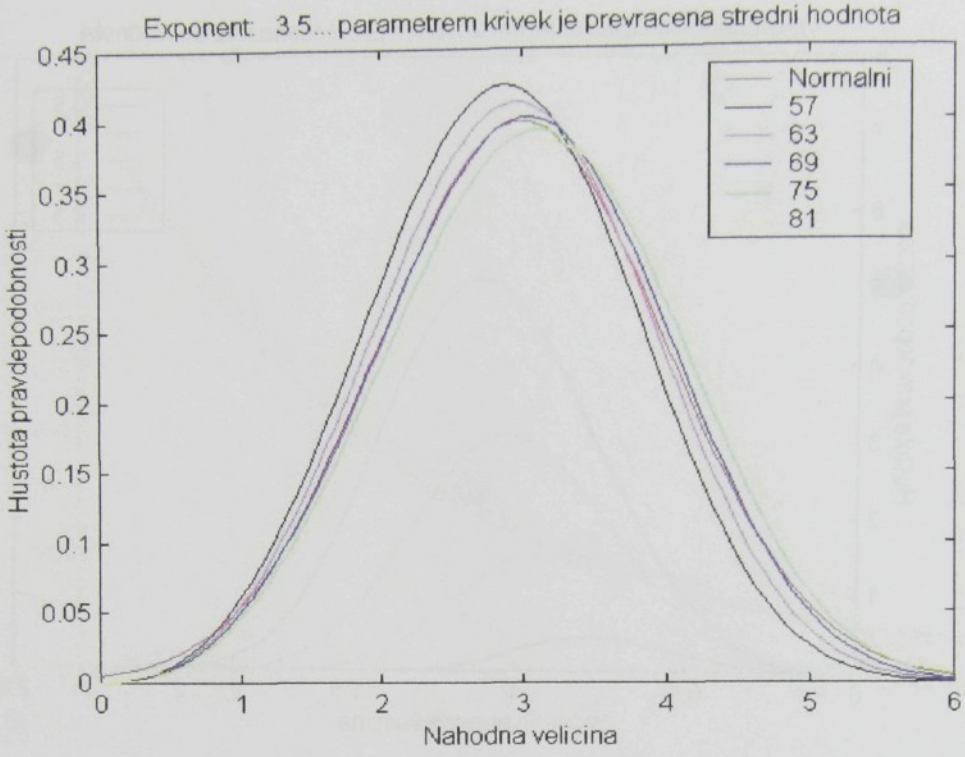


Obr. 4.5 Hustota pravděpodobnosti Weibullova rozdělení pro různé koeficienty *c*



Obr. 4.6 Distribuční funkce Weibullova rozdělení pro různé koeficienty *c*

S přesností grafického zobrazení jsme dosáhli dobré shody zadaného normálního a aproximativního Weibullova rozdělení s parametry c=0.0145 a d=3.5. Křivky téměř splývaly (obr. 4.7).



Obr. 4.7 Hustota pravděpodobnosti normálního rozdělení, c=0.014 a d=3.5

Posledním často užívaným typem je rozdělení *logaritmicko–normální*. Toto rozdělení se může využít v teorii spolehlivosti, ve vodohospodářství při modelování průtoků vody v řekách, při popisu velikosti částic sypkých materiálů apod. Náhodná veličina x má rozdělení logaritmicko–normální s parametry μ a σ, když má hustotu pravděpodobnosti

$$f(x)=\frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot\exp\left[-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right];\qquad x>0 \tag{4.26}$$

a distribuční funkci

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_0^x\exp\left[-\frac{(\ln y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]dy;\qquad 0<x<\infty. \tag{4.27}$$

Pro základní statistické parametry tohoto rozdělení platí vztahy:

Střední hodnota

$$E(X)=e^{\left(\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right)}, \tag{4.28}$$

Rozptyl

$$D(X)=e^{(2\mu+2\sigma^2)}-e^{(2\mu+\sigma^2)}. \tag{4.29}$$

4.1.3 Použité statistické systémy

V současné době se ke statistickému zpracování dat používají komerční softwarové balíky. K dispozici byly tři z nich:

- QC Expert
- Adstat
- MatLab

V dalších částech je podrobněji popíšeme a porovnáme.

Systém QC Expert je soubor podprogramů, které jsou napsány pro prostředí systému Windows a výrobce jej charakterizuje takto: „Systém QC Expert je především určen pro pokročilejší pracoviště řízení jakosti, ale i pro ostatní pracoviště, kde je třeba analyzovat data a procesy. Koncepce programu odpovídá metodice a postupu doporučovaným pro správné používání statistických metod. Je zde také předpoklad, že se systémem může zacházet uživatel se základními znalostmi o statistice a konstrukci regulačních diagramů."

Po spuštění programu se inicializují tři základní pracovní okna – data, grafy, protokoly, mezi nimiž lze přepínat pomocí nástrojové lišty. Kromě základní statistiky můžeme v programu QC Expert využít funkce korelace, transformace, simulace dat, šíření chyb, optimalizace, CUMSUM, Shewhartovy regulační diagramy a jiné.

Druhým softwarovým nástrojem je statistický programový systém Adstat 2.0. Je koncipován jako jednoduše ovladatelný modulární systém pro řešení technických statistických úloh v prostředí operačního systému MS-DOS. Byl vyvinut na základně dlouholetých zkušeností s algoritmy zpracovávajícími experimentální data pro potřeby výzkumných ústavů, podniků, laboratoří a jiných pracovišť. Uplatnění našel také jako prostředek pro statistickou analýzu v oborech jako jsou ekonomie, sociologie, medicína, biologie, ale i např. sledování životního prostředí.

Tento program umožňuje komplexní analýzu dat a ověřování prakticky všech základních předpokladů. I přes svou rozsáhlost se snadno ovládá. Obsluha je založena na systému nabídek, ze kterých uživatel vybírá v logickém sledu. Zadání parametrů, podmínek výpočtu či jiných akcí je vyřešeno systémem panelů s nabídkou základních parametrů, které je možné měnit. Systém Adstat obsahuje celkem osm základních modulů s více jak čtyřiceti procedurami.

Je vybaven výkonným tabulkovým editorem, správcem diskových souborů a dynamickým grafickým výstupem. Data, která byla zadána v editoru, lze zpracovávat libovolnými moduly zpracovávajícími základní statistiku, vícerozměrná data, kalibraci, regresní analýzu, analýzu rozptylu, růstové křivky a splinové funkce. Všechny výhody systému Adstat však končí, pokud není převeden pod operační systém Windows. Na nových počítačích programy pro MS-DOS prakticky neběží.

Důležitým softwarovým balíkem pro všeobecné aplikace je MatLab. Jeho stručnou a možná i výstižnou charakteristikou je, že pracuje s maticemi a výsledkem výpočtů jsou komplexní čísla. To má na jedné straně obrovskou výhodu v tom, že spočítá vše, například i log(-1), na druhé straně je zde velké nebezpečí chyb, zvláště když zapomeneme na imaginární část výsledku. Do jisté míry je nástupcem kdysi velmi populárního Fortranu používaného pro vědeckotechnické výpočty.

Byl vytvořen, aby poskytoval jednoduchý přístup k matematickým knihovnám. Původně byl určen pro operační systém Unix a z tohoto hlediska je předurčen k ovládání pomocí základního komunikačního rozhraní – příkazový řádek. MatLab je vysoce výkonný jazyk pro technické výpočty. Integruje výpočty, vizualizaci a programování do jednoduše použitelného prostředí, kde problémy i řešení jsou vyjádřeny v přirozeném tvaru. Jde o interaktivní systém, který umožňuje vzhledem k množství zabudovaných funkcí řešení mnoha technických problémů, speciálně takových, které vedou na vektorovou či maticovou formulaci.

Typické oblasti použití jsou inženýrské výpočty, vývoj algoritmů, modelování, simulace a vývoj prototypů, analýza dat a jejich vizualizace, inženýrská grafika, vývoj aplikací včetně tvorby grafického uživatelského rozhraní. MatLab obsahuje množství jednoduchých (všechny běžné matematické funkce a základní operace s maticemi) i složitějších funkcí (např. Fourierova transformace, transformace souřadnic, numerická integrace a derivace, řešení soustavy diferenciálních rovnic prvního řádu), ze kterých lze složit podle konkrétní aplikace další libovolně složité funkce.

Skupiny komerčně připravených funkcí, vyvinutých k řešení určitého okruhu příbuzných problémů, se v MatLabu nazývají toolboxy. Jsou to problémově orientované soubory funkcí pro řešení problematiky určitých oborů.

Významným pomocníkem při práci s MatLabem je dokumentace ke každému toolboxu, která obsahuje stručný princip a odkazy na literaturu, kde jsou použité algoritmy podrobně rozebrány a popsány. Jako samostatná nadstavba MatLabu existuje Simulink, který umožňuje sledovat v grafické podobě průběhy veličin v jakémkoliv místě zapojení. Používá se například pro simulaci dynamického chování studovaného systému.

Vzhledem ke všem použitelným funkcím je MatLab vysoce efektivním nástrojem nejenom pro výzkum a vývoj analýzy dat, ale i pro výuku v oblasti matematiky a v inženýrských oborech. Jedním z toolboxů je „Statistics Toolbox", který se týká okruhu problémů v oblasti statistiky na vyšší úrovni. Tento toolbox nabízí v jednotlivých částech řadu funkcí, které tvoří stavební bloky, jež se později mohou využít uvnitř dalších analytických nástrojů. Ve statistickém toolboxu je možné nalézt části popisné statistiky, lineárních modelů, nelineárních modelů, testy hypotéz, statistické diagramy a jiné. Statistický toolbox jsme neměli k dispozici, proto jsme veškeré statistické výpočty prováděli pomocí základního vybavení. Nešlo sice o složité výpočty, nicméně jejich snadná realizace svědčí o síle MatLabu.

4.2 Statistická analýza popisu vrstev výztuže

V této části si ukážeme, jak lze konkrétně a speciálně využít obecných výsledků uvedených v předchozí části. Vycházíme z toho, že střednici vlákenného svazku můžeme pokládat za realizaci náhodného procesu. Obecně se tím zabývá další část této kapitoly. Zde se soustředíme na spektrum, které popisuje střednici stejně dobře (nebo špatně), ale úplně jinak, ve vlnové oblasti. Jednotlivé čáry spektra jsou tedy výběrem ze statistického souboru a lze na ně aplikovat základní statistickou teorii. V ideálním případě je střednice svazku harmonická, tedy popisuje časový průběh kmitů lineárního harmonického oscilátoru. Ačkoliv statistických rozdělení je v literatuře velmi mnoho, obvykle mezi nimi toto fyzikální rozděleni hustoty pravděpodobnosti chybí. Proto se je pokusíme odvodit a popsat.

4.2.1 Statistika spektrálních čar

Skutečná geometrie tkané výztuže je kvaziperiodická, tzn., že v závislosti na podmínkách přípravy kompozitu (stupně lisování) se náhodně, tj. *stochasticky* vyskytují distorze tvaru vazných vln.

Poruchy se liší od vlny k vlně, takže neexistují přesné kopie, které jsou matematickou podmínkou periodicity. Z distorzí lze dovozovat, že se spektra jednotlivých vrstev výztuže budou lišit, jak v rámci jednoho vzorku, tak mezi různými vzorky. Stejná harmonická bude pro jednotlivé vrstvy nabývat poněkud jiných hodnot a to jak u amplitudy tak fáze.

Z tohoto hlediska je proto zajímavé provést statistickou analýzu amplitud a fázových konstant jednotlivých harmonických, alespoň těch nejvýznamnějších. Pokud bude k dispozici dostatečný počet měření, lze odhadnout parametry příslušného rozdělení. Z nich lze pak pomocí generátorů náhodných čísel pro příslušné rozdělení generovat příslušná spektra a z nich virtuální vrstvy (viz kap. 9).

Pokud je experimentů málo, což je běžný případ, lze určit základní výběrové charakteristiky, střední hodnotu a směrodatnou odchylku. Střední hodnoty lze použít pro vytvoření průměrného vlákenného svazku. Tento svazek však nebude mít harmonický průběh. I přes silné zjednodušení jde o vyšší úroveň modelu. Prakticky pak může sloužit např. jako nejspolehlivější údaj pro popis jednotkové buňky. Směrodatná odchylka umožní usoudit, s jakým rozptylem budou známy parametry kompozitu. Její hodnota může prakticky ovlivnit úsilí, které bude aplikaci jednotkové buňky věnováno. Bude-li například variační koeficient 10%, nemá praktickou cenu usilovat o přesnost modelu na 1%, protože se stejně nedá experimentálně ověřit.

4.2.2 Oscilátorické rozdělení

Toto fyzikální rozdělení popisuje hustotu pravděpodobnosti polohy lineárního harmonického oscilátoru, což je hmotný bod harmonicky kmitající. Pro výchylku $x(t)$ platí vztah

$$x(t) = A\sin(\omega t), \tag{4.30}$$

kde ω je úhlová frekvence a A amplituda. Fázová konstanta je nulová.

Pravděpodobnost dp toho, že bod je v intervalu $(x, x+dx)$, je úměrná době dt, po kterou je v tomto intervalu. Podle definice hustoty pravděpodobnosti platí pro tuto pravděpodobnost vztah $dp = f(x)dx$, kde $f(x)$ je hustota pravděpodobnosti. Doba dt je nepřímo úměrná rychlosti.

Spojením těchto tvrzení se získají vztahy

$$\mathrm{d}p = f(x)\mathrm{d}x = K_n \mathrm{d}t = K_n \frac{\mathrm{d}x}{v}, \tag{4.31}$$

kde K_n je normovací konstanta a v rychlost pohybu hmotného bodu ve vyšetřovaném intervalu. Pro tuto rychlost platí s přihlédnutím ke vztahu (4.30)

$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t). \tag{4.32}$$

Ze vztahů (4.31) a (4.32) po snadných úpravách dostaneme

$$f(x) = \frac{K_n}{v} = \frac{K_n}{A\omega\cos(\omega t)} = \frac{K_n}{A\omega\sqrt{\left(1-\sin^2(\omega t)\right)}} = \frac{K_n}{\omega\sqrt{\left(A^2 - A^2\sin^2(\omega t)\right)}}. \tag{4.33}$$

V tomto vztahu máme jako nezávisle proměnnou čas místo polohy. Po dosazení (4.30) do (4.33) se čas vyloučí a dostaneme konečný přehledný tvar

$$f(x) = \frac{K_n}{\omega\sqrt{\left(A^2 - x^2\right)}} = \frac{K_n}{A\omega\sqrt{\left(1-x_n^2\right)}}, \tag{4.34}$$

kde $x_n = x/A$ je normovaná výchylka.

Normovací konstantu K_n určíme z podmínky, že hmotný bod se musí nacházet někde mezi krajními normovanými výchylkami -1 a 1, tj. integrál hustoty pravděpodobnosti přes tento interval musí dávat jednotku. Po dosazení se získá

$$\int_{-1}^{1} \frac{Kn}{A\omega\sqrt{\left(1-x_n^2\right)}}\mathrm{d}x_n = 1. \tag{4.35}$$

Po výpočtu (primitivní funkcí je arcsin) zjistíme normovací konstantu

$$K_n = \frac{A\omega}{\pi}, \tag{4.36}$$

takže pro hustotu pravděpodobnosti polohy lineárního harmonického oscilátoru platí vztah

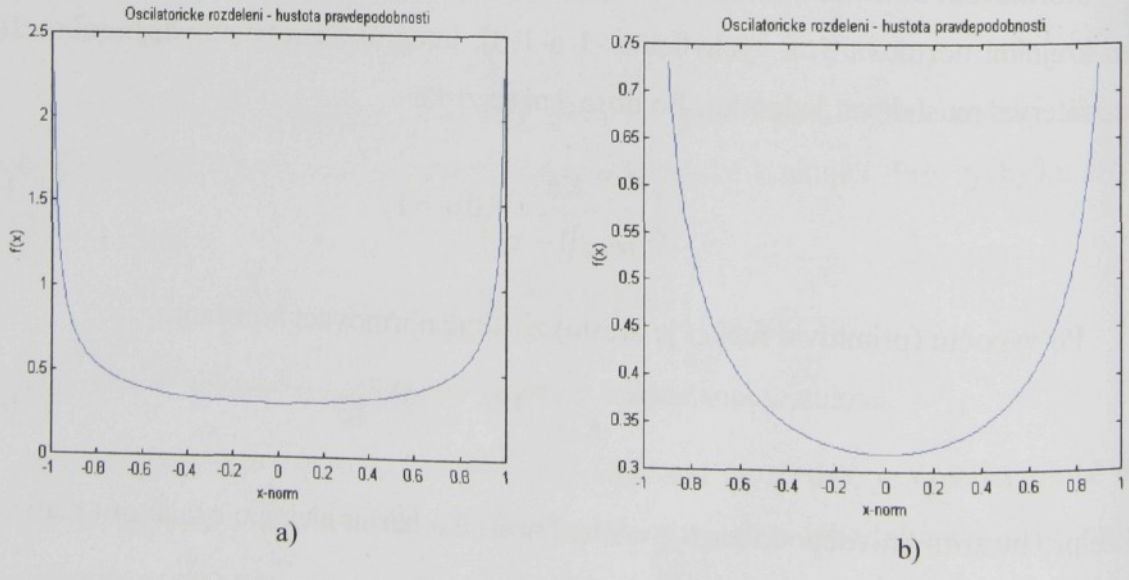
$$f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{\left(1-x_n^2\right)}}. \tag{4.37}$$

Distribuční funkce je pak podle definice

$$F(x_n) = \int_{-\infty 1}^{xn} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{xn} \frac{1}{\pi\sqrt{\left(1-x_n^2\right)}}\mathrm{d}x = \frac{\arcsin(x_n) - \frac{\pi}{2}}{\pi}. \tag{4.38}$$

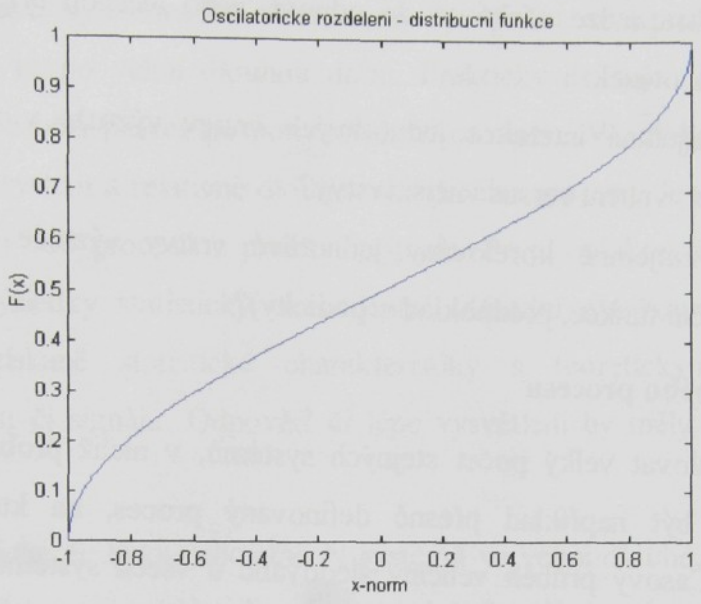
Průběh hustoty pravděpodobnosti v celém rozsahu (přesněji přes 99% rozsahu) a jeho detail pro asi 90% rozsahu jsou po řadě na obr. 4.8 (a) a (b). Z obr. 4.8 (a) a vztahu (4.37) je zřejmé, že na okrajích intervalu hustota pravděpodobnosti diverguje. Nicméně pravděpodobnost výskytu kmitajícího bodu v určitém intervalu zahrnujícím i krajní bod existuje a je konečná. Nekonečnou hustotu vysvětlujeme tím, že v krajní poloze se bod na okamžik zastaví. Průběh distribuční funkce je na obr. 4.9. Hustota pravděpodobnosti je funkce sudá (symetrická), jak se dalo očekávat, zatímco distribuční funkce je lichá (antisymetrická).

V případě složitějších kmitů, například hlavní a další harmonické, již nelze jednoduchý analytický výraz odvodit. Je nutno přejít k numerickému zjišťování pro konkrétní číselné hodnoty. Nicméně z jednoduchých úvah lze soudit, že přítomnost vyšších harmonických vede k rozmazávání ideálního průběhu. Maxima se snižují, zaoblují a posouvají dovnitř intervalu, střední část se vyplňuje a přechod z maxim k nulové hodnotě mimo interval výchylek se stává pozvolným.



a) b)

Obr. 4.8 Hustota pravděpodobnosti polohy harmonického oscilátoru v plném rozsahu (a) a detail (b)



Obr. 4.9 Distribuční funkce polohy harmonického oscilátoru

Přítomnost harmonických, zejména blízkých k základní, vede obecně k tomu, že žádná ze statistických funkcí nebude symetrická. Oscilátorické rozdělení je pracovní termín používaný v této práci pro rozdělení, které je běžné ve fyzice, ale nikoliv v matematické statistice. V oblasti kompozitů se využívá jako velmi jednoduchý model jednak pro rozložení hustoty pravděpodobnosti úhlu sklonu, jednak pro možné vysvětlení hustoty pravděpodobnosti u řezů náhodnými procesy.

4.3 Náhodné procesy

Další velice zajímavý a efektivní způsob popisu nahodilostí v ose vlákenného svazku spočívá v tom, že tento průběh lze považovat za jednu z mnoha realizací náhodného procesu. Náhodné procesy se obvykle považují za procesy probíhající v čase, tedy nezávisle proměnnou je čas a nikoliv souřadnice. Této konvence se přidržíme pro jednoduchost i zde, ačkoliv v předchozí kapitole byly důsledně používány souřadnice.

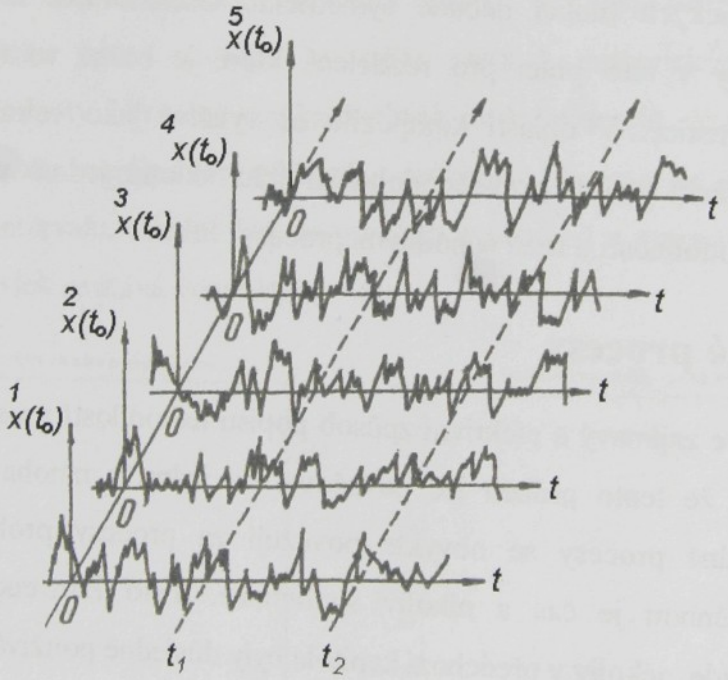
Vycházíme tedy z předpokladu, že jednotlivé průběhy střednice multifilu jsou realizacemi náhodného procesu a pokusíme se na ně aplikovat dobře rozpracovanou teorii náhodných procesů, které se používá např. při analýze signálů. Proto se při uvádění obecných vztahů přidržíme učebnice pro zpracování signálů [88], případně [68], další monografií je například [73].

Od tohoto přístupu lze očekávat, že odpoví, nebo alespoň připraví podklady pro odpověď, na několik otázek:

- Jaká je vzájemná interakce jednotlivých vrstev výztuže v závislosti na jejich poloze, např. vnitřní versus vnější vrstvy?
- Jak jsou vzájemně korelovány jednotlivé vrstvy výztuže (korelační funkce, autokorelační funkce, předpoklad ergodicity)?

4.3.1 Popis náhodného procesu

Je nutné uvažovat velký počet stejných systémů, v nichž probíhá tentýž náhodný proces. Může to být například přesně definovaný proces, na který působí mnoho nahodilých vlivů. Časový průběh veličiny sledované u všech systémů a získané z jejich výstupů se bude lišit v důsledku zmíněné náhodnosti procesů. Schématicky je takový výstup znázorněn na obr. 4.10, kde se ovšem jedná pouze o výstup z prvních pěti systémů a ještě pro poměrně krátký časový interval.



Obr. 4.10 Realizace náhodného procesu

Tyto výstupy se nazývají realizace náhodného procesu. Dále se místo o procesu bude někdy mluvit o signálu. Při aplikaci na osu vlákenného svazku v kompozitu je na jednom řezu kolem osmi realizací náhodného procesu ovšem pro krátkou "dobu" signálu – osm period.

Pro statistické vyhodnocení však musí být počet realizací náhodného signálu podstatně větší, a to po velmi dlouhou dobu. Prakticky existuje obvykle několik málo systémů, ve kterých běží proces po poměrně krátkou dobu. V mnoha případech se úloha redukuje na jeden systém a relativně dlouhou dobu běhu procesu. Je možno předpokládat, že je rovna součtu dob procesů z prvního případu. První otázkou je, zda jsou tyto dva odlišně získané výsledky statisticky ekvivalentní. Zásadní otázkou však je, jak budou souviset takto získané statistické charakteristiky s teoretickými charakteristikami náhodného procesu či signálu. Odpověď či lépe vysvětlení by měly být předmětem této části.

Předpokládejme, že bylo sledováno N systémů ve velmi dlouhé době, $-T_o$ až $+T_o$, a výsledkem bylo velké množství N realizací náhodných signálů, které se označují takto

$$x_k(t) \quad k = 1, 2, 3, ..., N; \qquad T_o<t<+T_o \qquad N\rightarrow\infty,\ T_o\rightarrow\infty. \tag{4.39}$$

Náhodný signál se pak označuje takto

$$X(t) = \{x_k(t)\}^{N}_{k=1} = \{x_k(t)\} \qquad N\rightarrow\infty,\ t\in(-\infty,\ +\infty). \tag{4.40}$$

Důležitým pojmem je řez náhodným signálem, tím se rozumí hodnoty všech realizací v pevně zvoleném časovém okamžiku, např. t_o. Na obr. 4.10 jsou vyznačeny řezy pro okamžiky t_1 a t_2. Řez pro okamžik t_o je označen $X(t_o)$. Obsahuje náhodné hodnoty

$$X(t_o) \rightarrow x_k(t_o) \quad k = 1, 2, 3, ..., N; \qquad N\rightarrow\infty. \tag{4.41}$$

V každém okamžiku je možné popsat náhodný signál $X(t)$ pomocí distribuční funkce $F_X(x, t)$ a hustoty pravděpodobnosti $f_X(x, t)$. Index u symbolu funkce udává náhodný signál, který tato funkce popisuje, první argument, x, je pak zvolená hodnota signálu, k níž se pravděpodobnost počítá. Pro distribuční funkci tedy platí

$$F_X(x, t) = P(X(t) \leq x), \tag{4.42}$$

kde $P(X(t) \leq x)$ je pravděpodobnost, že hodnota signálu (v okamžiku t) je menší nebo rovna předepsané hodnotě x.

Mezi distribuční funkcí a hustotou pravděpodobnosti platí známé vztahy (např. (4.4) a (4.5))

$$F_X(x,t) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u,t)\,du \tag{4.43}$$

$$f_X(x,t) = \frac{\partial F_X(x,t)}{\partial x}. \tag{4.44}$$

Argumenty x, t distribuční funkce a hustoty pravděpodobnosti mají různou informační váhu. Z hlediska procesu je důležitý čas t, proto bude v dalších úvahách referenční hodnota signálu x vynechána.

4.3.2 Charakteristiky náhodného procesu

V předchozí části jsme uvedli, že z praktického hlediska je vhodnější popsat statistický soubor numerickými parametry, jakými jsou např. momenty (viz např. rozptyl (4.9)). Totéž lze provést i s náhodnými signály, je to však složitější. Náhodný signál či obecně proces lze z hlediska dostupných informací popsat třemi typy charakteristik[3] [88]:

- Teoretické (statistické) charakteristiky.
- Empirické (časové) charakteristiky.
- Odhady vytvořené na základě realizace procesu v konečné době.
    1. Několik realizací.
    2. Jedna realizace.

Teoretické charakteristiky a parametry se odvozují ze všech realizací. Jsou to tedy přesně definované funkce nebo jednoznačné hodnoty. Empirické charakteristiky se odvozují z jedné realizace procesu či signálu. Protože se jedná jen o jednu realizaci, i když může být pro teoreticky nekonečnou dobu, jsou její charakteristiky a parametry náhodné.

Odhady jako třetí typ parametrů a charakteristik náhodného procesu se týkají praktické realizace. Můžeme mít k dispozici buď výstup z několika systémů nebo jen z jednoho. Výpočet, přesněji odhad charakteristik, pak bude pro každý případ probíhat jinak.

---

[3] Zde dočasně na několika místech nerozlišujeme přísně mezi parametry a charakteristikami. Je proto několik důvodů, zejména, že parametr by neměl být funkcí času.

Základním úkolem teorie odhadů je však určit, jak věrnohodně odhad popisuje skutečné charakteristiky sledovaného procesu. To je velmi obtížný úkol, viz například [88]. Zde se jím nebudeme zabývat, uvedeme pouze vztahy pro odhad parametrů a charakteristik jak pro několik realizací, tak pro jednu

4.3.2.1 Teoretické charakteristiky

Všechny statistické charakteristiky pro výběrový soubor (viz část 4.1.1) lze definovat i jako teoretické charakteristiky pro náhodný signál. Jsou zde však i některé další. Nejdůležitější z první skupiny jsou tyto charakteristiky:

Střední hodnota, která je definována vztahem

$$\mu_X(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x,t)\mathrm{d}x \,. \tag{4.45}$$

Symbolem E[y] je označena operace "střední hodnota" na náhodně proměnnou Y s hustotou pravděpodobnosti $f_Y(y)$, tj.

$$y = E[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)\mathrm{d}y \,. \tag{4.46}$$

Protože tento operátor je lineární, bude jej použito v definici dalších charakteristik. Všechny další charakteristiky jsou vlastně aplikací střední hodnoty na složitější výraz. Kromě toho však bude uveden i explicitní vztah pomocí integrálu.

Rozptyl je definován vztahem

$$\sigma_X^2(t) = E\left[\left(X(t) - \mu_X(t)\right)^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - \mu_X(t)\right)^2 f_X(x,t)\mathrm{d}x \,. \tag{4.47}$$

Střední hodnotu čtverce náhodného signálu zjistíme z definice

$$k_X^2(t) = E\left[\left(X(t)\right)^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x,t)\mathrm{d}x \,. \tag{4.48}$$

Tato veličina nabývá na důležitosti při výpočtu výkonové hustoty či spektrální výkonové hustoty. V učebnicích se navíc dokazuje, že střední hodnota čtverce náhodného signálu souvisí s jeho střední hodnotou a rozptylem podle vztahu

$$k_X^2(t) = \sigma_X^2(t) + \mu_X(t)^2 \,. \tag{4.49}$$

Ostatní charakteristiky jsou definovány jen pro náhodné procesy. Zatímco předchozí byly vztahovány k jednomu časovému okamžiku, zbylé jsou definovány pro dva časové okamžiky – řezy – náhodným procesem. Nejvíce používaná autokorelace je definována vztahem

$$R_X(t_i,t_j) = E[X(t_i)X(t_j)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x,t_i) f_X(x,t_j) \mathrm{d}x \,. \tag{4.50}$$

Autokovariance se definuje jako autokorelace s odečtenou střední hodnotou

$$\begin{aligned} C_X(t_i,t_j) &= E[(X(t_i)-\mu_X(t_i))(X(t_j)-\mu_X(t_j))] = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu_X(t_i))(x-\mu_X(t_j)) f_X(x,t_i) f_X(x,t_j) \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{4.51}$$

Vzájemná korelace dvou náhodných signálů je definována vztahem

$$R_{XY}(t_i,t_j) = E[X(t_i)X(t_j)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x,t_i) y f_Y(y,t_j) \mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{4.52}$$

Vzájemná kovariance se definuje jako vzájemná korelace s odečtenou střední hodnotou

$$\begin{aligned} C_{XY}(t_i,t_j) &= E[(X(t_i)-\mu_X(t_i))(Y(t_j)-\mu_Y(t_j))] = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu_X(t_i))(y-\mu_Y(t_j)) f_X(x,t_i) f_Y(y,t_j) \mathrm{d}x\mathrm{d}y. \end{aligned} \tag{4.53}$$

4.3.2.2 Stacionarita a ergodičnost

Jak funkce statistického rozdělení (distribuční funkce a hustota pravděpodobnosti), tak teoretické statistické charakteristiky (střední hodnota, autokorelace, ...) jsou obecně funkcemi času. Podle typu časové závislosti a souvislosti mezi teoretickými a empirickými charakteristikami, pak lze blíže specifikovat náhodný proces (signál) jako

- Stacionární.
  a) Silně stacionární či stacionární v užším smyslu.
  b) Slabě stacionární či stacionární v širším smyslu.
- Ergodický.
- Striktně ergodický, což je proces současně stacionární a ergodický.

V případě, že nezávisle proměnnou je místo času geometrická souřadnice, například x, proces se nazývá homogenní. To se týká mj. kompozitů.

O stacionárním procesu je možné mluvit, když statistické charakteristiky nezávisí na volbě počátku časové osy. Podle typu této nezávislosti pak ještě zpřesňujeme slabou nebo silnou stacionaritu.

Proces je slabě stacionární, jestliže

- Střední hodnota je časově invariantní, tj. nezávisí na čase.
- Autokorelace nezávisí na volbě počátku časové osy.

První podmínku lze psát ve tvaru

$$\mu_X(t) = \mu_X . \tag{4.54}$$

Druhá podmínka vede ke zjednodušení rovnice (4.50) pro autokorelaci

$$\begin{aligned} R_X(t_i,t_j) &= R_X(t,t+\tau) = R_X(t_j - t_i) = R_X(\tau) = \\ &= E[X(t)X(t+\tau)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x,t) f_X(x,t+\tau) dx, \end{aligned} \tag{4.55}$$

kde $t_j = t_i + \tau$, případně $\tau = t_j - t_i$.

Silná stacionarita znamená, že funkce popisující statistické rozdělení nezávisí na volbě počátku časové osy. Označíme-li symbolem τ čas měřený od zvoleného okamžiku t_o pak lze formálně distribuční funkci nebo hustotu pravděpodobnosti psát ve tvaru

$$F_X(x, t_o+\tau) = F_X(x, t_o). \tag{4.56}$$

Tento vztah platí pro libovolné τ, což lze splnit jen tehdy, když funkce F_X je nezávislá na čase. Tento vztah by se neměl zaměňovat s definicí periodické funkce. Pro ni platí formálně též

$$F_X(x, t+T_o) = F_X(x, t), \tag{4.57}$$

avšak v tomto případě perioda T_o je konstantní, přesně daná hodnota. Učebnice zdůrazňují, že z praktického hlediska je důležité to, že pokud má proces slabou stacionaritu, je obvykle i silně stacionární.

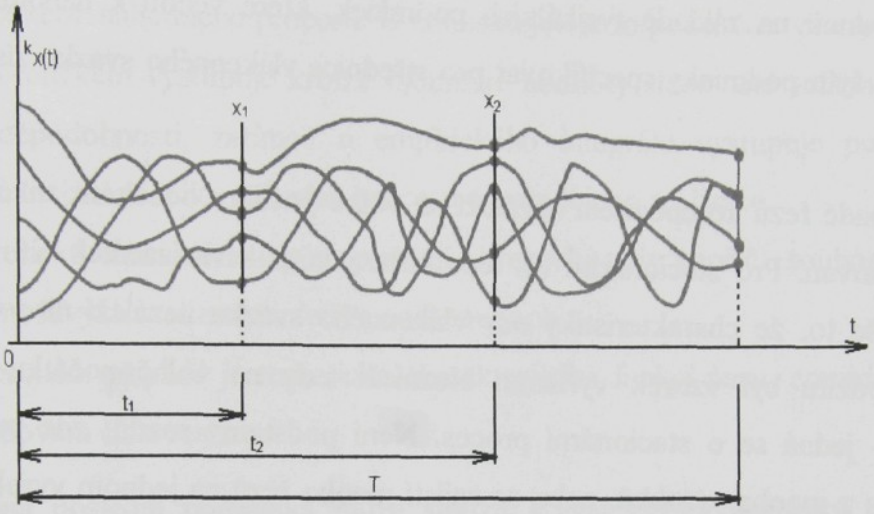
Ergodický proces je definován tak, že u něho lze teoretické charakteristiky nahradit empirickými. Obecně jsou empirické charakteristiky, zjištěné z jedné realizace náhodné koprocesy, mají tedy určitý rozptyl. U ergodického procesu je však rozptyl nulový. Je nutné připomenout, že teoretické charakteristiky se měří napříč souborem, tj. z jednotlivých realizací pro pevně zvolený časový okamžik. Naproti tomu empirické se zjišťují z jedné realizace, tedy podél času. Pokud tedy není proces stacionární, ergodičnost nezaručuje tuto náhradu ve všech okamžicích. To znamená, že ergodičnost je sice důležitá vlastnost, sama její existence však ještě v principu nezaručuje stacionaritou. Avšak, pokud je proces jak ergodický, tak stacionární, tedy striktně ergodický, pak se teoretické a empirické charakteristiky shodují.

K ilustraci dvou přístupů získávání jak teoretických, tak empirických či dokonce experimentálních charakteristik slouží obr. 4.11 a obr. 4.12. Obr. 4.11 odpovídá případu, že existuje velké množství realizací náhodného procesu $x(t)$, každá probíhala dlouhou dobu T. Pak v libovolném řezu se získají charakteristiky pro odpovídající časový okamžik. Např. hustota pravděpodobnosti v daném okamžiku pro interval $(x,\ x+dx)$ je úměrná počtu systémů, které hodnoty $x(t)$ v tomto intervalu a daném okamžiku t nabývají. Charakteristiky počítáme v tomto případě napříč soubory, viz výše. Na obr. 4.11 jsou řezy pro okamžiky t_1 a t_2 . V tomto případě nejsou na náhodný proces kladena žádná omezení, zejména může být nestacionární, pak jsou ovšem charakteristiky v okamžicích t_1 a t_2 odlišné. Pokud jsou tyto charakteristiky shodné, nebo alespoň nezávisí na volbě počátku časové osy, je systém stacionární.

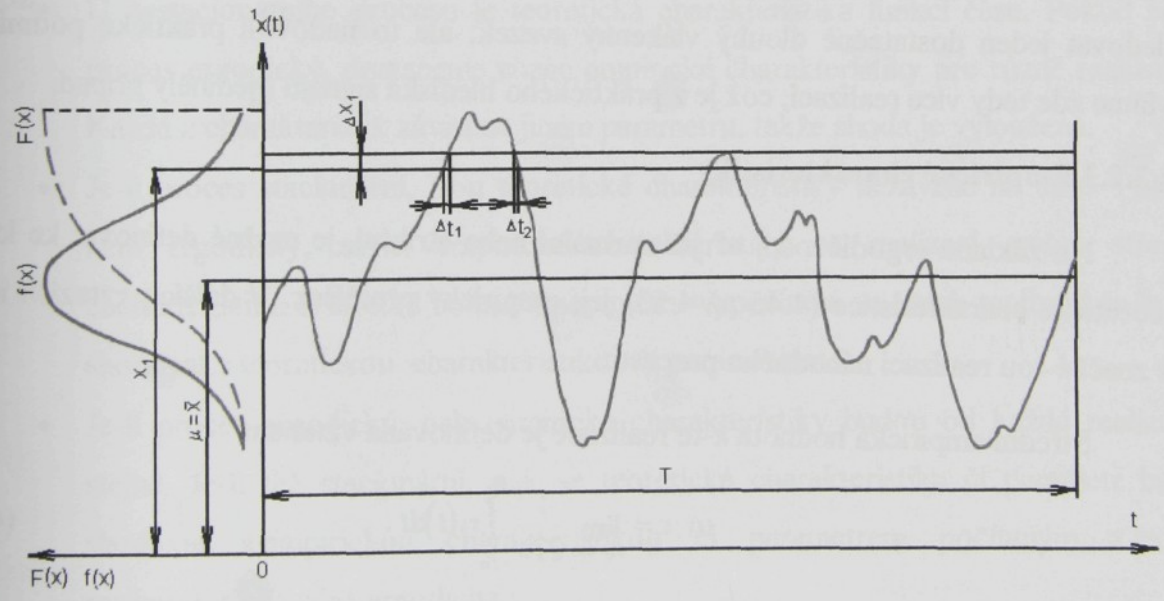
Jako druhý, opačný, případ budeme uvažován pouze jediný proces, který by měl trvat velmi dlouho. Ten je znázorněn na obr. 4.12. Je zde též uveden způsob, jak lze v časové oblasti určit hustotu pravděpodobnosti či distribuční funkci. Hustota pravděpodobnosti udává, že pravděpodobnost toho, že veličina $x(t)$ nabude hodnoty v krátkém úseku $(x,\ x+dx)$, je úměrná součtu dob, po které je systém ve stavu, v němž veličina $x(t)$ nabývá hodnoty v tomto intervalu. Charakteristiky jsou počítány podél časové osy, nikoliv napříč ní, viz výše.

Na obr. 4.12 je tento způsob určení hustoty pravděpodobnosti ilustrován též graficky. Místo nekonečně malých diferencí dx jsou použity konečné diference Δx.

Pro bod x_1 a interval Δx_1 kolem něho je příslušná hodnota hustoty pravděpodobnosti úměrná součtu časových intervalů $\Delta t_1+\Delta t_2+...$ Pokud je proces ergodický a stacionární, měly by být obě takto získané charakteristiky shodné.



Obr. 4.11 Soubor realizací náhodného procesu $X(t)$



Obr. 4.12 Stacionární ergodický náhodný proces a určení jeho charakteristik

Je možné tedy pro ergodický proces shrnout:

- Pokud je proces pouze ergodický (není stacionární) jsou střední hodnoty empirických charakteristik rovny teoretickým charakteristikám.
- Pokud je proces striktně ergodický (ergodický a stacionární) jsou hodnoty empirických charakteristik získané z jediné realizace rovny teoretickým charakteristikám.

Druhé tvrzení má velký teoretický, ale i praktický dopad. Pokud je tedy zajištěna podmínka striktní ergodičnosti procesu, lze charakteristiky procesu zjistit z jedné, teoreticky nekonečně dlouhé, realizace. O tom, zda je proces ergodický a stacionární je nutno rozhodnou na základě fyzikálních podmínek, které vedou k náhodnému procesu. Pokusíme se tyto podmínky specifikovat pro střednice vlákenného svazku získaných z řezů kompozitem.

V případě řezů kompozitem nezáleží na volbě počátku odečítání, také není ani nijak přesně definován. Pro stacionaritu (či lépe homogenitu – viz začátek této části) je však důležité spíše to, že charakteristiky osy vlákenného svazku nezáleží na tom, ze kterého místa kompozitu byl vzorek vyříznut. Nezáleží tedy na volbě počátku pro odečítání souřadnic – jedná se o stacionární proces. Není podstatný rozdíl, zde budeme brát po jednom řezu z mnoha výrobků, nebo se zajistí mnoho řezů na jednom výrobku, pokud má ovšem dostatečnou plochu. Sledovaný signál by měl tedy být též ergodický. To dále znamená, že průběh multifilu je jako proces striktně ergodický. V principu by stačilo sledovat jeden dostatečně dlouhý vlákenný svazek, ale to nedovolí praktické podmínky. Máme zde tedy více realizací, což je z praktického hlediska signálů ojedinělý případ.

4.3.2.3 Empirické charakteristiky

Na základě ergodičnosti, ať již normální nebo striktní, je možné definovat ke každé teoretické charakteristice (4.45 až 4.53) její empirický protějšek. V dalších vztazích index k značí k-tou realizaci náhodného procesu:

Střední empirická hodnota k-té realizace je definována vztahem

$$\mu_{X,k} = \lim_{To\to\infty} \frac{1}{2To} \int_{-To}^{To} x_k(t)\,\mathrm{d}t \,. \tag{4.58}$$

Empirický rozptyl k-té realizace je definován vztahem

$$\sigma^2_{X,k} = \lim_{To\to\infty} \frac{1}{2To} \int_{-To}^{To} \left(x_k(t) - \mu_{X,k}\right)^2 \mathrm{d}t \,. \tag{4.59}$$

Střední empirickou hodnotu čtverce k-té realizace náhodného signálu lze zjistit z definice

$$\kappa^2_{X,k} = \lim_{To\to\infty} \frac{1}{2To} \int_{-To}^{To} x_k(t)^2\,\mathrm{d}t \,. \tag{4.60}$$

Z porovnání s teoretickými charakteristikami se empirické charakteristiky zásadně liší. Například z porovnání vztahů (4.45) a (4.58) plyne:

- U teoretických charakteristik se integruje přes hodnoty veličiny, která je výsledkem náhodného procesu. U empirických je to podél časové osy.
- V teoretickém vystupuje kromě okamžité hodnoty sledované veličiny též hustota pravděpodobnosti, zatímco u empirického integrálu vystupuje pouze hodnota okamžitého výsledku náhodné procesu a pořadí jeho realizace.
- Teoretické charakteristiky se počítají v řezech, tedy napříč soubory. Empirické v jednotlivých realizacích, tedy podél souborů.
- V obecném případě je teoretická charakteristika funkcí času, empirická závisí na pořadovém čísle realizace.

Zejména poslední podmínka může sloužit k vysvětlení požadavků stacionarity a ergodicity:

- U nestacionárního procesu je teoretická charakteristika funkcí času. Pokud není proces ergodický, dostaneme různé empirické charakteristiky pro různé realizace. Každá z charakteristik závisí na jiném parametru, takže shoda je vyloučena.
- Je-li proces stacionární, jsou teoretické charakteristiky nezávislé na čase. Pokud není ergodický, závisí empirické charakteristiky na realizaci, avšak střední charakteristika či střední hodnota parametru vypočítaná ze všech realizací se bude shodovat s teoretickou charakteristikou či parametrem.
- Je-li proces ergodický, pak empirické charakteristiky budou od každé realizace stejné. Je-li též stacionární, pak se teoretická charakteristika či parametr bude shodovat s empirickou charakteristikou či parametrem počítaným z jedné realizace, tudíž silná ergodicita.

Předchozí zásadní tvrzení lze také formulovat praktičtěji. Definice empirických charakteristik jsou uvedeny pro nestacionární procesy a vztahují se ke zvolené k-té realizaci. Z těchto hodnot je pak možno určit střední hodnotu těchto parametrů výpočtem přes všechny realizace. Ty však ani pro velký počet realizací nebudou souhlasit s teoretickými hodnotami pokud je proces nestacionární. Pokud je proces striktně ergodický, tedy i stacionární, stačí zvolit jedinou realizaci, pak je index k zbytečný.

Další empirické charakteristiky porovnávají dvě časově posunuté realizace, nebo původní a (a případně *l*-té realizace) jsou:

Empirická autokorelace *k*-té realizace

$$R^2_{X,k}(\tau) = \lim_{To\to\infty} \frac{1}{2To} \int_{-To}^{To} x_k(t)x_k(t+\tau)\mathrm{d}t \,. \tag{4.61}$$

Empirická autokovariance *k*-té realizace

$$C_{X,k}(\tau) = \lim_{To\to\infty} \frac{1}{2To} \int_{-To}^{To} (x_k(t)-\mu_{X,k})(x_k(t+\tau)-\mu_{X,k})\mathrm{d}t \,. \tag{4.62}$$

Empirická vzájemná korelace *k*-té a *l*-té realizace

$$R_{XY,k,l}(\tau) = \lim_{To\to\infty} \frac{1}{2To} \int_{-To}^{To} x_k(t)y_l(t+\tau)\mathrm{d}t \,. \tag{4.63}$$

Empirická vzájemná kovariance *k*-té a *l*-té realizace

$$C_{XY,lk}(\tau) = \lim_{To\to\infty} \frac{1}{2To} \int_{-To}^{To} (x_k(t)-\mu_{X,k})(y_l(t+\tau)-\mu_{Y,l})\mathrm{d}t \,. \tag{4.64}$$

Zde předpokládáme, že proces je stacionární a používáme časový rozdíl τ místo dvou časových okamžiků t_1 a t_2. Pro nestacionární proces jsou tyto charakteristiky definovány jinak.

4.3.2.4 Odhady charakteristik

Prakticky je k dispozici jedna nebo několik málo realizací náhodného procesu či signálu pro poměrně krátkou dobu. Nezískají se tedy empirické charakteristiky, ale pouze jejich odhad. Zde uvedeme vztahy, které se prakticky používají k odhadu charakteristik. Budeme uvažovat oba případy, tj. několik realizací a nestacionární proces, nebo jednu realizaci a stacionární proces. Vztahy budou uvedeny pouze pro střední hodnotu, autokorelaci a vzájemnou korelaci jako typické reprezentanty dvou tříd charakteristik.

Střední hodnotu *N* realizací se určí vztahem

$$\mu_X(t_i) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k(t_i) \,. \tag{4.65}$$

Proces je nestacionární, střední hodnota může záviset na čase libovolným způsobem, proto je ve vzorci (4.65) časový okamžik t_i.

Pro střední hodnotu jediné realizace stacionárního procesu platí

$$\mu_X = \frac{1}{T_o}\int_0^{To} x(t)\mathrm{d}t\,. \tag{4.66}$$

Autokorelaci pro N realizací náhodného signálu určíme vztahem

$$R_X(t,t+\tau) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k(t)x_k(t+\tau)\,. \tag{4.67}$$

Proces je nestacionární, proto se ve vzorci (4.67), přesněji jeho levé straně, vyskytují dva časové časový okamžiky $t_1 = t$ a $t_2 = t+\tau$. Pro autokorelaci jediné realizace stacionárního procesu, která je nenulová na intervalu $(0, T_o)$ se jako nejvhodnější doporučuje praktický vztah [88]

$$R_X(\tau) = \frac{1}{T_o}\int_0^{To} x(t)x(t+\tau)\mathrm{d}t; \quad \tau \in (-T_o, T_o)\,. \tag{4.68}$$

Pro vzájemnou korelaci dvou nestacionárních procesů $X(t)$ a $Y(t)$ lze použít vztahů

$$R_{XY}(t,t+\tau) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k(t)y_k(t+\tau)\,. \tag{4.69}$$

Pokud existuje od každého procesu pouze jedna realizace a proces je stacionární, pak je vhodný vztah

$$R_{XY}(\tau) = \frac{1}{T_o}\int_0^{To} x(t)y(t+\tau)\mathrm{d}t; \quad \tau \in (-T_o, T_o)\,. \tag{4.70}$$

Opět lze předpokládat, že každá z realizací je nenulová na intervalu $(0, T_o)$.

V teoretických úvahách se obvykle vztahy (4.68) a (4.70) zjednodušují tak, že časový interval T_o roste nade všechny meze, $T_o \to \infty$. Pak vztahy (4.68) a (4.70) po řadě pro autokorelaci a vzájemnou korelaci budou mít tvar

$$R_X(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t+\tau)\mathrm{d}t \tag{4.71}$$

$$R_{XY}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t+\tau)\mathrm{d}t\,. \tag{4.72}$$

4.3.2.5 Sdružená hustota pravděpodobnosti

V některých učebnicích, například [68] nebo [73], se zavádí pojem sdružené nebo spojené hustoty pravděpodobnosti. Pro úplnost jej uvádíme i zde.

Hodnota N-té sdružené hustoty pravděpodobnosti f_N náhodného procesu X je funkcí $2N$ proměnných

$$f_N = f_N(X(t_1), X(t_2), ..., X(t_N)) = f_N(x_1, t_1, x_2, t_2, ..., x_N, t_N), \tag{4.73}$$

a udává pravděpodobnost toho, že v okamžiku t_1 nabývá veličina X hodnoty v intervalu $<x_1, x_1+dx>$\$, v čase t_2 hodnoty v intervalu $<x_2, x_2+dx>$ až v čase t_N hodnoty v intervalu $<x_N, x_N+dx>$.

Protože se jedná o velký počet proměnných, její význam je především teoretický. Praktické využití nebude asi velké. Graficky se dá zobrazit jako funkce dvou proměnných pouze pro N=1, tedy první sdružená hustota pravděpodobnosti. Příklad průběhu první sdružené hustoty pravděpodobnosti aplikovaný na naše data lze najít na konci kap. 7.

4.3.3 Korelace ve frekvenční oblasti

Korelace ve frekvenční oblasti, jejímž výsledkem je zejména výkonová spektrální hustota, umožní posoudit náhodné procesy z jiného hlediska. Používá se především pro elektrické signály, pro které má výkon důležitý fyzikální význam, nicméně lze jej využít i pro jiné typy náhodných procesů. Nezastupitelné místo v této oblasti má aplikace Fourierovy transformace.

Proto nejprve poměrně podrobně odvodíme velmi významný vztah pro spektrum vzájemné korelace či autokorelace, protože má zásadní teoretický a praktický význam. Ukážeme na důležitý význam spektrální výkonové hustoty, porovnáme korelaci a konvoluci a připomeneme jejich aplikační význam.

Všechny úvahy jsou opět v časové oblasti, jako prototyp náhodného procesu se uvažuje náhodný signál realizovaný jako elektrické napětí a používáme úhlové frekvence ω, ačkoliv v praxi se téměř výlučně pracuje s frekvencí $f=\omega/(2\pi)$.

4.3.3.1 Spektrum korelace

Pro jednoduchost lze definovat vzájemnou korelační funkci ergodického stacionárního procesu vztahem

$$R_{XY}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t+\tau)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)y(t)\mathrm{d}t\,. \tag{4.74}$$

Druhý vztah (integrál) získáme jednoduše substitucí $u=t-\tau$. Z těchto vztahů je především zřejmé, že nezáleží na znaménku před parametrem τ. Jak uvidíme dále, znamená pouze posuv signálu podél časové osy. Změnou znaménka funkci pouze posuneme o tutéž vzdálenost opačným směrem. Pokud je sudá, tak se vůbec nic nemění. Parametr τ může být jak kladný, tak záporný, pro jednoduchost se píše kladné znaménko. Dále je zřejmé, že funkce $x(t)$ a $y(t)$ můžeme navzájem prohodit. Navíc z tohoto vztahu rovněž vyplývá, že autokorelace je sudá funkce. Položíme-li $x(t)=y(t)$, dostaneme $R_X(\tau) = R_X(-\tau)$.

Zajímavé jsou frekvenční vlastnosti korelační funkce. Je nutné aplikovat na ni přímou Fourierovu transformaci (3.31) s cílem získat korelační spektrum $R_{XY}(j\omega)$. Podle definice analogové Fourierovy transformace dostaneme

$$R_{XY}(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XY}(\tau)\mathrm{e}^{-j\omega\tau}\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} x(t)y(t+\tau)\mathrm{e}^{-j\omega\tau}\mathrm{d}t\mathrm{d}\tau\,. \tag{4.75}$$

Integrál na pravé straně upravíme tím, že se přeskupí členy

$$\int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} x(t)y(t+\tau)\mathrm{e}^{-j\omega\tau}\mathrm{d}t\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\left[\int_{-\infty}^{+\infty} y(t+\tau)\mathrm{e}^{-j\omega\tau}\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}t\,. \tag{4.76}$$

Vnitřní integrál můžeme vypočíst pomocí substituce $u=t+\tau$. Z této substituce plyne

$$t=u-\tau \quad \ldots \quad \tau=u-t \quad \ldots \quad \mathrm{d}\tau=\mathrm{d}u. \tag{4.77}$$

Meze se substitucí nemění. Aplikací této substituce postupně dostaneme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y(t+\tau)\mathrm{e}^{-j\omega\tau}\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} y(u)\mathrm{e}^{-j\omega u}\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}\tau = \mathrm{e}^{j\omega t}\int_{-\infty}^{+\infty} y(u)\mathrm{e}^{-j\omega u}\mathrm{d}\tau = \hat{Y}(j\omega)\mathrm{e}^{j\omega t}\,. \tag{4.78}$$

Symbolem $\hat{Y}(j\omega)$ je označen obraz či spektrum náhodného signálu $y(t)$,

$$\hat{Y}(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\mathrm{e}^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t\,. \tag{4.79}$$

Po dosazení (4.78) za vnitřní integrál ve vztahu (4.76) dostaneme

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\left[\int_{-\infty}^{+\infty} y(t+\tau)\mathrm{e}^{-j\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{Y}(j\omega)x(t)\mathrm{e}^{j\omega t}\,\mathrm{d}t = \\ &= \hat{Y}(j\omega)\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\mathrm{e}^{j\omega t}\,\mathrm{d}t = \hat{Y}(j\omega)\hat{X}^{*}(j\omega),\end{aligned} \tag{4.80}$$

kde hvězdičkou je označena komplexně sdružená funkce, hodnota či operace. Symbol $\hat{X}(j\omega)$ má význam obrazu či spektra náhodného signálu $x(t)$,

$$\hat{X}(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\mathrm{e}^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t \tag{4.81}$$

a $\hat{X}^{*}(j\omega)$ jeho komplexně sdružená hodnota.

Může se tedy shrnout. Spektrum korelační funkce $R_{XY}(\tau)$ dvou náhodných signálů $x(t)$ a $y(t)$ je dáno součinem spekter těchto signálů, přičemž jedno z nich musí být komplexně sdružené

$$R_{XY}(j\omega)=\hat{X}^{*}(j\omega)\hat{Y}(j\omega) = \hat{X}(j\omega)\hat{Y}^{*}(j\omega) \tag{4.82}$$

Jako v časové definici korelace (4.74) nezáleží na tom, ve které funkci je časový posuv τ, tak ve vztahu (4.82) nezáleží na tom, která veličina je komplexně sdružená. Porovnáním časové definice (4.74) a frekvenčního důsledku (4.82) zjistíme, že hvězdička by měla být u toho členu, u něhož není v časové definici časový posuv τ.

Pro autokorelaci jako speciální, avšak prakticky velmi důležitý případ, plyne z (4.82), položíme-li $\hat{Y}(j\omega) = \hat{X}(j\omega)$,

$$R_X(j\omega)=\hat{X}(j\omega)\hat{X}^{*}(j\omega) =|\hat{X}(j\omega)|^2 = X^2(j\omega) \tag{4.83}$$

Frekvenční spektrum autokorelace je tedy čtverec absolutní hodnoty[4] spektra autokorelované funkce. To má velké praktické důsledky, jak ukážeme v další části.

4.3.3.2 Výkonová spektrální hustota

Při odvozování či vysvětlování dalších vztahů je nutno kvůli názornosti se dosti věrně přidržet teorie elektrických signálů, speciálně signálu napětí $u(t)$. Je-li tento signál přiložen k ideálnímu odporu R, uvolňuje se na něm okamžitý výkon

$$p = \frac{u(t)^2}{R} = u(t)^2 . \tag{4.84}$$

Pro jednoduchost zápisu předpokládáme, že je přiložen jednotkový odpor R=1Ω. Obvykle místo okamžitého výkonu je důležitější průměrná nebo střední energie či výkon, které lze snadno měřit.

Průměrný výkon je definován vztahem

$$P = \lim_{To\to\infty} \frac{1}{T_o} \int_0^{To} u(t)^2 \, dt . \tag{4.85}$$

Energie je dána integrálem v (4.85). Tento integrál může divergovat, například pro periodické signály, proto se dává přednost (střednímu) výkonu.

Z praktického, ale i teoretického hlediska je daleko zajímavější, jak je průměrný výkon rozdělen podle frekvencí, tedy frekvenční závislost průměrného výkonu, stručněji jeho spektrum. Experimentálně to lze zajistit tak, že ideálním pásmovým filtrem s propustným pásmem $(f,f+\Delta f)$ propustíme pouze část signálu, $u_r(t,f,\Delta f)$.Pak na toto pásmo připadá střední výkon

$$\Delta P = G(f,\Delta f)\Delta f = \lim_{To\to\infty} \frac{1}{T_o} \int_0^{To} u_r(t,f,\Delta f)^2 \, dt . \tag{4.86}$$

---

[4] Absolutní hodnota) komplexního čísla se někdy pro jednoduchost a stručnost značí vynecháním stříšky nad symbolem, bezpečnější je ale uvést ji explicitně. Obě možnosti jsou ve vztahu (4.82).

V limitním případě $\Delta f \to 0$ závisí funkce $G(f,\Delta f)$ pouze na frekvenci f. Nazývá se výkonová spektrální hustota

$$G(f) = \lim_{\Delta f \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta f}. \tag{4.87}$$

Ideální pásmový filtr experimentálně nerealizovatelný je možné snadno aplikovat teoreticky, přejdeme-li od časové do frekvenční oblasti. Pomocí Fourierovy transformace (3.31) lze k časové funkci $u(t)$ zjistit obecně komplexní frekvenční spektrum

$$\hat{U}(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) e^{-j\omega t} \mathrm{d}t. \tag{4.88}$$

Pomocí inverzní Fourierovy transformace (3.32), kterou však budeme aplikovat pouze na frekvenční pásmo $(f, f+\Delta f)$, lze zjistit časovou funkci $u_r(t, f+\Delta f)$, která zůstane z původní $u(t)$ po průchodu filtrem.

$$u_r(t, f, \Delta f) = \frac{1}{2\pi} \int_{f}^{f+\Delta f} \hat{U}(j\omega) e^{j\omega t} \mathrm{d}\omega. \tag{4.89}$$

Po jejím dosazení do (4.86) se získá

$$\Delta P = \lim_{To \to \infty} \frac{1}{T_o} \int_{0}^{To} \left(\int_{f}^{f+\Delta f} \hat{U}(j\omega) e^{j\varpi t} \mathrm{d}\varpi \right)^2 \mathrm{d}t. \tag{4.90}$$

Dvojitou integraci v posledním vztahu je však nutné provádět numericky. Existuje však daleko jednodušší cesta výpočtu spektrální hustoty. Je nutné předpokládat harmonické napětí

$$u(t) = U_o \sin(\omega t). \tag{4.91}$$

V učebnicích se ukazuje, že pak je střední výkon

$$P(\omega) = \frac{U_o^2}{2}. \tag{4.92}$$

Aplikuje-li se komplexní symbolická metoda, je harmonický signál v časové oblasti popsán vztahem

$$\hat{u}(t) = \hat{U}_o e^{j\omega t}. \tag{4.93}$$

Pomocí definice komplexního výkonu lze ukázat, že střední (činný) výkon je dán vztahem

$$P(j\omega)=\frac{U_o U_o^*}{2}=\frac{|U_o|^2}{2}=\frac{U_o^2}{2} \tag{4.94}$$

Nyní bude uvažován obecný signál $u(t)$, kterému přísluší spektrum $\hat{U}(j\omega)$. Spektrální složka o frekvenční ω odpovídá harmonické složce (4.91), přísluší jí tedy podle (4.94) výkon

$$S(j\omega)=\frac{U(j\omega)U^*(j\omega)}{2}=\frac{|U(j\omega)|^2}{2}=\frac{U(j\omega)^2}{2}. \tag{4.95}$$

Polovina čtverce absolutní hodnoty spektrální funkce obecného signálu je tedy výkonová spektrální hustota. Je definována pro kladné i záporné frekvence a má přívlastek oboustranná. Definujme jednostrannou spektrální hustotu $G(j\omega)$ jako dvojnásobek jednostranné spektrální hustoty $S(j\omega)$ [88]. Z této definice a porovnání vztahů (4.95) a (4.83) se dojde k důležitému závěru:

$$G(j\omega)=2S(j\omega)=|U(j\omega)|^2=|X(j\omega)|^2= \tag{4.96}$$
$$=Rx(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(t)e^{-j\omega t}\,d\tau=2\int_{-\infty}^{+\infty}R_X\cos\omega t\,dt$$

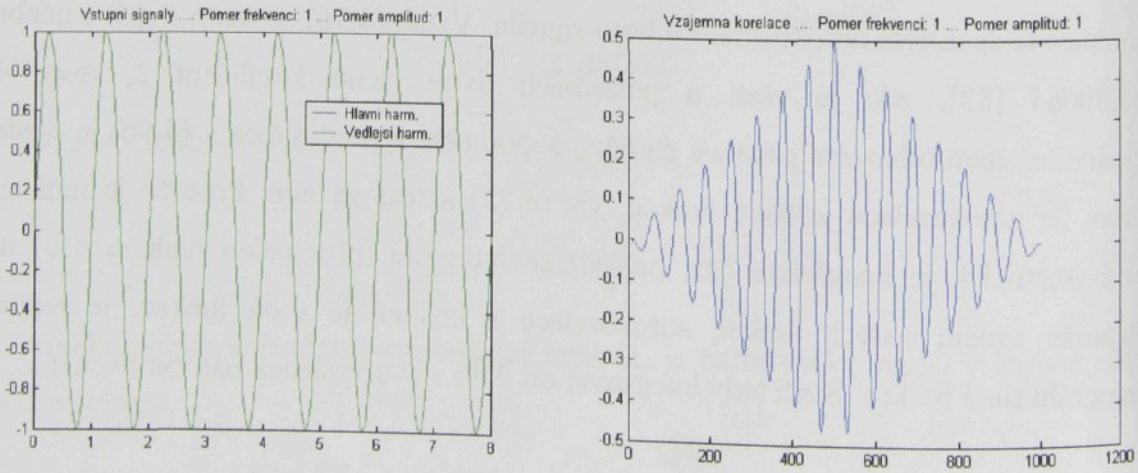
Oboustranná či jednostranná výkonová spektrální hustota náhodného signálu souhlasí se spektrem autokorelace tohoto signálu. Vztah (4.96) se často uvádí v učebnicích, například [88], zde je však u posledních dvou členů koeficient 2, resp. 4. Při zjednodušeném odvození jsme asi na něco zapomněli. Poslední člen v (4.96) je důsledkem toho, že autokorelace je sudá funkce, viz (4.75) a text za ním. Protože je funkce sinus antisymetrická, je imaginární část posledního integrálu (přes celou reálnou osu) nulová. Protože součin sudých funkcí, autokorelace a kosinu, je sudá funkce, je reálná část integrálu sudá funkce. Stačí tedy integrovat od 0 do $+\infty$ a výsledek násobit dvěma.

4.4 Simulace korelace

Výpočet vzájemné korelace a autokorelace, ač jsou definovány poměrně jednoduchými vztahy, je dosti komplikovaný. Proto je v učebnicích obvykle v několika krocích uváděn postup, jak se získá korelační funkce. To však ještě nedává návod, jak výsledky korelace, zejména průběh vypočtené korelační funkce interpretovat. Proto je vhodné získat představu pomocí simulace na jednoduchých příkladech.

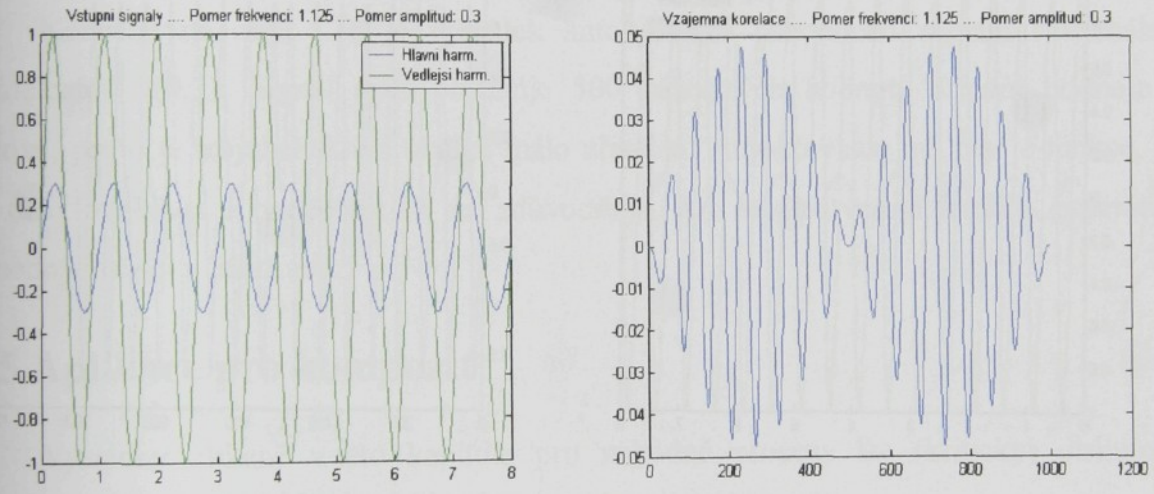
Vychází se z předpokládané aplikace vzájemné korelace či autokorelace na osy vlákenných svazků. Tyto osy se popisují Fourierovou řadou, tedy kombinací harmonických funkcí diskrétních frekvencí. Protože korelace je lineární operace, bude výsledný korelační obraz složen z korelací různých kombinací harmonických. Ty lze snadno nasimulovat a z výsledků pak činit závěry, jak by měl celkový korelační výstup vypadat. Při simulaci jsme přihlédli k tomu, že nejvyšší příspěvek ke vzájemné korelaci bude od kombinací nejsilněji zastoupených harmonických.

Pomocí funkce „*xcorr*" v MatLabu jsme simulovali vzájemnou korelaci maximální harmonické a jejích sousedů. Předpokládali jsme, že osmá harmonická je dominantní, což platí pro plátnovou vazbu. Korelace byla brána pro osm period. Především se ukázalo, že výsledek korelace nezávisí na vzájemném fázovém posuvu vstupních funkcí, což je známý důsledek. Několik zajímavých případů je na obrázcích. Vlevo je kombinace vstupních funkcí, vpravo výsledek vzájemné korelace nebo autokorelace. Autokorelace harmonické funkce je na obr. 4.13. Je jasně vidět přepokládaný trojúhelníkový průběh autokorelační funkce.

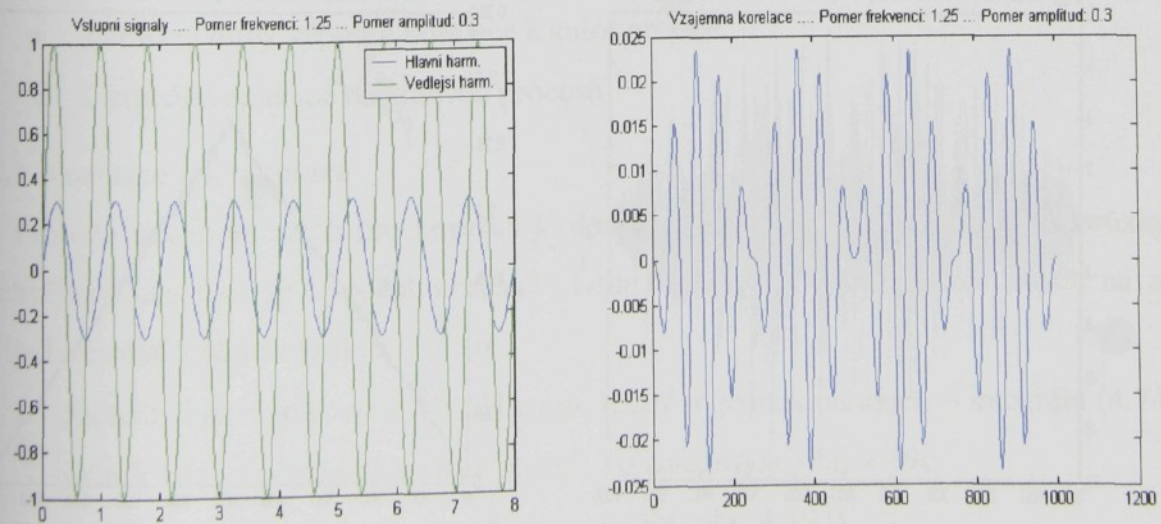


Obr. 4.13 Autokorelace harmonické funkce

Výsledky korelace dominantní harmonické s jejími blízkými sousedy, 9. a 10. harmonickou jsou na obr. 4.14 a 4.15. Amplitudy vyšších harmonických činily 0,3 amplitudy dominantní harmonické. Průběh vzájemné korelační funkce je složitější a roste s odstupem harmonické. To dokazuje obr. 4.16, kde je výsledek pro vzdálenou šestnáctou harmonickou. Na všech obrázcích pro vzájemnou korelací s jinou harmonickou chybí jakýkoliv náznak trojúhelníkové obálky. Jedná se spíše o obálku obdélníkovou, zejména u obr. 4.16 pro vzájemnou korelaci s poměrně vysokou harmonickou. Z těchto průběhů je možné usuzovat, že čím více maxim bude mít vzájemná korelace pro vlákenné svazky, tím více se svazky budou lišit ve vazné vlně. Naopak, pokud korelační funkce bude mít přibližně trojúhelníkovou obálku, vlákenné svazky si budou podobné.

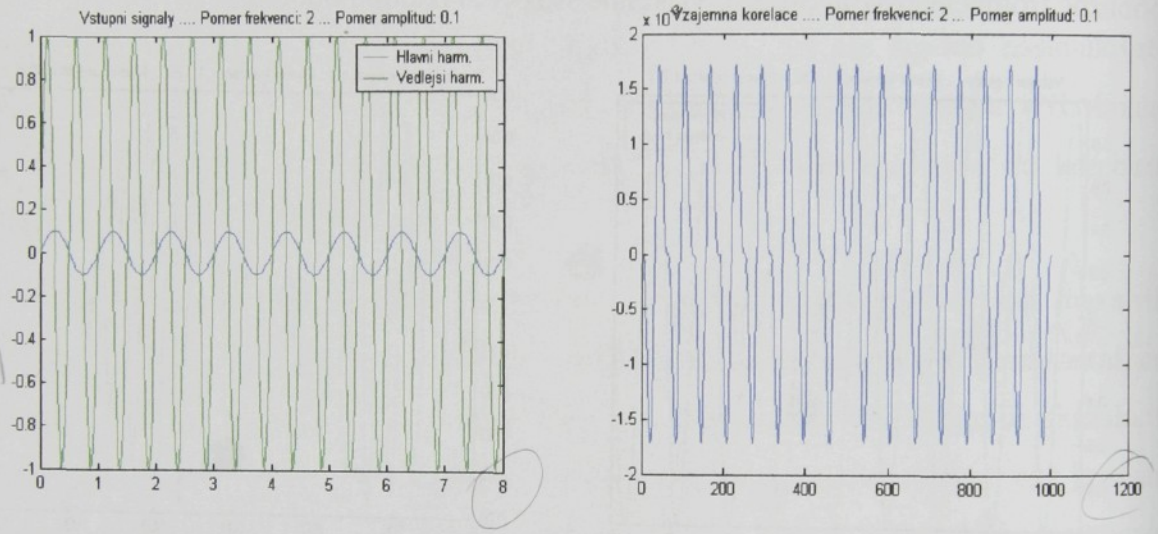


Obr. 4.14 Vzájemná korelace 8. a 9. harmonické

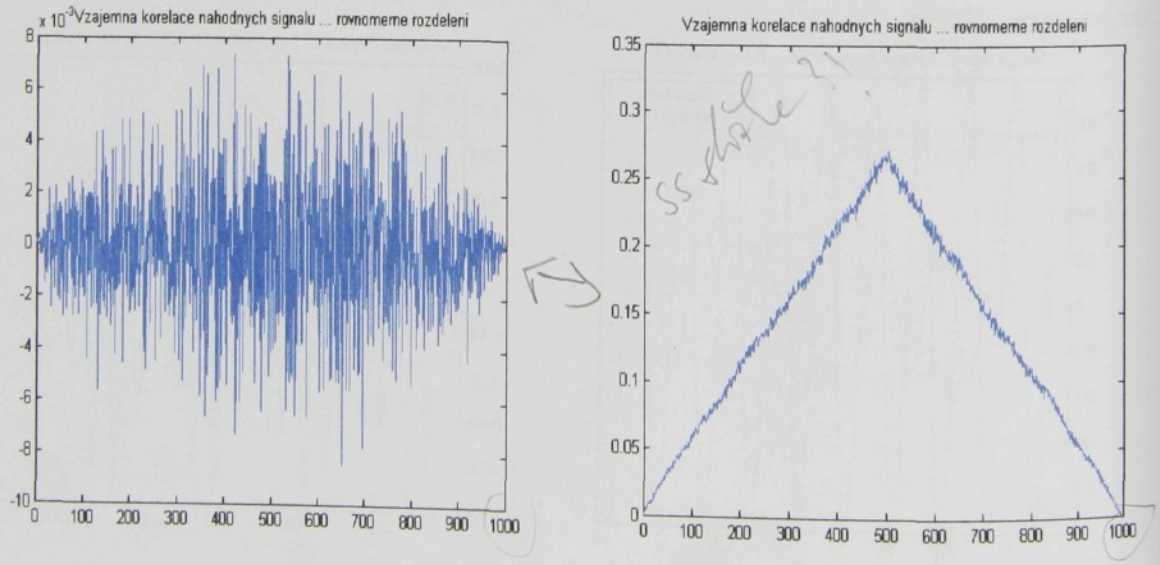


Obr. 4.15 Vzájemná korelace 8. a 10. harmonické

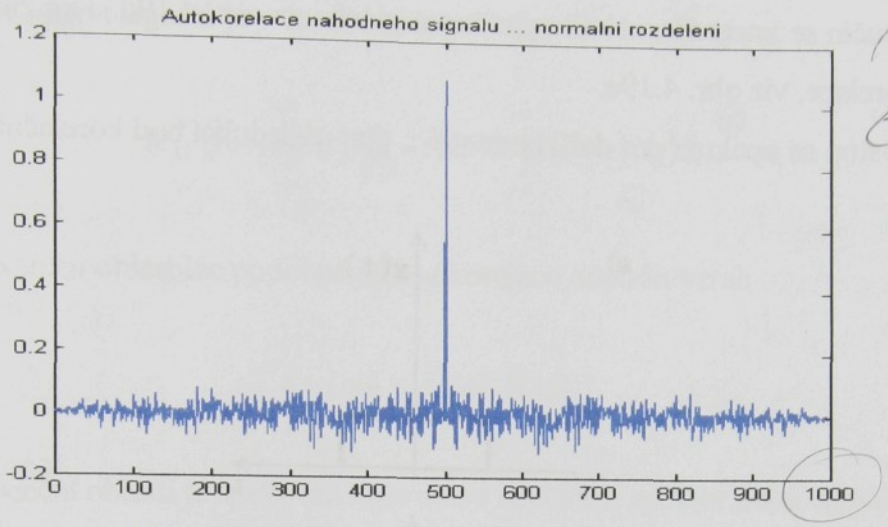
Dále byla sledována vzájemná korelace a autokorelace náhodných signálů s rovnoměrným rozdělením hustoty pravděpodobnosti. Typické výsledky jsou na obr. 4.17. Jedná se o vzájemnou korelaci pro 500 náhodných hodnot. Pokud odečteme střední hodnotu, což je 0,5 pro signál s rovnoměrnou hustotou pravděpodobnosti na intervalu (0,1), je průběh vzájemné korelační funkce nahodilý, což potvrzuje levá část obr. 4.17, i když trojúhelníkovou obálku lze vytušit. Pokud se střední hodnota neodečte, získá se jasně definovaná trojúhelníková obálka (pravá část obr. 4.17). Z toho vyplývá praktický závěr, že před aplikací korelace je nutno odečíst střední hodnotu signálu. Je nutné aplikovat vlastně kovarianci.



Obr. 4.16 Vzájemná korelace 8. a 16. harmonické



Obr. 4.17 Vzájemná korelace náhodných signálů s rovnoměrným rozdělením



Obr. 4.18 Autokorelace náhodného signálu s normálním rozdělením

Konečně na obr. 4.18 je výsledek autokorelace náhodného signálu s normálním rozdělením N(0,1). Signál opět obsahuje 500 náhodných hodnot. Střední hodnota je nulová, proto je trojúhelníková obálka málo zřetelná. Autokorelace má tvar δ-funkce, jak se dalo očekávat a v učebnicích se zdůvodňuje. To mj. potvrzuje kvalitu generátoru náhodných čísel v MatLabu.

4.5 Aplikace pro kompozit

Výsledky získané v této kapitole pro náhodné procesy lze (kriticky) diskutovat z několika hledisek a případně aplikovat v několika oblastech:

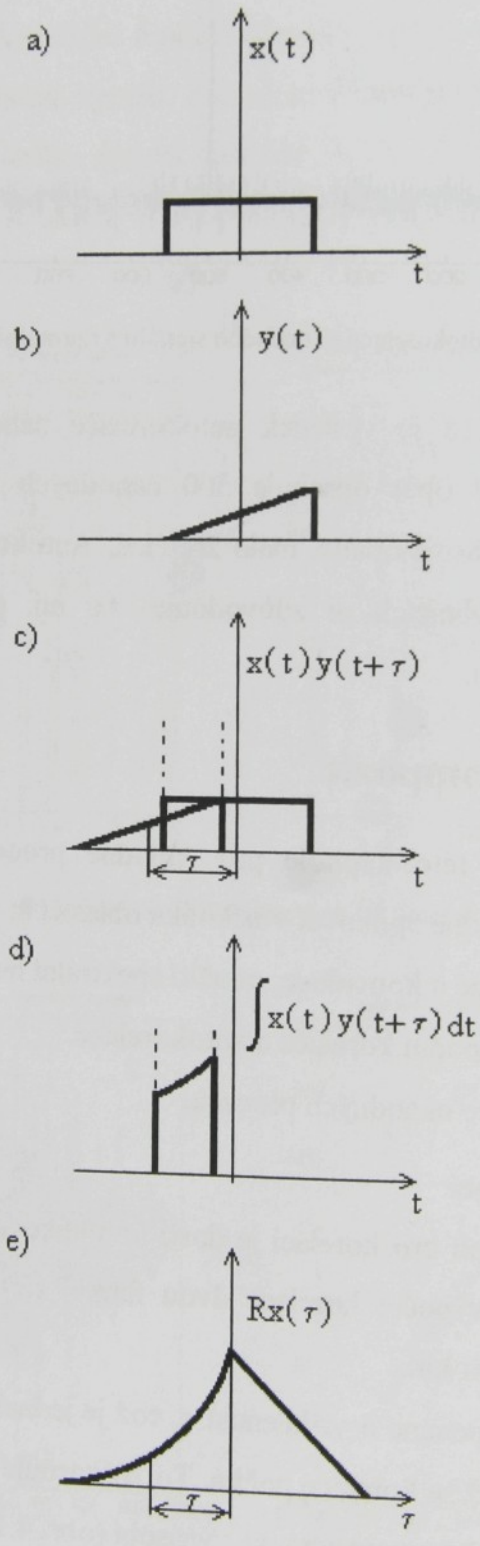
- Porovnání korelace a konvoluce, použití spektrální hustoty.
- Zkrácení doby výpočtu korelace a autokorelace.
- Optimální aplikace náhodných procesů.

4.5.1 Korelace a konvoluce

Protože integrální vztah pro korelaci je dosti komplikovaný, v učebnicích se s různými odchylkami ukazuje, že výpočet korelace dvou funkcí $x(t)$ a $y(t)$ znázorněných na obr. 4.19a,b sestává z těchto kroků:

1. Jedna z funkcí se posune o vzdálenost τ, což je jednak parametr v integrálu (4.74) a jednak bod, v němž se korelace počítá. To znázorňuje obr. 4.19c
2. Obě funkce, původní a pousnutá, se vynásobí (obr. 4.19d)

3. Součin se integruje, neboli vypočte se plocha na obr. 4.19d. Tím získáme jeden bod korelace, viz obr. 4.19e.
4. Postup se opakuje pro další hodnotu τ, tzn. následující bod korelační křivky.



Obr. 4.19 Postup při výpočtu korelace

Konvoluce dvou signálů je v časové oblasti definována vztahem

$$K_{XY}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(\tau - t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau - t)y(t)\mathrm{d}t\,. \tag{4.97}$$

Pro frekvenční oblast lze podobně jako u korelace odvodit vztah

$$K_{XY}(j\omega) = \hat{X}(j\omega)\,\hat{Y}(j\omega). \tag{4.98}$$

Ve frekvenční oblasti je spektrum konvoluce součinem spekter obou signálů.

Konvoluce a korelace jsou tedy definovány podobnými výrazy v časové oblasti a mají podobné charakteristiky ve frekvenční oblasti. Nicméně je zde rozdíl. Z porovnání s definicí korelace (4.74) je zřejmé, že obě definice se liší znaménkem u posunuté funkce. Zatímco při výpočtu korelace se funkce vůči sobě pouze posouvají, při konvoluci se jedna z nich nejprve invertuje (obrátí, otočí) vzhledem k počátku, a pak teprve dojde k posuvu. V obou případech lze posuv τ vložit do libovolné z obou funkcí, u konvoluce bez jakékoliv další změny. Protože u konvoluce se jedna z funkcí obrací, nic se nezmění, pokud je sudá. Pokud tedy je jedna z funkcí sudá, není mezi konvolucí a korelací žádný rozdíl. Pro ostatní funkce, pokud jsou rozdílné, lze očekávat jednoznačný vztah mezi vzájemnou korelací a konvolucí, který lze však obtížně najít.

Vzájemná konvoluce se používá při zpracování signálů, umožňuje např. nalézt krátký signál v dlouhém, nebo hledat známé signály za přítomnosti šumu. Zde nachází širší použití než korelace a proto by se mohla aplikovat i v kompozitech. Naproti tomu autokonvoluce nemá praktický význam, zatímco autokorelace značný, viz např. obr. 4.18.

Kromě korelace jsme poměrně podrobně popsali výkonovou spektrální hustotu. Výkonová spektrální hustota, kterou snadno získáme z amplitudového spektra má z hlediska aplikací v kompozitech v podstatě tentýž význam jako amplitudové spektrum. Díky čtverci amplitudy zvýrazňuje ovšem silné harmonické a potlačuje slabé. Protože chybí fázové spektrum, není informace od výkonové hustoty úplná.

4.5.2 Diskrétní korelace

Analogová korelace (4.74) má zásadní teoretický význam, pro praktické výpočty se však nehodí. I pro nejjednodušší funkce se integrace provádí obtížně, poněvadž jedna z integračních mezí se mění, viz obr. 4.19d. Protože však používáme vzorkované signály, integrace přechází v sumaci a od analogové korelace přecházíme k diskrétní. Základní vztahy pro ni popíšeme v této části.

Pro jednoduchost předpokládejme, že máme stejný počet N vzorků od obou vstupních funkcí. Jsou-li vzorky vstupních funkcí $x(t)$ a $y(t)$ po řadě $x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}$ a $y_0, y_1, \ldots, y_{N-1}$, pak k-tý vzorek korelace je dán výrazem

$$r_k(x,y) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n y_{n+k}, \qquad -(N-1) \le k \le (N-1). \tag{4.99}$$

Kromě této standardní definice existuje ještě definice periodické korelace [15], která má stejný počet prvků jako vstupní posloupnosti a navíc při záměně pořadí funkcí dává jiný výsledek. Tou se zde nezabýváme.

Pro analogovou korelaci mají spektrální vztahy (4.82) a (4.83) případně (4.96) pouze teoretický význam. U diskrétní korelace naopak umožňuje velkou časovou úsporu u opakovaných výpočtů, poněvadž výpočet s použitím rychlé Fourierovy transformace, FFT, což je speciální případ DFT, viz sekce 3.7, je velmi rychlý. Pro periodickou diskrétní korelaci platí tento spektrální vztah

$$\hat{R}_k(\hat{X},\hat{Y}) = \sum_{n=0}^{N-1} \hat{X}_n \hat{Y}_n^* = \sum_{n=0}^{N-1} \hat{X}_n \hat{Y}_{N-1-n}, \qquad -(N-1) \le k \le (N-1), \tag{4.100}$$

kde $\hat{X}_0, \hat{X}_1, \ldots, \hat{X}_{N-1}$ a $\hat{Y}_0, \hat{Y}_1, \ldots, \hat{Y}_{N-1}$ jsou prvky spektra vstupních funkcí. Současně platí $\hat{X}_k^* = \hat{X}_{N-k}$.

Tento vztah lze použít jen pro periodickou diskrétní korelaci, protože je dispozici jen polovina prvků. Pro standardní diskrétní korelaci je nutno použít speciální postup [15]. Popíšeme jej pro stejné délky obou vstupních funkcí – posloupností:

- První posloupnost se doplní nulami zprava na dvojnásobnou délku.
- Druhá posloupnost se doplní nulami zleva na dvojnásobnou délku.
- Na obě se aplikuje DFT.
- Vypočte se součin komplexních amplitud získaných pomocí DFT.

- Na tento součin se aplikuje inverzní DFT.
- Získaná korelační posloupnost se převrátí, první prvek se vymění s posledním, druhý s předposledním atd.

Při použití rychlé Fourierovy transformace (FFT) je tento postup rychlejší než klasický výpočet podle definice. Použití FFT předpokládá, že počet vzorků je mocninou dvou. To může vést ke komplikacím. Navíc tento přístup je vhodný v případě výpočtů v reálném čase, což nebylo předmětem této práce.

4.5.3 Střednice vlákenného svazku jako realizace náhodného procesu

Při hledání vhodné aplikace náhodného procesu je nutno především zvážit, co poskytl experiment. Obecně máme k dispozici N_r řezů vzorkem, N_s vlákenných svazků na každém řezu a N_p vazných vln, period, na každém vlákenném svazku. V našem případě N_r = 12 řezů, N_s = 8 vlákenných svazků a N_p = 8 vazných vln.

Teoreticky je možné uvažovat tyto náhodné procesy:

- Soubor obsahující pouze vazné vlny. Těch je N_r N_s N_p = 768. Tento soubor je dostatečný na spolehlivé statistické zpracování napříč souborem. Vazné vlny, přesněji jejich střednice, se ovšem musí vyřezat, což není jednoduchý a jednoznačný problém s ohledem na obtížnou definici počáteční fáze.

- Soubor obsahující vlákenné svazky. Těch je N_r N_s = 96. Každá reprezentace obsahuje N_p = 8 vazných vln. Tento soubor je na spolehlivé statistické zpracování napříč souborem poměrně malý. Nicméně v této práci byl realizován právě tento případ.

- Soubor obsahující vzorky. Těch N_r = 12. V tomto případě je však nutno pospojovat vlákenné svazky, což není jednoduché, protože nezačínají stejně (se stejnou fází). Zde je nutno využít stacionarity a počáteční část odříznout, např. tak, aby začínaly maximem. Ale ani tak se nezajistí spojitá návaznost, natož hladké spojení (spojitost prvních derivací). Pomoc lze očekávat od metody spline. Počet vazných vln na vláknu bude N_s N_p = 64, nebo o několik méně v důsledku odřezávání. Jedná se spíše o zpracování podél souboru..

- Soubor obsahující jediný vlákenný svazek. Ten by měl po případném ořezání obsahovat $N_r\ N_s\ N_p = 768$ vazných vln, nebo trochu méně v důsledku ořezání. Problémy s návazností jsou stejné jako v předchozím případě, jejich redukce je nesrovnatelně pracnější. Jedná se o typické zpracování podél souboru.

S přihlédnutím k těmto okolnostem se jako nepřirozenější a nejjednodušší jeví druhý přístup, který byl použit. S ohledem na ergodicitu a stacionárnost by výsledky ostatních možností měly být přibližně stejné.

Další otázkou je náhodný posuv mezi jednotlivými střednicemi. Ten sice zajistí náhodnost procesu napříč svazky, na druhé straně ovšem znemožňuje jejich vzájemné porovnání. Logičtější by bylo, pokusit se jej odstranit a porovnávat střednice za stejných podmínek. V terminologii náhodných procesů to znamená definici počátečného stavu. Počáteční stav může být buď náhodný, nebo přesně definovaný. Ve druhém případě však není zaručena stacionarita, průběh záleží na volbě počátku časové osy, alespoň v blízkém časovém okolí od spuštění. Stacionarita se projeví až po uplynutí dostatečně dlouhé doby od „spuštění" procesu.

Konečně posledním vážným problémem je, zda systematická složka průběhu svazku patří do náhodného procesu. Logičtější by bylo odečíst ji od střednice všech svazků. Pak zbytek bude skutečně náhodný. Otázkou je co a od čeho odečíst.

Možností je mnoho, dva krajní případy jsou:

- Od každé střednice odečíst její aproximaci sinusovkou, nebo dominantní harmonickou, nebo kombinaci nejvýznamnějších harmonických apod.
- Od všech střednic odečíst střednici průměrného vlákna získané z průměrných hodnot dominantních harmonických.

Teoreticky by se ovšem výsledky různých voleb neměly zásadně lišit. Vybrat by se mělo to, co je optimální.

5 Experimentální část

V této kapitole popíšeme postupy, které vedly k získání rozsáhlých datových a obrazových souborů popisujících do detailů strukturu studovaných kompozitů. Postupně popíšeme způsob přípravy kompozitu, jeho základní vlastnosti, zejména geometrické a strukturní, způsob realizace řezů, jejich snímání, postup při odečetu souřadnic a nakonec nastíníme softwarové metody efektivního zpracování a transformace dat.

5.1 Popis studovaného kompozitu

Cílem této práce je co nejpřesněji popsat a vhodným způsobem kvantifikovat strukturní změny, zejména deformace textilní výztuže po zapracování do kompozitu. S ohledem na zvyšování objemu výroby a využívání kompozitů v aplikacích, kde spolehlivost je prvořadou vlastností, lze tímto způsobem odhalit možné příčiny funkčního selhání způsobeného strukturními defekty. Analýza struktury výztuže kompozitu po mechanicko-tepelném zpracování umožní optimalizovat podmínky výroby a cíleně ovlivňovat vlastnosti produktu.

Experiment jsme prováděli na vzorcích uhlíkového kompozitu C/C vyztuženého osmi vrstvami uhlíkové tkaniny ve vazbě plátno, kepr a atlas 5HS (pětivazný). C/C kompozit značí uhlíkový kompozit, kde základem matrice i výztuže je uhlík. Jedná se o velmi pevné, tuhé, ale křehké materiály, které vynikají fyzikálními (mechanickými, tepelnými apod.) vlastnostmi. Z mechanických vlastností jsou nejpodstatnější pevnost F, moduly pružnosti v tahu E a smyku G, součinitel tření f, délková a objemová hmotnost.

Výztuží C/C kompozitů je uhlíková tkanina tvořená dvěma ortogonálně protkanými vlákennými svazky (multifily). Na jejich kvalitě závisí nejen kvalita celého kompozitního systému, ale i zpracovatelské vlastnosti v procesu výroby [1, 4, 75].

5.1.1 Základní parametry zkoumaných C/C kompozitů

Základní údaje o uhlíkovém multifilu lze nalézt v následující tabulce (viz tab. 5.1). Jedná se o produkt typicky používaný pro výrobu textilií určených pro vyztužení tkaninových kompozitů.

parametr	hodnota	jednotka
výrobce	Toray Japan	-
typové označení	Toray T 800 HB	-
počet	6000	fibrila
délková hmotnost	222	tex
pevnost v tahu	5490	MPA
modul pružnosti	295	GPa
tažnost	1,9	%
hustota	1810	$kg.m^{-3}$

Tab. 5.1. Základní údaje o uhlíkovém multifilu

Uhlíkové tkanina, tvoří hlavní vyztužovací komponentu celého kompozitního systému. Vlastnosti multifilu ovlivňují geometrické parametry tkaniny. Ta následně ovlivňuje vlastnosti celého kompozitu. Mechanické vlastnosti kompozitu jsou tak výsledkem interaktivního působení všech jeho komponent od prvopočátku procesu výroby. Příprava C-tkanin je specifická nejen použitým materiálem, ale i způsobem zatkávání samotných multifilů. Uhlíková vlákna nejsou odolná na ohyb, a je tudíž nutné přizpůsobit tahové a ohybové síly v procesu zatkávání zpracovávanému materiálu.

Základní strukturní parametry jsou znázorněny v tab. 5.2.

tkanina	vazba	t [m]	ρ_s [$kg.m^{-2}$]	p [%]	Do [/100mm]	Dú [/100mm]	So [%]	Sú [%]
plátno Cramer	1/1	$0,37.10^{-3}$	0,27	59	60	60	1,0	2,0
kepr Carr	2/2 twill	$0,37.10^{-3}$	0,20	70	45	45	0,88	0,78
atlas Yamada	5HS	$0,52.10^{-3}$	0,27	70	64	64	0,87	0,76

Tab. 5.2 Parametry použitých C-tkanin

V tab. 5.2 jsou použity tyto parametry:

t [m] ..... tloušťka vyztužující textilie za přítlaku (podle ČSN EN ISO 5084 (800844))

ρ_s [kg.m^{-2}] ..... plošná měrná hmotnost textilie

p[%] ..... pórovitost

Do [/100mm] ..... dostava osnovy (počet vl. svazků na 100mm textilie)

Dú [/100mm] ..... dostava útku

So [%] ..... setkání osnovy

Sú [%] ..... setkání útku

C/C kompozity připravené zalisováním vrstev C-tkanin za tepla a karbonizované ve vysokoteplotní peci mají tyto parametry (tab. 5.3).

výztuž	p [MPa]	t_d [mm]	E_{11} [GPa]	G_{12} [GPa]	ρ_k [kg.m^{-3}]	V_f [%]
plátno Cramer	~1,0	1,8	51	4,8	1320	66
	~0,5	1,9	58	4,1	1300	62
	~0,3	2,4	47	3,2	1200	50
kepr Carr	~1,0	1,4	74	6,2	1270	62
	~0,5	1,7	66	4,4	1240	50
	~0,3	2,3	54	3,4	1130	39
atlas Yamada	~1,0	1,8	80	-	1350	65
	~0,5	2,4	68	4,6	1250	49
	~0,3	2,9	56	3,7	1120	40

Tab. 5.3 Parametry C/C kompozitů

V tab. 5.3 jsou použity tyto parametry:

p [MPa] ..... lisovací tlak

t_d [m] ..... tloušťka kompozitní desky

E_{11} [GPa] ..... modul pružnosti v tahu

G_{12} [GPa] ..... modul pružnosti ve smyku

ρ_k [kg.m^{-3}] ..... hustota kompozitu

V_f [%] ..... objemový podíl tkané výztuže v kompozitu

Parametry byly stanoveny standardními metodami textilního zkušebnictví, z výsledků konvenčních textilních zkoušek a hodnot naměřených v rámci obrazové analýzy Lucia G.

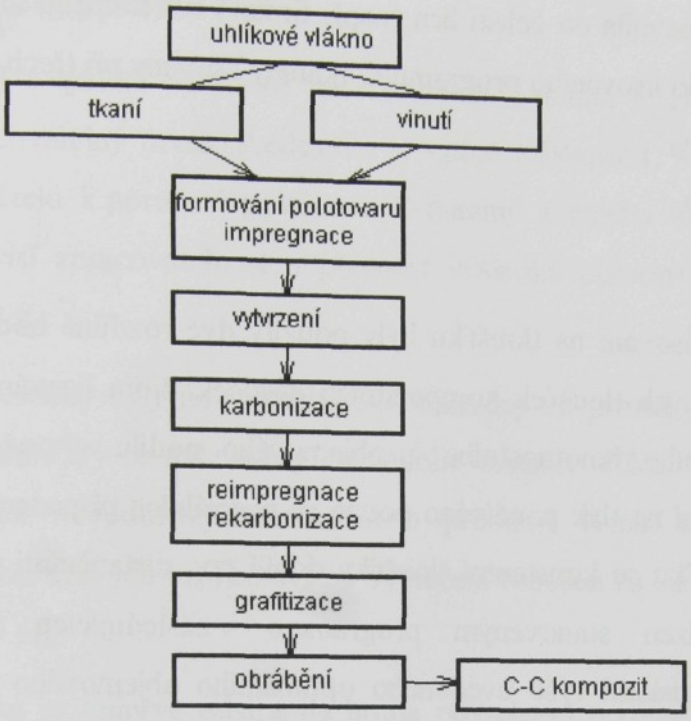
Hustota kompozitů byla stanovena metodou odpovídající normě ASTM C20-87 (Standard Test Method for Apparent Porosity, Water Absorption, Apparent Specific Gravity, and Bulk Density of Burned Refractory Brick and Shapes by Boiling Water). Měření spočívá ve stanovení váhy vzorků při třech odlišných podmínkách (metoda trojího vážení) [3].

5.1.2 Postup přípravy studovaných C/C kompozitů

C/C kompozity se připravují pyrolýzou z prekurzorních materiálů při vysokých teplotách 1000 - 1800°C pro karbonizaci a okolo 2500°C pro grafitizaci. Podíl čistého uhlíku ve vlákně závisí na teplotě pyrolýzy a pohybuje se v rozmezí 90–98 %. Podle typu použitého prekurzoru matrice je řízen proces pyrolýzy. Postupy výroby uhlíkových kompozitů můžeme rozdělit na základní a modifikované.

Základní postupy představují jádro postupných kroků výroby, které jsou z převážné většiny podobné u všech postupů. Většina základních postupů výrobního procesu je dále modifikována podle specifických požadavků na výrobek a úrovně optimalizace vzniku strukturních defektů. Každý materiál vykazuje jiné chování během procesu přípravy, které je závislé na tvaru a tepelně-mechanickém namáhání materiálu. Existuje celá řada výrobních programů, které vhodnou kombinací dynamické procesu zahřívání a lisování předurčují materiálu požadované fyzikální vlastnosti. V praxi je možné se setkat s několika základními výrobními technologiemi C/C kompozitů. Existují tyto metody: *klasická*, *prepregová*, *prášková spékací* a *metoda mletého koksu* [18, 75].

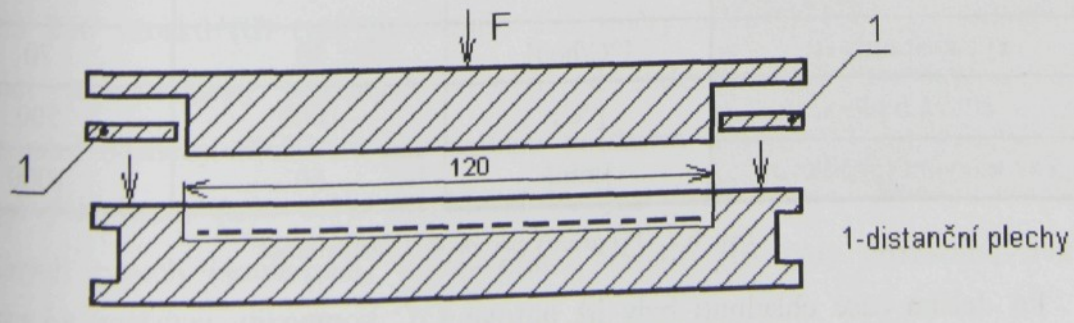
Vzorky C/C kompozitu našeho experimentu byly připraveny nejvýznamnější technologií výroby C/C kompozitů – *prepregovou technologií* (obr. 5.1) [18]. Prepregová technologie spočívá v přípravě vlákenných polotovarů, které se následně zapracovávají formováním (lisováním do sebe). Pro prepregovou technologii je nezbytné použití vhodných syntetických pryskyřic jako prekurzoru matrice. Princip je založen na skládání a formování vrstev polotovaru tzv. *prepregu* v kompozitní útvar, dále následuje jeho vytvrzení, prvotní karbonizace, případně cyklická impregnace/karbonizace a na závěr grafitizací. Finální úpravy spočívají v obrábění v konečný produkt (C/C kompozit). Klasická i prepregová technologie mají jednu zásadní nevýhodu. Je to zdlouhavost celého výrobního procesu, a tím i vysoká cena kompozitu.



Obr. 5.1 Prepregová technologie výroby C-C kompozitů

Vzorky C/C kompozitů v rámci experimentu byly vyráběny prepregovou technologií s jedním cyklem reimpregnace prekurzorem matrice. V první fázi přípravy se z C-tkaniny dané vazby nařezal určitý počet vzorků o rozměrech 120x120 mm odpovídající počtu vrstev výztuže ve výsledném kompozitu (osm vrstev). Na vzorky byla nanesena tenká vrstva fenolformaldehydová pryskyřice *Umaform LE*. Vzorky byly ponechány 48 hodin odležet a zavadnout za účelem lepší adheze a dokonalého prosycení vrstev C-tkanin v procesu lisování.

Druhá fáze výroby představuje lisování vrstev kompozitu za tepla. Vzorky C-tkanin byly opět potřeny silnější vrstvou pryskyřice a opatrně vloženy na sebe do ocelové formy (obr. 5.2).



Obr. 5.2 Lisovací forma

Forma se upevnila do čelisti lisu (např. firma VEB Leipzig) a za působení tepla byly v krocích zadaného lisovacího programu C-tkaniny lisovány při třech různých tlacích [3]:

- ~ 0,3 MPa
- ~ 0,5 MPa
- ~ 1 MPa

V případě lisování na tloušťku byly použity dvě rozdílné hodnoty. Výsledkem bylo získání tří rozdílných tlouštek kompozitních destiček. Míra lisování vychází z požadavku docílení optimálního hmotnostního a objemového podílu výztuže a matrice. Z těchto důvodů je lisování na tlak používáno pouze ve speciálních případech. U více používaného lisování na tloušťku se konstantní tloušťky docílí tzv. distančními plechy. Proces lisování za tepla je řízen stanoveným programem v následujících krocích. Program je optimalizován k získání výše uvedeného optimálního objemového podílu vláken výztuže v C/C kompozitu. Program pro optimalizaci lisování je v tab. 5.4.

program		1	2
rychlost ohřevu	[°C/hod]	400	60
cílová teplota	[°C]	90	120
čas setrvání (prodleva)	[min]	140	60

Tab. 5.4 Programy pro proces lisování za tepla

Proces karbonizace probíhal v elektrické peci dosahující maximální teploty 1200°C a výkonu 6kW. Uvnitř pece je křemenná trubka, ve které cirkuluje inertní plyn N_2 o čistotě 99,998% a konstantní rychlosti průtoku 30 dm^3/hod. Stejně jako proces lisování byl i proces karbonizace řízen zvoleným programem, který je v tab. 5.5.

program		1	2
rychlost ohřevu	[°C/hod]	50	70
cílová teplota	[°C]	1000	500
čas setrvání (prodleva)	[min]	60	1000

Tab. 5.5. Programy pro proces karbonizace

Po delším čase chladnutí byly již hotové C/C kompozity vytaženy z karbonizační pece a připraveny pro další zpracování.

5.1.3 Příprava nábrusů příčných řezů

C/C kompozit s výztuží ve formě navrstvených C-tkanin je složitý a při přípravě nábrusů těžce zpracovatelný útvar. Především je nutné zabezpečit, aby při mechanickém zpracování nedocházelo k porušení geometrie C-tkaniny a celého kompozitu, neboť na kvalitě nábrusu závisí zpracovatelnost a přesnost výsledků získaných pomocí obrazové analýzy.

Kompozitní destičky byly na speciální pile nařezány na proužky ve směru osnovy i útku široké cca 35mm. Ty se dále dělily na několik menších dílků, které se umístily do předem připravených novodurových kroužků o průměru 40mm a zalily epoxidovou pryskyřicí. Povrch jednotlivých vzorků byl po vytvrzení broušen za sucha na stroji VP 160 s brusnou hlavicí AP 60.

Během procesu se nejprve odstranila hrubá povrchová nerovnost a potom pomocí několika brusných kotoučů se postupně vyhlazoval povrch příčného řezu C/C kompozitu. Kvalita příčného nábrusu je závislá na jemnosti brusného kotouče a rychlosti unášené brusné hlavice.

Získání velmi kvalitního nábrusu je poměrně obtížné, neboť dosažení podélného řezu vlákenného svazku rovnoběžného s řeznou rovinou vyžaduje vzhledem k rozměru vzorku a dostavě obou ortogonálních soustav C-tkanin přesné nastavení stroje. Takto zhotovené nábrusy příčných řezů C-kompozitů byly připraveny pro další zpracování pomocí obrazové analýzy.

Experiment jsme prováděli na vzorcích uhlíkového kompozitu C/C vyztuženého osmi vrstvami uhlíkové tkaniny ve vazbě plátno, kepr a atlas 8HS. Vzorky C/C kompozitů byly připraveny v Ústavu struktury a mechaniky hornin AV ČR v Praze. Připraveno bylo celkem 216 vzorků (tři typy provázání, dva směry příčných řezů, tři lisovací tlaky a dvanáct technologicky totožných vzorků od každého typu kompozitu). Tloušťka kompozitní destičky závisí na maximálním použitém lisovacím tlaku a typu provázání jednotlivých lamin (tab. 5.3). Strukturní analýzu jsme celkem provedli na osmnácti rozdílných typech (souborech) kompozitních vzorků (tři typy provázání, dva směry příčných řezů, 3 lisovací tlaky).

Každá skupina obsahuje dvanáct technologicky totožných vzorků. I v tomto případě je každý vzorek C/C kompozitu je vyztužen osmi vrstvami a jeho délka je přibližně 35mm. V celkovém součtu nutno podotknout, že z pohledu struktury bylo analyzováno ≈ 43m zvlněného vlákenného svazku v jednom souboru kompozitních vzorků. V případě parametru úhlu sklonu byly hodnoty odečítány s krokem 0,01mm z čehož vyplývá, že bylo naměřeno asi 864.10^3 dat na ploše řezů tkaninového kompozitu velikosti přibližně 10^4 mm^2.

Při popisu vzorků jsme používali číselného značení, které je v tab. 5.6. V tomto textu se snažíme vzorky popsat slovně a to v plném rozsahu (vazba, lisovací tlak, řez).

číslo vzorku	vazba	lisovací tlak [MPa]	směr řezu
289-3-x	atlas	0,5	osnova
289-4-x	atlas	0,5	útek
296-3-x	atlas	0,3	osnova
296-4-x	atlas	0,3	útek
298-3-x	kepr	0,5	osnova
298-4-x	kepr	0,5	útek
299-3-x	kepr	0,3	osnova
299-4-x	kepr	0,3	útek
300-3-x	plátno	0,3	osnova
300-4-x	plátno	0,3	útek
308-3-x	plátno	0,5	osnova
308-4-x	plátno	0,5	útek
357-3-x	plátno	1	osnova
357-4-x	plátno	1	útek
358-3-x	atlas	1	osnova
358-4-x	atlas	1	útek
359-3-x	kepr	1	osnova
359-4-x	kepr	1	útek

Tab. 5.6 Číselné označení typu vzorků C/C kompozitů

Symbol „x" za číslem vzorku znamená pořadové číslo jednoho ze skupiny technologicky totožných vzorků (1-12). Pokud se někde přece jen vyskytne pouze číselný kód a neúplný popis, lze všechny informace získat z této tabulky.

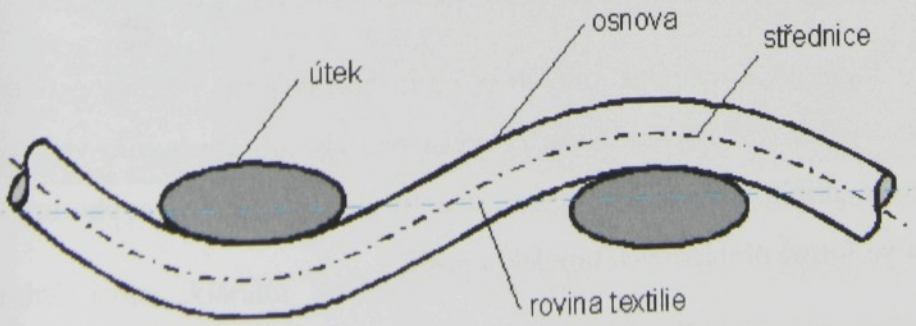
5.1.4 Měřené strukturní parametry C/C kompozitu

Sledované strukturní parametry jsme popsali v kap. 2 (viz sekce 2.8), proto se zde omezíme jen na jejich výčet se stručnou charakterizací. Hodnoty jsme získali odečtem z aproximovaného průběhu za pomoci metod popsaných v teoretické části (viz kap. 3).

Sledované strukturní parametry jsou:

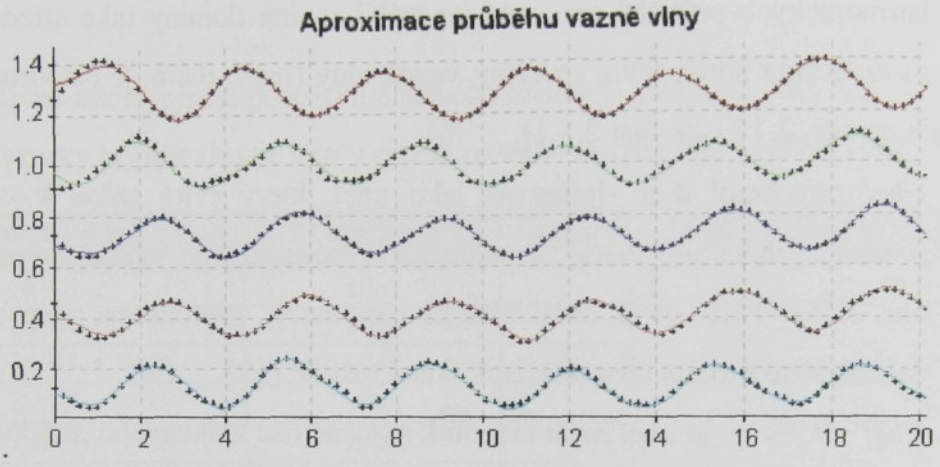
- *Střednice vlákenného svazku* je definována jako křivka spojující těžiště jednotlivých příčných řezů vlákenného svazku v celé jeho délce po nekonečně malém kroku d*l* [31, 41, 46, 69, 91].
- *Neutrální rovina tkaniny* prochází inflexními body periodického průběhu všech vazných vln v celé ploše textilní výztuže [34]. U periodických a zároveň harmonických průběhů prochází neutrální rovina tkaniny také střední vzdáleností mezi dvěma sousedními extrémy vazné vlny (např. plátno). Názornější vysvětlení je na obr. 2.14 (viz část 2.8.1).
- *Úhel* provázání ϕ je definován jako úhel, který svírá tečna k ose vlákenného svazku v inflexním bodě a neutrální rovina tkané výztuže (viz část 2.8.2, obr. 2.15). Patří mezi nejdůležitější parametry, protože na něm závisí několik dalších strukturních charakteristik tkané textilie [69].
- *Úhel sklonu* ψ je úhel mezi tečnou k zvlněné ose vlákenného svazku *v libovolném bodě* a neutrální rovinou tkané výztuže (viz část 2.8.3, obr. 2.15). Tento parametr byl zaveden v souvislosti s popisem deformačních charakteristik tkané výztuže kompozitních materiálů [91].
- *Rozdílový úhel* $\Delta\psi$ popisuje velikost skluzu jednotlivých vrstev výztuže. (viz část 2.8.4, obr. 2.15) [91].
- *Výška vazné půlvlny* H_1, H_2 a *délka* vazné *půlvlny* L_1, L_2 jsou popsány v části 2.8.5 a na obr. 2.16 [21].

Střednice vlákenného svazku či příze se vyskytuje v mnoha souvislostech. Pro úplnost uveďme, že jiná definice vychází z napětí ve vlákenném svazku (obr. 5.3).



Obr. 5.3 Střednice vlákenného svazku

Je zřejmé, že příze, která je blíže k rovině textilie, je namáhána tlakem, zatímco vnější (vzdálenější) je namáhána na tah. Střednicí svazku je myšlena ta část příze, ve které je napětí nulové [69]. Jedná se o určitou analogie neutrální osy či roviny vetnutého nosníku. Vyhodnocování některých parametrů je komplikováno náhodným skluzem jednotlivých vrstev výztuže kompozitu, které nejsou ve fázi. To ilustruje obr. 5.4, na němž jsou vyneseny průběhy střednice získané zpracováním obrazů řezů vlákenných svazků.



Obr. 5.4 Aproximace průběhu vlákenných svazků uvnitř C/C kompozitu pomocí DFT

Při nejhrubší aproximací průběhu jednou sinusovkou to znamená, že fázová konstanta nabývá pro různé křivky náhodných hodnot. Problém skluzu vrstev je z technologického hlediska prakticky neodstranitelný, protože dostava[1] tkanin je natolik malá, že vlákenné svazky mají dostatek prostoru na svévolné lokální posuny v rámci vazného bodu. Vyšší dostavu není možné použít z důvodů fyzikálních vlastností C-vláken. Mají omezenou odolnost v ohybu a v případě vyšší dostavy je riziko vzniku lokálních defektů v podobě mikrotrhlin na vnější exponované straně vlákenného svazku [12].

5.2 Metodika vyhodnocení skutečné geometrie výztuže

V této kapitole vysvětlíme princip a podrobně popsán postup experimentu, jehož úkolem bylo vypracovat nejvhodnější techniku pro získání souřadnic vlákenných svazků, jejich přesný a přibližný popis, odečtení strukturních parametrů a vhodný způsobem jej prezentovat ve formě přehledných tabulek a grafů.

---

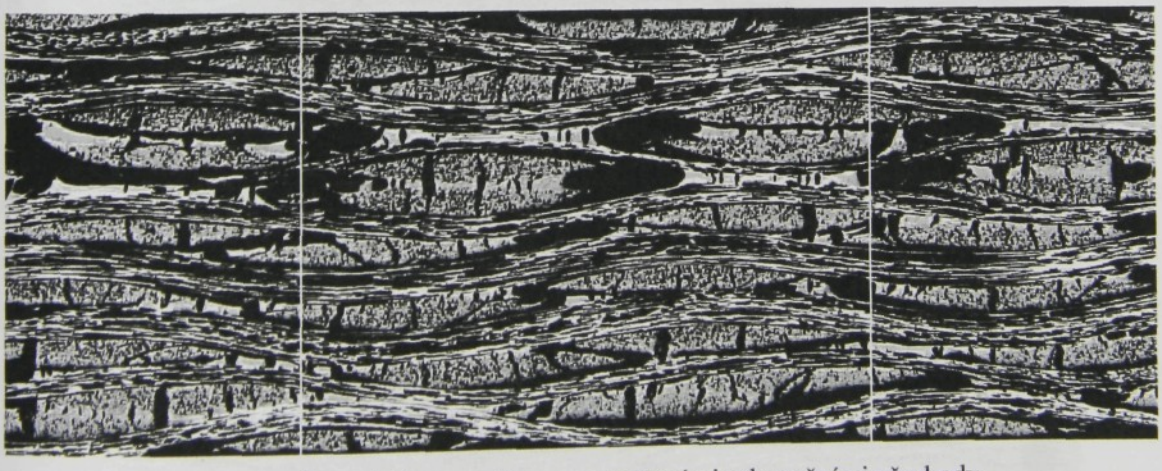
[1] Dostava je v textilní terminologii pojem pro počet vlákenných svazku na určitou jednotku délky (standardně 100mm).

V průběhu experimentu jsme metodiku neustále ladili a v rámci možností i optimalizovali. Experiment byl řešen v rámci výzkumných projektů [37, 38] ve spolupráci s Ústavem struktury a mechaniky hornin AV ČR v Praze. Průběžné výsledky experimentu byly prezentovány na tuzemských i zahraničních konferencích [32, 39– 46].

5.2.1 Snímání povrchu řezů

Získání objektivních a přesných výsledků je závislé na způsobu provedení strukturní analýzy C/C kompozitů. Po procesu karbonizace a procesu přípravy nábrusů příčných řezů strukturou jsme vzorky připravili k obrazové analýze. Nejprve jsme museli navrhnout optimální metodiku pro vyhodnocení strukturních parametrů [34, 84], v rámci této práce následovalo její ověření a propracování.

Jedním z prvních problémů, které samotnému experimentu předcházely, bylo nasnímání povrchu vzorku C/C kompozitů. Rozměr vzorku neodpovídal rozměru plochy obrazovky monitoru. Vzorky byly v objektivu mikroskopu velice tenké a příliš dlouhé. Nezbývalo než vzorky postupně nasnímat ve formě několika dílčích navazujících obrázků, čímž se zvýšila rozlišovací schopnost na 5μm na pixel při použití makroskopu. Podmínkou bylo zajištění přesně definovaného posuvu vzorku a v neposlední řadě vývoj softwaru pro poskládání ve výsledný obrázek znázorňující celý vzorek kompozitu (viz obr. 5.5), který dokumentuje složení části výsledného snímku [34].



Obr. 5.5 Řez C/C kompozitem s vyznačenými sekvenčními přechody

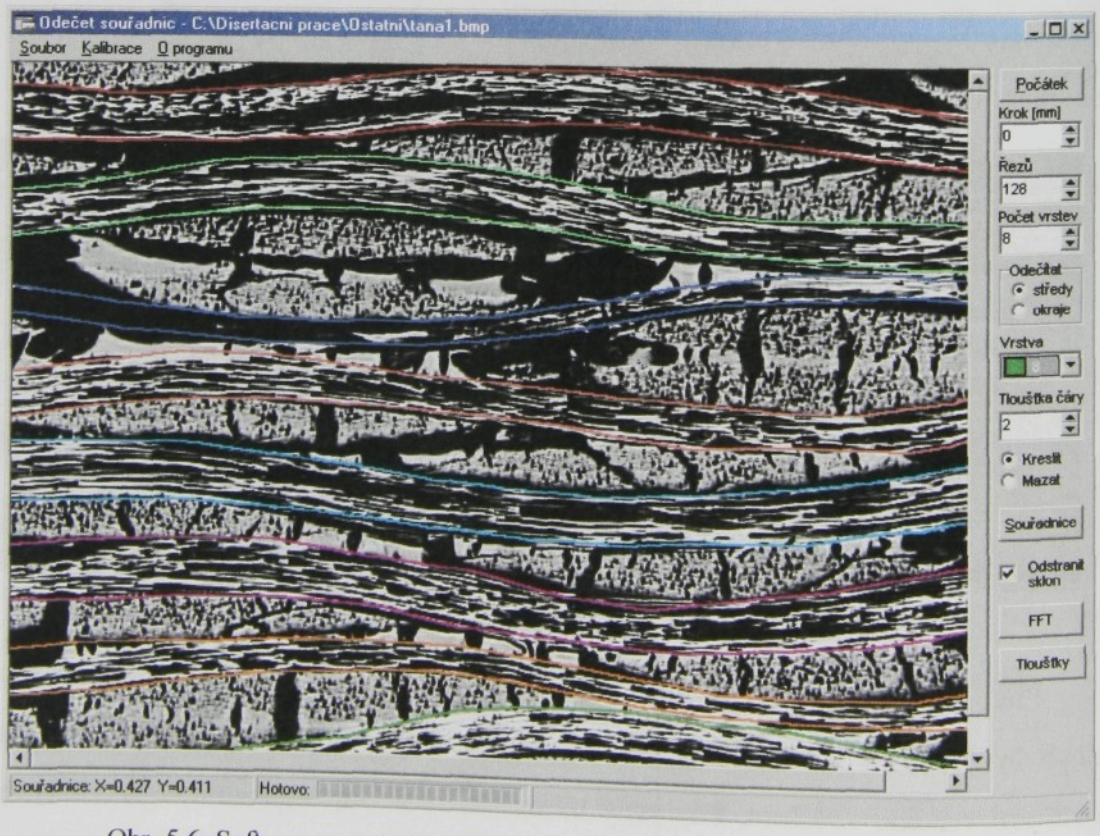
Původně jsme skládání prováděli mechanicky pomocí posuvného stolku, jehož pohyb byl synchronizován s PC pomocí sériového portu [34]. Problémy se projevily při používání velkého zvětšení, kdy jsme už obtížně softwarově eliminovali odchylky vzniklé vůlí posuvných částí stolku.

5.2.2 Určení souřadnic

Jakmile jsme měli k dispozici snímky skutečné struktury v řezu kompozitem, bylo nutné získat souřadnice skutečného průběhu vlákenného svazku. Ukázalo se, že tento úkol představuje klíčovou část zpracování obrazů řezů.

Jednoduché řešení spočívalo tom, že vzniklo další „makro", které po určitém kroku odečte souřadnice x, y průběhu všech vlákenných svazků jednotlivých lamin v rovině řezu. Makro jsme připravili tak, aby pracovalo s tzv. maskou, která byla tvořena konečným počtem svislých rovnoběžných přímek svírajících s rovinou vyztužujících tkanin pravý úhel. Dále jsme museli co nejpřesněji označit okraje jednotlivých vlákenných svazků výztuže. Souřadnice jsme poté pomocí softwaru automaticky odečetli v místě průniku obou obrazů (maska a okraje svazků).

S cílem dosažení co nejvyšší automatizace odečtení souřadnic (a současně odečtení dostatečného počtu souřadnic) jsme vytvořili software DFT Analysis v jazyku Borland Delphi+, pro prostředí operačních systémů Windows [34, 84]. Tento software je skutečně univerzální, neboť umožňuje kompletní zpracování nasnímaných obrázků od odečtu souřadnic až po výsledné hodnoty některých parametrů struktury.



Obr. 5.6 Software pro stanovení geometrických parametrů tkaninové výztuže

Typický tvar základního okna je na obr. 5.6. Řídící a ovládací prvky jsou ve svislém pásu na pravé straně okna – *menu*. V levé podstatně větší grafické části okna je v obrazové formě požadovaná informace. Obsah této informace se volí pomocí menu. Může obsahovat řez kompozitem, aproximaci vlákenného svazku, statistické výsledky (histogramy) apod.

Vstupem systému je mikrofotografie řezu. Prvním a nejpracnějším krokem je obtažení, či (přesněji) vyznačení, kontur vlákenných svazků tkaninové výztuže. Vyznačení je nutno provést ručně. Na kvalitě provedení tohoto kroku nejvíce závisí přesnost dalšího zpracování struktury. Na obr. 5.6 se v obrazové ploše nachází výsledek ručního vyznačení kontur vlákenných svazků. Z nich se odhadují souřadnice střednice vlákenného svazku nejjednodušším způsobem jako jejich střed. Připomeňme (viz část 5.1.4), že střednice je definována jako křivka spojující těžiště jednotlivých příčných řezů vlákenného svazku v celé jeho délce. My ji zde odhadujeme z jediného řezu svazkem, který zpravidla nevede střední částí.

Úplný postup získání souřadnic sestává z těchto postupných kroků:

- Kalibrace obrazu, protože obrazové kontury se odečítají v pixelech. Ta zůstane zachována do dalšího restartu programu.
- Načtení celého složeného obrázku řezu C/C kompozitu a označení kontur jednotlivých vlákenných svazků.
- Vyznačení počátku souřadného systému pomocí menu.
- Vlastní automatické odečtení souřadnic.

Kalibraci jsme prováděli pomocí kalibračního sklíčka s přesnou stupnicí, běžně používaného při obrazové analýze. Počátek souřadného systému jsme nastavili tak, aby byla délka vzorku vždy konstantní (délka každého ze vzorků se mírně lišila v závislosti na podmínkách výroby). Před odečtem souřadnic se pomocí menu nastaví buďto krok nebo počet snímaných hodnot a po stisknutí tlačítka „souřadnice“ proběhne automatický odečet souřadnic okrajů nebo střednic vlákenných svazků.

K nestandardnímu zpracování dat program používá rychlou Fourierovu transformaci (FFT), místo univerzální diskrétní Fourierovy transformace (DFT). Přitom úspora času je zanedbatelná a neměřitelná, protože výpočet probíhá jen několikrát a počítače jsou dostatečně rychlé.

Použití FFT se projevuje omezením počtu odečítaných bodů. V případě FFT počet souřadnic musí odpovídat výrazu 2^n, kde n je přirozené číslo, zatímco u DFT není žádné omezení. Vzhledem ke skutečné délce vzorku jsme zvolili jako optimální hodnota $n=7$, což znamená, že odečet souřadnic je prováděn ve 128 bodech. Odečtené souřadnice je možné ukládat do souboru textového formátu a jednoduchým způsobem lze tento soubor opět v programu otevřít a zpracovávat.

V této souvislosti připomeňme ještě jednu důležitou vlastnost systému. Snímání povrchu vzorku se nikdy nepodaří přesně podél osy svazku, což znamená, že křivky jako celek jsou mírně skloněny dolů nebo nahoru. Zatržením volby „odstranit sklon", viz obr. 5.6, se provede lineární regrese pro všechny křivky, určí se sklon zjištěné přímky a jejich pootočením se tento sklon eliminuje.

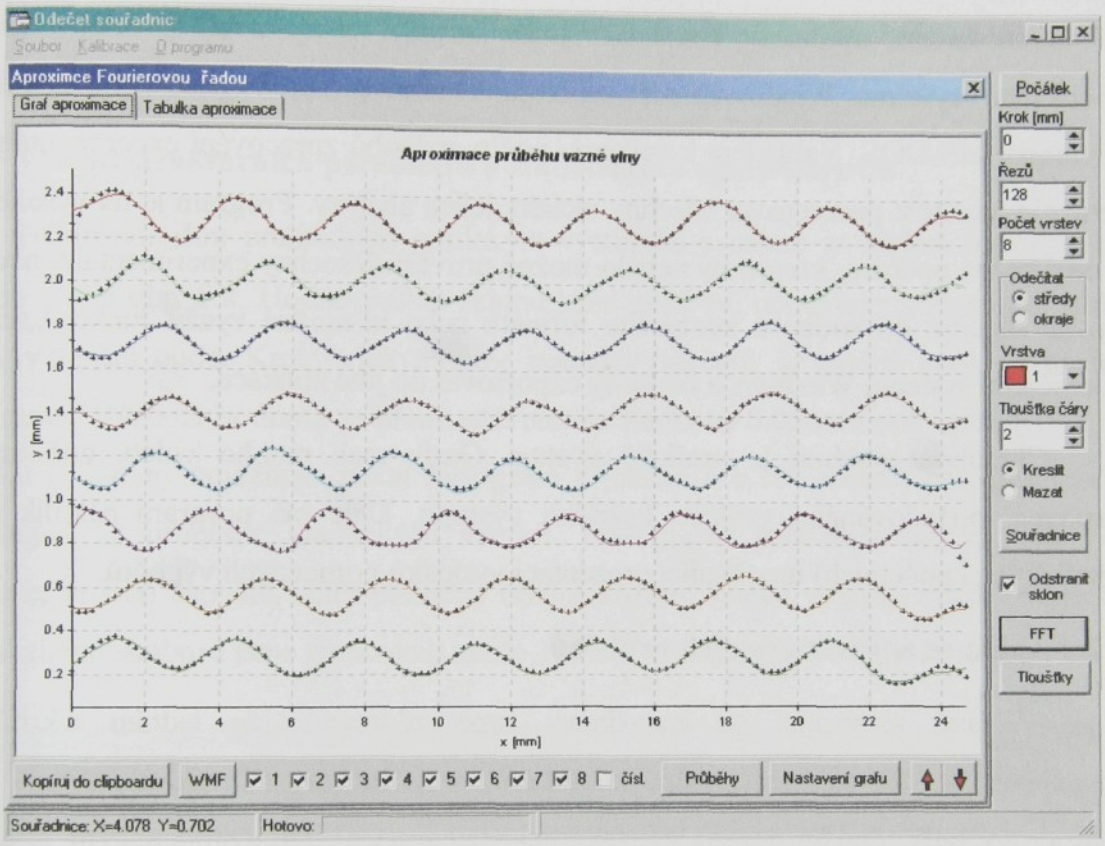
Tato část experimentu byla sice jednoduchá, ale ruční vyznačování řezů bylo časově velice náročné (asi 250 hod). Bohužel nebyl doposud vyvinut způsob, kterým by bylo možné tuto operaci automatizovat, a tím celou proceduru zjednodušit. Lidský prvek asi bude ještě dlouhou dobu velice významný v této poloautomatické činnosti, neboť pouze lidské oko a určitá znalost kompozitní struktury vrstevnatých materiálů jsou schopny označit přesné kontury a vysledovat ucelený trend osy vlákenného svazku tkaninové výztuže.

Proces obtahování kontur vlákenných svazků byl ztížen především geometrickými vlastnostmi struktury, kdy některé vlákenné svazky vybočuji z roviny řezu (vlivem mechanického namáhání) a detekce kontur je značně ztížena. Přesto se za dosti přísných laboratorních podmínek připravily nábrusy, které jsme mohli tímto způsobem v téměř optimálním rozsahu analyzovat a získat tak hodnoty některých strukturních parametrů.

5.2.3 Aproximace průběhu střednice

Další klíčovou možností systému je aproximace průběhu střednice. Předchází jí načtení souboru nesoucího souřadnice střednic vlákenných svazků. Pak se spustí diskrétní Fourierova transformace stisknutím tlačítka FFT. Pomocí menu je možné volit počet nejvýznamnějších harmonických použitých k aproximaci daného vzorku. Vzápětí se otevře nové okno na obrazovce, které vizuálně znázorňuje kvalitu aproximace, příklad je na obr. 5.7.

Volba počtu harmonických vychází ze dvou navzájem protichůdným požadavků, použít k aproximaci co nejméně parametrů a přitom dosáhnout co nejlepší shody. Dobré shody se v některých případech podařilo dosáhnout již při pěti harmonických. K největším odchylkám dochází na okrajích křivky. Příčinou je periodicita DFT v souřadnicové oblasti, vysvětlení viz sekce 3.9.



Obr. 5.7 Aproximace pomocí DFT pro plátnová výztuž pomocí 10 nejvýznamnějších harmonických

Dalším problémem pro aproximaci jsou lokální defekty v podobě ostrých přechodů. Výchozí hodnota v programu je deset harmonických, ale vzhledem k charakteru průběhu střednice u velmi slisovaných vzorků (zejména okrajové jevy a lokální defekty) byl zvolen jako optimální počet patnáct harmonických. Tato hodnota zajistí velmi kvalitní aproximaci a současně hladký průběh aproximační křivky [34, 84].

Pro úplnost uveďme, že z počátku, mimo tento systém, jsme vyzkoušeli polynomickou aproximaci. Došli jsme k závěru, že polynom nízkého stupně není schopen kvalitně aproximovat složitý neperiodický charakter průběhu vlákenného svazku. Kvaziperiodický průběh vyžaduje dosti vysoký stupeň polynomu, což se mj. projeví velkými odchylkami mimo oblast aproximace (extrapolace).

U málo lisovaných kompozitů vyztužených plátnovou vazbou je polynomická aproximace přijatelná. Naproti tomu u vazeb s dlouhými flotujícími úseky (kepr, atlas), kde vlivem slisování během výrobního procesu dochází k velké deformaci, je polynomická aproximace téměř nepoužitelná. Hlavním nedostatkem je však neschopnost získat strukturní parametry, zejména periodicitu.

Softwarová aplikace, ve které jsme vzorky analyzovali, pracuje v prostředí operačního systému Windows, což zajišťuje kvalitní grafiku v porovnání například se systémem MS-DOS. Vzhledem k velkému počtu způsobů zpracování experimentálních dat není zde možnost prezentovat všechny ukázky jejich analýzy. Program je na vysoké úrovni a není běžné operace, kterou by nebylo možné provést. Všechny experimentální hodnoty je možné ukládat do souboru zvoleného formátu nebo je možné využít funkce „schránky" operačního systému Windows a hodnoty exportovat do jiné aplikace.

Chloubou systému je grafický výstup. Grafy mají mnoho voleb, což umožňuje nastavení požadovaného vzhledu každého výstupu. Dále má program několik výstupů (grafických i početních) umožňující prezentaci výsledků pomocných výpočtů.

5.2.4 Aplikace aproximovaných průběhů

V části zabývající se aproximací jsme zdůraznili, že jedním z kritérií pro aproximaci je co nejmenší počet parametrů, v našem případě harmonických. Použití Fourierovy řady umožní popsat střednici analytickým výrazem s numerickými koeficienty. Na ni je možné aplikovat širokou paletu metod matematické analýzy pro funkční průběhy. Tím se obchází pracné a méně přesné používání geometrických metod.

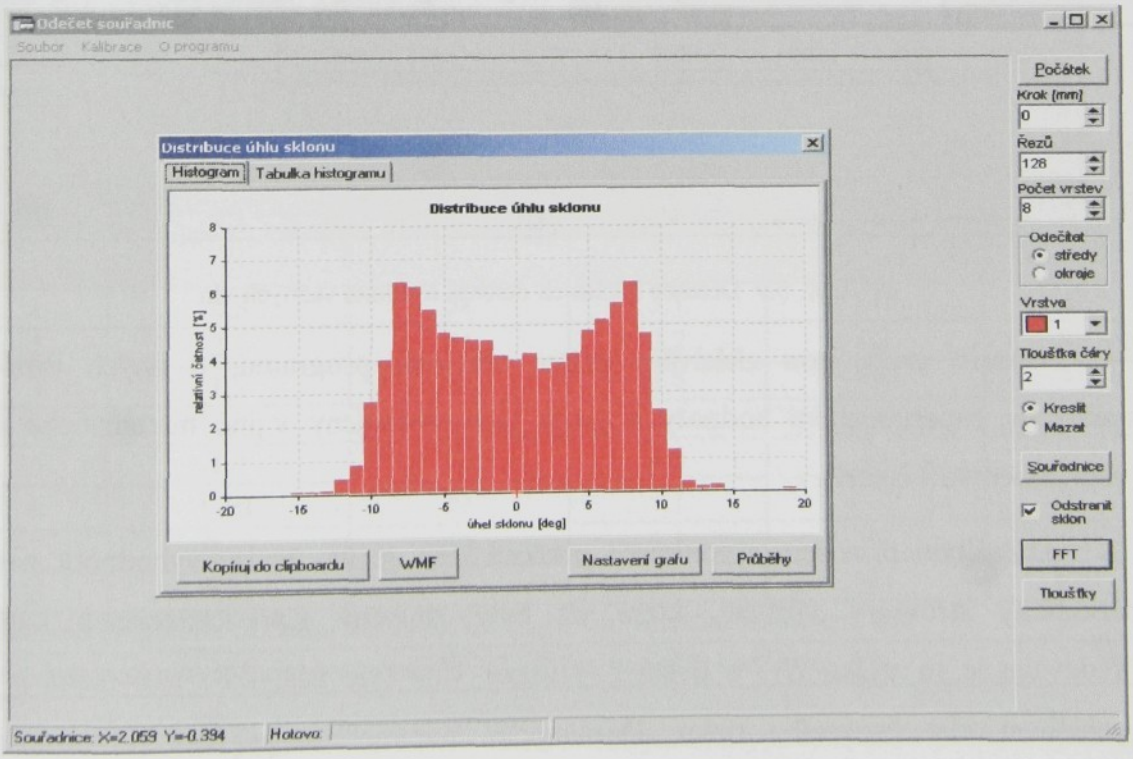
Jako příklad uveďme výpočet úhlu sklonu. Původně jsme vycházeli z názorné geometrické definice jako úhel směrnice tečny ke střednici a tímto způsobem se též úhel sklonu původně počítal ze souřadnic bodů na střednici. Přesně vzato, tečna byla nahrazena sečnou. Navíc jsme již uvedli v sekci 4.1, že derivace zvýrazňuje chyby, takže výsledek nevynikal přesností. Pokud je průběh střednice znám v analytické podobě, lze tuto funkci derivovat. Tím se získají hodnoty směrnice tečny, ze kterých se již snadno určí úhel sklonu. Analytickou derivací se nevnáší chyby a nedochází tudíž ke ztrátě informace. Výpočet lze plně automatizovat, a tím zkrátit jeho dobu. Podrobněji se popisem výsledků, zejména rozložením úhlu sklonu, zabýváme v následující části 5.2.5 a též v části 6.2.3.

To platí v různé míře i pro všechny ostatní strukturní parametry. Velmi snadno lze například zjistit histogram, pokud je veličina v analytickém tvaru. Přímo v MatLabu se analytický průběh pravidelně vzorkuje a nalezení histogramu ze vzorků a jeho zobrazení je již starostí systému. To se opět týká např. distribuce úhlu sklonu.

Nevýhodou tohoto analytického přístupu je menší názornost, která znesnadňuje kontrolu výsledků a může vést k chybě. Na druhé straně přesnost a jednoduché uchování veškeré informace tuto nevýhodu několikanásobně převáží.

5.2.5 Využití strukturních parametrů a statistických charakteristik

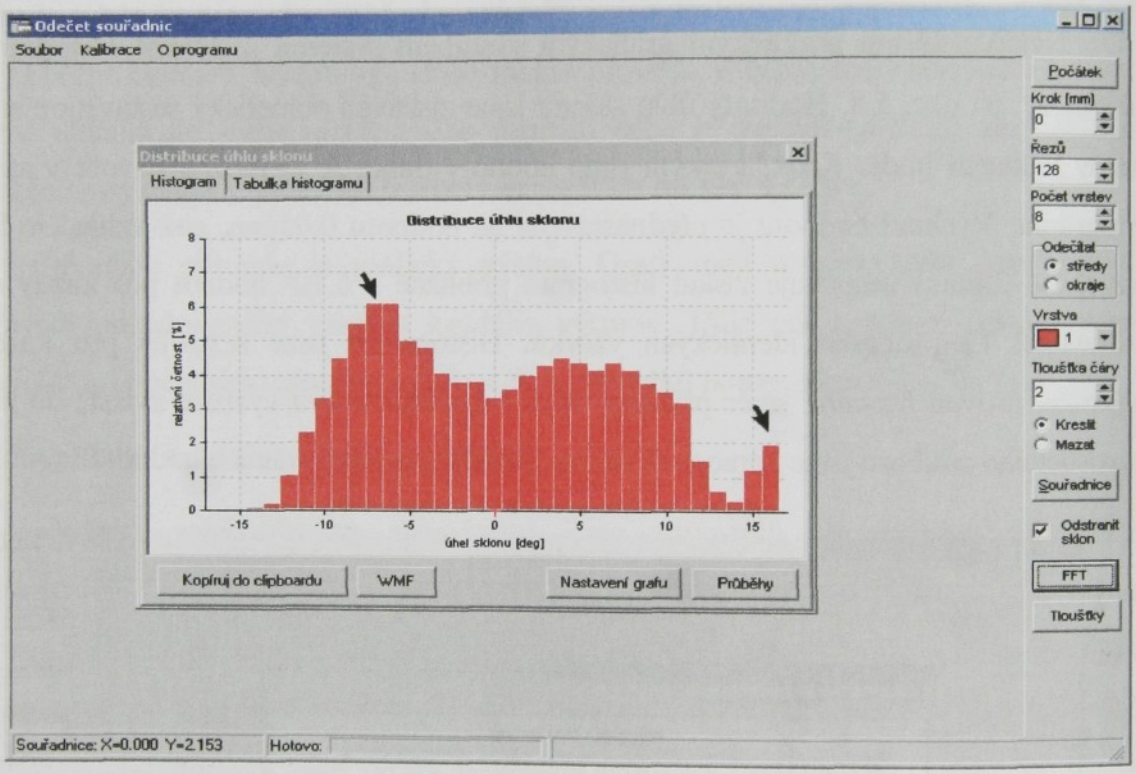
Nejdůležitějším praktickým grafickým výstupem systému je zřejmě histogram úhlu sklonu ψ na obr. 5.8. Hodnoty úhlu sklonu jsme získávali numericky sestavenou směrnicí tečny v daném bodě. Krok, s jakým jsme hodnoty odečetli, je možné navolit v nastavení programu. Výchozí hodnota je přednastavena na hodnotu 0.05mm, což vzhledem k délce vzorku (~25mm) umožňuje získat histogram přibližně z 6.10^3 hodnot pro každý soubor obsahující 12 procesně identických vzorků. Histogramy jsme sestrojili pro každý typ výztuže, úroveň lisování, směr příčného řezu a každou vrstvu výztuže zvlášť; do jednoho statistického souboru jsme zpracovali okolo 120.10^3 experimentálních hodnot.



Obr. 5.8 Distribuce úhlu sklonu ψ tkaninové výztuže (plátno)

Přínosem histogramů je především identifikace lokálních defektů vlivem vzájemné interakce sousedních vrstev. Histogram na obr. 5.8 odpovídá střednici přibližně sinusového tvaru, jak vysvětlujeme v části 4.2.2.

V řadě případů dochází k výrazné deformaci svazku. Při velkých deformacích (vysoký stupeň slisování kompozitu) se tvar svazku stává nesouměrným. Pak jsou úhly sklonu nerovnoměrně zastoupeny, například záporné úhly jsou četnější (viz obr. 5.9). Histogram je nesymetrický. Stejně tak se objevují vysoké hodnoty úhlu sklonu, což je též vidět na obr. 5.9.



Obr. 5.9 Detekce lokálních defektů a skluzu vazných vln

Některé grafy jsou získávány přímo z tohoto programu, u jiných jsou pouze stanoveny experimentální hodnoty a grafy jsou sestrojeny v jiné matematické aplikaci (např. Microsoft Excel).

Důležitým přínosem aproximace pomocí DFT je to, že lze vyhodnotit parametry periodicity struktury výztuže, které již byly zmíněny v předcházejících kapitolách. Především je to výška $H_{1,2}$ a délka $L_{1,2}$ vazné vlny (viz část 2.8.5), u nichž je možné vysledovat vliv lisovacího tlaku. Doplňujícím parametrem je úhel provázání φ (viz část 2.8.5), který charakterizuje celkovou míru tlakové deformace ve vazném bodě.

Parametry periodicity byly pro každý typ výztuže stanoveny na základě aproximace skutečné geometrie souvislého úseku tří (atlas) až deseti (plátno) period pomocí DFT. Všechny hodnoty byly statisticky a graficky zpracovány za účelem vysledovat trend tvarové deformace výztuže z pohledu geometrické charakteristiky. Jedním z dílčích a důležitých výsledků je zjištění výrazné závislosti amplitudy vlákenného svazku na lisovacím tlaku pouze u výztuže plátnové vazby.

V tab. 5.7 a tab. 5.8 jsou znázorněny parametry periodicity získané z jednoho vzorku C/C kompozitu s tkaninovou výztuží, málo lisovaný.

vlna č.	**střední poloha vlny [mm]**	**amplituda [μm]**	**perioda [mm]**	**fázová konstanta [deg]**	**rozdíl fází [deg]**
1	2,4	79	3,2	118	0
2	2,1	73	3,2	-150	92
3	1,8	70	3,2	142	24
4	1,5	61	3,2	-42	160
5	1,2	70	3,2	-165	77
6	0,9	77	3,2	-179	63
7	0,6	73	3,2	32	86
8	0,3	92	3,2	111	7
Průměrná amplituda základní harmonické: 72.10^{-6}m, variační koeficient: 12%					
Průměrná perioda základní harmonické: $3,2.10^{-3}$m, variační koeficient: 0%					

Tab.5.7 Parametry periodicity vzorku plátnové výztuže málo lisovaného

vlna č.	**střední poloha vlny [mm]**	**amplituda [μm]**	**perioda [mm]**	**fázová konstanta [deg]**	**rozdíl fází [deg]**
1	2,3	58	3,1	149	0
2	2,1	51	3,2	62	87
3	1,7	54	3,5	180	31
4	1,4	47	3,1	-16	165
5	1,1	54	3,3	37	112
6	0,91	57	3,1	-120	91
7	0,67	53	3,1	54	95
8	0,34	47	3,5	-41	170
Průměrná amplituda základní harmonické: 53.10^{-6}m, variační koeficient: 8%					
Průměrná perioda základní harmonické: $3,2.10^{-3}$m, variační koeficient: 6%					

Tab.5.8 Průměrné parametry periodicity všech vzorků jednoho typu kompozitu (plátnová výztuž)

Součástí experimentu bylo vytvoření této tabulky u každého ze 216 vzorků, hodnoty byly separovány podle typu výztuže a následně sumarizovány pro statistické zpracování. Z některých hodnot lze již vysledovat trend, který převládá pro daný typ výztuže. Podrobný popis výsledků s tabulkami a grafy naměřených hodnot je obsažen v kapitole výsledků experimentu (viz kap. 6) a závěrečné diskusi výsledků (viz kap. 8) [13, 31, 42].

5.3 Přesnost

Je všeobecně známo, že na chybě měření a případně vyhodnocení se podílí jak systematická, tak nahodilá složka. U systematické složky známe příčinu a alespoň v principu ji můžeme eliminovat, či prakticky výrazně zredukovat.

Příkladem systematické chyby je například to, že řez obvykle neprochází přesně středem vlákna, ale jeho krajní částí. Metalografie s touto možností počítá, ovšem pro jiné útvary, a vyvinula kvalitní metody, jak tento nedostatek eliminovat. V našem případě předpokládáme, že se jedná o řez rovnoběžnou rovinou a tedy průběh střednice odvozený z nestředového řezu by se neměl výrazně lišit od středového. U ideálního vlákenného svazku by se měly shodovat.

U nahodilých chyb příčinu neznáme, říká se, že vznikají v důsledku mnoha malých nezávislých jevů. Můžeme je jen statisticky popsat a při vyhodnocování výsledků je brát v úvahu. Statistický popis je v kap. 4, v sekci pojednávající o normálním rozdělení (viz sekce 4.1).

Nevýraznější nahodilá chyba je nepochybně v odečítání souřadnic. V důsledku digitalizace je chyba odečtu 1 pixel. Typická amplituda při použitém zvětšení je kolem 20 pixelů (přesné hodnoty počtu pixelů na amplitudu se pohybuji v rozmezí $\langle 17; 23 \rangle$). To znamená, že relativní chyba odečtu je asi 5%. Touto chybou jsou zatíženy všechna další zpracování dat a výpočty. Mohou ji jedině zvýšit. To je též důvod, proč všechny experimentální výsledky uvádíme na 2 či 3 platné číslice. Směrodatnou odchylku a variační koeficient udáváme na jednu číslici. Dvě používáme jen pokud je zaokrouhlení velmi hrubé. Pokud se v práci vyskytne odchylka od tohoto pravidla, bude se ve většině případů jednat o nepozornost při přebírání nebo uvádění dat.

5.4 Statistická analýza z hlediska náhodných signálů

V posledním kroku zpracování výsledků experimentu byl zájem soustředěn na posouzení výsledků z hlediska teorie náhodných procesů. Na aproximační křivky střednic vlákenných svazků v tomto případě nahlížíme jako na realizaci náhodného procesu. Náhodným procesům ve věnována velká část sekce 4.3 kap. 4, proto zde jen stručně zopakujeme základní fakta.

Jelikož se jedná o náhodné procesy, jediné exaktní vyhodnocení či zpracování jejich výstupů je statistické. Základní otázkou je posoudit, zda lze z jedné realizace náhodného procesu usoudit na statistické vlastnosti ostatních realizací a celého procesu. Ukázali jsme, viz část 4.3.2.2, že to lze, pokud je proces striktně ergodický, tj. současně ergodický a stacionární. Stacionární může být buď slabě, nebo silně. Stacionarita znamená, že statistické funkce systému nezávisí na volbě počátku časové osy (silná stacionarita), případně jsou některé charakteristiky časově invariantní (slabá stacionarita). Definic ergodicity je celá řada, v pravděpodobně nejnázornější formě se říká, že u ergodického procesu se charakteristiky jedné realizace (podél časové osy) shodují s charakteristikami získanými ze všech realizací (v jednom časovém okamžiku, tedy napříč souborem).

Střednici vlákenného svazku považujeme za poměrně krátkou, nicméně postačující, realizaci náhodného procesu. Základních možností jak vytvořit z experimentálních střednic soubory realizací náhodného procesu je několik, podrobný rozbor je v části 4.5.3.

V této práci jsme jako realizaci náhodného procesu zvolili nejjednodušší možnost, realizací náhodného procesu byl vlákenný svazek na řezu, častěji mluvíme o vrstvě. Teorii náhodných procesů jsme aplikovali ve dvou směrech:

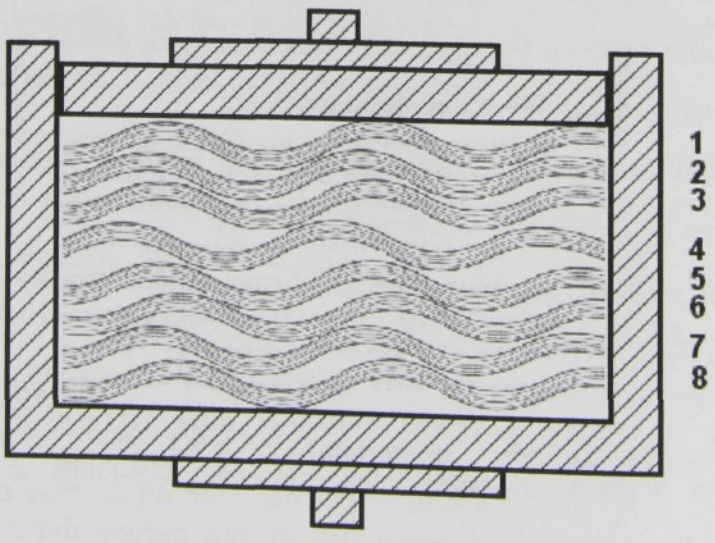
- Posouzení vzájemného vztahu jednotlivých realizací (vrstev, vlákenných svazků) tím, že na ně aplikujeme vzájemnou korelaci.
- Výpočet hustoty pravděpodobnosti formou napříč svazky. Cílem těchto výpočtů by mělo být i ověření stacionarity a ergodicity.

Pokud jde o výpočet korelace, původně jsme vytvořili program v jazyku C++. Program pracuje v prostředí operačního systému MS-DOS a výpočet je zadáván z příkazového řádku včetně předepsané syntaxe pro načtení dat z aktuálního pracovního adresáře [83].

Vstupem jsou datové textové soubory generované přímo pomocí programu pro aproximaci průběhu vlákenných svazků tkaných výztuží pomocí DFT. Výstupem programu jsou pak souřadnice pro vykreslení korelačních a autokorelačních funkcí.

Protože Windows XP již nepodporují MS-DOS a stejných výsledků by bylo možné dosáhnout i v MatLabu a to s menší námahou, protože zde je pro korelaci přímo příkaz, přešli jsme později na zpracování korelací v systému MatLab. Mezi základní nevýhodu MatLabu patří to, že vstup dat ze souboru není jednoduchý a jednoznačný, mj. je zde řada možností a obtížně se hledá optimální z nich. Z téhož důvodu je při změně organizace vstupního datového souboru nutno poměrně komplikovaně modifikovat vstupní proceduru.

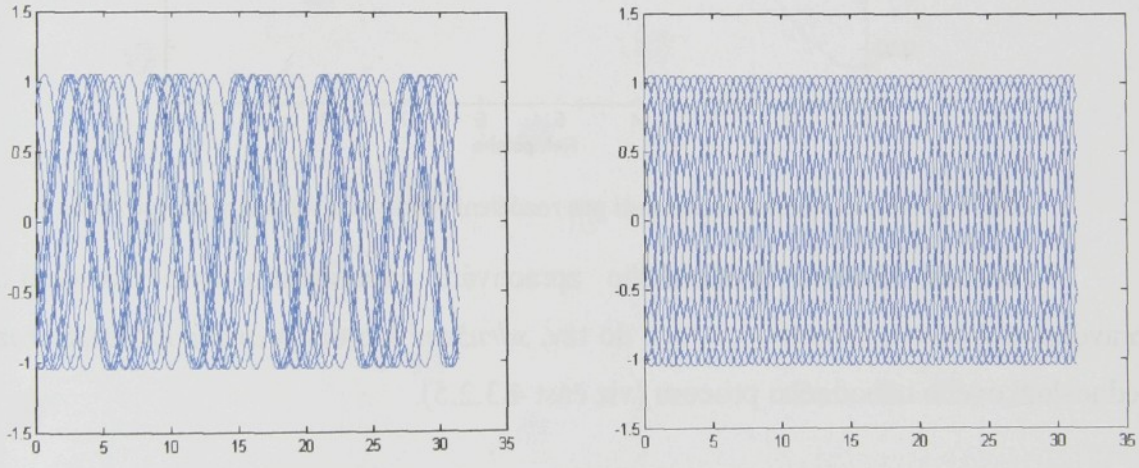
Důvodem aplikace korelace byla tato úvaha. K dispozici bylo celkem 216 vzorků C/C kompozitů s tkanou výztuží ve vazbě plátno, kepr a atlas. Každý vzorek byl připraven stejným postupem, jen lisovací tlak se poněkud měnil. Vyslovili jsme pracovní hypotézu, že deformace jednotlivých vrstev tkané výztuže je dána pořadím každé vrstvy od kraje vzorku bez ohledu na to, zda se jedná o líc či rub. Důvodem je technologický proces, schématicky znázorněný na obr. 5.10. Zejména u krajních vrstev by se mohl projevit vliv styku s plochými lisovacím čelistmi. Program proto porovnává vrstvy výztuže, které by se měly technologicky lišit, tj. kombinace například (1-2, 1-3, 1-4, ..., 2-3, 2-4, ...). Další možností by bylo vyšetřit, do jaké míry se shodují kombinace (1-8, 2-7, 3-6, 4-5). V tomto případě pro všechny vzorky odpovídající skupiny C/C kompozitu bychom měli očekávat shodné vlastnosti v rámci experimentálních chyb.



Obr. 5.10 Schématické kladení vrstev výztuže v lisovací formě

Dále byl připraven program pro výpočet hustoty pravděpodobnosti v řezech soustavou střednic. Program funguje následujícím způsobem. Nejprve se transformují souřadnice všech 96 vrstev uvažovaného typu kompozitu (dvanáct vzorků a osm vrstev na každém) tak, že se vyloučí stejnosměrná složka. Tím získáme průběh vzdáleně podobný tomu, který je na obr. 5.11a. Pro zvolené řezy pak program určí distribuce výchylek vazných vln.

Na obr. 5.11a jsou pro jednoduchost generovány čistě harmonické vlny s náhodnou počáteční fází. Ve zpracovávaném souboru je jich osmkrát více. Náhodná počáteční fáze s rovnoměrným rozdělením zhruba odpovídá podmínkám experimentu. Pro normální rozdělení je obrázek podobný. Pro porovnání je v části 5.11b uveden průběh vln s rovnoměrně rozloženými počátečním fázemi, dvanáct průběhů s počáteční fází rostoucí po 30°. Z porovnání obou částí obr. 5.11 je zřejmý zásadním rozdíl mezi náhodně generovanou a rovnoměrně rozloženou počáteční fází a to i při velkém počtu realizací.

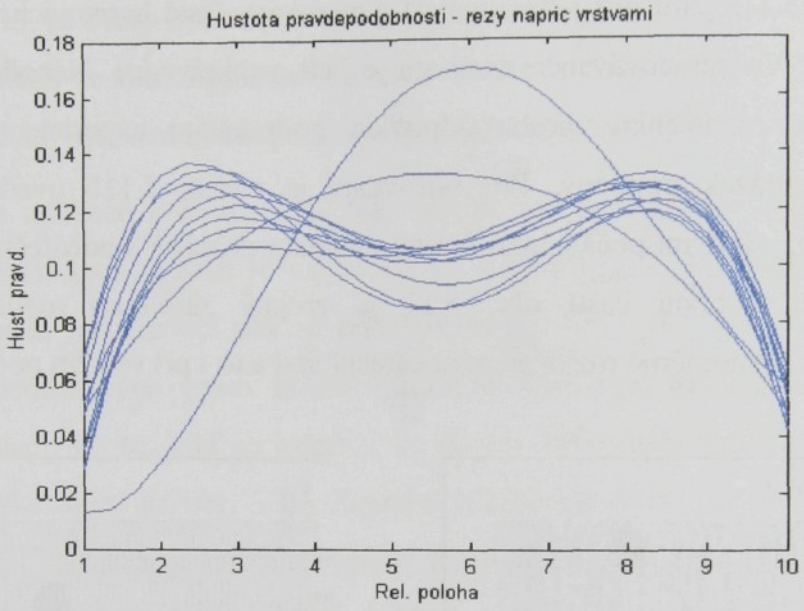


a) b)

Obr. 5.11 Jednotlivé realizace náhodného procesu, a) náhodné, b) rovnoměrně rozložené počáteční fáze

Diskutabilním nedostatkem programu je možná to, že ponechává náhodné počáteční fáze. Výsledky, které více vypovídají, lze očekávat pro případ, že všechny vlny začínají se stejnou počáteční fází. Její definice však není jednoduchá. Programová realizace je pak ještě komplikovanější. V případě náhodných fází můžeme logicky očekávat buď rovnoměrné nebo oscilátorické rozdělení. Důvod pro poslední by plynul z obr. 5.11b, hustota čar u krajů je vyšší.

Jako příklad výstupu tohoto programu je na obr. 5.12 uvedena zjištěná hustota pravděpodobnosti v deseti rovnoměrně rozmístěných příčných řezech. Velký rozptyl je důsledkem nedostatečného počtu dat pro histogram. Kvalitativně lze usuzovat, až na jednu výjimku, která se asi týká okrajové části kompozitu, jak na rovnoměrné, tak oscilátorické rozdělení. Dvě krajní maxima ještě nemusí nutně znamenat oscilátorické rozdělení, dat je opravdu málo. Oscilátorické rozdělení je však teoreticky pravděpodobnější.



Obr. 5.12 Hustota pravděpodobnosti pro rozdělení výšek vazných vln v různých řezech

Posledním krokem statistického zpracování experimentu bylo zavedení hustot pravděpodobností z jednotlivých řezů do tzv. *sdružené hustoty pravděpodobnosti rozdělení* jednosložkového náhodného procesu (viz část 4.3.2.5).

5.5 Seznam použitých přístrojů a vybavení

Vzorky C/C kompozitů byly podrobeny strukturní analýze za pomoci moderní optické a výpočetní techniky.

Mezi základní hardwarové součásti patřily:

- mikroskop značky NIKON s vrchním i spodním osvitem
- korekce negativní reflexe pomocí polarizovaného filtru
- objektiv se zvětšením 2,5x; 5x; 10x; 20x; 50x; 100x
- nástavec pro umístění analogové a digitální kamery
- analogová a digitální RGB kamera Nikon s max. rozlišením 1600x1200 pixelů

- speciální posuvný stolek ovládaný přímo sériovým portem RS 232 počítače
- přítlačné zařízení firmy Olympus

Softwarové vybavení obsahovalo jednak komerční běžně dostupné systémy, jednak vlastní připravené programy:

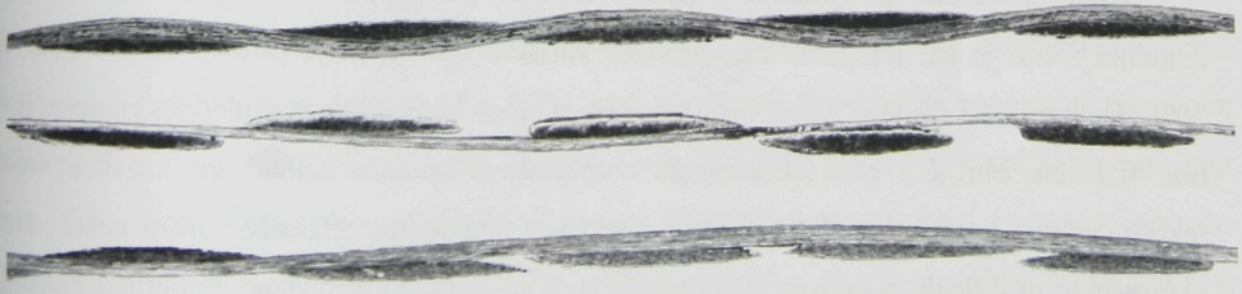
- systém obrazové analýzy Lucia G
- program s názvem „DFT Analysis" pro aproximaci pomocí DFT (Diskrétní Fourierova Transformace) vytvořený v prostředí Borland Delphi+
- programy „Korelace" a „Ergo" vytvořené v jazyku C++ pro získání korelačních funkcí a hustot pravděpodobnosti
- programy (skripty) vytvořené v systému MatLab
- systém MatLab pro složité grafy
- software QC.Expert pro porovnání hustot pravděpodobnosti
- Adstat 1.25 a Adstat 2.0 pro kontrolu správnosti výpočtu

6 Výsledky experimentu

V této kapitole popíšeme nejdůležitější výsledky získané z vyhodnocení struktury volné textilie, ale zejména kompozitu. Pozornost soustředíme na typické ukázky spekter, aproximaci střednice a na prezentaci distribuce úhlu sklonu, která je považována za velmi významnou charakteristiku. Sledujeme též vliv lisovacího tlaku. V této kapitole se jedná zejména o typické výsledky, které pouze popisujeme. Jejich vysvětlení, význam a využití diskutujeme v kap. 8. Statistickým charakterem výsledků se pak zabývá kap. 7.

6.1 Volná textilie

Důležitým hlediskem pro srovnání strukturních parametrů vrstev výztuže v C/C kompozitu je porovnání s parametry volné textilie. Její struktura nepodléhá deformačním změnám v důsledku vnějších sil (teplota, tlak) působících při přípravě kompozitu a má nejpříznivější podmínky pro zachování přirozeného průběhu provazujícího vlákenného svazku. Na obr. 6.1 jsou znázorněny mikroskopické snímky všech tří základních typů provázání tkanin. Plátnová vazba si zachovává téměř ideální sinusový charakter. Flotující (teoreticky přímé) úseky u kepru a atlasu se též blíží sinusovému průběhu. Díky flotujícím úsekům jsou délky vazných vln u kepru a atlasu alespoň dvakrát větší než u plátnové vazby. Průběhy provazujících vlákenných svazků jsou kontinuální bez náhlých tvarových změn. Pětivazný atlas je strukturně asymetrický vzhledem k odlišnému počtu provazujících pramenců[1] na lícní a rubní straně.



Obr. 6.1 Mikroskopické snímky provázání volných tkanin základních vazeb (sestupně plátno, kepr 2/2, atlas 5HS)

[1] Roving (pramenec) je pojem používaný v kompozitním inženýrství. V textilním inženýrství mluvíme o multifilu nebo vlákenném svazku.

Orientační výsledky jsou vhodné pro porovnání strukturních parametrů uhlíkových tkanin. Bylo vyhodnocováno osm strukturních parametrů tkanin, ze kterých má asi největší vliv na mechanické vlastnosti tkaniny po zapracování do kompozitu především výška zvlnění osnovy H_o, resp. útku $H_ú$, úhel provázání ϕ a tloušťka tkaniny (viz sekce 2.8) [21].

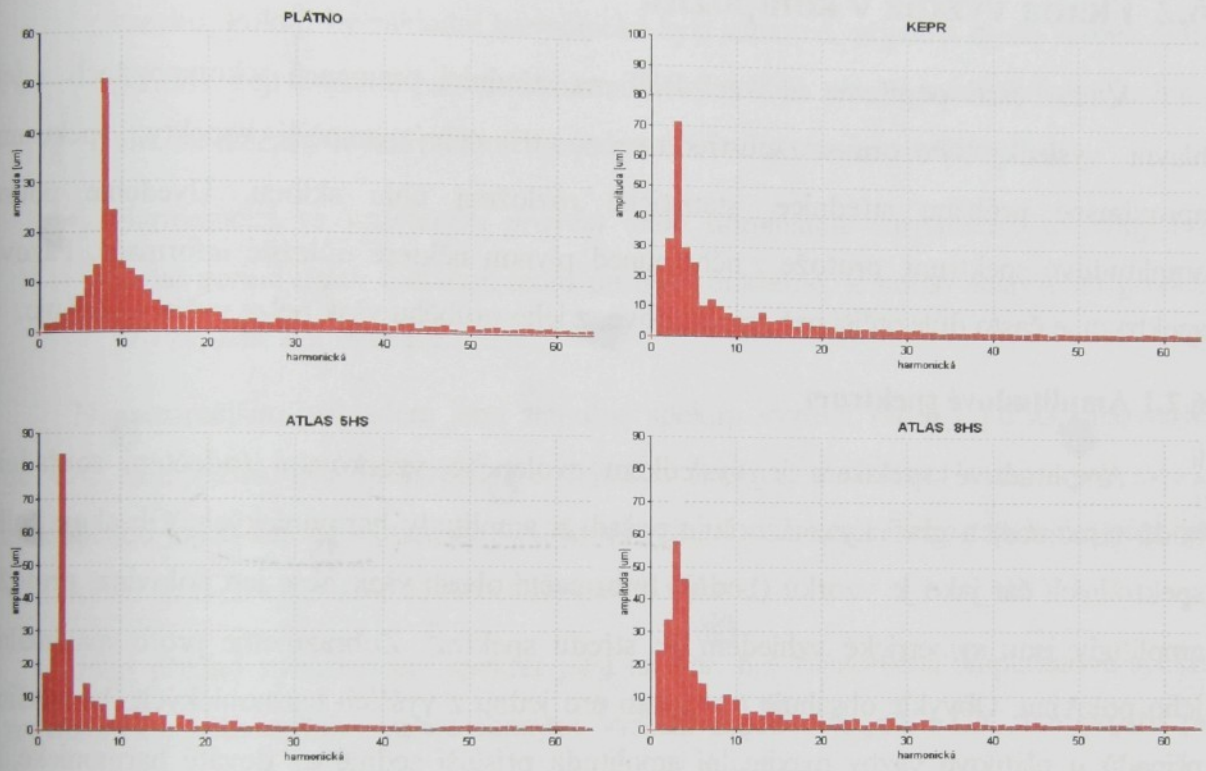
V tab. 6.1 jsou uvedeny základní strukturní parametry naměřené z příčných řezů tkanin [27]. Vysoké hodnoty směrodatné odchylky (kolem 0,05 mm) a variačního koeficientu (kolem 30%), především u výšek vazných vln, ukazují na poměrně velkou nepravidelnost. Je v tom však zahrnuta i nezanedbatelná nahodilá chyba měření, kterou jsme v sekci 5.4 odhadli na 5%. Zde však může být vyšší. Z tab. 6.1 vyplývá, že tloušťka tkaniny se s rostoucím volnějším provázání zvyšuje. Je to způsobeno vyšší možností prostorové migrace vlákenných svazků s rostoucí délkou vlny. Výška vazné vlny H_o, která představuje zvlnění svazku osnovy, se zvyšuje v závislosti na stupni provázanosti, podobně jako výška vazné vlny $H_ú$, která popisuje zvlnění útku [27].

	výška vazné vlny H_o[μm]	**výška vazné vlny $H_ú$[μm]**	**tloušťka tkaniny [μm]**	**úhel provázání ϕ [deg]**	**délka půlvlny L_1[mm]**
plátno Cramer	130	70	420	9,6	2,8
kepr Carr	180	110	550	8,7	4,5
atlas Yamada	270	130	670	8,2	6,1

Tab. 6.1 Strukturní parametry volných textilií základních vazeb

Úhel provázání ϕ vykazuje s typem vazby v pořadí plátno, kepr, atlas klesající tendenci. Toto je ale jen tendence, protože variační koeficient je poměrně vysoký, 5 až 10%. Délka vazné půlvlny L_1 narůstá v pořadí plátno, kepr, atlas v souladu s geometrií na obr. 6.1. Na obr. 6.2 jsou znázorněna amplitudová spektra základních vazeb volných textilií (plátno, kepr, atlas 5HS). Fázové spektrum neuvádíme, protože z něho nelze přímo vyčíst žádnou důležitou informaci. U všech spekter výrazně převyšuje amplituda několika (5 až 10) poměrně nízkých harmonických, průběh je tedy periodický v matematickém smyslu, tj. od $-\infty$ do $+\infty$. V rámci námi sledovaného úseku je ovšem kvaziperiodický, průběh v jednotlivých periodách se navzájem poněkud liší. Na druhé straně existence několika významných harmonických ukazuje, že s nejedná ani o čistě harmonické průběhy.

Z malého počtu významných harmonických lze usoudit, že základní tvar provázání ve volné textilii lze aproximovat pouze malým počtem sinusových průběhů. Vyšší harmonické, okolo dvojnásobku dominantní, pouze demonstrují drobné nedokonalosti vzniklé vzájemným působením obou ortogonálních vlákenných soustav textilie. To potvrzuje též nízkou mírou lokálních deformací průběhu vlákenného svazku.



Obr. 6.2 Amplitudová spektra volných textilií získaná pomoci DFT (plátno, kepr, atlas 5HS, atlas 8HS)

U vysoce periodické plátnové vazby je dominantní v pořadí osmá harmonická, která určuje základní tvar aproximovaného průběhu. U ostatních vazeb se dominantní harmonická pohybuje v oblasti třetí až páté harmonické. Poněkud složitější spektrum vykazuje keprová a atlasová vazba 8HS, což je zřejmě dáno větší volností v provázání vlákenných svazků jak u atlasu 5HS (dlouhé úseky flotáže), tak u kepru (nižší dostava, viz tab. 5.2). Více se uplatňují nahodilé vlivy a průběh střednice v rámci periody je proto poměrně složitý. Na jejich amplitudovém spektru je pokles amplitud přibližně prvních pěti nejvýznamnějších harmonických méně výrazný než u amplitudového spektra pro plátnovou vazbu. U plátnové vazby se ještě navíc může projevit efekt rozmazávání spektra (viz sekce 3.9). Spektrum pro plátnovou vazbu může být ještě jednodušší.

S výjimkou plátnové vazby je významná již i první harmonická, což vede k tvrzení, že tkanina není jako celek ideálně rovná, projevuje se její prohnutí. To se projevuje daleko více u delších vln, např. atlas. Důležité je též porovnání s amplitudovými spektry tkaných výztuží již zapracovaných do C/C kompozitu, které jsou prezentovány v následující sekci.

6.2 Tkaná výztuž v kompozitu

V této části popíšeme aplikaci DFT na střednici pramenců v kompozitech a její hlavní výsledky. Pozornost soustředíme na tři nejvýznamnější aspekty, spektrum, aproximace průběhu střednice, statistické rozložení úhlu sklonu. Uvedeme pouze amplitudové spektrum, protože z něho ihned plynou některé důležité informace. Fázové spektrum je často důležitější než amplitudové, z jeho průběhu však nelze vyčíst téměř nic.

6.2.1 Amplitudové spektrum

Amplitudové spektrum je výsledkem zvoleného vzorkování (odečtení souřadnic bodů střednice) a graficky znázorňuje pořadí a amplitudy harmonických. Obsahuje tolik spektrálních čar jako je vzorků (bodů). Informační obsah však nese jen polovina, protože amplitudy jsou symetrické vzhledem ke středu spektra[2]. Zobrazujeme proto maximálně jeho polovinu. Obvykle obsahuje maximum pro jednu z vyšších harmonických. Ve většině případů u plátnové vazby maximální amplituda přísluší sedmé až deváté harmonické, u ostatních třetí až páté. Její pořadí zhruba odpovídá počtu vazných vln na střednici. Tato harmonická se nazývá *dominantní harmonická*.

Pro kvalitativní popis přicházejí v úvahu zejména tyto harmonické (viz také sekce 3.10):

- *Dominantní harmonická* má největší význam, protože určuje periodicitu geometrie vlákna, tedy jeho vlnovou délku. Její hodnota je zhruba délka vzorku dělená číslem harmonické.
- Harmonické *v nejbližším okolí* dominantní harmonické (např. je-li dominantní osmá harmonická, jedná se přibližně o pátou až sedmou a potom devátou až jedenáctou harmonickou). Ty ovlivňují průběh vlákna v rozsahu několika málo

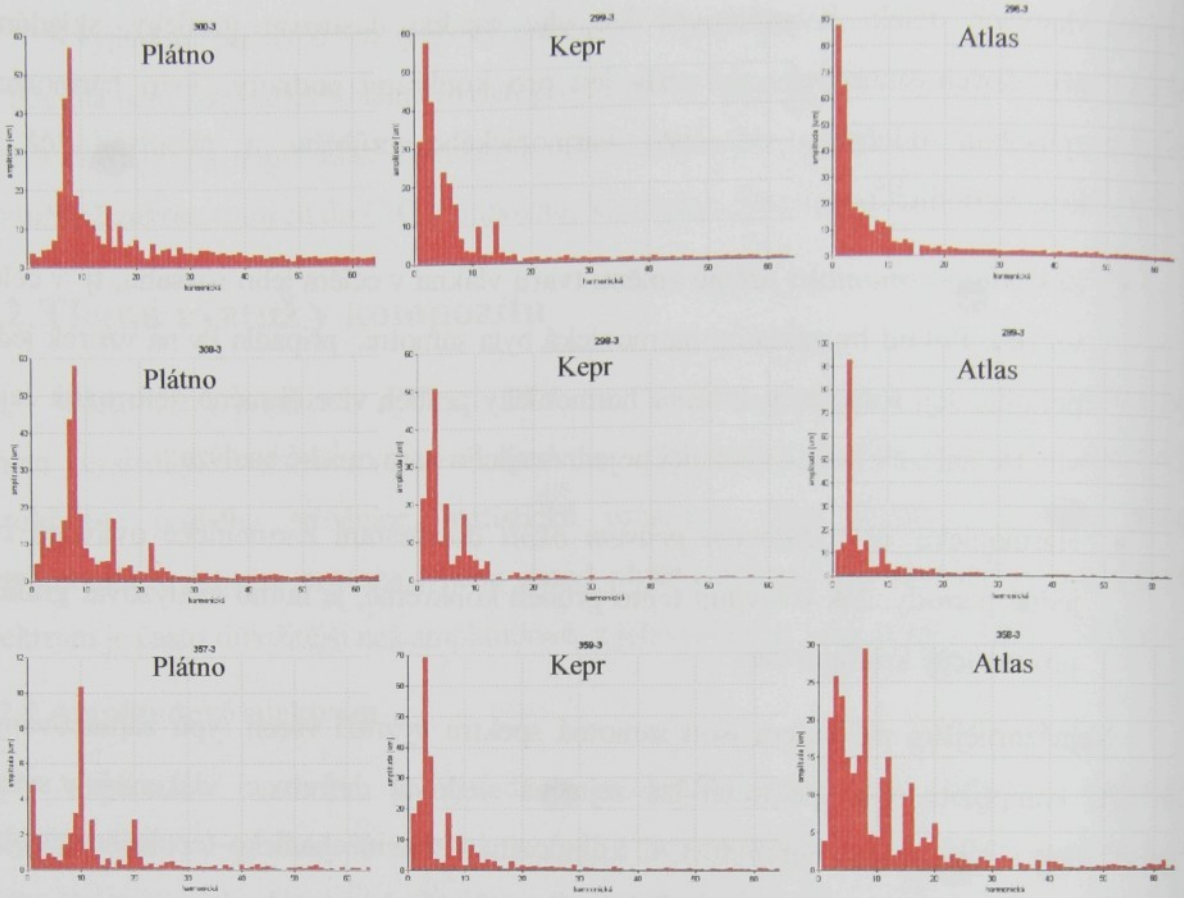
[2] Pro jednoduchost je vynechána stejnosměrná složka.

vlnových délek. Kvantitativně lze vliv snadno ilustrovat graficky, skládáním příslušných sinusovek, ale vždy jen pro konkrétní hodnoty. Tyto harmonické způsobují odchylky od čistě harmonického průběhu a přispívají též ke kvaziperiodicitě.

- *Základní harmonická* určuje změnu tvaru vlákna v celém jeho rozsahu, tj. v celém vzorku. Pokud by základní harmonická byla samotná, připadla by na vzorek jedna perioda. Její sousedé pak tento harmonický průběh více či méně deformují. Jejich vliv lze nalézt v každé učebnici pojednávající o harmonické analýze.
- Harmonické *ve vzdáleném pravém okolí* dominantní harmonické ovlivňují tvar jedné periody. Jak ovlivňují tento průběh konkrétně, je nutno analyzovat graficky pro zvolené konfigurace.

Nejnázornějším příkladem jsou samotná spektra výztuží všech typů zapracovaných do C/C kompozitu. Na spektrech lze zejména sledovat deformaci vlákenných svazků způsobenou jejich zapracováním do C/C kompozitu a vliv mechanicko-tepelného působení v závislosti na typu výztuže a velikosti lisovacího tlaku.

Jako příklad vyhodnocení spekter jsou na obr. 6.3 znázorněna amplitudová spektra provazujících vlákenných svazků tkaných výztuží zapracovaných v C/C kompozitu pro různé hodnoty lisovacího tlaku. Pro každý typ výztuže bylo vybráno reprezentativní amplitudové spektrum jedné z osmi vrstev výztuže. Se vzrůstajícím tlakem dochází k výrazným změnám spektra, všeobecný charakter změn však z obrázků vypozorovat nelze. Je nutno posoudit jednotlivé vazby zvlášť. Pro plátnovou vazbu je zřejmý trend, že se vzrůstajícím tlakem klesají harmonické v okolí dominantní, ta se téměř nemění. Narůstají však nízké i vysoké harmonické. Se zvyšujícím se tlakem se svazek jednak ohýbá jako celek (nízké harmonické), jednak se deformuje i jeho průběh v rozsahu jeho jedné vazné vlny (vysoké harmonické). Se vzrůstajícím tlakem se spektrum stává složitější, tvar svazku se stále více liší od harmonického. U kompozitu s keprovou vazbou se spektrum s rostoucím tlakem dokonce zjednodušuje. Zajímavé je, že dominantní harmonická se s tlakem mírně posouvá, délka vazné vlny se poněkud mění. Poměrně velká první harmonická ve všech případech svědčí o tom, že osa střednice není přímá.



Obr. 6.3 Amplitudová spektra tkaných výztuží zapracovaných do C/C kompozitu (plátno, kepr, atlas) pro tři různé hodnoty lisovacího tlaku (shora dolů ≈ 0,3 MPa; 0,5 MPa; 1 MPa)

Nejkomplikovaněji se vlivem tlaku mění tvar střednice pro atlasovou vazbu. Za nízkého lisovacích tlaku je jako dominantní dokonce první harmonická, střednice je tedy zdeformována jednak jako celek, periody však na ní budou též zřetelné. Při středním tlaku je spektrum velmi jednoduché, snad nejjednodušší ze všech ukázek na obr. 6.3. Střednice je téměř periodická a její průběh se blíží harmonickému. Její osa je téměř přímá, protože první harmonická je slabá. S dalším vzrůstem tlaku se však spektrum stává velmi složité. Tvar střednice bude poměrně komplikovaný. Dominantní harmonická se při vzrůstajícím tlaku posouvá k vyšším hodnotám, délka vazné vlny se tak zkracuje, což potvrzuje hodnoty pro útek v tab. 8.2. Při nejvyšším tlaku však tento trend nezjistíme, protože se uplatní nižší harmonické, které mají srovnatelnou amplitudu.

Je nutno jasně zdůraznit, že se jednalo jen o ukázku kvalitativní interpretace spektra. I když jsme vybrali typická spektra, ještě to neznamená, že se jedná o typický vliv růstu lisovacího tlaku na strukturu. K jeho posouzení by byla nutná průměrná spektra, tj. průměrné amplitudy, ze všech vrstev a vzorků pro danou vazbu.

Pravděpodobnost předpovědi by pak závisela na variačním koeficientu pro významné harmonické. Navíc je všeobecně znám silný vliv fázového spektra na průběh střednice. Ten se však nedá kvalitativně posoudit z fázového spektra. Naše úvahy jsou tedy neúplné a v principu úplné ani být nemohou.

V dalším se často v souvislosti se vznikem složitějšího spektra mluví o porušení periodicity. Tento poměrně nešťastný termín zasluhuje podrobnějšího zdůvodnění. Narušení periodicity znamená, že průběhy v různých periodách (vazných vlnách) se od sebe výrazně liší, používáme též termínu kvaziperiodicita. Přísná periodicita znamená identický průběh v rámci každé vazné vlny.

Růst počtu spektrálních čar či zvyšování amplitud může být důsledkem obou jevů:

- Periodicita, tj. odlišnost jednotlivých vazných vln, se prakticky nemění, ale průběh v rámci vazné vlny se více odchyluje od harmonického.
- Periodicita se zhoršuje, průběhy v rámci vazných vln se výrazněji od sebe liší.

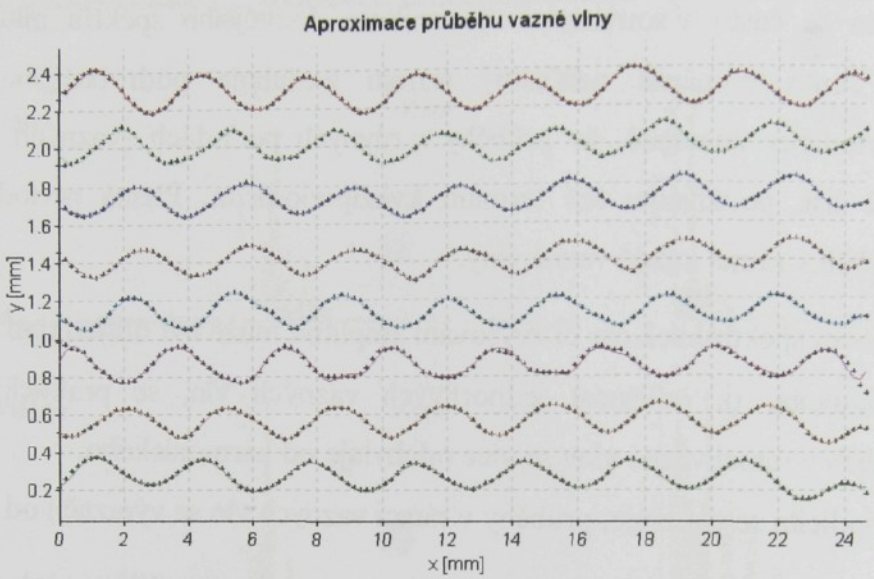
Obojí se ovšem projeví složitějším spektrem, správnou příčinu však zpravidla nelze pouze ze samotného spektra zjistit. Je nutná vhodná aproximace průběhu střednice, což je téma další části.

6.2.2 Aproximace geometrie vlákenných svazků

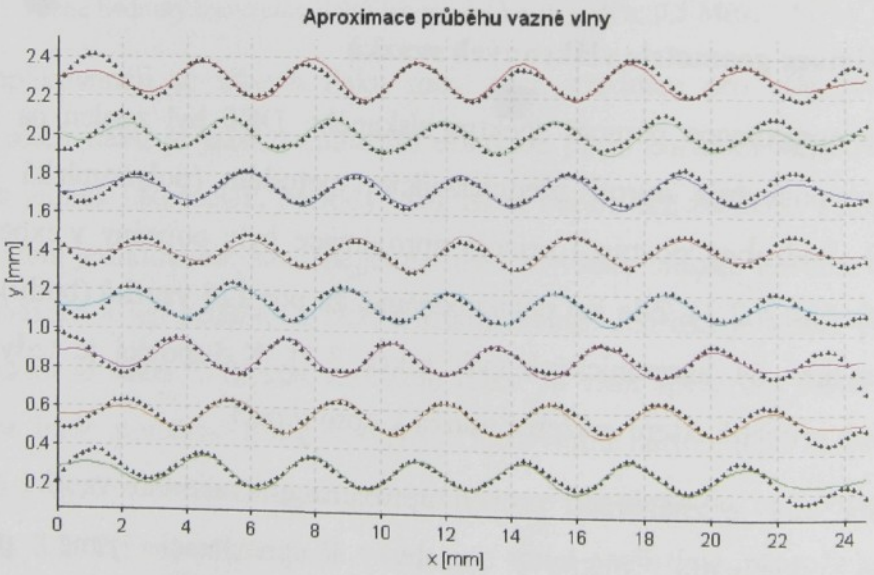
Proces aproximace pomocí spektra získaného DFT byl zvolen na základě mnoha výhod, které poskytuje oproti předcházejícím metodám (polynomická funkce, funkce spline, atd.). Podrobný postup i princip aproximace byly popsány v experimentální části disertace (viz část 5.2.3). Zde jen poznamenáme, že pro 128 vzorků (bodů) nám DFT dává amplitudy a fáze 64 harmonických (viz sekce 3.7). K dispozici je tedy maximálně 64 harmonických průběhů, které můžeme použít k aproximaci.

Na obr. 6.4 je znázorněn průběh aproximace kvalitního vzorku C/C kompozitu vyztuženého tkaninami plátnové vazby. K aproximaci jsme použili patnáct nejvýznamnějších harmonických, čímž jsme docílili velmi kvalitního popisu střednice vlákenného svazku. Vzhledem k tomu, že průběh je blízký harmonickému u všech vrstev, je možné k aproximaci použít i menšího počtu nejvýznamnějších harmonických. Výsledek je zobrazen na obr. 6.5, kde je použito pouze pět harmonických. Nedokonalost aproximace je znatelná ve větších odchylkách pouze na okrajích vzorku.

Jedná se patrně o efekt rozmazávání spektra (viz sekce 3.9). Z průběhu bodů střednice se zdá, že nebyl vzorkován celý počet vazných vln, tvar konce a počátku střednice navzájem nenavazuje. Zmenšením o vhodný počtu vzorků[3] by se asi spektrum zjednodušilo a aproximace zlepšila i na krajích.



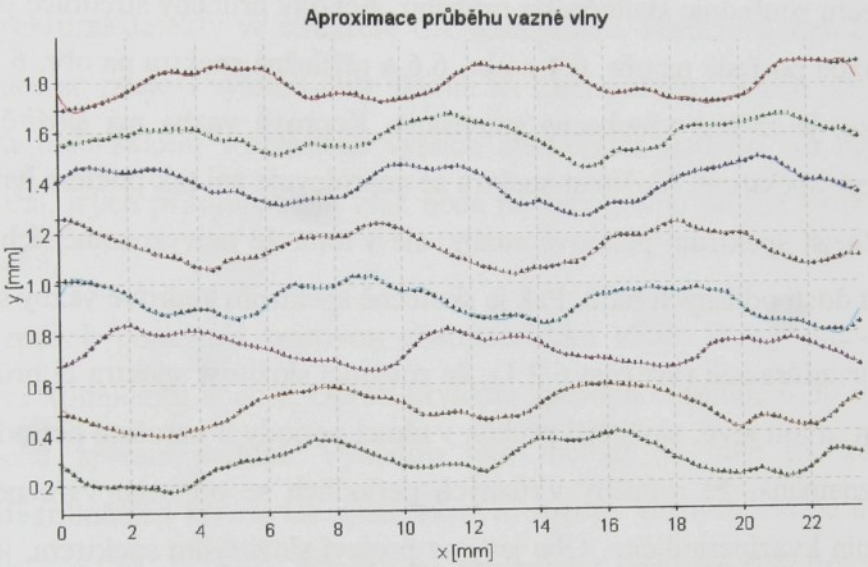
Obr. 6.4 Aproximace průběhů vlákenných svazků plátnové výztuže slabě lisované pomocí patnácti nejvýznamnějších harmonických DFT analýzy



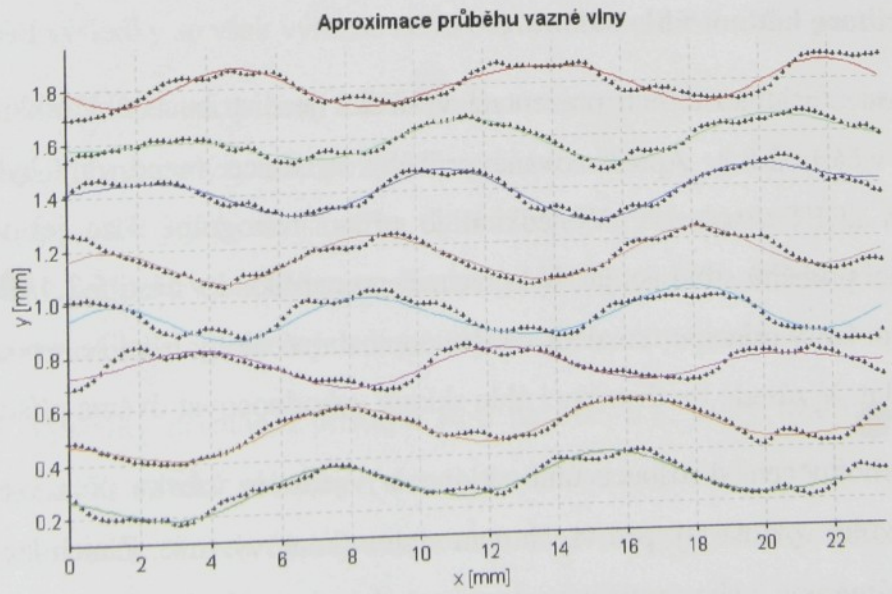
Obr. 6.5 Aproximace průběhů vlákenných svazků plátnové výztuže slabě lisované pomocí pěti nejvýznamnějších harmonických DFT analýzy

[3] To však vyžaduje též náhradu FFT za DFT.

U dalších základních vazeb je někdy problém dosáhnout optimální aproximace s menším počtem nejvýznamnějších harmonických. Na obr. 6.6 je znázorněna aproximace keprové výztuže za pomoci patnácti harmonických. I přes složitost všech průběhů je aproximace poměrně kvalitní. Na obr. 6.7 je stejný vzorek kompozitu aproximován pouze pěti nejvýznamnějšími harmonickými. Vliv složitějších průběhů v rámci periody vede k poněkud horší aproximaci i ve střední části pramence, trend však zůstane zachován. Na koncích se opět projeví vliv rozmazávání spektra jako u plátnové vazby.



Obr. 6.6 Aproximace průběhů vlákenných svazků keprové výztuže slabě lisované pomocí patnácti nejvýznamnějších harmonických DFT analýzy



Obr. 6.7 Aproximace průběhů vlákenných svazků keprové výztuže slabě lisované pomocí pěti nejvýznamnějších harmonických DFT analýzy

Při volbě počtu harmonických je nutné vždy přihlédnout k složitosti aproximované struktury a podle toho optimalizovat počet harmonických, aby vždy byl dodržen trend směru střednice vlákenného svazku. Volba velkého počtu harmonických je zbytečná, neboť u studovaných struktur se velmi dobré aproximace docílilo pomocí patnácti harmonických, což je ovšem na druhé straně již čtvrtina spektra. Další zvyšování počtu harmonických již nijak výrazně nezlepšilo kvalitu aproximace [84, 84a]. V některých případech se dokonce kvalita i zhoršila v důsledku zachycení nedokonalostí či drobných chyb při odečtu souřadnic skutečného průběhu. Ačkoliv průběhy střednice pro plátnovou a keprovou vazbu po řadě na obr. 6.4 a obr. 6.6 a příslušná spektra na obr. 6.3 neodpovídají témuž vzorku, je zřejmá všeobecná souvislost. Keprová vazba má složitější geometrii a tedy i složitější spektrum. Složitost spektra se neprojevuje ani tak počtem harmonických, to by bylo složitější spektrum plátnové vazby, ale v tom, že nejvýznamnějších harmonických je více a jsou dosti odlišných řádů. Pak je skutečně spektrum keprové vazby složitější.

Již jsme zdůraznili (viz část 6.2.1), že rostoucí složitost spektra či průběhu střednice je důsledkem dvou jevů, složitější průběh v rámci periody a narušení periodicity. Narušení periodicity znamená, že průběhy v různých periodách se od sebe výrazně liší, často se používá termín kvaziperiodicita. Oba jevy se projeví složitějším spektrem, jejich příspěvky však nelze jednoduchým způsobem v spektru rozlišit. Na aproximaci průběhu střednice jsou však velmi dobře zřetelné.

6.2.3 Distribuce hodnot úhlu sklonu ψ

Jednou z nejdůležitějších prezentací výsledků je distribuce úhlů sklonu ψ, který je definován v části 2.8.3. Aproximované průběhy střednice vazné vlny byly analyzovány programem „DFT Analysis“. Výsledkem je přímo histogram. Lze jej však též zjistit z aproximací průběhů střednic, jak bylo naznačeno například v části 5.2.4. Postup měření a vyhodnocení lze v principu rozdělit na dvě samostatné úlohy lišící se v postupu získávání vstupních dat. V zásadě lze distribuci úhlu sklonu vyhodnocovat dvěma přístupy:

- Vyhodnocení distribuce úhlů sklonu ψ v jednom vzorku přes všechny střednice textilní výztuže, tj. pro všech osm vrstev tkané výztuže. Z nich lze vytvořit jednu průměrnou nebo statisticky porovnat dvanáct náhodných distribucí úhlů sklonu pro dvanáct vzorků.

- Vyhodnocení distribuce úhlů sklonu ψ v jedné vrstvě textilní výztuže přes všechny vzorky téže struktury. Těchto vzorků je dvanáct. Tím se respektuje okolnost, že technologické působení na jednotlivé vrstvy se poněkud liší. Pro názornost můžeme říci, že tento přístup respektuje stejné podmínky přípravy. K dispozici bude osm distribucí úhlů sklonu.

Oba přístupy mají své výhody i nevýhody. U prvního přístupu se distribuce úhlu sklonu vztahuje prakticky k celému objemu kompozitu. V principu lze vysledovat i lokální anomálie a strukturní defekty ve struktuře C/C kompozitu. Poruchou narušený pravidelný průběh střednice se projeví vyššími úhly sklonu na části poruchy. Jejich přítomnost může zvýšit četnosti úhlů sklonu v oblastech vyšších absolutních hodnot. Na zbytku poruchy budou úhly nižší, jejich přítomnost se však nedá na histogramu přesně zjistit, protože zde je četnost vysoká.

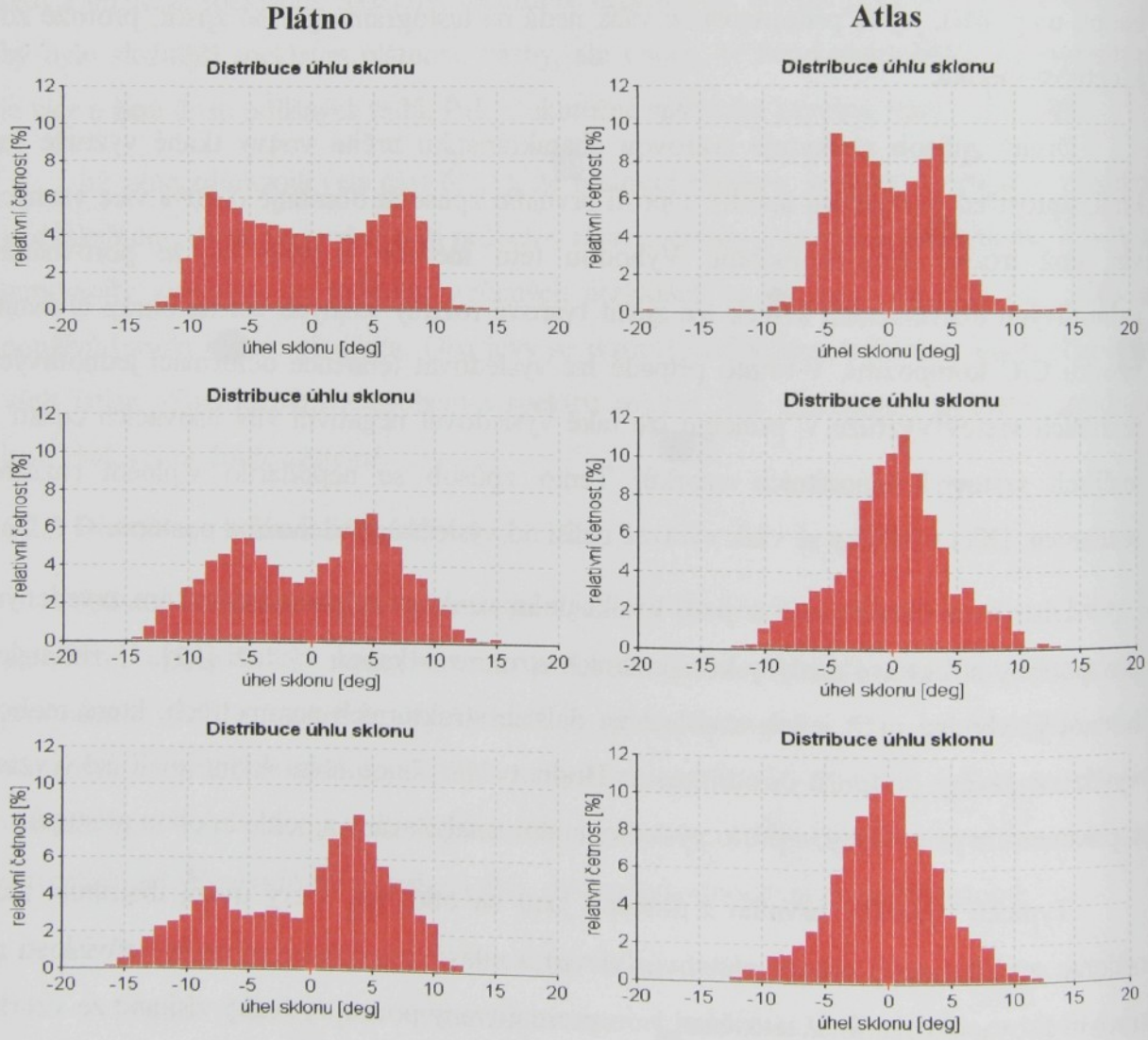
Druhý způsob poskytuje tvarovou charakteristiku určité vrstvy tkané výztuže (na kraji, uprostřed kompozitu apod.). Oproti prvnímu způsobu obsahuje o 50% více vazných vln, což trochu zpřesní měření. Výhodou této metody je také to, že porovnáním jednotlivých distribučních křivek lze zjistit tvarové rozdíly vazných vln na okraji či uvnitř vzorku C/C kompozitu. V tomto případě lze vysledovat tendence deformací jednotlivých textilních vrstev výztuže.V principu lze také vysledovat negativní vliv lisovacích čelistí u vnějších vrstev kompozitních vzorků. Tento způsob se nepodařilo v plném rozsahu realizovat. Dílčí výsledky se však výrazně neliší od výsledků předchozího postupu.

Distribuce úhlu sklonu ψ patří k základním strukturním charakteristikám zavedeným pro potřeby strukturní analýzy kompozitních struktur s tkanou výztuží [91]. U získaných hodnot je vhodné určit jejich závislost na dalších strukturních parametrech, které mohou vyvozené závěry podpořit či odmítnout. Hodnoty distribuce úhlu sklonu mají úzký vztah k parametrům periodicity, a proto výsledky budou analyzovány z pohledu obou přístupů.

Typické výsledky prvního z přístupů jsou na obr. 6.8, který uvádí distribuci úhlu sklonu ψ vlákenných svazků plátnové (vlevo) a atlasové (vpravo) výztuže v závislosti na úrovni lisovacího tlaku. V této části jsou presentovány pouze výsledky získané ze vzorků s řezy ve směru osnovy. Vedle úhlu sklonu ψ se jako jeho speciální hodnota uvažuje úhel provázání ϕ, který je definován v inflexním bodě střednice.

Z podmínky inflexního bodu je zřejmé, že o úhlu provázání lze mluvit jen u jednoduchých průběhů osy svazku, které jsou popsány analytickými výrazy. V nejlepším případě by se dalo jednat o aproximaci omezeným počtem harmonických. V této práci jsme s omezili na nejjednodušší případ sinusového průběhu. Pak lze úhel provázání určit z geometrických parametrů, výšky a délky vazné vlny podle vztahu (2.5) v části 2.8.6.

V ideálním případě plátnové vazby je úhel provázání dán polohou maxima na distribuci úhlu sklonu. Výpočty ukazují, viz tab. 6.2 v další části této kapitoly, že úhel sklonu ψ u výztuže plátnové vazby je nejčetnější v okolí úhlu provázání ϕ, neboť harmonický (sinusový) charakter není tolik narušen jako u jiných vazeb. U ostatních vazeb (kepr a atlas) to však již neplatí, protože se průběh střednice velmi liší od sinusového.



Obr. 6.8 Distribuce úhlu sklonu ψ vlákenných svazků plátnové (vlevo) a atlasové (vpravo) výztuže v závislosti na lisovacím tlaku (shora dolů ≈ 0,3 MPa; 0,5 MPa; 1 MPa)

V části 4.2.2 jsme ukázali, že histogram úhlu sklonu pro čistě harmonický průběh má dvě ostrá krajní maxima. U plátnové vazby při nejnižším tlaku se jeho průběh blíží sinusovému, při středním se odchyluje, ale je symetrický a při nejvyšším se stává silně nesymetrickým.

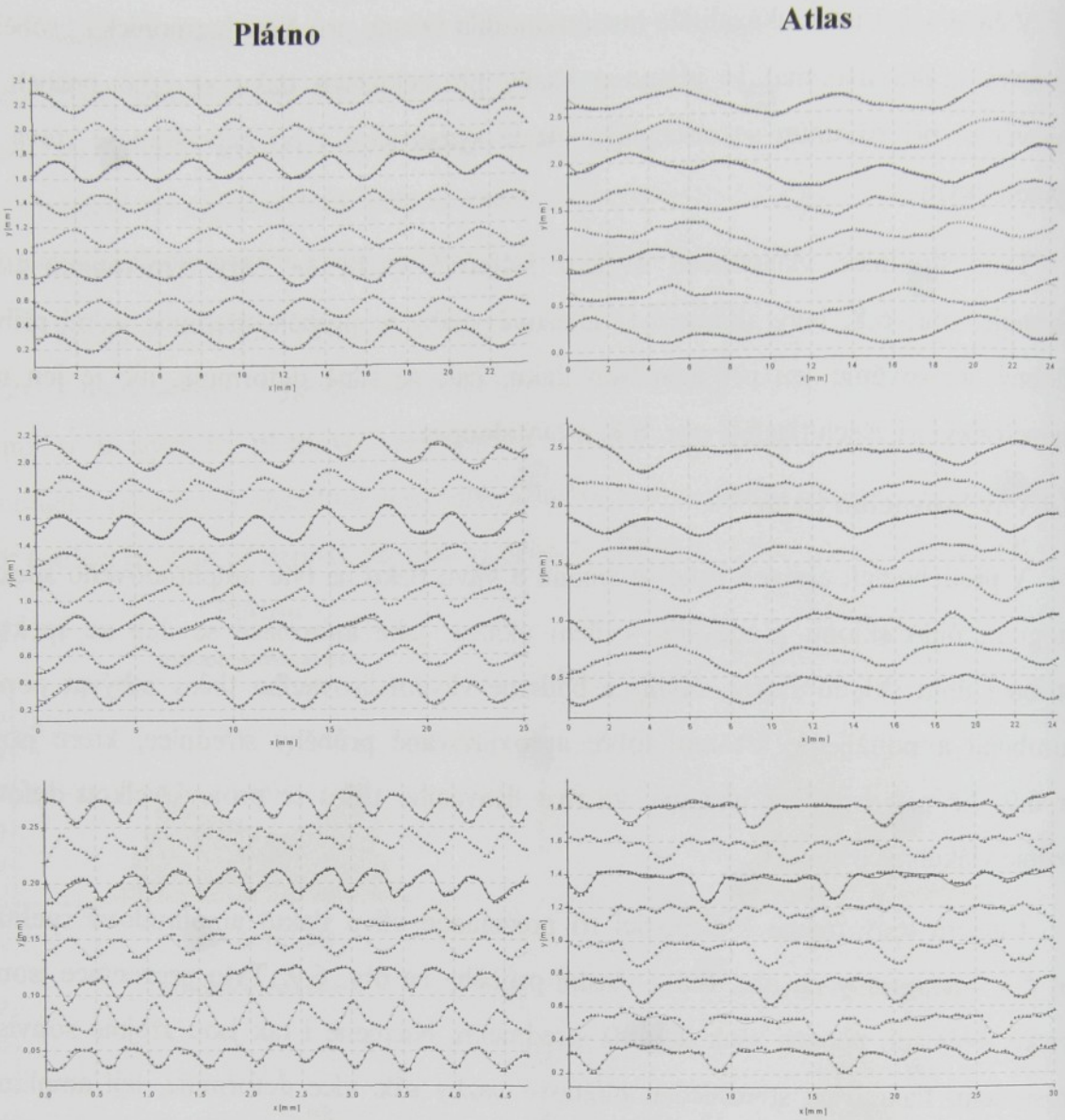
Tvar střednice vlákenného svazku plátnové vazby se tedy s rostoucím tlakem deformuje, obr. 6.8, levý sloupec. U atlasové vazby je průběh střednice velmi přibližně podobný sinusovému jen při nejnižším tlaku, pak se silně deformuje, ale je jen mírně nesymetrický při všech tlacích, obr. 6.8, pravý sloupec.

6.2.4 Vliv lisovacího tlaku

V předchozích částech jsme se zmínili o vlivu tlaku na tvar amplitudového spektra a histogram úhlu sklonu především s cílem ukázat, jaké informace se dají ze spekter či distribucí úhlu sklonu získat. Nyní se budeme vlivem lisovacího tlaku zabývat poněkud podrobněji a použijeme k tomu dobře aproximované průběhy střednice, které jsou na obr. 6.9. Již první pohled ukazuje, že růst lisovacího tlaku se projeví velkou deformací střednic vlákenných svazků.

Celkem tedy máme k dispozici tři prezentace vlivu tlaku: amplitudová spektra na obr. 6.3, histogramy na obr. 6.8 a vlastní průběhy na obr. 6.9. Tyto prezentace jsou sice typické, bohužel, nepatří však k týmž střednicím. Nicméně i tak jsou zřejmé souvislosti. S rostoucím tlakem se střednice u plátnové vazby sále více deformuje, její amplitudové spektrum je složitější, což levá část obr. 6.3 potvrzuje. Přibližně sinusový průběh se mění na obecný periodický symetrický a ten přechází v nesymetrický pro nejvyšší tlak. Tomu kvalitativně přesně odpovídá histogram úhlu sklonu, levá část obr. 6.8, horní část se dvěma krajními maximy je pro průběh blízký sinusovému, u střední části jsou vidět výrazné odchylky od ideálního histogramu a spodní histogram potvrzuje nesymetrii.

U atlasové vazby je to obdobné, mírný vzrůst tlaku od malého ke střednímu deformace příliš nezvětší, proto amplitudová spektra pro tyto dva tlaky si jsou podobná. Při vysokých tlacích dochází k velmi silné deformaci a spektrum se značně mění. Histogram, pravá část obr. 6.8, je na změnu tvaru průběhu střednice ještě citlivější, pro nejnižší tlak ještě zachytí přibližně sinusový průběh, pro střední a vysoký jej ale už nevidí.



Obr. 6.9 Aproximace průběhů vlákenných svazků plátnové (vlevo) a atlasové (vpravo) výztuže v závislosti na úrovni lisovacího tlaku (shora dolů ≈ 0,3 MPa; 0,5 MPa; 1 MPa)

Kvantitativně se vliv lisovacího tlaku projeví změnou úhlu provázání. Odhad úhlu provázání jsme provedli podle vztahu (2.5) části 2.8.6. Vliv lisovacího tlaku na úhel provázání je v tab. 6.2. Z této tabulky je zřejmé, že s lisovacím tlakem úhel povázání klesá, což potvrzuje vyšší deformaci vyztužující tkaniny.

lisovací tlak [MPa]	plátno osnova	plátno útek	atlas osnova	atlas útek
~0,3	6,5	7,6	3,6	4,0
~0,5	6,2	6,7	3,3	3,0
~1	6,1	6,3	1,7	1,9

Tab. 6.2 Hodnoty úhlu provázání ϕ

Nyní se pokusíme vysvětlit vliv tlaku na tvar struktury. Při lisování může docházet k mikroskopickému posuvu vrstev po sobě, skluzu. Proti posuvu působí zaklínění, zvlněné povrchy svazků vzájemnou interakcí brání skluzu. Při posuvu dochází především k nepravidelnostem struktury, každá vrstva se posune jinak. Posunutí svazku neprobíhá jako celek, dochází při něm též k deformaci tvaru svazku.

Zaklínění zajišťuje pravidelnost struktury a je spojeno s menší mírou deformace. Zaklínění je podporováno tím, že jsou vrstvy kladeny ve fázi, pak je při skluzu nutno překonat největší odpor. Dále je efekt zaklínění zvyšován zvlněným povrchem svazku bez rovných úseků, tedy typem vazby. Plátnová vazba je z tohoto hlediska nejvýhodnější. Konečnému zaklínění napomáhá zvýšený tlak, který přitlačuje vrstvy k sobě. Na obr. 6.9 lze efekt zaklínění pozorovat hlavně při středním tlaku v obou případech. Lze nalézt dvojice a trojice svazků, které jsou ve fázi. Při vysokém tlaku dochází k silné deformaci, existují skluzy i zaklínění. U plátnové vazby lze pozorovat i mírný nárůst výšek vazných vln s rostoucím tlakem, perioda zůstává přibližně konstantní u všech typů vazeb. Periodicita při nejvyšších tlacích je silně narušena a průběh v rámci periody je složitý.

Mezi hlavní předpoklady pravidelné struktury patří kladení vrstev výztuže ve fázi, což ovšem nelze prakticky zabezpečit. Pokud je při kladení zajištěn nulový fázový posun, lze předpokládat, že skluz vrstev po sobě bude minimální a zaklínění maximální. Zaklínění je též podpořeno optimální viskozitou použité fenolformaldehydové pryskyřice jako prekurzoru matrice a také schématem lisovacího programu [41, 46].

Kromě počátečních podmínek a technologického režimu hraje významnou roli typ vazby. Plátnová vazba jako jedna z mála vazeb neobsahuje flotující úseky vazných vln a je to jediná vazba, kdy vlákenný svazek váže vždy pouze přes jeden svazek kolmé soustavy. Vzniká tak velice pevná struktura, která svou geometrií snadno napomáhá k tomu, že se sousední vrstvy výztuže již při nízkých hodnotách lisovacích tlaků vzájemně zafixují a deformace tkaninových vrstev jako celků je minimální.

U dalších vazeb, kepru a atlasu, je schopnost vzájemného zaklínění silně omezena, neboť dlouhé flotující úseky umožňují velký mikroskopický posun vrstev, než se vzájemně zaklíní. Z tohoto důvodu dochází k velkým deformacím, které jsou příčinou vzniku strukturních defektů jakými jsou trhliny ve struktuře výztuže i matrice materiálu.

Při pohledu na mikroskopické snímky struktur tkaných výztuží v provázání kepr a atlas je znatelná velká deformace nejen podélného provazujícího vlákenného svazku, ale i nežádoucí strukturní změny v soustavě ortogonální. Dochází k silnému narušení periodicity provazujících pramenců a posouvání řezů kolmé soustavy. Na některých místech dochází ke shlukování výztuže a následně na jiných je jí nedostatek.

Nerovnoměrné rozmístění výztuže má vliv nejen na tvarové charakteristiky výztuže, ale způsobuje i narušení optimálního podílu obou složek kompozitu – výztuž a matrice. Narušení podílu má negativní vliv na interakci a vzájemnou součinnost obou komponent. V místě shlukování dochází k vytlačování matrice, na jiných místech je v důsledku „odsátí" prekurzoru matrice vysoká pravděpodobnost vzniku pórů a strukturních dutin. Mikroobjemy kompozitu s menším podílem výztuže jsou mechanicky slabší.

Plátnová vazba, též díky tomu, že nemá rovné úseky, vykazuje s lisovacím tlakem nárůst výšky vazné vlny (zřejmě vliv zaklínění) a minimální délkové změny délek vazných vln. Jedná se o nejvhodnější vazbu pro konstrukci textilních kompozitů. Naproti tomu lze u keprové a atlasové vazby vysledovat jev opačný. Vrstvy jsou vlivem lisovacího tlaku nekontrolovatelně a necíleně v mikroskopickém měřítku posouvány. Deformace vrstev je při vyšším tlaku vysoká a vznik strukturních defektů není možné výrazně omezit. Lze vysledovat jev, kdy vlivem protisměrného skluzu dochází k lokálnímu shlukování vazných bodů výztuže, což může napomoci vzniku jednoho z největších defektů – přerušení kontinuity vlákenného svazku. Pravděpodobnost delaminace vrstev vzrůstá [12].

Všechny tři metody (amplitudové spektrum, histogram úhlu sklonu a aproximace geometrie svazku) umožňují porovnat třemi nezávislými způsoby změny tvaru jednotlivých vrstev v rámci jednoho vzorku. Často je v této souvislosti diskutován vliv lisovacích čelistí, viz sekce 5.5, obr. 5.10 a související text. V důsledku styku krajních vrstev s rovnými čelistmi by tyto vrstvy měly být deformovány více. Ani při podrobném porovnání krajních a prostředních vrstev výztuže na obr. 6.9 nenalezneme znatelný rozdíl. Ani při dalších objektivních testech předpokládaný výrazný negativní vliv čelistí na krajní vrstvy výztuže nebyl shledán, neboť u všech vzorků, které byly podrobeny analýze (tři úrovně lisovacích tlaků) nebyly hodnoty parametrů periodicity (zejména úhel provázání) výrazně odlišné od parametrů periodicity vnitřních vrstev výztuže kompozitu.

Možné potvrzení vlivu lisovacích čelistí je možné zaznamenat u vzorků lisovaných na vysoký tlak. Pak tvar velkých deformací vrstev výztuže závisí na umístění v kompozitu. Vrstvy umístěné na okrajích vzorků ztrácejí bimodální charakter histogramu úhlu sklonu. Rovinné čelisti působením tlaku deformují vrstvy tak, že se zvyšuje četnost napřímených úseků provazujících vlákenných svazků. Maximum histogramu se pohybuje v okolí nulové hodnoty úhlu sklonu ψ.

7 Statistické zpracování výsledků

Průběh střednice vlákenného svazku má deterministickou i nahodilou složku. Několikrát jsme zdůraznili, že jej můžeme považovat za realizaci náhodného procesu. Lze očekávat, že prakticky všechny strukturní parametry či charakteristiky z ní odvozené budou náhodnými veličinami. Je přirozené zjistit jejich statistické parametry (střední hodnota, směrodatná odchylka, aj.) a charakteristiky (hustota pravděpodobnosti, distribuční funkce, vzájemná korelace, apod.).

V této kapitole budeme aplikovat jednoduché statistické metody na amplitudové a fázové spektrum, vzájemná korelace bude použita ke zjištění vztahů mezi jednotlivými vrstvami výztuže a složitější přístup použijeme na odhad dvourozměrných charakteristik rozložení okamžitých amplitud. V případě spekter se bude jednat o zjištění typu rozdělení a jeho charakteristik, dále pak určení číselných hodnot parametrů zjištěného rozdělení. Korelace je přímo jednou z charakteristik náhodného procesu. Dvourozměrnou charakteristikou se rozumí průběh statistického rozložení v soustavě pravidelných řezů buď podél vlákenného svazku nebo napříč vlákennými svazky. Ta pak může sloužit k posouzení předpokladu stacionarity náhodného procesu a jeho ergodičnosti.

Je zřejmé, že teoretickým základem pro výpočet parametrů a charakteristik je kap. 4. V souladu s realitou však budeme místo času uvažovat souřadnice bodů, odečtené podél svazku či vrstvy a místo o stacionárním procesu budeme hovořit o procesu homogenním. Povrch vzorku, dříve označovaný jako řez, budeme nazývat vzorkem a termín řez ponecháme pro prezentaci charakteristik napříč vrstvami. Vzorkem však budeme též značit experimentální hodnotu (souřadnice) střednice měřenou podél vrstvy. Aby nedošlo k nedorozumění, bude použit termín vzorek kompozitu pro označení povrchu řezu a vzorek dat pro hodnotu, souřadnici střednice. Vzorek dat je vždy číslo, zatímco vzorek kompozitu je fyzikální realita, v programech pro vzorek kompozitu používáme krátký názorný popis a pořadové číslo, tedy textový řetězec, například „pla_o_09“ pro plátnovou vazbu, řez po osnově, 9. vzorek.

7.1 Amplitudová a fázová spektra

Hlavním cílem statistické analýzy bylo určit typ rozdělení jednak pro amplitudové a fázové spektrum jako celek, jednak pro jednotlivé významné harmonické. Přesné určení typu a parametrů správného rozdělení má nezastupitelný význam například pro realizaci virtuálního kompozitu [33, 35]. Pro každý technologicky identický vzorek bylo k dispozici 96 hodnot[1] amplitud a fází každé harmonické. Bohužel, počet získaných prvků – 96 – je malý pro statistické zpracování, jako minimální počet se uvádí 500 hodnot. Nicméně i přes toto významné omezení jsme provedli statistickou analýzu s tím, že její závěry nemusí být přesné.

Předpokládali jsme, že rozdělení pro jednotlivé amplitudy by mělo být normální, protože to je typické experimentální rozdělení. Jelikož jsou jednotlivé vrstvy navzájem umístěny s náhodnou fází, která se mění v rozsahu 0^{o} až 360^{o}, či -180^{o} až 180^{o}, lze očekávat rovnoměrné rozdělení fázových konstant, alespoň u dominantních harmonických. S těmito dvěma pracovními hypotézami byla zahájena poměrně podrobná statistická analýza [36, 48].

Celkem snadno lze v prostředí MatLab připravit vlastní programy pro nalezení a zobrazení histogramu, distribuční funkce a s omezenou přesností i hustoty pravděpodobnosti. Funkční verze jsme také připravili. Nicméně pro soustavné zpracování dat byly upřednostněny komerční programy systému QC a grafické výstupy systému Adstat.

Pomocí nich jsme získali tyto výstupy:

- Typy rozdělení pro amplitudy a fázové konstanty všech významných harmonických.
- Číselné hodnoty parametrů rozdělení pro vybrané harmonické.
- Grafické výstupy pro každou testovanou harmonickou.

---

[1] 12 řezů a 8 střednic pramenců na každém z nich, tedy 96 údajů. Prakticky se některé vzorky nepodařilo zpracovat, takže údajů bylo dokonce ještě méně, 88 nebo 80. Při teoretických úvahách byl uvažován maximální počet.

Testovali jsme tato možná rozdělení, podrobný popis viz část 4.1.2.

- normální (N),
- logaritmicko-normální (LN),
- Weibullovo (W),
- rovnoměrné (R – pouze pro fázovou konstantu).

Typické výstupy jsou v tab. 7.1 a na obr. 7.1 pro amplitudy a obr. 7.2 pro fázové konstanty. V tab. 7.1 jsou pro dva typy vzorků a prvních dvacet harmonických, což jsou všechny významné harmonické, uveden nejpravděpodobnější typ rozdělení pro amplitudy ve zkratce: *N* – normální, *LN* – logaritmicko-normální, *W* – Weibullovo.

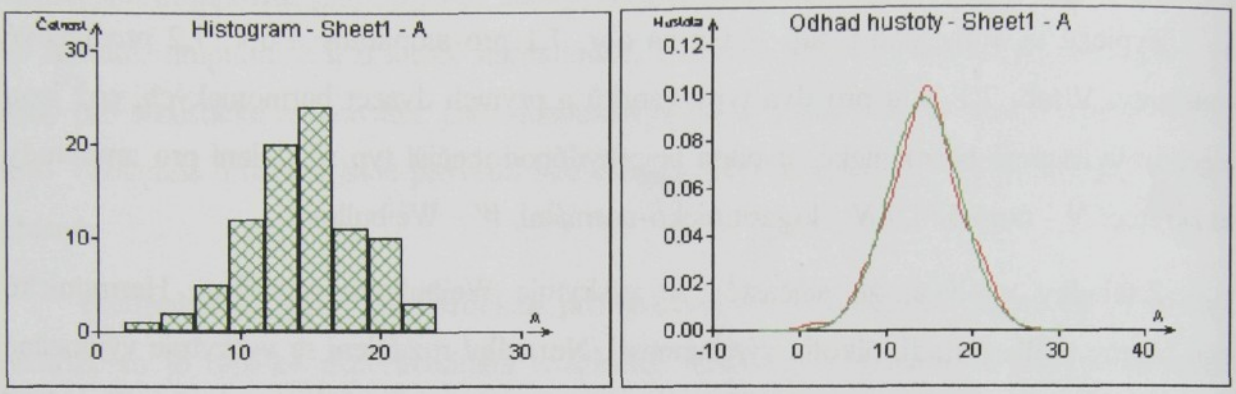
Z tabulky vyplývá, že nejčastěji se vyskytuje Weibullovo rozdělení. Harmonické jsou řazeny podle pořadí, nikoliv významnosti. Normální rozdělení se vyskytuje výjimečně a log-normální poměrně málo. Důležité však je, že tato dvě rozdělení se vyskytují v okolí dominantní harmonické, pro plátnovou vazbu je to nejčastěji osmá harmonická. Častý výskyt Weibullova rozdělení by neměl překvapit, protože díky dvěma vhodným konstantám má možná nejpružnější rozdělení, takže se dokáže nejlépe přizpůsobit datům. V části 4.1.2 jsme ukázali, že často lze nalézt normální rozdělení, které se Weibullovu velmi podobá. Normální rozdělení se tedy může vyskytovat daleko častěji. Pro úplnost uveďme, že došlo k vyzkoušení i gamma rozdělení, ale shoda byla horší než pro předchozí případy.

plátnová vazba, slabě lisovaná, řez po osnově, typ rozdělení pro amplitudu										
pořadí harmonické	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
rozdělení	W	W	W	W	N	LN	W	LN	N	N
pořadí harmonické	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
rozdělení	W	W	W	W	W	W	W	W	W	W
plátnová vazba, slabě lisovaná, řez po útku, typ rozdělení pro amplitudu										
pořadí harmonické	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
rozdělení	W	W	W	W	LN	LN	W	LN	W	W
pořadí harmonické	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
rozdělení	W	W	W	W	W	W	W	W	W	W

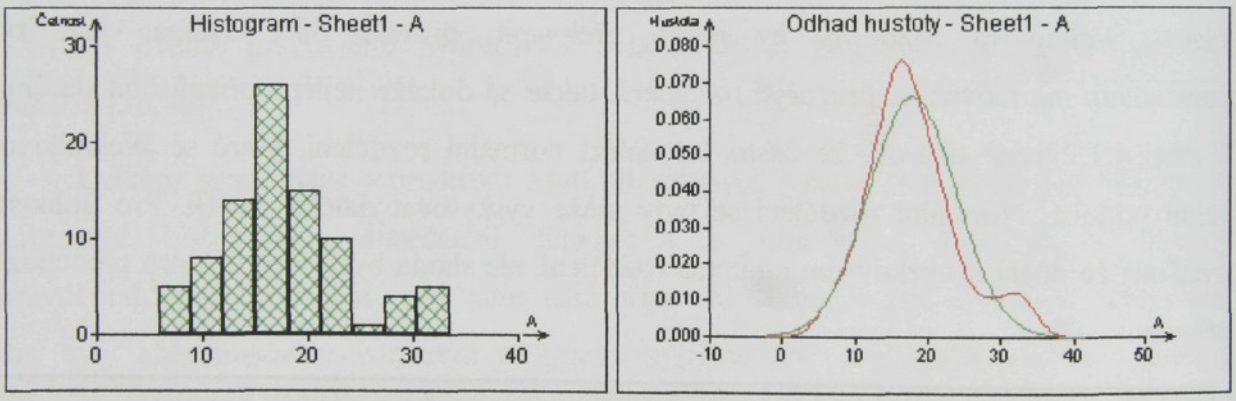
Tab. 7.1 Určená statistická rozdělení amplitudy plátnové výztuže

Na obr. 7.1 a obr. 7.2 jsou kvantitativně v grafické podobě porovnány typické výsledky pro jednotlivá uvažovaná rozdělení amplitud, pokud existovala. Jde o vzorek tkaninového kompozitu s plátnovou výztuží, málo lisovaný, tedy tentýž jako v tab. 7.1. Na obr. 7.1 jsou výsledky pro osnovu, na obr. 7.2 pro útek.

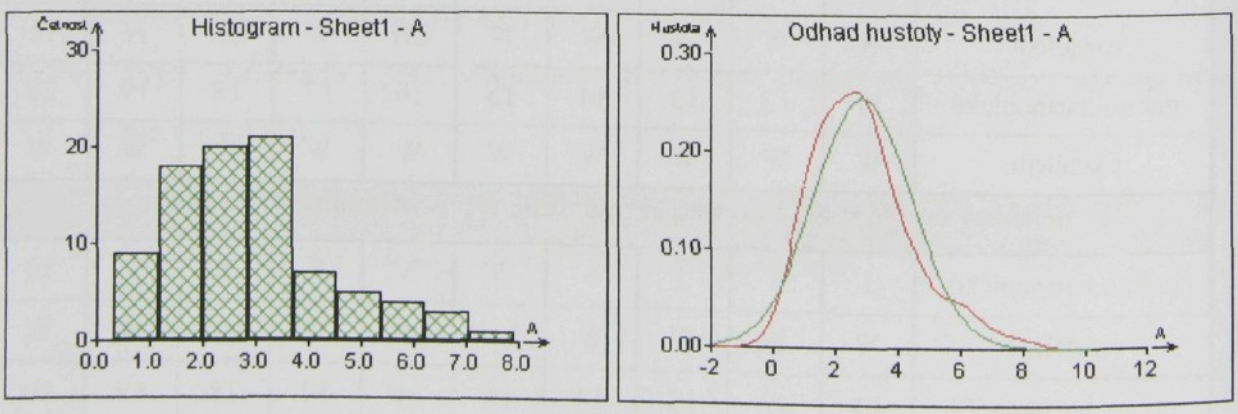
Plátnová vazba, slabé lisování, řez po osnově, 9. harmonická, normální rozdělení



Plátnová vazba, slabé lisování, řez po osnově, 6. harmonická, log-normální rozdělení



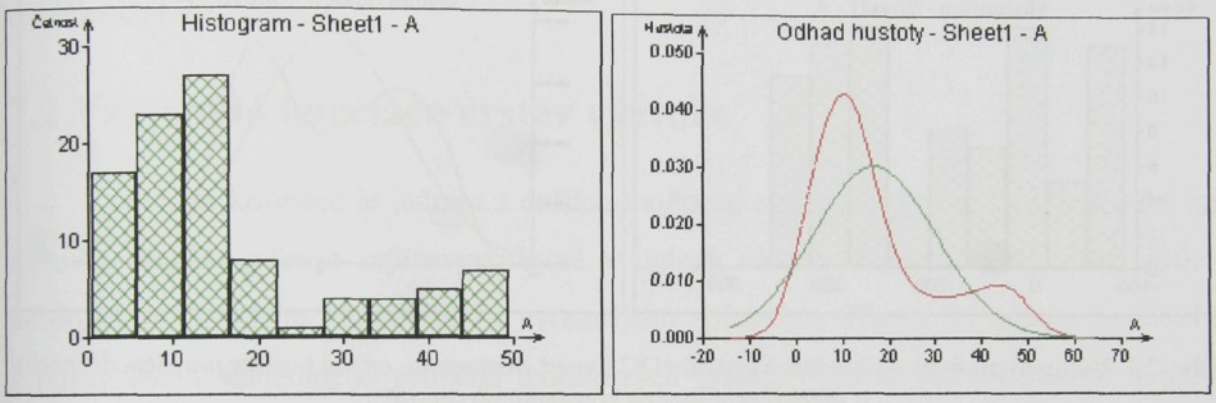
Plátnová vazba, slabé lisování, řez po osnově, 17. harmonická, Weibullovo rozdělení



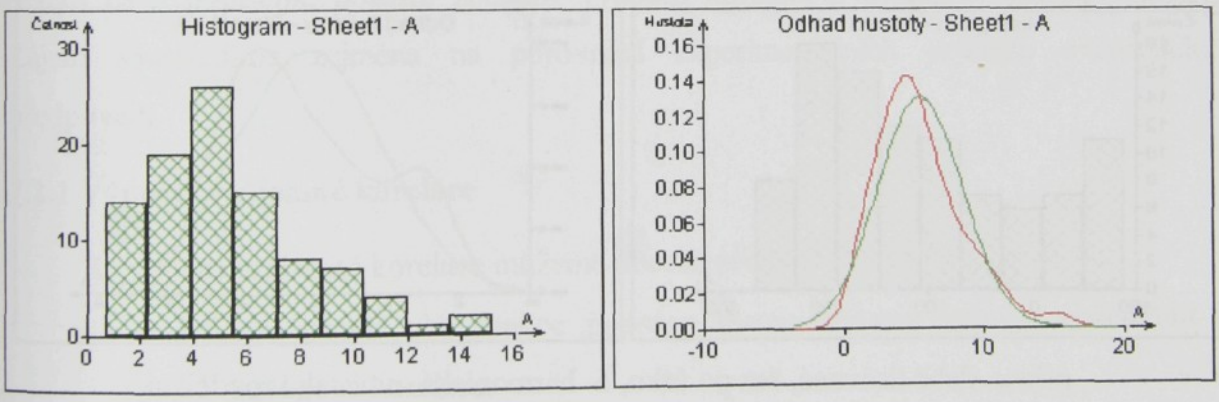
Obr. 7.1 Výstupní grafy ze statistického systému QC Expert
(histogram, odhad hustoty pravděpodobnosti), měření pro amplitudu po osnově

V levé části je histogram, v pravé pak červeně hustota pravděpodobnosti odvozená z histogramu a zeleně je vyznačena její aproximace nejpravděpodobnějším rozdělením. Z výsledků na grafech lze usuzovat, že pro osnovu je poměrně dobrá shoda mezi experimentálním průběhem a jeho aproximací, pro útek je tato shoda již horší, alespoň v některých případech. Důležité však je, že pro dominantní harmonické je rozdělení normální nebo jemu blízké, Weibullovo rozdělení se nachází pro méně významné harmonické, kde je také přesnost a věrohodnost dat nižší.

Plátnová vazba, slabé lisování, řez po útku, 8. harmonická, log-normální rozdělení



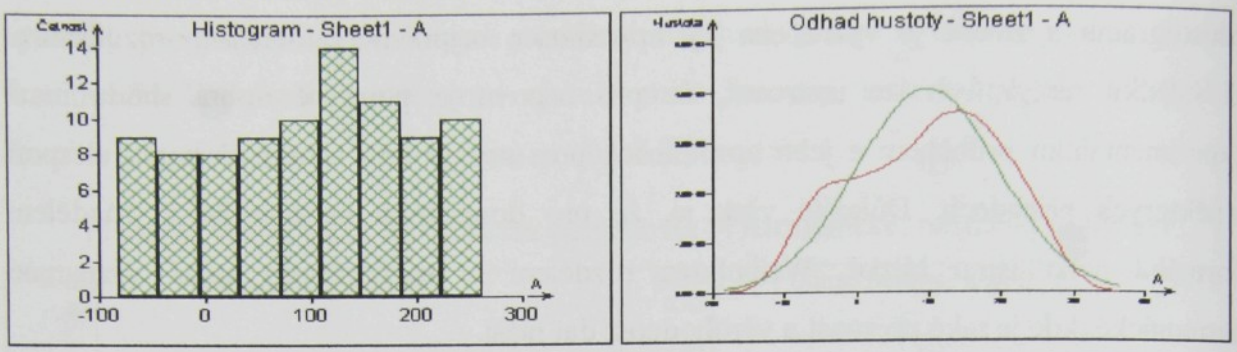
Plátnová vazba, slabé lisování, řez po útku, 9. harmonická, Weibullovo rozdělení



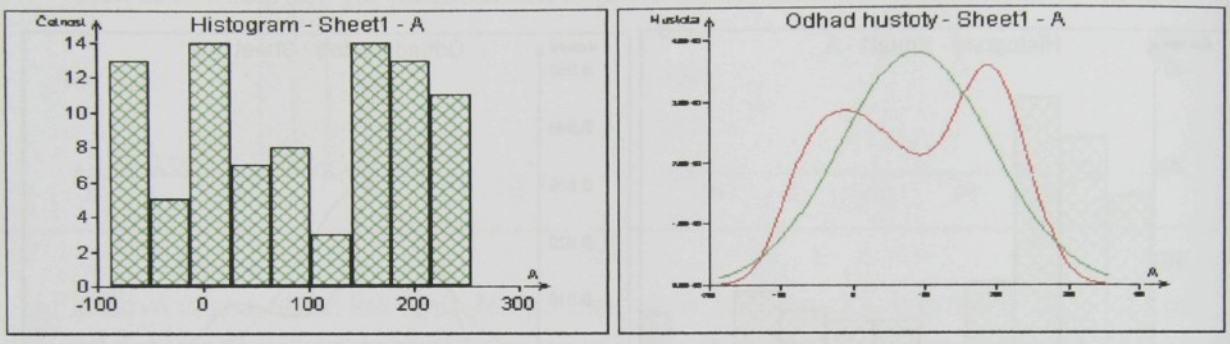
Obr. 7.2 Výstupní grafy ze statistického systému QC Expert
(histogram, odhad hustoty pravděpodobnosti), měření pro amplitudu po útku

Typické grafické výstupy pro fázovou konstantu jsou pro tytéž vzorky na obr. 7.3 pro osnovu a na obr. 7.4 pro útek. Struktura obrázků je stejná jako pro amplitudy, nalevo je opět histogram, napravo červeně čára představuje hustotu pravděpodobnosti odvozenou z histogramu a zeleně její aproximaci nejpravděpodobnějším rozdělením. Jako pravděpodobná rozdělení byla uvažována všechna včetně rovnoměrného, to ale až později.

Plátnová vazba, slabé lisování, řez po osnově, 2. harmonická, normální rozdělení

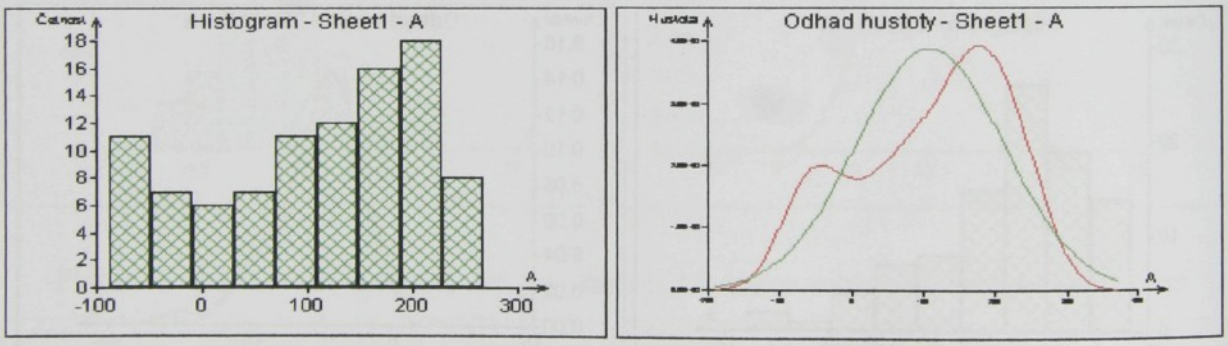


Plátnová vazba, slabé lisování, řez po osnově, 5. harmonická, normální rozdělení

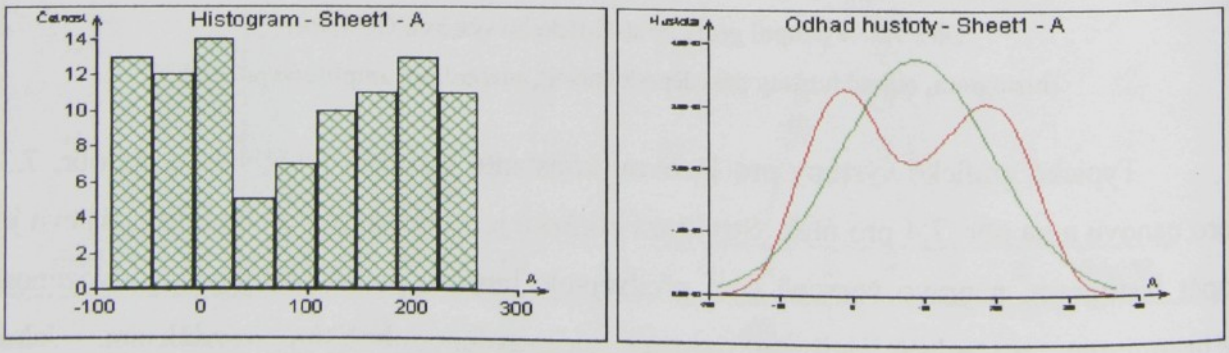


Obr. 7.3 Výstupní grafy ze statistického systému QC Expert (histogram, odhad hustoty pravděpodobnosti), měření pro fázovou konstantu po osnově

Plátnová vazba, slabé lisování, řez po útku, 4. harmonická, normální rozdělení



plátno slabě lisované, řez po útku, 6. harmonická, normální rozdělení



Obr. 7.4 Výstupní grafy ze statistického systému QC Expert
(histogram, odhad hustoty pravděpodobnosti), měření pro fázovou konstantu po útku

Z histogramů na obr. 7.3 a obr. 7.4 lze usuzovat na to, že rovnoměrné rozdělení pro fázovou konstantu se jeví jako nejpravděpodobnější. Z porovnání s ostatními rozděleními vyplývá, že ani jedno z nich neaproximuje fázovou konstantu dobře. Dvě maxima na grafech s velkou pravděpodobností neznamenají bimodální rozdělení, ale jsou důsledkem poměrně malého počtu dat. Proto jsme se ani o test bimodálního rozdělení nepokoušeli. Test na rovnoměrné rozdělení však byl proveden až dodatečně a v grafických výstupech práce [48] se již neobjevil. Dodatečné testy pak ukázaly, že rovnoměrné rozdělení pro fázovou konstantu je alespoň pro nejdůležitější harmonické nejpravděpodobnějším rozdělením [36].

7.2 Vzájemná korelace vrstev výztuže

Vzájemná korelace je jednou z dalších možností studia struktury. Podobně jako jiné metody, nemůže přinést informace, které v datech uloženy nejsou, může však nějakou informaci podat jiným vhodnějším a výraznějším způsobem. Hlavní její přínos by měl být v porovnávání vzájemného průběhu jednotlivých vrstev. Protože jde o poměrně složitou operaci, užitečnou pomůckou budou základní teoretické průběhy nastíněné v sekci 4.4. V této části popíšeme použité způsoby výpočtu korelací a uvedeme typické výsledky. Zájem soustředíme zejména na porovnání experimentálních průběhů s teoretickou předpovědí.

7.2.1 Výpočet vzájemné korelace

K výpočtu vzájemné korelace můžeme obecně přistupovat několika způsoby:

- Analyticky, jsou-li obě funkce popsány matematickými výrazy, výsledkem je spojitá analogová korelace.
- Numericky, pokud jsou k dispozici pouze hodnoty vstupních funkcí ve stejně vzdálených bodech nebo tyto hodnoty jsou získány na základě vzorkování vstupních funkci. Je nutno aplikovat vztah pro diskrétní korelaci. Výstupem je korelace v definovaných bodech.
- Spektrálně na základě vztahu (4.82). Tento vztah byl v části 4.3.3.1 odvozen pro analogový případ, dále pak v části 4.5.2 je pro diskrétní případ uveden vztah (4.100). Výsledkem této procedury může být jak analogová korelace (ale jen teoreticky), tak diskrétní, ta se prakticky používá.

Bez ohledu na způsob výpočtu, je nutno před výpočtem odečíst střední hodnotu korelovaných funkcí, jinak se získá korelační maximum těchto středních hodnot, viz např. obr. 4.17 v sekci 4.4 pro korelaci náhodného průběhu s rovnoměrným rozdělením a nenulovou střední hodnotou. Pokud je nenulová část obou funkcí stejně dlouhá, je délka korelační funkce dvojnásobná.

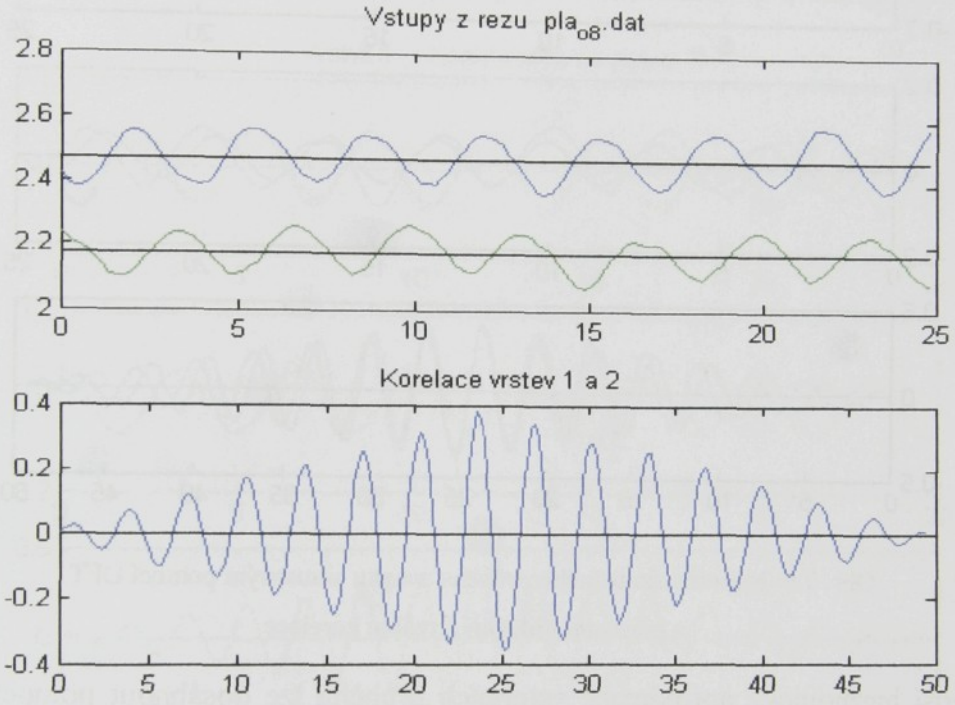
Při výpočtu vzájemné korelace se vychází z analogového vztahu (4.70) nebo (4.72), který automaticky předpokládá homogenitu systému, alespoň v širším smyslu (viz část 4.3.2.2). S ohledem na kvaziperiodický charakter vrstev je tento předpoklad oprávněný. Je nutné připomenout, že korelace se počítá podél souřadnice. Výsledky tohoto způsobu výpočtu platí obecně a přesně jen v případě, že proces je ergodický.

Analytický výpočet může vycházet z aproximace střednice vrstvy pomocí Fourierova polynomu. V integrálu (4.72) pak jsou součty součinů dvou funkcí sinus. Zjištění primitivní funkce pro tento součin by nemělo činit potíže, i když je výsledný výraz dosti složitý. Horší je to s dosazením mezí, protože se funkce vůči sobě posouvají, takže jedna z integračních mezí se plynule mění. Vyjde několik složitých vztahů podle toho, jaké hodnoty nabývá argument τ korelační funkce. Při aproximaci patnácti sinusovkami je kombinací těchto součinů úctyhodný počet – 225. Na druhé straně mnohé z nich se liší jen v parametrech, vzorec je stejný. Nakonec se všechny musí sečíst. Extrémní náročnost je důvodem, proč tento způsob výpočtu nebyl vyzkoušen. Proto jsme použili druhého způsobu, který vychází z diskrétní definice korelace (viz část 4.5.2) a vztah (4.99). Třetí možnost prostřednictvím diskrétních spekter naznačenou rovněž v části 4.5.2, jsme úspěšně odzkoušeli, ale nevyužili, protože úspora času byla vzhledem ke krátkým posloupnostem a malému počtu výpočtů diskutabilní.

Pro daný vzorek kompozitu by se korelace měla počítat pro kombinace všech dvojic vrstev. Při počtu osmi vrstev na vzorek to znamená dvaatřicet výsledků. Při deseti kvalitních vzorcích pro sledovaný typ kompozitu je to již 320 obrázků, a to jen pro korelaci z dat. Protože výpočet je zcela automatický, neměl by nastat při povšechné vizuální kontrole výstupu problém. Na druhé straně je tento počet obrázků dost velký, pokud jde o uchování a podrobné vyhodnocení. V tomto případě je nutno především řešit otázku automatizace či alespoň usnadnění detailního prohlížení. To je také důvod, proč v další části jsou uvedeny jen typické a zajímavé výsledky.

7.2.2 Typické výsledky

Typický výsledek pro okrajové vrstvy plátnové vazby je na obr. 7.5. V horní části jsou vstupy, v dolní je výsledek vzájemné korelace. I když se na první pohled vstupy liší od ideálního sinusového průběhu, korelační funkce je vizuálně velmi blízká vzájemné korelaci pro ideální sinusovky (viz obr. 4.13). Na citovaném obrázku je autokorelace, však vzájemné korelace se liší jen malým posuvem výstupu jako celku.

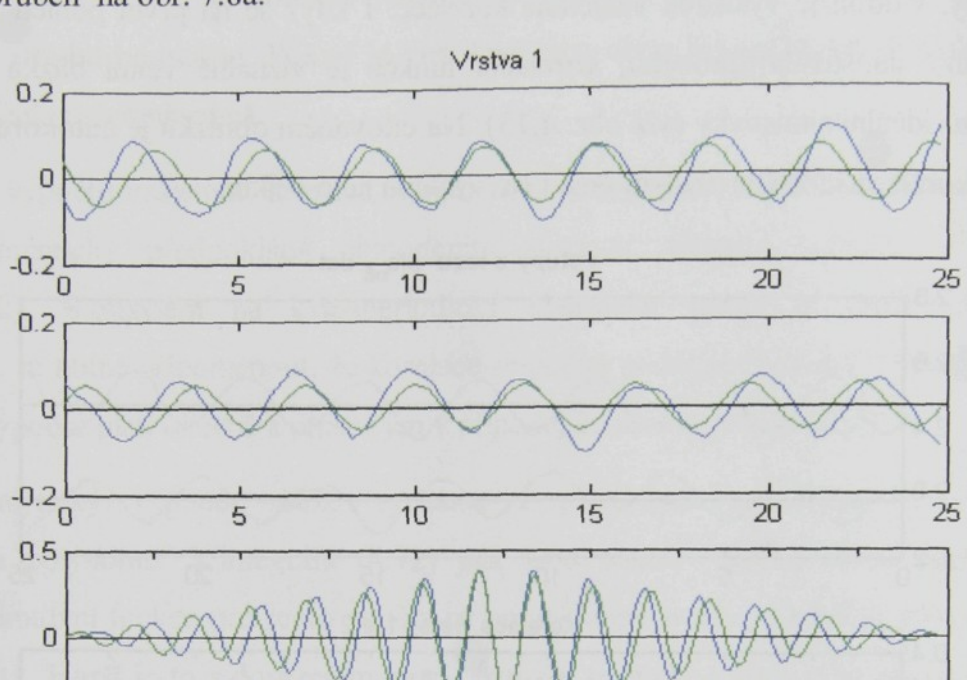


Obr. 7.5 Korelace prvních dvou vrstev pro plátnovou vazbu

Překvapující podobnost mezi ideální korelací pro harmonické průběhy a reálnou korelací pro experimentální data, alespoň v případě plátnové vazby, byla impulsem, že jsme použili aproximace vstupních funkcí ideálními sinusovkami a porovnali idealizované a reálné korelace. Jako nejjednodušší způsob harmonické aproximace jsme zvolili nejvýznamnější harmonickou spektra získaného z experimentu pomocí DFT.

U plátnové vazby to bývá 8. harmonická, jak jsme již mnohokrát řekli. Výsledky jsou na obr. 7.6. Z tohoto obrázku je zřejmé, že vlnové délky ideální sinusovky a reálné křivky nesouhlasí, proto se shoda vstupních křivek směrem od střední části zhoršuje. Tento jev připisujeme rozmazávání spektra (viz sekce 3.9). To se projeví též na korelacích, ve střední části je shoda dobrá, směrem k okrajům se zhoršuje, dokonce na okrajích se fáze mění na opačnou.

Na druhé straně, pokud by bylo upraveno měřítko na vodorovné ose pro jednu z křivek, teoretický i praktický průběh by se dosti dobře shodovaly, což nakonec potvrzuje i detailní průběh na obr. 7.8a.

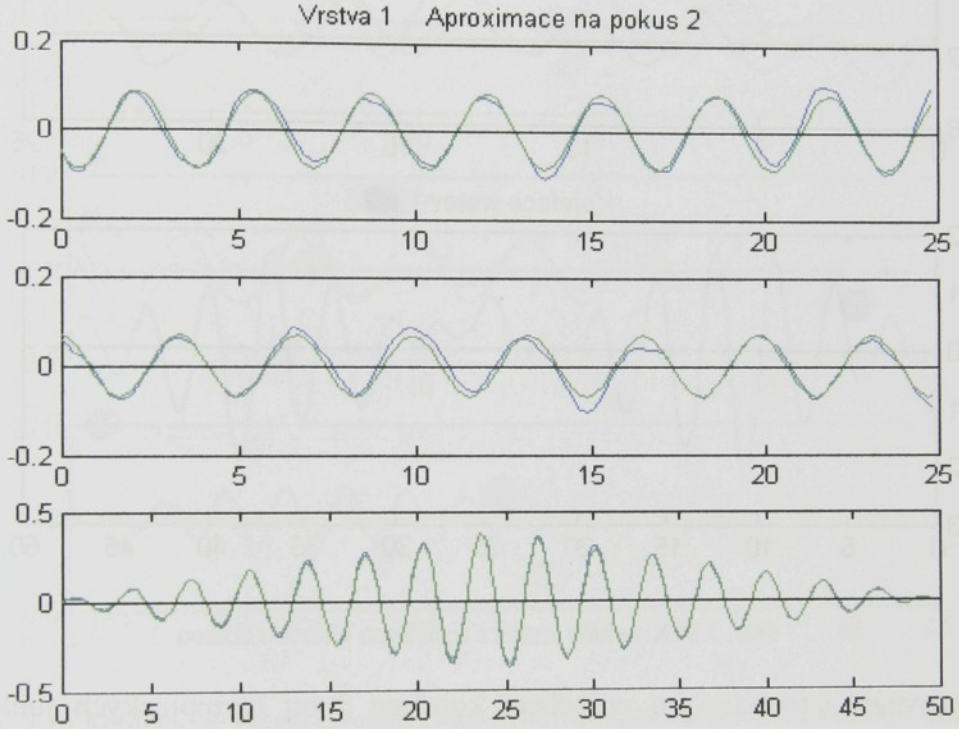


Obr. 7.6 Náhrada skutečného průběhu svazku sinusovým pomocí DFT a porovnání ideální a reálné korelace

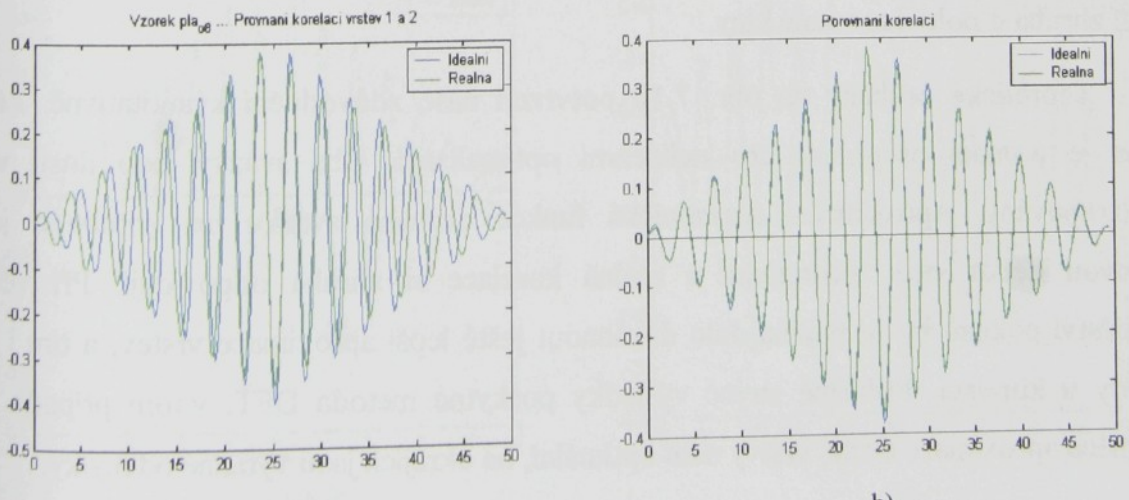
Lepší harmonické aproximace vstupních průběhů lze dosáhnout pomocí nelineární optimalizace bez omezujících podmínek (unconstrained nonlinear optimization). Konkrétně je myšlena procedura „*fminsearch*" z Matlabu. Pomocí této procedury se hledají parametry aproximující funkce tak, aby součet čtverců odchylek aproximující funkce a experimentálních bodů byl minimální. Na rozdíl od lineární optimalizace (známé jako lineární programování, či simplexová metoda), u níž je řešení jediné a jednoznačné, u nelineární optimalizace se nemusí získat jediné, či přesněji nejlepší, řešení.

Příčina je v tom, že součet čtverců odchylek jako funkce parametrů aproximace má řadu lokálním minim, z nichž nejhlubší je minimum pro optimální parametry. V závislosti na počátečních podmínkách algoritmus obvykle nalezne nějaké lokální minimum. Aby bylo nalezeno absolutní minimum, je nutno spouštět algoritmus mnohokrát pro různé počáteční podmínky a porovnávat výsledky. Obvykle se počáteční podmínky nastavují nahodile v určitém rozmezí hledaných parametrů pomocí generátoru náhodných čísel.

Na tomto principu byla založena druhá metoda aproximace vrstvy harmonickou funkcí. Aproximující funkcí je sinus a jako parametry se používají amplituda, vlnová délka a fázová konstanta. Výsledek úspěšné aproximace je na obr. 7.7. Z obrázku je zřejmé, že shoda pro vstupní funkce je daleko lepší než při použití DFT (viz obr. 7.6). Důležitější však je, že ideální a reálná korelace jsou téměř shodné. Tento závěr potvrzuje detailní porovnání korelací získanými oběma metodami na obr. 7.8. Shoda s aproximací pomocí DFT (obr. 7.8a) je zřetelně horší než výsledek pomocí nelineární optimalizace (obr. 7.8b).



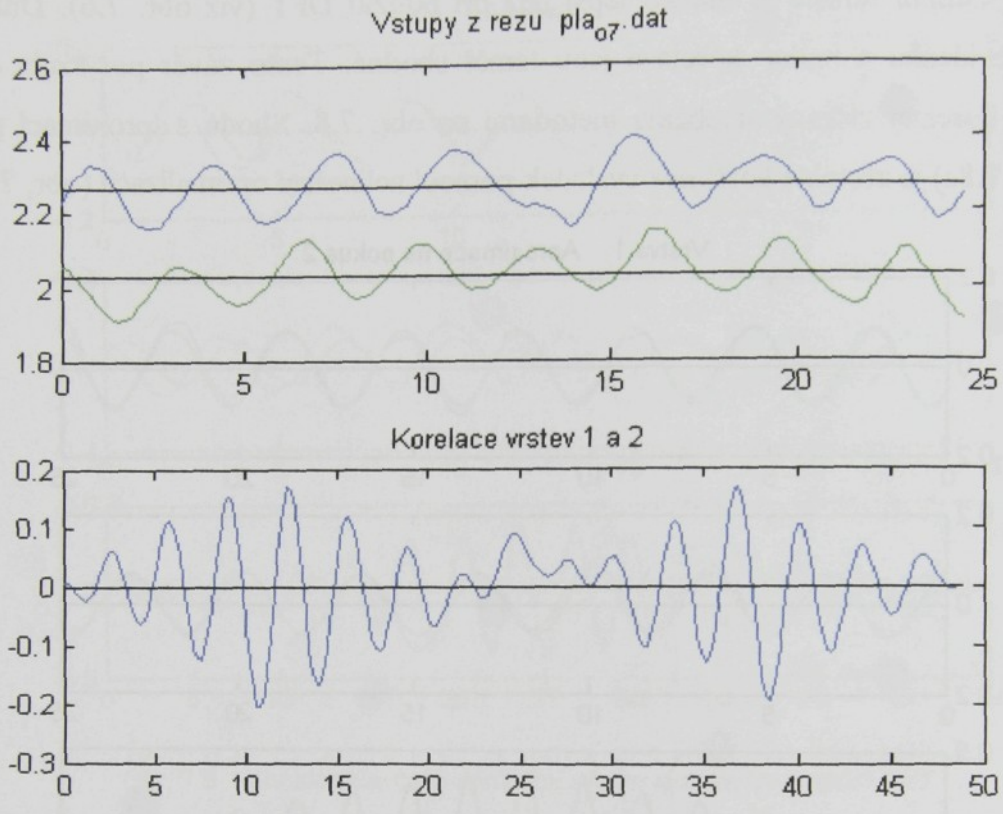
Obr. 7.7 Náhrada skutečného průběhu funkcí sinus, porovnání ideální a reálné korelace



a) b)

Obr. 7.8 Detailní korelace pro aproximaci pomocí DFT (a) a nelineární optimalizací (b)

Méně častý, ale zajímavější, případ korelace je na obr. 7.9. V tomto případě se jedná o dvě poměrně silně deformované vrstvy. Výsledek korelace však vykazuje, místo jednoho centrálního, dvě souměrně umístěná maxima.

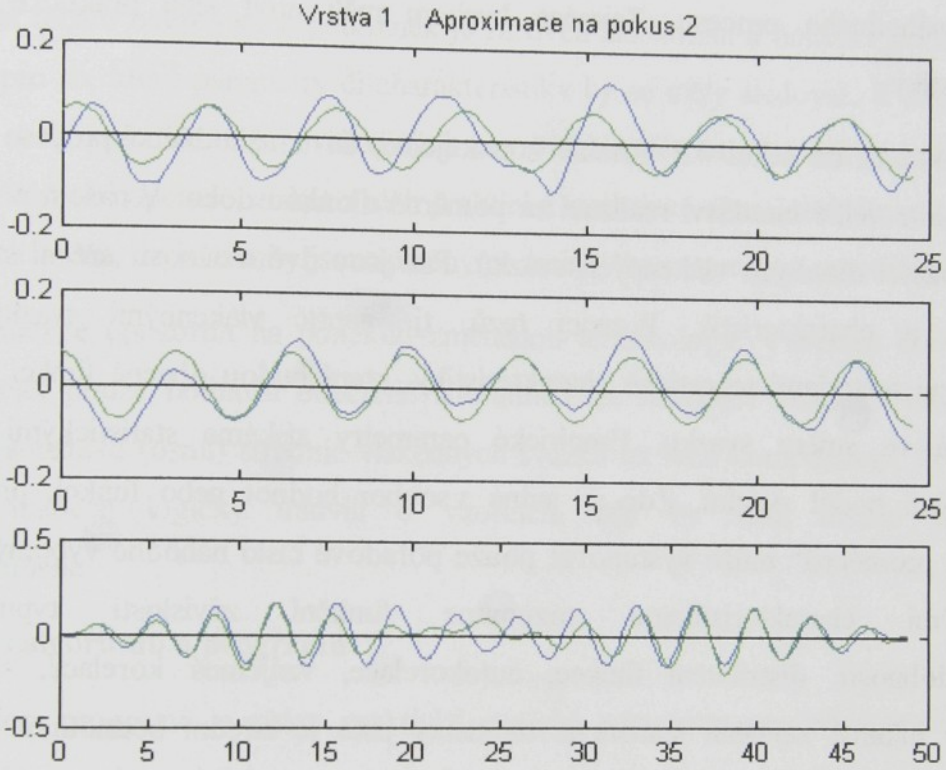


Obr. 7.9 Korelace vrstev s rozdílnou vlnovou délkou

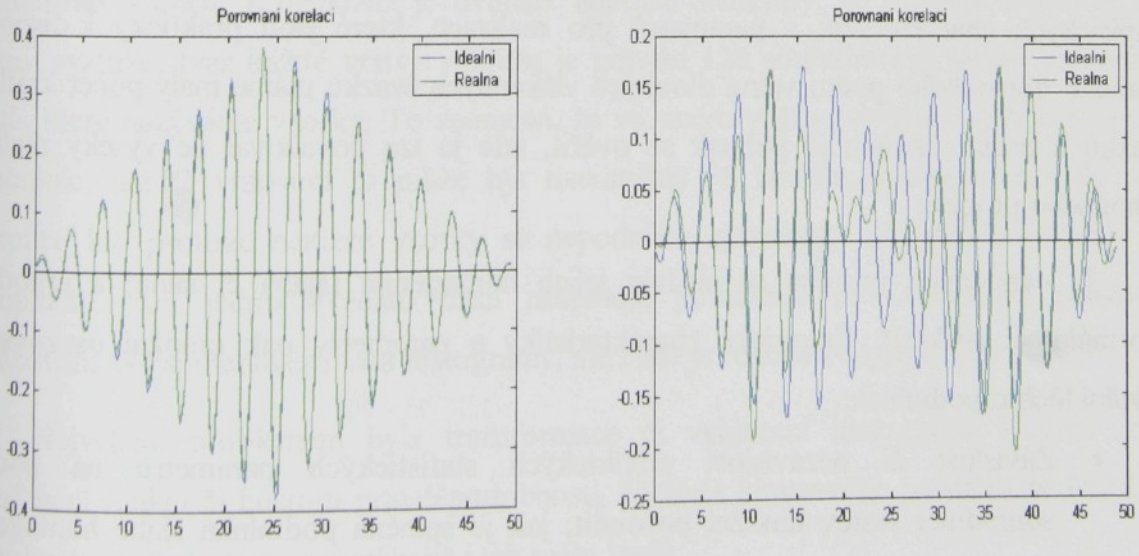
Z porovnání s teoretickým průběhem korelace dvou harmonických funkcí s mírně odlišnými frekvencemi na obr. 4.14, vyplývá, že vstupy se liší vlnovou délkou. Skutečně, v důsledku poruchy ve střední části první křivky na obr. 7.9 se počet vazných vln na ní sníží zhruba o polovinu vazné vlny.

Teoretické průběhy na obr. 7.10 potvrzují naše zdůvodnění kvantitativně. Získali jsme je pomocí programu pro nelineární optimalizací. Oba svazky jsou dosti věrně aproximovány. Aproximační harmonická funkce druhého svazku má zhruba o jednu vlnovou délku více. Teoretická a reálná korelace si zhruba odpovídají. Při velkém množství pokusů by se možná dalo dosáhnout ještě lepší aproximace vrstev, a tím i lepší shody u korelací. Přibližně stejné výsledky poskytne metoda DFT, v tom případě však zejména aproximace druhé vrstvy není optimální, na okrajích jsou výrazné odchylky.

Pro detailnější porovnání jsou na obr. 7.11 uvedeny průběhy korelací pro stejnou vlnovou délku na obou vstupech (obr. 7.11a) a pro odlišnou vlnovou délku (obr 7.11b). V obou případech se jedná o kvalitnější aproximaci nelineární optimalizací, v případě odlišných vlnových délek je shoda horší, zejména ve střední části, k tomu však může přispívat i výrazné zkreslení průběhu vrstev.



Obr. 7.10 Aproximace vstupů korelace s nestejnými vlnovými délkami a porovnání výstupů



a) b)

Obr. 7.11 Porovnání korelace vrstev se stejnou vaznou vlnou (a) a rozdílnými vaznými vlnami (b)

7.3 Statistika náhodného procesu

Tato část vychází z teoretické kap. 4, zejména sekce 4.3. Cílem výrazně teoretického zpracování dat, které zde dále popíšeme, bylo získat alespoň částečné podklady pro posouzení, do jaké míry lze považovat průběhy střednice vlákenných svazků za výseky realizace náhodného procesu. Zejména bychom měli určit jeho praktické statistické charakteristiky.

S odkazem na sekci 4.3 stručně zopakujeme, že u náhodného procesu teoreticky přepokládáme velké množství realizací za poměrně dlouhou dobu. V našem případě to je velké množství dlouhých vlákenných svazků. Pak jsou dvě možnosti určení statistických parametrů a charakteristik. Pomocí řezů, tj. napříč vlákennými svazky získáme statistickými metodami teoretické charakteristiky, které budou obecně funkcí souřadnice definované ve směru svazku. Empirické parametry získáme statistickými metodami aplikovanými podél svazků. Zde se jedná s soubor hodnot nebo funkcí, protože jako „nezávisle proměnná" může vystupovat pouze pořadové číslo náhodně vybraných svazků. Statistickými charakteristikami rozumíme funkční závislosti typu hustota pravděpodobnosti, distribuční funkce, autokorelace, vzájemná korelace, statistickými parametry míníme zejména statistické momenty jako je střední hodnota a směrodatná odchylka.

Praktickými charakteristikami a parametry rozumíme odhady teoretických a empirických charakteristik a parametrů pro realizace, které jsou prakticky k dispozici. Namísto obrovského počtu velmi dlouhých vlákenných svazků máme malý počet krátkých svazků a naším úkolem je pokusit se ověřit, zde je lze považovat ze výseky realizací náhodného procesu.

U náhodných procesů se sleduje jejich homogenita (slabá či silná) a ergodicita (normální či striktní). Empirické charakteristiky a parametry pak umožní usuzovat na splnění těchto podmínek:

- Závislost či nezávislost empirických statistických parametrů na podélné souřadnici vrstev umožní posoudit, jak je splněna podmínka slabé homogenity. Typicky se uvažuje invariance střední hodnoty na souřadnici.

- Závislost empirických statistických charakteristik, zejména hustoty pravděpodobnosti, na téže souřadnici dává podklady pro posouzení silné homogenity.
- Vztah mezi parametry či charakteristikami ve směru vrstev a napříč vrstvami pak může potvrdit ergodičnost.

Výčet těchto ověřovacích podmínek je zároveň základním a bohužel jen teoretickým vodítkem pro to, které parametry či charakteristiky by se měly sledovat. K dispozici totiž máme jen malý počet krátkých vlákenných svazků. Na ně potom musíme aplikovat výše zmíněné statistické operace, získat z nich praktické statistické charakteristiky a parametry a pomocí nich ověřit, do jaké míry jsou splněny podmínky homogenity a ergodičnosti.

Je důležité upozornit na poněkud změněnou terminologii. Vzorkem budeme v této části rozumět pouze hodnotu odečtené souřadnice ze střednice svazku. Nábrusem pak rozumíme soustavu (osmi) střednic vlákenných svazků na řezu kompozitem. Předtím jsme v obou případech logicky mluvili o vzorcích, zde by však mohlo často dojít k nedorozumění.

7.3.1 Popis algoritmů a programů

Úkolem programů je získat praktické statické parametry ve směru vrstev a napříč vrstvami. Přívlastek praktické znamená, že se tyto parametry určují z experimentálních hodnot. Vrstva výztuže je na nábrusu struktury reprezentována podélných řezem vlákenného svazku. K dispozici je dvanáct nábrusů struktury, na každém z nich je osm vrstev výztuže, tvar každé vrstvy výztuže je popsán 128 souřadnicemi stejně vzdálených bodů, které nazýváme vzorky. To znamená, že ve směru vrstev (svazků) vždy 128 hodnot souřadnic, napříč vrstvami to může být maximálně 96 hodnot, obvykle však 88 nebo dokonce 80, protože některé vzorky se nepodařilo zpracovat. To platí pro každý typ kompozitu. Ani jedno z těchto čísel nesplňuje podmínku pro spolehlivé statistické zpracování. Nejspolehlivější jsou histogramy, ale i zde je relativní chyba okolo 10%.

Největším problémem byla transformace či vyhlazení histogramů s cílem získat distribuční funkci či hustotu pravděpodobnosti. Metoda klouzavého průměru nepřicházela v úvahu, protože histogramy měly již i tak málo bodů.

Použití komerčních statistických balíků je v principu možné, ale výrazně by se zkomplikoval přenos dat mezi nimi a MatLabem, který používáme pro řešení všech problémů. Dopředu není ani jasné, zda by šel jednoduše, či vůbec, uskutečnit. Přirozená cesta, statistický Toolbox v MatLabu, nebyl v té době k dispozici. Na druhé straně je nutno vzít v úvahu, že sebelépe propracovaný programový balík neumí dělat zázraky a jednoduchý přístup často vede k obdobným výsledkům.

Z těchto důvodů jsem se rozhodli o aproximaci či vyhlazení dat pomocí polynomu. Aproximována byla přímo data z histogramu s cílem získat hustotu pravděpodobnosti a pomocí polynomické aproximace kumulativního součtu byla získána distribuční funkce. Přesnější postup by byl získat distribuční funkci přímo z dat, aproximovat jí polynomem s poměrně vysokou přesností, pak polynom derivovat, a tím získat poněkud přesnější průběh hustoty pravděpodobnosti. Výsledky se však podstatně nelišily.

Jako prostředí pro programy byl použit opět MatLab, který provádí mnoho operací velmi jednoduchým příkazem, mj. jedním příkazem zobrazí histogram, provede polynomickou regresi, vypočte hodnoty polynomu, hodnoty jeho derivace, zobrazí grafický průběh, atd. Příkazy obsahují řadu volitelných parametrů, které ovlivní průběh výpočtu i výsledky.

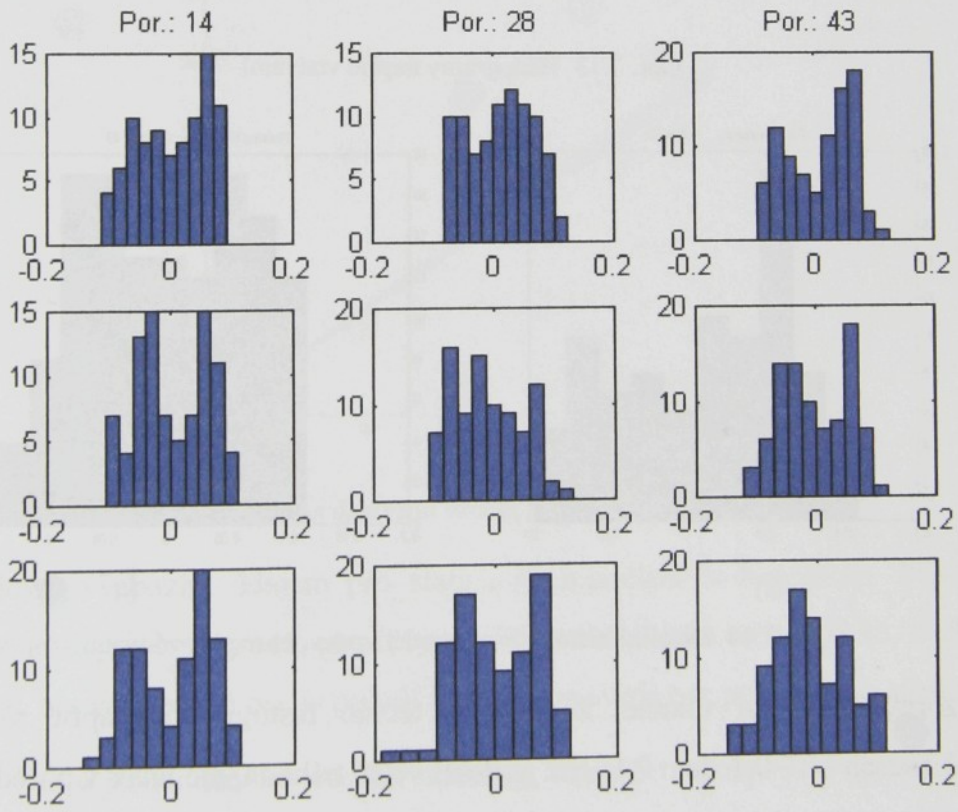
Celkem byly vytvořeny tři programy:

- Program pro zobrazení příčných a podélných histogramů střednic vlákenných svazků.
- Program pro statistické parametry, který pracuje ve dvou verzích: s potlačenou a respektovanou střední hodnotou. Jeho výstupem jsou zejména střední hodnota napříč i podél svazků, ostatní statistické parametry, ale i rozložení obou histogramů.
- Program pro statistické charakteristiky, který vyhlazuje histogramy pomocí polynomů zvolených stupňů a v grafickém výstupu zobrazí řezy statistickými funkcemi a jejich průběhy s různým stupněm vyhlazení.

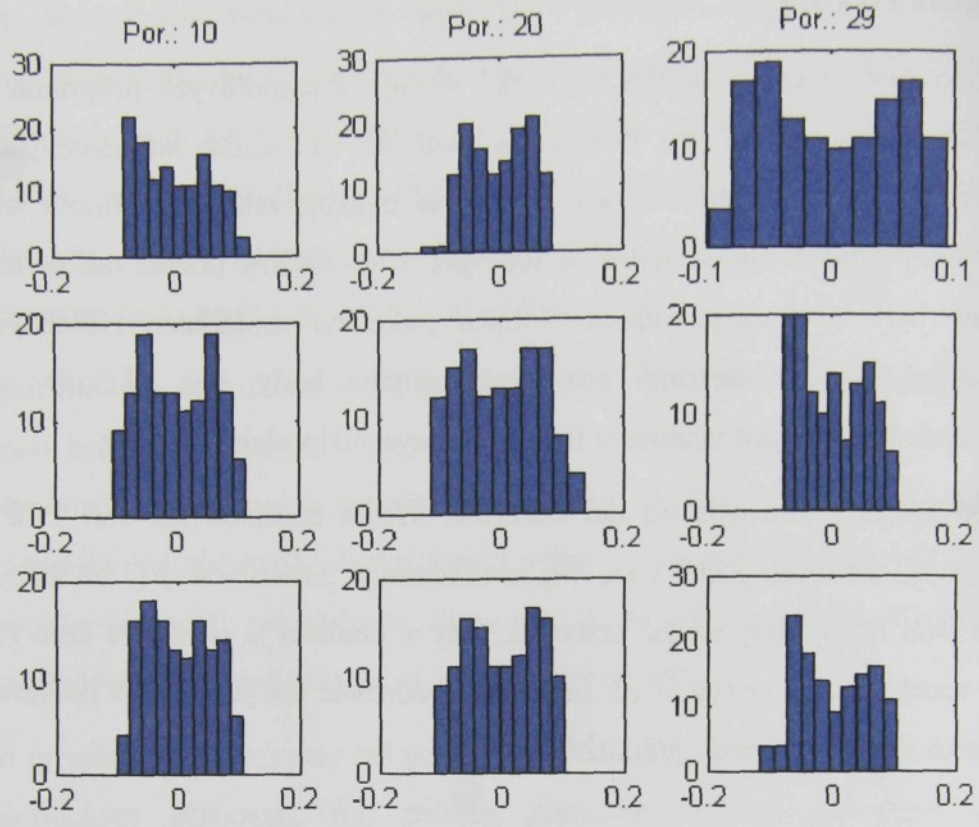
7.3.2 Některé výsledky

V této části uvedeme typické grafické výstupy z jednotlivých programů popsaných výše. Výstupem programů pro histogramy jsou jak souřadnice střednice jak ve směru napříč svazky, tak ve směru svazků. Přitom se uvažuje relativní hodnota střednice po odečtení její střední hodnoty. Jedná se tedy jak o histogramy příčné, tak podélné. Příčné histogramy byly zjišťovány v ekvidistantních polohách souřadnice vlákenných svazků. Tyto histogramy jsme sestrojili pro experimentální body, bez jakékoliv interpolace. Všechny výsledky jsou pro výztuž ve formě plátnové vazby slabě lisované.

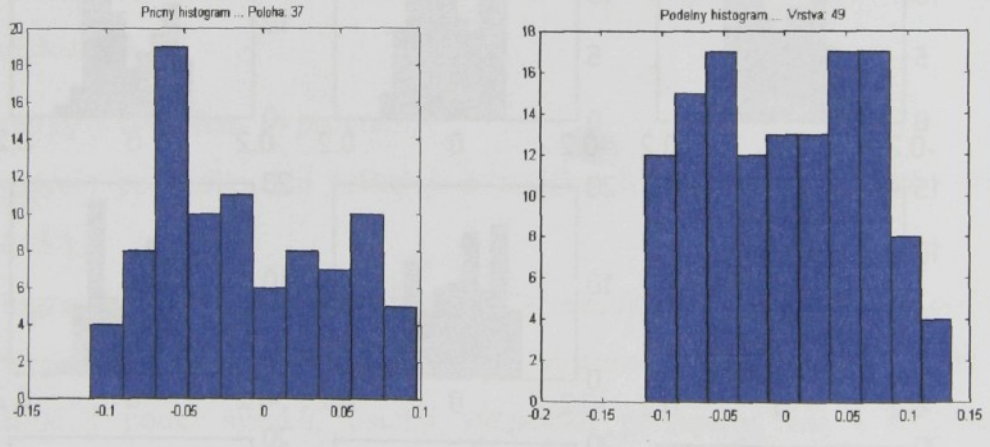
Před zpracováním byla od dat odečtena střední hodnota. Na obr. 7.12 je přehled histogramů zjišťovaných podél vrstev, tj. souřadnicí je pořadí vrstvy (1 až 96), zatímco na obr. 7.13 jsou histogramy napříč vrstvami, tedy souřadnicí je pořadové číslo řezu, což je též číslo vzorku podél vrstvy (1 až 128). Na vodorovné ose je relativní hodnota střednice vzhledem ke střední hodnotě. Jednotkou je mm.



Obr. 7.12 Histogramy podél vrstev



Obr. 7.13 Histogramy napříč vrstvami



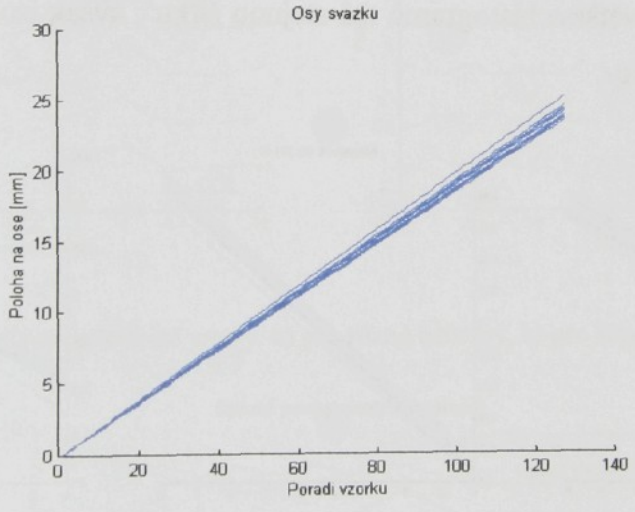
a) b)

Obr. 7.14 Detailní histogramy a) podél vrstev, b) napříč vrstvami

Pozorný čtenář si všimne, že jeden z těchto histogramů (napříč vrstvami) má výjimečně rozsah od –0,1 do +0,1, což je dosti velká náhoda, ale jinak v pořádku. Musí se jednat o řez napříč vrstvami a navíc je náhodou volen tak, že všechny body jsou blízko střední hodnoty. Jinými slovy, relativní souřadnice žádné ze střednic v tomto řezu nenabývá extrémní hodnoty, či hodnoty jí blízké. S cílem zdůraznit detaily jsou na obr. 7.14 uvedeny náhodně vybrané histogramy z každé skupiny.

Rozdíly mezi jednotlivými histogramy i téže skupiny jsou značné, je to především z důsledku malého počtu dat, jak již bylo několikrát vysvětleno. S odhlédnutím od této skutečnosti se zdá, že nelze prokázat zásadní rozdíl mezi histogramy napříč vrstvami a podél vrstev.

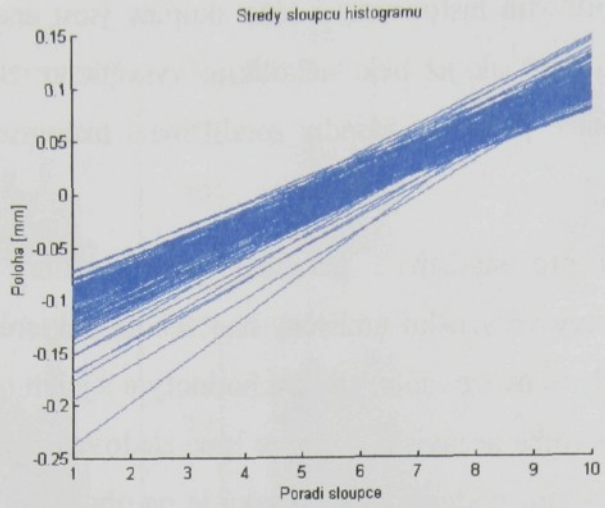
Výstupy programu pro statistické parametry mají rozdílný obsah a informační hodnotu. Jelikož jsou vrstvy ve vzorku umístěny nad sebou, některé statistické parametry se počítají pro dva případy: s uvažováním střední hodnoty a s jejím odečtením od dat. Jiné výstupy jsou však na této volbě nezávislé. Nejprve jsme sledovali, zda se stupnice na všech vzorcích shodují. Výsledek pro podélnou osu svazku je na obr. 7.15. Na vodorovné ose je pořadí vzorku dat a na svislé příslušná souřadnice. Pokud by stupnice přesně souhlasily a byly lineární, byla by na obr. 7.15 jediná přímá čára. Protože je přímek více, stupnice jsou lineární, ale nejsou úplně totožné. Na druhé straně, až na jednu výjimku, není rozptyl výrazný, takže se může pro popis ve směru vrstvy použít jedna stupnici s jednotkou mm.



Obr. 7.15 Poloha datového vzorku v závislosti na jeho pořadí

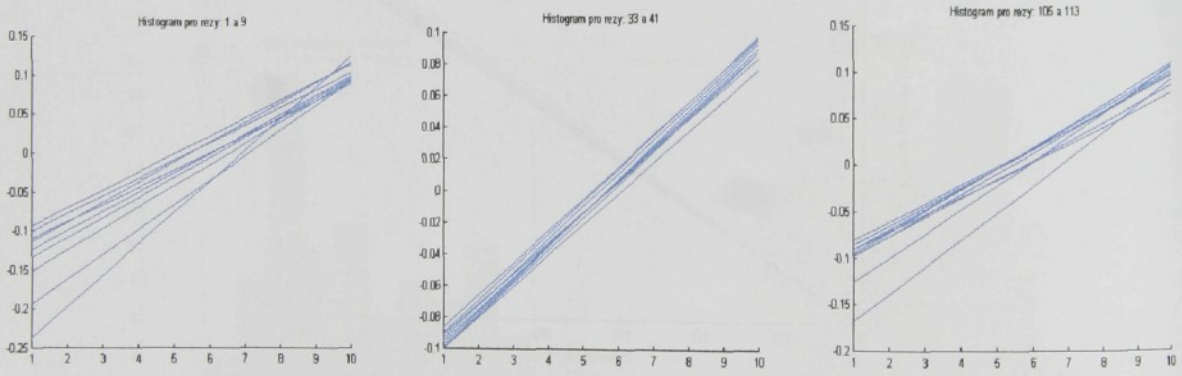
Jediným výchozím údajem pro statistická rozdělení je histogram. Polohy středů sloupců jednotlivých histogramů pro řezy napříč vrstvami jsou na obr. 7.16. Celkem jde o 1288 přímek. Na vodorovné ose je pořadí sloupce, na svislé ose poloha jeho středu.

Od vrstev jsou odečteny střední hodnoty. Protože na obr. 7.16 je velké množství přímek, jsou dále vybrány jen jejich části, a to přibližně ze začátku, středu a konce (obr. 7.17). Středy sloupců jsou rozděleny rovnoměrně, to vyplývá z principu histogramu, proto je závislost polohy středu na pořadovém čísle přímková. Pokud by měly přímky stejný sklon, byly by všechny histogramy stejně široké.



Obr. 7.16 Poloha středu sloupce histogramu v závislosti na jeho pořadí

To není splněno zejména v počátečních a koncových řezech (obr. 7.17a, obr. 7.17c). Pokud by se navíc redukovaly na jednu přímku, začínaly (a končily) by na stejné svislé souřadnici. Poslední podmínka není přesně splněna ani pro střední část řezů. Z obr. 7.16 a obr. 7.17 vyplývá, že většina histogramů má stejnou šířku[2], avšak jsou umístěny různě i po odečtení střední hodnoty.



a) b) c)

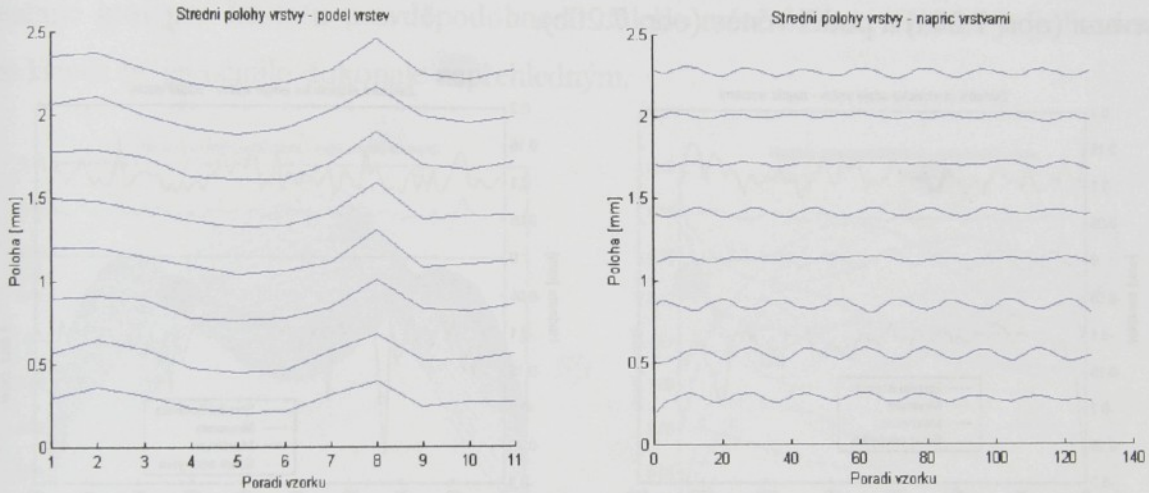
Obr. 7.17 Poloha středu sloupce pro menší počet histogramů, a) počáteční část, b) přibližně střední část, c) koncová část

Z toho vyplývá, že pro účely porovnávání je vhodnější vynášet pořadí sloupce histogramu a nikoli jeho polohu. To jsme dodrželi v celé této části. Pro kvantitativní úvahy a závěry je ovšem nutno vynášet správnou polohu.

---

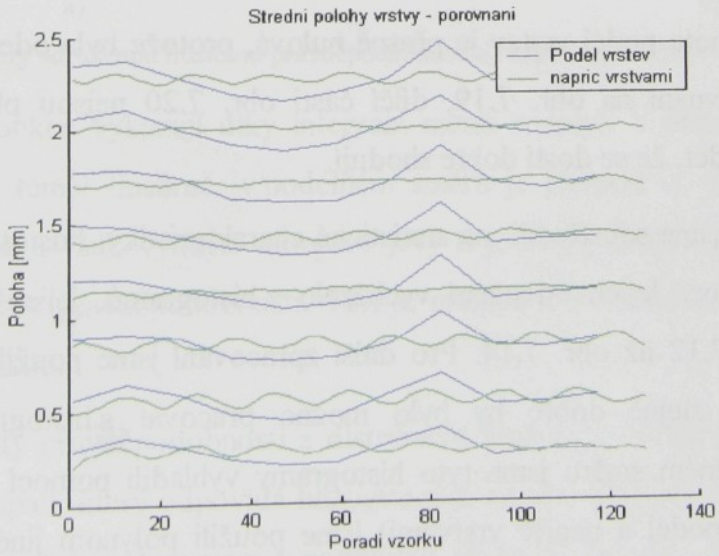
[2] Správě bychom měli používat složitějšího popisu: „Vrstvy v řezu, které jsou popsány histogramem, mají stejnou šířku.“.

Dále jsme sledovali základní statistický moment – střední hodnotu souřadnic vrstev. V tomto případě jsme nemohli odečítat od souřadnice střednice její průměr. Průběh středních hodnot pro jeden nábrus je graficky v závislosti na pořadí nábrusu znázorněn na obr. 7.18a, zatímco obr. 7.18b prezentuje průběh středních hodnot v řezu v závislosti na pořadí řezu, tj. souřadnici vzorku. U závislosti střední hodnoty na pořadí nábrusu překvapí výrazná odchylka u osmého nábrusu. V menší míře je i u nábrusu č. 2. Ta je způsobena špatnou volbou počátku souřadné soustavy. Tato výrazná systematická chyba se ve větší či menší míře objevuje i u jiných nábrusů a její příčinou je to, že je obtížné nastavit naprosto stejný počátek na všech nábrusech.



a) b)

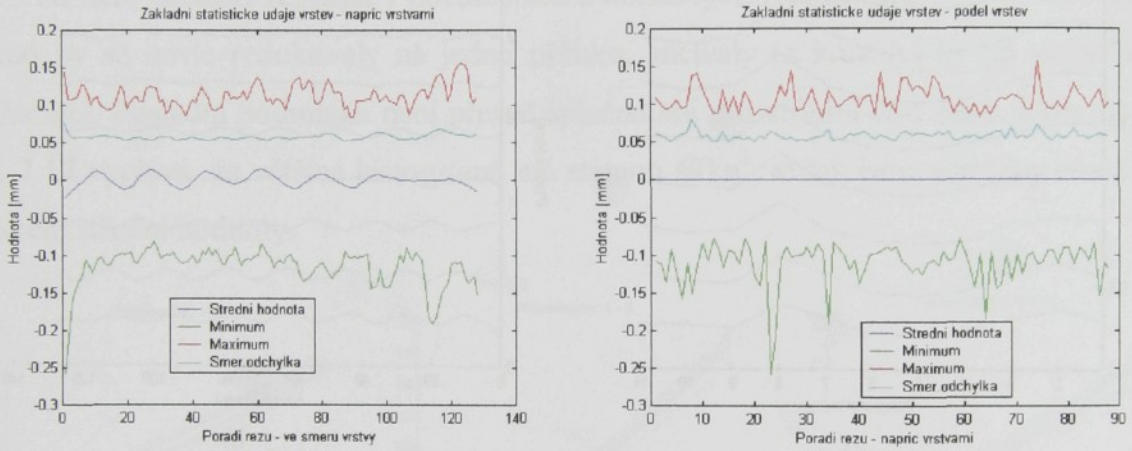
Obr. 7.18 Střední hodnota střednice vrstvy: a) pro různé nábrusy, b) pro různé řezy (body střednice)



Obr. 7.19 Porovnání středních hodnot podle nábrusů a podle řezů.

Odmyslíme-li si systematické chyby na obr. 7.18a, je možné z rozboru obou částí obr. 7.18 konstatovat, že bez ohledu na malý počet hodnot je střední hodnota nezávislá na poloze počátku zvoleného pro odečítání souřadnic. To také plně potvrzuje obr. 7.18, který obsahuje jak střední hodnoty podle vzorků, tak střední hodnoty podle řezů. To je také další důvod, proč bylo použito na obr 7.18a pořadí vzorků, ačkoliv by logicky měla být jediná hodnota. Střední hodnoty vypočtené pro oba způsoby zpracování ze zobrazených středních hodnot se shodují poměrně přesně.

Další statistické údaje, střední hodnota, směrodatná odchylka, maximum a minimum, byly zjištěny po odečtení střední hodnoty od souřadnic střednice, a to opět pro řezy napříč vrstvami (obr. 7.20a) a podél vrstev (obr. 7.20b).



a) b)

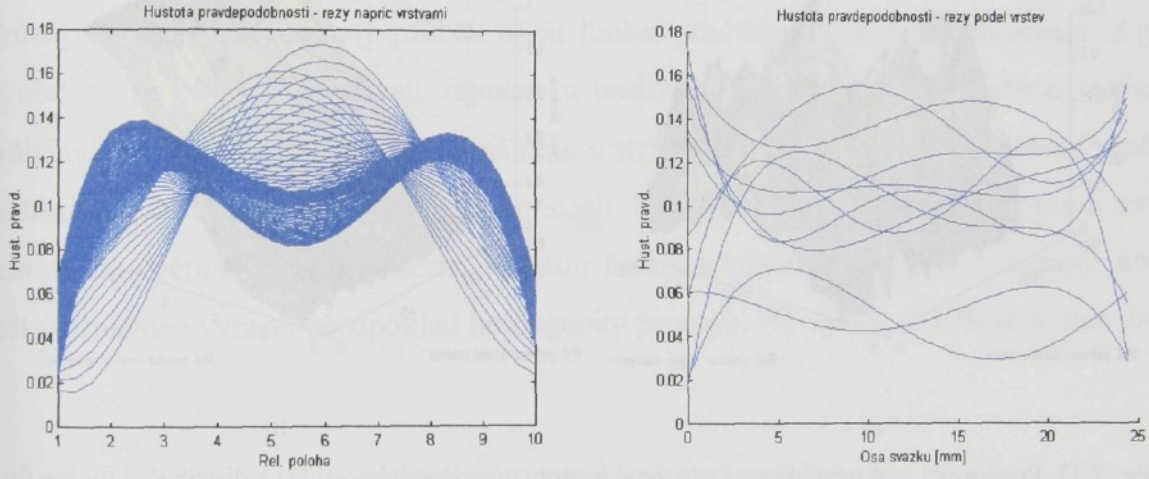
Obr. 7.20 Základní statistické parametry počítané: a) napříč vrstvami, b) podél vrstev

Střední hodnota podél vrstev je přesně nulová, protože byla odečtena. Na rozdíl od předchozího porovnání na obr. 7.19, dílčí části obr. 7.20 nejsou přeloženy přes sebe, nicméně i tak je vidět, že se dosti dobře shodují.

Další zájem jsme soustředili na statistické charakteristiky: hustota pravděpodobnosti a distribuční funkce. Jejich odvození vycházelo z histogramů, jejichž představitelé jsou uvedeny na obr. 7.12 až obr. 7.14. Pro další zpracování jsme použili histogramy napříč vrstvami, i když stejně dobře by bylo možno pracovat s histogramy podél vrstev. V příčném i podélném směru jsme tyto histogramy vyhladili pomocí polynomů, přičemž pro každý směr (podél a napříč vrstvami) jsme použili polynom jiného řádu. Tím jsme velmi hrubě aproximovali sdruženou hustotu pravděpodobnosti jednosložkového náhodného procesu (viz část 4.3.2.5), vztah (4.73).

Dále jsme z ní odvodili distribuční funkce. Měli bychom mluvit o sdružené distribuční funkci jednosložkového náhodného procesu, ale tento termín se nepoužívá. Dosažené výsledky jsou na následujících obrázcích.

Řezy sdruženou hustotou pravděpodobnosti v příčném a podélném směru jsou po řadě na obr. 7.21a,b. Tytéž řezy pro distribuční funkci jsou pak na obr. 7.22a, obr. 7.22b. V příčném směru (obr. 7.21a) má hustota pravděpodobnosti ve většině případů dvě přibližně souměrná maxima, v méně případech má jedno, obvykle nesymetrické maximum. Jde však o velmi hrubou aproximaci. V podélném směru (obr. 7.21b) není hustota pravděpodobnosti ani přibližně konstantní. Možná překvapí, že v podélném směru obsahuje graf pro hustotu pravděpodobnosti daleko méně křivek. Důvod je jednoduchý, více křivek by jej učinilo dokonale nepřehledným.

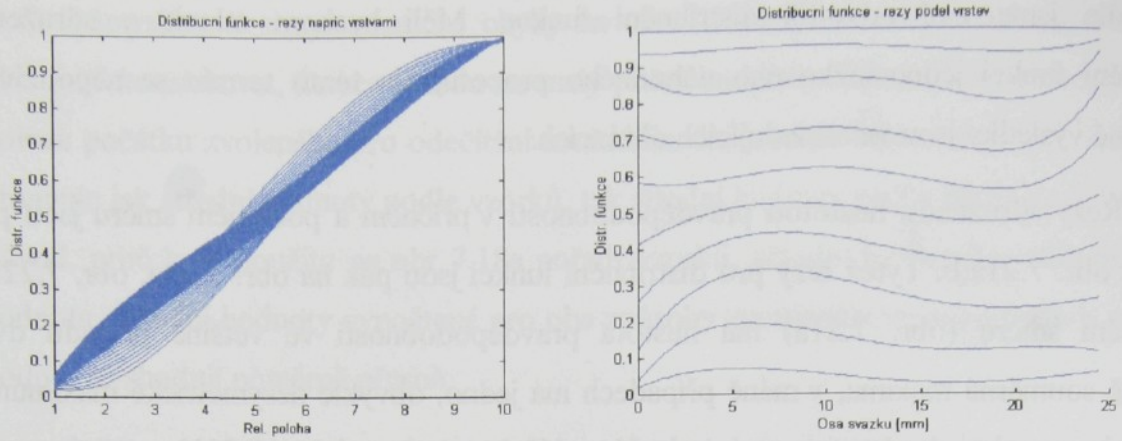


a) b)

Obr. 7.21 Řezy sdruženou hustotou pravděpodobnosti a) napříč vrstvami, b) podél vrstev

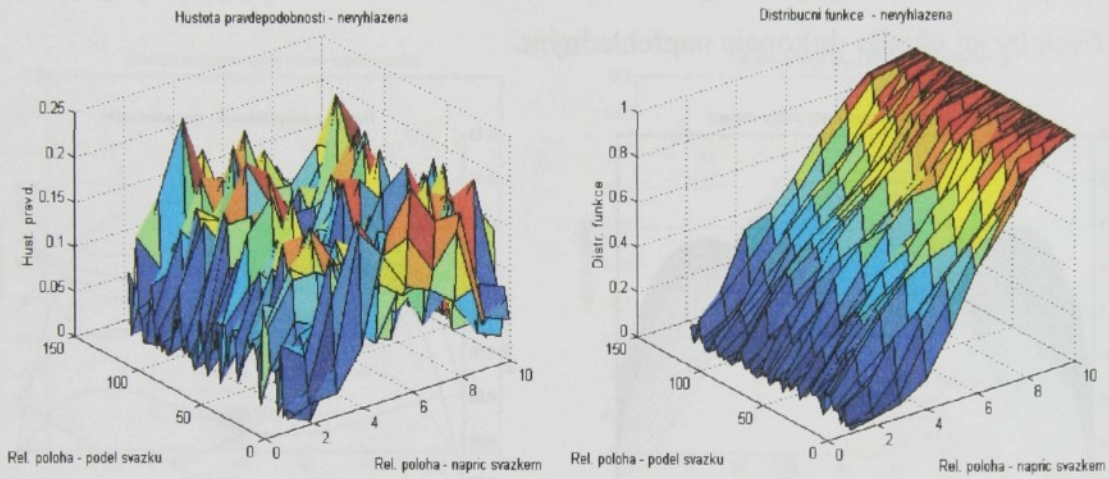
Distribuční funkce vykazují díky integraci menší rozptyl. V příčném směru narůstá ve většině případů téměř lineárně, v podélném směru je alespoň ve střední části zhruba konstantní. I zde jsou však výrazné okrajové jevy a je stejný důvod pro omezený počet křivek jako u hustoty pravděpodobnosti. Tím je přehlednost obrázku, i když zde je tato podmínka méně striktní.

Průběh hustoty pravděpodobnosti a distribuční funkce ve formě prostorového grafu pro nevyhlazený případ, který odpovídá histogramům na obr. 7.12 je na obr. 7.23., průběh obou funkci vyhlazených polynomem v podélném směru je na obr. 7.24 a po vyhlazení v obou směrech jsou zobrazeny na obr. 7.25.



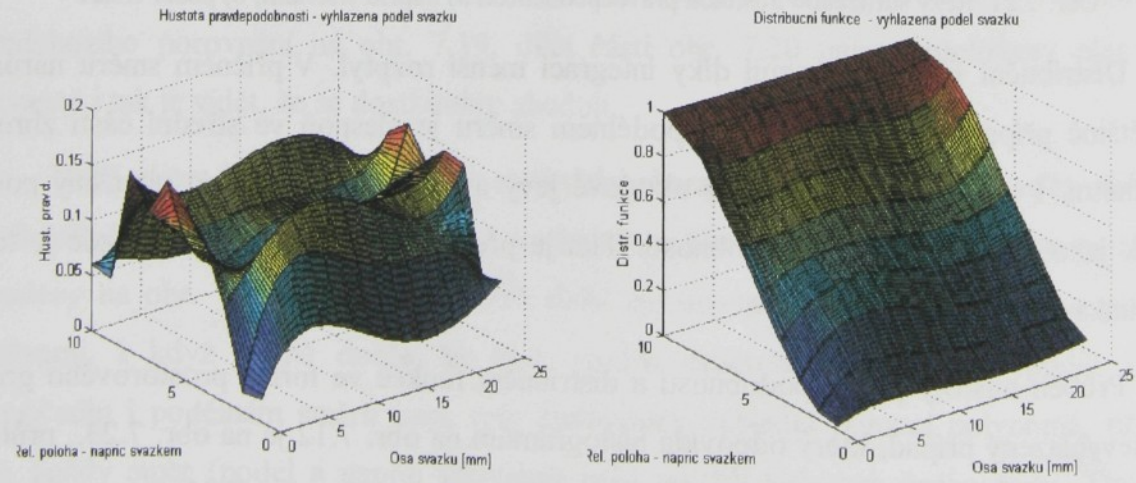
a) b)

Obr. 7.22 Řezy sdruženou distribuční funkcí a) napříč vrstvami, b) podél vrstev



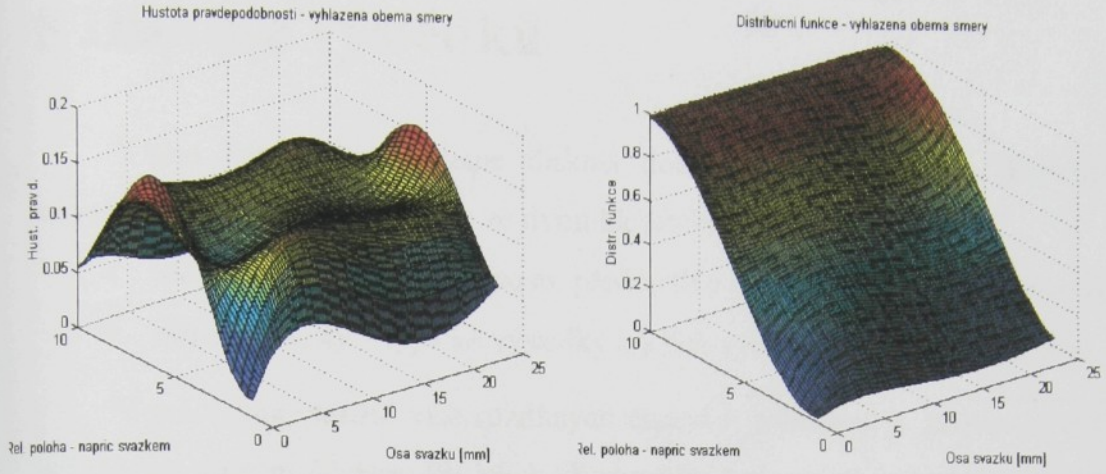
a) b)

Obr. 7.23 Prostorový graf nevyhlazené sdružené hustoty pravděpodobnosti (a) a distribuční funkce (b)



a) b)

Obr. 7.24 Prostorový graf sdružené hustoty pravděpodobnosti (a) a distribuční funkce (b) vyhlazených v podélném směru



Obr. 7.25 Prostorový graf sdružené hustoty pravděpodobnosti (a) a distribuční funkce (b) vyhlazených v obou směrech

Těmito prostorovými grafy je možné v systému MatLab otáčet, a tak je prohlížet z různých úhlů. Nevyhlazený průběh obou funkcí představuje základní informaci. Z grafů je obtížné na cokoliv usuzovat, zejména u hustoty pravděpodobnosti. Jednou vyhlazený průběh dává dobrou představu minimálně u distribuční funkce, dvakrát vyhlazený graf pak přehledně zobrazí i hustotu pravděpodobnosti. I když budou odmyšleny okrajové jevy, je hustota pravděpodobnosti poměrně složitou funkcí s lokálními maximy a minimy, což by mělo formálně vyvracet předpoklad homogenity procesu. Na vině je však nedostatek dat.

8 Dis

V tét
výpočetníc

- *me*
- *no*

V prá
několik za
způsob apli
některé z m
diskutovat v

8.1 Použ

V prá
popisu strukt

- pop
- apro
- distr
- stati
- použ
- aplik

Jedině
nacházejí ve
informace.

8.1.1 Popis p

Popis
protože převá
použít plně
střednice vláke

8 Diskuse výsledků

V této kapitole provedeme diskusi dosažených teoretických, experimentálních a výpočetních výsledků především ze dvou hledisek:

- *metodický přístup* – možnosti, přednosti a nedostatky použitých metod,
- *nové poznatky* – typické výsledky a jejich význam při studiu struktury.

V práci jsme použili více rozdílných metod k zobrazení a popisu struktury, někdy i několik za stejným účelem. Při jejich zhodnocení porovnáme zejména náročnost realizace, způsob aplikování, nároky na uživatele, ale zejména kvalitu získané informace. I když některé z metod byly pouze ověřeny, jiné z nich přinesly nové informace, které budeme diskutovat v další hlavní části.

8.1 Použité metody studia struktury

V práci jsme se soustředili a dovedli do určitého stupně realizace tyto metody popisu struktury vlákenných svazků:

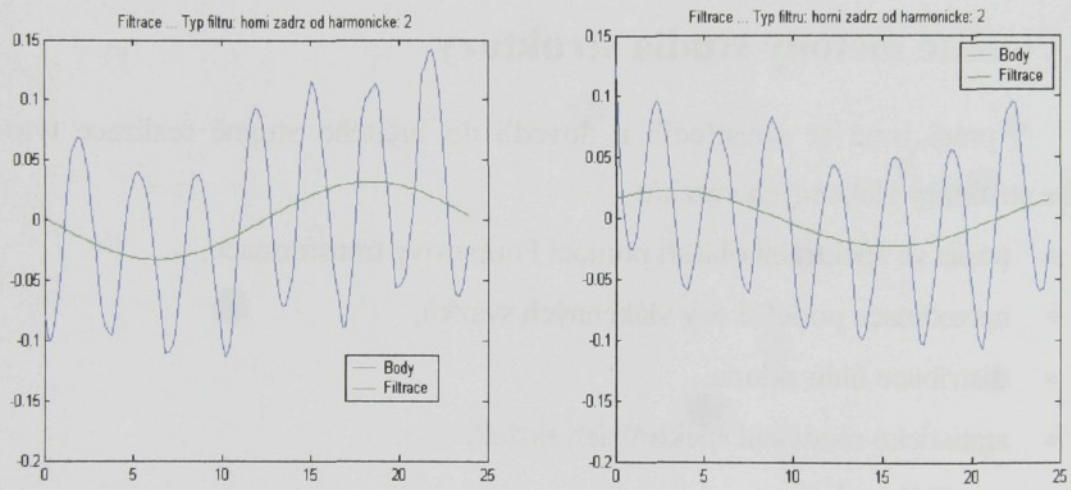
- popis ve spektrální oblasti pomocí Fourierovy transformace,
- aproximace podélné osy vlákenných svazků,
- distribuce úhlu sklonu,
- statistické rozdělení spektrálních složek,
- použití korelace,
- aplikace teorie náhodných procesů.

Jedině poslední metoda má pouze výrazný teoretický význam, všechny ostatní se nacházejí ve stadiu praktického využití, i když v různém rozsahu a s různým stupněm informace.

8.1.1 Popis pomocí Fourierovy transformace

Popis struktury pomocí Fourierovy transformace považujeme za nejvýznamnější, protože převádí informaci o vlákenném svazku do úplně jiné formy, na jejíž analýzu lze použít plně rozvinuté teorie elektrických obvodů. O jeho využití k aproximaci tvaru střednice vlákenného svazku pojednává další část.

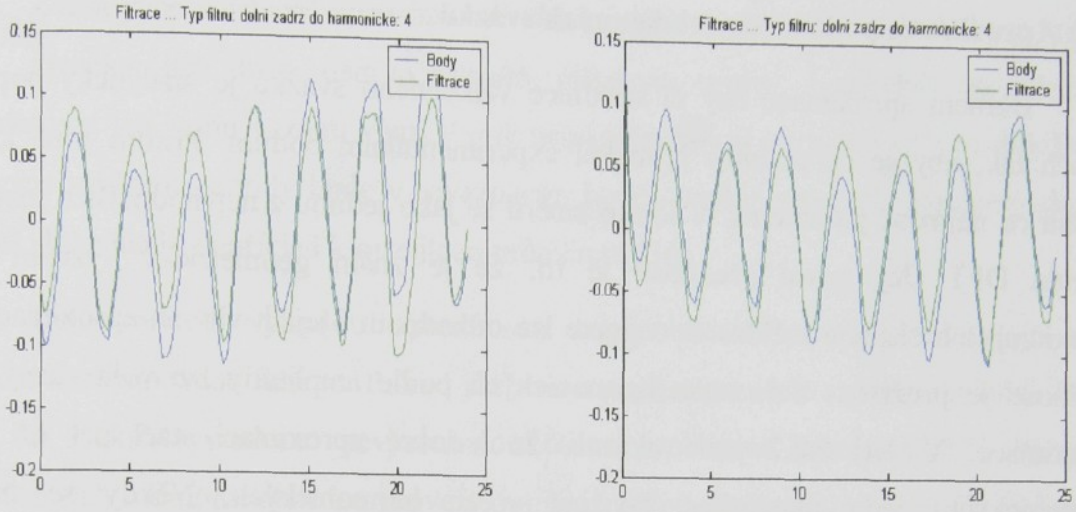
Zde je důležité upozornit na velmi používanou operaci elektrických obvodů – *filtraci*. Pomocí ideální hornofrekvenční zádrže (dolnofrekvenční propusti) lze uchovat pouze několik nejnižších nebo dokonce jenom jednu harmonickou, a tím zjistit, jak se průměrná osa vlákenného svazku deformuje. Průměrnou osou vlákenného svazku v této části se rozumí průběh střední hodnoty pro jednotlivé vazné vlny. Typické případy silné deformace průměrné osy u plátnové vazby jsou na obr. 8.1. Ponechali jsme pouze nejnižší harmonickou. V tomto případě je průběh průměrné osy nutně sinusový. Je zřejmé, že amplituda deformace průměrné osy je asi polovinou amplitudy dominantní harmonické. Při použití dvou (či tří) nejnižších harmonických lze získat přesnější průběh průměrné osy, ovšem může také dojít ke zkreslení tvaru zbývajícího průběhu, což lze ovšem pozorovat. Z obr. 8.1 je zřejmé, že průběh průměrné osy svazku je určen podstatně lépe než z obálky křivky.



Obr. 8.1 Průběh průměrné osy vlákenného svazku aproximovaný pouze první harmonickou, tedy po odfiltrování všech ostatních

Odfiltrování nejnižších harmonických naopak vede k napřímení svazku. To potvrzuje obr. 8.2, který vznikne z obr. 8.1 po odstranění čtyř nejnižších harmonických. Napřímení svazku je zřetelné, přitom se jeho tvar nemění. Viditelně se začíná měnit až po odfiltrování do šesté harmonické.

Kromě horní a dolní propusti existuje také pásmová propust. Tu jsme použili ve speciálním případě, kdy byla propuštěna pouze dominantní harmonická při porovnávání ideální a reálné korelace (viz část 7.2.2, obr. 7.6).



Obr. 8.2 Napřímení průběhu vlákenného svazku po odfiltrování čtyř nejnižších harmonických

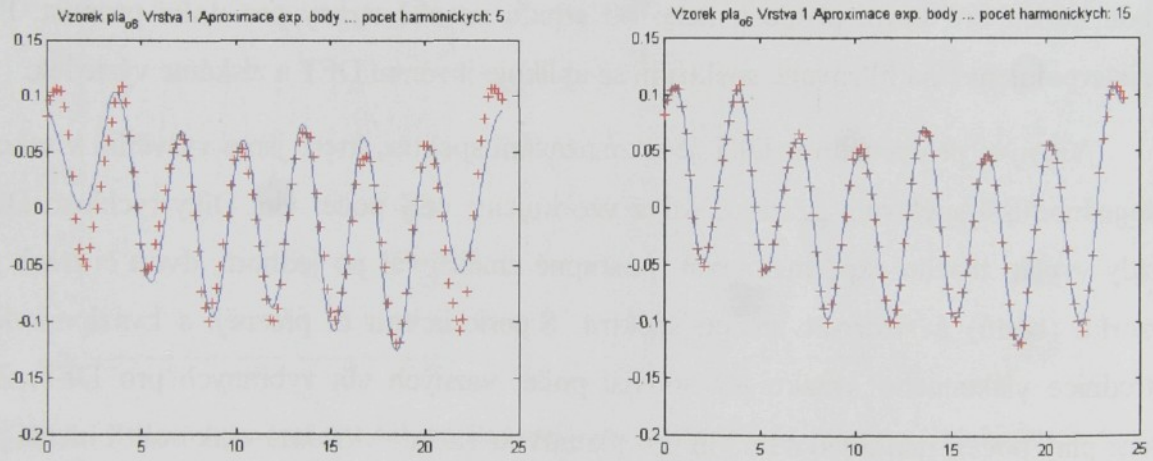
V MatLabu je použití DFT velmi jednoduché, stačí jeden příkaz. Výsledkem je spektrum ve formě vektoru. Při filtraci si je ovšem nutno uvědomit, že se nulují prvky od obou konců pro horní propust, nebo od středu na obě strany pro dolní propust. Pokud neinterpolujeme, na filtrované spektrum se aplikuje inversní DFT a získáme výsledek.

Vážným problémem u DFT je rozmazávání spektra, které jsme vysvětlili v sekci 3.9. Nejjednodušší spektrum se získá, když vzorkujeme celý počet vln. Díky rychlosti DFT se vždy vyplatí trochu experimentovat, postupně zmenšovat po jednom, dvou či třech počet vzorků (bodů) a sledovat změnu spektra. S periodicitou či přesněji s kvaziperiodicitou střednice vlákenného svazku též souvisí počet vazných vln vybraných pro DFT. Zvolili jsme plný počet, například osm vln pro plátnovou vazbu. Můžeme však volit i menší počet, vhodné jsou zejména čtyři, dvě nebo jedna vazná vlna. Spektrum bude obsahovat méně čar, získáme však více volnosti při popisu. Pokud například zpracujeme jednu vaznou vlnu, pak pomocí inverzní DFT získáme z jejího spektra periodický průběh s periodou rovnou jedné vazné vlně. Spekter však bude osmkrát více, což má praktický význam zejména při zjišťování statistik spekter, viz dále.

Z hlediska aplikací má DFT význam v tom, že umožňuje určit též parametry struktury a to s jasně definovaným významem. Nejdůležitější aplikací je ve spolupráci se statistikou stanovení parametrů průměrné jednotkové buňky struktury, a to nejen jejich rozměrů, ale i průměrného tvaru vlákenného svazku v ní.

8.1.2 Aproximace podélné osy vlákenných svazků

Úkolem aproximace osy či střednice vlákenného svazku je analyticky popsat její průběh tak, aby se co nejblíže přimykal experimentálním bodům. Přitom jsme k popisu použili co nejméně parametrů. V tomto směru se jako jednou z nejvhodnějších metod jeví metoda DFT. Její první předností je to, že je znám geometrický význam a tvar aproximujících elementů. S trochou praxe lze odhadnout i jejich vliv na aproximaci. Další předností je pružnost. Seřazením harmonických podle amplitudy lze volit různý stupeň aproximace. V části 6.2.2 jsme ukázali, že k dobré aproximaci stačí pět až patnáct harmonických, tedy maximálně čtvrtina všech harmonických. Někdy se mluví o aproximaci trigonometrickým polynomem. Příklad aproximace nejnižším (5) a nejvyšším (15) počtem harmonických je na obr. 8.3. Experimentální body jsou označeny křížky. Při patnácti harmonických je shoda výborná, při pěti je uspokojivá uprostřed, ale na okrajích jsou výrazné odchylky.



a) b)

Obr. 8.3 Vliv počtu nejvýznamnějších harmonických na kvalitu aproximace
a) 5 harmonických, b) 15 harmonických

Výběr nejvýznamnějších harmonických je poměrně složité filtrování, můžeme je přirovnat k váhovému filtru v teorii signálů. Nejhorší shoda je vždy na okrajích signálů. Je to proto, že zde navazuje další shodná perioda. Z toho plyne, že shoda na okrajích se dá zlepšit, pokud se vzorkuje přesně celistvý počet period. Tím také dostaneme jednoduší spektrum a tedy méně dominantních harmonických, jak jsme již zmínili v předchozí části. Jak velké je toto zlepšení jsme však zatím nezkoumali.

Zatím jsme současně aproximovali všechny vazné vlny v jedné vrstvě výztuže jako celek, typicky jich bylo osm v případě plátnové vazby. Logičtější by však bylo aproximovat jen jednu vaznou vlnu. V tom případě nabývají okrajové jevy na důležitosti. I pečlivým výběrem periody bude v navazujícím bodě obvykle méně či více ostrý zlom, ten se však dá vyhladit například klouzajícím průměrem [36].

Další velkou výhodou aproximace trigonometrickým polynomem je snadný výpočet aproximované funkce. Pokud ji chceme počítat pouze v experimentálních bodech, stačí ve spektru vynulovat nevýznamnou část a aplikovat inverzní DFT. Vynulování nepotřebných harmonických lze provést poměrně jednouchým algoritmem. Pokud chceme interpolovat, tj. požadujeme více bodů, použijeme funkci kosinus (část 3.4.2). Amplitudu však musíme násobit dvěma, protože stejná amplituda je uložena ve spektru symetricky vzhledem k jeho středu.

V některých případech je však vhodné volit jinou aproximaci. V části 7.2.2 jsme poměrně dobře, alespoň pro plátnovou vazbu (viz obr. 7.7), aproximovali vlákenný svazek jedinou sinusovkou, jejíž parametry jsme ovšem získávali metodou nelineární optimalizace. Na rozdíl od DFT tato metoda však nemusí vést k cíli ve všech případech. Její použití je rozhodně komplikovanější. Kromě poměrně jednoduché aproximace jejím výstupem může být poměrně přesné určení průměrné délky vazné vlny.

Populární polynomická aproximace je nejméně vhodná, protože se jedná o periodický průběh. Mezi její dvě základní nevýhody patří jednak to, že se její parametry, koeficienty polynomu, nedají názorně interpretovat a dále je to nedefinovaný průběh křivky mimo aproximovanou oblast zvláště u polynomů vyšších stupňů. Pokud se v MatLabu objeví hlášení, že matice je blízká singulární, je to důvod snížit řád polynomu. Tuto aproximaci jsme však použili v mnoha jiných případech, například u vyhlazování histogramů (část 7.3.1), kde jsme polynomem aproximovali histogramy střednic svazků.

Kvalitní aproximace vyžaduje zejména kvalitní informace o struktuře. Tento požadavek je v současné době splněn. Protože trigonometrický polynom či aplikace nelineární optimalizace dávají kvalitní aproximaci, dosahuje se dostatečně přesného analytického popisu vlákenných svazků v podélném směru. V práci jsme tento analytický popis použili na ověření distribuce úhlu sklonu a na tvorbu trojrozměrných modelů.

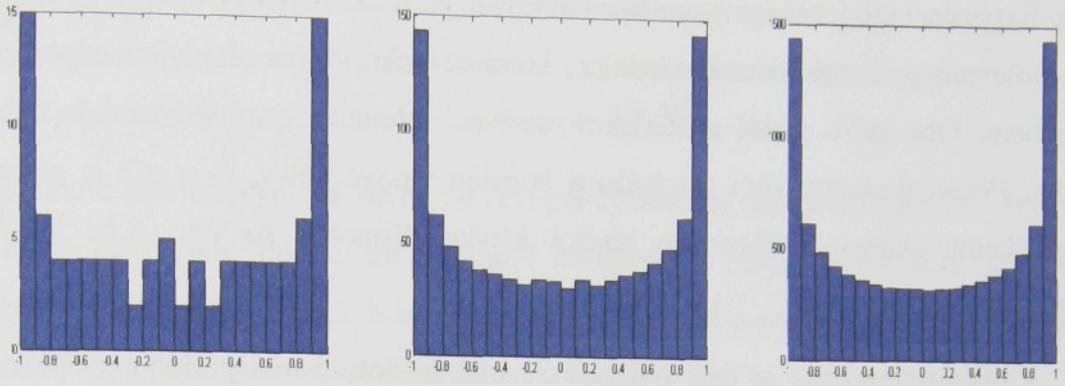
Je nutno též přesně rozlišovat aproximaci, interpolaci a extrapolaci. Aproximační funkce je definována jen v experimentálních bodech a její hodnoty se mají minimálně od nich lišit. Interpolace je určení hodnot v dalších bodech, které však leží mezi experimentálními body. Protože je aproximační křivka popsána analyticky, nečiní interpolace žádné potíže. Stejně dobře lze však použít k interpolaci jiných metod. V každém případě je však nutno si uvědomit, že interpolace nepřináší novou informaci, není žádný důvod se domnívat, že interpolovaná hodnota se bude shodovat s experimentální. Interpolace však často umožní lepší matematické zpracování, a proto jsme ji používali. Extrapolace se všeobecně nedoporučuje. V našem případě ani nemá velký význam, protože struktura je kvaziperiodická. Nejlepší extrapolací je tedy opakování průběhu, což přesně dělá trigonometrický polynom.

8.1.3 Histogramy úhlu sklonu

Histogram úhlů sklonu střednice vlákenného svazku patří k nejčastěji používaných charakteristikám. Jeho přínos pro materiálové poznání v oblasti struktury materiálu je diskutován dále v této kapitole, zde se omezíme na porovnání s teorií. Porovnáme především ideální histogram pro čistě harmonický (sinusový) průběh a reálný histogram. Hustotou pravděpodobnosti a distribuční funkcí sinusového průběhu jsme se teoreticky zabývali v části 4.2.2. Zde jsme ukázali, že hustota pravděpodobnosti je nejvyšší (teoreticky nekonečná) pro krajní hodnoty.

Obvykle se distribuce úhlu sklonu prezentuje histogramy. Pomocí simulací jsme zjistili, že tvar histogramu je velmi citlivý na tvar spektra vstupní funkce. Stačilo přidat několik procent druhé harmonické a centrální minimum (viz obr. 8.4c) se změnilo v lokální maximum. Bohužel z tvaru histogramu nelze usuzovat na přítomnost harmonických.

Při použití této lákavé možnosti je však nutná opatrnost zvláště v případě malého počtu hodnot, jak ukazuje následující příklad. Na obr. 8.4 jsou histogramy sinusové funkce o dvaceti sloupcích pro různé počty hodnot, a to po řadě 100, 1000 a 10000. Tyto teoretické histogramy lze velmi snadno připravit v systému MatLab, pro první z nich je zapotřebí napsat čtyři jednoduché příkazy, u ostatních pak stačí měnit pouze počet hodnot.

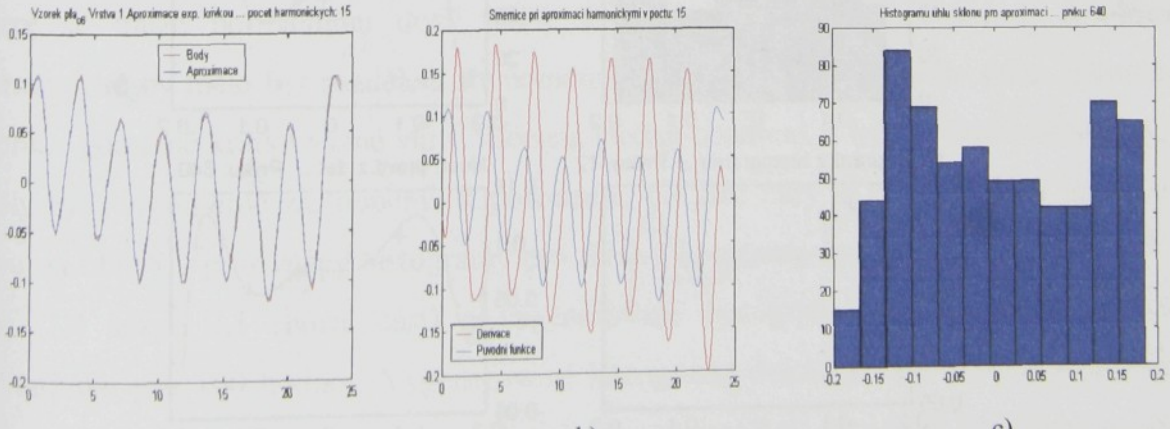


a) b) c)

Obr. 8.4 Histogramy sinusové funkce, a) 100 hodnot, b) 1000 hodnot, c) 10000 hodnot

Z obr. 8.4 je zřejmé, že pouze histogram s obrovským počtem hodnot, 10000, odpovídá teoretickému rozdělení (obr. 4.8c). V tomto případě je nejvyšší relativní chyba (chyba pro nejnižší sloupec) 0,3 %. Pro 1000 hodnot se tato chyba zvýší na 3% a ve střední části (obr. 8.4b) jsou již zřetelné odchylky od teoretického průběhu. Pro 100 hodnot je maximální relativní chyba kolem 30% a histogram na obr. 8.4a jen vzdáleně připomíná oscilátorické rozdělení. Při malém počtu hodnot je tedy nutná co nejvyšší opatrnost při interpretaci průběhu histogramu. Lze tvrdit, že v případě, kdy se vyskytují tři extrémy, jde o chybu způsobenou malých počtem hodnot, ale i dva extrémy by se měly ověřit. Malá lokální maxima ve středu histogramu na obr. 8.4b tak vůbec nesouvisí s přítomností harmonických.

Analytická aproximace střednice vlákna teoreticky umožní zjistit úhel sklonu pomocí derivace. Tuto lákavou metodu jsme odzkoušeli, tradičně pro kompozit s plátnovou vazbou slabě lisovanou a výsledky demonstruje obr. 8.5.



a) b) c)

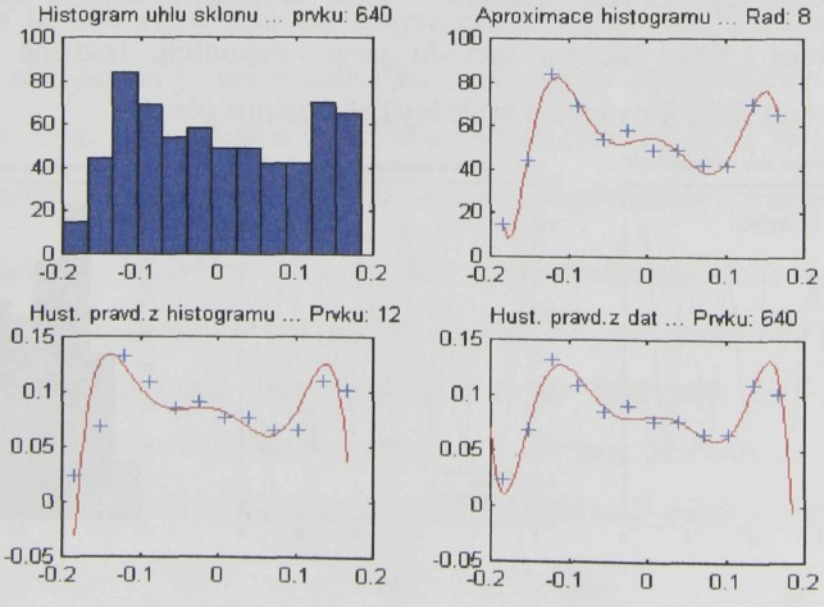
Obr. 8.5 Postup při zjišťování úhlu sklonu: a) aproximace, b) derivace, c) histogram

Experimentální křivku jsme aproximovali patnácti harmonickými. Na obr. 8.5a je aproximovaná a interpolovaná střednice, která se velmi dobře shoduje s experimentálním průběhem. Obr. 8.5b uvádí analytickou derivaci střednice, pro srovnání je též výchozí křivka. Posun derivace vůči originálu o čtvrtinu vlnové délky, či o $\pi/2$ je zřejmý. Díky analytickému popisu je derivace hladká křivka. Konečně na obr. 8.5c je histogram odvozený z derivace.

Z histogramu jsme se dále pokusili odvodit hustotu pravděpodobnosti úhlu sklonu a to třemi způsoby:

- přímo polynomickou regresí histogramu,
- odvozením analytické distribuční funkce z histogramu a její analytickou derivací,
- vytvořením distribuční funkce z dat, její aproximací a následnou analytickou derivací.

Výsledky všech tří metod spolu s výchozím histogramem jsou na obr. 8.6. Všechny tři průběhy hustoty pravděpodobnosti si přibližně odpovídají, ačkoliv podle výpočetního postupu by histogram měl být aproximován nejhruběji a hustota pravděpodobnosti odvozená z distribuční funkce připravené z dat nejpřesnější. To potvrzuje tvrzení uvedené na konci předchozí části o aproximaci, že sebelepší aproximací se žádné nové informace do dat nedodají. Pouze se mohou redukovat rušivé jevy. Ty, zdá se, nejsou výrazné, jinak by se v důsledku integrace shoda postupně zlepšovala.



Obr. 8.6 Odvození hustoty pravděpodobnosti úhlu sklonu

Dále je na obr. 8.6 zřetelně vidět nebezpečný vliv extrapolace, čistě náhodou hustota pravděpodobnosti nepřípustně narůstá vlevo od aproximovaného intervalu, právě u křivky odvozené přímo z dat, která by tak měla být nejpřesnější.

Z tohoto pokusu vyplývá závěr, že nejlepší způsob prezentace distribuce úhlu sklonu je skutečně histogram. Pokud má centrální minimum a okrajová maxima, je střednice velmi blízká harmonické funkci. Naopak, výrazné centrální maximum je důsledkem mnoha harmonických, a tedy vypovídá podstatného zkreslení.

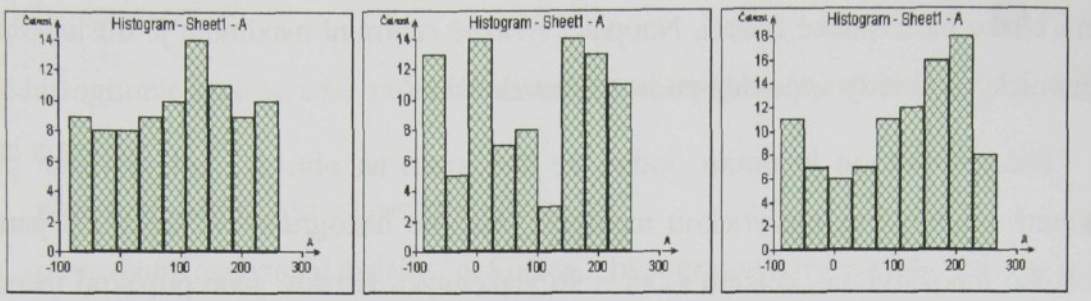
Na vysvětlenou je nutno dodat, že histogram na obr. 8.7 byl vytvořen pro jeden vlákenný svazek a to analytickou metodou, zatímco histogramy v části 6.2.3 jsme získali z velkého množství dat, celkem 12x8 = 96 vlákenných svazků, nebo poněkud méně, ovšem geometrickou metodou. Proto nelze z těchto výsledků navzájem porovnat geometrickou a analytickou metodu.

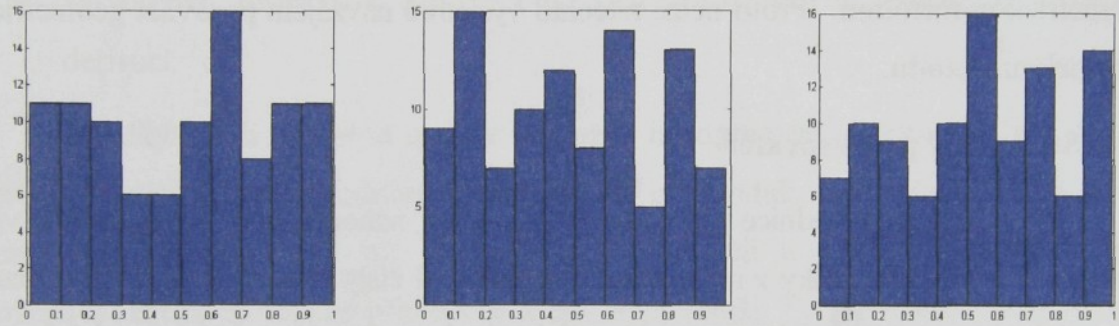
8.1.4 Statistický popis spekter

Protože tvar střednice vazné vlny je zatížen nahodilou složkou, budou všechny parametry a charakteristiky z ní odvozené náhodnými čísly vyhovující určitému rozdělení. Teoreticky jsme se statistickým popisem zabývali v kap. 4, v částech 4.1.2 a 4.1.3, typické výsledky jsme uvedli v sekci 7.1. Zde se proto omezíme na jejich zhodnocení.

Již jsme zdůraznili, že spektrálních čar je na statistické zpracování málo, necelá stovka, proto závěry jsou jen orientační. K určení statistického rozdělení existují profesionální programy, které jsme také použili. U jejich výstupů překvapilo, že jen velmi málo rozdělení amplitud je normální, na druhé straně často vyšlo Weibullovo rozdělení, které se může normálnímu dosti blížit. U fázové konstanty, alespoň u dominantní harmonické by mělo být rozdělení rovnoměrné, protože vlastně popisuje skluz vrstev jako zlomek poměrné krátké vazné vlny. Všechna možná posunutí, a tedy i fázové konstanty, by měly být rovnoměrně zastoupeny. K posouzení, do jaké míry je tato hypotéza oprávněná, jsou na obr. 8.7 porovnány histogramy pro fázové konstanty spekter převzaté z obr. 7.3 a obr. 7.4 sekce 7.1 (horní část) a vygenerované histogramy rovnoměrného rozdělení v MatLabu pro 100 hodnot. Vygenerované histogramy dokonce mají větší fluktuace, což jen dokazuje, jak málo je dat ke statistickému zpracování. V prvním přiblížení se může tedy považovat rozdělení fázových konstant za rovnoměrné.

Rozpor mezi předpokládanými a zjištěnými rozděleními má několik příčin. Především je to malý počet hodnot, což dokumentuje i obr. 8.7. Dále je to poměrně složité spektrum způsobené tím, že nebyl vzorkován celistvý počet vazných vln. Svou roli hraje i to, že harmonické jsou porovnávány v normálním pořadí, nikoliv v pořadí jejich důležitosti.





Obr. 8.7. Porovnání histogramů pro fáze s histogramy hodnot získaných z generátoru náhodných čísel s rovnoměrným rozdělením

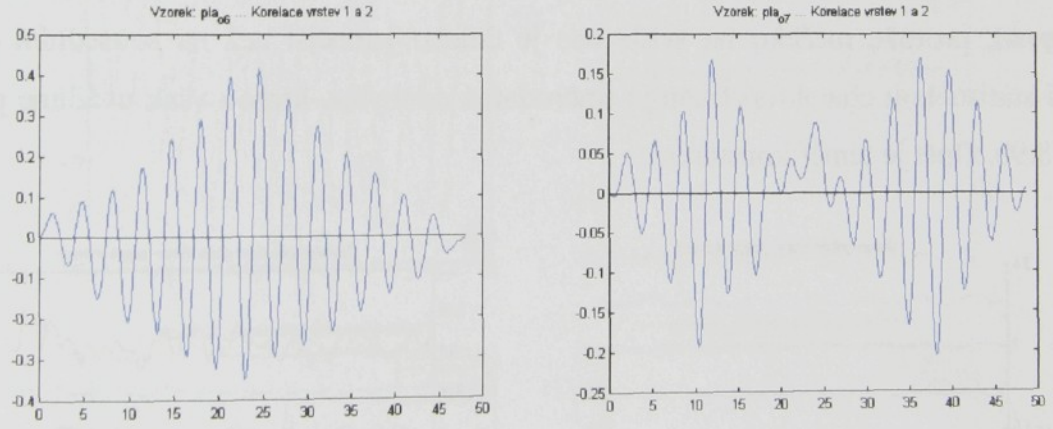
Například u amplitud první harmonické je rozptyl hodnot skutečně velký, mění se od téměř nulové hodnoty až do poloviny celkové amplitudy (viz obr. 8.1). U fázové konstanty obdobně platí předpoklad o rovnoměrném rozdělení přesně jen pro dominantní harmonickou. U ostatních se mohou uplatnit složité fázové vztahy nezbytné k zajištění optimální aproximace.

Přesnější informace o statistickém rozdělení získáme jedině zvětšením počtu údajů, což znamená zjistit spektrum pro jednu, maximálně dvě vazné vlny. V tom je též hlavní praktická aplikace statistiky spekter. Pokud známe spolehlivě statistické rozdělení, můžeme pomocí generátoru náhodných čísel připravit spektrální čáry, které odpovídají průběhu střednice, který se skutečně může vyskytnout. Odvozením křivky z tohoto spektra pak získáme střednice, které se skutečně může vyskytnout. Mluvíme o virtuální střednici. Z ní lze snadno vytvořit virtuální vlákenný svazek a za určitých předpokladů i virtuální kompozit. Více je o tom v následující kapitole.

8.1.5 Korelace

Teoreticky popisujeme korelaci v části 4.3.2.1 (teoretická definice), 4.3.2.3 (empirická definice), 4.3.2.4 (praktický vztah), 4.3.3 (frekvenční oblast), jednoduché teoretické průběhy jsou v sekci 4.4, v sekci 7.2 pak uvádíme způsob výpočtu a některé typické výsledky. Diskuse k těmto výsledkům je poměrně krátká. Z prezentovaných typických i řady dalších výsledků vyplývá, že korelace není metoda vhodná k detailnímu porovnání vzájemného vztahu střednic. Zejména u plátnové vazby se její průběh blíží teoretickému, jak jsme ukázali na obrázcích v sekci 7.2 (např. obr. 7.7, obr. 7.8b). Přitom se průběhy střednic dosti liší od harmonického. Lze to vysvětlit tím, že v korelaci se vyskytuje integrace, která náhodné odchylky vyhlazuje.

Nicméně korelace dává významnou informaci o vzájemné periodicitě. Pokud se délky vazných vln dvou porovnávaných svazků liší o více než 10%, centrální maximum korelační obálky (obr. 8.8a) se rozpadne na dvě okrajová (obr. 8.8b). Korelace je tedy velmi citlivá na shodu vazných vln, naproti tomu, při stejné délce vazných vln v obou porovnávaných svazcích je málo citlivá na jejich vzájemné odchylky i odchylky od harmonického průběhu.



a) b)

Obr. 8.8 Korelace vlákenných svazků o stejné (a) a různé (b) vlnové délce

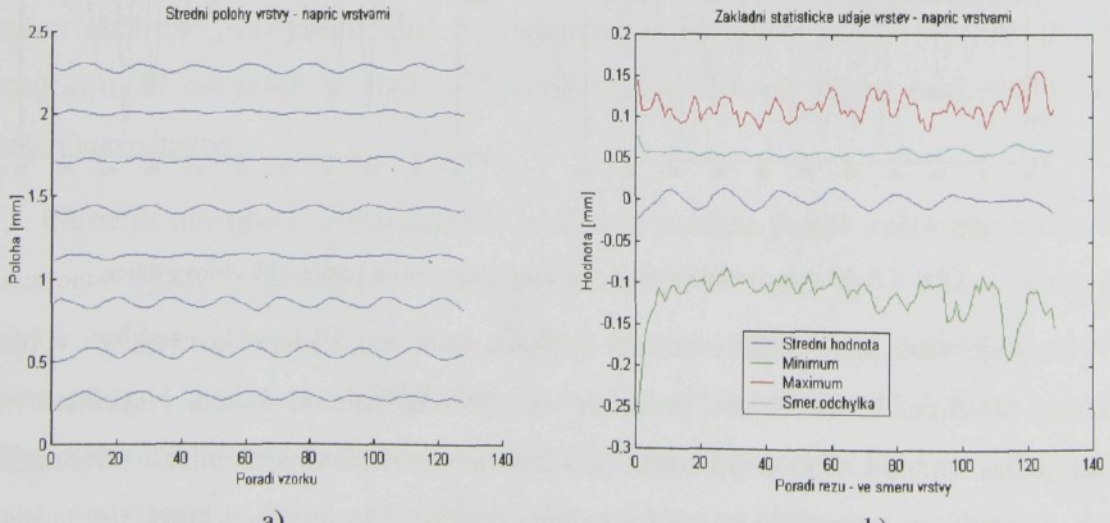
Existuje však ještě jiná významná aplikace korelace, či lépe konvoluce: vyhledávání úseků na střednicích, které jsou podobné vybranému malému úseku. Například můžeme vybrat jednu vaznou vlnu a porovnat ji s jinými vaznými vlnami v téže střednici nebo i jiných. Výsledkem porovnání je řada lokálních maxim, čím je shoda lepší, tím je maximum vyšší. Poloha maxima pak určuje střed shodného úseku. Exaktní a efektivní aplikace porovnávání však již spadá do rychle se rozvíjející oblasti rozpoznávání.

8.1.6 Náhodné procesy

Na rozdíl od předchozích částí, kde jsme se převážně zabývali praktickým využitím výsledků, či alespoň jejich vysvětlením, má tato část vyloženě teoretický charakter. Vycházíme z teoretické kap. 4 a to její sekce 4.3 pojednávající o náhodných procesech a z výsledků výpočtů uvedených v sekci 7.3. U výpočtů jsme mnohé závěry již konstatovali, takže nyní je můžeme shrnout a diskutovat.

Především jsme sledovali homogenitu náhodného procesu. Proces je slabě homogenní, jestliže střední hodnota a další statistické parametry jsou nezávislé na čase. Na slabou homogenitu tedy můžeme soudit na základě průběhu závislosti střední hodnoty souřadnic střednice vlákenných svazků měřené napříč vrstvami na pořadí řezu. Ty jsou na obr. 7.17b a obr. 7.19a. Tyto obrázky jsou překopírovány do této části pod číslem obr. 8.9.

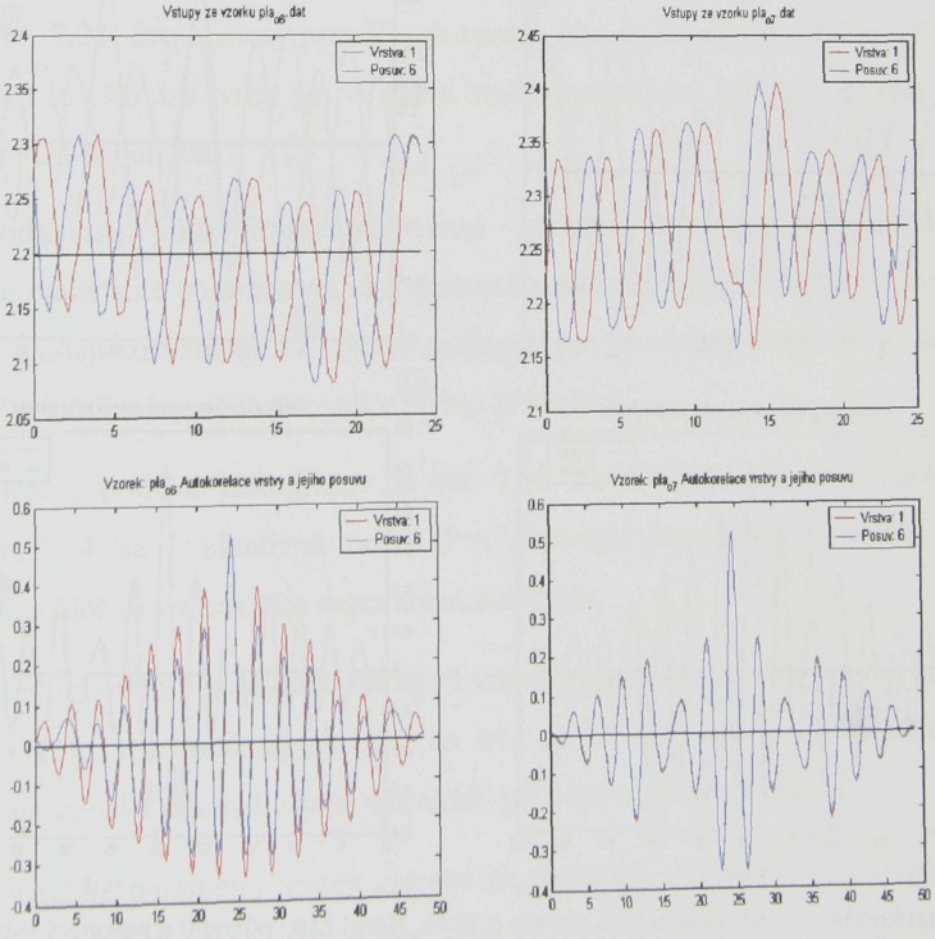
Na obr. 8.9a jsou uvedeny střední hodnoty pro skutečné polohy vláken v osmi na sebe položených vrstvách výztuže v kompozitu, tedy celkem osm závislostí, a na obr. 8.9b pro případ, že byla od reálných střednic všech vláken odečtena vypočtená střední hodnota. Na obr. 8.9a je vidět, že je skutečná střední hodnota je přibližně konstantní. Střední hodnota na obr. 8.9b by měla být nulová a tato podmínka je splněna s poměrně vysokou přesností, protože měřítko na svislé ose je daleko jemnější než na sousedním obrázku. Další statistickou charakteristikou je směrodatná odchylka, kterou však uvádíme pouze na obr. 8.9b. Opět je téměř konstantní.



a) b)

Obr. 8.9 Střední hodnota a další statistické parametry v závislosti na pořadí řezu pro různé řezy napříč vrstvami

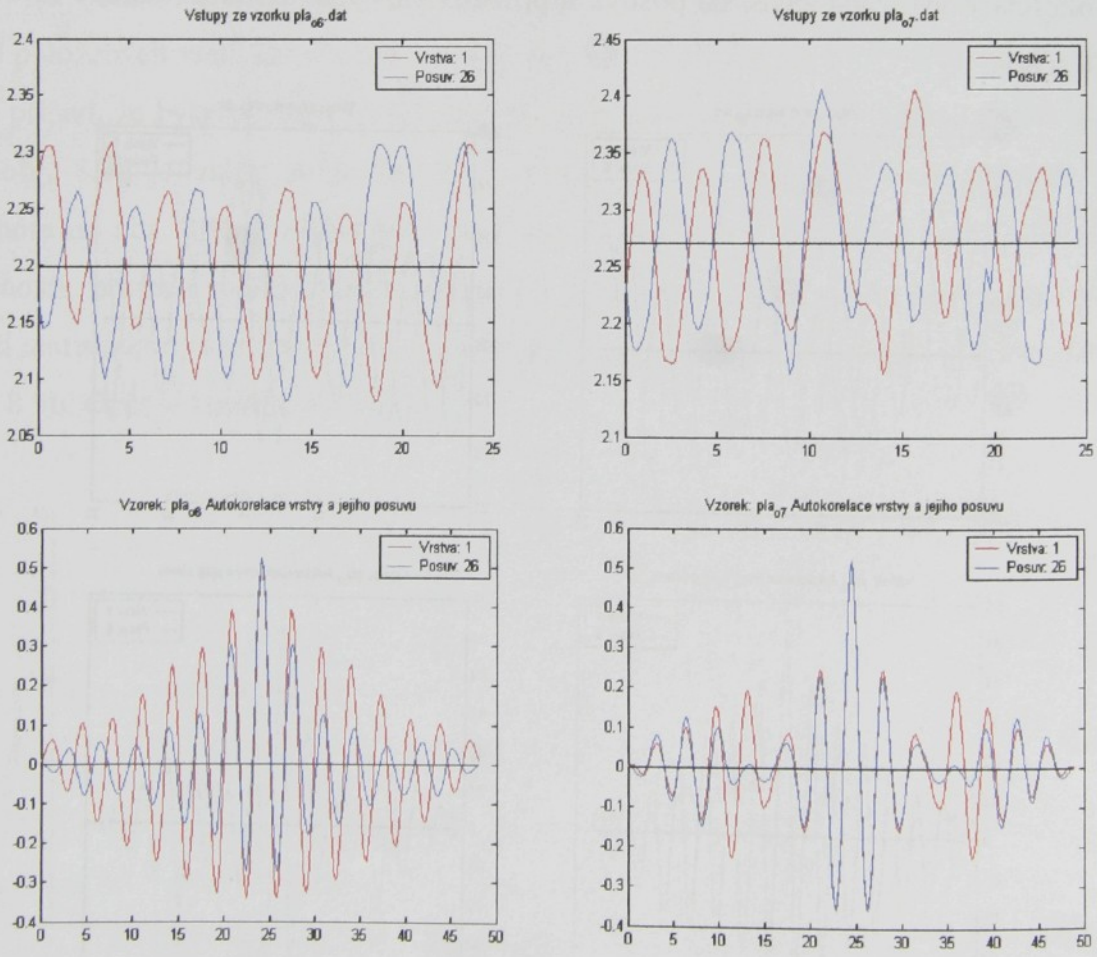
Na základě těchto dvou výsledků lze předpokládat, že budou konstantní i všechny další statistické momenty, např. střední hodnota čtverce souřadnice je součtem čtverců střední hodnoty a směrodatné odchylky. Protože obě jsou konstantní, je i obecný moment druhého řádu konstantní. Zhruba konstantní průběh vykazují na obr. 8.9b i takové silně proměnné veličiny jako maximum a minimum. Lze tedy konstatovat, že s přihlédnutím k nedostatku dat je první podmínka pro to, aby proces byl slabě homogenní splněna. Druhá podmínka vyžaduje, aby autokorelační funkce nezávisela na volbě počátku odečítání souřadnic. Protože jsme byli limitováni počtem vzorků, 128 experimentálních bodů na jednu vrstvu, byl posuv řešen tak, že odebrané vzorky z počátku byly řazeny na konec. Typické výsledky jsou na obr. 8.10 a obr. 8.11. Na obr. 8.10 jsme zvolili posuv vstupní funkce o šest vzorků, což je asi 5% celkového počtu vzorků. Na průběhu souřadnic v horní části obrázku je posuv dobře viditelný. Z porovnání autokorelací na dolní části je zřejmé, že autokorelace výrazněji závisí na posuvu u průběhů blízkých harmonickému, v levé části je horší shoda.



Obr. 8.10 Autokorelace vrstev posunutých zhruba o 5 %. Horní část: průvodní a posunutý vstup, dolní část: porovnání autokorelací

Naopak pro signál silně odlišný od harmonického, pravá část, autokorelace na posuvu, tedy volbě počátku osy souřadnic nezávisí, shoda je téměř dokonalá. Totéž porovnání, ale pro větší posuv, 26 vzorků, což činí asi 20% celkového počtu vzorků, je na obr. 8.11. Na grafu souřadnic, v levé polovině obrázku, přibližně u polohy 20 mm na vodorovné ose, ihned zaujme násilná návaznost, která by se u reálného vzorku neměla objevit. V pravé části je tato umělá návaznost méně zřetelná, což je však náhoda. Vliv zvýšeného posuvu se projeví celkově větší odchylkou mezi oběma autokorelacemi. U průběhu blízkému harmonickému, levá část obr. 8.11, je zřetelná odchylka v celé části autokorelace s výjimkou středu. Naproti tomu pro průběh odlišný od harmonického, pravá část obr. 8.11, je dobrá shoda v centrální a krajních částech.

Ověření druhé podmínky slabé homogenity sytému je opět limitováno malým počtem vzorků pro autokorelaci. Teoretický počet je nekonečný.



Obr. 8.11 Autokorelace vrstev posunutých zhruba o 20 %. Horní část: původní a posunutý vstup, dolní část: porovnání autokorelací

Malý počet vzorků se projeví v tom, že nezávislost autokorelace na změně počátku souřadné soustavy platí jen pro malý posun počátku. Čím více by bylo vzorků (bodů), tím větší posuv by bylo možné připustit. Dále kvalitativně platí, čím větší nahodilost v datech, tím menší závislost autokorelace na posuvu počátku odečítání souřadnic. Z předchozího výkladu plyne, že obě podmínky slabé homogenity by byly splněny tím lépe, čím větší počet dat by byl k dispozici. Kvalitativně jsme ukázali, že čím více se průběh liší od pravidelného (harmonického), tedy čím větší je nahodilost, tím lépe se předpokládané závěry potvrzují. V prvním přiblížení bychom tedy systém mohli pokládat ze slabě homogenní. To má zásadní praktický důsledek: statistické parametry získané z vrstev napříč vlákennými svazky nezávisí na souřadnici bodů vrstvy. Pro všechny řezy bychom měli dostat tytéž hodnoty a charakteristiky. Stačí je tedy určit pro jediný řez.

Aby byl proces silně homogenní, jeho statistické charakteristiky by neměly záviset na volbě počátku odečítání souřadnic. Různě vyhlazená distribuční funkce uvedená na obr. 7.22b až obr. 7.24b tento požadavek přibližně splňuje. Částečně jej splňují i řezy touto funkcí na obr. 7.21. Pro hustoty pravděpodobnosti, obr. 7.22a až obr. 7.24a, případně řezy na obr. 7.20, to však lze tvrdit jen ve velmi hrubém přiblížení. Příčinou je opět velmi malý počet experimentálních dat.

Ergodičnost, jako druhá ověřovaná základní vlastnost náhodných procesů, znamená, že statistické parametry a charakteristiky získané z jedné realizace (podél vrstvy) se shodují s údaji získanými ze všech realizací pro zvolenou souřadnici, tedy napříč vrstvami. V sekci 7.3 jsme ji ověřovali v těchto případech:

- Příčné a podélné histogramy na obr. 7.12 a obr. 7.13, případně jejich detaily na obr. 7.14 se kvalitativně neliší. Pro přesnější posouzení by však bylo nutné minimálně desetkrát více experimentálních dat.
- Střední hodnoty souřadnic reálných vrstev získané oběma metodami (podél vrstev a napříč vrstvami) a uvedené na obr. 7.17 se v rámci chyb měření shodují. Systematické odchylky jsme vysvětlili při popisu tohoto obrázku.
- Statistické parametry vrstev získané ze souřadnic po odečtení střední hodnoty se dobře shodují, jak lze vidět z obr. 7.19.

Z těchto výsledků lze usuzovat, že proces je ergodický. Protože je i homogenní, je silně ergodický. To znamená, že statistické parametry zjištěné z jediné realizace, podél jednoho svazku, se shodují s parametry získanými ze všech realizací, tedy z řezů napříč vrstvami. V učebnicích [68] se zdůrazňuje, že přesné ověření toho, že proces je homogenní a ergodický není možné, protože pro ověření homogenity by bylo nutné mít jednu nekonečně dlouhou realizaci a pro ergodičnost nekonečně mnoho nekonečně dlouhých realizací. Jinde se naopak tvrdí [88], že potvrzení homogenity a ergodicity je nutno hledat ve fyzikálních vlastnostech systému. To jsme učinili v teoretické části (viz část 4.3.2.2). Zde, v diskusi, a v experimentální části (viz část 7.3.2), jsme se jen pokusili upozornit na metody, kterými by bylo možno posoudit na základě dostupných dat, do jaké míry jsou splněny předpoklady homogennosti a ergodičnosti, a zejména, co lze od těchto metod očekávat v případě malého počtu dat.

Diskutabilní je také otázka, co lze považovat za náhodný proces. Například v učebnici [68] se pro jednoduchost uvažují pouze ideální náhodné procesy, tedy procesy bez stejnosměrné složky a stejně tak i periodické složky. Tedy vlákenné svazky kompozitů mezi ně díky tomu, že mají obě vlastnosti, nepatří. Druhá naše učebnice [88] to však připouští, ale podrobněji se tím nezabývá. Poznamenejme, že není ani úplná jednota v definici statistických termínů v národní literatuře [68, 88].

Otázka stupně nahodilosti v případě vlákenných svazku, které jsou kvaziperiodické, je zásadní. Je zřejmé, že nezávislost statistických hodnot na poloze řezu je důsledkem toho, že periodická složka má skutečně nahodilou fázovou konstantu. Názorně to znamená, že jednotlivé vrstvy jsou vůči sobě nahodile posunuty. Kdybychom tuto nahodilost vyloučili vhodným posuvem vrstev, stejně tak jako byla odečtena střední hodnota, statistické parametry řezů by byly zhruba periodické a homogenita by se nepotvrdila. Homogenita je tedy důsledkem nahodilosti fázové konstanty, kterou jsme prokázali u dominantní harmonické. Na druhé straně skutečně náhodnými jevy jsou jen poruchy superponující se na čistě periodickou složku. Zajímavé by bylo odečíst tuto periodickou složku a statisticky sledovat nahodilý zbytek. Otázka, co vlastně odečíst, není jednoduchá ani jednoznačná. Může to být aproximace průběhu jedné harmonické získané nelineární optimalizací (viz sekce 7.2), nebo i dominantní harmonická či superpozice nejvýznamnější harmonických. Nejvhodnější přístup se dá zjistit jen pomocí metody pokusů a omylů.

Ergodičnost a homogenita se u reálných náhodných procesů předpokládá, a proto se její ověření neprovádí. V praxi se ukazuje, že daleko obtížnější je najít proces, který by některou z těchto podmínek nesplňoval Z toho důvodu je nutno tuto část chápat zejména jako pokus o zjištění, do jaké míry jsou teoretické předpoklady splněny u procesu, který není zcela náhodný a přitom poskytuje málo dat.

8.2 Příspěvek k poznání struktury

Fotografie řezů, odečtené souřadnice střednice, aproximace průběhu střednice, distribuce úhlu sklonu, amplitudové a fázové spektrum či další odvozené parametry nebo charakteristiky dávají více či méně významné dílčí informace o struktuře vlákenných svazků, ale i tkaninového kompozitu jako celku. V této sekci ukážeme, jak jich lze využít ke kvalitativnímu či kvantitativnímu popisu struktury vlákenných svazků, kompozitu, sledování vlivu technologického procesu, použitých materiálů, textilních vazeb apod. Budeme postupovat v pořadí od nejjednodušší formy informace ke stále složitější.

Nejdříve se však zmíníme o hlavních strukturních jevech a technologických efektech, které budeme sledovat a hodnotit.

Zaměříme se na etapu skládání vrstev, jejich stlačení a tepelného zpracování:

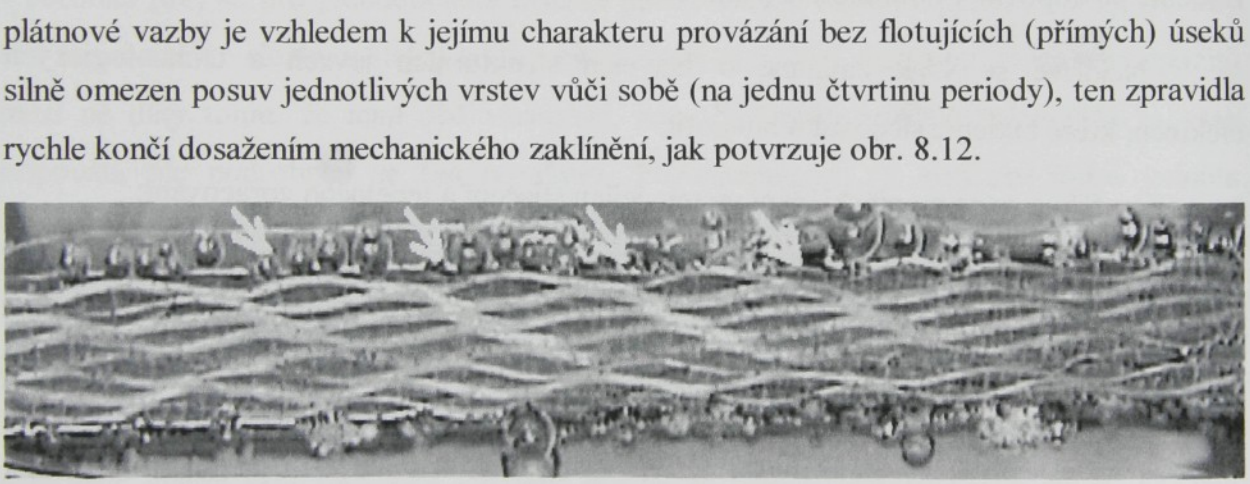
- Především při skládání vrstev se nepodaří dodržet jejich přesný zákryt. Toto náhodné posunutí vrstev se pak projeví v tom, že vlákenný svazek je dobrou realizací náhodného procesu, jak již bylo ukázáno. Prakticky ve struktuře vznikají místa shluku a těsného dotyku a místa bez přítomnosti vrstev, což se projeví zejména při nedodržení zákrytu.
- Při stlačení vrstev, lisování, pak může dojít k posuvu – skluzu vrstev jako celku a dále k deformaci jejich tvaru. Poruchy ve struktuře se ještě zvýrazní. Skluzu vrstev brání mechanické zaklínění. Spodní části jedné vrstvy se dostanou do styku s horními částmi spodní sousední vrstvy, a tím je další pohyb znesnadněn. To dobře dokumentují snímky struktury, viz dále. Zaklínění má za následek vyšší stupeň deformace. Ta se celkově projeví složitějším průběhem střednice vlákenného svazku.

- V procesu tepelného zpracování se základní struktura nemění, například k dalšímu skluzu dochází sporadicky. Dochází však k změně tvaru vlákenných svazků a vzniku dalších poruch. Mezi ně patří zejména trhliny, které mohou být uvnitř svazku – *intrafibrilární* nebo mezi svazky – *interfibrilární*. Tyto trhliny pak mohou také způsobovat delaminaci (oddělení) jednotlivých vrstev – *delaminační trhliny* [39, 43].

Pro studium struktury kompozitu je největší komplikace v tom, že řezy jsou až z hotového kompozitu a jsou v nich tedy obsaženy všechny typy poruch bez ohledu na to, ve které fázi realizace vznikly. V tomto diskusním přehledu a popisu se soustředíme především na typické jevy.

8.2.1 Informace ze snímků struktury

Již z pouhých fotografií řezů lze vyvodit řadu zajímavých závěrů. Na obr. 8.12 v horní části je zřetelně vidět zaklínění vrstev u plátnové vazby. Je dobře známo, že u plátnové vazby je vzhledem k jejímu charakteru provázání bez flotujících (přímých) úseků silně omezen posuv jednotlivých vrstev vůči sobě (na jednu čtvrtinu periody), ten zpravidla rychle končí dosažením mechanického zaklínění, jak potvrzuje obr. 8.12.



Obr. 8.12 Skluz a mechanické zaklínění a skluz vyztužujících textilních vrstev kompozitu, plátnová vazba, osnova, slabý tlak

Vliv počátečního kladení vrstev lze sledovat na obr. 8.13. Vyztužující vrstva č. 1 (počítáno shora) je prakticky v opačné fázi ($_{\Delta}\varphi \approx \pi$) oproti vrstvě č. 2, což je dobře viditelné v pravé části obrázku[1]. Velký nevyužitý prostor mezi vrchy a doly těchto dvou vrstev může být zárodkem vzniku strukturních defektů. Mezi vrstvou č. 2 a vrstvou č. 3 je fázový posuv již menší a mezi ostatními je tento fázový posuv zanedbatelný.

[1] V levé části tato vrstva prakticky zaniká.

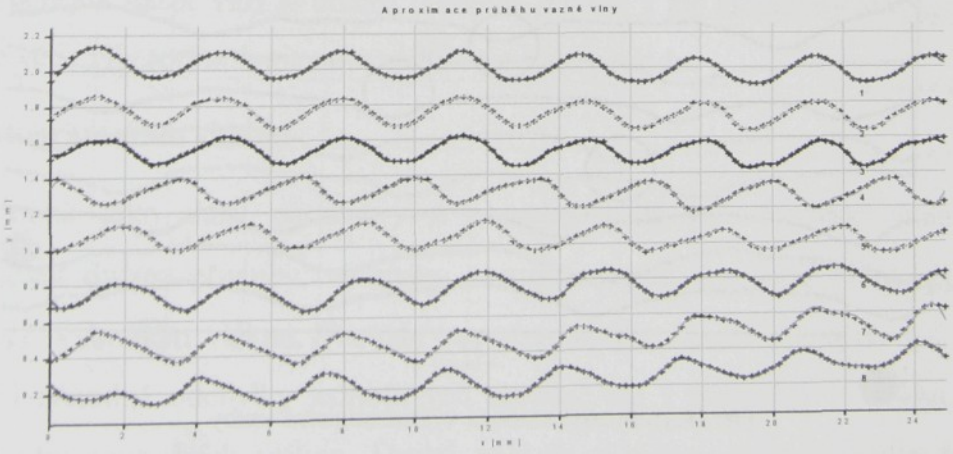
Obr. 8.13 Efekt kladení vrstev u kompozitu vyztuženého tkaninovou výztuží atlasové vazby

Zbývající vrstvy č. 3 až č. 6 jsou typickým příkladem optimálního kladení vrstev výztuže na sebe ve fázi ($\Delta\varphi \approx 0$). Optimálně kladené vrstvy na obr. 8.13 jsou mechanicky zaklíněny, čímž je pravděpodobnost vzniku póru či dutiny minimální.

8.2.2 Studium průběhu střednice

Střednice v principu umožní detailnější vizuální studium geometrie vlákenných svazků a jejích defektů zejména díky tomu, že mnoho rušících prvků jsme odstranili. Příklad průběhu střednice pro plátnovou vazbu je na obr. 8.14. Efekt zaklínění je pěkně vidět u vrstev č. 7 a č. 8. Vrstvy č. 1 až č. 3 jsou ve fázi, vrstvy č. 3 a č. 4 v opačné fázi.

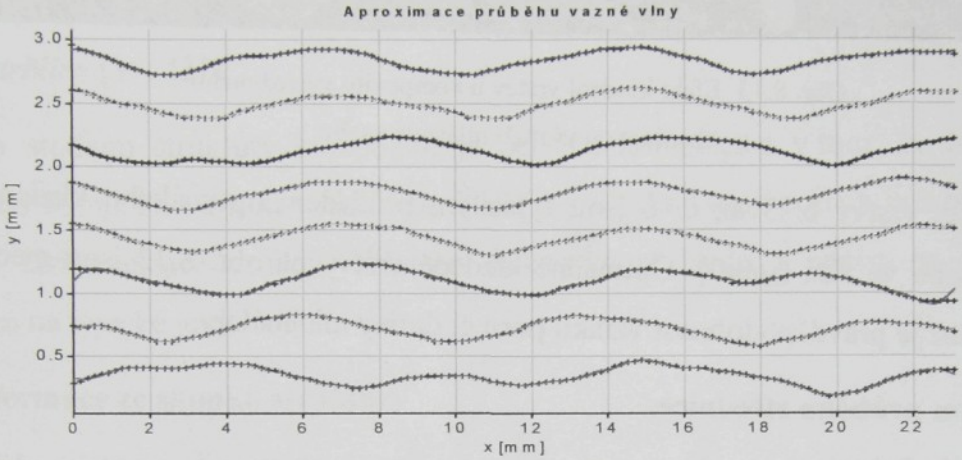
Již z tohoto stručného výpisu je vidět, že odečtením souřadnice a její kvalitní aproximací se sejmutá struktura vyhodnocuje daleko snadněji, podrobněji a efektivněji v porovnání o mikrofotografií řezu.



Obr. 8.14 Efekt zaklínění u plátnové vazby

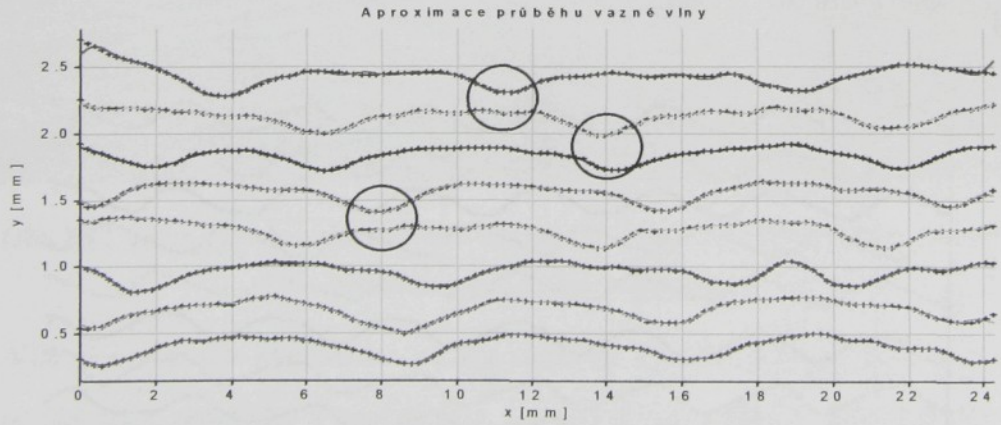
Příklady správného a nesprávného způsobu kladení vrstev na sebe ilustrují po řadě obr. 8.15 a 8.16. Jedná se o atlasovou vazbu, jejíž hlavní charakteristikou jsou dlouhé přímé (flotující) úseky. Ty jsou však v kompozitech zpravidla deformovány.

Nastane-li případ, že fázový posun vrstev je velmi malý nebo téměř zanedbatelný, jak je tomu u horní části vrstev na obr. 8.15[2], pak dochází ke vzniku slabého mechanického zaklínění, například vrstva č. 3 a č. 4 nebo č. 6 a č. 7 na obr. 8.15, počítáno shora. Deformace rovných úseků má definovaný průběh.



Obr. 8.15 Dobře kladená výztuž atlasové vazby

Případ špatného kladení vrstev je na obr. 8.16. Zde jsou ve fázi pouze kombinace 2-3 a 7-8, jinak je fázový posun velký. Výrazné mechanické zaklínění má za následek daleko výraznější deformaci vrstev, zejména teoreticky přímých úseků. Na obr. 8.16 jsou vyznačeny úseky, kde dochází k výrazné interakci sousedních vrstev vlivem nesprávného kladení vrstev výztuže, maximální posuv vrstev činí čtyři pětiny periody.



Obr. 8.16 Špatně kladená výztuž atlasové vazby

[2] Přesně vzato malý fázový posuv pouze převládá. Na obr. 8.15 jsou vrstvy č. 3 a č. 4 a spodní tři vrstvy nejméně v kvadratuře, možná ale i blízko opačné fáze.

Věrná aproximace průběhu střednice vlákenného svazku umožňuje kvantitativně určit řadu geometrických parametrů, mezi ně patří výška vazné vlny (amplituda periodického průběhu provazujícího svazku), délka vazné vlny (perioda průběhu provazujícího svazku) a v neposlední řadě i fázová konstanta, resp. rozdíl fází vzhledem k první vrstvě tkané výztuže. Tato poslední hodnota charakterizuje posunutí vrstev vůči sobě a souvisí s možností mechanického zaklínění vrstev tkaninové výztuže, jak jsme se již dříve zmínili.

vlna č.	**střední poloha vlny [mm]**	**amplituda [μm]**	**perioda [mm]**	**fázová konstanta [deg]**	**rozdíl fází [deg]**
1	1,9	47	2,9	-62	0
2	1,7	76	3,4	7	69
3	1,5	71	3,4	2	64
4	1,2	72	3,4	118	180
5	1,0	44	3,0	-47	15
6	0,8	68	3,4	58	119
7	0,5	70	3,4	37	99
8	0,3	46	3,0	-136	74
Průměrná amplituda vazné vlny h=62.10^{-6}m, variační koeficient CV= 22%					
Průměrná perioda vazné vlny l=3,2.10^{-3}m, variační koeficient CV= 7%					

Tab. 8.1 Základní geometrické parametry plátnové vazby v kompozitu

V tab. 8.1 jsou základní statistické údaje, střední hodnota a variační koeficient. Je vidět, že perioda vazné vlny je určena poměrně přesně, u její amplitudy je rozptyl vyšší. To potvrzuje větší vliv technologie na amplitudu než na periodu.

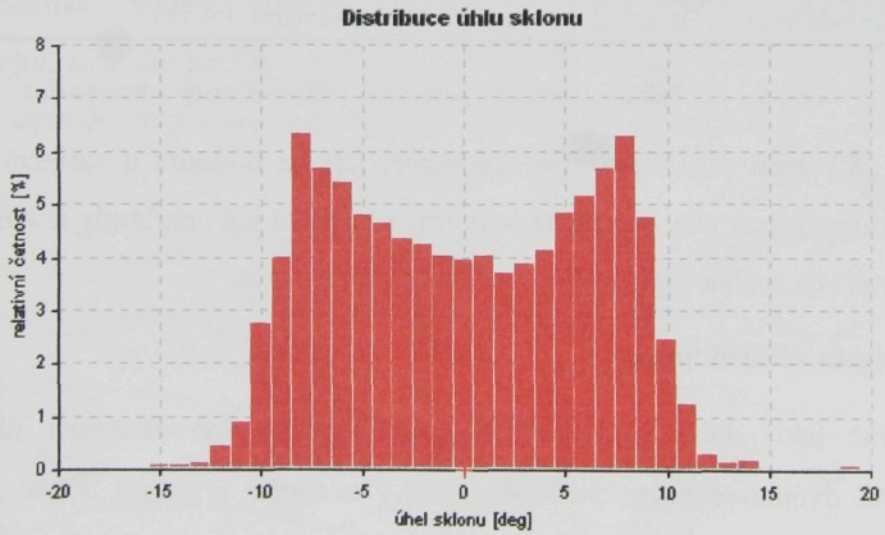
8.2.3 Histogram úhlu sklonu

Podobně jako další parametry a charakteristiky lze distribuci úhlu sklonu ψ vyhodnocovat dvěma přístupy, ve směru vrstvy a napříč vrstvami. První způsob přináší informace o vybraném vláknu. Protože se vyhodnocuje několik vazných vln, jsou v něm obsaženy i náhodné odchylky jednotlivých vazným vln v rámci téhož vlákna. Rovněž je zahrnut i vliv sousedních vláken. Druhý způsob vyžaduje nejprve synchronizaci všech vláken na nulovou fázovou konstantu. Jinak bychom dostali průběh blízký náhodnému, který jsme podrobně popisovali v části 7.2.3. Pokud by byly vlákenné svazky identické, dostali bychom pro každý řez histogram o jednom sloupci, v limitě velkého počtu realizací Diracovu funkci.

Reálný histogram napříč svazky, pokud jsou ovšem zarovnané, tedy bude zachycovat rozptyl vazných vln od jednoho vlákenného svazku k druhému. Na něm se bude podílet i vzájemná interakce mezi sousedními vlákennými svazky. Všechny histogramy pro úhel sklonu uváděné v této práci byly vyhodnoceny podle první metody, tj. podél vlákenného svazku.

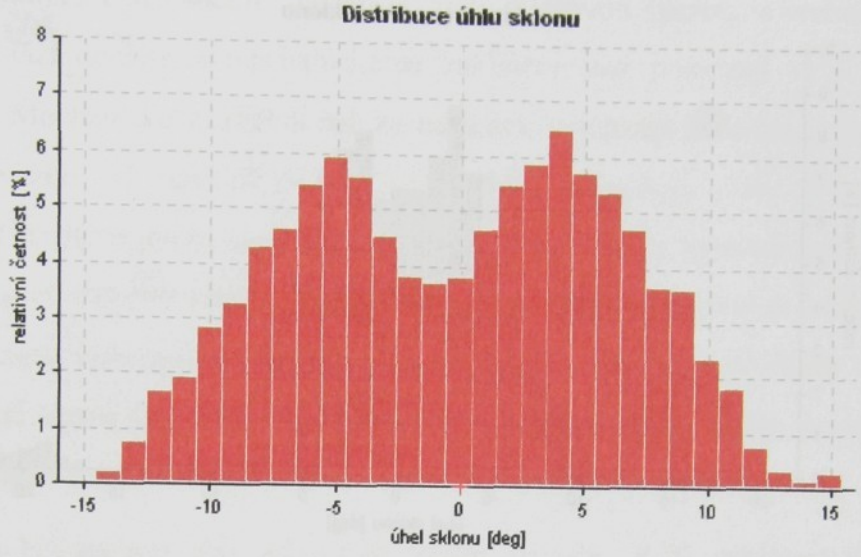
V části 6.2.3 jsme ukázali, že úhel provázání odpovídá lokálním maximům na histogramech úhlu sklonu, pokud existují a pokud lze průběh střednice uspokojivě aproximovat harmonickou funkcí. Odhadnuté hodnoty úhlu provázání jsou pro různé lisovací tlaky jsou v tab. 6.2. Z této interpretace úhlu provázání a z této tabulky budeme vycházet i v této diskusi.

U výztuže plátnové vazby je histogram bimodálního typu. Typický případ je na obr. 8.17. V tomto případě jde o vazbu s vysokým stupněm provázání a nejvyšší četnost úhlu sklonu se pohybuje okolo hodnoty úhlu provázání φ. Histogram dále potvrzuje zachování přibližně harmonického průběhu provázání tkaninové výztuže. Uplatní se asi i nízký lisovací tlak, který nezpůsobuje výrazné deformace tvaru výztuže.



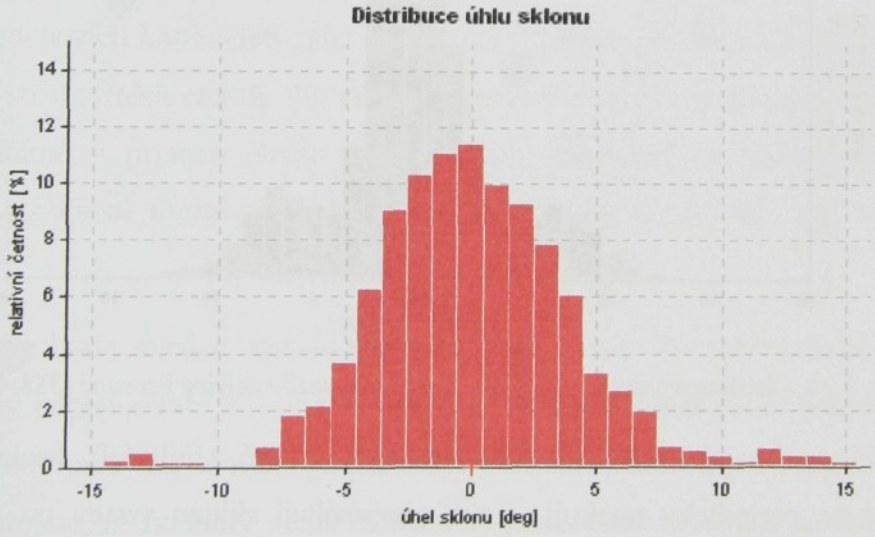
Obr. 8.17 Distribuce úhlu sklonu tkaninové výztuže
ve formě slabě lisované plátnové vazby

Pro srovnání je na obr. 8.18 uveden histogram úhlu sklonu plátnové vazby pro střední lisovací tlak. Bimodální rozdělení zůstává zachováno, střední část se však vyplňuje a sklon krajních se snižuje. To lze vysvětlit tím, že důsledku vyššího lisovacího tlaku dochází k výraznější deformaci vazné vlny, více se liší od harmonického průběhu.



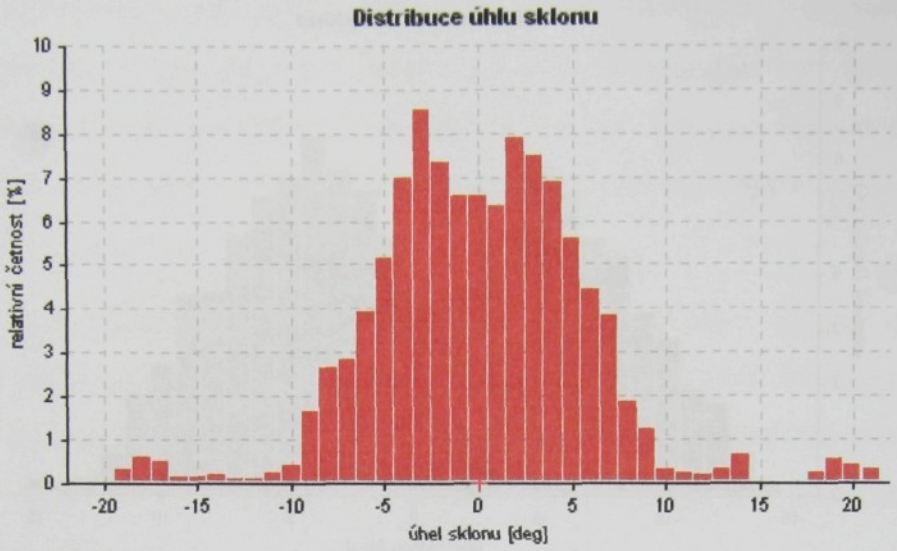
Obr. 8.18 Distribuce úhlu sklonu výztuže ve formě středně lisované plátnové vazby

U výztuže keprové vazby je histogram jednomodální s maximem v okolí nulové hodnoty úhlu sklonu (viz obr. 8.19). Průběh histogramu svědčí o tom, že dochází k poměrně velkým deformacím i při nízkých lisovacích tlacích.

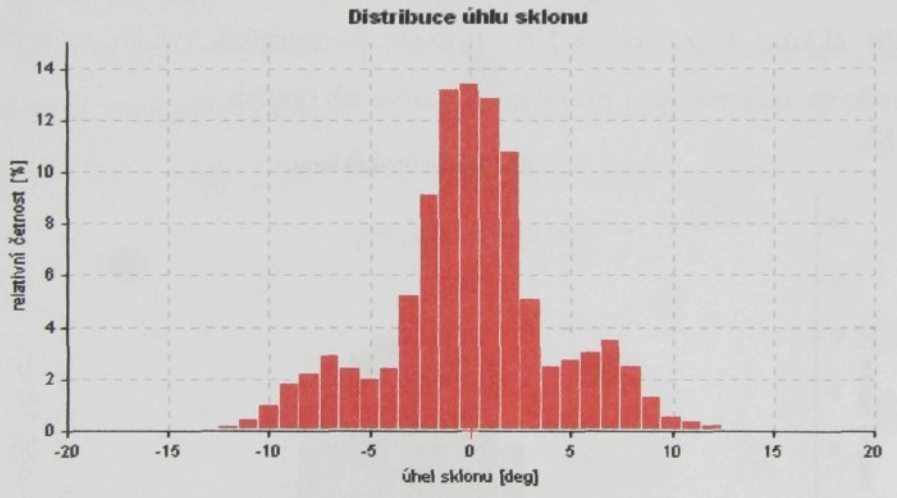


Obr. 8.19 Distribuce úhlu sklonu pro keprovou vazbu, střední lisovací tlak

Skluz jednotlivých vrstev výztuže s keprovou vazbou po sobě je minimální, ale o to více se uplatní deformace při kontaktu se sousedními vrstvami, tj. při mechanickém zaklínění, jak jsme již dříve vysvětlili v části 8.2.1. Histogramy tkaninové výztuže s atlasovou vazbou jsou nejsložitější. Mění se od jednomodálního tvaru, typického pro keprovou vazbu (viz obr. 8.19), přes bimodální na obr. 8.20 až po třímodální (viz obr. 8.21).



Obr. 8.20 Distribuce úhlu sklonu výztuže atlasové vazby slabě lisované (296-3-3)



Obr. 8.21 Distribuce úhlu sklonu výztuže atlasové vazby nejvíce lisované (358-4-17)

Atlasová vazba obsahuje dlouhé teoreticky rovné (flotující) úseky vlákenného svazku, které se periodicky opakují, a tím napomáhají skluzu vrstev po sobě, což má z následek nízkou pravděpodobnost mechanického zaklínění. Důležitým poznatkem je ta skutečnost, že pravděpodobnost vzniku mechanického zaklínění je výrazně vyšší, když jsou vrstvy tkaninové výztuže alespoň částečně ve fázi již při kladení [12, 38]. Málo pravděpodobné mechanické zaklínění vede k relativně malé deformaci, a tím k přibližně harmonickému průběhu. To vysvětlí bimodální rozdělení na obr. 8.20 podobně jako plátnové vazby. Shoda s harmonickým průběhem je horší, proto jsou v porovnání s obr. 8.17 a obr. 8.18 maxima blíže sebe a minimum málo hluboké.

S narůstajícím lisovacím tlakem i pro atlasovou vazbu s vrstvami kladenými převážně ve fázi dochází k mechanickému zaklínění, což potvrzují vyšší hodnoty úhlu provázání φ. Mechanické zaklínění má za následek výraznou deformaci flotujících úseků multifilních svazku, jak jsme již ukázali v části 8.2.2, obr. 8.15 a obr. 8.16. Tento jev je názorně vidět na histogramu úhlu sklonu na obr. 8.21, kde je výrazné centrální maximum by mělo příslušet deformovaným flotujícím úsekům, zatímco podružná lokální maxima asi spadají do oblasti úhlu provázání φ, což by vyplývalo z průběhu střednice na obr. 8.15 a 8.16. Na druhé straně tato hodnota úhlu provázání několikrát převyšuje hodnotu v tab. 6.2 a odpovídá atlasové vazbě.

Z tvaru histogramu pro atlasovou vazbu na obr. 8.20 zaujmou nezanedbatelné četnosti velkých úhlů, které je možné přisuzovat vzniku defektů ve formě trhlin na vlákenném svazku vazné vlny. Tyto defekty jsou zřetelné i u C-tkanin s plátnovou a keprovou vazbou, ale nikoliv v takovém množství jako u atlasu [41].

8.2.4 Některé závěry

V předchozích kapitolách jsme se omezili spíše na prezentaci a pokus o vysvětlení významných strukturních efektů, tak jak je jednotlivé realizované metody zachycují. V této části se zmíníme o přínosu studia struktury se zaměřením za technologický proces a mechanické vlastnosti kompozitů. Bude se jednat spíše o přehled, než o systematický popis.

Nejprve bude uveden nejdůležitější výsledek – vliv lisovacího tlaku na parametry výztuže, který popisuje tab. 8.2. Pro názornost je prezentována pouze plátnová a atlasová struktura, neboť jsou zde nejvíce patrné rozdíly ve strukturních parametrech. Při analýze výsledků je zřejmé, že hodnoty délky vazné vlny jsou téměř nezávislé na lisovacím tlaku a to i pro atlas. Pro plátnovou vazbu v obou směrech provázání jsou charakteristické nízké hodnoty variačního koeficientu [CV], což znamená velmi malý rozptyl a tím i vliv lisovacího tlaku. Vyšší hodnoty variačního koeficientu pro délku vazné vlny u atlasové vazby, potvrzují skutečnost, že atlasová vazba je oproti vazbě plátnové více deformovatelná. Jak se dalo očekávat, větší změny zaznamenaly hodnoty amplitudy neboli výšky vazné vlny. Pokles amplitud je přirozený, neboť směr stlačování je shodný se směrem výšek vazných vln.

stupeň lisování [MPa]	plátno				atlas			
	délka vlny [10^{-3}m]		výška vlny [10^{-6}m]		délka vlny [10^{-3}m]		výška vlny [10^{-6}m]	
	osnova	útek	osnova	útek	osnova	útek	osnova	útek
~ 0,3	3,3	3,4	60	72	7,8	7,6	78	84
~ 0,5	3,3	3,4	57	64	7,8	7,5	72	62
~ 1	3,3	3,4	56	60	7,8	7,4	36	40
CV [%]	3	7	13	15	12	21	19	20

Tab. 8.2 Sumarizované parametry periodicity plátnové a atlasové výztuže pro všechny stupně lisování

Zatímco u plátnové vazby je pokles amplitudy 10 až 20 %, pokles hodnot výšky vazné vlny v závislosti na úrovni slisování je daleko výraznější u atlasu, a to o více jak 50%. Vyšší deformovatelnost atlasové vazby se dá vysvětlit existencí dlouhých flotující úseků provazujícího multifilu. Protože se jedná o výrazné deformace, nepřekvapí vyšší rozptyl hodnot prezentovaný variačním koeficientem.

Tyto hodnoty jen potvrzují správnost výsledků vyvozených z distribučních grafů. Konkrétní hodnoty parametrů odpovídají svojí velikostí charakteru vazby C-tkaniny. Největší úhly provázání byly naměřeny samozřejmě u plátnové vazby. U kepru a atlasu nejsou velikosti úhlů provázání φ znatelně rozdílné, což také podporuje tvrzení o podobném charakteru chování při výrobě C/C kompozitů.

Konečným cílem studia struktury je předpověď či zlepšení mechanických vlastností kompozitu. Ty jsou ovlivněny několika důležitými faktory. Jedná se především o typ vazby výztuže, kde důležitým ukazatelem je *koeficient provázání* (κ), který je definován jako podíl počtu provázání vlákenného svazku z rubu na líc a zpět ve střídě k velikosti střídy tkaniny. Dalším z faktorů je pak již samotná příprava kompozitu, kde důležitou fází je kladení vrstev výztuže na sebe.

Plátnová vazba má koeficient provázání nejvyšší ($\kappa_{plátno}=1$). Jedná se o nejhustěji provázanou tkaninu bez flotujících úseků, proto je pravděpodobnost vzniku mechanického zaklínění vrstev výztuže nejvyšší (obr. 8.17) [27, 47, 67]. Perioda periodického průběhu provazující vlny je nejkratší, čímž stačí malý lisovací tlak k eliminaci případného fázového posunu vzniklého v průběhu přípravy (kladení vrstev).

Plátnová vazba má jednu z nejstabilnějších struktur pro využití v kompozitních materiálech. Další předností plátnové vazby je vysoký stupeň provázání, to omezuje delaminaci vrstev i při velkém mechanickém namáhání. Z těchto důvodů je v praxi dávána přednost výztužím s plátnovou vazbou, ačkoliv je její účinnost, vzhledem k vyššímu zvlnění, nižší.

Keprová vazba má koeficient provázání poloviční (κ_{kepr}=0.5), což výrazným způsobem omezuje možnost zaklínění vyztužujících vrstev. Počet vazných bodů v jednotce plochy je poloviční a velikost periody provazujícího vlákenného svazku dvojnásobná. Velký podíl flotujících úseků komplikuje eliminaci fázového posunu vyztužujících vrstev. Kompozity vyztužené tkaninou keprové struktury jsou značně náchylné na vznik všech druhů strukturních defektů, zejména pórů a dutin. Z tohoto důvodu je keprová vazba nejméně vhodná pro kompozitní aplikace.

Atlasová vazba má koeficient provázání téměř stejný jako vazba keprová (κ_{atlas}=0.4), ale je zde několik důležitých aspektů, které zásadním způsobem chování takto provázané výztuže ovlivňují. Na jedné straně má atlasová vazba nejdelší flotující úseky ze všech zmiňovaných vazeb, ale na straně druhé obsahuje vazný bod vzniklý provázáním dvou na sebe kolmých multifilních svazků. Hustota provázání výrazně ovlivňuje strukturu výztuže již v počátku přípravy kompozitu, zejména v procesu kladení vrstev. Z mnoha hledisek je však pro kompozitní aplikace výhodnější než vazba keprová. V procesu přípravy kompozitu může docházet ke dvěma typům deformací [37, 38]:

- ke skluzu vrstev po sobě,
- k vtlačování vrstev do sebe.

Největší tendence k vzájemnému posunu vrstev skluzem jsme pozorovali u výztuže s plátnovou vazbou. Struktura této vazby je naopak v rozsahu použitých tlaků vůči vtlačování vrstev do sebe nejvíce odolná, o čemž svědčí prakticky nulová závislost výšky a délky vazné vlny na lisovacím tlaku u obou soustav nití (tab. 8.2).

Výztuž s plátnovou vazbou má při lisování tendenci k mechanickému zaklínění, což zabezpečuje určitou stabilitu systému vlákenných svazků vůči deformaci. U C/C kompozitů s touto výztuží byl zjištěn malý výskyt trhlin zvlněných svazků i v jejich okolí [39, 86].

Opačné tendence lze pozorovat u výztuží s atlasovou vazbou. Atlasová vazba 5HS má nízký koeficient provázání (κ=0,4), proto může docházet k lokálním deformacím (průhyb a posun) ve vlákenném systému u dlouhých neprovázaných tzv. flotujících úseků. Mezi jednotlivými vrstvami tkaninové výztuže s touto vazbou dochází k mechanickému zaklínění pouze v ojedinělých případech, kdy kladené vrstvy na sebe si zachovávají vzájemný fázový vztah (obr. 8.10).

8.3 Porovnání s volnou textilií

V předchozí části jsme ukázali, že vlákenné svazky v kompozitech jsou silně deformovány a pokusili jsme se kvalitativně popsat tuto deformaci a vysvětlit její příčiny Další možný přístup je experimentální – porovnání tvaru vlákenného svazku volné textilie a tvaru svazku téže textilie (vazby) v kompozitech. Experimentálními výsledky pro volnou textilii se zabývá sekce 6.1. Porovnání těchto výsledků a výsledků pro kompozit umožní posoudit, k jaké deformaci vlastně dochází.

Porovnání volné textilie a kompozitu je možné provádět na různých úrovních od fotografií řezů až po statistická rozdělení. Tímto tématem jsme se zatím podrobně nezabývali, proto se jen kvalitativně zmíníme o porovnání spekter získaných pomocí DFT. Obsah amplitudových a fázových spekter u volné textilie je přímo závislý na tvaru a míře zvlnění vazné vlny. V sekci 7.1 jsme zobrazili a vysvětlili základní charakteristiky obou typu spekter po aproximaci DFT. Hlavní rozdíl oproti tvaru provazujících multifilů zapracované výztuže je v pořadí maximální harmonické a hodnotě harmonických následujících. Volná textilie vykazuje minimální úroveň deformace, její průběh je vysoce periodický a spektra jednotlivých vln jsou si podobná v základních rysech. S lisovacím tlakem klesá pořadí dominantní harmonické a snižují se rozdíly v hodnotách prvních pěti nejvýznamnějších harmonických (viz sekce 6.2), jinými slovy odchylky od harmonického průběhu narůstají.

9 Využití výsledků

Výsledky této práce jsou různorodé, od experimentu až po zásadní teoretické úvahy. Proto je nutno rozdělit je do několika oblastí:

- Experiment – snímání a digitalizace řezů.
- Základní zpracování obrazu – ruční vyznačování hranic vlákenných svazků a automatizované odečítání jejich souřadnic.
- Popis střednice vlákenného svazku v souřadnicové a frekvenční (přesněji vlnové) oblasti, použití amplitudového a fázového spektra ve vlnové oblasti.
- Aproximace střednice vlákenného svazku.
- Aplikace statistických metod na amplitudové a fázové spektrum, které se staly základem koncepce virtuálního svazku.
- Aplikace metod analýzy náhodného signálu, zejména autokorelace a vzájemné korelace na vlákenné svazky, dále ověřování jejich homogenity a ergodičnosti.

Tento přehled dosti věrně odpovídá i časovému pořadí, s prvními pracemi jsme započali asi před sedmi lety, náhodnými signály jsme se začali zabývat v roce 2002. Stáří tématu zhruba odpovídá i stupeň využití výsledků. Přehled publikací autora disertační práce je uveden v tezích této práce.

Nejvíce byla využita experimentální část, vypracovaná metodika pořizování řezů, snímání povrchu a jejich digitalizace. Ta prakticky nedoznala zásadních změn, pouze se začalo, s rozvojem techniky, používat většího zvětšení a struktura se nyní snímá postupně. Dalším pokrokem bylo systematické odbrušování vzorku. Lze tedy konstatovat, že prakticky všechny snímky struktury použité v dalších pracích vycházejí z metodiky připravené v rámci této práce.

Výsledkem základního zpracování obrazu byla databáze souřadnic pro střednice vláken u kompozitů s různou vazbou a různými podmínkami zpracování. Těchto dat použily mnohé další práce zaměřené na různé zpracování a vyhodnocení průběhu střednice, zejména to byly diplomové práce [55, 86] a články ve sbornících konferencí, které popisovaly průběh reálných vlákenných svazků, například [32, 34], či odhadovaly jejich vliv na mechanické parametry [13, 14].

Použití DFT pro získání spekter bylo námětem pro zajímavou diplomovou práci [48], která se zabývala pokusem o zjištění jejich rozdělení. Jednoduchá aproximace vlákenných svazků byla podkladem pro popis struktury elementární buňky použité při modelování tepelné vodivosti v disertační práci [70] a elastických vlastností [14, 56-61]. Experimentální data z této práce byla též využita pro tvorbu vizuálních modelů struktury tkaninových kompozitů [33].

Některé z těchto výsledků, na nichž se autor přímo nepodílel, byly uvedeny již dříve v této práci, pokud to vyžadovala kontinuita výkladu a pochopení dalších částí. Klasickým příkladem jsou statistické vlastnosti amplitudového a fázového spektra. Ty jsou nutné pro pochopení velmi zajímavé aplikace – realizace virtuálního vlákenného svazku. Stejně tak aproximace průběhu vlákenného svazku vycházející však z pozdějších systematických experimentů umožňuje trojrozměrné prohlížení alespoň části struktury reálného kompozitu. To je založeno na využití virtuální reality. Příslušný software vychází ze široce používaného jednoduchého jazyka VRML (Virtual Reality Markup Language) [95]. Pokud použité softwary připraví příslušný textový soubor pro VRML, je použití komerčního prohlížeče (např. Cosmoplayer) velmi jednoduché a zajímavé pro každého uživatele i s malými zkušenostmi v programování. Ukazuje se, že VRML je velmi účinný nástroj pro zkoumání 3D zobrazení struktury textilie. Těmito dvěma nestandardními aplikacemi se budeme zabývat ve zbytku této kapitoly.

9.1 Virtuální vlákenný svazek

Strukturní analýza je schopna poskytnout data ve dvou formách: v souřadnicové oblasti ve formě souřadnic skutečného průběhu vazného multifilu nebo ve vlnové oblasti prostřednictvím amplitudového a fázového spektra. Ke každému vlákennému svazku patří jedno spektrum jednoznačně určené jeho geometrií. V důsledku nahodilých odchylek se svazky mezi sebou v detailech liší, takže se budou obsahy jednotlivých spekter též poněkud lišit. Například dominantní amplitudy budou mít poněkud odlišné hodnoty.

Proměřením mnoha vzorků lze získat statistický soubor hodnot jednotlivých harmonických, a to jak amplitud, tak i fází. Pokud je rozsah tohoto souboru dostatečný, lze s přiměřenou věrohodností určit statistické rozdělení amplitud a fázových konstant. Prakticky se jedná jen o deset, maximálně dvacet nejvýznamnějších harmonických.

Známe-li toto rozdělení včetně parametrů, lze pomocí generátorů náhodných čísel příslušného rozdělení generovat amplitudy a fázové konstanty jednotlivých harmonických, a tak získat další spektra. Pokud bylo statistické rozdělení určeno spolehlivě, dostáváme spektra, která by mohla příslušet reálným svazkům. Zpětnou DFT lze pak z nich sestavit svazky, které jsou nerozlišitelné od původních. Nazveme je virtuálními svazky [35].

Virtuální svazky mají jednu důležitou vlastnost. Připravíme-li dostatečně veliký soubor virtuálních svazků, bude mít tytéž statistické parametry (statistické momenty) a tytéž statistické charakteristiky (hustota pravděpodobnosti) jako soubor reálných svazků. Toto tvrzení předpokládá splnění několika podmínek, které nejsou zdaleka jednoduché. Dají se shrnou takto:

- Reálný soubor má dostatek prvků (svazků).
- Určení jeho statistického rozdělení je spolehlivé a jeho parametry jsou přesné.
- Generátor náhodných čísel umí spolehlivě generovat předepsané rozdělení.

První podmínka je zásadní, a tu náš statistický soubor nesplňoval. Ke každému typu kompozitu bylo maximálně 96 spekter, prakticky obvykle o osm či šestnáct méně. Jako minimální počet prvků se uvádí 500, tedy o řád více. Nicméně i pro tento soubor jsme se pokusili určit statistická rozdělení a to komerčními programy, které by měly být spolehlivé. Typické výsledky jsou v sekci 7.1. Nejasné bylo zejména rozdělení fázových konstant, což diskutujeme i v části 8.1.4. Dále jsme neměli k dispozici jiné generátory náhodných čísel než s rovnoměrným a normálním rozdělením, která jsou základní součástí MatLabu. Proto jsme pro amplitudy použili normální a pro fázové konstanty rovnoměrné rozdělení a na základě nich generovali virtuální vlákenné svazky. Předběžné výsledky ukázaly, že virtuální svazky se na první pohled lišily od reálných. Hlavní příčinou, jak jsme pokusně ověřili, byl vliv fázových konstant. Simulované malé náhodné odchylky od použitých fázových konstant vedly k výrazným změnám. Naopak proti malým změnám amplitud byly průběhy vlákenného svazku značně imunní. Protože v tehdejších podmínkách nebylo možné získat spolehlivější rozdělení fázových konstant v důsledku malého počtu vzorků, o získání generátoru speciálních rozdělení nemluvě, od dalších pokusů jsme upustili [35].

Od virtuálního vlákenného svazku lze přejít k virtuálnímu kompozitu. Je ovšem nutno jednak realizovat virtuální osnovu a útek v podélném směru, jednak získat virtuální průřezy vlákenných svazků osnovy a útku. Z nich se potom poskládá virtuální kompozit.

Při poskládání zbývá zajistit jen „maličkost", vlákenné svazky osnovy a útku se nesmějí protínat, ale na druhé straně se musí dotýkat. I když je realizace virtuálního kompozitu neobyčejně náročná, jeho praktický význam je velký. Především je možno prakticky zadarmo realizovat libovolný počet virtuálních kompozitů a ty použít k modelování vlastností kompozitů. Při dostatečném počtu realizací můžeme získat i realizace s extrémními parametry, které se experimentem nepodaří připravit. Pomocí nich lze odhadnout rozsah očekávaných vlastností. Statisticky lze vyhodnotit rozptyl sledovaných parametrů, zmetkovitost, apod. Náklady spojené s přípravou virtuálního kompozitu se tedy vrátí se ziskem.

9.2 Použití virtuální reality

Pro efektivní trojrozměrné zobrazení a prohlížení objektů se nám jako nejvhodnější jeví systém virtuální reality, který snadnými prostředky umožňuje nejen realistické zobrazení, ale také 3D natáčení, pohyb či posouvání objektů. Pro modelování objektů byl zvolen jazyk VRML. Při tomto rozhodnutí jsme si byli vědomi, že existují univerzálnější systémy 3D grafiky, mezi nejznámější patří bezplatný *OpenGL*. Tento systém nižší úrovně umožňuje vůbec všechny definované operace, jeho používání je však náročné. Proto jsme dali přednost mnohem jednoduššímu systému, i když jeho možnosti jsou poněkud omezenější. Základním omezením je nemožnost prohlížení v reálném čase. To se však v našich aplikacích neprojeví. Systém VRML samozřejmě též využívá OpenGL, ale uživatel se o to nestará.

Systém VRML z hlediska uživatele má zejména tyto přednosti, které zastiňují jeho nedostatky:

- snadné modelování základních objektů,
- nastavení široké škály jejich vlastností, zejména textury na jejich povrchu,
- dokonalé prohlížení ze všech míst, včetně procházení objekty,
- vzájemný pohyb objektů.

Tento systém používáme pro zobrazení trojrozměrných textilních struktur. Jejich základními prvky jsou vlákenné svazky, proto aplikace VRML začínala modelováním jednotlivých ideálních svazků, s harmonickým průběhem. Základním předpokladem je, že všechna vlákna mají stejný průřez, ten však může být i eliptický.

Tato podmínka by se dala odstranit a průřez vlákna by se mohl měnit, ovšem za cenu dosti značné komplikace algoritmu. Nejjednodušší a poměrně efektivní způsob je nahradit krátký úsek vlákna malým válečkem s podélnou osou ve směru tečny k ose vlákna. Váleček je základní objekt VRML, jeho vykreslení zajistí systém, na rozdíl od OpenGL. Pro realistický vzhled vlákna je nutné volit váleček dostatečně malý a sousední válečky by se měly částečně překrývat.

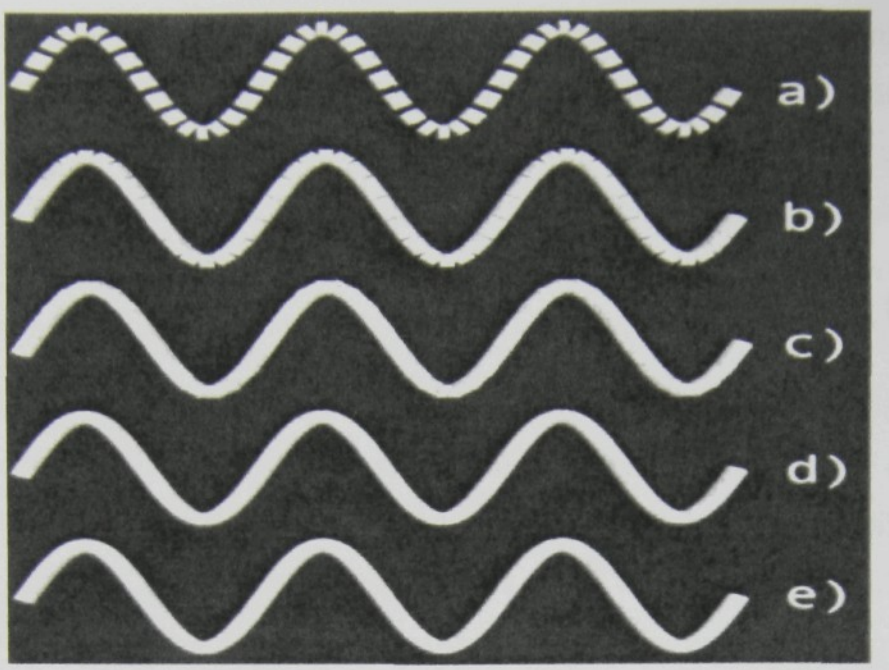
Princip této metody je znázorněn na obr.9.1[1]. Na obr. 9.1 v části a) je použito malého počtu krátkých válečků, a proto se zde objevují mezery mezi nimi. V části b) jsou základní válečky již přiblíženy jeden ke druhému, zbývají zde malé mezery a přechod mezi sousedními válečky je hrubý. V části c) se válečky překrývají, mezery jsou úplně odstraněny a okraje vláken jsou hranaté. Do této části se používalo stejného počtu elementů. V části d) byl počet elementů zdvojnásoben a v části e) byl počet elementů zdvojnásoben podruhé. V posledních dvou případech je obrázek poměrně realistický. Z popisu metody a znázorněného obrázku by mělo vyplynout, že s výraznými potížemi u této metody se setkáme, pokud máme modelovat ostré změny směru.

Metoda válečků vyžaduje pouze znalost osy svazku. Osu, jejíž průběh je v ideálním případě periodický, lze popsat dvěma možnými způsoby: *analyticky* a pomocí *harmonických*.

- Analytická metoda popisuje osu svazku vhodnou funkcí, často to bývá harmonický průběh. Při složitějším průběhu je nutno modelovat svazek po částech.
- Metoda harmonických vychází z toho, že periodický průběh svazku je popsán amplitudami a fázovými konstantami nejvýznamnějších harmonických. Předností této metody je univerzálnost, proto jsme jí dávali přednost. Pro reálné kvaziperiodické průběhy je vlastně jediným vhodným řešením. Na druhé straně však neumožní věrně realizovat některé technicky významné tvary. Hlavním problémem jsou vodorovné úseky.

---

[1] Obr. 9.1 je poměrně špatnou reprodukcí obrazů na monitoru. Přitom při jeho plně grafickém vytváření nemělo dojít ke ztrátě informace.



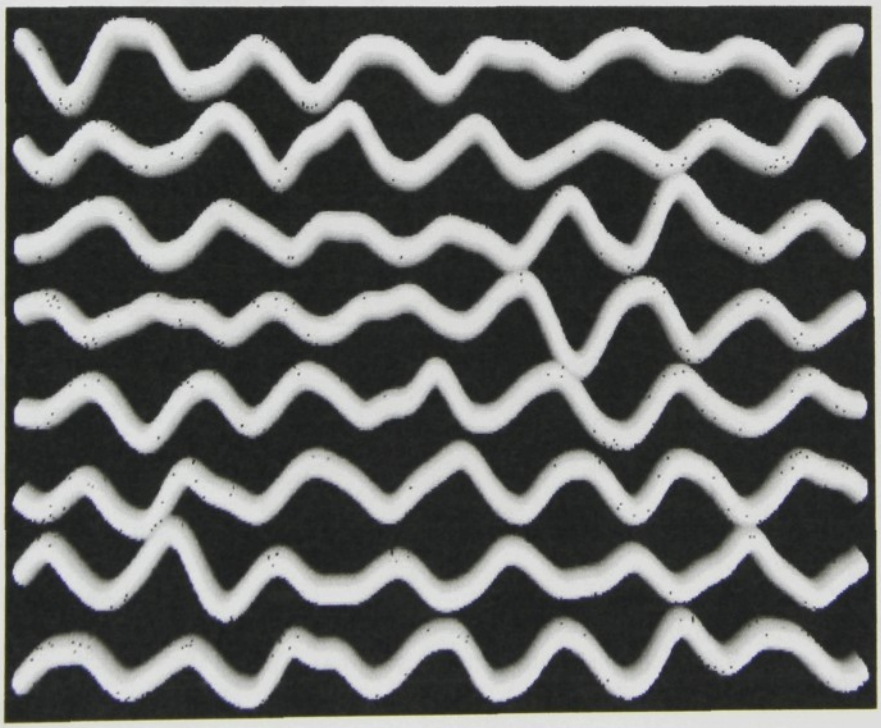
Obr. 9.1 Metoda symetrických válečků pro prostorové modelování vlákenných svazků

Následujícím krokem v hierarchii struktury textilií je generování tkaniny z ideálních vlákenných svazků. Zde je nutno pečlivě zvážit fázové vztahy mezi jednotlivými svazky osnovy a útku, protože se může snadno stát, že se svazky protnou nebo se budou míjet, místo aby se dotýkaly. Lze také samozřejmě zadávat geometrické parametry tkaniny: průřez vlákna, periody, rozsahy apod. Posledním krokem je naskládání tkanin na sebe, což je výchozí struktura pro zpracování kompozitu. Zde můžeme respektovat i uživatelem řízený posuv vrstev.

Některé typické výstupy jsou na dalších obrázcích. Na obr. 9.2 je průběh svazků osnovy ideálním kompozitem s plátnovou vazbou, všechny svazky jsou přesně ve fázi. Obr. 9.3 představuje prostorové uspořádání jedné sady svazků u reálného kompozitu. Použili jsme aproximace pomocí desíti nejvýznamnějších harmonických, jejichž amplitudy a fázové konstanty byly odvozeny ze souřadnic vybraného řezu. Příklady náhodně generovaných řezů neuvádíme, protože se nepodařilo realizovat správné rozdělení náhodných fázových konstant pro všechny dominantní harmonické [35].

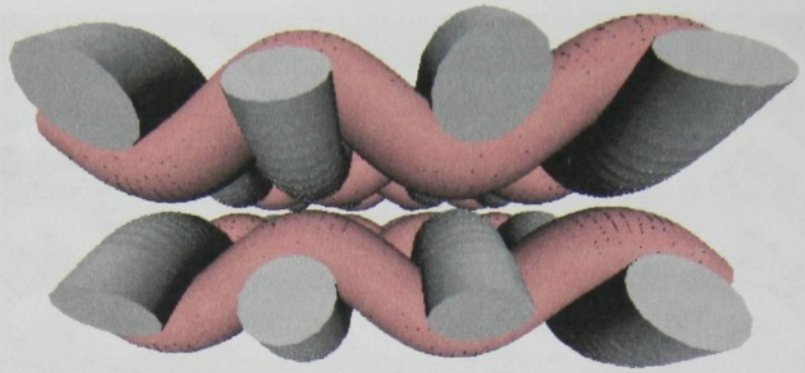
Příklad 3D zobrazení ideální plátnové vazby je na obr. 9.4 c. Na obr. 9.4 a,b jsou pak dvě vrstvy z kompozitu. Na jednotlivé části obrázku se díváme různých směrů pohledu, což je základní vlastností všech prohlížečů VRML. Mezerou mezi vrstvami můžeme i procházet, můžeme projít i vrstvou samotnou, pokud si nastavíme vhodné parametry.

Obr. 9.2 Prostorové upořádání svazků u ideálního kompozitu

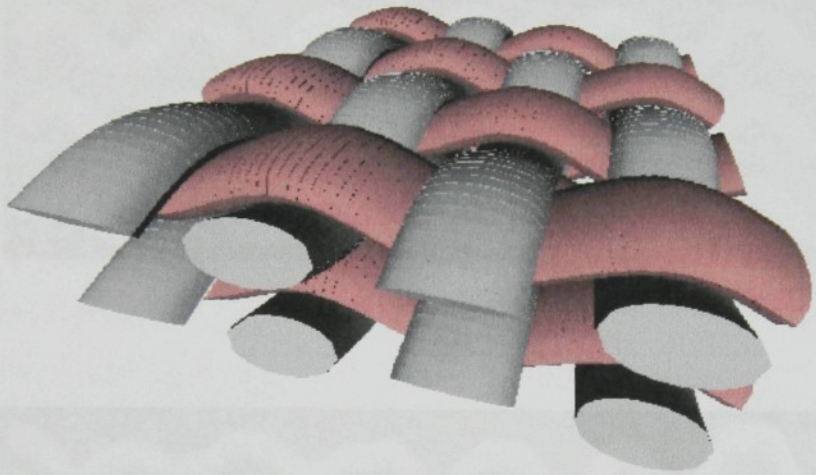


Obr. 9.3 Prostorové upořádání svazků u reálného kompozitu

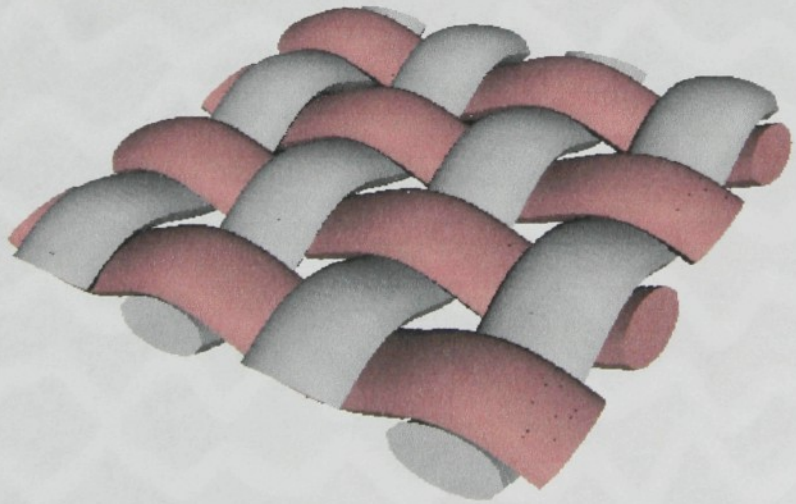
a)



b)



c)



Obr. 9.4 Modely plátnové vazby vytvořené pomocí VRML

10 Závěr

Spolehlivá či alespoň uspokojivá znalost struktury je nutnou podmínkou aplikace strukturních modelů, jejichž cílem je předpověď či ověření užitných materiálových vlastností. Tato práce je jedním z prvních pokusů o strukturní analýzu C/C kompozitů s tkaninovou výztuží. Soustředila se na popis struktury ve směru vlákenných svazků, které však hrají ve všech modelech a jejich aplikacích klíčovou roli. V začátcích práce na základě poměrně podrobné rešerše z digitálních databází uznávaného systému *Current Contents* (CC) jsme zjistili, že přímo této problematice se věnuje poměrně malá pozornost. Podrobněji výchozí stav poznání popisuje kap. 1. Vyvinuté metody a dosažené výsledky lze v mnoha případech pokládat za původní.

Z hlediska přínosu a využití lze vyvinuté metody a dosažené výsledky rozdělit do tří částí:

- Snímání a základní zpracování digitálních fotografií řezů kompozitem.
- Různé formy popisu střednice vlákenného svazku vycházející z jeho kvaziperiodicity a možnosti jeho aproximace.
- Statistický přístup založený na tom, že vlákenný svazek lze považovat za realizaci náhodného procesu.

Výsledkem první skupiny řešených problémů je poměrně univerzální experimentální metoda pro získávání kvalitních digitálních fotografií řezů strukturou. V dalším kroku se na fotografii řezu vyberou zkoumané objekty. Bohužel, vyznačování hranice sledovaných objektů (vlákenných svazků) je nutno stále provádět ručně. Toto však nelze považovat za nedostatek, protože nacházení hranic je někdy skutečně nesnadné a vyžaduje zkušenosti. I přes výrazné pokroky rozpoznávání se pravděpodobně nikdy nepodaří tuto operaci plně automatizovat. Sejmutí souřadnice, jako poslední fáze, je plně automatizované. Současný stav dokáže eliminovat i některé chyby. Z hlediska zpracování dat je výsledkem vzorkovaný průběh signálů, kterými jsou souřadnice hranice vyznačených objektů. U vlákenných svazků se z něho počítá střednice, s níž se dále pracuje. Samozřejmě tento systém je univerzální a otevřený, lze jej aplikovat na mnohé jiné případy studia struktury, často jen s minimálními změnami.

Klíčové postavení ve druhé skupině má popis tvaru střednice vlákenného svazku jednak v souřadnicové, jednak ve vlnové oblasti, což jsou analogie časové a frekvenční oblasti pro elektrické signály. Díky vzorkovaným datům se pro převod používá diskrétní Fourierova transformace (DFT). Jejím výstupem je amplitudové a fázové spektrum. Tento přístup jsme pravděpodobně použili jako první. Upozorňujeme i na úskalí DFT, rozmazávání spektra – nejjednodušší spektrum se získá při vzorkování celého počtu vazných vln. Spektrum poskytuje informace o střednici v jiné, transformované, formě. Lze jí efektivně využít, jak v příslušných částech ukazujeme, několika způsoby, například :

- Z amplitud významných spektrálních čar lze zjistit základní charakteristiky střednice.
- Výběrem nejvýznamnějších harmonických lze s různou přesností pružně aproximovat tvar střednice.
- Filtrací lze ovlivnit tvar střednice, např. nízkofrekvenční zádrží lze střednici napřímit, vysokofrekvenční zádrž odstraňuje drobné poruchy.

Aproximace pomocí DFT se jeví jako nejefektivnější, zdaleka ale není jediná. Díky pružnosti v nastavení přesnosti jsme ji v prácí často používali. Dále jsme však popsali a také ve speciálním případě použili aproximaci střednice pomocí harmonické vlny založenou na nelineární optimalizaci. Nevýhodou tohoto přístupu je to, že zde není 100% záruka úspěchu, někdy tato metoda selže.

Nejvýznamnější postavení mají metody třetí, statistické, skupiny, které jsou ale občas i nejnáročnější na pochopení a nejobtížnější na realizaci. Jednotlivé střednice téhož vzorku i řezu se od sebe liší, obsahují náhodnou složku, lze je považovat za realizaci náhodného procesu. Efektivní popis je tedy možný jen statistickými metodami. Realizovali jsme několik metod od jednoduchých histogramů až po ověřování typu procesu:

- Histogram úhlu sklonu.
- Rozdělení pravděpodobností jednotlivých harmonických amplitudového i fázového spektra.
- Vzájemná korelace jednotlivých vrstev.
- Homogenita a ergodicita náhodného procesu.

První tři metody mají významné praktické použití, čtvrtá má význam teoretický. V práci jsme několikrát upozornili na to, že k aplikaci těchto metod, s výjimkou histogramu úhlu sklonu, je málo experimentálních dat, téměř o řád méně, než se pokládá za statistické minimum. Nicméně jsme je aplikovali s tím, že výsledky je nutno brát s jistou rezervou. Hlavní význam jejich realizace je především v metodické stránce, tedy v tom, že byly vymyšleny, realizovány, ověřeny a aplikovány. Při vhodném přeuspořádání existujících dat lze splnit i podmínku minimálního počtu údajů. Domníváme se, že v oblasti popisu střednice je použití těchto efektivních statistických metod původní.

I přes nesporný význam různých statistických forem zpracování dat, základní informací zůstává časová a frekvenční oblast. Výsledky statistických metod je nutno chápat jako doplňkové, ale ve speciálních případech se stávají velmi důležitými. Zjistili jsme například toto:

- Tvar histogramu je velmi citlivý na to, zda průběh střednice je téměř harmonický, blízký harmonickému tvaru nebo od něho odlišný.
- Vzájemná korelace špatně zachycuje odlišnosti střednic vstupních svazků, ale je citlivá na to, jestli je průměrná hodnota vazné vlny v nich odlišná. Bezpečně zachytí změnu délky vazné vlny o několik procent.

Připomeňme, že tyto vlastnosti by se ze spektra či souřadnic střednice zjišťovaly obtížně. Z toho plyne závěr, že je důležité aplikovat co nejvíce odlišných metod, abychom zjistili maximum informací.

Zjištění statistického rozložení amplitud a fází významných harmonických vede k originální koncepci virtuálních vlákenných svazků a ve svém důsledku i virtuálního kompozitu. Tomu jsme věnovali spolu s možností jeho věrného zobrazení kapitolu 9. Zatím realizace vázne na malém počtu dat pro efektivní statistické zpracování.

Souběžné s rozvojem metod probíhala i jejich aplikace na reálné vzorky s cílem přispět o objasnění problémů, které se při přípravě kompozitů C/C objevují. Zkoumali jsme tři typy vazeb výztuže, plátnovou, keprovou a atlasovou a vliv různých lisovacích tlaků. Pro různé vazby a tlaky jsme porovnávali především aproximativní průběh střednice a histogram úhlu sklonu. Dispozici byl i tvar střednice pro volnou tkaninu.

Na zkreslení tvaru střednice svazku v porovnání s volnou tkaninou bylo možné usuzovat na projevy zpracování a klasifikovat typy odchylek či poruch. Totéž by bylo možné dělat ze spekter, to by však vyžadovalo značnou zkušenost a praxi. Velký význam mají též histogramy úhlu sklonu. Jejich tvar výrazně závisel na typu vazby a projevil se u něho i vliv lisovacího tlaku.

Vliv technologie jsme posuzovali na velmi jednouchém modelu, podle něhož odchylky od ideální struktury jsou důsledkem dvou konkurenčních procesů: skluzu vrstev a jejich zaklínění. Ty se uplatní zejména v prvních fázích přípravy kompozitu. Zaklínění brání dalšímu posuvu vrstev a je tím efektivnější, čím je povrch vrstvy členitější, čím jsou vrstvy blíže sebe, což se ještě zvýrazní, pokud jsou v souhlasné fázi. Zaklínění je tedy ovlivněno typem vazby (zda jsou či nejsou přímé úseky), lisovacím tlakem (vrstvy se dostanou blíže sobě) a prvotním kladením vrstev na sebe. Zaklínění má však též některé negativní důsledky zejména na pravidelnost upořádání. Předběžné výsledky ukázaly, že plátnová vazba se jeví jako nejvhodnější, což je poněkud v rozporu s teoretickým předpokladem, podle něhož se za nejvhodnější považuje atlasová vazba, u niž je využití tuhosti vláken v kompozitním systému nejvyšší. Vysoká tvarová stabilita vyztužujícího systému plátnové vazby však tuto výhodu v praxi předčí.

Vypracované metody nacházejí uplatnění i v dalším pokračování výzkumu na pracovišti. Z detailní znalosti struktury se vychází při tvorbě jednotkové buňky vhodné pro aplikaci metody konečných prvků. Statistické metody začínají nacházet uplatnění při studiu pórovitosti a jejího vlivu na tepelnou vodivost. Pokračuje se v pracích na virtuálním kompozitu.

Vypracované, ověřené a využívané metody, dosažené výsledky a jejich praktický význam potvrzují aktuálnost práce a správného postupu při jejím řešení. Dosažené výsledky jsou rozsáhlejší než vyplývá ze zadání.

11 Seznam použité literatury

[1] Agarwal, B. D. – Broutman, L. J.: Vláknové kompozity, SNTL, Praha 1988.

[2] Anděl, J.: Statisticke metody, Matfyzpress, Praha 1998.

[3] Balík, K. a kol.: Technologie přípravy výrobků z vláknového kompozitního materiálu uhlík – uhlík, ÚSMH AV, Praha 1993.

[4] Bareš, R.: Kompozitní materiály, SNTL, Praha 1988.

[5] Baťa, M., Plachý, V.: Analysis of Dynamic Effects on Engineering Structures, Elsevier Science Publishers, Amsterdam 1987.

[6] Bogdanovich, A. E. – Pastore, C. M.: Mechanics of Textile and Laminated Composites, Chapman & Hall, London 1996.

[7] Bonnel, P. – Hamelin, P.: Geometrical and Numerical Modeling of Textile Structural Composites, Elsevier, 1994, pp. 195-212.

[8] Borr, M. – Cherouat, A. – Gelin, J. C.: Modeling Large Deformations of Glass Fiber Fabrics and Applications to Shaping Processes, Euromech 334-Textiles Composites & Textiles Structures, Lyon 1995, pp. 129-139.

[9] Bunsell, A. R.: Fibre Reinforcement for Composite Materials, Centre des Materiaux, Ecole Nationale Superieure des Mines de Paris, Paris 1988.

[10] Byström, J. – Jekabsons, N. – Varna, J.: An Evaluation of Different Models for Prediction of Elastic Properties of Woven Composites, Composites - part B eng., 2000, pp. 7-20.

[11] Colby C. Swan: Analysis and Design of Textile - Reinforced FRP Composites, Mechanics Engineering Air Force for 21th Century, Proc. of 12th ASCE, LaJolla (USA) 1998, pp. 36-52.

[12] Cox, B. N. – Flanagan, G.: Handbook of Analytical Methods for Textile Composites, NASA Contractor Report 4750, Hampton (USA) 3/1997.

[13] Černý, M. – Glogar, P. – Košková, B. – Vopička, S.: Influence of Actual Yarn Pattern on Elastic Properties of Fabric Reinforced Carbon-Carbon Composites, Eurocarbon 2000 (Vol.II), Abstracts, Berlin (SRN) 2000, pp. 749-750.

[14] Černý, M.: Vliv struktury C/C kompozitů na jejich mechanické vlastnosti, XX. Vyztužené plasty, Karlovy Vary 1999, s. 166-169.

[15] Čížek, V.: Diskrétní Fourierova transformace a její použití, SNTL, Praha 1981, 144-146.

[16] Daniel, M. – Ishai, O.: Engineering Mechanics of Composite Materials, Oxford University Press, Oxford 1994.

[17] Dierckx, P.: Curve and Surface Fitting with Splines. Oxford Science Publications. Clarendon Press, Oxford 1995.

[18] Fitzer, E. – Manocha, L. M.: Carbon Reinforcement and Carbon/Carbon Composites, Springer, Berlin 1998.

[19] Frýba, L.: Vibration of Solids and Structures under Moving Loads, Academia, Publishing House of Tech Czechoslovak Academy of Science, Prague 1992.

[20] Gao, F. & others: The Characterisation of Cracks and Voids in Two-dimensional Carbon-Carbon Composites, Carbon, Vol. 31, No. 1, 1993, pp. 103-108.

[21] Hearle, J. W. S. – Grosberg, P. – Backer, S.: Structural Mechanics of Fibres, Yarns, and Fabrics, Wiley – Interscience, New York (USA) 1969.

[22] Chen, J. – McBride, T. M.: Proceedings of the 5th International Conference on Composite Engineering ICCE/5, Las Vegas 1998, pp. B41-B44.

[23] Chen, J. – Bride, T. M.: Unit-Cell Geometry in Plain-Weave Fabrics During Shear Deformations, Boston University, Department of Aerospace & Mechanical Engineering, Boston, Massachusetts (USA) 1996.

[24] Chen, J. – McBride, M. T.: Effect of Textile Architecture on Formability, Advance Composite Materials and Research Laboratory, Department of Mechanical Engineering, University of Massachusetts, Lowell (USA) 1999.

[25] Chow, T. W. – Ko, F. K.: Textile Structural Composites, Elsevier 1989.

[26] Ishikawa, T. – Chou, T. W.: Stiffness and Strength Behaviour of Woven Fabric Composites, Journal of Material Science, No. 17, 1982, pp. 3211-3220.

[27] Jakubčo, L.: Diplomová práce (KTM-324), TUL, Liberec 1997.

[28] Jortner, J.: Macroporosity and Interface Crackink in Multi-directional Carbon-Carbon, Carbon, Vol. 24, No. 5, 1986, pp. 603-613.

[29] Jortner, J.: Microstructure of Cloth-Reinforced Carbon-Carbon Laminates, Carbon, Vol. 30, No. 2, 1992, pp.153.

[30] Kořínek, Z.: Tuhost a pevnost vláknových kompozitů, skriptum, Katedra materiálů fakulty strojní ČVUT, Praha 1994.

[31] Košek, M. – Košková, B.: Analysis of Yarn Wavy Path Periodicity of Textile Composites Using Discrete Fourier Transform (DFT), Proceedings of the 6th International Conference on Composite Engineering ICCE/6, Orlando (FLA) 1999, pp. 427-428.

[32] Košek, M. – Košková, B.: Modelling of Actual Yarn Geometry for Textile Composites, Proceedings of the 5th International Conference on Composite Engineering ICCE/5, Las Vegas (USA) 1998, pp. 485-486.

[33] Košek, M. – Macurová, K. – Tomková, B.: Visualisation and Evaluation of Real Structure of Composite Materials, Sb. konference ECMS'03, TUL, Liberec 2003, s. 54-58.

[34] Košek, M. – Myslivec, M.: Simple Graphical System for Determination of Actual Yarn Geometry of Textile Composites, Computer Graphics, Spring'99, Budmerice (Slovakia), pp. 25-26.

[35] Košek, M. – Vopička, S.: Visualization of Textile Composite Structure, Proc. of the 7th International Conference ICCE/7, Denver (USA) 2000, pp. 475-476.

[36] Košek, M.– Macurová, K.: Use of Statistics for Yarn Approximation in Woven Composite Structure, ICCE/10 – Proceedings 10th Annual International Conference on Composite/Nano Engineering, July 20-26, 2003, New Orleans, Louisiana, USA, pp. 353-354.

[37] Košková, B. – Glogar, P.: Závěrečná zpráva grantu GAČR 106/99/0065.

[38] Košková, B. – Glogar, P.: Závěrečná zpráva projektu GAČR 106/96/0596, TUL, Liberec 1998.

[39] Košková, B. – Jalůvková, K. – Vopička, S.: Crack Analysis in Woven Composite Structure – Effect of Pressing Degree, Proceedings of the 8th International Conference ICCE/8, Tenerife (Spain) 2001, pp. 491-492.

[40] Košková, B. – Vopička, S. – Glogar, P.: Proceedings of the 3th International Conference TexSci'98, Approximation of Actual Yarn Shape in Textile Composites Using Cubic Splines, International Conference Textile Science '98, Technical University of Liberec 1998, pp. 580-584.

[41] Košková, B. – Vopička, S. – Glogar, P.: Quantitative Description of Yarn Undulation in Fabric Reinforced Composites Using Inclination Angle Distribution, Proceedings of the 6th International Conference on Composite Engineering ICCE/6, Orlando (USA) 1999, pp. 429-430.

[42] Košková, B. – Vopička, S.: Determination of Yarn Waviness Parameters for C/C Woven Composites, Proceedings of International Conference CARBON'01, Lexington (USA) 2001, pp.1-6.

[43] Košková, B. – Vopička, S.: Characteristic Features of the Woven Reinforced Composite Structure, Proceedings of International Conference, Reinforced Plastics 2000, Balatonfüred (Hungary) 2000, pp. 1-7.

[44] Košková, B. – Vopička, S.: Popis skutečné geometrie nití v kompozitech s tkanou výztuží pomocí distribuce úhlu sklonu jejich neutrální osy, Strutex'98, 5.pracovní seminář, TU Liberec 1998, s. 173-179.

[45] Košková, B. – Vopička, S.: Popis skutečné geometrie vlákenného systému tkaných výztuží v kompozitech, XX. Vyztužené plasty, Karlovy Vary 1999, s.115-121.

[46] Košková, S. – Vopička, S.: Influence of Composite Pressing Degree on Woven Reinforcement Geometry, Proceedings of the 7th International Conference on Composite Engineering ICCE/7, Denver (USA) 2000, pp. 473-474.

[47] Králová, K.: Diplomová práce (KTT-148), TUL, Liberec 1996.

[48] Kučerová, I.: Diplomová práce (KTM-373), TUL, Liberec 2001.

[49] Kuhn, J. L. – Charalambides, P. G.: Modeling of Plain Weave Fabric Composite Geometry, Journal of Composite Materials, Vol.33, No. 3, 1999, pp.188-220.

[50] Langley, M.: Carbon Fibres in Engineering, McGraw-Hill Book Company, London 1973.

[51] Ley, S. Y.: Deformation of PBO/epoxy Plain-Weave Fabric Laminae Followed Using Raman Spectroscopy, Composites Part A: Applied Science and Manufacturing, Vol. 32 (3-4), Manchaster (UK) 2001, pp. 499-509.

[52] Lomov, S. V. – Huysmans, G. – Prodromou, A. – Parnas, R. S. – Verpoest, I. – Phelan, F. R.: Textile composites: modelling strategies, Composites part A, 32 (10), pp. 1497-1504.

[53] Lomov, S. V. – Verpoest, I.: Compression of Woven Reinforcement: A Mathematical Model, Journal of Reinforced Plastics and Composites, Vol.19 (116), 2000, pp. 1329-1350.

[54] Lomov, S.V. – Verpoest, I.: WiseTex - Virtual textile software, www.kuleuven.ac.be, 2000.

[55] Macurová, K.: Diplomová práce (KTN-212), TUL, Liberec 2002.

[56] Marvalová, B.: Computation of Micro-Stress Fields in Plain-Weave Fabric Composites, International Conference Textile Science'00, Technical University of Liberec 2000, s. 54-56.

[57] Marvalová, B.: Determination of Effective Stiffness Tensor of Textile Reinforced Composites, Proceedings of the 7th Inter. Conf. ICCE/7, Denver (USA) 2000, pp. 593-594.

[58] Marvalová, B.: Mechanické vlastnosti kompozitů vyztužených tkaninou, Transfer'99, Brno 1999, s. H4-H5.

[59] Marvalová, B.: Prediction of Elastic Properties of Textile Reinforced Composites, Proceedings of International Conference Engineering Mechanics, Svratka 2000, s.193-198.

[60] Marvalová, B.: Software pro stanovení pružnostních charakteristik kompozitu vyztuženého tkaninou, Strutex'00, 7.prac. seminář, TUL, Liberec 2000, s. 161-164.

[61] Marvalová, B.: Určení pružnostních charakeristik kompozitu vyztuženého tkaninou, Strutex'99, 6.pracovní seminář, TUL, Liberec 1999, s. 157-164.

[62] Meloun, M. – Militký, J. – Forina, M.: Chemometrics for Analytical Chemistry, Vol. 2, PC - Aided Regression and Related Method, Ellis Horwood Ltd., Chichester 1994.

[63] Meloun, M. – Militký, J.: Statistické zpracování experimentálních dat, Plus, Praha 1994.

[64] Mikolanda, T. – Lomov, S. – Košek, M.: VRTex – An Effective System for Visualisation of Textile Structures, 10th International Conference Strutex'03, TUL, Liberec 2003, pp. 33-38.

[65] Miravete, A.: 3D Textile Reinforcements in Composite Materials, CRC Press, Cambridge, England 1999.

[66] Naik, R. A.: Analysis of Woven and Braided Fabric Reinforced Composites, NASA CR 194930, NASA Hampton (USA) 1994.

[67] Nesládková, J.: Diplomová práce (KTT-096), TUL, Liberec 1996.

[68] Nevřiva, P.: Analýza signálů a soustav, BEN, Technická literatura, Praha 2000, 200-209.

[69] Nosek, S.: Teorie tkacího procesu, 1. díl, DT ČSVTS, Pardubice 1988.

[70] Palán, M.: Stanovení tepelné vodivosti uhlíkových vláken, doktorská disertační práce TUL, Liberec 2003.

[71] Peng, X.Q. – Cao, J.: Numerical Determination of Mechanical Elastic Constants of Textile Composites, Department of Mechanical Engineering, Northwest University, Evanston (USA) 2000, pp.1-11.

[72] Pollock, B. P.: Tensile Failure in 2D C/C Composites, University of Dayton Research Institute, Astronautics Laboratory, Edwards Air Force Base(USA) 1990.

[73] Rektorys, K. a kol.: Přehled užité matematiky I. a II., Prometheus, Praha 1995.

[74] Renard, J.: Modelling of a Damaged Composite Specimen by a Micro-Macro Numerical Simulation, Onera, Paris 1990.

[75] Savage, G.: Carbon - Carbon Composites, Chapman&Hall, London 1993

[76] Sirková, B.: Matematický model pro vyjádření provázání nití ve tkanině s využitím Fourierových řad, doktorská disertační práce TUL, Liberec 2002.

[77] Sirková, B.: Operativní matematický model pro vyjádření tvaru vazné vlny v plátnovém a jiném než plátnovém provázání ve tkaninách s použitím Fourierovy řady, Strutex'99, 6. pracovní seminář, TUL, Liberec 1999, s. 141-149.

[78] Sirková, B.: The influence of the Input Fabric Parameters on the Individual Parts of the Thread's Interlacing, Strutex'02, 9. mezinárodní konference, TUL, Liberec 2002, s. 229-234.

[79] Sodomka, L. – Čmelík, M.: Uhlíkové textilie a jejich použití pro konstrukci kompozitů, VŠST, Liberec 1990.

[80] Sodomka, L. – Sodomka, J.: Uhlíkové kompozity jako progresivní konstrukční materiály, výzkumná zpráva, VŠST, Liberec 1992.

[81] Sodomka, L.: Textilní kompozity, výzkumná zpráva, VŠST, Liberec 1990.

[82] Sodomka, L.: Uhlíková vlákna, jejich technologie, struktura a vlastnosti, VŠST, Liberec 1990.

[83] Šaloun, P.: Programovací jazyk C, Neokortex, Praha 1999.

[84] Šulcová, D. – Myslivec, M.: Strutex'98, 5. pracovní seminář, TU Liberec 1998, s. 147-152.

[84a] Šulcová, D.: Diplomová práce (KTM-358), TUL, Liberec 1999.

[85] Tomková, B. – Košek, M.: 3D Visualization of Real Structure of Composites, Sb. konference SCCG'03, Budmerice (Slovakia) 2003, pp. 27-28.

[86] Tomková, B.: Diplomová práce, TUL, Liberec 2002.

[87] Tomková, B.: Application of WiseTex Software in Textile Material Study, 10th International Conference Strutex'03, TUL, Liberec 2003, pp. 71-78.

[88] Uhlíř, J. – Sovka, P.: Číslicové zpracování signálu, Skriptum ČVUT, Praha 2002.

[89] Vandeurzen, Ph. – Ivens, J. – Verpoest, I.: An analytical model of the failure process in woven fabric composites , Proc. ECCM-8, 8th European Conference on Composite Materials - Science, Technologies and Applications 4, Woodhead Publishing Ltd, Naples (Italy) 1998, pp. 627-634.

[90] Vopička, S.: Diplomová práce (KTM-335), TUL, Liberec 1998.

[91] Yurgartis, S. W. – Morey, K. – Jortner, J.: Measurement of Yarn Shape and Nesting in Plain-Weave Composites, Composite Sci. & Technology 1993, 46(1), pp. 39-50.

[92] Yurgartis, S.W. – MacGibbon, B.S. – Mulvaney, P.: Quantification of Microcracking in Brittle-Matrix Composites, Journal of Material Science, No. 27, 1992, pp. 6679.

[93] Yurgartis, S.W.: Techniques for The Quantification of Composite Mesostructure, Mechanical and Aeronautical Engineering Department, Clarkson University, Potsdam (USA) 1992, 6679-6686.

[94] Zeman, J. – Šejnoha, M.: On Determination of Periodic Unit Cell for Plain-Weave Fabric Composite, Engineering Mechanics 9, No. 1-2, Praha 2002, s. 65-74.

[95] Žára, J.: VRML 97 – Průvodce virtuálními světy, Computer Press, Brno 1999.

Anotace

POPIS GEOMETRIE VYZTUŽUJÍCÍHO SYSTÉMU V TKANINOVÝCH KOMPOZITECH

Je rozebrán princip původní metody popisu skutečné geometrie tkaninové výztuže v C/C kompozitech pomocí diskrétní Fourierovy transformace (DFT) a ověření jejích možností. Na geometrickém průběhu vlákenných svazků, studovaném pomocí obrazové analýzy na snímcích mikrostruktury, lze zřetelně odlišit dvě složky. Základní periodická složka je dána vazbou tkaniny. Nahodilá složka má svůj původ zejména v tepelně-mechanickém procesu přípravy kompozitů. Metoda popisu pomocí DFT spočívá v rozkladu kvaziperiodického průběhu střednice vlákenného svazku na jeho harmonické složky. Každé z harmonických přísluší jedna čára amplitudového a fázového spektra. Z amplitudového spektra byly stanoveny parametry (délka a výška vazné vlny) základní buňky periodické struktury (PUC) výztuží s plátnovou, keprovou a atlasovou vazbou. Byl studován vliv lisovacího tlaku na tyto strukturní charakteristiky. Statistickým zpracováním parametrů spekter bylo zjištěno Weibullovo rozdělení pro amplitudy a rovnoměrné rozdělení pro fáze jednotlivých harmonických. Ze statistické analýzy průběhu střednic vlákenných svazků vyplývá potvrzení homogenity a ergodicity této realizace náhodného procesu. Popis skutečné geometrie tkaninové výztuže jak v analytické formě, tak pomocí parametrů PUC lze využít pro predikci mechanických a tepelných vlastností kompozitů na základě modelů, vycházejících z PUC a pro vizualizaci trojrozměrné struktury vyztužujícího systému.

DESCRIPTION OF GEOMETRY REINFORCEMENT SYSTEM IN WOVEN COMPOSITES

The original method for description of actual yarn geometry in C/C composite structure is explained. We can clearly recognize the two features in yarn paths, which are studied by the use of image analysis of composite microstructure. The basic periodic character of yarn paths is due to yarn interlacing in reinforcement weave pattern. Stochastic irregularities have namely their origin in hot pressing during composite processing. Therefore the due-periodic course of yarn centerline can be represented with amplitudes and phases of a set of harmonics, constituting spectra, obtained after application of discrete Fourier transform (DFT). The basic parameters (period and amplitude) of periodic unit cell (PUC) for plain-weave, twill and satin structure were determined from amplitude spectrum for the three levels of hot pressing used in composite processing. From the statistical treatment of experimental data follows both the Weibul distribution for amplitudes and the uniform distribution for phases for individual harmonics and confirmation of homogenity and ergodicity of random process, realised in the form of yarn centerline. The both approaches to yarn centerline description, the analytical form and parameters of unit cell derived from DFT application can be used for prediction of properties based on unit cell models.

U 591 T