

Technická univerzita v Liberci

Fakulta mechatroniky, informatiky a mezioborových studií

DISERTAČNÍ PRÁCE

Časově-frekvenční analýza nestacionárních signálů

2009

Jiří MAREŠ

Technická univerzita v Liberci

Fakulta mechatroniky, informatiky a mezioborových studií

Časově-frekvenční analýza nestacionárních signálů

Time-Frequency analysis of nonstationary signals

Ing. Jiří MAREŠ

Studijní program: P 2612 Elektrotechnika a informatika

Studijní obor: 2612V045 Technická kybernetika

Pracoviště: Ústav řízení systémů a spolehlivosti
Fakulta mechatroniky, informatiky a mezioborových studií
Technická univerzita v Liberci
Studentská 2, 461 17 LIBEREC 1

Školitel: Doc. Ing. Ivan JAKSCH, CSc.

Abstrakt

K analýze nestacionárních signálů lze přistupovat z mnoha úhlů. V kontextu této práce se jedná o zkoumání signálů z pohledu časově-frekvenční dekompozice, která představuje jeden ze základních a univerzálních nástrojů aplikované technické diagnostiky. Z této oblasti jsme vybrali dvojici jevů prezentujících typický nestacionární projev, které jsou však navzájem naprosto odlišné. Cílem práce je pro tyto případy odvodit nejpraktičtější formy časově-frekvenčních analýz, které by bylo navíc možné implementovat do samostatné aplikace.

Zvukové nebo vibrační odezvy rozběhových jevů jsou zástupcem nestacionarit původem z rotačních strojů. Testů postavených na rozběhích se také často používá k rychlému vyšetřování provozních tvarů kmitů. V takových případech je obzvláště zásadní užít takových metod řešících optimálně dilema mezi přesností lokalizace jevu ve frekvenci a čase se změnou dynamiky signálu. Ideální je použití řádové analýzy nebo metod adaptivní filtrace pracujících ve spojení s údajem tachu signálu. V této práci je navržena alternativní metoda adaptivní STFT užívající Gaussovo okno, jenž díky sledování dominantní složky odezvy nutnost používání tachu signálu obchází.

Impulsní jevy, jak v našem případě nazýváme hlukové přechodové odezvy původem z necyklických projevů mechanismů, jsou druhým vybraným příkladem. Zde je nejvíce kritickým parametrem krátké trvání impulsního jevu, indukující velké požadavky na časové rozlišení vybrané metody analýzy. Jak práce dokazuje, jsou v těchto aplikacích nejvhodnější nástroje založené na wavelet transformaci a nebo varianty Wigner-Ville distribuce. Oběma je zde věnován nemalý prostor. Nově jsou předvedeny varianty časově-frekvenčních metod kombinujících současně wavelet i Wigner-Ville dekompozici, jenž jsou vhodné pro offline analýzu signálu ze záznamu.

Platformu pro fungování jmenovaných analýz v reálném nasazení poskytuje PC aplikace nazvaná „JTFAToolbox“. Tento program je nosným výstupem k probírané problematice časově-frekvenční analýzy. Modulární struktura programu umožňuje na společné kostře vedle sebe realizovat všechny časově-frekvenční metody společně se systémy zdrojů dat, pre-procesu, post-procesu, vizualizace. Stávající implementace zahrnuje jak výše jmenované metody tak klasické nástroje časově-frekvenční analýzy jako je STFT a CPB. Zásadní je, že v závislosti na hardwarovém výkonu, dovoluje real-time paralelní běh několika analýz současně.

Klíčová slova: časově-frekvenční analýza, časově-frekvenční rozlišení, wavelet transformace, Wigner-Ville distribuce, impulsní hluk, rozběhová analýza

Abstract

We can approach from many sides to analysis of nonstationary signals. In context of this thesis we consider studying by mean of time-frequency decomposition which poses one of main fundamental tools of technical diagnostics. We choose pair of typical nonstationary effects from this area, however each is very different. The aim of this work is to deduce the most practical forms of time-frequency methods suitable for implementation in stand alone application too.

Run-up sound or vibrations responses are example of nonstationary signals originally from rotary machines. Diagnostic run-up tests are very helpful in inspection of operational deflection shapes. Also in this cases the time-frequency precision is a most essential issue. The correct method has to optimally balance between capability of time and frequency localization under signal dynamics changes. Use of order analysis or adaptive filtering scheme is ideal solution. This work is proposing new adaptive technique Gaussian-windowed STFT bypassing need of tacho signal measurement in previously mentioned methods. It is possible due to continuous tracing of dominant harmonics in spectra evolution.

Impulsion noises, how we called nonstationary transient responses from noncyclic mechanisms, are second choose example. The most critical parameter here is a short duration of impulse process. This induces strict demands on time resolution of applied methods. This works shows that it is a wavelet transformation and Wigner-Ville distribution and theirs variety which producing the most suitable results. All of these methods are well elaborated here. New version of time-frequency method combined wavelet and Wigner-Ville distribution at once are presented too. These special forms are applicable at offline analysis from records.

The unified platform for running time-frequency analysis in real situation provides PC application called „JTFAToolbox“. This software is dominant practical output of this thesis. Modular structure of JTFAToolbox is a key feature allowed us create all measurement components – data acquisition, pre-process, post-process, visualization – on single unique framework. Current program implementation includes all mentioned methods as well as classical tools represented by STFT and CPB. In dependence on hardware performance the JTFAToolbox allows concurrent computation of several analysis in real-time.

Keywords: time-frequency analysis, time-frequency resolution, wavelet transformation, Wigner-Ville distribution, impulse noise, run-up analysis

Prohlášení

Byl jsem seznámen s tím, že na mou disertační práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 o právu autorském, zejména § 60 (školní dílo).

Beru na vědomí, že Technická univerzita v Liberci má právo na uzavření licenční smlouvy o užití mé práce a prohlašuji, že souhlasím s případným užitím mé disertační práce (prodej, zapůjčení apod.).

Jsem si vědom toho, že užít své disertační práci či poskytnout licenci k jejímu využití mohu jen se souhlasem Technické univerzity v Liberci, která má právo požadovat ode mne přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, vynaložených univerzitou na vytvoření díla (až do jejich skutečné výše).

Disertační práci jsem vypracoval samostatně s použitím uvedené literatury, pod vedením školitele.

V Liberci 11. 01. 2009

Ing. Jiří MAREŠ

.....

Obsah

1	Analýza nestacionárních jevů	13
1.1	Úvod – signály a časově-frekvenční analýza	13
1.2	Motivace – současný stav problematiky	14
1.3	Cíle disertační práce	15
2	Základy časově-frekvenční analýzy	18
2.1	Specifika nestacionárního projevu	18
2.2	Harmonická analýza	19
2.3	Časově frekvenční pohled	20
3	Lineární metody JTFA	21
3.1	Fourierova transformace	21
3.1.1	Krátkodobá Fourierova transformace	22
3.1.2	Časově frekvenční rozlišení	24
3.1.3	Okamžitá frekvence	28
3.1.4	Volba okénka	29
3.2	Digitální filtry	30
3.2.1	Specifikace filtru	30
3.2.2	Rekurzivní a nerekurzivní formy	31
3.2.3	Struktury a implementace	32
3.2.4	Decimace a interpolace	33
3.3	Banky filtrů	34
3.4	Wavelet transformace	35
3.4.1	Multiresoluční analýza	36
3.4.2	Třídy waveletů	37
3.4.3	Vytváření waveletů	38
3.4.4	Rychlá wavelet transformace	40
3.4.5	Implementace diskrétní wavelet transformace	42
4	Kvadratické metody analýzy	44
4.1	Časově proměnná autokorelace	45
4.2	Wigner-Ville distribuce	46
4.2.1	Diskrétní Wigner-Ville distribuce	48
4.2.2	Cohenovy třídy	50
4.2.3	Implementace diskrétní Wigner-Ville distribuce	52
4.3	Analýzy vyšších stupňů	54
5	Speciální metody JTFA	56
5.1	Adaptivní Gaussova STFT	56
5.1.1	Vlastností Gaussova okna	58
5.1.2	Princip adaptivnosti	61
5.1.3	Rozběhová analýza	64
5.1.4	Přesnost a omezení	66
5.2	Real-time diskrétní Pseudo-WVD	67
5.2.1	Motivace	68
5.2.2	Optimalizace výpočtu	69

5.2.3	Vlastnosti.....	72
5.3	Real-time diskrétní Wavelet transformace.....	74
5.3.1	Srovnání s konvenčními metodami.....	75
5.3.2	Algoritmus DWT.....	78
5.3.3	Dyadická a lineární kaskádová struktura DWT.....	80
5.3.4	Kompensace skupinového zpoždění.....	82
5.3.5	Příklady aplikace.....	84
5.4	Wigner-Ville série.....	88
5.4.1	Časové a frekvenční řezy jako WVD série.....	88
5.4.2	Vylepšení JTFA obrazu.....	93
5.4.3	Použitelnost.....	96
6	Aplikace, JTFA Toolbox.....	99
6.1	Struktura programu.....	99
6.2	Zdroje signálových dat.....	101
6.3	Analýzátory.....	102
6.3.1	Pre-proces blok.....	103
6.3.2	Výpočetní blok.....	105
6.3.3	Multibuffer.....	106
6.4	Výstupy.....	106
7	Závěr.....	108
7.1	Shrnutí.....	108
7.2	Dosažení cílů.....	109

Seznam Obrázků

Obr. 3.1 Účinek okénka v čase	14
Obr. 3.2 Účinek okénka ve spektru.....	14
Obr. 3.3 Ilustrativní znázornění časově-frekvenčního (Heisenbergova) boxu.....	16
Obr. 3.4 Časové rozlišení Gaussova okénka	18
Obr. 3.5 STFT spektrum složeného signálu.....	19
Obr. 3.6 Specifikace frekvenční charakteristiky filtru.....	22
Obr. 3.7 Struktury číslicových filtrů.....	24
Obr. 3.8 Kaskádní struktura vytvářející exponenciální banku filtrů.....	25
Obr. 3.9 Kaskádní stromová struktura vytvářející lineární banku filtrů.....	25
Obr. 3.10 JTFA Rozlišení dyadických waveletů.....	29
Obr. 3.11 Příklady wavelet a scale funkcí.....	30
Obr. 3.12 Analytická a syntetizující biortogonální kvadrurní banka filtrů.....	31
Obr. 3.13 Banka filtrů diskretní wavelet transformace.....	33
Obr. 4.1 Wigner-Ville distribuce na příkladu komponentního signálu.....	38
Obr. 4.2 Wigner-Ville distribuce reálného a analytického signálu.....	40
Obr. 4.3 WVD distribuce, různé 3D pohledy.....	41
Obr. 4.4 AF distribuce.....	42
Obr. 4.5 PWVD, demonstrace eliminace interference.....	43
Obr. 4.6 Postup výpočtu diskretní PWVD, optimalizovaný algoritmus.....	44
Obr. 5.1 Modelový přeladovaný harmonický signál a odpovídající spektrogram.....	46
Obr. 5.2 Reálný signál rozběhových vibrací a odpovídající spektrogram	47
Obr. 5.3 STFT přeladované harmonické s různou šířkou okna.....	48
Obr. 5.4 Účinek σ na tvar normalizovaného okna.....	49
Obr. 5.5 Měření šířky pásma pomocí analogie s Gaussovo funkcí.....	50
Obr. 5.6 Souvislost mezi původní šířkou pásma signálu, σ a výslednou šířkou	51
Obr. 5.7 Optimální σ Gaussova okna.....	52
Obr. 5.8 Demonstrace vývoje měřené šířky pásma signálu B a okénka.....	54
Obr. 5.9 Srovnání pevné a variabilní STFT.....	54
Obr. 5.10 Detail rozběhu z Obr. 5.9, a - Hannovo okno, b - Adaptivní Gaussovo okno.....	55
Obr. 5.11 Limitace adaptivní STFT, a – STFT, b – Adaptivní STFT.....	56
Obr. 5.12 Spektrogram frekvenční modulace sinovou vlnou. a – WVD, b – adekvátní STFT.....	57
Obr. 5.13 Varianty FIR Hilbertovo transformátorů.....	60
Obr. 5.14 Princip PWVD preprocesoru, výpočet analytického signálu.....	61
Obr. 5.15 Rozjezdové spektrogramy.....	62
Obr. 5.16 Impulsní spektrogramy hlukové odezvy (N je počet spektrálních čar).....	62
Obr. 5.17 Detail odezvy zvuku dveří.....	63
Obr. 5.18 PWVD s analytickým signálem a PWVD s interpolací signálu.....	63
Obr. 5.19 Časově-frekvenční charakteristiky CPB a DWT filtrů.....	65
Obr. 5.20 Schema navrhovaného DWT analyzátoru.....	66

Obr. 5.21 CPB ve srovnání s DWT.....	67
Obr. 5.22 Způsob harmonizace chodu výpočtu dyadické DWT.....	69
Obr. 5.23 Srovnání dyadické DWT „sym8“ s FFT a WPT „sym8“.....	69
Obr. 5.24 Časové odezvy dyadické a lineární waveletové banky filtrů.....	70
Obr. 5.25 DWT bez kompenzace a s časovou kompenzací skupinového zpoždění.....	72
Obr. 5.26 Dyadická wavelet a FFT a analýza impulsních hluků.....	73
Obr. 5.27 Dyadická wavelet a FFT a analýza impulsních hluků - frekvenční zoom.....	74
Obr. 5.28 Srovnávací rozběhová analýza pomocí technik wavelet a FFT transformace.....	74
Obr. 5.29 Srovnání spektrogramů podle STFT, PWVD a IPWVD.....	77
Obr. 5.30 Rekonstrukce wavelet paketového rozkladu.....	78
Obr. 5.31 Vylepšená PWVD v kombinaci s WPT „sym8“ a WPT „db25“.....	79
Obr. 5.32 Detail JTFA impulsního hluku.....	79
Obr. 5.33 WVD obrazy waveletů „db12“ pro WPT na úrovni 3.....	81
Obr. 5.34 Vylepšení obrazu WPT pomocí WVD.....	81
Obr. 5.35 WVD obrazy waveletů „sym8“ pro 4 stupňovou DWT.....	82
Obr. 5.36. Vylepšení obrazu dyadické DWT pomocí WVD.....	82

Seznam zkratek a symbolů

Algebra

L^n	Prostor funkcí integrovatelných v mocnině n
l^n	Prostor posloupností integrovatelných v mocnině n
$\Re$	Obor reálných čísel, reálná část
$\Im$	Imaginární část
$\mathbb{C}$	Obor komplexních čísel
$\Re \rightarrow \mathbb{C}$	Zobrazení
$L_x, L\{f\}$	Lineární operátor L
$\langle x, y \rangle$	Skalární součin
$x \in \langle A, B \rangle$	Definice oboru hodnot
x^*	Komplexně sdružený k x
$ x $	Absolutní hodnota
$\ x\ $	Norma
$x * y$	Konvoluce
$x \equiv \hat{x}$	Ekvivalence

Matematická analýza

$x[n], x(t)$	Diskrétní a spojitý časový průběh
$\hat{x}[k], \hat{x}(\omega)$	Diskrétní a spojitý obraz Fourierovy transformace
F_k	Koeficient Fourierovy řady
σ	Kvadratická odchylka
$\eta(t)$	Heavisideův krok
$\delta(t)$	Dirackova funkce
Δ_t	Rozdíl, absolutní šířka v čase
B	Šířka frekvenčního pásma
$\Theta(t)$	Fáze
$\omega(t), \Theta'(t)$	Okamžitá úhlová frekvence
f	Frekvence, Digitální frekvence
f_s	Vzorkovací frekvence

$\psi(t)$, $\psi_{n,s}$	Mateřský wavelet, Spojitý dceřiný wavelet
$\psi_{n,m}$, $\psi_{n,m,k}$	Diskretizovaný dceřiný wavelet
$\phi(t)$, $\phi_{n,s}$	Měřitková funkce, Spojitá dceřiná měřitková funkce
$F(z)$	Obraz Z-transformace systému F

Časově-frekvenční analýza

E_x	Energie
P_x	Výkon
$P_x(\omega)$	Spektrum
$S_x(t, \omega)$	Časově-frekvenční Fourierova transformace
$W_x(u, s)$	Wavelet transformace
$P_x(t, \omega)$	Spektrogram
$R_{xx}(t)$, $R_{xx}(t_1, t_2)$	Autokorelace, časově závislá autokorelace
R_{nx}	Autokorelace řádu n
$V_x(t, \omega)$	Wigner-Ville distribuce
$A_x(t, \omega)$	Funkce dvojznačnosti
$C_x(t, \omega)$	Cohenovy třídy
FT	Fourierova transformace, operátor Fourier transformace
WT	Wavelet transformace, operátor Wavelet transformace
$H_x(t)$	Hilbertova transformace
$GD(\omega)$	Skupinové zpoždění

Zkratky

AF	Funkce dvojznačnosti, analýza tohoto typu
CPB	Procentuelně konstantní šířka pásma, analýza tohoto typu
DFT	Diskrétní Fourierova transformace, analýza tohoto typu
DP, LP	Dolní propust, filtr tohoto typu
DWT	Diskrétní Wavelet transformace, analýza tohoto typu
FFT	Rychlá Fourierova transformace, analýza na ní založená
FIR	Konečná impulsní odezva, filtr tohoto typu
GD	Skupinové zpoždění
HOSA	Analýzy vyšších řádů
HP	Horní propust, filtr tohoto typu
IIR	Nekonečná impulsní odezva, filtr tohoto typu
IPWVD	Vylepšená Pseudo Wigner-Ville distribuce, analýza tohoto typu
JTFA	Spojená časově-frekvenční analýza
OS	Operační systém
PFB	Polyfázová banka filtrů
PWVD	Pseudo Wigner-Ville distribuce, analýza tohoto typu
QMF	Kvadrurní zrcadlová banka filtrů
RT	Real-time
STFT	Krátká Fourierova transformace, analýza tohoto typu
WVD	Wigner-Ville distribuce, analýza tohoto typu
WPT	Wavelet paketový rozklad, analýza tohoto typu
WVF	„Waveform“, analýza časového průběhu

1 Analýza nestacionárních jevů

1.1 Úvod – signály a časově-frekvenční analýza

Škála případů nestacionárních jevů je o mnoho širší a komplexnější než rodina případů stacionárních. Nezávisle na detailním rozboru terminologie budeme dopředu tvrdit, že stacionární jevy jsou speciálním případem obecnější množiny jevů nestacionárních. V závislosti na detailu analýzy je možné stacionární projevy sledovat i v reálných podmínkách. Mnohem snáze a v ryzejší formě na ně nicméně narazíme v teorii nebo simulacích. Dá se říci, že toto bude i náš případ. Díky analýze modelových příkladů stacionárních jevů, respektive uměle připravených stacionárních signálů, demonstrujeme odlišnosti „světa“ nestacionárního.

Formy analýzy, které budeme dále nazývat jako klasické, jsou odvozeny právě pro typy signálů stacionárních, které v celém vyšetřovaném oboru svůj charakter nemění. Charakterem signálu vnímáme soubor dominantních parametrů, s nimiž bychom signál dokázali jednoznačně matematicky popsat. Pro deterministické signály to může být právě frekvence, amplituda, u náhodných signálů preferujeme střední hodnotu a rozptyl. Nezávisle na volbě charakteristických parametrů musí platit, že pro jakýkoli vyšetřovaný detail, respektive výběr v náhodném signálu, musí být tyto parametry konstantní, a to proto, aby se dalo s klasickými metodami jednoznačně pracovat. Pro nestacionární signály toto neplatí, jejich použití s klasickými nástroji podléhá tudíž mnoha omezením.

Z pohledu frekvenční analýzy signálů považujeme v tomto textu za klasické metody Fourierovu transformaci a její diskretizované odnože ve formě DFT a FFT analýzy, Tůma [13], plus metody CPB analýzy, Randall [4]. Oba jmenované zástupce známe hlavně jako prostředky vyšetřování stacionárních jevů, kdy se naopak snažíme fluktuace charakteristických parametrů v rámci jednotlivých časových realizací eliminovat, například i prostřednictvím průměrování frekvenčních komponent – viz. problematika odhadování spekter, Randall [4], Uhlíř, Sovka [12]. Je nicméně běžnou praxí, že se klasických analýz použije i pro vyšetřování vlastností nestacionárních jevů. Zde nás pak nezajímá globální charakter signálu, čili celkové výkonové spektrum, ale vývoj frekvencí a amplitud v závislosti na čase – spektrogram, Qian, Chen [3].

Známa tak je zejména angl. „Short-time Fourier transformation“, zkráceně STFT. Jako následník DFT analýzy je STFT vůbec nejznámější JTFA metodou, a to také proto, že její vlastnosti jsou v jádru obdobné tomu, co je nám z DFT blízké. Zásadní je vynechání průměrování jednotlivých komponent. Do popředí vstupuje více tvar okénka a míra překrytí, neboť ty pak definují nezbytné časové parametry spektrogramu. U CPB by se optimalizace přibližující jí směrem k JTFA týkaly vynechání kvadratického členu na výstupu a opět vypuštění průměrování.

Problémem je, že tento zásah nebývá v analyzátorech možný, a tak se s CPB spektrogramy příliš často nesetkáváme.

Popsaný postup úpravy klasických metod je použitelný a také velmi používaný, nicméně není vzhledem k původnímu účelu přirozeným prostředkem JTFA. Tím je především Wigner-Vile distribuce, Cohen [15], a v posledních letech oblíbená Waveletová transformace, Strang, Nguyen [2]. Rozbor těchto metod, v kontextu aplikací a podobností s klasickými metodami, bude centrální částí teoretické stati této práce.

1.2 Motivace – současný stav problematiky

Vyjmenované metody jsou již zažitými časově-frekvenčními analýzami. Klasickou STFT nalezneme i v průmyslových analyzátorech, Wavelet ani Wigner-Vile distribuce však do této oblasti neprorazily. Zčásti to může být odlišnou metodikou výpočtu (a s tím spojenou jinou interpretací výsledků, na kterou není technická veřejnost v aplikacích zvyklá), zčásti proto, že zavedené postupy jsou pro většinu existujících problematik naprosto vyhovující.

V dalších úvahách se omezíme na specifický obor – technickou diagnostiku vibrací a hluku, Kadlec [6], Tůma [13], neboť tento segment je naprosto typický pro používání frekvenčních a JFTA metod. Nestacionární projevy, s kterými se zde vypořádáváme, se týkají hlavně diagnostiky strojů a jevů pracujících necyklicky, impulsně nebo rozběhů a zastavení strojů rotačních. Ty budou naším centrem zájmu.

Že klasické nástroje plně dostačují i v nestacionárních případech hezky demonstruje právě rozběhová analýza, pro kterou existuje speciálně účinný nástroj ve formě řádové analýzy. Pomocí neuniformního vzorkování dokáže signál nestacionárního jevu nasnímat jako stacionární, s ohledem na jeho majoritní rysy. Následně není problém použít jednoduchou STFT bez rizika rozmazání spektra vlivem změny otáček. Rozběhové charakteristiky jsou vůbec dobře prostudovanou oblastí diagnostiky, na výběr máme k dispozici kromě řádové analýzy také synchronní průměrování nebo adaptivní Vold-Kalman filtraci, Pelant, Tůma, Beneš [16]. Všechny tyto metody ale principiálně vyžadují trigrovací, nebo alespoň tachometrický signál. Pokud jej nemáme, pak jsme závislí na dobrém odhadu dynamiky změny otáček, která nás bude limitovat v ideálním naladění STFT v porovnání se stavem, kdy by byla tato změna konstantní.

Příklady, kdy sledujeme necyklický projev, zná technická praxe nespočet. Velkou rodinou jsou impulsní děje. Původem mohou být z impulsní identifikace soustav (modální kladívko, měření dozvuku akustického prostoru), nebo z projevu různých mechanismů. Možnosti analýzy těchto signálů jsou mnohdy limitované jejich extrémně krátkým trváním.

Zvyšování vzorkovací frekvence není vždy univerzálním řešením, neboť odezva běžných

akustických, nebo mechanických systémů bývá frekvenčně omezena, a tak jen zbytečně zvyšujeme objem dat, které už ale nenesou další informaci. Sami frekvenční rozsah v těchto měřeních záměrně limitujeme, a to zejména jedná-li se nám o interakci systému s člověkem – jak v případě vibrací, tak zvuku, je přehnané analyzovat frekvence vyšší jak 20kHz, Brüel & Kjær [50], Brüel & Kjær [51]. Z hlediska časově-frekvenčního rozlišení jsou impulsní signály velmi kritické, neboť vybudí všechny frekvence a tím i módy systému současně. Odezvy jednotlivých jevů následují velmi rychle po sobě, odstupňovány prakticky jen podle fázových poměrů na jednotlivých módech. Chceme-li mít navíc ke spektrální charakteristice přehled i o časových poměrech, tak abychom mohli jednotlivé komponenty odezvy separovat, pak je STFT nástrojem opravdu poměrně hrubým.

S implementací pokročilých metod JTFA se avšak setkáme prakticky pouze u jednoúčelových zařízení, která jsou mnohdy pouze demonstračního charakteru, nebo u nástrojů „vědeckých“, Fiácrio, Pederiva [8], Zou, Chen [28]. Zde v této práci používáme pro testování a vizualizaci jednotlivých JTFA metod Matlab. Prosazení komplexnějších JTFA principů do technické diagnostiky vyžaduje vytvoření softwaru s intuitivním ovládáním, podobným tomu co je pro praxi zařízené, doplněný o odpovídající vizualizaci. Takový produkt zatím neexistuje, můžeme pouze spekulovat, jak široce by ho odborná veřejnost uvítala.

Rozšíření zatím zajisté brání i komplikovanost pokročilejších metod, respektive nároky na technickou způsobilost obsluhy, zejména pokud budeme klást důraz i na online vyhodnocení výsledků. V poslední době nicméně vstupuje do popředí automatická provozní diagnostika zajišťující preventivní inspekci zařízení, kde jsou tyto požadavky velkou měrou eliminovány, protože i expertní úlohu přebírá software. To nahrazuje zejména real-time implementacím JTFA metod, Boashash, Black [20], Brogioli, Vailati [29]

1.3 Cíle disertační práce

JTFA metodiky jsou velmi dynamickým oborem, kde se neustále daří objevovat jak nové postupy, tak nová pole aplikací. Co si disertační práce za cíl nedává, je kompletní zmapování a popis všech existujících variant JTFA. Tato řešeršní činnost stojí nicméně v pozadí teoretických závěrů a řešení zde podaných. Práce chce směřovat do průzkumu a vývoje JTFA pro speciální účely, které jsme vytypovali podle požadavků aplikované analýzy signálu v oboru technické diagnostiky. Jak už bylo naznačeno, jsou velmi zajímavými problémy analýza přeladovaných a impulsních vibro-akustických signálů. Takto profilovaný záběr nám umožnil vyfiltrovat z plejády časově-frekvenčních analýz kandidáty nejpraktičtějších přístupů, které jsme přizpůsobili těmto konkrétním účelům. Teoretická s'tat se proto nechystá vyjmenovávat všechny stávající variace JTFA metod, ale reviduje jen obecné principy, které nejsou z pohledu autora zcela triviální, a na

něž následně navazuje mnohem konkrétnější pasáž speciálních metod.

Stálým tématem úvodních popisných kapitol je vztah mezi možnostmi časové a frekvenční lokalizace jevů v signálu. U lineárních metod vycházíme z elementárních principů frekvenční analýzy, Smith [11], a digitální filtrace, Davídek, Laipert, Vlček [1], obě metody pak rozvineme i do rozměru časově-frekvenčního. Cílem je zdůraznit jak se známé parametrizace frekvenční charakteristiky vztahují k časové rovině, neboť tento aspekt zůstává v klasické spektrální analýze opomenut. Navrhujeme několik variant výpočtu časového rozlišení, odvozených ze známých odhadů, porovnáme vhodnost jednotlivých, Peyrin, Prost [21].

Zajímavé je také sledovat podobnost lineárních metod analýzy z nadhledu, který nám dává algebraické pojetí transformací, Rektorys [52]. Pomocí různýchází můžeme přecházet od čistě časového pojetí Eukleidovské báze k čistě frekvenční bázi Fourierově. Za zobrazení (nadprostor) ležící mezi nimi a zároveň spojující oba pohledy může být pokládána waveletova transformace, která se volitelně pohybuje mezi oběma extrémy, Mallat [5]. Tento pohled zdůrazníme v momentě kdy se nám podaří sjednotit diskrétní dyadickou waveletovu transformaci se známou a zdánlivě nesouvisející oktávovou CPB.

Praktické aplikační cíle, ke kterým má práce vyústit, se odvíjejí od speciálních forem JTFA vyvinutých s proklamovaným úmyslem vylepšit stávající metodiku analýzy rychlých rozběhů a impulsních měření. Ukážeme, že navržené algoritmy zasahují širší rámec případů, a že již jednou vypracované funkce mohou být nasazeny opakovaně i jinak. Porovnání jednotlivých přístupů provedeme na příkladech získaných měřeními z reálných dějů. Stěžejními budou záznamy vibrací a hluku z rozjezdových měření na motorových vozidlech a původní rázové hlukové odezvy zavírání bočních a zavazadlových dveří osobního automobilu. Volba právě těchto případů nestacionárních jevů není samoučelná, ale reflektuje požadavky odborníků, tak jak je autor zaznamenal a jak mu byly předloženy při jeho několikaměsíčním praktikantském působení v Akustické zkušebně Škoda Auto Mladá Boleslav.

Obě uvedené problematiky se již standardně v časově-frekvenční oblasti studují, Genuit [27], Shi, Tsung, Unsworth [7], a jsou také typickými příklady nestacionárních jevů. Z tohoto důvodu je volba těchto oborů ideální pro demonstraci teoretických i praktických výsledků práce „Časově frekvenční analýza nestacionárních jevů“. Svým charakterem toto téma zapadá i do zaměření Laboratoře Technické Diagnostiky na Katedře Měření, kde výzkum a vývoj probíhal. V návaznosti na další činnosti laboratoře se v tomto textu budeme obecně srovnávat i s jinými aplikacemi technické diagnostiky.

Ne všechny metody JTFA jsou na běžných procesorech typu PC nebo jednočipových signálových mikroprocesorech realizovatelné v provedení real-time. Pokud to však bylo

teoreticky možné, byl tento rys ve výsledných algoritmech zásadně prosazován. Důraz na real-time zpracování není nadbytečnou demonstrací výpočetních možností, ale zásadním nástrojem online měření poskytujících okamžitá vyhodnocení sledovaných parametrů, Wang [23], Çankaya [49]. Moderní je zejména nasazení JTFA v provozní diagnostice vibrací, online výstupní analýzy kvality v sériové výrobě, široká paleta problematiky rozpoznávání obrazu a hlasu, apod. Metou úsilí investovaného v důrazu na real-time podstatu realizovaných analýz budou zejména algoritmy paketového wavelet rozkladu a Wigner-Ville distribuce, u kterých jsme vysoké nároky na výpočetní výkon dopředu předpokládali. Ač se v práci separátně zmiňujeme právě jen o těchto dvou, byly podobně naprogramovány i analýzy typu STFT, CPB a DWT.

Veškerá autorská práce ve finále ústí v realizaci kompaktního programu tvořícího platformu pro jednotlivé JTFA analýzy. Šíře této aplikace, dále nazývané „JTFA Toolbox“, pokrývá celý rámec kroků pro komplexní měření – akvizice vzorků, předzpracování, analýza, postzpracování, vizualizace, uložení – vše se zohledněním interaktivní obsluhy a real-time výstupu. Celý software je realizován objektově v C++, grafické rozhraní je vytvořeno za pomoci prostředí Borland Builder 6.

Dá se říci, že impulsní jevy nicméně real-time přístup ze své podstaty nevyžadují. Krátké trvání děje nás nenutí zpracovávat signál hned, naopak je předpokladem k použití i výpočetně náročných offline analýz ze záznamu. Naším zástupcem v tomto oboru budou speciální Wigner-Vile distribuce, Cohen [25], syntetizované za pomoci časově frekvenční dekompozice, tzv. WVD Série. Teoretický fundament tohoto přístupu jsme čerpali z Gaborových reprezentací ve spojení s diskretní Pseudo-WVD (zkráceně PWVD), Qian, Chen [3]. Zobecněním ortogonální frekvenční dekompozice, zmiňované v Mallat [36], na velmi jemný časově-frekvenční rozpad signálu pomocí waveletových transformací a následnou aplikací PWVD dosahujeme extrémního rozlišení i pro nejkratší záznamy. Spektrogram získaný pomocí sérií WVD se přibližuje jeho spojité analytické formě.

2 Základy časově-frekvenční analýzy

Analýzou signálů máme v našem případě na mysli časovou, frekvenční a spojenou časově-frekvenční dekompozici signálu. Signál může být obecně závislý na libovolném lineárním parametru, nejtypičtěji se jedná o záznam časové realizace. V našem pojetí tomu tak skutečně bude, plně nám proto vyhovuje i zavedená terminologie operující s pojmem časově-frekvenční analýza, zkráceně JTFA z anglického „Joint Time-Frequency analysis“.

Je pravidlem, že z technické praxe máme velmi dobrou představu o tom, co znamená frekvenční analýza, avšak termín časová analýza nemusí být obvyklý a jasný. Ve skutečnosti tím myslíme běžné sledování změn úrovně signálu, tak jak nám je například zachycuje vzorkovaný diskretizovaný záznam. Ne vždy jsou z časového záznamu hledané jevy ihned patrné. Zkoumáme-li například akustické echo, pak se teprve aplikací autokorelace signál přetvoří v jinou časovou závislost, ve které bude odraz patrný. Korelační metody řadíme proto také do časových analýz. Pokud nás tedy zajímá časová odezva filtru pak za další příklad aplikované časové analýzy můžeme pokládat také filtraci (konvoluci), například při průměrování.

Nezávisle na prostředku je motivem časové analýzy nalezení doby vzniku a délky trvání hledaného projevu. Zjednodušeně a pro úplnost dodejme, že účelem frekvenční analýzy je určení podílu jednotlivých kmitočtů ve sledované realizaci, přeneseně pak určení frekvenční citlivosti systému jako celku.

2.1 Specifika nestacionárního projevu

Sledování energetických nebo výkonových ukazatelů, které základně definujeme jako (2.1) a (2.2), je dobrým východiskem pro klasifikaci druhů signálu. První možné členění na periodické a neperiodické je dané přímo existencí integrálů (2.1) resp. (2.2), Randall [4]. E_x je definován jen pro signály s omezeným oborem, nebo alespoň takové, pro které $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t) = 0$. Tento vztah neplatí pro periodický signál, jej je vhodné vyčíslovat pouze výkonově pomocí P_x .

$$E_x = \int_{t=-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \quad (2.1)$$

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{t=-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt \quad (2.2)$$

Pokud aplikujeme obecnější (2.2) na posunuté časové série trvání T , mohli bychom sledovat vývoj výkonu v čase. Z tohoto pohledu je signál buďto stacionární, nebo nestacionární. Pro náhodné signály nahrazujeme stanovení P_x adekvátním výpočtem střední hodnoty a

rozptylu. K označení signálu jako nestacionárního je nutná podmínka změny vybraných ukazatelů v závislosti na pořadí realizace, nebo délce T . Stacionární signály naopak mají zvolené ukazatele invariantní vůči jakémukoliv výběru. Platí, že každý měřený fyzikální signál je obecně možné považovat za nestacionární. Záleží na zvoleném měřítku, neboli na detailu, v jakém budeme signál zkoumat a jakou míru změny budeme už považovat za projev nestacionarity.

Kritériem nestacionarity se nemusíme omezovat pouze na veličiny výkonového charakteru, ty jsme na úvod použili pro jejich obecnost. Z pohledu časově-frekvenční analýzy za nestacionární považujeme signál, či projev, u něhož dochází k nějakému časovému vývoji dominantních frekvenčních komponent, Matz, Hlawatsch, Kozek [47]. Nástrojem vyhodnocení míry nestacionárnosti je pro nás časově-frekvenční distribuce výkonu, tzv. spektrogram. Rozbor a projev nestacionárních signálů ve spektrogramu je společným motivem táhnoucí se celým textem, detailnější teoretický i praktický pohled bude podán níže.

Dynamika změn nestacionárních projevů dovoluje další jemnější dělení označující speciální formy nestacionarit. V této fázi už se již zaměříme pouze na časově-frekvenční problematiku, ve které jsou pro nás důležité dva druhy – kontinuální a přechodové nestacionarity, z anglických termínů „continuous“ a „transient“. Za průběžné (kontinuální) nestacionarity považujeme projevy odvozené od frekvenčních a amplitudových modulací. Ty mohou být vytvářené prakticky všemi cyklicky pracujícími stroji. Přechodové signály jsou v podstatě odezvami libovolných jevů končící v limitě času ustálením, jako jsou například impulsní odezvy známé z modální identifikace soustav.

2.2 Harmonická analýza

Harmonická, neboli frekvenční, analýza je pro nás zobrazením vektorového prostoru pomocí harmonické báze, Brown [46]. Stejně platné a známější označení je také Fourierova transformace. Nejobecněji je definována na Hilbertových prostorech, což jsou vícerozměrné vektorové prostory s definovaným skalárním součinem a normou, Johansson [45], (2.3).

$$\langle x, y \rangle < \infty, \quad \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} < \infty \quad (2.3)$$

Fourierova transformace je ortogonální transformací, protože skalární součin dvou bázevých vektorů je 0. Řadí se tak k dalším variantám lineárních transformací jaké známe například z polynomičtých aproximací - Jacoby, Čebyshev, Hermit. I Fourierova transformace se dá sjednotit s aproximací harmonickými polynomy, jak je nazývána báze pro Fourierovu řadu, Rektorys [52]. Pro úplnost dodáme, že i časová posloupnost vzorků, čili diskretizovaný signál, je Hilbertovým prostorem definovaným tzv. Euklidovskou bází.

Nám bude stačit, i pokud se u Fourierovy transformace omezíme na spojitě prostory

funkcí integrovatelných absolutně a s kvadrátem, L^1 a L^2 , respektive obdobné prostory posloupností l^1 a l^2 . Obecně pracujeme nad množinou komplexních čísel $\mathbb{C}$, protože s Fourierovou transformací musíme zacházet jako se zobrazením $\mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$. Ve speciálních případech si budeme pomáhat rozšířenou komplexní analytickou formou signálu, pak půjde o zobrazení $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

Uvažujeme-li číslíkové zpracování signálů, pak je l^1 klasickým diskretizovaným časovým záznamem. Výsledkem harmonické analýzy l^1 je frekvenční a fázová amplitudová charakteristika. Kvadratická forma l^2 , respektive její harmonická analýza, je označována jako spektrální. Ta bude naší sjednocující formou výsledků, protože z l^1 do l^2 umíme přejít jak v časové, tak frekvenční bázi. Konverzní definice se řídí Parsevalovo rovností, ve Fourierově transformaci vedoucí ke stejné známým Winer-Chinchinovým vztahům, Mallat [5].

Spektrální analýza je zásadní pro vyšetřování frekvenčního rozložení výkonu v signálu, specifitěji pak pro výpočet spektrálních matic v modální analýze mechanických soustav. V experimentální identifikaci slouží pro měření rezonančních frekvencí a tlumení dynamických soustav, nebo jako podíl spekter k odhadu přenosových funkcí obecně.

2.3 Časově frekvenční pohled

Časově frekvenční analýza, postavená na lineárním zobrazení z Eukleidovské báze do bilineární roviny, využívá vždy nějakého typu báze mající určitou časově-frekvenční lokalizaci. Průběh báze nemusí být konečný, ale praktické formy časově-frekvenčních transformací jiné báze nepoužívají. Jinými slovy říkáme, že báze je kompaktně omezená, kompaktní. Platí, že čím lépe je báze lokalizovaná v časovém průmětu, tím širší bude ve frekvenčním. Obě tyto lokalizace jsou dohromady svázány Heisenbergovým principem neurčitosti. Více bude diskutováno v pozdějších kapitolách. Příklady časově-frekvenčníchází jsou v této práci zastoupeny zejména wavelety a modulovanými komplexními exponenciálami u krátké Fourierovy transformace, Mallat [36].

Harmonická analýza na l^2 je omezena jen pro signály konečné délky, což je zaručeno principiálními omezeními vzorkování. Ukážeme, že existují kvadratické formy $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \times \mathcal{H}$, které jsou ze svého principu časově lokalizovány. Časový záznam se k tomu rozloží na systém tvořený 2D obrazem součinů vzájemně posunutých konečných posloupností. Následná Fourierova transformace složí kompletní časově-frekvenční obraz bez omezení časově-frekvenční neurčitostí. Existují i zobrazení užívající vyšších než kvadratických forem s obdobnými vlastnostmi lokalizace. Abychom byli konkrétnější, pak se v případě kvadratických metod jedná zejména o Wigner-Ville distribuci, kterou se budeme dále zabývat ještě několikrát.

3 Lineární metody JTFA

Pokud kdy byl v historii frekvenční analýzy zásadní analogový přístup k řešení problémů časově frekvenční analýzy, pak její moderní pojetí primárně předpokládá numerické zpracování. Týká se to analýzy všech druhů signálů, ať už umělých, generovaných výpočtem nebo digitalizovaných signálů sejmutých z reálných procesů. Existující analogová řešení, Randall [4], jednotně stavějící na obvodové filtraci signálu, Davídek, Laipert, Vlček [1], byla nicméně schopná JTFA analýzu přeneseně provádět. Mnoho principů se pouze přímo převedlo do číslíkové formy a ve spojení s diskretizací signálu se s nimi setkáváme i nadále.

Právě zmiňovaná filtrace, představovaná konvolucí, a její diskrétní varianta spadají do oboru lineárních operací L , neboť pro ně existují $f(t)$ a $g(t)$ takové, že platí $L\{c_1 f(t) + c_2 g(t)\} = c_1 L_f(t) + c_2 L_g(t)$. Uvedená rovnice, kombinující distributivní a komutativní princip, je zároveň definičním vztahem lineárních operací obecně. Ve skutečnosti je většina nástrojů signálové analýzy, jako aproximace, frekvenční rozklad, filtrace šumu, komprese a podobně, implementována jako lineární časově invariantní operace nebo jejich sled.

Invariantnost lineární operace zesiluje navíc požadavky na chování systému, kterýžto pomyslně reprezentuje. Musí zůstat zachována reprodukovatelnost odezvy systému na identický vstupní signál, nezávisle na čase provádění, tj. pokud platí $L_f(t) = l(t)$, pak musí platit též $L_f(t - \tau) = l(t - \tau)$. V závislosti na konkrétní lineární operaci se setkáme i s vyšetřováním požadavků na kauzalitu (3.1) a stabilitu (3.2). Tyto vlastnosti jsou podmínkou praktické realizovatelnosti a konvergence algoritmů zpracování signálů, kterými se budeme zabývat.

$$L_g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) g(t - \tau) d\tau = \int_0^{+\infty} x(\tau) g(t - \tau) d\tau \quad (3.1)$$

$$|L_g(t)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(\tau)| |g(t - \tau)| d\tau \quad (3.2)$$

3.1 Fourierova transformace

Fourierova transformace (3.4) je dobře známou lineární transformací, jejíž bázi tvoří systém komplexních exponenciál. Fourierův integrál dostaneme také jako součást konvoluce signálu s funkcí $\exp(i\omega t)$, která zároveň představuje model filtru s komplexní harmonickou impulsní odezvou (3.3).

$$x(t) * e^{i\omega t} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{i\omega(t - \tau)} d\tau = e^{i\omega t} \cdot \hat{x}(\omega) \quad (3.3)$$

$$\hat{x}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \quad (3.4)$$

Poslední rovnice nám zdůvodňuje často uváděnou a intuitivní představu o Fourierově rozkladu založeném na teoretickém systému nekauzálních filtrů, navíc s nekonečnými impulsními odezvami. Že je takový model lineární dokládá také to, že výstupem partikulárního filtru je opět komplexní exponenciála, pouze fázově a amplitudově změněná násobením komplexní hodnotou $\hat{x}(\omega)$.

Výsledkem (3.4) je komplexní funkce frekvence. Průběh absolutní hodnoty $|\hat{x}(\omega)|$ odpovídá amplitudové frekvenční charakteristice a podobně $\arctan(\Im \hat{x}(\omega)/\Re \hat{x}(\omega))$ odpovídá fázové frekvenční charakteristice, Čížek [10].

3.1.1 Krátkodobá Fourierova transformace

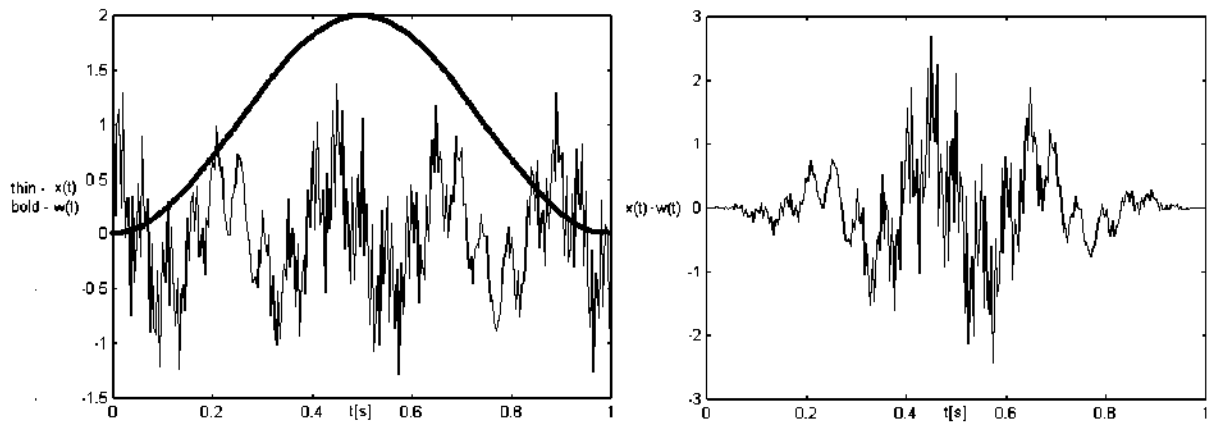
Praktický výpočet Fourierovy transformace se provádí číslicově, na bázi DFT algoritmu. Reálně je nemožné využít nekonečnou realizaci tak, jak by to předpokládal vztah (3.4). Zkrácení záznamu modelujeme násobením signálu $x(t)$ okénkovou funkcí $w(t)$, Obr. 3.1. Ta se vyznačuje zejména omezeným oborem $t \in \langle 0, T \rangle$, mimo který platí, že $w(t) = 0$. Výhodou pak je, pokud $\|w(t)\| = 1$.

$$\hat{x}_w(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) w(t) e^{-i\omega t} dt = \int_0^T x_w(t) e^{-i\omega t} dt \quad (3.5)$$

Za těchto předpokladů můžeme přepsat (3.4) na Fourierovu transformaci, která je časově vymezena okénkovací funkcí $w(t)$, odvození (3.5). Uvedený vztah je odvoditelný i z Fourierovy řady, neboť platí $F_k = \hat{x}_w(2\pi/T \cdot k)$. Výsledné Fourierovy charakteristiky vzorkovaného signálu $x[n]$ tedy netvoří přímo pouze $\hat{x}(\omega)$, ale díky rovnici (3.5) je v něm zanesen i obraz $\hat{w}(\omega)$.

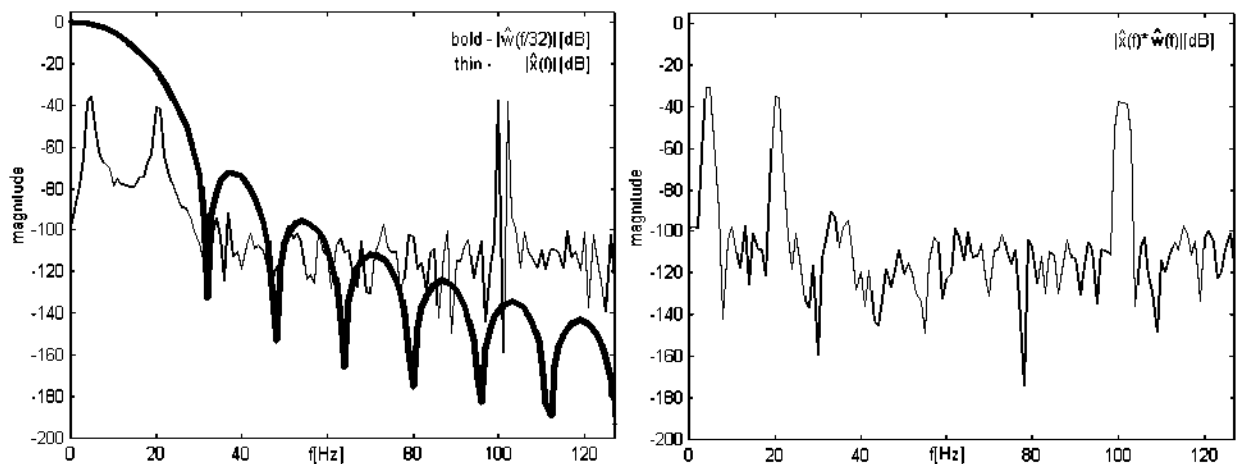
Tvar okénka je volným a velice variabilním parametrem. V rámci předcházejících dvou časových a amplitudových omezení můžeme navázat dalšími požadavky, jež mohou generovat okénkovací funkce speciálních vlastností. Pro nás budou důležitá zejména okénka navržená s důrazem na frekvenční a časovou lokalizaci.

Častěji se pravděpodobně setkáme s okénky spektrálními. U nich jsou zohledněny parametry postihující přesnost určení frekvence vůči přesnosti amplitudy dané významné harmonické složky ve spektru.



Obr. 3.1, *a* - Silně Hannovo okénko $w(t)$, slabě signál $x(t)$, *b* - Zkrácení záznamu násobením $x(t)$ s $w(t)$

Typickým představitelem spektrálních okének je například okno Hannovo, v závislosti na čase na Obr. 3.1 zachyceno silnou čarou. Na relevantnost použití konkrétního okénka pohlížíme ve frekvenční rovině. Obr. 3.2 koresponduje s předchozím, stejné signály pouze zobrazuje v amplitudových frekvenčních charakteristikách. Vidíme, že výsledné spektrum na Obr. 3.2b se od původního Obr. 3.2a dosti liší. Rozdíl má na svědomí právě konvoluce se spektrem okna. V původním spektru například vidíme dobře postižitelný rozdíl mezi dvěma přilehlými komponentami nad 100 Hz, které se ve výsledku slily, u vzdálených harmonických se naopak díky okénku projeví mnohem lepší diferenciaci.



Obr. 3.2, *a* - Silně spektrum $w(t)$ ve 32 násobném frekvenčním zoomu, slabě spektrum $x(t)$, *b* - Účinek okénka ve spektru

Obecně také dojde k roztažení vrcholů výrazných harmonických, a v našem případě i ke zvětšení jejich amplitudy. Jako kvalifikace vlastností okének nám obvykle slouží údaje jako jsou šířka a strmost poklesu hlavního laloku, útlum na druhém laloku, rychlost klesání na vyšších

frekvencích, absolutní útlum, viz. Smith [11]. Ne každé okénko je tedy vhodné na vše, obvykle je jeho volba kompromisem požadavků na přesnost lokalizace harmonické (co nejvýraznější extrém vrcholu) a přesnost měření amplitudy.

Okénka jsou dobře použitelná pro analýzu záznamu stacionárních signálů. V případě, že tomu tak není, je aplikace okna v celé délce záznamu neefektivní. Místo toho se použije okének jako rámce pro dekompozici původního záznamu do série časově posunutých detailů. Uvnitř těchto detailů předpokládáme signál stacionární, což nám dovolí eliminovat rozmazání spektra, ke kterému obecně v rámci přechodových signálů dochází.

Teprve v této souvislosti můžeme mluvit o typické krátkodobé Fourierově transformaci, zkráceně STFT. Principem se nijak neodlišuje od popisované okénkové FT (3.5), okénkovací funkci jen předepíšeme časový posun, který je volným parametrem centrující okénko v rámci původní časové realizace.

$$S_x(\tau, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) w(t - \tau) e^{-i\omega t} dt \quad (3.6)$$

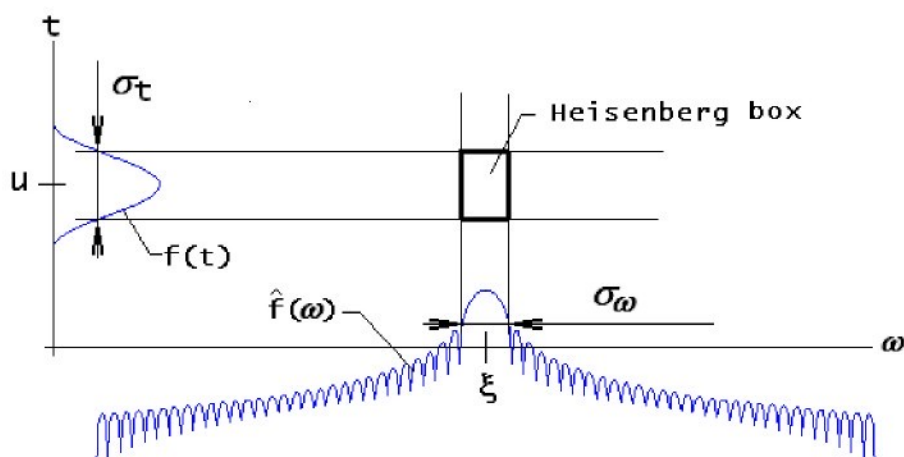
3.1.2 Časově frekvenční rozlišení

Posuvné okénko není jen pomůckou ke zjednodušení výpočtu Fourierovy transformace, důležitým atributem je zejména rozšíření spektrální charakteristiky do 2D, nazývané časově-frekvenční spektrum. Signál se díky časovým posuvům okénka rozpadá do soustavy překrývajících se záznamů, které dále transformujeme do Fourierovy báze. Parametr posuvu τ u $S_x(\tau, \omega)$ vtiskuje partikulárnímu Fourierovu obrazu časovou značku. Spolu s přirozenou časovou distribucí vybraného okénka definuje rozložení a rozlišení STFT v čase. Obdobně frekvenční charakteristika okénka predikuje výsledné frekvenční atributy, Mallat [5].

$$\sigma_t^2 = \frac{1}{\|f\|^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (t - u)^2 |f(t)|^2 dt, \text{ kde } u = \frac{1}{\|f\|^2} \int_{-\infty}^{+\infty} t |f(t)|^2 dt \quad (3.7)$$

$$\sigma_\omega^2 = \frac{1}{2\pi \|f\|^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (\omega - \xi)^2 |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega, \text{ kde } \xi = \frac{1}{2\pi \|f\|^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \quad (3.8)$$

Kvantitativní zohlednění časově-frekvenčního rozlišení nám poskytuje rozptyl v časové (3.7) a frekvenční (3.8) doméně. Pomyslný obraz rozlišení, který takto získáme, odpovídá odmocnině rozptylů tvořící obdélník se stranami σ_t a σ_ω .



Obr. 3.3. Ilustrativní znázornění časově-frekvenčního (Heisenbergova) boxu

Změna jednoho měřítka díky $1/\sqrt{s} f(t/s) \equiv \sqrt{s} \hat{f}(s\omega)$ vede k inverzní změně na straně druhé, plocha pomyslného obdélníku tím zůstává s roztažením zachována. Pro posuv platí, že

$$f(t-u) \equiv e^{-iu} \hat{f}(\omega),$$

což nemá na poměr stran žádný vliv, tím méně pak na jejich součin $\sigma_t \cdot \sigma_\omega$. Plocha representovaná tímto součinem navíc nemůže klesnout pod limit daným Heisenbergovým principem neurčitosti,

$$\sigma_t \cdot \sigma_\omega \geq \frac{1}{2}. \quad (3.9)$$

Mallat [5] krom vlastního vztahu (3.9) také dokazuje, že nejmenší plochu, a to právě $\frac{1}{2}$, bude nabývat funkce s předpisem $f(t) = a e^{i\xi t - b(t-u)^2}$, kde $(a, b, \xi, u) \in \mathbb{R}$. Pro $a=1$, $\xi=-\omega$ dostáváme jádro rovnice (3.6), která jako okénko používá Gaussovu funkci $w(t) = a e^{-bt^2}$ modulující komplexní harmonickou $e^{-i\xi t}$. Takovou STFT nazýváme někdy Gaborova analýza, ikdyž známější je její inverzní forma - Gaborova expanze. Pro výpočet časově frekvenčního rozlišení obecné STFT musíme za $f(t)$ dosadit $f(t) = w(t-\tau) \cdot e^{-i\omega t}$.

Z pohledu aplikované časově-frekvenční analýzy není určení variace typickým parametrem, kterým bychom rozlišení skutečně popisovali. Pro velkou skupinu funkcí je analytické určení σ_t a σ_ω neřešitelné. Historicky i prakticky se častěji spoléháme na empiricky zvolené ukazatele, jakými jsou například frekvenční šířka pásma B a časová konstanta Δ_t , Hammond, White [25]. Sami o sobě tyto veličiny také lépe korespondují s představou, jak vnímáme míru časové nebo frekvenční lokalizace různých variant JTFA.

Okno	$f(t)$	σ_ω	B_{3dB}	B_{eff}
Obdelníkové	$\eta(t) - \eta(t-T)$	nedefinované	$\sim 0.9 / T$	$1.0 / T$
Hann	$\cos(\pi t/T)^2$	$\sim 1.447 \cdot / T$	$\sim 1.4 / T$	$1.5 / T$
Gauss	e^{-t^2/σ^2}	$\sigma / 2$	$\sim 1.8 / T$, pro $T=7.06\sigma$	$\sim 1.9 / T$, pro $T=7.06\sigma$

Tab. 3.1 Srovnání různých parametrů frekvenčního rozlišení

Způsoby určení jsou závislé na kontextu aplikace, často se používá například vztah (3.10) resp (3.11), Mallat [5], Randall [4].

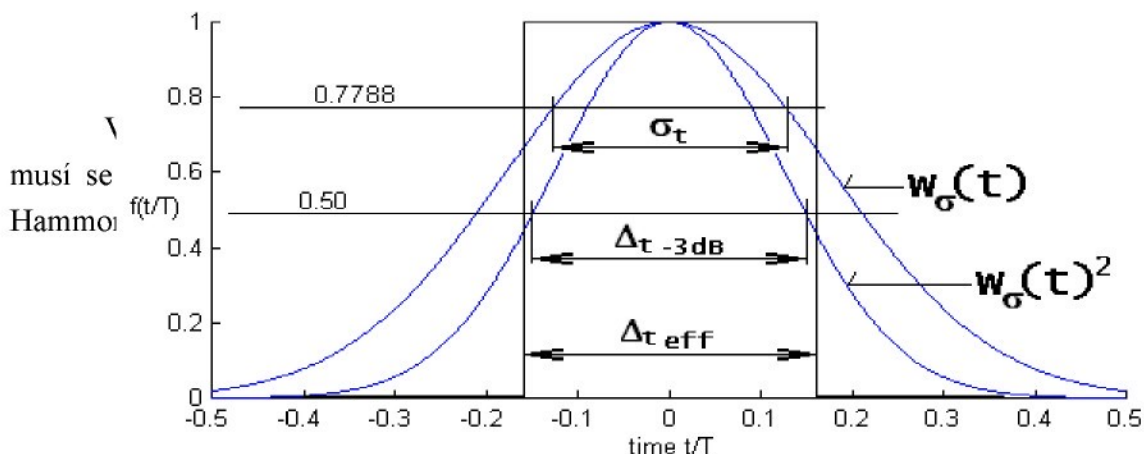
$$\frac{|\hat{f}(B_{-3dB}/2)|^2}{|\hat{f}(0)|^2} = \frac{1}{2} \quad (3.10)$$

$$B_{eff} = \frac{1}{|\hat{f}(0)|^2} \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \quad (3.11)$$

První vztah bere za šířku pásma takovou hodnotu argumentu, která odpovídá polovině maxima normovaného průběhu. Předpokládáme maximum leží v nule, charakteristika by kolem tohoto bodu měla být symetrická. Z toho plyne, že (3.10) bude velmi dobrým ukazatelem například při posuzování vlastností okének nebo pásmových filtrů, Davídek, Laipert, Vlček [1].

Vztah B_{eff} známe jako efektivní šířku pásma šumu, Randall [4]. Vychází z náhrady obecné $\hat{f}(\omega)$ konstantní funkcí $\hat{\eta}(\omega) - \hat{\eta}(\omega - B_{eff})$, kde B_{eff} je podle (3.11) spočítáno tak, aby náhradní funkce nesla stejnou energii jako ta původní. Tohoto vyjádření užijeme při analýze širokopásmových signálů nebo šumu, kde nemusí být hlavní část energie zachycena dominantním „laločkem“ funkce $\hat{f}(\omega)$. V případech, kde $\hat{f}(\omega)$ je naopak hladká, frekvenčně omezená a symetrická podle vrcholu, tam s úspěchem aplikujeme i jednoduchý (3.10), plně platný pro odezvy soustav s exponenciální odezvou („RC“ dynamiky 1. řádu).

Předcházející tabulka Tab. 3.1 demonstruje různost frekvenčního rozlišení pro vybrané metodiky, stejnou bychom mohli ovšem odvodit i pro rozlišení časová. Určení časového rozlišení obvykle literatura příliš nerozvádí, v aplikacích JTFA je však její vyšetřování nezbytné. Pro výpočet však platí stejné analogie jako v doméně frekvenční. Na příkladu Gaussovy funkce na Obr.3.4 vidíme, že i zde je rozdíl v různých interpretacích rozlišení patrný.



lná, ale
Mallat [5],
ů, resp.

odchylek (3.8), neboť dobře korespondují s principem neurčitosti. Mnoho funkcí navíc nemusí být podle definičního vztahu integrovatelných, pro takové se pak musíme spokojit s určením B (viz. Tab. 3.1). Například pro typické obdélníkové okno dostáváme, že σ_ω je nedefinované, a pro $\sigma_t = T/\sqrt{3}$. Oproti $\Delta_t = T$, které bychom spíše očekávali, vychází σ_t překvapivě rozdílné. Tyto výsledky naznačují, že povaha variací σ nemusí plně korelovat s reálnými vlastnostmi funkcí vztaženými ke skutečné časové nebo frekvenční selektivitě.

V praktických úvahách namísto σ naopak upřednostňujeme práci se šířkou pásma B jako ekvivalentem rozlišení, ať už podle (3.10) nebo (3.11). Činíme tak pro jejich snadnější určení, třeba jen ze znalosti frekvenční amplitudové charakteristiky. Šířka pásma B má také mnohem srozumitelnější vztah k tvaru charakteristiky než σ_ω .

Jako zástupce pro časové rozlišení můžeme mnohdy použít časovou konstantu T ze vztahu (3.5). Pro funkci, respektive okénko, tvaru $\eta(t) - \eta(t-T)$ přímo odpovídá $\Delta_{t,eff}$. Pro ostatní časově omezené kompaktní funkce a se známým B je dobrým odhadem vztah (3.12) níže.

$$T = 1/B_{eff} \quad (3.12)$$

Vztahu (3.12) je často využíváno ve frekvenční analýze pro určení dynamiky dané metody, speciálně pokud je založena na číslicových filtrech. Vztah je obecně použitelný v aplikacích analýzy stacionárních signálů, kde není absolutní určení časového rozlišení nijak zásadní.

3.1.3 Okamžitá frekvence

S časově-frekvenčním rozlišením úzce souvisí termín okamžitá frekvence, Saliu [41]. U nestacionárních signálů je typické, že se skládají z několika komponent, přičemž frekvence každé bude obecně v čase proměnná - typicky jde například o hudební signály. Tyto variace můžeme měřit užitím Fourierovy transformace. Změny frekvencí by měly být v rámci časového rozlišení okna minimální, jinak dojde ke ztrátě detailu vlivem rozmazání spektra.

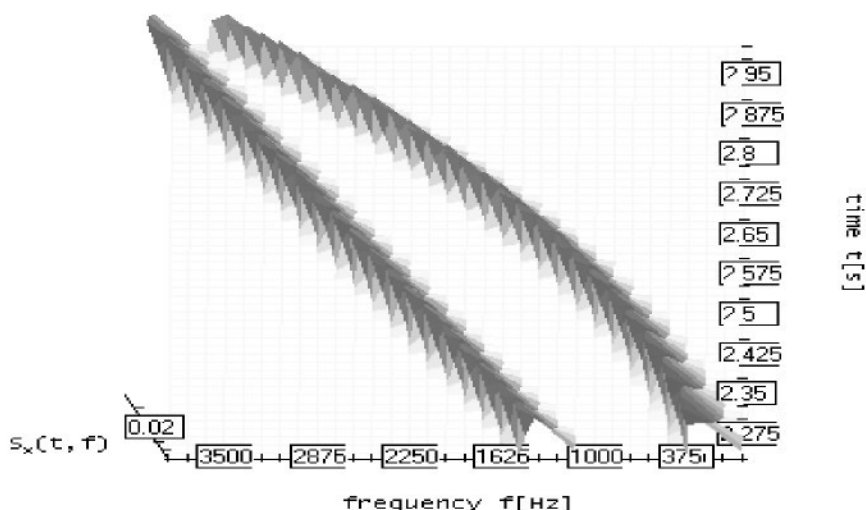
Okamžitou frekvenci je možné dobře studovat na signálu tvaru $x(t) = a(t) \cdot \cos\Theta(t)$, pro které platí známé (3.13). Uvedený vztah je možné zobecnit i na komplexní analytický signál $x_a(t) = a(t) \cdot e^{i\Theta(t)}$.

$$\omega(t) = \frac{d\Theta(t)}{dt} \quad (3.13)$$

Pro obecné signály je (3.13) ale neaplikovatelné, neplatí už ani u signálů složených ze dvou harmonických funkcí.

Určení okamžité frekvence je jednou z nejvýznamnějších motivací pro výpočet časově-frekvenční distribuce. Pokud hledáme dominantní okamžitou frekvenci ω_d , pak bude

jednoduše odpovídat maximu ve sledovaném okamžiku t_i , $S_x(\omega_d, t_i) = \max |S_x(\omega, t_i)|$, Mallat [5]. Pro složený signál bude spektrum obsahovat tolik vrcholů z kolika komponent se skládá.



Obr. 3.5 STFT spektrum složeného signálu

Kritickým momentem zde je volba rozlišení, viz Obr. 3.5. Dvě sousední komponenty musí mít od sebe odstup dostatečný k tomu, aby je nemaskovalo roztažení spektra způsobené použitým okénkem. Tento potenciální nedostatek se nabízí kompenzovat zvětšením celkové délky okna, což ale podle odhadu (3.12) znamená nepřímouměrně snížit časové rozlišení. Nalezení kompromisu není triviální a vždy se bude odvíjet od konkrétního případu.

Pokud k určení okamžité frekvence přistoupíme matematicky, pak se vypočítá jako první moment frekvence výkonového spektrogramu (3.14).

$$\omega(t) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \omega P_x(t, \omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} P_x(t, \omega) d\omega} \quad (3.14)$$

Průběh $\omega(t)$ vystihuje vývoj průměrné frekvence v čase t . Platný výsledek dostáváme pouze tehdy, je-li signál $x(t)$ „jednoduchý“. Pro signál složený z vícero harmonických komponent vrací aritmetický průměr okamžitých frekvencí všech složek.

V praxi se většinou spoléháme na posouzení vlastního spektrogramu, kde je přítomnost více komponent, při správně nastavených parametrech rozlišení, hezky viditelná. Pro odměření šířek časového a frekvenčního pásma si signál intuitivně rozdělíme na jednotlivé komponenty a údaje odečteme nezávisle pro každou zvlášť.

3.1.4 Volba okénka

Rozlišení spektrogramu získaného z STFT je dané distribucí energie okénka v průmětu frekvenční a časové osy. Přidruženými parametry může být volba vzorkovací frekvence, volba překrytí, doplnění záznamu nulami, atd. Zásadní vlastnosti však analýze vtiskuje právě tvar okna.

Vlastností STFT je, že se v rámci posunu v čase a ve frekvenci tvar okna nemění. Rozlišení zůstává konstantní, a tím vlastně vytváří ortogonální síť, jejíž jednotlivá pole mají hodnotu skalárního součinu $\langle x, g_{u,\xi} \rangle$, kde $g_{u,\xi}(t) = w(t-u)e^{-i\xi t}$ z rovnice (3.6). Praktická volba okénka bude vycházet primárně z hodnoty šířky pásma, další parametry, jako je velikost vedlejšího laloku, útlum na vyšších frekvencích, útlum na polovině frekvenčního kroku, strmost a další, se ale musejí vzít také v úvahu.

Paleta známých okének čítá několik desítek typů, mnohá okna jsou navíc parametrická, jako například oblíbené Kaiser, Marques de Sá [40], nebo již jmenované Gaussovo okno. Záleží pak na aplikaci, jakým specifikám dáme při výběru přednost.

Při měření amplitud frekvenčních komponent budeme hledat okénko s co nejplošším hlavním lalokem i za cenu značného roztažení spektra. Při odhadu spektrální výkonové hustoty hledáme kompromis mezi malou šířkou pásma a co největším útlumem na vedlejším laloku, tak abychom omezili disipaci energie do bočních pásem. Při měření okamžité frekvence jsou požadavky podobné, výrazněji nás však omezuje rozlišení okna v čase. Univerzální okénko tedy neexistuje, stejně jako neexistuje jednoznačný návod pro optimální volbu. V konkrétní aplikaci se musíme řídit charakteristikou signálu a potřeb analýzy.

3.2 Digitální filtry

V úvodu Kap.3.1 je naznačena souvislost konvoluce s Fourierou transformací, rovnice (3.4). Tam jsme si ji odvodili z konvoluce signálu s komplexní harmonickou bází. Filtraci vyjádříme jen symbolickou záměnou $e^{(i\omega t)}$ za $h(t)$, o které budeme předpokládat, že splňuje všechny podmínky impulsní charakteristiky lineárního systému z Kap. 3. O systému popsaném impulsní charakteristikou $h(t)$ pak mluvíme častěji jako o filtru, speciálně pokud jsme ho navrhovali s ohledem na průběh jeho frekvenční charakteristiky $\hat{h}(\omega)$, Davídek, Laipert, Vlček [1].

Konvoluční předpis je vyhovujícím matematickým nástrojem v rámci analýzy filtrů, pro implementaci budeme jasně upřednostňovat přepis na diferenční formu.

$$y[n] = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h[i]x[n-i] \quad (3.15)$$

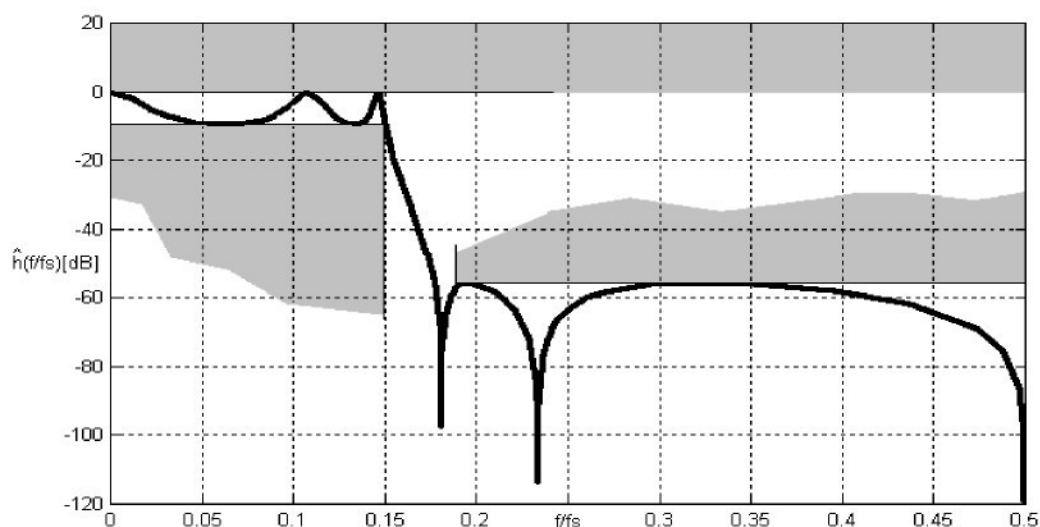
Rovnice (3.15) je numerickou konvolucí, jejíž odvození můžeme z integrální formy dokázat. Stejně jako při konverzi z FT na DFT, bychom opět použili Diracova pulzu jako obrazu pro ideální vzorkovač. Při návrhu filtrů využíváme konverze mezi spojitou a diskretní formou pomocí tabulkových obrazů Z transformace, nebo pomocí aproximací.

3.2.1 Specifikace filtru

Design filtrů nahlíží na časově-frekvenční problematiku z jiného úhlu než je tomu z pohledu analýzy. I zde stále platí vše, co je uvedené v Kap. 3.1.2. Pro návrh filtrů, jakožto lineárního časově invariantního systému, se ale osvědčilo použití jiného matematického aparátu.

Odrasovým bodem v designu filtru je vymezení vlastností. Zásadní je tvar frekvenční charakteristiky, který díky nejednoznačnosti nejlépe popisujeme tolerančním schematem zohledňujícím nejhorší možné případy, Obr 3.6. Jedním grafem přehledně nadefinujeme všechny parametry, jako je frekvenční typ filtru strmost, tlumení, zvlnění. Míra tolerancí je daná aplikací, v měřicí technice je často celá specifikace filtru záležitostí normy, jako např. u filtrů CPB analýzy, antialiasing filtrů, apod.

Opět funguje, podobně jako tomu je u hledání optimálního okénka, že i filtr musí slevit z krátké délky impulsní charakteristiky, pokud má dosahovat výjimečné strmosti nebo malé šířky pásma, viz (3.9), (3.12).



Obr. 3.6 Specifikace frekvenční charakteristiky filtru

Šedá oblast na obrázku znázorňuje zakázaná pásma, do kterých nesmí výsledná charakteristika zasahovat. K výše uvedeným parametrům, jenž se nechají takto definovat, přibývá u filtrů navíc volba typu aproximace křivky amplitudové frekvenční charakteristiky. Z velmi známých parametrizací, které jsou sto vyhovět volným parametrům modelu filtru, jmenujme

Čebyševovy aproximace I a II se stejnoměrným zvlněním v propustné, nebo nepropustné části charakteristiky, Eliptické aproximace (viz. Obr 3.6), maximálně plochou Butterworthovu aproximaci, Davídek, Laipert, Vlček [1].

Návrhové programy pro výpočet analogových filtrů většinou s podobným zadáním vystačí. Procedury výpočtu vlastních koeficientů digitálních filtrů se dají rozdělit do dvou kroků. Nejdříve se vypočítají parametry rovnic aproximace nejlépe odpovídající hraničním omezení (analyticky, iterací). Dále se snažíme analytický popis frekvenční odezvy transformovat do Z obrazu, navíc ve tvaru přenosu, jenž by stále odpovídal snadno implementovatelné lineární diferenční rovnici, jako je (3.15).

Na rozdíl od popsané metodiky známe i přímé postupy, které navíc mohou řešit i další speciální požadavky. Přehledově jde o metody okének, minimálních čtverců, Remezův algoritmus a metodu frekvenčního vzorkování. Tyto postupy zohledňují průběh fáze, celočíselnost koeficientů, možnost realizace ortogonálního páru filtrů, adaptabilitu, možnost libovolného tvaru frekvenční charakteristiky.

3.2.2 Rekurzivní a nerekurzivní formy

Poslední jmenované metody jsou speciální také proto, že výsledkem bývají filtry v jednoduchém tvaru předpovídaném (3.15), zatímco metody založené na aproximacích poskytují komplexnější diferenční rovnici (3.16).

$$y[n] = \sum_{i=0}^{M-1} b[i] x[n-i] - \sum_{j=1}^{N-1} a[j] y[n-j] \quad (3.16)$$

Rozšíření rovnice o člen beroucí v úvahu i váženou posloupnost historie výstupu neznamená jen rozdíl ve výpočtu. Zatímco je impulsní charakteristika (3.15) daná přímo $h[n]$, její výpočet pro (3.16) provádíme rekurzí. Nerekurzivní filtry nazýváme také jako filtry FIR (angl. „finite impulse response“), rekurzivní analogicky jako filtry IIR (angl. „infinite impulse response“), Smith [11].

Časové odlišnosti se definují zejména v impulsní odezvě a na fázové frekvenční charakteristice. Velkým benefitem FIR filtrů je možnost zajistit lineární průběh fáze, podmíněný jen symetrií koeficientů $h[n]$ vůči středu $M/2$. FIR varianty mají také zaručenou stabilitu a větší odolnost vůči kvantovacím chybám, což oceníme v implementacích na procesorech bez plovoucí čárky. Výhodou IIR bývá zejména vyšší účinnost vzhledem k numerické náročnosti výpočtu, při stejných specifikách vystačí i s řádově nižším počtem koeficientů, než adekvátní FIR filtr.

Délka impulsní charakteristiky FIR filtru bývá přímoúměrná časovému rozlišení odezvy.

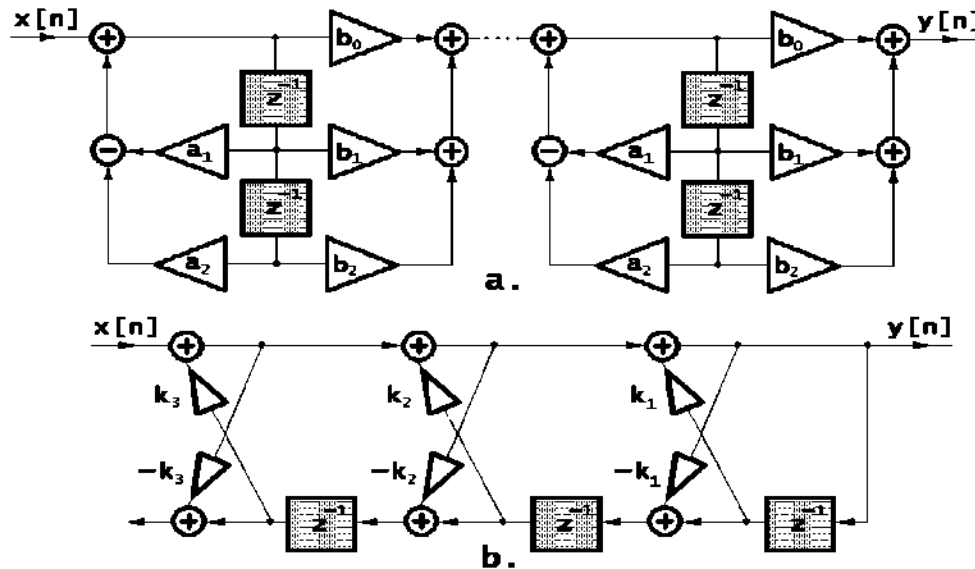
U IIR stanovíme $h[n]$ nejlépe experimentálním vybuzením Dirackovo pulsem, kdy za $x[n]$ volíme posloupnost $1, 0, 0, 0, \dots$. Dobu ustálení můžeme stanovit libovolně, např. podle Obr. 3.4. Pro základní typy filtrů je dostatečný i odhad časového rozlišení přímo z frekvenční charakteristiky podle (3.12). Vztah je při použití B_{-3dB} přesný pro známé průměrovací exponenciální filtry.

Zmíněná lineární fáze je zárukou konstantní hodnoty skupinového zpoždění $GD(\omega) = d\phi/d\omega$, z angl. „group delay“. GD má rozměr času a udává výstupní zpoždění odezvy filtru za vstupním signálem o frekvenci ω . Konstantní GD zaručuje zachování časových atributů. V případě, že se vstupní signál svou šířkou pásma nachází v propustné části frekvenční charakteristiky, dostaneme ideálně na výstupu signál stejný, jen zpožděný o GD, bez deformace obálky.

3.2.3 Struktury a implementace

Je již dobře známo, že diferenční rovnice (3.16) je obecně nevhodná pro přímý přepis do kódu. Problémem je kumulace numerické chyby, Davídek, Laipert, Vlček [1], Press, Teukolsky, Vetterling, Flannery [14]. K tomu dochází v důsledku kvantování číslicového slova, jak na procesorech s plovoucí, nebo pevnou řádovou čárkou. Numerické chybě se nevyhne ani (3.15), přímá forma (3.16) je avšak i mnohdy nestabilní, neboť už jen samotné zaokrouhlení koeficientů může vést k takovému posunutí pólů přenosové charakteristiky filtru, že se dostanou mimo jednotkovou kružnici stabilní oblasti Z roviny. Popisované problémy jsou tím markantnější, čím je diferenční rovnice filtru delší.

Existují topologie filtrů vycházející z jiného numerického modelu, než předpokládá přímá diferenční rovnice. Hlavními dvěma kandidáty jsou stavový popis, vedoucí na kanonické kaskádní modely, Obr. 3.7a, a rekurzivní diferenční popis, vedoucí na křížové (angl. „lattice“) formy, Brogioli, Vailati [29], Obr. 3.7b. Šíření chyby strukturou se v principu omezí rozložením původní přenosové rovnice na jednodušší bloky spojované za sebe.



Obr. 3.7 Struktury číslicových filtrů

3.2.4 Decimace a interpolace

V následujících úvahách o JTFA nám z digitálních filtrů nejvíc poslouží filtry se změnou vzorkovacího kmitočtu. Jde o modifikaci dovolující realizovat filtr, jehož výstupní frekvence bude násobkem, nebo celou částí vstupní vzorkovací frekvence. Tyto formy vyhovují speciálně FIR strukturám. Typický převzorkovací filtr má charakter LP filtru. U decimace nízkofrekvenční filtr řeší, dodržení vzorkovacího teorému před vlastním redukcí vzorků (zastupuje analogový antialiasing filtr), u interpolace ze spektra odstraní vyšší frekvence vzniklé naopak doplněním vzorků (vyšší frekvence jsou periodickým zopakováním originální charakteristiky), Tůma [13].

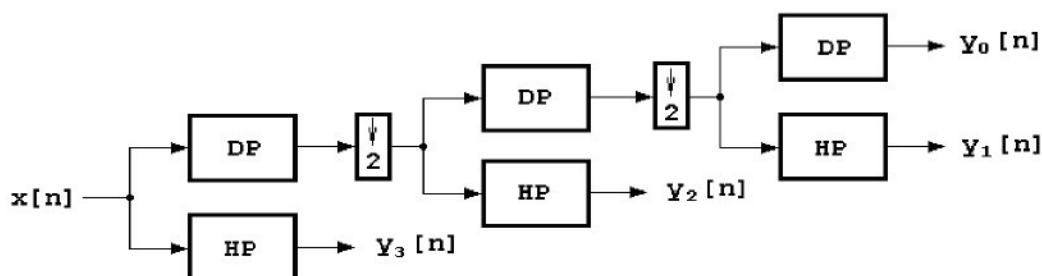
FIR struktury mají tu výhodu, že nezávisí na historii vzorků výstupních. Právě tato vlastnost umožňuje převzorkovací filtry realizovat účinněji tak, že vlastní konvoluce proběhne jen s každým výstupním vzorkem, zatímco vstupní signál aktualizuje zpožďovací linku filtru se vzorkovací frekvencí. V závislosti na decimačním faktoru se tak kompenzuje hlavní nevýhoda FIR filtrů, spočívající ve velkém počtu koeficientů. Použití IIR filtrů v převzorkování je i tak poměrně běžné, a to zejména v aplikacích, kde je kritickým faktorem výpočetní rychlost, Randall [4].

3.3 Banky filtrů

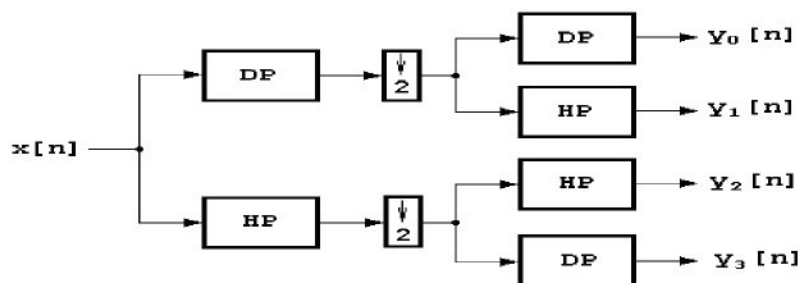
Motivací pro uvedení předchozí kapitoly byly banky filtrů. Převzorkovací filtry jsou jejich stavebním kamenem. Definice říká, že bankou filtrů je skupina filtrů mající společný vstup, nebo součtový výstup, Davídek, Laipert, Vlček [1], Strang, Nguyen [2]. V signálové analýze je zásadní

dekompozice signálu, proto se syntetizující bankou nebudeme nyní detailněji zabývat. Schéma paralelně pracujících analytických filtrů již bylo, jako model Fourierovy transformace, navrženo v Kap. 3.1. I tuto ideu můžeme nazývat bankou filtrů.

Skutečně efektivní banku filtrů získáme užitím kaskádového řazení. Na Obr. 3.8 a Obr. 3.9 si vysvětlíme, jak taková banka funguje. Vidíme, že podstatou je stále se opakující subsystém sestávající z dvojice HP a DP filtrů. Další stupeň kaskády naváže na předchozí decimačním členem, který může být integrován již do bloku FIR filtrů. Takto je v řetězení možno libovolně pokračovat, s každým stupněm se nám zvyšuje úroveň dekompozice.



Obr. 3.8 Kaskádní struktura vytvářející exponenciální banku filtrů



Obr. 3.9 Kaskádní stromová struktura vytvářející lineární banku filtrů

Příjemnou vlastností digitálních filtrů, zde užívanou, je invariantnost frekvenční charakteristiky vůči vzorkovací frekvenci. Filtr má takový průběh frekvenční charakteristiky, jaký mu udělují jeho koeficienty, přičemž vzorkovací frekvence vstupního signálu zadává měřítko vůči bezrozměrné digitální frekvenci $f/f_s \in \langle 0, 1 \rangle$. Takto stačí navrhnout jedinou dvojici HP a DP filtrů a stejné následně použít ve všech úrovních kaskády. Výsledkem bude uniformní síť analytických filtrů, která, v závislosti na struktuře, kontinuálně pokrývá celou šíři frekvenčního spektra. Příkladem klasických systémů mohou být exponenciální (oktávová) a lineární frekvenční dělení produkované bankou filtrů na Obr. 3.8 a Obr. 3.9. Z toho vyplývá i použité pojmenování uvedených topologií, Strang, Nguyen [2].

Postup výpočtu a tok signálu v kaskádovém spojení decimačních filtrů je vždy podobný.

Na obrázcích vidíme, že první úroveň analýzy je pro lineární a exponenciální banky úplně stejný. Předpokládejme, že HP je horní propust a DP dolní propust, zabírající každá svou polovinu šířky frekvenčního pásma. Anglicky se tato dvojice filtrů nazývá „half-band“. Spektrum se rozpadne na dvě doplňkové části, přičemž následující decimace redukuje počet vzorků na polovinu. Dosahujeme tak optimálního využití a zaplnění šířky pásma v daném stupni. Díky decimacím dojde také k úspoře výpočetního výkonu. Důsledkem tohoto kroku je však vždy jistý aliasing, protože HP a DP jsou reálné filtry s konečnou strmostí a tlumením. Za zmínku stojí, že přeložení spektra po decimaci v HP větvi způsobí obrácení pořadí frekvencí v novém vzorkování vůči originálu. U lineární banky na to musíme v další úrovni pamatovat a otočit pořadí filtrů tak, abychom na výstupu měli pásma v monotónním frekvenčním řazení.

Lineární a exponenciální banky jsou z nejpoužívanějších příkladů systémů s několika vzorkovacími kmitočty s bohatou škálou aplikací přes klasickou frekvenční analýzu, rychlou wavelet transformaci, kompresi apod. Shrňme tedy nejdůležitější - lineární banka produkuje naprosto uniformní rozklad v ekvidistantně odstupňovaných pásech, naproti tomu exponenciální vytváří pásma s dyadickým dělením. Použití každé má své opodstatnění.

3.4 Wavelet transformace

Wavelet transformace je lineárním zobrazením vycházející z principů multirezoluční analýzy, Daubechies, Han, Ron, Shen [34], Mallat [36]. Už z podstaty se jedná o spojenou časově-frekvenční reprezentaci, čímž se z ní přirozeně stává i nástroj signálové analýzy. Jako zástupce lineárních metod opět využívá porovnání analyzovaného signálu se souborem elementárních vzorových funkcí nazývaných zde zcela obecně „vlnky“, čili angl. „wavelety“. Doposud uvedeným se wavelety nijak neliší od výše probraných metod.

STFT i analýzy, které by byly založeny na digitálních filtrech, opakují stejné principy - vstupní signál $x(t)$ na jedné straně, na straně druhé odezva daná $\langle x, g_{t,w} \rangle$, kde $g(\tau)$ je srovnávací funkcí vzoru. $g(\tau)$ má vždy určité frekvenční i časové parametry, v souladu s popisem v Kap. 3.1.2. U STFT jsme za $g(\tau)$ dosazovali okénkem modulovanou harmonickou funkci $g_{t,w}(\tau) = w(\tau - t)e^{-i\omega\tau}$, u metod užívajících digitálních filtrů ji představuje obrácená impulsní charakteristika filtru $g(\tau) = h(-\tau)$ daná jako inverzní Fourierova transformace $\hat{h}(\omega)$. Výsledkem korelace vybrané vzorové funkce a signálu je hodnota určující míru jejich vzájemné podobnosti. Díky časově-frekvenční kompaktní vymezenosti vzorové funkce $g(t)$ definuje korelace $\langle x, g_{\omega,t} \rangle$ i energii, jakou signál v časově-frekvenční lokalitě disponuje.

Waveletova transformace se snaží o generalizaci těchto vzorových korelačních křivek. Základní vlnka $\psi(t)$ je vlnkou mateřskou, modifikací jejích parametrů dostáváme obdobný

„vzorník“ časových a frekvenčních posuvů, jako tomu bylo u STFT.

$$W_x(u, s) = \langle x, \psi_{u,s} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \psi_{u,s}^*(t) dt \quad (3.17)$$

Na rozdíl od STFT neupravujeme frekvenční krok změnou frekvence modulované harmonické funkce, ale změnou celého časového měřítka. Fourierova transformace by z tohoto pohledu mohla být chápána jako speciální forma WT. Aby byla WT časově selektivní, musí mít i mateřský wavelet vymezený obor, mimo který je $\psi(t)=0$. Jinými slovy se dá říci že i wavelet má obálku na způsob okének u STFT, která je ale změnou měřítka deformována. Matematický základ wavelet transformace pak nalézáme v teorii Hilbertových prostorů, které zobecňují podmínky platnosti a existence unikátního zobrazení pomocí $\langle x, \psi_{u,s} \rangle$, Mallat [5].

3.4.1 Multiresoluční analýza

Pravou podstatou waveletů je tedy způsob, jakým se vzorové korelační vlnky parametrizují. Wavelety jsou funkcí dvou proměnných předepisující konkrétní časové a frekvenční určení, obojí v závislosti na měřítku.

Základní představu o účincích změny měřítka s vystihuje relace $1/\sqrt{s} f(t/s) \equiv \sqrt{s} \hat{f}(s\omega)$.

Vidíme, že frekvenční šířka pásma se mění přímo úměrně, časová osa nepřímoúměrně se změnou měřítka. Obě veličiny jsou tedy spřaženy. U waveletů se jako nezávislý parametr volí místo frekvence přímo měřítko s , časové určení se zadává nadále posuvem u , (3.18).

$$\psi_{u,s} = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) \quad (3.18)$$

Vztah (3.18) je matematickým vyjádřením výše uvedeného způsobu parametrizace vlnky. Adekvátním vyjádřením vlnky ve Fourierově obraze je rovnice (3.19).

$$\hat{\psi}_{u,s}(\omega) = e^{-iu\omega} \sqrt{s} \hat{\psi}(s\omega) \quad (3.19)$$

I u rozlišení definovaném podle (3.7) a (3.8) má změna měřítka s identický efekt jako pro transformaci frekvenční a časové osy obecně. Pro roztážení $s > 0$ se časové rozlišení waveletů, odvozených od mateřského, transformuje podle $\sigma_t(\psi_s) = s \sigma_t(\psi)$. Frekvenční rozlišení analogicky v poměru obráceném $\sigma_\omega(\psi_s) = \sigma_\omega(\psi)/s$. Vidíme, že rozlišení wavelet transformace je dvojího typu – základní, definované mateřským waveletem, a parametrizovatelné, závislé na měřítku. U STFT je analogií k této dualitě rozlišení typu a délky okénka, které se však v rámci jedné STFT nijak nemění.

3.4.2 Třídy waveletů

Zatím nebylo vůbec diskutováno, jak by měla samotná vlnka vypadat. V rámci dosud uvedených omezení je volba $\psi(t)$ velmi volná a splňuje ji nekonečná třída funkcí. Jen některé se svými vlastnostmi hodí pro spojenou časově frekvenční analýzu, Edwards [48]. Platí, že

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(t)|^2 dt < +\infty, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0, \quad \|\psi(t)\| = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(t)| dt = 1. \quad (3.20)$$

První podmínka říká, že funkce $\psi(t)$ je z prostoru funkcí L^2 , druhá, že vlnka musí kmitat se změnou polarity, třetí že musí být normalizovaná. Aby byla waveletová dekompozice signálu reverzibilní, tj. aby existovala i zpětná waveletová transformace, musí k tomu mateřská vlnka splňovat i

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\psi(\omega)|^2}{\omega} d\omega < +\infty. \quad (3.21)$$

Poslední nerovnost zesiluje podmínku nulového integrálu $\psi^2(t)$, navíc předpokládá, že frekvenční charakteristika waveletu nesmí být rostoucí.

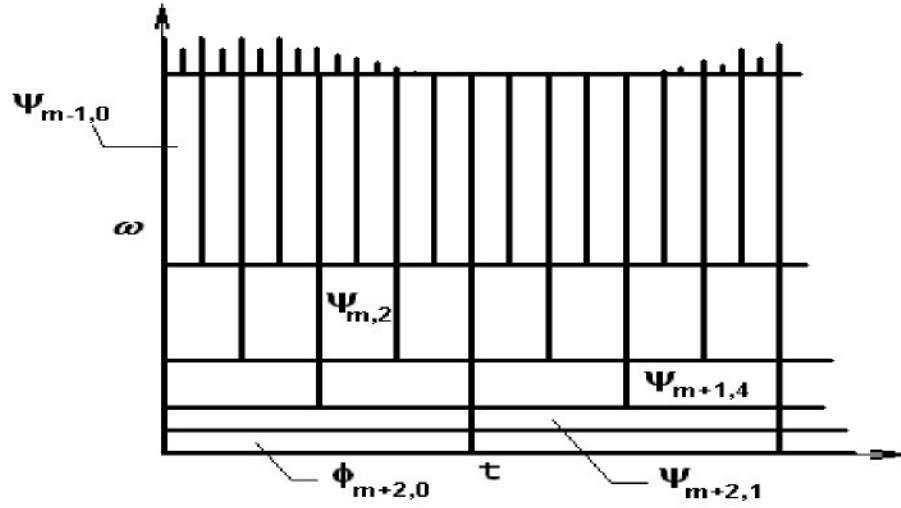
Obecná spojitá waveletová transformace je zajímavým předmětem studia zejména z matematického pohledu, Mallat [5]. K rozboru se nám nabízí problém výpočtu zpětné waveletovy transformace, míra redundance, ortogonalita, vícerozměrná transformace, atd. Ze všech těchto partií je pro nás zásadní pouze objasnění měřítkové, angl. „scale“, funkce $\phi(t)$. Pokud máme škálu wavelet funkcí definovanou jen pro $s < s_0$, pak pro perfektní rekonstrukci potřebujeme znát i podíl signálu v pásmu frekvencí definovaných $s > s_0$. Toto pásmo vymezuje právě scale funkce, $\hat{\phi}(\omega)$ se z tohoto pohledu projevuje jako filtr typu dolní propust. Rekonstrukce signálu se pak bude skládat ze zpětné wavelet transformace do úrovně s , ke které přičteme reziduální část generovanou pomocí $\phi(t)$.

Dále už se budeme zabývat jen diskrétní podobou wavelet transformace, neboť teprve v této formě se z ní stává platný nástroj časově-frekvenční transformace. Prvním krokem diskretizace je přechod na dyadické wavelety. Diskrétní wavelety se od doposud uvedených pravidel liší dalším zpřísněním volby $\psi_{u,s}$. Přirozené časově-frekvenční rozlišení vlnky v rámci wavelet transformace (3.17) nás nabádá, že k plnému pokrytí celého JTFA prostoru vymezeného vzorkovací frekvencí je dostačující jen konečný počet koeficientů $W_x(u, s)$. Jinými slovy parametry posuvu u a měřítka s je možné diskretizovat beze ztráty kompletnosti wavelet obrazu transformované funkce $x(t)$. Dyadické wavelety pracují se změnou měřítka v poměru 2, na což je navázána i změna časového kroku. Výsledkem tedy je předpis pro tvorbu dceřiných vlnek (2.3), kde jsme dosadili

$$s=2^m \text{ a } u=n \cdot 2^m. \quad (3.22)$$

$$\psi_{m,n}(t)=2^{\frac{-m}{2}} \psi(2^{-m}t-n) \quad (3.23)$$

Parametr m je zástupným parametrem původního spojitého měřítka s , generující diskrétní úroveň. Generovaná časově frekvenční síť je v závislosti na rostoucím m rozdělena podle Obr. 3.10. Výsledek je shodný se vzorkováním spojitě wavelet transformace v bodech daných (3.22). Na posledním stupni Obr. 3.10 naznačuje i měřítkovou funkci a oblast, kterou v JTFA prostoru reprezentuje.



Obr. 3.10 JTFA rozlišení dyadických waveletů

3.4.3 Vytváření waveletů

Existence funkce $\phi(t)$ musí platit obecně a nezávisle na aktuálním měřítku. Rozvinutím této myšlenky nás navede k tomu, že paralelně k dyadické síti waveletových funkcí $\psi_{m,n}(t)$ bude existovat i dyadická paleta měřítkových funkcí $\phi_{m,n}(t)$, Strang, Nguyen [2], Qian, Chen [3].

Součástí teorie multirezoluční analýzy jsou důkazy, že vlnka v měřítku m může zároveň splňovat předpoklady pro to být ortogonální bází prostoru D_m . Tento prostor bude následně podprostorem báze generované vlnkou v měřítku $m-1$. Doplněk prostoru D_m , značený U_m , je generován analogicky funkcí $\phi_{m,n}(t)$ ve stejném měřítku. Formulováno symbolicky, výše uvedené zapisujeme jako $U_{m+1}=U_m \cup D_m$. Rekurzivně pak platí, že

$$U_m \cup D_m \cup D_{m-1} \cup D_{m-2} \dots \cup D_1 = U_0.$$

Limitně lze zvolit U tak, aby obsáhl celý prostor L^2 funkcí, multirezoluční dekompozici lze pak

jakoukoli funkci z tohoto prostoru bezzbytku popsat obrazem waveletovy transformace,
 $L^2 = \dots D_{m+1} \cup D_m \cup D_{m-1} \dots$

Z faktu, že úroveň dekompozice m je podprostorem stupně $m-1$ vyplývá, že musí existovat posloupnost koeficientů $h[n]$, resp. $g[n]$ pro které platí

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \phi\left(\frac{t}{2}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] \phi(t-n), \quad (3.24)$$

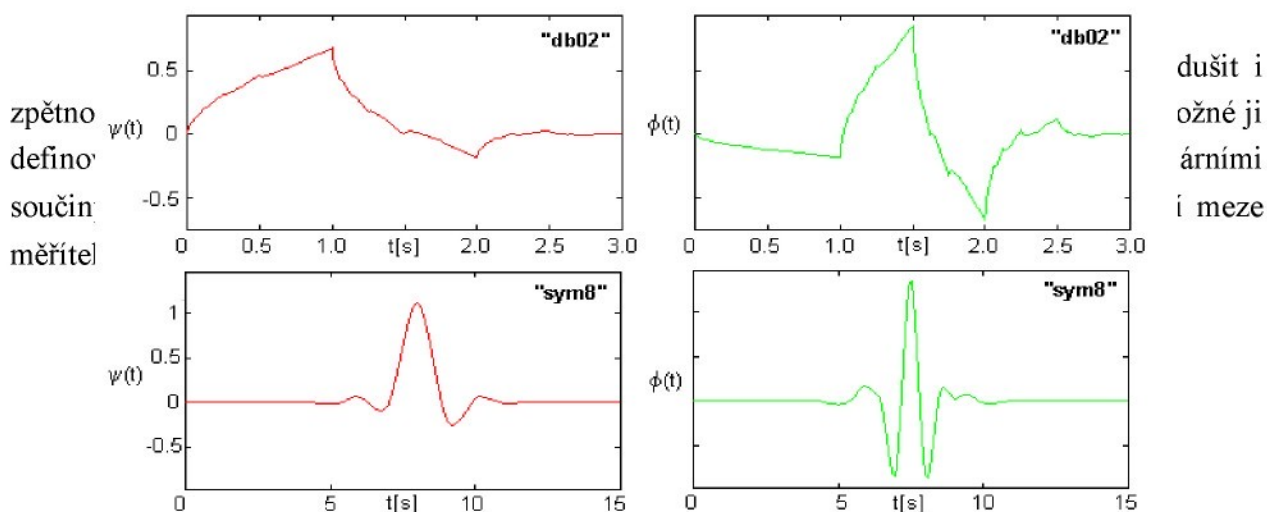
$$\frac{1}{\sqrt{2}} \psi\left(\frac{t}{2}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g[n] \phi(t-n). \quad (3.25)$$

Platnost vztahu je podmíněna ortogonalitou posuvů měřítkové funkce, což je platné i pro waveletovu funkci. Tato vlastnost nebyla dosud zmíněna, je ale nutným následkem zobecnění mateřské a měřítkové vlnky jako ortogonálních bází prostoru. Důkaz ortogonality mezi posuvy je ve Fourierově obraze adekvátní (3.26), platnost vzájemné ortogonality mezi $\psi(t)$ a $\phi(t-n)$ zastupuje výraz (3.27), Mallat [5].

$$\hat{h}(\omega) \hat{h}^*(\omega) + \hat{h}(\omega + \pi) \hat{h}^*(\omega + \pi) = 2, \quad (3.26)$$

$$\hat{h}^*(\omega) \hat{g}(\omega) + \hat{h}^*(\omega + \pi) \hat{g}(\omega + \pi) = 0. \quad (3.27)$$

Poslední čtveřice vztahů tvoří rámec pro odvozování waveletů. Zásadní je, jak vidíme volba diskrétních koeficientů $h[n]$ a $g[n]$, které je generují. Podle způsobu odvození mateřské vlnky rozlišujeme možná až několik desítek skupin waveletů. Tato odvození nejsou triviální a jejich rozbor ani není předmětem této práce, více v Daubechies, Han, Ron, Shen [34]. Příklady dobře známých mateřských a měřítkových vlnek typu Daubechies a Symlet jsou na Obr. 3.11.



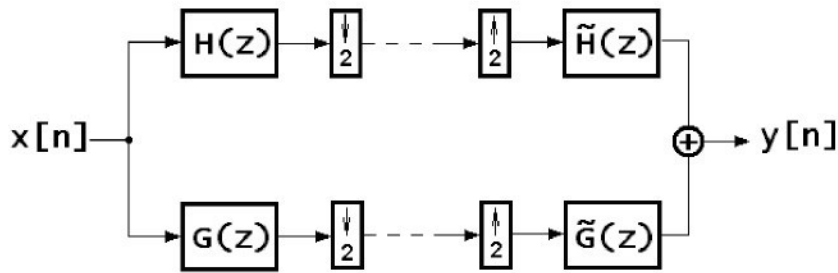
$$f(t) = \sum_n \langle f, \phi_{M,n} \rangle \phi_{M,n} + \sum_{m=1}^M \sum_n \langle f, \psi_{m,n} \rangle \psi_{m,n} \quad (3.28)$$

3.4.4 Rychlá wavelet transformace

Důležitým prvkem pro účinný výpočet wavelet transformace je identita (3.24) a (3.25) s FIR strukturou digitálních filtrů. Výpočet lineární kombinace posunutých scale funkcí by se dal implementovat jako kauzální filtr s přenosem

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h[k] z^{-k}, \text{ respektive } G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g[k] z^{-k}.$$

Obr. 3.10 nás navádí, že dyadická forma waveletů odpovídá half-band filtrům, kde $H(z)$ představuje horní a $G(z)$ dolní propust. Splnění rovnic (3.26) a (3.27) je okrajovou podmínkou upřesňující vlastnosti FIR filtrů, které by měly generovat dceřiné wavelet a scale funkce, Strang, Nguyen [2]. Úplný soubor vztahů, kterým se řídí odvození rychlé diskrétní WT, zprostředkuje rozbor dobře známých kvadraturních zrcadlových bank filtrů, Obr. 3.12, Jones [30].



Obr. 3.12 Analytická a syntetizující biortogonální kvadraturní banka filtrů

Jak už obrázek naznačuje, u kvadraturního páru filtrů je dobře prostudována i rekonstrukční část schopná analogicky k (3.28) provádět pomocí páru $\tilde{H}(z)$ a $\tilde{G}(z)$ filtrů zpětnou wavelet transformaci. Perfektní rekonstrukce dosáhneme tehdy, pokud se nám podaří eliminovat vznik aliasingu, který nevyhnutelně vzniká v důsledku decimace signálu v obou větvích dekompozice. Že je toto možné bychom dokázali pomocí vyjádření obrazu výstupu, rovnice (3.29).

$$Y(z) = \frac{1}{2} (H(z)\tilde{H}(z) + G(z)\tilde{G}(z))X(z) + \frac{1}{2} (H(-z)\tilde{H}(z) + G(-z)\tilde{G}(z))X(-z) \quad (3.29)$$

Vztah (3.29) nevyjadřuje přímo signálovou cestu, ale je algebraicky upraven, aby byla náležitě vidět jak užitečná, tak aliasing část produktů decimace. Speciální volbou $\tilde{H}(z) = G(-z)$ a $\tilde{G}(z) = -H(-z)$, pro kterou strukturu nazýváme zrcadlovou bankou, lze docílit přechodu

(3.29) na identitu $Y(z)=X(z)$.

V této fázi se nám podařilo celý postup tvoření waveletů sjednotit s decimačními FIR filtry. Zrcadlové ortogonální filtry jsou svázány jednoznačným předpisem mezi koeficienty $h[i]$ a $g[i]$ (3.30), který jediný splňuje všechny dosud vyjmenované podmínky. Tento vztah je základem pro generování ortogonálních waveletů, Mallat [5].

$$g[n]=(-1)^{1-n}h[1-n] \quad (3.30)$$

Do odvození rychlé wavelet transformace nám zbývá rozvinout předchozí analýzu i pro oblast vzorkovaných signálů, tedy v prostoru posloupností l^2 . Označme si skalární součiny z (3.28) symbolicky tak aby $a_m[n]=\langle x, \phi_{m,n} \rangle$ a $d_m[n]=\langle x, \psi_{m,n} \rangle$. Koeficient a_m můžeme chápat jako výstup filtru typu dolní propust, koeficient d_m je produktem zrcadlového filtru představujícím tedy horní propust. Podle (3.24) a (3.25) je možné na úroveň m navázat dalším stupněm, který opakuje stejný princip filtrace. Zjednodušením těchto vztahů, za pomoci výše uvedených substitucí za skalární součiny zapisujeme diskretizovanou transformaci jako

$$a_{m+1}[p]=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n-2p]a_m[n], \quad (3.31)$$

$$d_{m+1}[p]=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} g[n-2p]a_m[n]. \quad (3.32)$$

Předchozí vztahy konkrétně vznikly dosazením posuvu p do (3.24) a (3.25), zakomponováním decimace do impulsních charakteristik a aplikací skalárního součinu s $x(t)$ po obou stranách rovnice. Zpětná transformace je odvoditelná použitím stejných principů. V případě ortogonálního systému dostáváme (3.33).

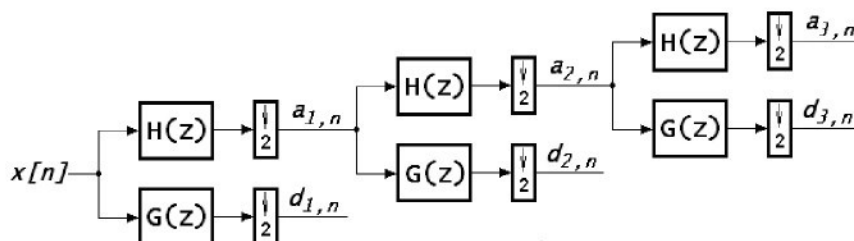
$$a_m=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[p-2n]a_{m+1}[n]+\sum_{n=-\infty}^{+\infty} g[p-2n]d_{m+1}[n] \quad (3.33)$$

3.4.5 Implementace diskrétní wavelet transformace

Beze ztráty obecnosti je možné první stupeň rozkladu, kdy do dvojice filtrů vstupuje vzorkovaný signál, interpretovat jako filtraci, které předcházela imaginární stupeň, jenž by pracoval s vyšším rozlišením a jehož výstupem byla právě posloupnost $x[n]$. Posloupnost vzorků se tak stává první sadou koeficientů nízkofrekvenční filtrace $a_0[n]$. Nutnou podmínkou této fáze je pouze splnění předpokladu vzorkovacího teoremu, tedy že $x[n]$ musí originální signál $x(t)$ plně popsat.

Výsledné schéma diskrétní wavelet transformace, jinak také rychlé wavelet transformace, v podstatě kopíruje princip dyadické banky filtrů z Kap. 3.3. Ač jsme se ke stejnému výsledku

dostali ze dvou různých stran – jednou z pohledu frekvenční analýzy, podruhé z pohledu obecnější multirezoluční analýzy – není v implementaci obou metod podstatného rozdílu. Symbolickou úpravou Obr. 3.8 získáváme blokové schéma výpočtu waveletových koeficientů $d_m[n]$ a reziduálních koeficientů $a_m[n]$.



Obr. 3.13 Banka filtrů diskrétní wavelet transformace

Zpětná transformace je záležitostí opakovaného použití zrcadlové dvojice filtru z Obr. 3.12, blokově získáváme zrcadlovou verzi analytické banky filtrů s tím, že decimace je nahrazena interpolací, viz. Qian, Chen [3].

Ač je filtrace pomocí banky identická s principem výpočtu diskrétní wavelet transformace, dále DWT, interpretace výsledků každého z přístupů je v konečném důsledku nezaměnitelná. Jediným vážnějším rozdílem mezi Obr. 3.8 a Obr. 3.13 je přitom existence decimačního stupně za horní propustí. Tento rozdíl ale naznačuje, jak se k výsledkům stavět.

Banka filtrů navržená jen s ohledem na parametry frekvenčních charakteristik filtrů nemůže z principu zaručit existenci reverzního postupu, výstupem banky jsou proto frekvenční řezy dekomponující v oktávách původní signál. Chyba dekompozice je závislá na konečné strmosti reálných filtrů, analýza vždy bude zatížena jistou mírou aliasingu v důsledku decimace signálu.

U banky filtrů, odvozované a navrhované vždy s důrazem na ortogonalitu, se o filtraci, ve smyslu frekvenční dekompozice, nedá příliš mluvit. Filtrage je zde jen nástrojem umožňujícím přechod mezi různými stupni rozlišení. Charakter filtrů $H(z)$ a $G(z)$ se aliasingu z principu ani nevyhýbá. Zde je podstatné, že díky ortogonalitě je jeho zavlečení reverzibilně kompenzované. Z tohoto pohledu je oktávová banka CPB filtrů speciálním případem wavelet transformace aproximující tak zvaný Shannonův wavelet, Mallat [5], definovaný jako zpětná Fourierova transformace ideální dolní propustí. Výstupem DWT je posloupnost koeficientů, kterou by bylo velkou chybou interpretovat jako výstup obdobné oktávové analýzy, na níž jsme zvyklí i u starších frekvenčních analyzátorů. Je zásadní si uvědomit, že strmost filtrů $H(z)$ a $G(z)$ zdaleka nedosahuje hodnot, které analyzátorům předepisuje norma, Randall [4]. Důvod je

hned dvojí – vyšší strmost filtru principiálně vede na delší impulsní odezvy a tím k horším časovým rozlišením, za druhé jsou hlavní doménou wavelet transformace disciplíny, které takové přísné požadavky na rozptyl frekvenční charakteristiky waveletu nemají. Wavelety se výborně osvědčují jako nástroj pro kompresi signálů a obrazu, jako detektory nelineárních signálů, pro odhad spektrálního výkonu, Cristán, Walden [22], Zheng, Tay, Li [32]. Ani v jedné oblasti, které jsou tu pro příklad jmenovány, by požadavek větší strmosti waveletových filtrů, než jakých dosahují známé formy, příliš neuspěl.

Vytváření různých tříd waveletů je doménou abstraktních matematických disciplín. Nemáme bohužel univerzální metodiku, kterou bychom dokázali generovat wavelety libovolných vlastností. Ač se jedná o velice dynamickou oblast výzkumu, vlastní aplikace waveletové transformace staví často na použití jen několika základních typů, jakými jsou i dva výše jmenované – Symlety a Daubechies wavelety.

4 Kvadratické metody analýzy

Popsané metody doposud splňovaly distributivní princip, který je zaručen jejich společným základem tvořeným skalárním součinem, respektive korelací, což bylo řečeno již na na úvodu Kap. 3. Zopakujme ještě, že rozlišení průmětu skalárního součinu signálu s korelační funkcí do časově-frekvenční roviny je dáno pouze vlastnostmi této palety korelačních funkcí, jak je formulují jednotlivé metody. To se týká všech výše diskutovaných, ať už šlo obecně o digitální filtraci, všechny varianty wavelet a krátkodobou Fourierovu transformaci. Obrazem těchto lineárních metod může být čistě frekvenční nebo obecnější časově-frekvenční distribuce.

Výkonový obraz frekvenční distribuce je v oblasti diagnostiky nejtypičtějším výstupem. Příkladem je výkonové spektrum nebo frekvenční výkonová hustota. Tato interpretace frekvenčního obrazu více odpovídá fyzikálnímu (energetickému) popisu a je proto ustálenou formou výstupu frekvenční analýzy obecně, zejména však v oboru technické diagnostiky.

Integrál okamžitého výkonu $p(t)=x(t)^2$ vystupující v Parsevalově rovnosti není, z důvodu nenulové střední hodnoty a nekonečných mezí, definován. Výkonové spektrum tedy studujeme na Fourierově transformaci funkce odvozené z původní rozdělení do časově posunutých a časově omezených realizací $x_T(t)$, pro které platí $x_T(t)=x(t), \forall t \in \langle 0, T \rangle$ a $x_T(t)=0, \forall t \notin \langle 0, T \rangle$. Pro $x_T(t)$ je obecně platná i Parsevalova rovnost skalárních součinů v čase a ve Fourierově obraze, normálně definována jen pro funkce z L^2 , Mallat [5]. Ve (4.1) jsme do Parsevalovy rovnosti za obecné funkce dosadili průběh jedné realizace $x_T(t)$ a jejího posuvu $x_T(t+\tau)$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x_T(t) x_T^*(t+\tau) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}_T(\omega) \hat{x}_T^*(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (4.1)$$

Fourierova transformace aplikovaná následně na levou a pravou stranu (4.1) odhaluje identitu mezi Fourierovou transformací autokorelační funkce a kvadrátem Fourierovy transformace. Právě tento závěr je definičním vztahem výkonového spektra nazývaný nejčastěji jako Wiener-Khinchinův teorém. Výkonové spektrum (někdy zkracujeme jen jako spektrum) se podle něj počítá jako Fourierova transformace autokorelační funkce, což odpovídá levé straně rovnice (4.1). Parsevalova rovnost tedy stojí za odvozením jak Wiener-Khinchinova teorému, tak je navíc díky (4.2) jasný i jednodušší způsob výpočtu spektra přímo z Fourierovy charakteristiky, přesně podle pravé strany rovnice (4.1).

$$P(\omega) = \frac{1}{T} |\hat{x}_T(\omega)|^2 = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{x_T x_T}(t) e^{-j\omega t} dt \quad (4.2)$$

Dobře je znám rozbor přesnosti, které může prakticky tento přístup přinést, neboť identita z (4.2) je opět teoreticky podmíněna neomezenými integračními limitami. Ve skutečnosti se na odhadu $P(\omega)$ obecného signálu promítnou podobné efekty neurčitosti mezi hodnotou frekvence a výkonu, jak je tomu při použití okének. Zásadní je způsob, jakým se zkoumaným signálem zacházíme. V případě signálů stacionárních můžeme výpočtem na základě platnosti (4.3), obvykle ve spojení s Welchovo průměrovací metodou a použitím vhodných okének, získat velmi přesná spektra. Pro nestacionární signály dáváme přednost formulaci podle (4.4), zde již mluvíme o tak zvaném časově proměnném výkonovém spektru, či-li spektrogramu.

$$P_{x_T}(\omega) = \lim_{T \rightarrow +\infty} 2 \frac{|\hat{x}_T(\omega)|^2}{T} \quad (4.3)$$

$$P_{x_T}(\omega, T) = 2 \frac{|\hat{x}_T(\omega)|^2}{T} \quad (4.4)$$

4.1 Časově proměnná autokorelace

Určení časově proměnného spektra je výstupem všech kvadratických JTFA metod. Jejich společným rysem je, podle analogie mezi (4.2) a (4.4), existence časově proměnné autokorelace, Qian, Chen [3]. Vztah (4.2) pracuje s autokorelací $R_{x_T x_T}(t)$, kterou můžeme interpretovat právě i jako proměnnou ve tvaru $R_{xx}(t, T)$. Zápis $R_{xx}(t, T)$ je univerzální formulací časově závislé autokorelace, existuje ale mnoho způsobů jak k ní dojít, neboť v případě (4.1) je autokorelace definovaná jen jako blíže nespecifikovaný výběr z teoreticky nekonečné realizace.

Nejznámější metoda volby výběrů již byla definována v souvislosti s výpočtem STFT podle vztahu (3.6). $S_x(t, \omega)$ je vypočítáno pomocí dekompozice signálu kompaktním okénkem konstantní délky a s konstantním posuvem. Výkonový obraz získáme aplikací (4.4), výsledkem je speciální verze spektrogramu nazývaná periodogram (4.5).

$$P_x(t, \omega) = \frac{2}{T} |S_x(t, \omega)|^2 \quad (4.5)$$

Vyjádření (4.6) zachycuje časově proměnou autokorelaci adekvátní tomu, jak by se $P_x(t, \omega)$ počítalo podle Wiener-Khinchinova přístupu.

$$R_{x_w, x_w}(t, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_w(s, \tau) \cdot x_w(s+t, \tau) ds \quad (4.6)$$

Další obdobnou formu časově proměnných spekter zavádí i tzv. kumulativní spektrum používané také v analýze impulsních charakteristik. Zde je použita odlišná forma okénka s pevným posuvem, ale zkracující se délkou, Kadlec [6]. V případě obdélníkového okna se výpočet spektrogramu velmi blíží formulaci (4.6).

Oba zmíněné přístupy nemohou jít přes omezení dané velikostí okénka vůči předpokladu stacionarity $x_w(t)$. Pokud se bude jednat o signál nestacionární, pak je výpočet partikulárního $P(t, \omega)$ platný jen pro omezené integrační meze vstupující autokorelace (determinované šíří okénka), v kterých můžeme stacionaritu s tolerovanou chybou předpokládat. To obvykle znamená oželeť vysoké frekvenční rozlišení.

4.2 Wigner-Ville distribuce

Určení $R_{xx}(t, \tau)$ podle (4.6) trpí celou řadou nedostatků. Jeden jsme již zmínili, a to, že studovaný signál by měl být stacionární nebo alespoň po částech stacionární, mezním případem by byl fiktivní signál složený z časově izolovaných úseků. Dilema mezi rozmazáním spektra obecného nestacionárního signálu a jeho rozlišením jsme však v této souvislosti již diskutovali. Dalším negativem metodiky podle (4.6) je ztráta informace o signálu jako celku, signál je nejdříve rozčleněn na izolované úseky, ke kterým se Fourierova transformace z principu staví jako k periodicky prodlouženým, i když to neodpovídá povaze signálu. Tento problém jen částečně řeší nenulové překrytí.

Nový pohled na problematiku rozlišení odhalíme, zaměříme-li se na efekt okamžité, respektive časově proměnné, korelace. Typický přístup k výpočtu autokorelační funkce pomocí překryvu signálů může být interpretován i jako průměrování okamžité korelace podle vztahu $R_{xx}(\tau) = \int R_{xx}(t, \tau) dt$. V rámci této představy není $R_{xx}(t, \tau)$ ničím jiným, než součin $x(t) \cdot x(t+\tau)$. Formální substitucí přechází tento vztah na známější (4.7), nazývaný taktéž Vileův součin, Cohen [15].

$$R_{xx}(t, \tau) = x(t - \tau/2)x(t + \tau/2) \quad (4.7)$$

Principiální rozdílnost přístupů (4.6) a (4.7) je zřejmá. Opustili jsme myšlenku dekompozice signálu do dílčích úseků, vztah (4.7) už mnohem spíše odpovídá představě okamžité autokorelace. Uvidíme, že takto definovaná časově frekvenční distribuce získala nové neobvyčejné vlastnosti. Nabízí se nyní dvojí možné začlenění $R_{xx}(t, \tau)$ do (4.2) podle volby nezávislého časového parametru.

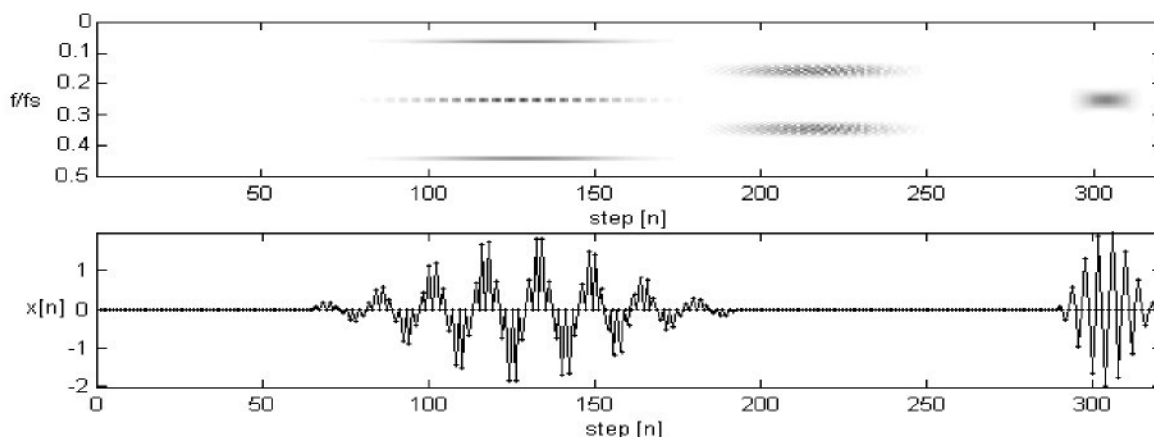
$$V_x(t, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - \tau/2)x^*(t + \tau/2)e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (4.8)$$

$$A_x(\tau, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - \tau/2)x^*(t + \tau/2)e^{-i\omega t} dt \quad (4.9)$$

V rámci souvislosti odvození (4.7) z průměrné autokorelace odpovídá (4.8) definici pro výpočet výkonového spektra – jde o Wigner-Ville distribuci, rovnici (4.9) nazýváme funkcí nejednoznačnosti, z doslovného angl. „ambiguity function”, zkráceně pak AF, Qian, Chen [3].

Funkce nejednoznačnosti, zkracujeme jako AF, nachází aplikaci zejména ve studiu Dopplerovo a echo efektů při zpracování radarových signálů, Çankaya [49], zatímco Wigner-Ville distribuci můžeme zahrnout do skupiny typických JFTA metod. Wigner-Ville distribuce byla původně vyvinutá pro studium okamžité frekvence, Boashash, O'Shea [24], v kvantové mechanice a ke studiu seismologických dat Huerta-Lopez, Shin, Powers, Roesset [18]. Mezi oběma vztahy $V_x(t, \omega)$ a $A_x(t, \omega)$ je nicméně spojitost, ke které se ještě vrátíme v souvislosti s Cohenovými třídami.

Příklad Wigner-Vile distribuce demonstračního signálu je na Obr. 4.1. Průběh tohoto signálu je vidět ve spodním obrázku a už z něho je jasné, že je složen ze dvou kompaktních částí. První je generován jako součet vysoko a nízko frekvenčních sinových funkcí, druhý je tvořen jednoduchou harmonickou, obálka obou je modulována Hanningovým oknem. Oproti očekávání se v časově-frekvenční distribuci setkáváme s dalšími produkty, které v původním signálu nenacházíme.



Obr. 4.1 Wigner-Ville distribuce na příkladu komponentního signálu

Vysvětlením je interference, z pohledu teorie ji popisujeme vztahem (4.11), kde $x(t)=g(t)+h(t)$ a $V_{[h,g]}=V_{[g,h]}$ jsou tak zvanou křížovou Wigner-Ville distribucí, Cohen [15]. Právě ona je tedy příčinou vzniku nepravých komponent spektrogramu. Předpokládáme že $g(t)$ a $h(t)$ jsou elementární deterministické signály s kompaktní časově-frekvenční distribucí V_g resp. V_h definovanou podle (4.8), pak platí

$$V_x = V_g + V_h + V_{[g,h]} + V_{[h,g]}, \quad (4.10)$$

$$V_{[g,h]}(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t + \tau/2) h^*(t - \tau/2) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (4.11)$$

Analogicky k (4.11) budeme elementární V_x považovat za produkt autokorelační Wigner-Ville distribuce. Interference se projevují na středních hodnotách frekvencí a času mezi všemi elementárními komponentami signálu, Obr. 4.1. I přes tento efekt je Wigner-Ville unitární transformací zachovávající energii jak v časovém, tak frekvenčním průmětu, a tudíž platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} V_x(t, \omega) dt = 2\pi |\hat{x}(\omega)|^2, \text{ a } \int_{-\infty}^{\infty} V_x(t, \omega) d\omega = |x(t)|^2. \quad (4.12)$$

Rovnice (4.12) jsou platné i pro komponentní signál, neboť časové a frekvenční průměty křížové Wigner-Ville jsou vždy nulové.

Hlavním plusem této kvadratické metody je, že principiálně netrpí rozmazáním v čase ani ve frekvenci, jako je tomu u krátkodobé Fourierovy transformace a waveletů, viz. (3.7) a (3.8). Zobrazení Diracovy funkce vede opět na Dirackovu funkci přes všechny frekvence, transformace komplexní exponenciály je odpovídající Dirackovu pulsu v čase. Platí, že WVD, jak budeme dále zkracovat Wigner-Ville distribuci, podává pro elementární signály nezkreslené časově-frekvenční distribuce odpovídající zcela teorii. Tento fakt je platný dokonce i pro signál typu Gaussovy funkce. Tato schopnost nebyla nikdy u lineárních metod dosažitelná, protože výsledek musel

vždy zahrnovat vliv korelačních funkcí. Skutečností zkreslující tyto výhody je právě interference. I na jednoduchém příkladu na Obr. (4.1) vidíme, že interferenční projev je zcela specifický. Nejmarkantnější je vysoká oscilace kmitů křížových produktů WVD a poloha odpovídající středním hodnotám frekvencí a času pravých komponent. Interference obvykle dosahují i vyšších amplitud než autokorelační komponenty, proto je interpretace jednoduché WVD složených signálů velmi náročná.

4.2.1 Diskrétní Wigner-Ville distribuce

Diskrétní ekvivalent WVD distribuce je založen na substituci za poloviční krok ve (4.8) a nahrazení nekonečných integračních mezí tak, abychom mohli využít FFT algoritmu. Přechod od polovičního argumentu spojitého posuvu $\tau/2$ na $\Delta t = 1/f_s$, což je pro nás zároveň nejmenší rozlišovací úroveň vzorkovaného signálu, vede ke zdvojnásobení argumentu komplexní exponenciály. Výsledný tvar se obvykle prezentuje jako

$$V_x[n, k] = \lim_{L \rightarrow \infty} \sum_{l=-L/2}^{L/2-1} x[2n+l] x[2n-l] e^{-i4\pi k l/L}. \quad (4.13)$$

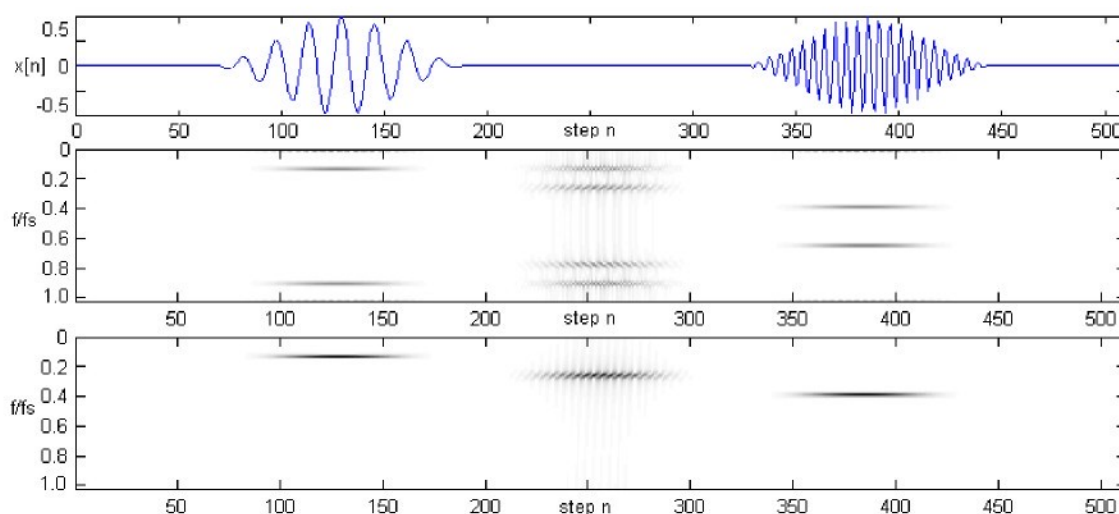
Možnosti různé diskretizace se neodvíjejí ani tak z možných variant aproximace Villeova součinu, jako ze způsobů omezení interference a aliasingu. Riziko aliasingu je zapříčiněno násobením signálu sebou samým, což má za následek vznik rozdílových a hlavně součtových interferenčních a dvojnásobných „autokorelačních“ frekvencí. Tuto skutečnost můžeme demonstrovat, dosadíme-li za $g(t)$ a $h(t)$ harmonický signál $\cos(\omega_1 t)$, resp. $\cos(\omega_2 t)$. Zjednodušený křížový Villeův součin z (4.7) pak odpovídá (4.14), vlastní autokorelační produkty bychom dostali dosazením ω_1 za ω_2 a obráceně.

$$\cos(\omega_1 t) \cos(\omega_2 t) = 1/2 \cos((\omega_1 - \omega_2)t) + 1/2 \cos((\omega_1 + \omega_2)t) \quad (4.14)$$

Vznik vyšších frekvencí – a to až dvojnásobných vzhledem k původní šíři pásma signálu – je tudíž principiální záležitostí výpočtu.

První se nabízí použití převzorkování dvojnásobnou vzorkovací frekvencí. Úprava se dá provádět v časové rovině pomocí interpolace, nebo doplněním nul ve Fourierově transformaci. Obojí vede na half-band frekvenčně omezený signál. Pokud to situace dovoluje, je možné signál omezit nízkofrekvenčním filtrem i bez interpolace.

Metoda druhá předpokládá místo interpolace použití analytického signálu, Johansson [45]. Jak je známo, Fourierova transformace takového signálu je pouze pravostranná, a tudíž nemůže vznikem součtových frekvencí dojít k aliasingu, stejně jako by se jednalo o frekvenčně omezený signál. Srovnání obou postupů demonstruje Obr. 4.2



Obr. 4.2 Wigner-Ville distribuce reálného a analytického signálu

Spektrogramy na Obr. 4.2 jsme pro přehlednost porovnání vynesli v plném frekvenčním pásmu až do f_s . Je ihned patrné, že použití analytického signálu nejen zabránilo vzniku aliasingu, ale také ve značné míře omezilo interference. Účinek je tak hned dvojitý: polovina všech falešných komponent vzniká díky symetrii spektra reálného signálu, což u analytického signálu odpadá, plus u součinu komplexních harmonických nevznikají rozdílové frekvence, jako tomu bylo u reálných kosinových funkcí v rovnici (4.14). S analytickým signálem se interference omezují pouze na součtové členy, ve spodním spektrogramu proto schází nízkofrekvenční křížová frekvence.

Problematická zůstává pouze nutnost výpočtu analytického signálu pomocí Hilbertovy transformace, což se dá realizovat opět buď pomocí filtru, nebo pomocí maskování levé strany Fourierova obrazu, O'Toole, Mesbah, Boashash [33]. Výpočetní náročnost se přibližuje nárokům na výpočet interpolace v první variantě. Pro důvody vyplývající z porovnání se celkově obvykle přikláníme k použití rozšířené analytické formy signálu.

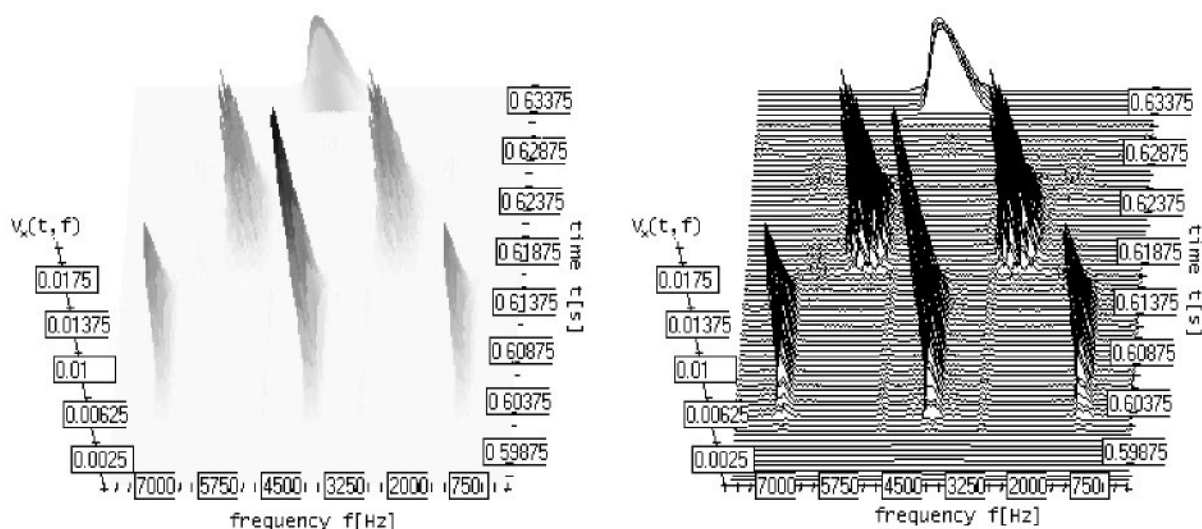
Dvojnásobný argument pro časový posuv ve (4.13) jen naznačuje interpolaci signálu. V případě, že jsme ji nepoužili, nebo pokud nám nevadí vyšší redundance v časovém rozlišení, můžeme časový posuv nechat i jednotkový,

$$V_x[n, k] = \lim_{L \rightarrow \infty} \sum_{l=-L/2}^{L/2-1} x[n+l] x[n-l] e^{-i4\pi k l / L}. \quad (4.15)$$

4.2.2 Cohenovy třídy

Ani výše popsaná metodika neodstraňuje falešné produkty interferencí mezi

elementárními signály. Dalším standardním postupem je využití charakterových odlišností interferencí od vlastních autokorelačních produktů. Na Obr. 4.3 je v jiném pohledu předložen výsledek Wigner-Ville distribuce z příkladu na Obr. 4.1. Lépe jsou na něm k doložení některé vlastnosti křížových produktů – zopakujme že to jsou vysoké amplitudy a vlastní oscilace. Obrázek je prezentován ve dvou variantách: kolorované 3D síti a waterfallu. Na obou jsou ve střední části zjevné dominantní interference, na levém, pravém a zadním kraji pak reálné časově-frekvenční průměty skutečných komponent. Hůře, co do viditelnosti, vystupuje vlastní oscilace křížových korelací, neboť je graf vynášen v absolutních hodnotách na způsob STFT spektrogramů.



$$C_x(t, \omega) = V_x(t, \omega) * \theta(t, \omega) \quad (4.16)$$

Právě L.Cohen, Cohen [25], generalizoval třídu filtrů $\theta(t, \omega)$, takových, že zachovávají invarianci časových a frekvenčních posuvů $C[x(t-t_0)e^{-j\omega_0 t}] = C_x(t-t_0, \omega-\omega_0)$ takto upravených Wigner-Ville distribucí. Skupinu časově-frekvenčních kvadratických distribucí možnou odvodit tímto způsobem shrnujeme termínem Cohenovy třídy, značíme $C_x(t, \omega)$.

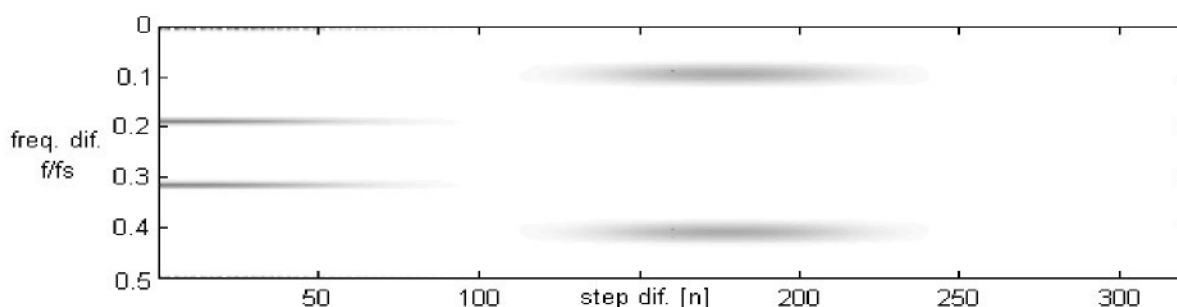
Vlastnosti 2D konvoluce (4.16) je možné studovat také po Fourierově transformaci. Opět uplatňujeme relaci mezi konvolucí a násobením, dobře známou pro 1D případy. Konvoluce (4.16) přechází na součin duálních obrazů V_x a θ , alternativní vyjádření $C_x(t, \omega)$ vyjadřuje rovnice

$$C_x(t, \omega) = \int_{\tau} \int_{\nu} \hat{\theta}(\tau, \nu) A_x(\tau, \nu) e^{2\pi i(f\nu - t\tau)} d\tau d\nu \quad (4.17)$$

Na povrch se dostává dosud nezmiňovaná paralela mezi ambiguity funkcí a Wigner-Ville distribucí, obě jsou duálními funkcemi svázanými navzájem Fourierovou transformací. Výpočet

Cohenových tříd podle (4.17) je v mnoha případech praktičtější než podle (4.16). $\hat{\theta}(\tau, \nu)$ je maskou mající za úkol eliminovat vysoké frekvence interferencí, nyní ale v obraze distribuce funkce $A_x(\tau, \nu)$.

Optimální návrh $\hat{\theta}(\tau, \nu)$ spočívá především v nastavení hranice mezi užitečným signálem a polohou interferencí. Následující Obr. 4.4 odpovídá časově-frekvenční distribuci funkce dvojznačnosti, opět na příkladu signálu z Obr.4.2. Je vidět, že povaha funkce dvojznačnosti zvýrazňuje časové a frekvenční rozdíly, nebo lépe řečeno posuvy mezi jednotlivými komponenty signálu. Na obrázku jsou nejmarkantnější 4 oblasti, snadno bychom zjistili, že jejich pozice vždy odpovídá rozdílu frekvenčních a časových parametrů původních komponent. Pouze nevýrazná oblast soustředěná kolem počátku je projekcí autokorelací, ostatní korespondují s křížovými interferencemi. Je jasné, jak bychom v tomto případě navrhli masku plošného filtru $\hat{\theta}(\tau, \nu)$, aby izoloval pouze užitečný autokorelační obraz v distribuci funkce dvojznačnosti AF.



Obr. 4.4 AF distribuce

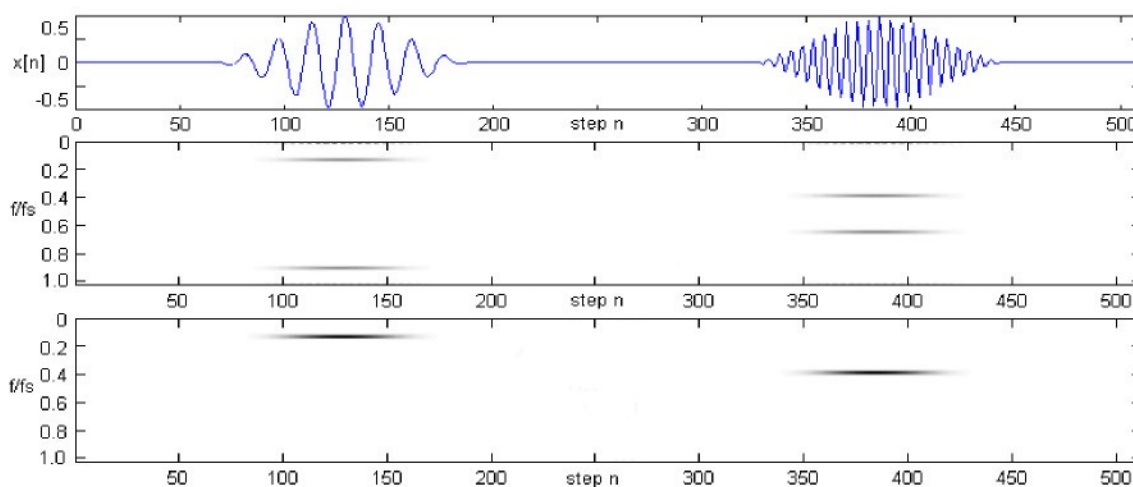
Navozený princip – odfiltrování obrazů s velkým časovým a frekvenčním posuvem – je obecně platným pravidlem, definující všechny Cohenovy třídy. Těch je známo více než dvě desítky, nejznámější jsou Choi-Williams, Rihaczek, cone shape, Pageova distribuce apod. Podle popsaného principu můžeme z rovnice (4.16) teoreticky dokonce odvodit jak spektrogram $|S_x(t, \omega)|^2$, tak skalogram $|W_x(u, s)|^2$, Qian, Chen [3]. I proto je Wigner-Ville nejobecnějším přístupem k časově-frekvenčním distribucím, jaký se nám nabízí.

4.2.3 Implementace diskrétní Wigner-Ville distribuce

Vztah (4.15) není nic než DFT Villeho součinu. Jeho aproximací, na konečném počtu vzorků, je takzvaná Pseudo Wigner-Ville distribuce, zkráceně PWVD. Nutné omezení délky signálu znamená se znovu se potýkat s dobře známými problémy optimální délky a tvaru okna, popisovanými již v Kap. 3.1.1 o STFT.

Vzhledem ke specifikům WVD nám ale toto omezení výběru okénkem přináší i jednu podstatnou výhodu, kterou je omezení interferencí v čase pouze na délku okna. Pomocí PWVD můžeme dostat velmi dobrou aproximaci WVD, navíc ale bez dalších interferencí, zejména obsahuje-li signál izolované komponenty. Délku okna obdobně jako u STFT přizpůsobujeme potřebnému frekvenčnímu rozlišení, plus limitujeme jím podíl interferencí ve výsledném JTFA obraze. Obrázek 4.5 níže srovnajte s Obr. 4.3. Použitím PWVD s délkou okna rovnou polovině délky záznamu jsme v tomto případě, za cenu nižšího frekvenčního rozlišení, úplně odstranili časové křížové interference WVD.

Spodní graf opět odpovídá WVD, kde jsme signál nahradili jeho analytickým obrazem. Zde zmizely interference úplně i s aliasingem. Z toho je patrné, že dobře nastavená šířka okna spolu s nasazením Hilbertovy transformace pro vytvoření analytického signálu, může podstatnou měrou zpřesnit, nebo minimálně zpřehlednit, spektrogram poskytovaný WVD. To vše bez nutnosti použití náročných metod založených na Cohenových třídách.

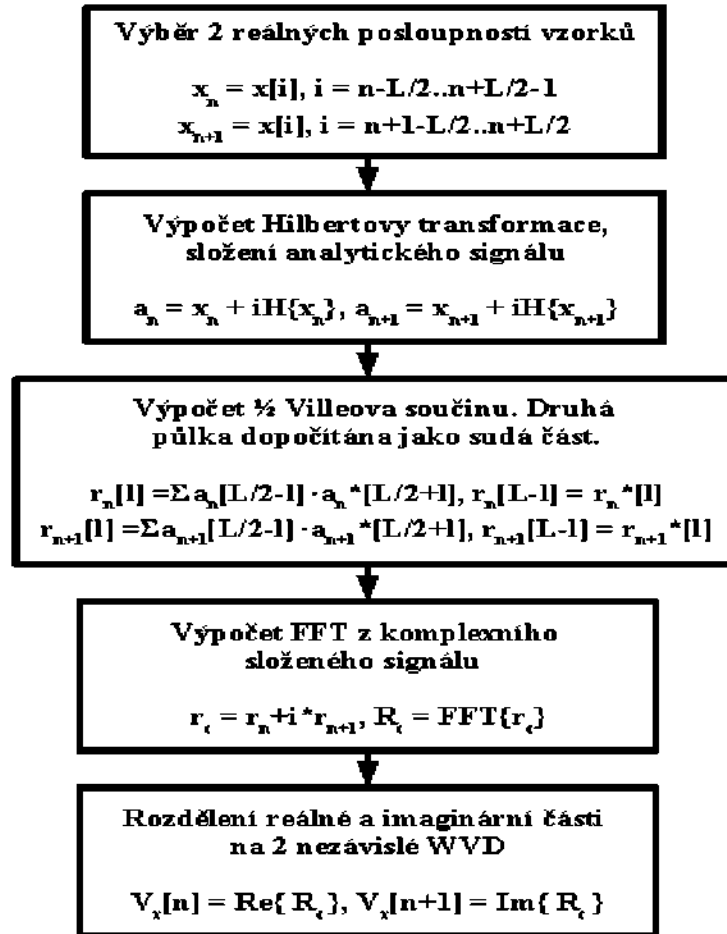


Obr. 4.5 PWVD, demonstrace eliminace interference na reálném a analytickém signálu

Vlastní algoritmus výpočtu podle rovnice (4.15) je ideální stavět na použití FFT, i když v literatuře narazíme i na Hartleyovu transformaci Narasimhan, Nayak [43], která je vhodná tehdy, použijeme-li místo reálného signálu analytický. Villeův součin je, na rozdíl od jiných forem časově závislých autokorelací, sudou funkcí, což je stejné i pro analytický signál. Platí, že výsledek Fourierovy transformace Villeova součinu musí být proto reálný. To nám umožňuje, díky $FT\{i f_{suda}(t)\} = i \hat{f}_{suda}(\omega) = i \Re\{\hat{f}_{suda}(\omega)\}$, využít i imaginární část výsledku FFT, Čížek [10]. Uvedená vlastnosti je zásadní a využijeme ji při výpočtu WVD, celkový postup shrnut do diagramu vypadá jako na Obr. 4.6.

Algoritmus je optimalizován co do úspory při výpočtu Villeova součinu, tak ve výpočtu

FFT, kde zpracováváme dva bloky naráz. Pro správnou interpretaci výsledků musíme ještě správně naformátovat frekvenční osu, protože FFT nepracuje s dvojnásobným argumentem exponenciály, tak jak to předpokládá (4.15).



Obr. 4.6 Postup výpočtu diskrétní PWVD, optimalizovaný algoritmus

4.3 Analýzy vyšších stupňů

Krom kvadratických metod známe i analýzy vyšších řádů, angl. „High order spectral analysis“, zkráceně HOSA. Šířkou aplikací zasahují stejný rámec jako všechny dosud zmíněné analýzy (odhady spekter, identifikace, výpočet časových parametrů, spektrogramy), Swami, Mendel, Nikias [44]. Speciálně dobře vystupují v případech analýzy signálů zatížené šumem s Gaussovskou distribucí, pro kterou jsou používané vyšší korelační momenty rovny nule.

V časově-frekvenční distribuci analogicky k Wigner-Ville distribuci rozeznáváme Wignerovo bi-spektrum (4.18) a tri-spektrum, kde R_{3x} je časově proměnná korelace, tentokrát

počítaná podle (4.19). K detailnějšímu prozkoumání jsme zvolili bi-spektra. Vícerozměrné spektrum rozšiřuje objem výstupních informací. Obvykle se prezentuje vybraným průmětem $W_x(t, f_1, f_1)$ nebo $W_x(f_1, f_2)$. První případ poskytuje výstup typu standardního spektrogramu.

$$W_x(t, f_1, f_2) = \iint R_{3x}(t, \tau_1, \tau_2) e^{-2\pi i(f_1 \tau_1 + f_2 \tau_2)} d\tau_1 d\tau_2 \quad (4.18)$$

$$R_{3x}(t, \tau_1, \tau_2) = x^*(t - \alpha \tau_1 - \alpha \tau_2) x(t + \beta \tau_1 - \alpha \tau_2) x(t - \beta \tau_1 + \alpha \tau_2) \quad (4.19)$$

Vyšetřování násobných spekter je o dost náročnější než spekter nebo spektrogramů klasických. Stejně se komplikuje i vlastní výpočet HOSA analýz. Skutečným praktickým přínosem jsou pro specifický okruh problematik popsanych v Swami, Mendel, Nikias [44].

5 Speciální metody JTFA

Teoretická pasáž nám zprostředkovala náhled na obecné principy JTFA. Všechny výše zmíněné postupy časově-frekvenční dekompozice nečiní rozdíl mezi typem veličiny, na který jsou aplikované. Matematicky, a ač nebylo dokazováno (Mallat [5]), jsou všechny kvadratické distribuce, až na speciální úpravy, definované nad celým oborem funkcí L^2 , diskretizované pak v oboru l^2 , viz. Kap 1.3. Z pohledu signálové analýzy můžeme algebraická omezení považovat za minoritní, neboť diskretizovaný fyzikální signál ze své povahy do oboru l^2 posloupností patří vždy.

Dopředu jsme také řekli, že nestacionární signály jsou nejobecnější skupinou jak z pohledu statistického, tak časově-frekvenčního. Ostatní typy, jak je definujeme v Kap 2.5, jsou podmnožinami, speciálními případy, které je možno analyzovat jednoduššími prostředky. Víme, že lineární, kvadratické a časově-frekvenční analýzy vyššího řádu jsou svoji povahou předurčené právě pro analýzu nestacionárních případů, Hlawatsch, Boudreaux-Bartels [37]. Není proto proti obecnosti aplikovat JTFA zpětně i na signály, které nejsou přímo klasickými nestacionárními příklady.

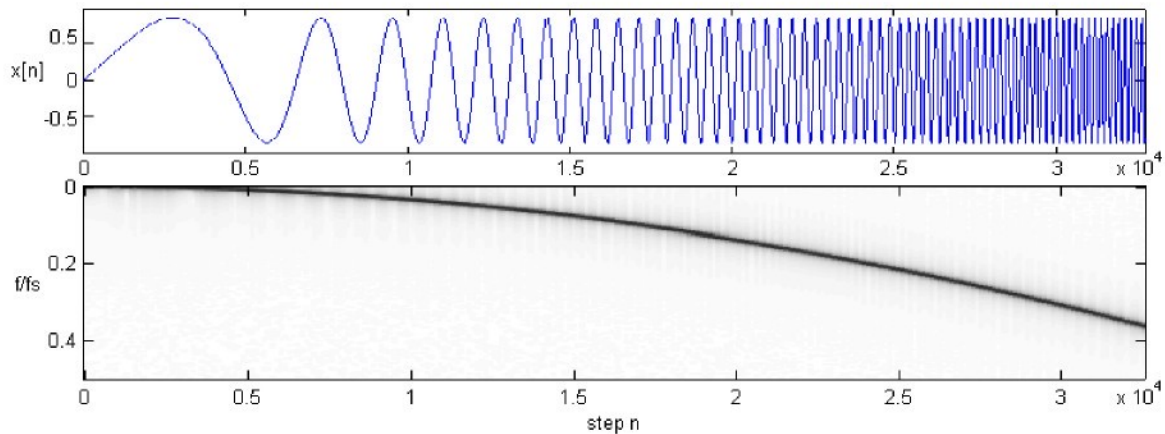
Následně předvedeme, že je možné jmenované obecné metody dále optimalizovat specifikům analyzovaného signálu. V mnohých případech je totiž možno obecnost konkrétní JTFA analýzy podřítit její přesnější, rychlejší, nebo jednodušší úpravě. Z nepřehledné palety možných vybereme zástupce jevů, s kterými se praxe běžně potýká. Referenčním oborem, kde se budeme inspirovat, je technická vibrační a akustická diagnostika.

5.1 Adaptivní Gaussova STFT

Nejobvyklejší demonstrací JTFA je její aplikace na přeladovaný harmonický signál tvaru

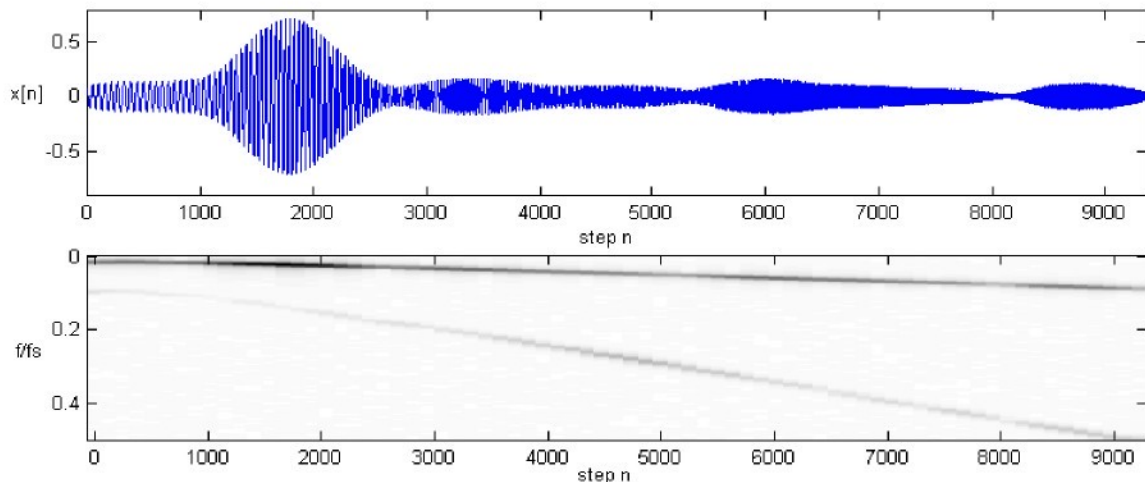
$$x(t) = A(t) \sin(\Theta(t)) . \quad (5.1)$$

Tento typ funkce (Obr. 5.1) dobře koresponduje s typickými projevy diagnostických veličin na všech rotačních strojích při sledování kolísání otáček nebo rozběhů a brzdění (Obr. 5.2). Zvolený příklad je zároveň z nejtýpčtějších praktických nasazení JTFA, není proto divu, že se tak často setkáváme s obdobným vzorem přeladovaných signálů i v simulacích. Obrázky Obr. 5.1 a 5.2 nám ilustrují oba případy – syntetizovaný signál a reálná odezva vibrací na rozběh rotačního stroje.



Obr. 5.1 Modelový přeladovaný harmonický signál a odpovídající spektrogram

Okamžitá frekvence přeladovaného signálu kopíruje kvadratický průběh a dala by se popsat $\Theta'(t) = \omega(t) = 2\pi(C_1 t^2 + C_2)$. C_n jsou konstanty určující počáteční $\omega(0)$ a koncovou $\omega(t_F)$ frekvenci, vlastní fázi vstupující do (5.1) dostaneme až s integrací $\omega(t)$.



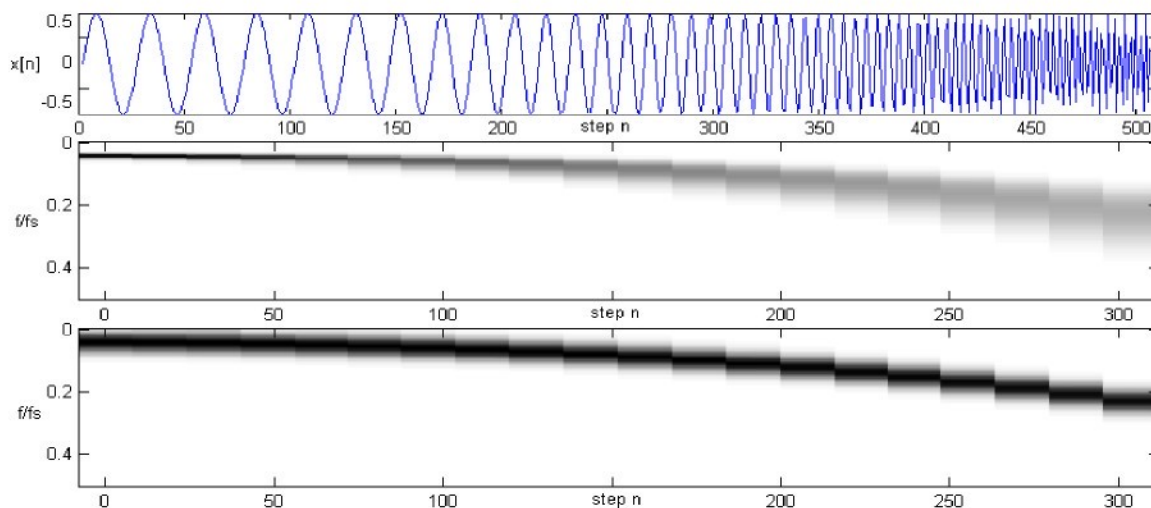
Obr. 5.2 Reálný signál rozběhových vibrací a odpovídající spektrogram

Kvadratický průběh $\omega(t)$ nám pro daný příklad hezky koresponduje s charakterem změny otáček. Zanedbali jsme amplitudovou modulaci, obálku signálu jsme zjednodušili na $A(t)=1$, opomněli jsme přítomnost násobných harmonických, i tak ale můžeme přeladovaný signál pokládat za dobrou základní simulaci rotačních rozběhových odezev, Narasimhan, Pavanalatha [42].

Problémem analýzy těchto projevů není vlastní změna otáček. Pokud bychom mohli předpokládat, že se v konstantním časovém úseku mění otáčky rovnoměrně právě o $\Delta\omega = \text{konst.}$, pak můžeme vzhledem k tomu co jsme uvedli v Kap. 3.1.1, nadimenzovat okénko na optimální

rozlišení. Pokud toto není zaručeno po celou dobu sledování systému, pak vždy znevýhodňujeme přesnost lokalizace děje, buď v čase nebo ve frekvenci, projevující se jako rozmazání v daném směru. Co se týče chyby určení amplitudy, tak ta se také týká frekvenčního tvaru okna (strmosti hlavního laloku, velikosti postranního laloku) jako tomu je ve stacionárních případech, Kap. 3.1.

Problém $\Delta\omega \neq \text{konst.}$ Obr. 5.1 a Obr. 5.2 nevystihují zřetelně, lépe bude nerovnoměrný rozběh demonstrován dalším příkladem, Obr. 5.3. První ze spektrogramů odpovídá STFT s typickým Hanningovým oknem s 256 body, druhý graf je výsledkem analýzy stejného typu, ale pouze o 64 bodech.



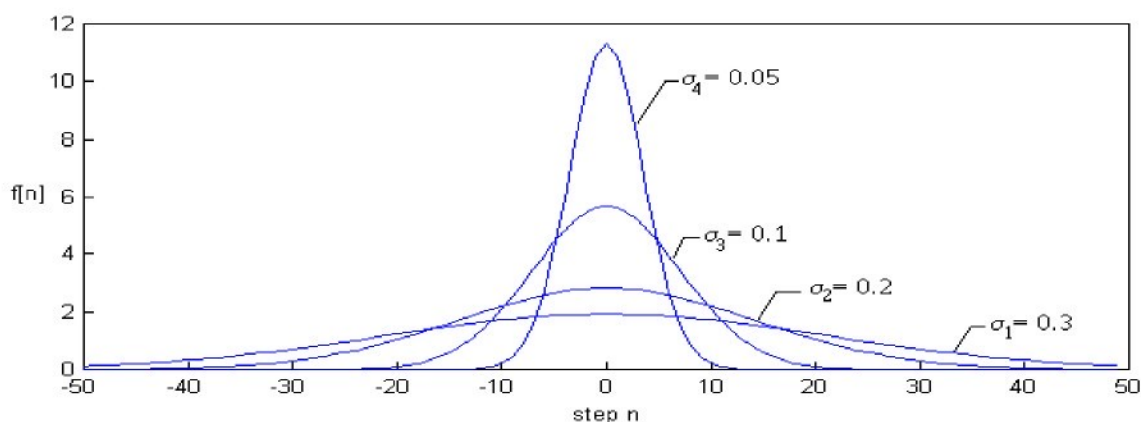
Obr. 5.3 STFT přelaďované harmonické $x[n]$ s různou šířkou okna

Obě STFT jsou příkladem jednostranného přizpůsobení vlastností analýzy na jiný požadavek. První nastavení volíme, pokud chceme v průběhu přesně měřit pomalu se měnící přechody nebo ustálené děje, druhý naopak nejlépe poslouží u skokových nebo velmi rychlých změn. Pro konvenční STFT a kombinované nebo nestacionární projevy nemáme ani jinou možnost než volit kompromisně mezi dlouhým a krátkým oknem, pokud nás zajímá děj jako celek.

5.1.1 Vlastnosti Gaussova okna

Gaussovo okno se od jiných dosti liší. Ne nepodstatný je fakt nejmenší plochy $\Delta_t \Delta_f$ zmiňovaný již v Kap. 3.1.2. Zásadní vlastností je možnost parametrizace rozlišení pomocí σ . To jsou atributy, kvůli kterým se Gaussovo okno velmi rádo cituje v teoretických pracích z různých oblastí aplikace frekvenční analýzy nebo pravděpodobnosti, za všechny například Gaborova expanze, Daubechies, Planchon [9]. Málo povšimnuto je nicméně Gaussovo okno v praktických řešeních frekvenční analýzy, a to pravděpodobně proto, že okno nevykazuje známé laloky, není

kompaktní (definiční obor je $\pm\infty$), není integrovatelné a má onen volný parametr σ . To vše příliš komplikuje jeho rozšíření mezi běžnou technickou praxí.



Obr. 5.4 Účinek σ na tvar normalizovaného okna

Obrázek je grafem funkce $f[n] = A \exp(-n^2/N^2/\sigma^2)$. A je normalizací na $\|f\|=1$, což zároveň odpovídá vrcholku maximu Gaussovy funkce, N je měřtková konstanta normalizující naopak časovou osu, σ je známá kvadratická odchylka. Roztažení okna je definováno součinem N a σ , aby bylo možno nezávisle měnit počet bodů okna a rozptýl je vhodné uchovat oba parametry nezávisle.

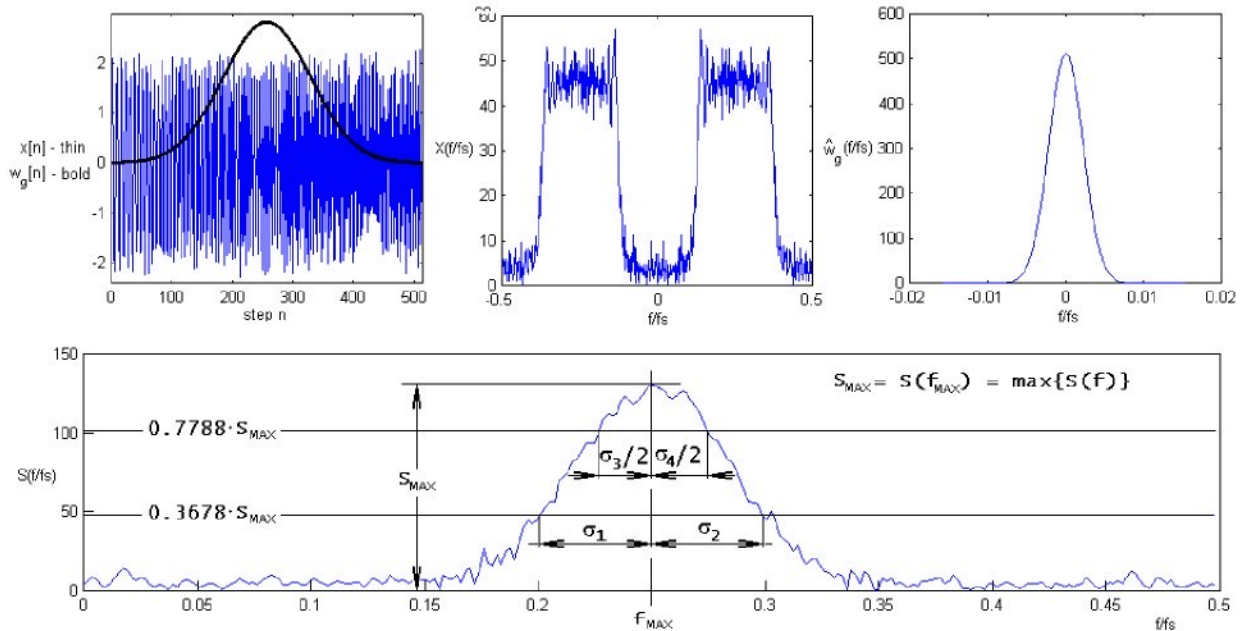
Pro $\sigma=0.3$ dostáváme průběh, díky patrnému offsetu, velmi připomínající Hammingovo okno. Od $\sigma=0.1$ a nižší se ale okno žádným STFT oknům nepodobá, viz. Randall [4]. Zdá se, že okénko je symetricky doplněno nulami, což je ale jen efekt způsobený silným tlumením exponenciální funkce patrným pouze v decibelové stupnici. Účinek takové Gaussovy funkce jako STFT okénka se nicméně doplněním nul připodobnit dá. To nás zavádí zpět k příkladu na Obr. 5.3, kde bychom mohli podobné STFT grafy generovat pouze jinak nastaveným rozptylem Gaussova okna. Výhodou by bylo stejné frekvenční rozlišení, protože počet bodů N okna by zůstal stejný.

Ještě nezodpovězenou otázkou je, jak můžeme nastavit σ , abychom byli optimální vůči určitému přeladění signálu v rámci N . Optimum budeme posuzovat ve frekvenční oblasti, protože časový průběh neumožňuje měřit šířku pásma signálu B vymezeného okénkem, což je parametr, kterému se musíme přizpůsobit. Partikulární amplitudové spektrum

$$S_x(\tau, \omega) = FT\{x_T(t-\tau)w_\tau(t)\}$$

je dáno jak šířkou pásma signálu tak frekvenčním rozlišením okna, přesněji konvolucí jejich Fourierových obrazů $\hat{w}_\sigma(\omega)$ a $\hat{x}_T(\omega)$.

Z charakteru signálů odvozených od cyklicky pracujících strojů, které jsou nyní oborem našeho zájmu, můžeme říct, že $\hat{x}_T(\omega) * \hat{w}_\sigma(\omega)$ bude více podobna právě $\hat{w}_\sigma(\omega)$. Tento předpoklad bude platným jen do určité velikosti SNR, kdy budeme moci říci, že Fourierova transformace výběru $\hat{x}_T(\omega)$ majoritně obsahuje pouze izolované vrcholy na násobcích základních otáček. Udržení co nejvyššího SNR je obecně předpokladem každého kvalitního měření, proto tuto podmínku akceptujeme. Následně bude nejvhodnější stanovovat šíři pásma $\hat{x}_T(\omega) * \hat{w}_\sigma(\omega)$ aproximací Gaussových funkcí, výsledek pak budeme značit B_σ . K tomu jen dodáme, že aproximace průběhu charakteristiky pro účely stanovení časové nebo frekvenční šířky pásma není ničím novým, v Kap. 3.1.2 uvádíme aproximace $\hat{f}(\omega)$ ideálním obdélníkovým přenosem pro odhad B_{eff} , nebo přenosem „RC“ systému pro odhad B_{-3dB} . B_σ se bude počítat obdobně jako B_{-3dB} , Obr. 5.5 necht' je návodem.



Obr. 5.5 Měření šířky pásma pomocí analogie s Gaussovo funkcí

Příklad na Obr. 5.5 věrně napodobuje možné reálné podmínky, šum odpovídá $SNR=28dB$. Horní trojice grafů má jen ilustrovat to, co bylo výše řečeno - první zachycuje časové poměry, druhé dva frekvenční jednotlivých složek samostatně. Signálem $x[n]$ je lineárně přelaďovaná sinusoida s aditivním bílým šumem. Okno $w_g[n]$ je Gaussovo funkcí se směrodatnou odchylkou $\sigma=0.2$. Zásadní je spodní graf, výsledné amplitudové spektrum. Jak jsme předpověděli, jeho tvar dobře kopíruje Gaussovu funkci, a proto můžeme šířku frekvenčního pásma B_σ aproximací Gaussovo funkcí dobře odhadnout. Doplníme-li v e^{-x^2/σ^2} za $x=\sigma$, dostaneme hodnotu $e^{-1} \approx 0.3678$, obdobně 0.7788 pro $x=\sigma/2$. To vysvětluje, proč

jsme ve spodním grafu pro daný případ okótovali právě tyto úrovně. Nezbyvá než odečíst všechny 4 odhady. Dva jednostranné odhady nestačí, protože $S_x(f)$ nebude symetrická podle f_{MAX} , výsledné B definujeme jako jejich průměr, vztah (5.2).

$$B_\sigma = 1/4(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4) \quad (5.2)$$

Vztah (5.2) je jen další z variant pro odhad šířky pásma. Obdobné výsledky bychom dostali i při použití B_{-3dB} , s navrženou metodikou průměrování dosahujeme ale lepších výsledků i pro výrazně nesymetrický průběh kolem maxima. Ostatní metody podle vztahů (3.8) nebo (3.11) operují s integrací, pro tuto speciální aplikaci by to znamenalo až přílišnou komplikaci. Pokud bychom potřebovali měření B ještě více formalizovat, pak jsou pro tento účel velmi účinné metody přímé aproximace – v našem případě bychom volili nejspíše polynomiální metodu minimálních čtverců, v souvislosti s odhady modálních parametrů známé angl. jako „curve fitting“.

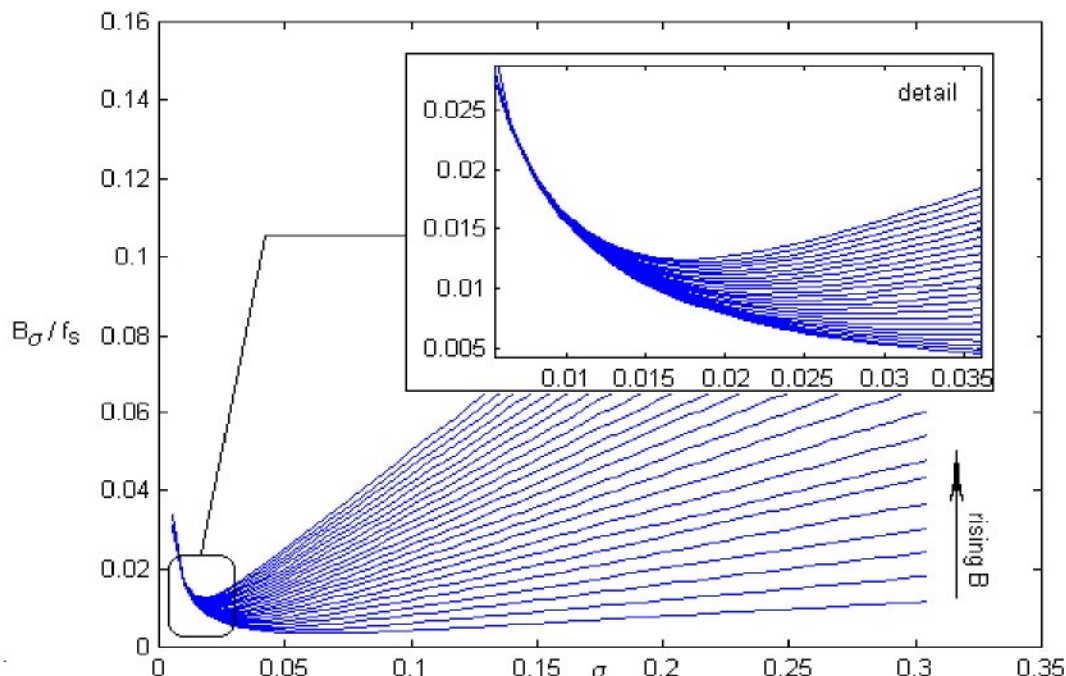
Rozborem vlastností Gaussovy funkce jsme zde demonstrovali účelnost jejího použití jako STFT okna. Časově-frekvenční atributy Gaussovy STFT, jak ji budeme dále nazývat, jsou přímo určené volbou σ , skutečná šířka pásma spektra je, díky pevně definovanému tvaru frekvenční charakteristiky, stejně dobře Gaussovou funkcí opět aproximovatelná.

5.1.2 Princip adaptivnosti

Analytické řešení $\hat{x}_T(\omega) * \hat{w}_\sigma(\omega)$ není bohužel možné, neboť obsahuje exponenciální člen e^{x^2} , ke kterému neznáme neurčitý integrál vyčíslitelný pouze formou rozvoje. Stejně platí zobecněně i pro všechny integrální operace s Gaussovou funkcí, jakou by byla i STFT. Analytický důkaz díky tomu podat jednoduše nelze, intuitivně nicméně tušíme, že $\hat{x}_T(\omega) * \hat{w}_\sigma(\omega)$ musí vykazovat extrém v závislosti na σ . Jinými slovy to vede k předpokladu, že pro konkrétní šířku pásma B signálu $\hat{x}_T(\omega)$ existuje i optimální σ . Tato premisa byla původní motivací pro experimenty jako je ten na Obr. 5.3, kdy jsme ustoupili nárokům dobrého frekvenčního rozlišení zkrácením okna tak, abychom se lépe vyrovnali s rozmazáním spektra při velkém přeladění.

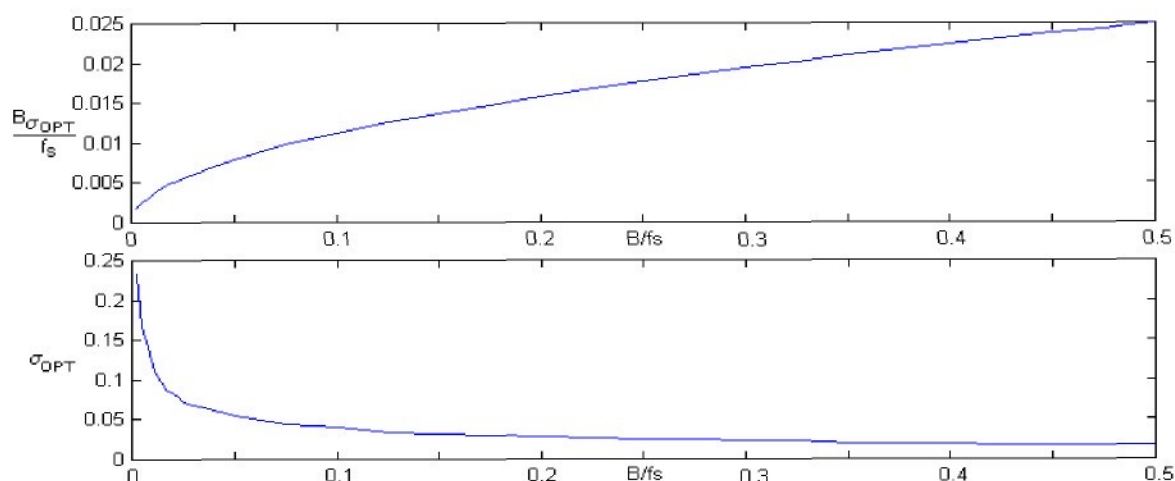
Neznámou zůstává jak stanovit relaci mezi $\sigma_{opt} = f(B)$. Numerické řešení žádnými omezeními integrovatelnosti netrpí, spolehneme se proto na něj. Obr. 5.6 závislosti $B_\sigma(B, \sigma)$ je numerickým důkazem existence minimální (optimální) šířky pásma STFT při použití Gaussova okna, na signálu s šířkou pásma B . Potvrzuje, že úměra mezi délkou okna, zde nepřímou zastoupenou σ , a šířkou pásma výsledného spektra zůstává lineární pokud dominuje vliv velkého přeladění signálu v rámci příliš dlouhého okna. S jeho zkracováním začne závislost vykazovat

extrém, po něm nastává rychlý skluz do oblasti velkých šířek pásma, tentokrát ale způsobený převážením dominance vlivu okna samotného. Tato oblast je výrazně nelineární a velmi rychle rostoucí, proto je nepřiměřené zkrácení okna vždy riskantnější operací než jeho zvětšení.



Obr. 5.6 Souvislost mezi původní šířkou pásma signálu B , σ a výslednou šířkou B_σ

Z grafu na Obr. 5.6 můžeme $\sigma_{opt} = f(B)$ přímo odečíst, nicméně ve vlastním adaptivním algoritmu používáme jinou realizaci $B_\sigma(B, \sigma)$, navíc s exponenciálně odstupňovaným B . Proč, k tomu nás navádí sám Obr. 5.6. Je zde patrné, že jednotlivé realizace $B_\sigma(\sigma, B[i])$, kde $B[i] = i \cdot f_n / D; i \in \langle 1, D \rangle$, vykazují dvojí konvergenci. Hlavní limitu zvýrazňuje detail, kde σ_{opt} pro $B = f_n$ končí přibližně na 0.018, druhou asymptotickou konvergenci nalezneme naopak u minimálních B , kde B_σ již neklesá pod jistou nenulovou hodnotu ani pro stále se zvyšující σ . Z této limitace vyplyne horní limit pro σ_{opt} na 0.32. Rozdíl mezi dvěma kroky σ_{opt} se směrem k vyšším šířkám pásma signálu B zmenšuje, proto bude v dalších odvozeních $B[i]$ diskretizován v geometrické řadě odvozené od standardu stupňování CPB filtrů, díky čemuž budeme mít pěkně podchycen hlavně začátek charakteristiky $\sigma_{opt} = f(B)$. Zde jsou opravdu změny největší, jak dokládá i Obr. 5.7



Obr. 5.7 a – Minimální B_σ STFT, b - Optimální σ Gaussova okna

Relace $\sigma_{opt} = f(B)$ je sice zásadní, ale neřeší reálnou situaci, kdy neznáme ani B . Může pomoci opět $B_\sigma(B, \sigma)$, protože B je ve výrazu jedinou neznámou. Získáme tak odhad B , který je ekvivalentní teoretické šířce pásma modelového přeladovaného signálu.

I pomocí grafu na Obr. 5.6 můžeme odměření B provést. Největším omezením bude ale přesnost, která je přímo limitovaná jemností diskretizace $B[i]$ – ať už je lineární, nebo geometrická. Pro účely rychlejšího vyhledávání přeformulujeme $B_\sigma(B, \sigma)$ na $B(B_\sigma, \sigma)$. Osvědčilo se také k tomuto účelu diskretizovat na místo B parametr σ . Výsledkem tohoto procesu by byla tabulka, respektive graf $B(B_\sigma, \sigma[j])$, generovaný opět stejným postupem, jaký je na Obr. 5.5, ovšem bez použití šumu.

Celkový postup výpočtu, nebo lépe odhadu, optimální σ_{opt} je následující:

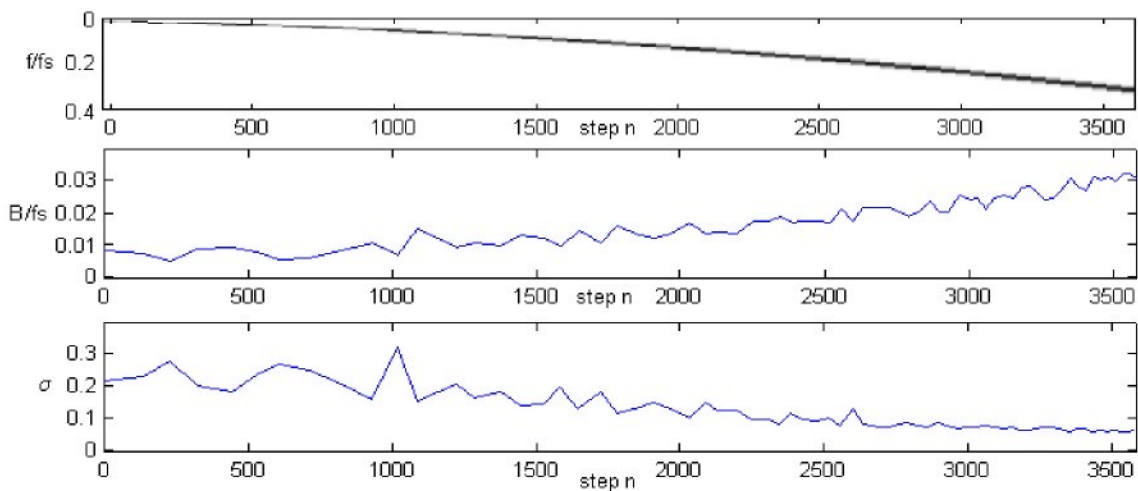
1. S libovolně zvoleným $\sigma(\tau) = \sigma_j$ vypočítáme $S_x(\tau, \omega) = FT\{x_T(t - \tau)w_\sigma(t)\}$
2. Odměříme a užitím průměru (5.2) dopočítáme odhad šířky pásma B_σ hlavní komponenty $S_x(\tau, \omega)$
3. V $B(B_\sigma, \sigma_j)$ nalezneme odpovídající aproximaci šířky pásma B obrazu $\hat{x}_T(\omega)$
4. K odhadu B z charakteristiky $\sigma_{opt} = f(B)$ odečteme optimální σ .

Přepočet $S_x(\tau, \omega)$ s optimálním Gaussovým okénkem by měl reciproke ukázat, že nová hodnota B_σ klesla, a že se velmi blíží predikované $B_\sigma(\sigma_{opt})$.

5.1.3 Rozběhová analýza

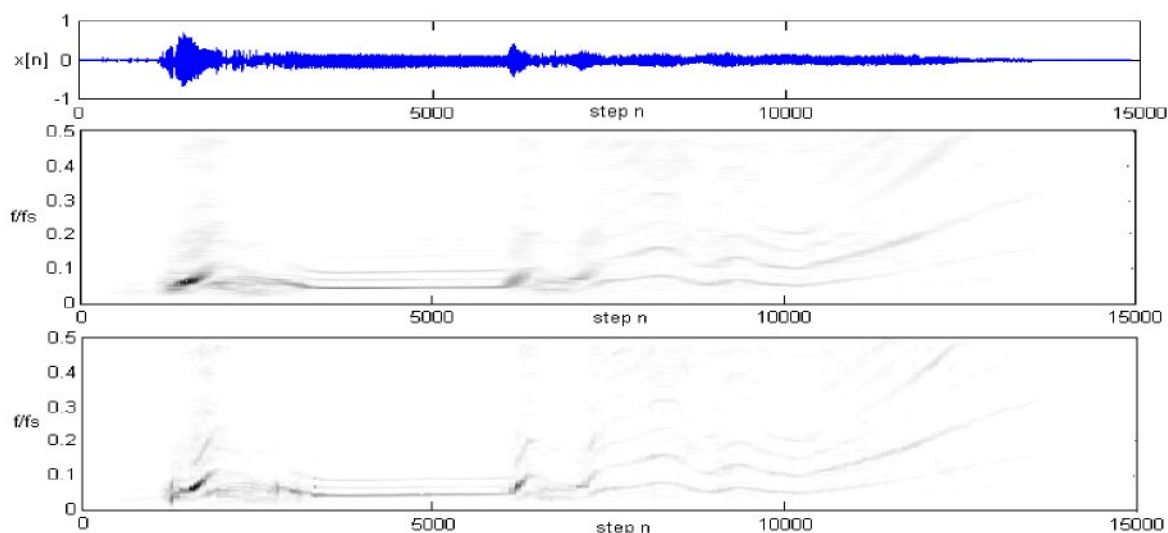
Celý čtyřkrokový mechanismus musí být výpočetně natolik pružný, aby bylo možné jej přenést i do reálného nasazení v real-time analýzách rozběhů a podobných jevů. Tam kde by výpočetní výkon nedovoloval opětovný přepočít optimálního $S_x(\tau, \omega)$, je možné algoritmus modifikovat tak, aby pracoval jednorůchodově s nahrazením optimální šířky okna hodnotou z minulého kroku $\sigma_{del}(\tau) = \sigma_{opt}(\tau - \Delta t)$. Výsledná náročnost je pak jen o málo vyšší než výpočet klasické STFT, neboť výpočet FFT zůstává pouze jeden, přibudou operace měření šířky pásma B_σ a vyhledávání v tabelovaných hodnotách parametrů B a σ .

Taková optimalizace znamená, že výsledný spektrogram se bude teoretickým optimálním hodnotám pouze blížit. Pohled na Obr. 5.8 odpovídá reálnému vývoji průběhu aproximací B a σ na jednoduchém přeladovaném signálu. Patrné jsou výkyvy B způsobené účinkem různého zarovnání polohy okna vůči fázi signálu, které jsme v tabelovaných hodnotách nemohli a ani nijak nezohledňovali, brali jsme ideální případ odpovídající právě nejnižšímu B . Tato variace se nám přenáší i do určení optimální σ a je svým způsobem neodstranitelná. Z tohoto pohledu proto netrpí výše uvedená “jednorůchodová” varianta adaptivní STFT natolik závažnou ztrátou kvality, neboť potenciální chyba použitím $\sigma_{del}(\tau)$ bude maskována právě variací odhadu B .



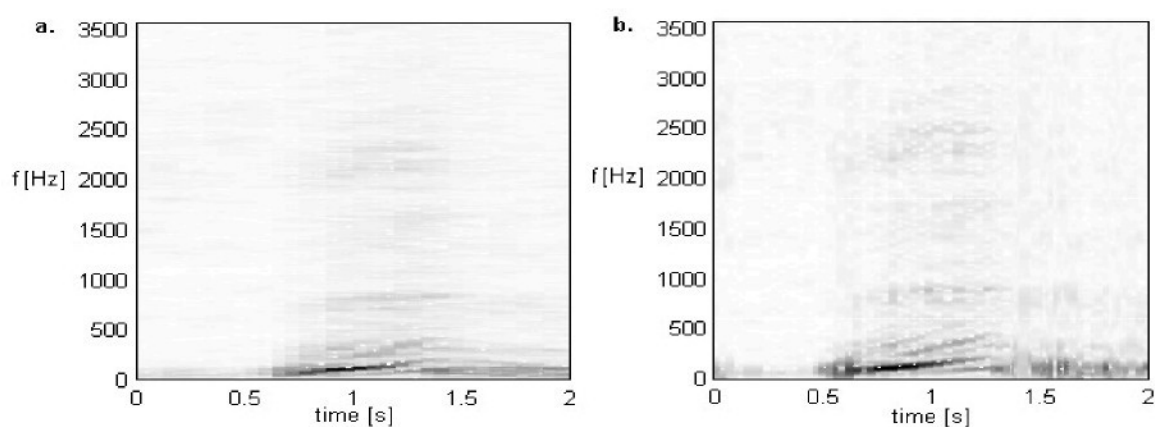
Obr. 5.8 Demonstrace vývoje měřené šířky pásma signálu B a okénka σ

Další Obr. 5.9 už prezentuje reálné použití Adaptivní Gaussovy STFT. Pro možnost výsledky v celku vizualizovat jsou grafy na Obr. 5.9 importem hodnot měřených online do prostředí Matlabu. K porovnání jsou tak viditelné vlastnosti pevné a variabilní šířky okna. Počet bodů FFT byl nastaven jednotně, překrytí u klasické STFT bylo maximální možné. Shodné výchozí podmínky vedou u adaptivní varianty ke zřetelnějšímu vykreslení vývoje spektra, což je ve shodě s předpokladem.



Obr. 5.9 Srovnání pevné a variabilní STFT, a – rozběhový hluk, b - $S_x[n, k]$ Hannovo okno, c - $S_x[n, k]$ Adaptivní Gaussovo okno

Měření na Obr. 5.9 není úplně typickým příkladem monotonního rozběhu, v první části je vidět rychlé zvýšení otáček odpovídající rozběhu naprázdno (se spojkou), následuje fáze volnoběžného chodu, teprve třetí úsek je rozběhem se zatížením včetně kolísání v důsledku řazení vyšších rychlostí. Adaptivní STFT ve všech momentech vykazuje dobrou přizpůsobivost podmínkám. Nejmarkantnější je to samozřejmě v rozběhových fázích, detail na Obr. 5.10, ve volnoběžné fázi se maximálně zvýšila šířka okénka a zkrátilo překrytí – to už ale tak patrné není.



Obr. 5.10. Detail rozběhu z Obr. 5.9, a - $S_x(\tau, f/f_s)$ Hannovo okno, b - $S_x(\tau, f/f_s)$ Adaptivní Gaussovo okno

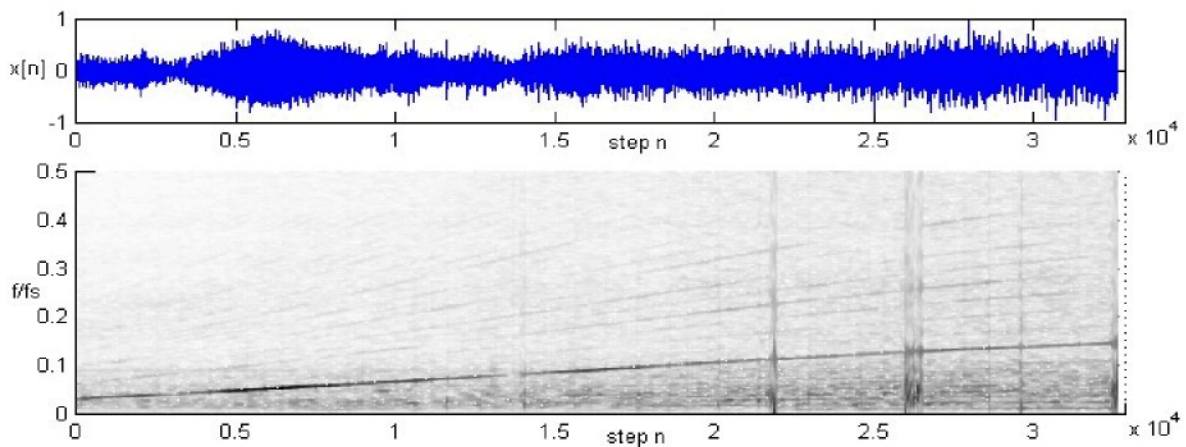
V detailu je možné vidět i změny časového rozlišení dané překrytím, které je přímo odvozené od šířky Gaussova okna tak, aby na sebe jednotlivé realizace navazovaly s váhou hraničních prvků na 0.5, a tím zajistily rovnoměrné pokrytí signálu. Tato spojená adaptace

frekvenčního a časového rozlišení přispívá i k lepšímu vyjádření vyšších harmonických, které nejsou tolik výrazné a mohly by v rozmazaném spektru snadno zaniknout, taktéž viz. Obr. 5.10.

5.1.4 Přesnost a omezení

Hlavní limitace adaptivní metodiky již byla zmiňována. Je to především podmínka existence dominantní harmonické složky, kterou chceme podřídít vlastnosti STFT. Typickým jsou v tomto pohledu rotační stroje a jejich rozběhy, jež jsou pro konvenční přístup problémem. K nekonvenčním metodám můžeme z našeho pohledu řadit řádovou analýzu, která je známým prostředkem JFTA, pokud je ovšem k dispozici údaj tachometru signálu. V takovém případě není, spolu s Vold-Kalmanovou filtrací, lepší alternativy. Není-li dostupný synchronní údaj o otáčkách, je možnou variantou pokusit se odhadnout otáčky ze samotného měření vibračních nebo hlukových odezev. Tento odhad nebude obecně nikdy natolik kvalitní, aby postačoval pro převzorkování signálu jako u řádové analýzy. V našem přístupu ho proto zprostředkovaně použijeme jako parametr adaptivního rozlišení FFT. Otáčky sice neměříme přímo, ale můžeme je rekonstruovat ze znalosti průběhu odhadu B v rámci okna délky T .

Porušení apriorní podmínky má za následek přenastavení okénka na jinou dominantní část spektra. V lepším případě bude tato odpovídat nějaké vyšší harmonické, v horším pouze vrcholu spektra přítomného šumu. Toto chování je demonstrováno na Obr. 5.11 – krok po tom, co algoritmus vyhodnotil jako dominantní jinou část spektra, je vždy patrná svislá spektrální čára odpovídající velmi úzkému okénku. V tomto konkrétním případě je příčinou velká koncentrace nízkofrekvenčních strukturálních kmitů na které se analýza skokově zaměřila, a protože leží velmi blízko sebe, vyhodnocuje je jako široký lalok, který by v rozběhu odpovídal velmi rychlé změně otáček.



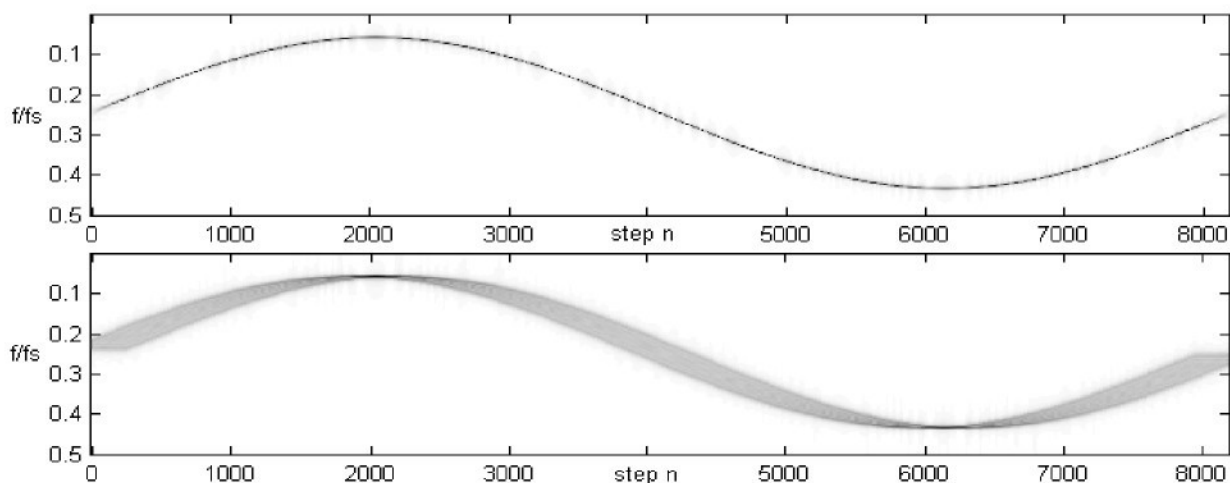
Obr. 5.11 Limitace adaptivní STFT, a – STFT, b – Adaptivní STFT

Algoritmus by bylo vhodné pro tyto účely doplnit omezením dynamiky adaptability, neboť v presentované formě je přizpůsobení okamžité, resp. posunuté o realizaci. Takovou úpravou bychom mohli eliminovat jednotlivé nebo sporadické výpadky hlavní harmonické. Rychlá reakce v současném stavu algoritmu nemusí být jen slabým místem. Může nám dovolit aktivně a ihned reagovat i na případné širokopásmové resonance, jejichž výskyt by byl popsáným zúžením okna přesně definován. Máme zde tedy dva protichůdné argumenty, budoucí práce ukáže jestli je možné mezi nimi objektivně volit.

5.2 Real-time diskrétní Pseudo-WVD

Nestacionární jevy na točivých strojích nezahrnují pouze rozběhové nebo doběhové děje. V aplikacích online provozním monitoringu se setkáváme s požadavky na přesná měření frekvence a amplitudy časově variujících veličin. Wigner-Ville distribuce, dále zkracujeme jako WVD, je v takových aplikacích téměř ideálním prostředkem, k čemuž ji předurčují její specifické vlastnosti, Boashash, O'Shea [24]. V tomto ohledu jde hlavně o absolutní rozlišení, které může být pouze nepříznivě ovlivněno aditivními produkty křížových interferencí. Pokud má sledovaná harmonická v signálu dominantní charakter, pak je pro průběžné měření $\omega(t)$ analýza založená na WVD nejspolehlivějším prostředkem. Ukázka presentovaná na Obr. 5.12 je typicky předkládaným důkazem.

Velmi robustní je takový odhad proti účinkům aditivního šumu, horší výsledky bychom ale mohli obdržet v přítomnosti další frekvenčně modulované harmonické. U námi studovaných rozběhů jde například o násobné harmonické a strukturální kmity, na druhou stranu se zde však s požadavkem měření okamžité frekvence nesetkáváme.



Obr. 5.12 Spektrogram frekvenční modulace sinovou vlnou. a – WVD s frekvenčním rozlišení 256 bodů a časovém kroku 16 vzorků, b – adekvátní STFT s obd. oknem a překrytím 90 procent

Nejen v měření $\omega(t)$ je WVD distribuce vyhovující metodou. Už svými původními aplikacemi - analýzou seismologických dat - WVD naznačuje, že bude zajímavým nástrojem i pro analýzu impulsních jevů, Huerta-Lopez, Shin, Powers, Roesset [18], Bradford, Yang, Heaton [19]. Zde opět oceňujeme velké rozlišení, zejména v kontextu s krátkým trváním děje. Omezený počet vzorků, spolu se silnou nestacionarností průběhu, limituje velikost okna STFT, a tím i rozlišení analýzy. K tomuto není WVD náchylná, neboť velikost okna je daná pouze mírou interferencí, s nimiž se můžeme smířit bez toho, aby byla omezena čitelnost výsledného spektrogramu. Záleží na konkrétním případě. Modifikace WVD ve formě některé ze zmiňovaných Cohenových tříd může tento nepříjemný efekt ještě zmírnit, Smutný [38].

5.2.1 Motivace

Přestože se s WVD v signálových analyzátozech nesetkáváme, jde o metodu poskytující ve speciálních případech nesrovnatelně lepší výsledky než bychom byli schopni s různými variantami STFT dosáhnout. Použitelnosti na druhou stranu nepřispívá fakt, že spektrogramy produkované WVD mohou být pro odlišný princip kvadratických JTFA metod špatně interpretovány. Abychom zvýraznili tyto specifika budeme naši implementaci WVD srovnávat právě s dobře známou STFT.

Doplnění výsledků WVD ještě jinou časově-frekvenční metodikou je časté i v praktických užitích, Narasimhan, Pavanalatha [42], Narasimhan, Nayak [43], neboť přispívá k lepší čitelnosti kvadratických spektrogramů, snadnějšímu odlišení interferenčních produktů od základních odezev vlastního zkoumaného projevu. To je důležité zejména pro děje, u kterých nemůžeme apriori předvídat frekvenční rozložení měřených odezev a interferenční složky by tak mohly být klamně pokládány za pravé. Nejvhodnější srovnávací analýzou je právě STFT, která je principem výpočtu Pseudo-WVD (zkr. PWVD) z Kap.4.2.1 velmi podobná, neboť jádrem obou je FFT. Z toho také plyne, že jednoduše volbou počtu bodů okna a překrytí, resp. posuvu n v definici PWVD (4.15), můžeme sjednotit základní časově-frekvenční rozlišení obou spektrogramů, více viz. Kap 4.

Výpočetní náročnost diskrétní WVD je sice výrazně větší než adekvátně nastavené STFT, nicméně je stále hluboce pod nároky, jaké kladou známé implementace Cohenových tříd. Z tohoto úhlu pohledu zůstává PWVD jediným kandidátem na možnou real-time implementaci kvadratické metody založené na WVD. U Cohenových tříd je obtíž i v principu, protože zpravidla jako výpočetní meziproduct využívají blokovou 2D funkci dvojznačnosti, AF. Znamená to také, že nepracují se signálem vymezeným pouze posuvným okénkem, jako je tomu u PWVD, ale se signálem jako s kompletní realizací. Cohenovy třídy to vymezuje jako metodu vhodnou pro post proces analýzu.

Příbuznost PWVD a STFT nás může navést na modifikaci základního vztahu (4.15) využívající známých okénkových funkcí (5.3). Ukazuje se, že taková úprava WVD se některými základními vlastnosti velmi blíží právě Cohenovým třídám.

$$V_x[n, k] = \sum_{l=-L/2}^{L/2-1} w[l] x[n+l] x[n-l] e^{-i4\pi k l L} \quad (5.3)$$

Stejně jako při výpočtu $\hat{x}_w(\omega)$ v (3.5) i zde je aplikace okénka přínosem pro měření amplitud za cenu roztažení spektra ve frekvenci. $w[n]$ v rovnici (5.3), jako variantě JTFA, také způsobuje, že rozmazání se neděje jen v ose frekvence, ale i času. Díky podmínce $\|w\|=1$ se okénková funkce chová jako dolní propust, a proto bude ve WVD elimovat míru interferenčních produktů. Tento pozitivní efekt jednoduchého okénka se tak blíží funkci filtrů $\theta(t, \omega)$ v Cohenových třídách $C_x(t, \omega)$. Ve skutečnosti jsou ale funkce $\theta(t, \omega)$ mnohem sofistikovanější, neboť kromě funkce filtru splňují, nebo mohou splňovat, dodatečné podmínky pro časovou a frekvenční invariantnost, podmínky na průběh skupinového zpoždění, symetrii, okrajové podmínky, atd. PWVD podle (5.3) tedy není Cohenovou třídou, pro účely diagnostické analýzy jde ale o účinnou variantu WVD analýzy vhodnou pro širokou škálu aplikací.

Pokud bychom trvali na výstupu ve formě $C_x(t, \omega)$, pak můžeme výstup PWVD interpretovat pouze jako mezivýsledek. Aplikací vztahu (4.16) v následném post procesu je možné libovolnou Cohenovu třídu $C_x(t, \omega)$ dopočítat. S $V_x[n, k]$ pracujeme jako s diskretizací analytické $V_x(t, \omega)$,

5.2.2 Optimalizace výpočtu

Základní princip byl popsán již v rámci teoretických kapitol 4.2. Algoritmus uvedený na závěr sice maximálně optimalizuje výpočet diskrétní WVD, nicméně už nerozvádí, jak efektivně předzpracovat signál, abychom zamezili aliasingu ve Villeově součinu, který je jádrem WVD ve vztazích (4.13), resp. (4.15). Argumenty pro použití dvou známých postupů byly již také uvedeny. Platí, že pokud by bylo možné provést implementaci Hilbertovy transformace úsporně, pak by varianta s použitím analytického signálu byla výhodnější, neboť zamezuje jak aliasingu, tak omezuje produkty křížové korelace levostranných částí spekter.

Z existujících definic Hilbertovy transformace nám bude nejužitečnější konvoluční tvar (5.4), který je variantou integrálního popisu transformace, a odvození ve Fourierově obraze pro frekvenční vyjádření (5.5), Boashash, Black [20]. Obě jsou ekvivalentní a navzájem převoditelné.

$$H_x(t) = \frac{1}{\pi} x(t) * \frac{1}{t} \quad (5.4)$$

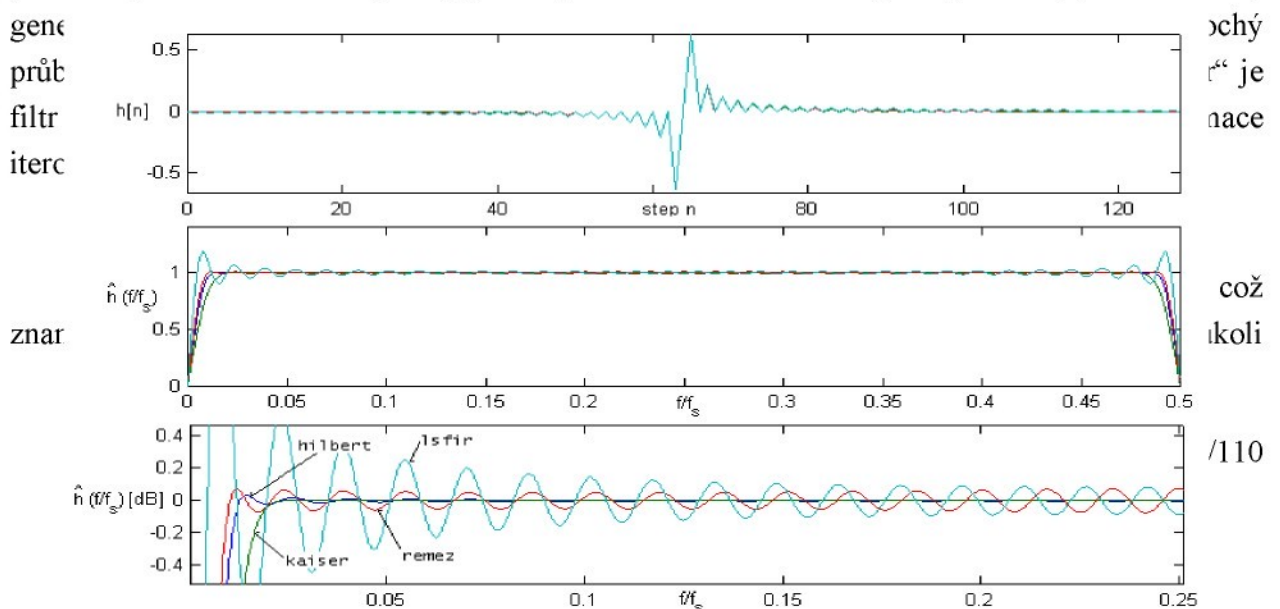
$$\hat{H}_x(\omega) = -j \cdot \text{sgn}(\omega) \hat{x}(\omega) \quad (5.5)$$

Konvoluční tvar v podobě (5.4) jsme uvedli, neboť představuje vodítko přístupu k Hilbertově transformaci, totiž použitím filtru, Kadlec [6]. Impulsní funkce $1/t$ ale není jednoduše převoditelná na diskrétní tvar, protože je nekauzální, nespojitá a neomezená. Druhá varianta (5.5) odkazuje na známý vztah mezi Fourierovou transformací reálné a analytické funkce, který zjednodušeně říká že pro $\omega > 0$ platí $\hat{a}(\omega) = \hat{x}(\omega)$, naopak pro $\omega < 0$ je $\hat{a}(\omega) = 0$, důkazy v Johansson [45]. Analytický signál $a(t)$ syntetizovaný pomocí zpětné Fourierovy transformace pravostranného spektra je matematicky ideální metodou výpočtu Hilbertovy transformace.

Popsaného efektu můžeme docílit i filtrem $H(z)$, ideální propusti v pásmu $(0, f_s)$. Číslicová forma takového filtru je stejně nereálná jako u varianty (5.4). Zde již máme ale prostor pro její diskrétní modifikaci, s tím že výstupem takového filtru bude pouze aproximace analytického signálu. Výhodou je ale snadnost výpočtu, neboť se obejdeme bez nutnosti dvakrát použít FFT. V Kap. 3.2 jsme techniky návrhu filtrů alespoň přehledově jmenovali, v našem případě jsme pak rozhodovali mezi čtyřmi variantami, Obr. 5.13. Cílem je najít formu, která bude nejbližší definičním vztahům (5.5), rozhodujícím parametrem je míra zvlnění v propustném pásmu, strmost a efektivní šířka pásma.

Ze dvou důvodů se omezíme pouze na FIR struktury digitálních filtrů. Impulsní odezva ideální pásmové propusti vychází z funkce $\text{sinc}()$ a je tedy symetrická. Z ní vyjádřený FIR filtr tak může snadno zaručit lineární průběh fáze a tedy konstantní skupinové zpoždění. Druhým argumentem je nutnost realizovat filtr jako komplexní, protože jeho spektrum bude nesymetrické. Koeficienty základního half band filtru $(-f_s/2, f_s/2)$ typu FIR stačí pouze vynásobit komplexní exponenciálou $e^{-2\pi t f_s/4}$, abychom uvedeného docílili.

Na Obr. 5.13 jsou jak časové (a), tak frekvenční charakteristiky (b),(c) filtrů aproximujících ideální Hilbertovu transformaci, Hilbertovy transformátory. Byly použity tři metodiky návrhu pomocí aproximace. Průběh, který je na spodním detailu označen jako „hilbert“, je kontrolním,



volbu filtru, kde L je počet koeficientů FIR transformátoru.

$$GD = \begin{cases} L/2 & \text{pro } L \text{ sudé} \\ (L-1)/2 & \text{pro } L \text{ liché} \end{cases} \quad (5.6)$$

Druhý a třetí graf odpovídá frekvenčním amplitudovým charakteristikám, resp. detailu magnitud v dB. Pouze v třetím grafu je dobře patrné to hlavní – strmost a zvlnění, výběr je otázkou priority mezi oběma. Pokud se přidržíme vzorového průběhu „hilbert“, pak bychom se měli klonit k co nejnižšímu zvlnění na úkor strmosti. Lze ukázat, že laděním vstupních parametrů Remezova algoritmu se s doporučeným tvarem charakteristiky můžeme téměř krýt – vybrali jsme proto jej.

Implementaci komplexního filtru produkující analytický signál rozdělíme na reálnou a imaginární část. Imaginární je zastoupena Hilbertovým transformátorem – tj. imaginární částí součinu impulsní charakteristiky zvolené aproximace a komplexní exponenciály, reálná je obdobně reálnou částí součinu. Z úvah o ideální pásmové propusti a také z definice ale vyplývá, že reálná část by měla být Diracovým pulsem, nebo by se mu měla alespoň blížit. Toho využijeme a výpočet filtrace v reálné větvi nahradíme přímo $x[n]$. Místo toho musíme ale reálný signál přizpůsobit zpožděním imaginární části, které je výsledkem konvoluce s kauzálním filtrem. To bude práce jednoduché zpožďovací linky s impulsní charakteristikou $\delta[n-GD]$. Takovéto zpoždění bude přesné pokud bude GD celočíselné, což můžeme zaručit. Výsledné schema na Obr. 5.14 odpovídá toku dat v preprocesu vlastního real-time PWVD analyzátoru.



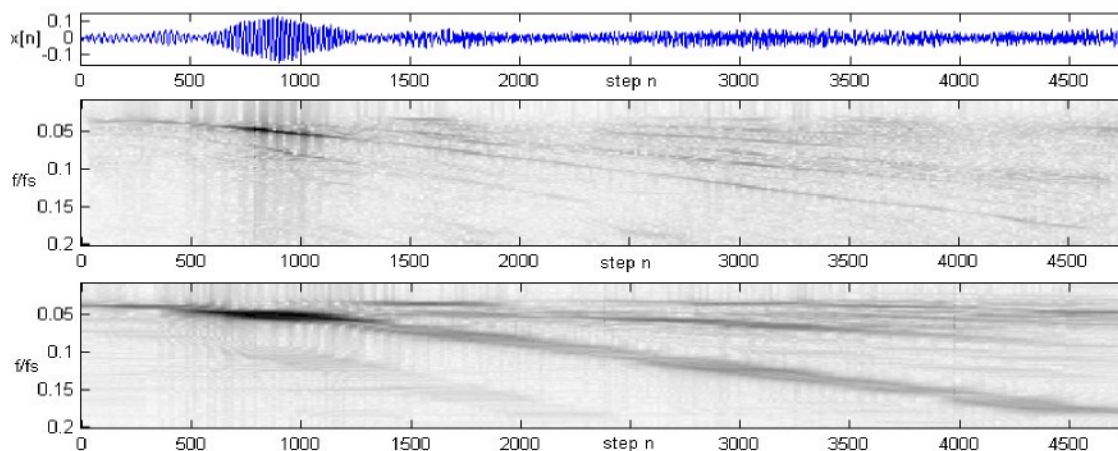
Obr. 5.14 Princip PWVD preprocesoru, výpočet analytického signálu

5.2.3 Vlastnosti

PVWD jsme zkusili aplikovat na oba stěžejní problémy – rozjezdové charakteristiky jako předcházející adaptivní STFT, Obr. 5.15, a nově i na impulsní akustické děje. Příklady zde užití mají taktéž původem v okruhu aplikací automobilové diagnostiky, jde o hluky zavírání bočních a zadních dveří, Obr. 5.17 a Obr. 5.16.

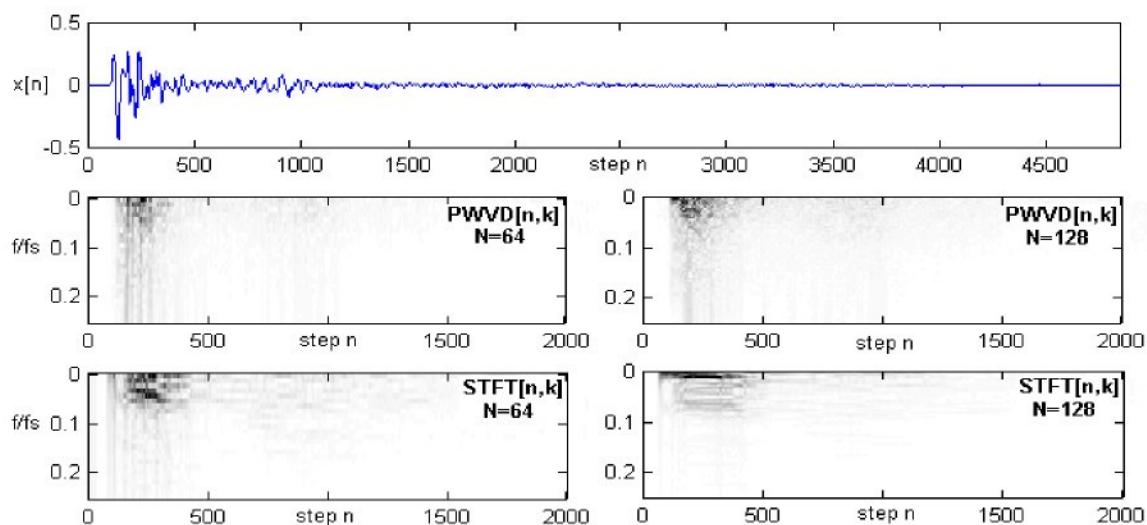
Jak grafy dokazují, lze v těchto případech dosáhnout dobrých výsledků i s analýzou STFT. Podmínkou je, že šířka okénka nepřesahuje dobu, jíž by se nechala vystihnout dynamika jevu, respektive doba s jakou se v procesu po sobě vyskytují partikulární elementární procesy,

kteřé chceme odlišit. Tím může trpět frekvenční rozlišení, které se musí podřídit. Situaci, kdy délka okna vyhovuje analyzovanému jevu, vidíme na Obr. 5.16 v levé části s 64 čarami spektra. Pravá strana s dvojnásobným rozlišením prezentuje opačný případ.



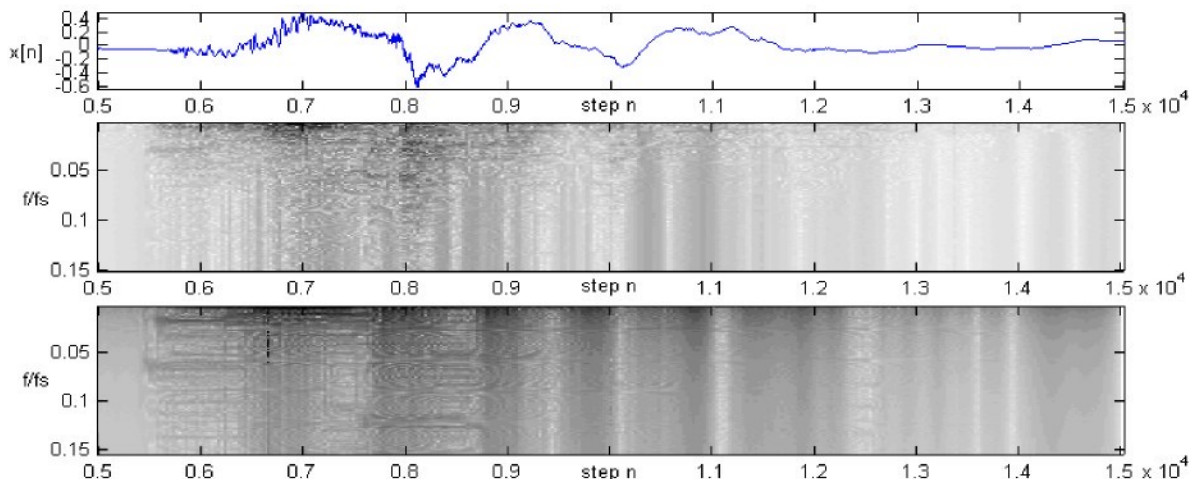
Obr. 5.15 Rozjezdové spektrogramy, *a* – časový průběh vzorků, *b* – $V_x[n, k]$, *c* – $P_x[n, k]$

Vidíme, že STFT vykazuje vodorovné proužky, což je právě známka ztráty časového rozlišení pro příliš velké okno. Podobné efekty je pak možné vidět i na Obr. 5.15, PWVD distribuce tímto ovlivněná není. U PWVD se zhoršuje pouze „čitelnost“ spektrogramu, neboť díky vysoké selektivitě mohou být ostré vrcholy odpovídající lokálním elementárním změnám utopeny ve vysokofrekvenčních produktech interference, jichž v rámci dlouhého okna vznikne více. Volba rozlišení je kompromisní i v případě PVWD, obvykle si ale můžeme dovolit jít s počtem bodů FFT výše než dovoluje STFT, Obr. 5.16, Obr. 5.15.

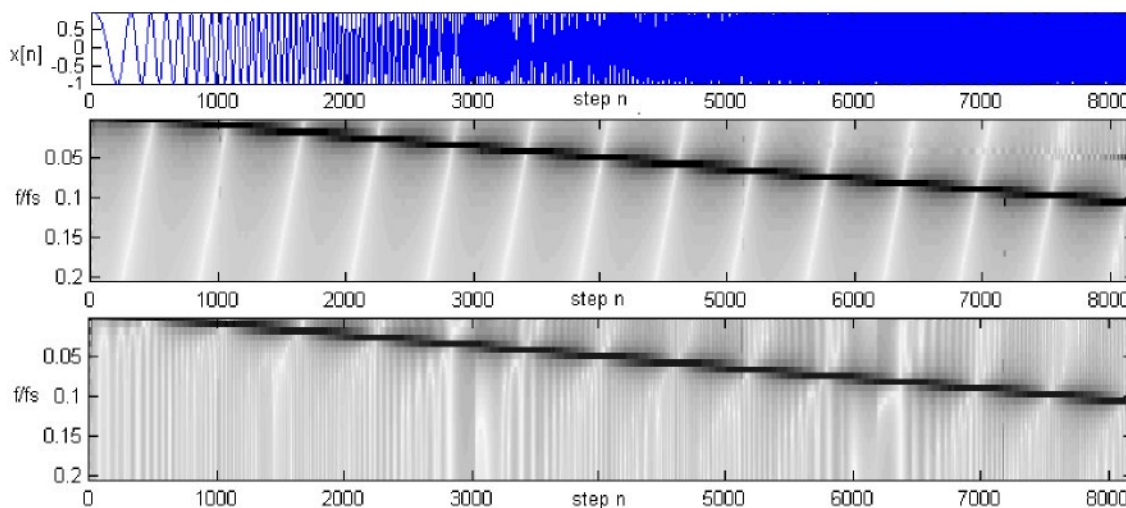


Obr. 5.16 Impulsní spektrogramy hlukové odezvy (*N* je počet spektrálních čar)

PWVD je citlivější i ve vyjádření časových poměrů. Velmi dobře reaguje na nespojitosti nebo rychlé změny, které se projeví jako ostré svislé proužky, Obr. 5.17. Ostatní hladké svislé pruhy korespondují s hladinou šumu a fázovými poměry. Jinak se v tomto ohledu chovají různé implementace PWVD, na Obr. 5.18 možno porovnat s analytickou variantou s interpolovanou WVD. Nutno dodat, že všechny následující spektrogramy používají logaritmické šedotónové měřítko.



Obr. 5.17 Detail odezvy zvuku dveří, *a* – časový průběh vzorků, *b* – $V_x[n, k]$, *c* – $P_x[n, k]$



Obr. 5.18 *a* – PWVD s analytickým signálem, *b* – PWVD s interpolací signál

5.3 Real-time diskrétní Wavelet transformace

Teoreticky, včetně úvodu do implementace, jsme se teorii wavelet transformace věnovali v Kap. 3.4. Je jasné, že budeme stavět na využití (3.31) a (3.32), protože vedou na elegantní

kaskádní strukturu digitálních filtrů. Tento postup multirezoluční dekompozice nazýváme Mallatovým algoritmem, Mallat [5], Qian, Chen [3]. Dále využijeme toho, že na diskretní waveletovu transformaci lze nahlížet jako na speciální případ již dříve známé banky filtrů, neboť jsme ukázali, že na úrovni principiálního schematu se obojí sjednocují, Kap.3.4.5, Strang, Nguyen [2].

V rámci aplikací analýzy signálů můžeme do pozadí zájmu odsunout podmínky zpětné rekonstrukce. Dáme přednost sjednocení výstupu analýzy s jinými prostředky JTFA, s kterými budeme analýzu poměřovat. Vzorem je nám v tomto případě oktavová CPB analýza, jež je zavedenou variantou signálového analyzátoru, a která může být založena právě na bance filtrů, Randall [4]. Představě klasické analyzující banky filtrů se podřídíme i v interpretaci výstupů diskretní wavelet transformace, zkr. DWT. Už to pro nás nebudou bezrozměrné koeficienty transformace, ale výstupy digitálních filtrů. Tato myšlenková úprava není proti obecnosti DWT, jen nám poskytne argumenty pro způsob, jakým budeme s DWT koeficienty pro účely JTFA diagnostiky dále zacházet.

V první řadě musíme normalizovat tvar diskretních waveletů, respektive koeficientů generujících filtrů $H(z)$ a $G(z)$ tak, aby jako u normovaných CPB filtrů platilo, že $\|h\|=1$ a $\|g\|=0$. Diskretní ortogonální wavelety se totiž obvykle designují, aby zapadly do tvaru předpokládaného zrcadlovou kvadraturní bankou filtrů, viz. Matlab, Jones [30], Kap.3.4.4, a proto u standardní formy platí $\|h\|=\sqrt{2}$. Poznamenejme, že podmínka pro $G(z)$ je splněna dále, ale koeficienty je třeba také vážit stejnou konstantou. Aby byla zachována energie výsledku zpětné DWT, byly by v naší variantě následně kompenzované pouze rekonstrukční koeficienty $\tilde{g}[n]$ a $\tilde{h}[n]$.

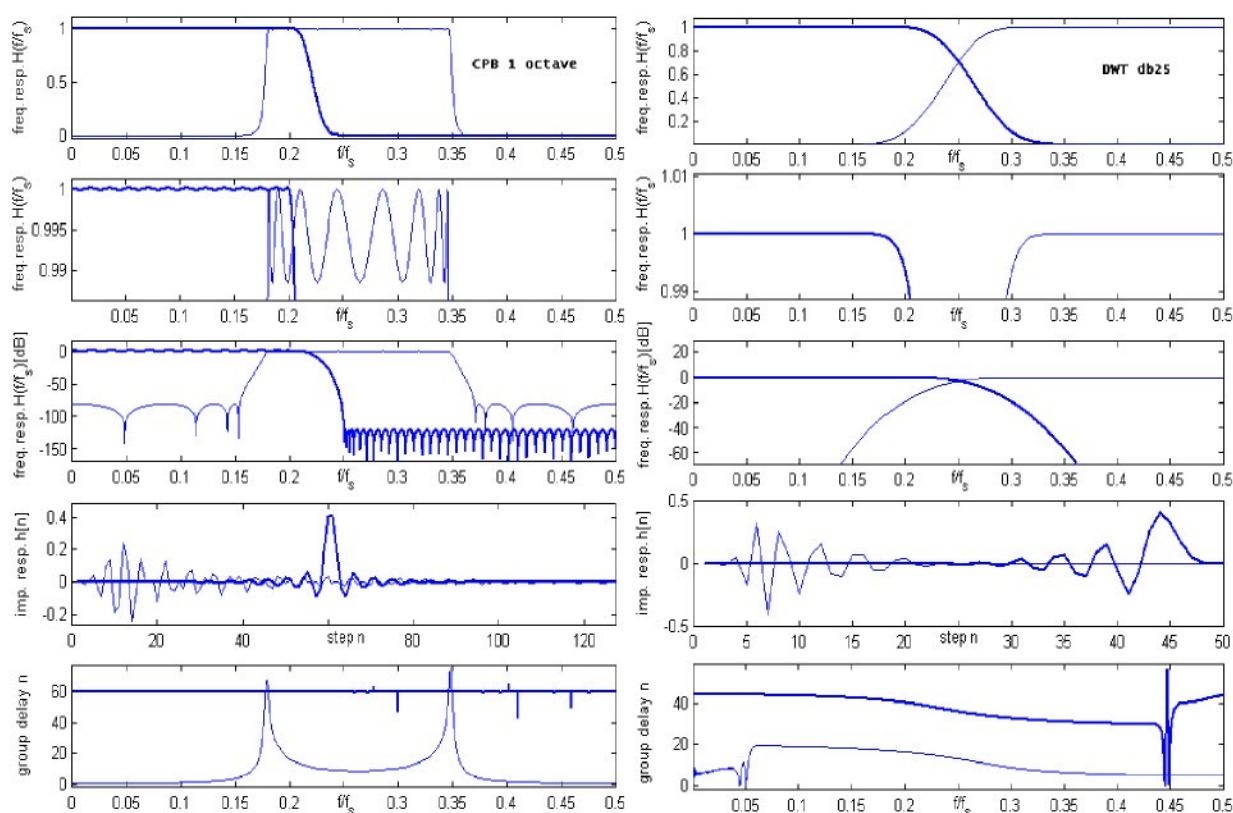
Další vhodnou modifikací je odstranění decimačního prvku na výstupu, jak ho předpokládá Mallatovo schéma na Obr. 3.13 a k němu přidružené rovnice (3.31) a (3.32). Z pohledu transformace jde o přirozený prvek odstraňující redundanci, počet vzorků vstupu pak odpovídá počtu koeficientů wavelet dekompozice výstupu. Z pohledu banky filtrů se ale jedná o člen dvojnásob zhoršující časové rozlišení na tomto principu postaveného analyzátoru. Opět můžeme decimační blok zahrnout až do případné rekonstrukční fáze, čímž vyhovíme jak podmínkám pro analýzu i zpětnou DWT. Touto úpravou jsme blokové schema dyadické DWT nasadili zpět na analytickou banku filtrů na Obr. 3.8.

5.3.1 Srovnání s konvenčními metodami

Opakovaně vzpomínaná podobnost CPB a DWT končí při pohledu na časové a frekvenční charakteristiky. Vše na příkladu oktavových a waveletových filtrů typu Daubechies řádu 25 přehledově shrnuje Obr. 5.19. V každém sloupci jsou obsaženy nezbytné průběhy vystihující

všechny podstatné parametry horní propusti $G(z)$ (slabě) a dolní propusti $H(z)$ (silně). Levý sloupec je frekvenční a časovou identifikací CPB filtrů, podle specifikace definované v Randall [4], s odvoláním na normu ANSI S1.11. Pravý sloupec je zmiňovaná DWT.

Odlišnosti jsou zjevné v obou doménách. Nejnapadnější je neschopnost waveletových filtrů důsledně omezovat aliasing efekt, neboť klesání filtru zastupující dolní propust není dostatečně strmé, jak prezentuje decibelová frekvenční charakteristika. V Kap. 3.4.4 je naznačeno, že tento efekt není překážkou pro existenci reverzního procesu, v aplikacích frekvenční analýzy se s ním ale musí počítat. Protože zatím neexistují diskrétní waveletové třídy, které by měly výrazně větší strmost než jak obrázek popisuje, bude aliasing hlavní vlastností maskující čitelnost výsledných skalogramů.



Obr. 5.19 Časově-frekvenční charakteristiky CPB a DWT filtrů

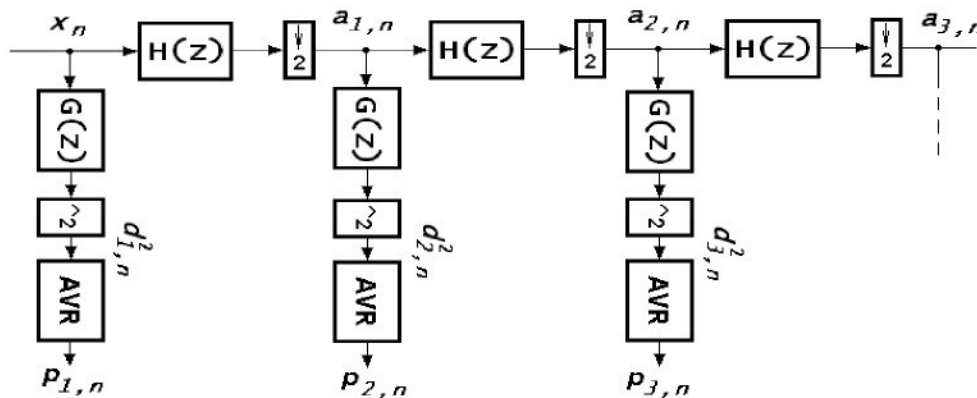
Pozitivním prvkem DWT je krátká impulsní odezva definovaná jen řádem vzorové aproximace vlnky. Padesát koeficientů u vybraného příkladu je navíc horní mezí praktické délky wavelet filtrů. Průběh fázové charakteristiky nemůže být z důvodu nesymetrie impulsní charakteristiky lineární, proto ani průběh skupinového zpoždění není konstantní. Tato vlastnost není všem třídám nutně vlastní, v tomto ohledu vyniká například skupina Symlet waveletů. Symlety jsou modifikací uváděných Daubechies zesilující důraz na symetrii $g[n]$ a $h[n]$.

Absolutní symetrie avšak nedosahují. V případě že symetrie je striktně vyžadována, volili bychom biortogonální wavelety opouštějící na druhou stranu schéma zrcadlové banky filtrů. Reverzní proces u biortogonální třídy waveletů je asymetrický, musí se použít jiná dvojice základních rekonstrukčních filtrů než jaké jsme použili v DWT.

Celkově lze uvedené zobecnit v konstatování, že kladné frekvenční vlastnosti ustoupily u DWT možností časové detekce, což je patrné hlavně při porovnání s nejbližší společnou frekvenční CPB analýzou. V případě CPB je časové rozlišení degradováno nejen dlouhou odezvou filtrů, přičemž alespoň spodní propust se dá efektivně realizovat pomocí FIR, ale hlavně finálním přepočtem signálu z filtrů $G(z)$ na výkon podle

$$P_{T_A} = 1/T_A \int_{t=0}^{T_A} x(t)^2 dt.$$

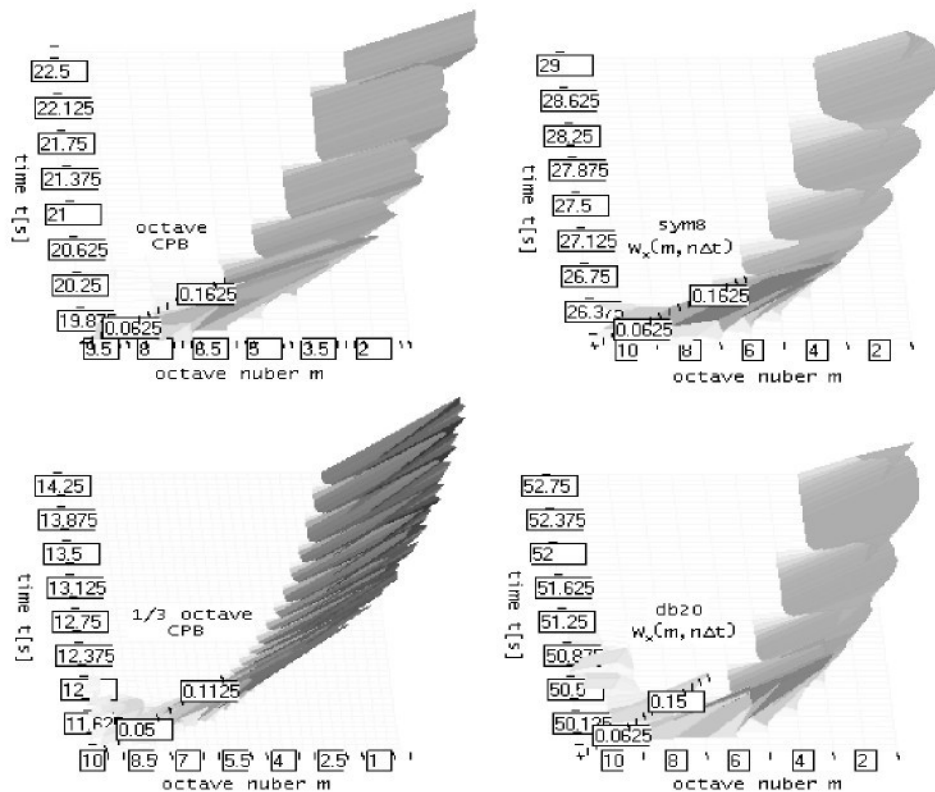
V praxi je to obvykle průměrovací člen aproximující uvedenou integraci v mezích $\langle 0, T_A \rangle$. Toto průměrování konečně nacházíme i v FFT analyzátoch, přispívá k lepšímu odhadu spektra a výkonů stacionárních signálů. Podobný přístup je obsažen i v dokumentovaných algoritmech pro odhad PSD pomocí waveletů, Cristán, Walden [22], a nebude proti obecnosti, zahrneme-li ho i do schématu navrhovaného DWT. Samozřejmě záleží na charakteru signálu, protože průměrování má v kontextu JTFA smysl jen u stacionárních signálů nebo nestacionárních případů s definovanou dynamikou korespondující s T_A . V analýzách odpovídajících našim impulsním akustickým jevům bude účelné průměrovací blok vyřadit, protože tam oceníme bezkonkurenční časové rozlišení, které můžeme pomocí DWT získat. Pro porovnání stejnou možnost vynechání průměrování implementujeme i do klasické CPB, což ale nemusí být standardní možností v průmyslových analyzátoch.



Obr. 5.20 Schema navrhovaného DWT analyzátoru

Obr. 5.20 vizuálně vrací blokové uspořádání výše popsaného principu DWT a vlastně i CPB pro účely JTFA, značka „ $\wedge 2$ “ představuje kvadratický člen, „AVR“ průměrovací. Rozdíl

mezi CPB a DWT je pak pouze v topologii a koeficientech digitálních filtrů $H(z)$ a $G(z)$. Další Obr. 5.21 demonstruje jak vypadá výstup různých variant analýzy na způsob multirezoluční dekompozice. K uvedeným přibyla pouze třetino oktávová CPB, která byla zařazena, protože je - zejména v akustice - známější než oktávová varianta. Testovacím signálem je kvadraticky přeladovaný harmonický signál.



Obr. 5.21 CPB ve srovnání s DWT

Všechny analýzy mají užitím výstupního průměrování nastavené přibližně stejné časové rozlišení $T_A = 1/16s$. Krom třetino oktávové CPB jsou tedy všechny výstupy velmi srovnatelné, což potvrzuje tvrzení o jejich podobnosti. U třetinooktávové je zřejmé vyšší frekvenční rozlišení - jak už i z jejího názvu vyplývá, zvolený 10-ti oktávový rozsah odpovídá 30 frekvenčním pásmům. Pořadí v jakém jsou vynášeny odpovídá pořadovému číslu stupně ve struktuře. Prvnímu indexu tedy přísluší odhad výkonu $p_{1,n}$, s rostoucím řádem m proto frekvence klesá. Odpovídající frekvenci bychom mohli vynášet jako střední frekvenci jednotlivých pásem. U CPB je za střed zvykem brát geometrický průměr mezních frekvencí pásma, přičemž tyto centrální frekvence jsou normované a pro všechny formy CPB se odvíjejí od základní frekvence 1kHz. Ostatní můžeme z této odvodit. U waveletové transformace je díky tomu, že filtry jsou typu half-band, možné brát za střed průměr aritmetický. Příliš se ale s tímto nesetkáváme, i my

budeme zůstávat u nejobecnějšího značení pomocí stupně $m \in \{1, M\}$.

5.3.2 Algoritmus DWT

Kapitola „Rychlá wavelet transformace“ nám sjednotila definici wavelet transformace s realizací pomocí digitálních filtrů. To samo o sobě stačí pro naprogramování dostatečně efektivní formy shodné se schematem na Obr. 5.20, kde klíčem k největším úsporám výpočetního času je možnost začlenit decimaci do struktury FIR filtru podle (3.31) a (3.32). Průměrování je běžné realizovat například rekurzivní formou jednopólového filtru typu dolní propust (5.7).

$$p[n] = p[n-1] + (d^2[n] - p[n-1])/K \quad (5.7)$$

Konstanta K je adekvátní průměrovací době T_A , záleží na zvolené aproximaci. Pokud preferujeme průběžné exponenciální průměrování, pak je $K = f_s T_A / 2$, pokud jednorázový lineární průměr z konečného počtu vzorků, pak je K závislou proměnnou definovanou jako $K = n$ pro $n > 0$. Výpočet průměrování je tedy triviální, a proto také velmi rychlý.

Potřebná optimalizace spočívá v harmonizaci chodu výpočtu, každým krokem se totiž mění objem dat nutných zpracovat. Zatímco v lichých krocích počítáme pouze první stupeň, v sudých krocích se k tomu přidává povinnost zpracovat všechny stupně vyšší – v závislosti na tom, jaké mocniny dvou sudý krok dosahuje. Tento výpočetní proces je odvozen přímou interpretací pořadí toku dat na Obr. 5.20, tedy posloupností decimací. Celkový objem dat ke zpracování m stupňů je adekvátní součtu řady

$$N + N/2 + N/2^2 + N/2^3 + \dots + N/2^m = N(2 - 2^{-(m+1)}) \quad (5.8)$$

V limitě $m \rightarrow \infty$ je vztah (5.8) jednoduše roven $2N$, což s sebou nese povzbuzující fakt, že k výpočtu kaskádní dyadické struktury a nezávisle na počtu oktáv stačí disponovat výkonem odpovídajícím dvojnásobku výpočtu jednoho stupně. Za předpokladu, že dokážeme výpočetní proces rozložit tak, aby se s každým vzorkem v první úrovni spočítal ještě jeden vzorek z vyšších sekcí, pak jediným omezením bude vzorkovací rychlost a popřípadě paměťové nároky.

Tento závěr je ideální pro charakter real-time analýzy, a proto mu podřídíme mechanismus zpracování dat tak, že vzorky v jednotlivých stupních zpozdíme. Jakým způsobem, to nám napovídá Obr. 5.22. Spodní řada na tomtéž obrázku je výsledným optimalizovaným pořadím koeficientů pětistupňové ($M=5$) DWT po modifikaci. První stupeň pracuje na vzorkovací frekvenci, proto je nutné jej počítat vždy, k tomu se přidá stupeň ze spodního řádu. Rozdíl od přímého výpočtu je jasný. Všechny koeficienty v jednom sloupci se musí vypočítat ve vzorkovací periodě, což vede nejenom k nevyváženému zatížení procesoru, což je samo o sobě problém, ale hlavně by to v real-time procesu bez bufferování rychlostně limitovalo maximální

rozlišení M . Nevýhodou je principiální zpoždění odezvy partikulárního stupně. Pro účely odhadu spektra nebo výkonu je možné zpoždění v rámci menších M zanedbat, pro časově-frekvenční analýzy je toto zjednodušení ale nepřijatelné. Zobecněnému způsobu nápravy se věnuje kapitola „Kompenzace skupinového zpoždění“.

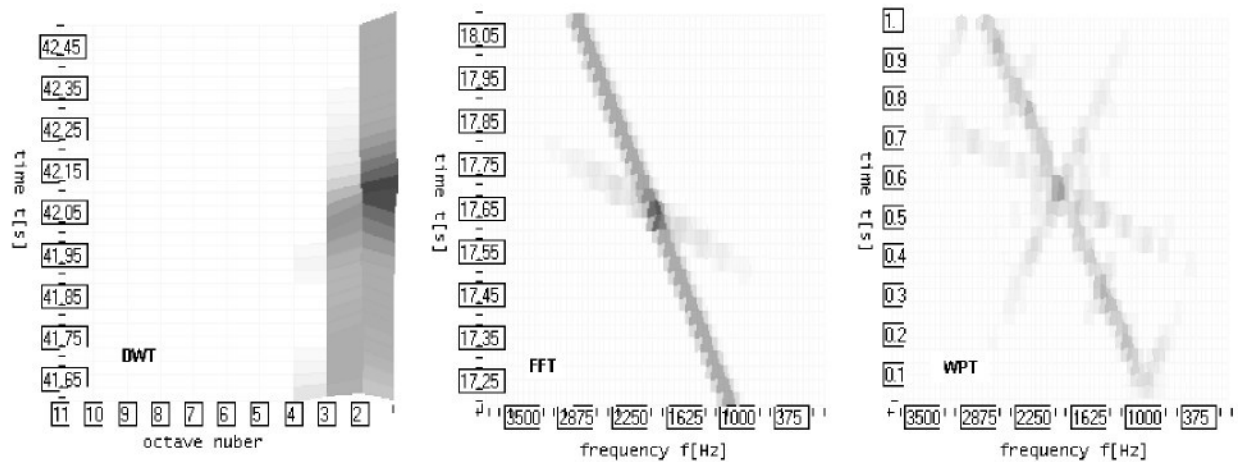
<i>shift 0</i> →	$d_1[n], d_1[n+1], d_1[n+2], d_1[n+3], d_1[n+4], d_1[n+5], d_1[n+6], d_1[n+7], d_1[n+8], d_1[n+9], \dots$
<i>shift +1</i> →	$d_2[n], \quad d_2[n+2], \quad d_2[n+4], \quad d_2[n+6], \quad d_2[n+8],$
<i>shift +3</i> →	$d_3[n], \quad d_3[n+4], \quad d_3[n+8],$
<i>shift +7</i> →	$d_4[n], \quad d_4[n+8],$
Σ	$d_1[n], d_1[n+1], d_1[n+2], d_1[n+3], d_1[n+4], d_1[n+5], d_1[n+6], d_1[n+7], d_1[n+8], d_1[n+9], \dots$ $d_2[n], d_3[n], d_2[n+2], d_4[n], d_2[n+4], d_3[n+4], d_2[n+6], d_5[n], d_2[n+8], d_3[n+8], \dots$

Obr. 5.22 Způsob harmonizace chodu výpočtu dyadické DWT

5.3.3 Dyadická a lineární kaskádová struktura DWT

V dekompozici signálu můžeme pokračovat i s partikulárními výstupy $d_{m,n}$. Wavelet rozklad můžeme libovolně a opakovaně aplikovat v každé větvi, čímž se vracíme ke Kap. 3.3 a stromové struktuře banky filtrů, která by vznikla cyklickou aplikací analytické části kvadraturní banky. Takový stromový rozklad nevybočuje z teoretického rámce wavelet transformace, naopak je jeho zobecněním. Postup generování výsledných vlnek je jiný, bude se odvíjet od komplexnější stromové struktury. Dále platí definiční vztah $W_x[n, m, k] = \langle x, \psi_{n, m, k} \rangle$, analogický s (3.17), kde parametrem $k \in \langle 1, 2^m \rangle$ určujeme pořadí filtru ve stupni $m \in \langle 1, M \rangle$. M je zvolený počet stupňů určující základní rozlišení analýzy.

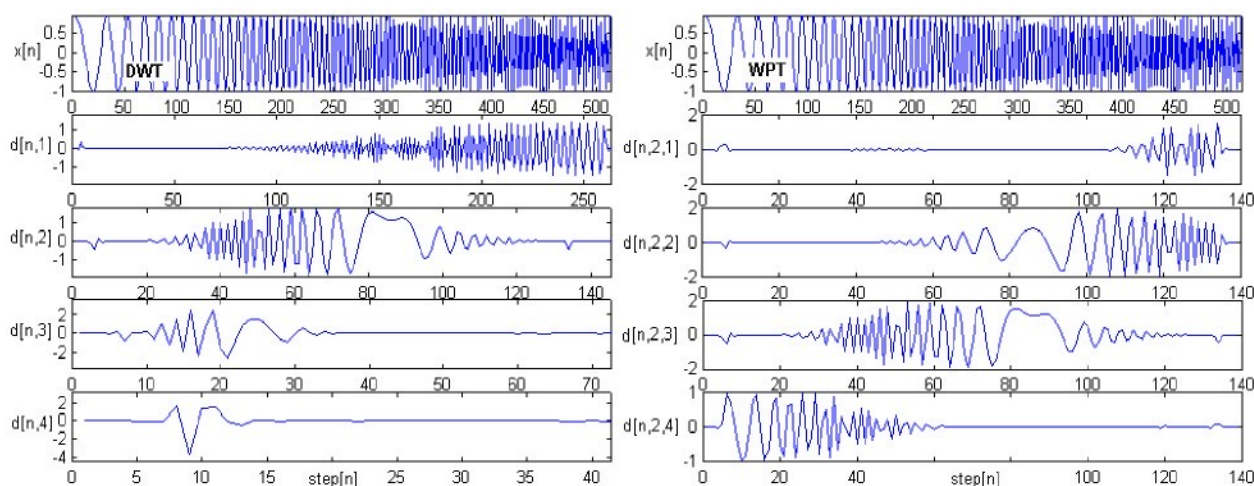
Odvozované dyadické wavelety jsou diagonálním případem stromově generovaných přičemž platí, že $\psi_{n, m}$ je rovno $\psi_{n, m, m}$. Výsledkem $W_x[n, m, k]$ je lineární odstupňování složek, analogické k FFT. Největším rozdílem je, že pořadí pásem neodpovídá frekvenčnímu pořadí. K proházení dochází v důsledku decimace následující po $H(z)$ filtraci. Decimací indukovaný aliasing otočí symetricky celý frekvenční obraz – správné frekvenční pořadí musí být následně ze znalosti struktury pro vybraný stupeň m rekonstruováno. Možná je i hybridní struktura kombinující dyadickou a lineární dekompozici. Pro stromovou strukturu se také ustálil název paketový rozklad, z angl. Wavelet packet tree, dále už jen jako WPT.



Obr. 5.23 Srovnání dyadické DWT „sym8“ s FFT a WPT „sym8“

Poznamenejme, že zkratku DWT (z angl. „discrete wavelet transformation“) dále ponecháme pro označení klasické dyadické formy wavelet transformace, pokud nebude v kontextu určeno jinak. Svým pojetím WPT je podobnější FFT, ač je jejím jádrem waveletový rozklad. Projevem toho je přítomnost aliasingu u příslušejícího WPT spektrogramu na Obr. 5.23. Na předchozích obrázcích je pro porovnání klasická STFT s 90% překrytím Hanningovým oknem a dyadická DWT s typem filtru „Symlet8“, který užívá i uvedená WPT analýza. JTFA obrazy zaznamenávají přibližně $T=1\text{ s}$ demonstračního signálu s dvěma křížícími se lineárně přeladovanými harmonickými.

Trochu jiný pohled zprostředkují časové odezvy jednotlivých stupňů, na Obr. 5.24 s demonstračním signálem lineárně přeladované harmonické funkce. Zásadní k povšimnutí jsou dlouhé náběhy filtrů, způsobené majoritně malou frekvenční selektivitou filtrů, v tomto případě opět typu „Symlet8“. Patrný je také rapidně klesající počet $d[n, m]$, respektive konstantní malý počet $d[n, m, k]$ wavelet koeficientů, zapříčiněný rozdílnou pracovní frekvencí výstupních stupňů. Odezvy jsou seřazeny v sestupném frekvenčním gardu. Stupeň [2,2] WPT je identický s úrovní 2 WPT, jak jsme předpověděli.



Obr. 5.24 Časové odezvy dyadické a lineární waveletové banky filtrů

5.3.4 Kompenzace skupinového zpoždění

Rozdílný počet koeficientů v různých stupních na straně klasické DWT, viditelný na Obr. 5.24, značí, že výstup třetího stupně se bude u DWT obnovovat s poloviční frekvencí než stupeň druhý, čtvrtinovou frekvencí než první, atd. To je v souladu s původní i modifikovanou formou DWT na Obr. 5.22. Pro získání skalogramu na způsob DWT z Obr. 5.23 je zapotřebí sledovat odezvy všech stupňů současně s periodou odpovídající nejrychlejší změně. Předpokládejme vyřazení průměrování, rychlost skenování výstupů pak musí odpovídat přímo vzorkovací frekvenci. Modelově toto převzorkování odečítání výstupů odpovídá interpolaci s tvarovačem stupně 0.

K získání úplného obrazu o časových poměrech na výstupu real-time analýzy si musíme uvědomit, že spolu s reálnou odezvou na vstupní buzení $x[n]$ snímáme v úvodu analýzy i náběhy filtrů generující falešný časově frekvenční obraz. Doba, kterou můžeme označit za náběh filtru, je identická se skupinovým zpožděním GD, z angl. group delay. Průběh $GD(\omega)$ je přímo daný použitou třídou a řádem waveletů, což je faktor, který můžeme ovlivnit. Situace je o to komplikovanější, že skupinové zpoždění je obecně také závislé na okamžité frekvenci vstupního signálu $\omega(t)$. Z tohoto důvodu se snažíme přizpůsobit $GD(\omega)$ filtrů, aby bylo maximálně ploché a stačila je dostatečně přesně charakterizovat konstanta. V tomto ohledu oceníme „skoro symetrickou“ impulsní charakteristiky Symletů, Obr. 3.11, což je podmínkou $GD \approx konst.$

Celkové skupinové zpoždění na úrovni m je součtem několika příspěvků. Vzato od konce je to již zmiňovaný posuv zanesený real-time modifikací DWT (Obr. 5.22). Za druhé zpoždění $H(z)$ filtru, GD_h . Za třetí složené zpoždění přímé větve kombinující kaskádu $G(z)$ filtrů, jejich GD_g , a decimace (Obr. 5.20). Popsáno rovnicí odpovídá součet tří komponent

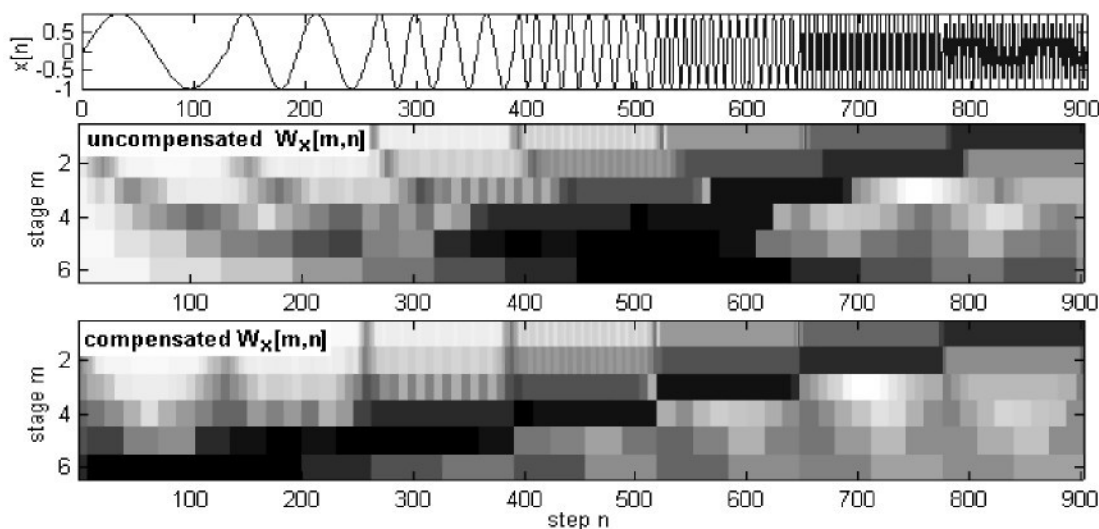
$$GD[m] = (2^{m-1} - 1) + 2^{m-1}GD_g(1 - 2^{-m+1}) + 2^{m-1}GD_h - GD_h.$$

Uvedená rovnice zahrnuje i proklamovanou interpolaci při odečítání výstupů (násobení členem 2^{m-1}) tak, aby byl výsledek normalizován na počet vzorků vzorkovací frekvence f_s . První člen rovnice je čistě pouze vyjádřením posuvu odkazující na Obr. (5.22). Druhý je součinem geometrické posloupnosti $2^{-1}GD_g + 2^{-2}GD_g + 2^{-3}GD_g + \dots + 2^{-m+1}GD_g$ vyjadřující decimální větev a interpolace. Třetí příspěvek vyjadřuje rozdíl zpoždění mezi prvním a m -tým stupněm od GD_h . Výsledek po úpravě v elegantnější formě upravuje rovnice (5.9).

$$GD[m] = (2^{m-1} - 1)(GD_h + GD_g + 1) \quad (5.9)$$

Abychom zpoždění kompenzovali, není pro klasickou DWT jiné varianty než výstupy navzájem sjednotit dalšími časovými posuvy. Pokud jde o offline analýzu ze záznamu, sáhneme nejspíše k nekauzálnímu posuvu se záporným GD . V naší implementaci algoritmu DWT výstup $P_{m,n}$ signálu doplníme zpožďovací linkou časově podřizující všechny stupně největšímu zpoždění $GD[M]$. Důležitost správného časového sladění je, na příkladu stupňovité přeladované harmonické, zjevná z Obr. 5.25. Skalogram nestacionárního průběhu není bez kompenzace vůbec synchronní s časovým průběhem, takže k elementárnímu projevu nemůžeme přiřadit správné frekvenční komponenty.

Konstantní celkové zpoždění bychom za předpokladu $GD_h = GD_g$ odvodili i u stromové WPT struktury. Podmínka je pro širokou řadu waveletů téměř splněna, mezi jednotlivými pásmy skalogramu tak nedochází k významnější deformaci časových relací, proto jsme se časové kompenzaci WPT v této kapitole nevěnovali.



Obr. 5.25. DWT bez kompenzace a s časovou kompenzací skupinového zpoždění

Komplikace spojené s časovou kompenzací GD jsou dvojího druhu. S řádem WVD roste i maximální zpoždění nejvyššího stupně, pro $M = 12$ se „sym8“ filtry je to již například téměř 70 tisíc vzorků. V závislosti na vzorkovací frekvenci bude o tuto dobu opožděna odezva celé analýzy. Stanovení správné celkové GD pro tyto vysoké řády je proto velmi citlivé na přesnost určujících GD_h a GD_g . Jak jsme uvedli, tyto partikulární GD jsou navíc závislé na reálné frekvenci vstupního signálu, kterou apriori neznáme. Spokojujeme se proto s odhady. Případnou chybu v kompenzaci ale do značné míry zmírňuje fakt, že možnost časové lokalizace je omezena také samotnou wavelet funkcí, jenž pro vysoká m délkou impulsní charakteristiky také shodně extrémně narůstá. Negativní účinek reálné „zaokrouhlené“ GD je tím do značné míry maskován.

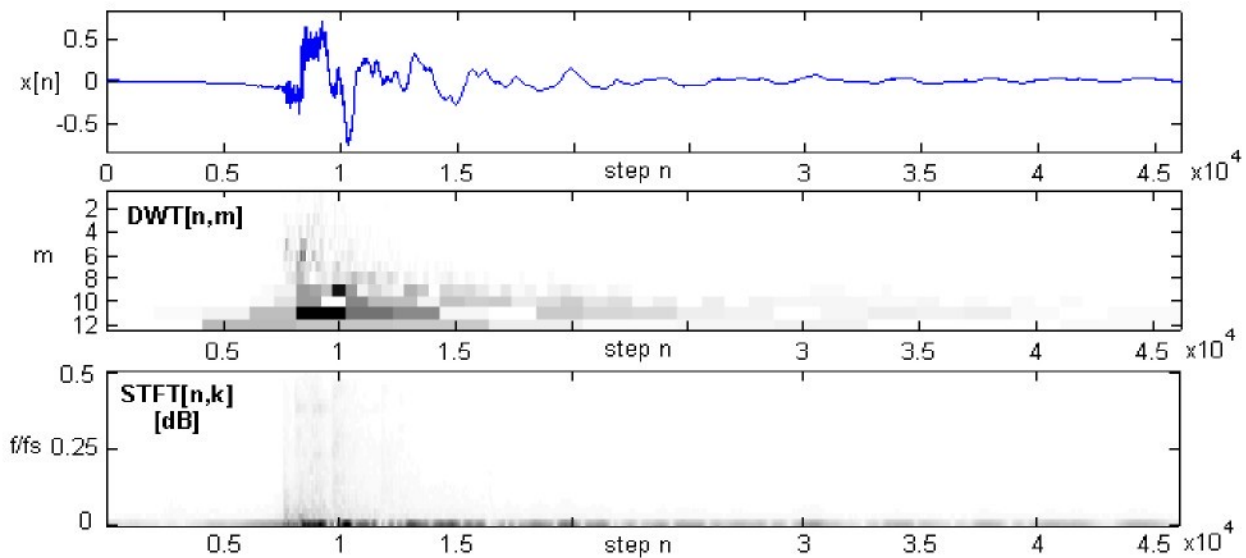
5.3.5 Příklady aplikace

Už z výše uvedeného lze již odhadnout, jaký je největší přínos wavelet dekompozice. Z předložených lineárních metod dosahuje největšího časového rozlišení, které je stavitelné pomocí třídy waveletu. Vzhledem k míře aliasingu, symetrii a přijatelně rovnoměrnému skupinovému zpoždění jsme za referenční (nejoptimálnější) zvolili rodinu Symlet waveletů.

Dyadický rozklad vytváří ortogonální síť – skalogram – zobrazovaný pomocí polí o šířce dané vzorkovací frekvencí v daném stupni, viz. horizontální dělení na Obr. 3.10. Tím zobrazení respektuje základní časové měřítko, jež je zároveň teoretickým minimem a odpovídá vzorkovací frekvenci na daném stupni. Skutečné frekvenční rozlišení takto presentováno nebývá, vynáší se lineárně s určením pořadí úrovně. Centrální frekvence úrovně m odpovídá $f_c[m] = 3/4 f_s \cdot 2^{-m}$, toho si musíme být při interpretaci výsledků vědomi. Pokud není uvedeno jinak jsou obrázky vynášeny v logaritmických amplitudách převedeným do stupňů šedé.

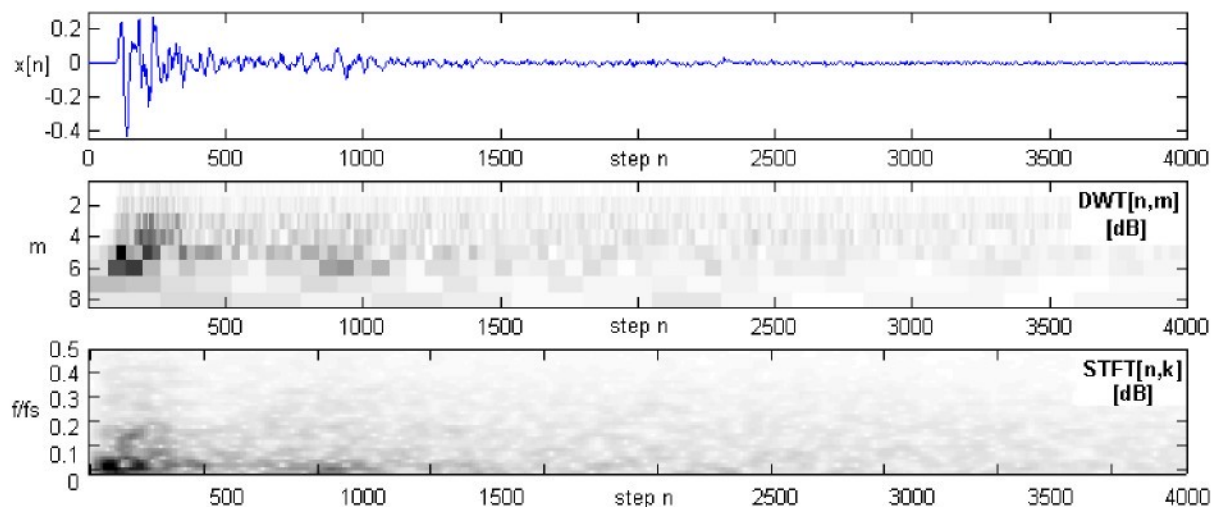
V kapitole o Wigner-Ville distribuci jsme jako největší slabinu JFTA založené na FFT zmiňovali malé časové rozlišení znevýhodňující STFT pro analýzu studovaných impulsních hluků. Na následující dvojici příkladu hluku zavíraných dveří lze toto jednoznačně potvrdit. Nedostatečná časová selektivita je ve srovnání s DWT skalogramy o to víc patrná. DWT skalogramy se naopak ukazují jako ideální nástroj pro takové aplikace, neboť se velmi pozitivně projeví i dyadické frekvenční dělení, které je akustickým projevům vlastní. Na Obr. 5.26 je jasné, že pokud je největší výkon koncentrován na nejnižších frekvencích, nemáme ve spektrogramu, v rámci celé frekvenční šíře, možnost tyto nízkofrekvenční projevy detailněji rozlišit. Na druhém příkladu, Obr. 5.27, je výkon rozdělen rovnoměrněji, i tak jsme ale JFTA obraz ve frekvenční ose zvětšili, aby byl kvalitou podání DWT srovnatelný. Na stejném obrázku v neprospěch STFT hraje opět také neúměrně dlouhé okno (Hanning s 256-ti body), které se s délkou impulsní odezvy použitých „sym8“ filtrů (16 koeficientů) nemůže rovnat. S kratším oknem by na druhou stranu ještě více zanikly frekvenční detaily. Ostré vykreslení skalogramu pomocí polí přispívá k lepší

orientaci a čtení dekompozice, i když ve skutečnosti jsou ale přechody hladké.



Obr. 5.26 Dyadická wavelet a FFT a analýza impulsních hluků

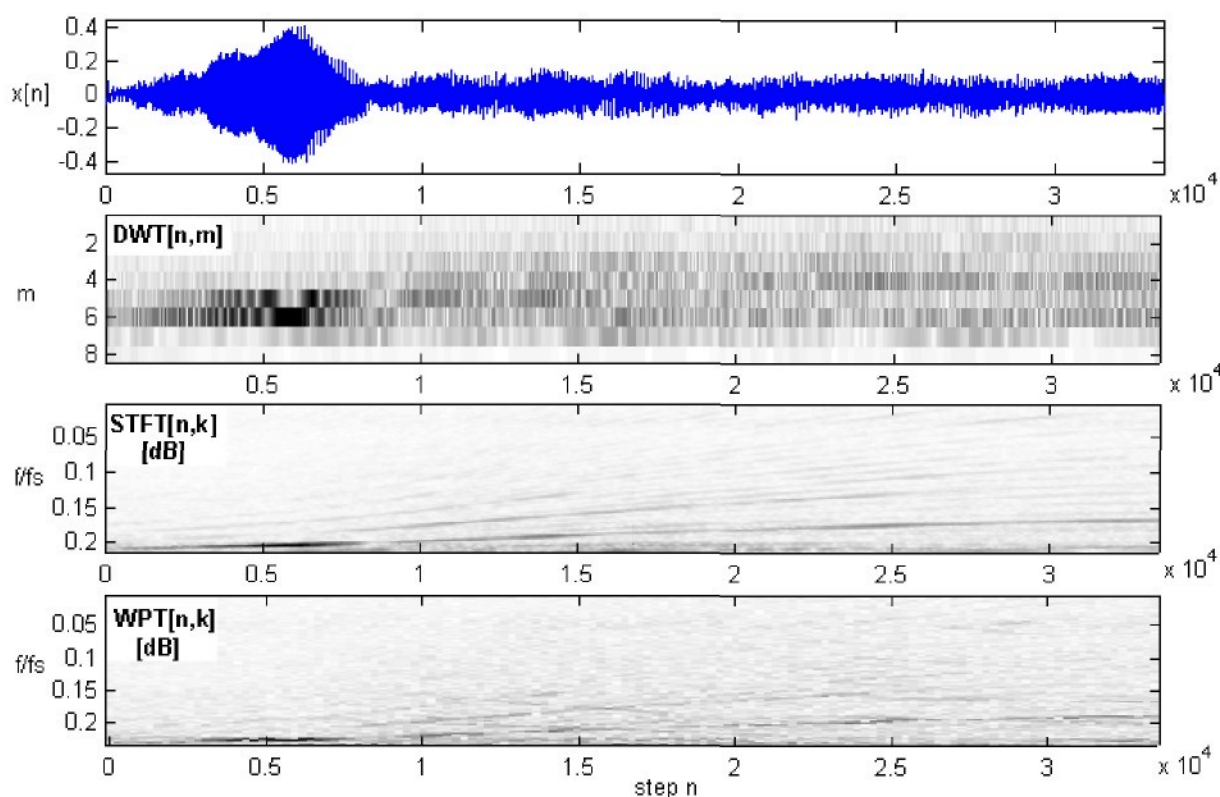
Podobných výsledků lze dosáhnout i s filtry navrženými podle specifikace CPB analýzy. Frekvenční selektivita filtrů je u CPB výrazně větší, navíc si můžeme obvykle zvolit trojnásobné nebo dvanásobné frekvenční rozlišení, než jaké má oktávová verze. Naproti tomu klesá ale časové rozlišení, které se podřizuje nárokům na dovolenou míru aliasingu. Výstupní průměrovací filtr bychom pro tyto případy úplně vyřadili nebo nastavili na minimum.



Obr. 5.27. Dyadická wavelet a FFT analýza impulsních hluků - frekvenční zoom

Pro analýzu rozběhových jevů jsme ani teoreticky s DWT nepočítali, experiment na

Obr. 5.28 je potvrzením těchto předpokladů. Případy rozběhů, na které se soustředíme, se neprojevují příliš velkou dynamikou, nevynikne proto potenciál velkého rozlišení DWT, které jen zvyšuje objem redundantních informací. To samo o sobě nevadí, protože jsme v žádném příkladu dosud neaplikovali zakomponovaný průměrovací filtr, který přílišné kmitání výstupu analýzy zvolenou měrou omezuje. Jasným nedostatkem DWT je ale dyadický frekvenční krok, jenž je příliš hrubý pro kontinuální sledování vývoje produkovaných harmonických.



Obr. 5.28 Srovnávací rozběhová analýza pomocí technik wavelet a FFT transformace

Naším kandidátem pro tyto aplikace byla paketová verze wavelet transformace – WPT. Netrpí totiž žádným ze zmíněných nedostatků DWT, Obr. 5.28 nicméně i ji, ve srovnání s klasickou STFT, usvědčuje z omezení. Paketová wavelet transformace je stejně jako STFT nastavena na 256 čar, v obrázku jsme se ale zaměřili pouze na nižší frekvenční pásmo. Na první pohled je zřejmý velký bias. Užitečná informace je díky malé frekvenční selektivitě WPT filtrů utopena v šumu, který je díky aliasingu plošně přítomen v celém spektrogramu. Lepším prahováním barevné škály lze obraz spektrogramu sice výrazně zlepšit, principiální potíže však jednoduše odstranit nedokážeme. Potenciální výhodou WPT může být lepší časové rozlišení, s kratšími wavelety ale klesá i frekvenční strmost filtrů, takže bychom problém biasu ještě zhoršili, Wang [23].

5.4 Wigner-Ville série

Vraťme se v úvahách k tomu co bylo řečeno o Wigner-Ville distribuci, k její největší nevýhodě - křížovým interferenčním produktům. Naši motivací je tyto projevy eliminovat. Cohenovy třídy nejsou z důvodu principiálního rozmazání JTFA obrazu ideálním prostředkem, zavedená Pseudo-WVD zase nekompensuje křížové korelační interference dostatečně. Východiskem, které v rámci této kapitoly otestujeme, je teorie Wigner-Ville sérií. Částečný princip je obsažen v Narasimhan, Nayak [43], zobecněná teorie JTFA sérií založena na Gaborově rozvoji v Qian, Chen [3], odkud také čerpáme terminologii. Sériemi máme na mysli systém několika WVD které teprve složením aproximují celkový spektrogram. Tato úvaha je východiskem odvození mechanismu zlepšení WVD obrazu, ale můžeme ji využít i obráceně – pro vylepšení JTFA obrazu lineárních metod. Obojí v této kapitole popořadě předvedeme.

5.4.1 Časové a frekvenční řezy jako WVD série

Dekompozice signálu na sérii časových záznamů byla v souvislosti s Wigner-Ville distribucí odvozena jako Pseudo-WVD. Postup zcela kopíruje princip posuvného okna u STFT, avšak účelem není přiřadit frekvenční analýze časovou značku, ale pouze omezit délku signálu. Omezení je nevyhnutelné jak z důvodu praktických, daných omezeným výpočetním potenciálem, tak pro zabránění vzniku interferencí mezi časově vzdálenějšími komponentami. PWVD splňuje kritéria pro Wigner-Ville sérii, neboť celkový obraz skládáme jako superpozici jednotlivých posuvů okna. Definiční (5.3) lze interpretovat také jako (5.10), kde $x_n[i] = \sum_{l=-L/2}^{L/2-1} x[n+i+l]$.

$$V_x[n, k] = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} V_{x_l}[k] \quad (5.10)$$

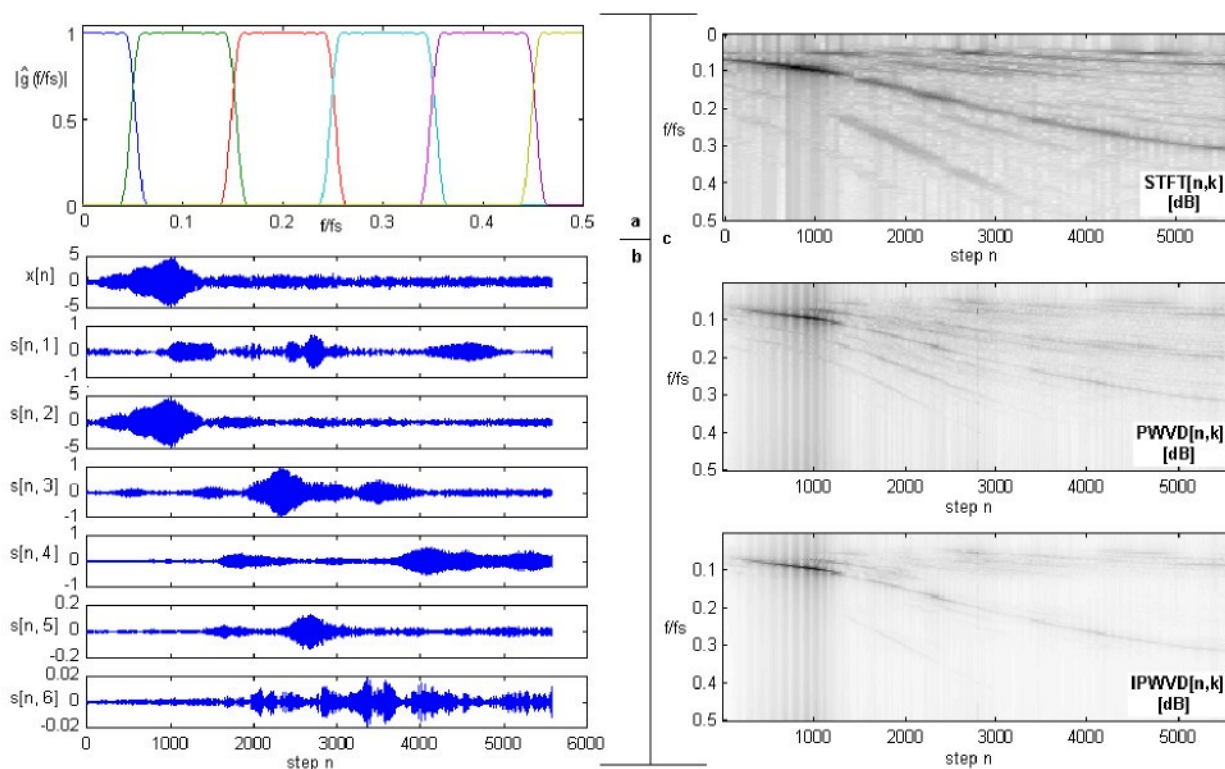
Důkaz omezení interference časovou dekompozicí jsme podali formou porovnání Obr. 4.2 a Obr. 4.5. Omezení křížových produktů bude tím významnější, čím bude délka okna L kratší. Bohužel L definuje přímo i počet bodů Fourierovy transformace Villeova součinu ve WVD. Míra „horizontálních“ interferencí po sobě následujících elementárních jevů je tedy protiváhou zvyšování frekvenčního rozlišení WVD.

Zamezení „vertikálních“ interferencí mezi frekvenčně odsazenými komponentami dosáhneme analogicky frekvenční dekompozicí signálu. Analyzující banka filtrů je nejlepším přístupem jak toho dosáhnout. Modelem banky filtrů nám bude systém paralelně pracujících pásmových propustí $G_p(z)$. WVD série je nyní vyjádřena jako (5.11), kde

$$s_{p,n} = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x[n] g_p[n-l] \text{ představuje odezvu filtru pořadí } p.$$

$$V_x[n, k] = \sum_{p=1}^P V_{s_{p,n}}[n, k] \quad (5.11)$$

Vztahy (5.10) a (5.11), nasazené společně, rozdělí celý prostor na neinterferující časově-frekvenční oblasti imaginární sítě vymezené délkou okna L a šířkou pásma $G_p(z)$. Signál, který by nám analýzou podle tohoto předpisu vyhovoval nejvíce, by měl být složen také z izolovaných časově a frekvenčně kompaktních elementárních projevů. Modelové průběhy na Obr. 4.2 nebo Obr. 4.5 jsou přesně tím co máme na mysli. Nebyl by problém navrhnout banku filtrů tak, aby vyhovovala právě frekvenčnímu rozvržení těchto příkladů, šlo by však až o příliš imaginární příklad. Rozmístění a specifikaci filtrů dekomponující banky musíme učinit obecně, neboť charakter analyzovaného signálu nemůžeme příliš předvídat. Bude nutné rozhodnout o základním typovém rozložení filtrů a jejich počtu. Výchozí banka filtrů nechť využívá opět známé oktávové a lineární dekompozice, neboť jak jsme ukázali, je použití každé z nich opodstatněné pro jiný typ signálů.



Obr. 5.29 a – Frekvenční charakteristika lineární banky filtrů, b – dekompozice signálu bankou filtrů, c – srovnání spektrogramů podle STFT, PWVD a IPWVD

Příklad na Obr. 5.29 je ukázkou výpočtu Wigner-Ville distribuce podle (5.11) pomocí šestice pásmových propustí s lineárně odstupňovanou centrální frekvencí. Amplitudová frekvenční charakteristika je v horním levém čtverci, pod ní původní signál hluku rozběhu a jeho

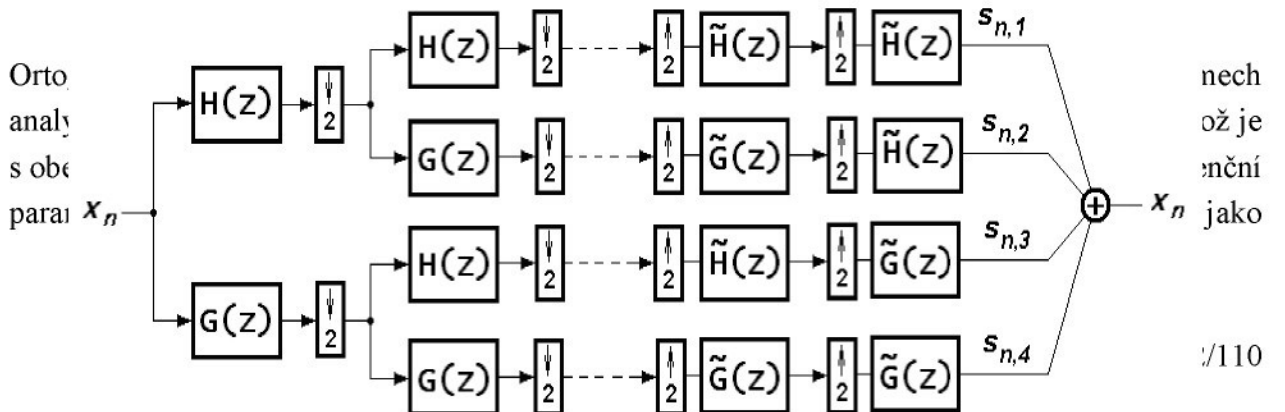
dekompozice. Zásadní je pravá výsledková část srovnávající STFT, klasickou PWVD a zejména vylepšenou PWVD (angl. Improved PWVD), podle (5.11), značenou jako IPWVD. Všechny analýzy jsou nastaveny na stejné základní frekvenční rozlišení 128 čar. Opět vytane rozmazání od STFT a velké množství matoucích interferencí ležících mezi jednotlivými vyššími harmonickými, odvozených od násobku otáček u PWVD. Vylepšená varianta vychází bez interferencí, ale díky filtrům není tak ostře selektivní. To se projeví rozmazáním i užitečných složek, které hůře vyplouvají nad úroveň šumu. Pro přesnou časově-frekvenční lokalizaci nejvýznamnějších harmonických nebo pro odhad spektra by v tomto případě IPWVD vyhovovala nejvíce.

Protože se v příkladu jednalo o rozběh, použili jsme lineární banku filtrů. V tomto případě se jedná o filtry navržené jednoduše pomocí okna Kaiser. Obdobné lineární dekompozice je možné dosáhnout i s pomocí wavelet paketového rozkladu. Výsledkem by byla sada koeficientů v počtu redukovaném úměrně počtu úrovní. Interpretovat posloupnost $d[n, m, k]$ přímo jako odezvu digitálního filtru, jako jsme to dovolili u DWT s výpočtem okamžitého výkonu $p[n, m]$, by nebylo správné. Abychom se dostali na $s[n, p]$, musíme použít rekonstrukční postup. Vycházející z $d[n, m, k]$ aplikujeme inverzní sadu filtrů a zrcadlově s použitím součtů a interpolací provedeme wavelet syntézu. Inverzní wavelet transformace pro ortogonální WPT je definovaná obdobně jako tomu bylo u jednoduché DWT (3.33), pro zvolený stupeň m platí

$$x[n] = \sum_{k=1}^{2^m} \sum_n \langle x, \psi_{n,m,k} \rangle \psi_{n,m,k}. \quad (5.12)$$

Praktická formulace pomocí banky filtrů se opět nejlépe vysvětlí funkčním schématem, Obr. 5.30. Z obrázku už vyplyne i matematická definice pomocí diferenční rovnice na způsob (5.31),(5.32). Formální postup odvození rekonstrukce by měl být učiněn obráceně, tj. odvozením z definičních rovnic vedoucích teprve na schema (5.30), ale to ponecháme na literatuře, Mallat [36].

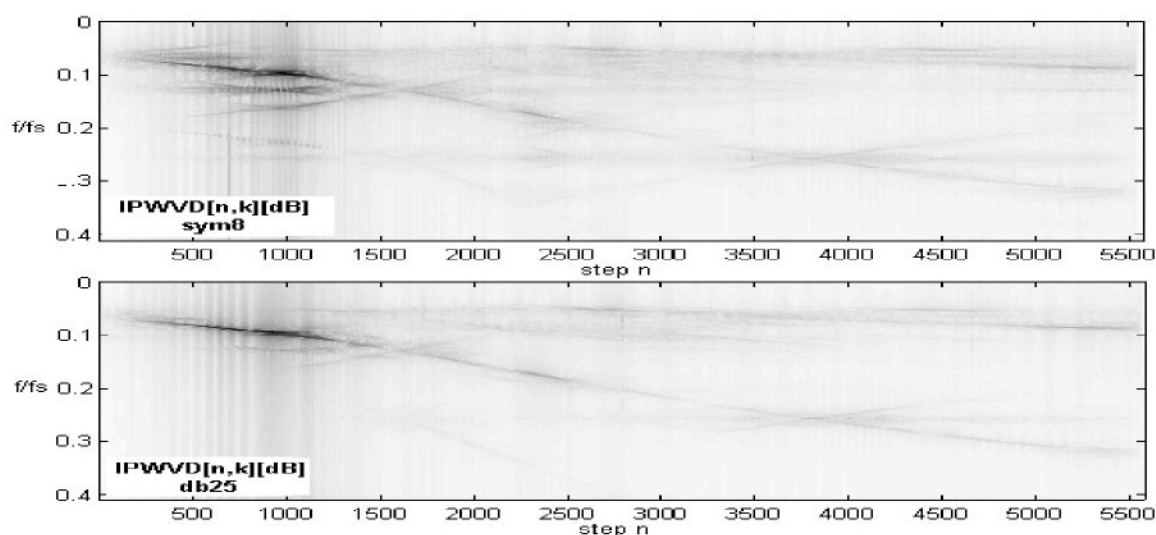
Ve zmíněném schématu jsme si dovolili vynechat součtové členy, místo toho jsou přenosové cesty rekonstrukce jednotlivých pořadí p (respektive k podle (5.12)) vyjádřené samostatně. Pořadí dekompozice tak odpovídají $s[n, p]$ jak jsme je definovali výše, $P = 2^m$.



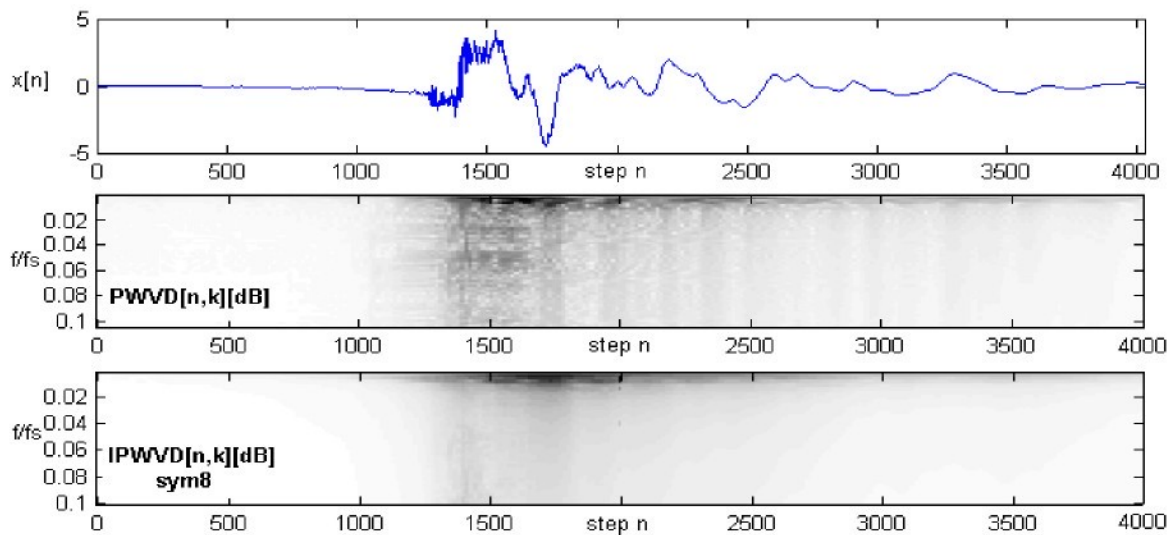
$$x[n] = \sum_{p=1}^{2^m} s[n, p] \quad (5.13)$$

Součástí (5.13) je i kompenzace skupinového zpoždění, jeho odvození je obdobné postupu, jaký jsme uváděli v Kap. 5.3.4. Kdyby byla WVD lineární transformací, neměla by modifikace podle (5.13) žádný význam. My si od ní slibujeme zvýraznění reálných složek od interferenčních, jako by se jednalo o popsanou frekvenční dekompozici. Příklad na dalším Obr. (5.31) dokazuje, že jsme na stejném signálu opravdu dosáhli podobného efektu jako na příkladu (5.29). Bohužel je zjevné, že rekonstruované komponenty $s[n, p]$ s sebou nesou i značný podíl alias signálu projevující se jako křížová fantomová složka. Záleží na třídě waveletů, ale obecně bude alias podíl přítomen vždy. Podle (3.29) je vysvětlení jasné. Aliasing produkty dekompozice jsou eliminovány právě až v součtových členech, které jsme v naší formě rekonstrukce nuceně vynechali.

Podobné chování můžeme očekávat i u oktávové formy s klasickou DWT. Výstupy získané oktávovou wavelet rekonstrukcí už budeme prezentovat pouze výsledkově, Obr. 5.32, neboť princip zůstává nezměněn. Stejný příklad signálu jako na Obr. 5.32 byl použit už při studiu vlastní PWVD, druhý graf opakuje v detailu výsledek, jaký jsme její pomocí dosáhli. Poslední spektrogram odpovídá naší modifikaci s DWT dekompozicí pomocí „sym8“. Ze středu obrazu odpadlo velká množství detailů, které jsme mohli pokládat za interference, protože se ve výsledku IPWVD již nezobrazí, nebo jsou nevýrazné. To by se dalo pokládat za klad, pokud by za tímto jevem nestálo také rozmazání způsobené dlouhými odezvami filtrů na vyšších stupních. To penalizuje i reálné části, které mohou ve výsledku zcela zaniknout. Z analýzy tohoto příkladu vyplývá, že zčásti došlo i k tomuto jevu.



Obr. 5.31 Vylepšená PWVD v kombinaci s WPT „sym8“ a WPT „db25“



Obr. 5.32 Detail JTFA impulsního hluku, *a* – časový průběh, *b* – klasická PWVD, *c* – vylepšená PWVD kombinující DWT „sym8“ dekompozici

IPWVD využívající oktavovou dekompozici trochu přichází o přednosti DWT předstupně, protože jednotlivé V_{s_p} transformují dyadické měřítko zpět do lineárního, čímž pro akustické signály ztrácíme přehlednost oceňovanou u oktavových skalogramů. Dyadickou síť pásmových filtrů můžeme realizovat i klasickými paralelními filtry, pracnější bude ovšem jejich návrh, protože každé pásmo musíme zvlášť specifikovat a za pomoci zvolené aproximace transformovat na diferenční rovnici. Užitím rychlé formy DWT pomocí decimace stačí toto podstoupit jen jednou u základního filtru.

5.4.2 Vylepšení JTFA obrazu

IPWVD s použitím DWT nebo WPT je možným přístupem výpočtu JTFA, pokud potřebujeme výsledek srovnávat s jinými spektrogramy získanými například pomocí STFT. Na obou stranách pak stojí vzájemně souměřitelná lineární spektra. Pokud se potřebujeme zaměřit pouze na jistou frekvenční oblast, je možné takto vyšetřovat pouze vybranou $WVD_{s_p}[n, k]$ a nikoli součet celé série. Tato možnost, jak výsledky waveletové transformace přiblížit standardizovaným spektrogramům, není nicméně nijak snadná a ani rychlá.

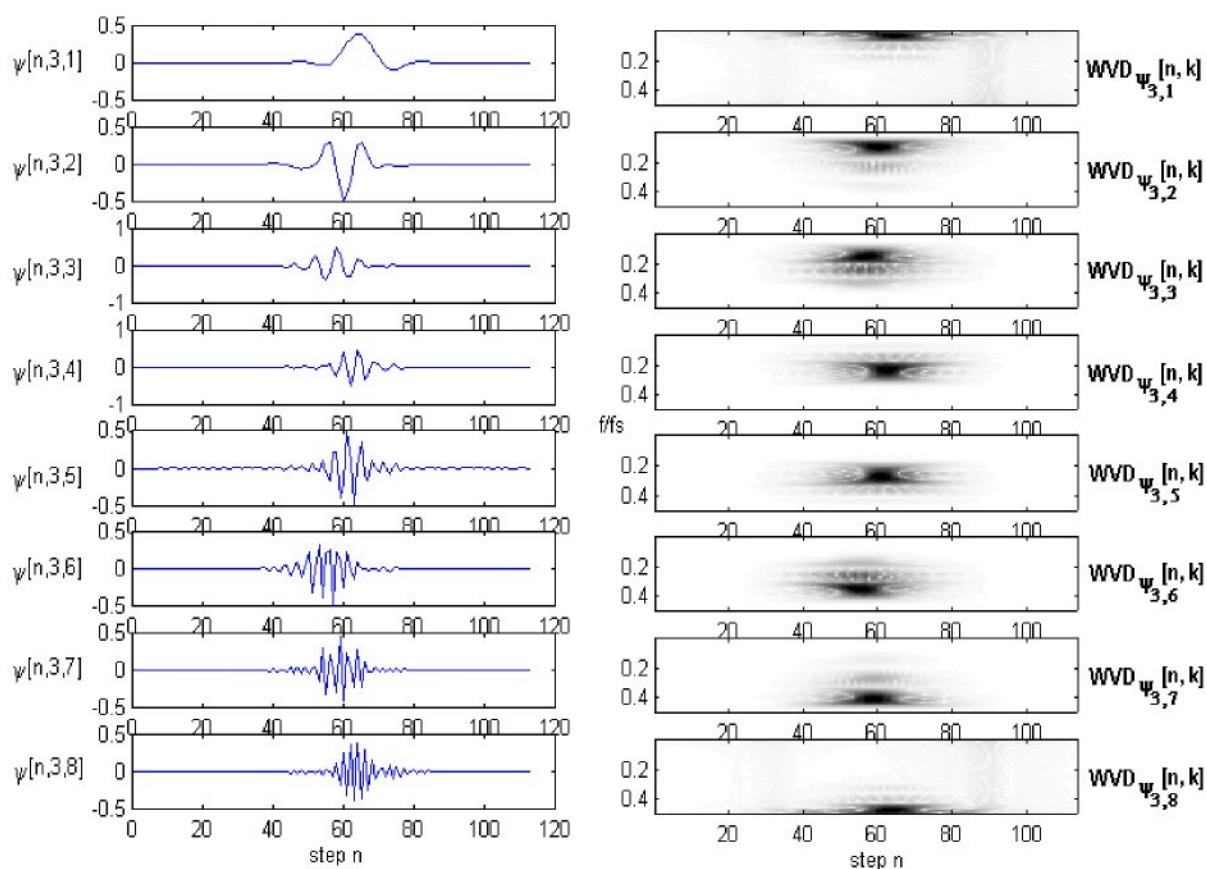
Obvykle se STFT spektrogramy prezentují s vyšším časovým rozlišením než odpovídá přirozené selektivitě použitého okna. Výsledkem jsou hladké přechody, které spíše odpovídají skutečnému rozložení energie signálu. Druhou stranou je velká redundance dat spektrogramu způsobená velkým překrytím okna a s tím spojená i neúměrná výpočetní náročnost. Výstup diskrétní wavelet transformace žádnou redundanci na výstup sice nezanáší, hůře se ale takový

spektrogram nebo skalogram srovnává s hladkými křivkami výstupu takto naddimenzované STFT. Abychom zjednodušili řešení, které nabízí IPWVD, a vyhnuli se také potížím s přítomností aliasingu, navrhli jsme vycházet při syntéze hladkého lineárního spektrogramu přímo z koeficientů $d[n, m]$, resp. $d[n, m, k]$.

Vyjdeme z teorie WVD sérií, s tím rozdílem, že časovou dekompozici neomezíme délkou okna, ale absolutně – základním rozlišením dekompozice v dané úrovni. Každý koeficient wavelet transformace budeme nahrazovat reálným JTFA obrazem příslušejícího analytického waveletu. Matematický zápis (5.14) myšlenku formuluje jasně a přehledně. Jednoduše jde o aplikaci Wigner-Ville distribuce na obou stranách rovnice (5.12). $WVD_{\psi_{m,k}}[l, k]$ je Wigner-Ville distribuce waveletu na úrovni m a pořadí k . Analogicky by se odvodil i pro dyadickou DWT.

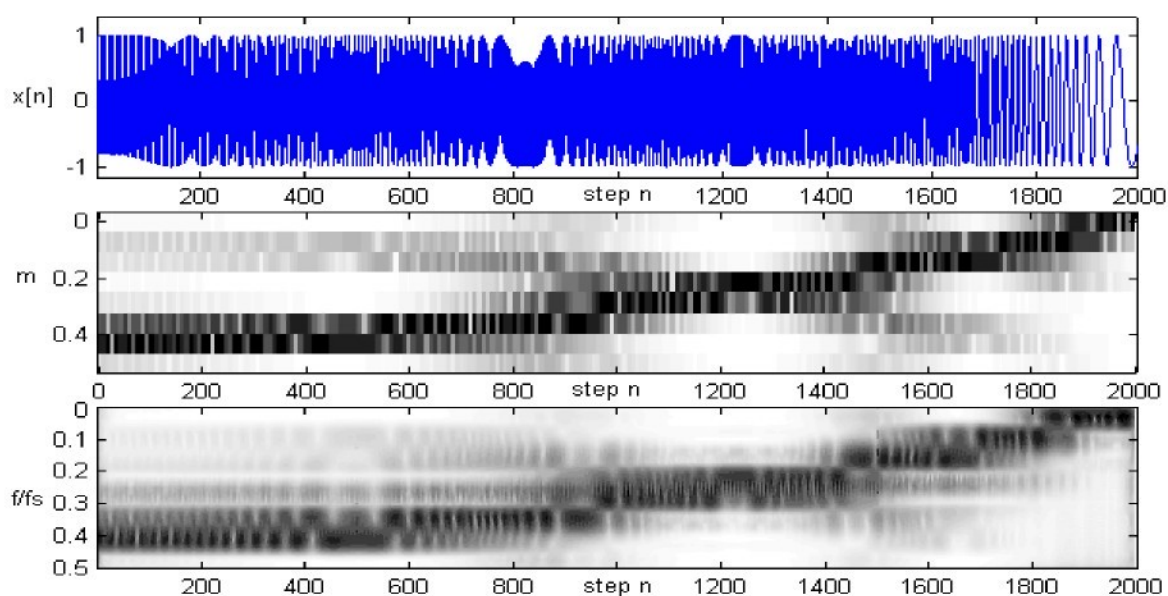
$$WVD_x[n, k] = \sum_{k=1}^{2^n} \sum_n d_{m,k}[n] WVD_{\psi_{m,k}}[l+n, k] \quad (5.14)$$

Svým pojetím by se kapitola hodila i do pasáže věnované obecné diskrétní wavelet transformaci, zde ale navazuje a zapadá do obecnějšího principu WVD sérií, Zou, Chen [28]. Opustíme ale termín vylepšená WVD, neboť imaginární role WVD a Wavelet transformace se zde obrací. Nyní je WVD nástrojem pro vylepšení původního DWT obrazu. Postup výpočtu s uvedeným přímo souvisí. Prvním krokem je vytvoření vzorníku WVD všech variant waveletů vystupujících na výstupu wavelet transformace. Tyto elementární WVD série zobrazují skutečné časově-frekvenční atributy použité třídy waveletu. Níže na Obr. 5.33 a Obr. 5.35 jsou uvedeny příklady vzorníků „Daubechies 12“ pro WPT a „Symlet 8“ pro DWT.



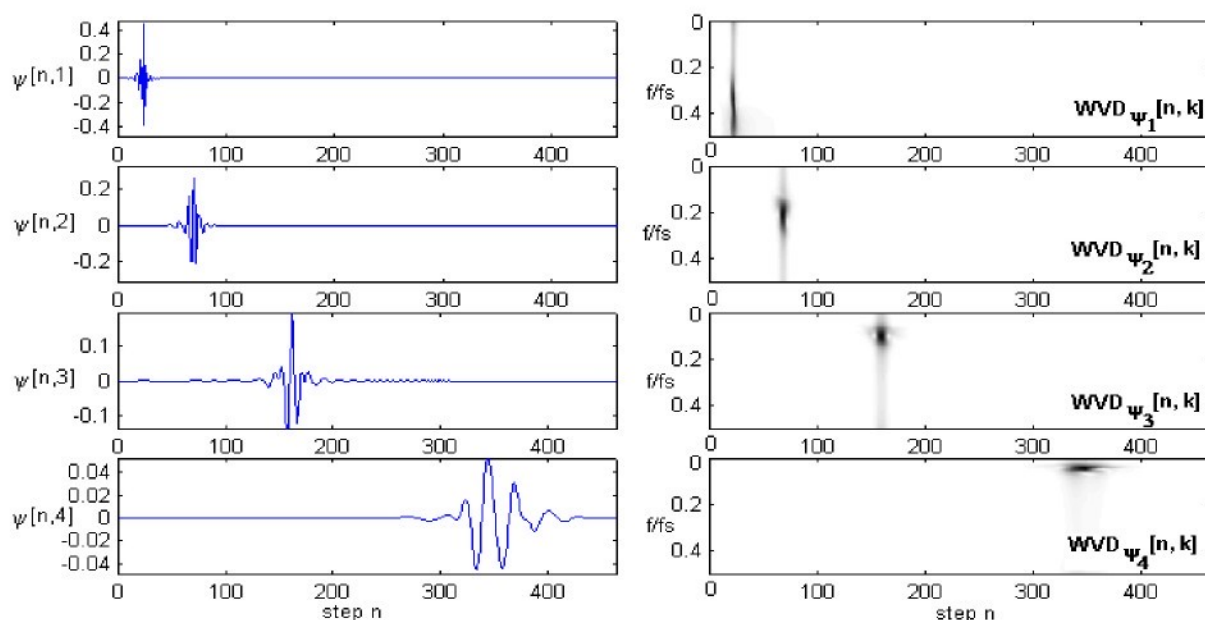
Obr. 5.33 WVD obrazy waveletů „db12“ pro WPT na úrovni 3

Dále se již žádná WVD nepočítá, cyklicky se pouze aplikuje postup nahrazení wavelet koeficientu $d[n,m]$ předpočítaným váženým časově-frekvenčním obrazem. Do výpočtu je nutno také zahrnout známou kompenzaci na skupinové zpoždění, neboť jak vidíme, zpožděné jsou i odezvy ve vzornících. Odezvy jsme získali vybuzením dekompoziční struktury DWT a WPT Diracovým pulsem, čehož produktem jsou impulsní odezvy převzorkovacích kaskádových wavelet filtrů, odhalující přímo časové průběhy analytických dceřiných waveletů.

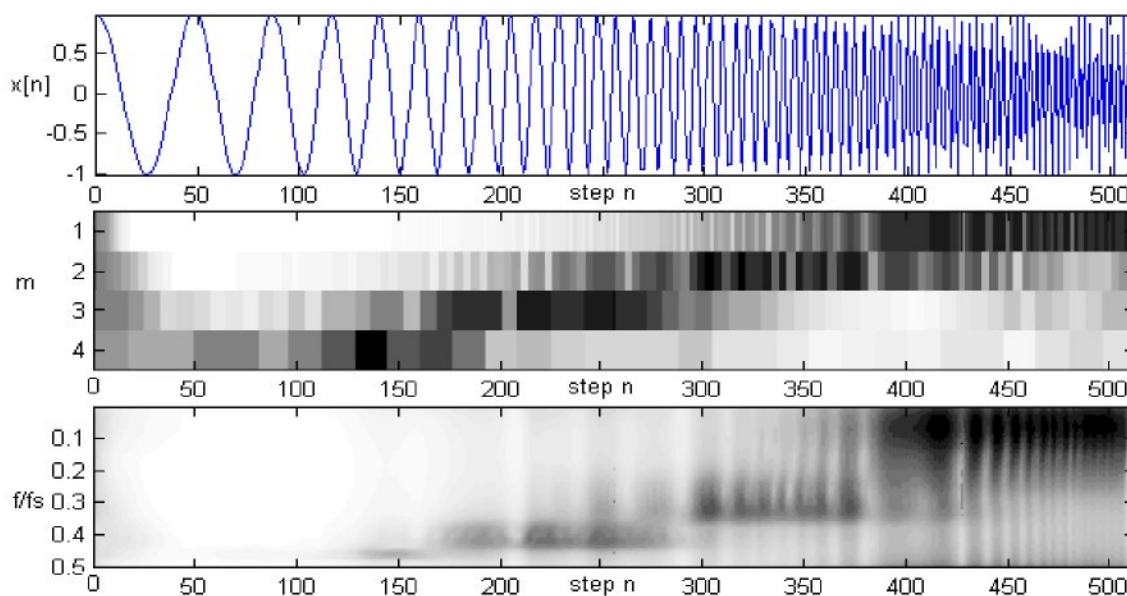


Obr. 5.34 Vylepšení obrazu WPT pomocí WVD

Efekt vyhlazení JTFA jsme prezentovali na příkladech přeladovaných testovacích signálů s malý počtem vzorků, viz. Obr. 5.34 a Obr. 5.36, aby aproximace koeficientů více vynikla. Pro reálné měřené signály, kterými se zde zabýváme, se ve skutečnosti velkého zlepšení nedočkáme. Důvodů je více. Tím nejdůležitějším je, že u nich máme dostatečný počet vzorků poskytující přirozeně detailní obraz i bez aproximace, druhým je vyšší úroveň šumu, která nám vyhlazené průběhy bude zkreslovat více, než kdybychom posuzovali samotný výstup wavelet transformací.



Obr. 5.35 WVD obrazy waveletů „sym8“ pro 4 stupňovou DWT



Obr. 5.36 Vylepšení obrazu dyadické DWT pomocí WVD

5.4.3 Použitelnost

Přínos, potenciálně vyplývající z perfektní rekonstrukce DWT, celkově nevyvažuje vystupující negativní vlastnosti wavelet dekompozice. Z tohoto úhlu šlo spíše o demonstraci možností. V aplikacích, ve kterých je obsažen velký podíl šumu, byvhom ale mohli mezi analytickou a syntetizující wavelet banku filtrů zařadit nelineární prahovací blok penalizující nízké hodnoty koeficientů. Takto se totiž realizuje jednoduchá forma filtrace šumu, ve které jsou algoritmy wavelet transformace velmi úspěšné, Baraniuk [17]. Výsledný spektrogram by proto měl mít malý bias, díky čemuž budou slabé komponenty dobře vyjádřené. Pokud tedy potřebujeme JTFA analýzu kombinovat s potlačením šumu, pak metodikou wavelet dekompozice vyřešíme dva požadavky naráz.

V našich aplikacích jsou to rozběhové děje, u kterých bychom mohli nad takovým postupem uvažovat. V průběhu řady experimentů na podporu této teorie se ale nepodařilo dostatečně uspokojivě naladit mechanismus odstranění šumu tak, aby nezasahoval i užitečné prvky signálu. Míru potlačení šumu spolu s volbou vhodné třídy waveletů a typem nelineárního prvku jsme hledali pouze experimentálně, tato modifikace IPWVD proto dále zůstává otevřená. Z pokusů dopředu víme, že svým potenciálním zaměřením by se nejednalo o univerzální metodu, na každý typ signálu bychom ji museli přenastavit.

Co se týče kvality podání spektrogramu, zůstáváme při rozběhových dějích u modelu paralelně pracujících pásmových filtrů. Dosud nevyřčenou výhodou je u nich možnost jednoduchého výpočtu pomocí FIR filtru navrženého metodou oken přinášející konstantní

skupinové zpoždění. Velice pružně lze měnit počet filtrů i charakteristiku, přičemž nižší strmost není překážkou, neboť pomůže zamezit ztrátě informace na frekvenčních mezípásmech navazujících filtrů. Jisté překrytí pásem je dokonce účelné, principem se podobá překrytí okének u STFT. Z typických frekvenčních okének je možné pro návrh filtrů možné použít jakékoli, pro dosažení dostatečně ploché charakteristiky propustného pásma jsme sáhli po parametrickém okně Kaiser. Návrh skupiny uniformních pásmových propustí lze zjednodušit užitím frekvenčního posuvu $\hat{g}_p(\omega) = \hat{g}(\omega - \omega_s)$, tedy násobením impulsní charakteristiky základního filtru harmonickou funkcí $\cos(\omega_s t)$, kde

$$\omega_s = p \frac{2\pi f / f_s}{P}$$

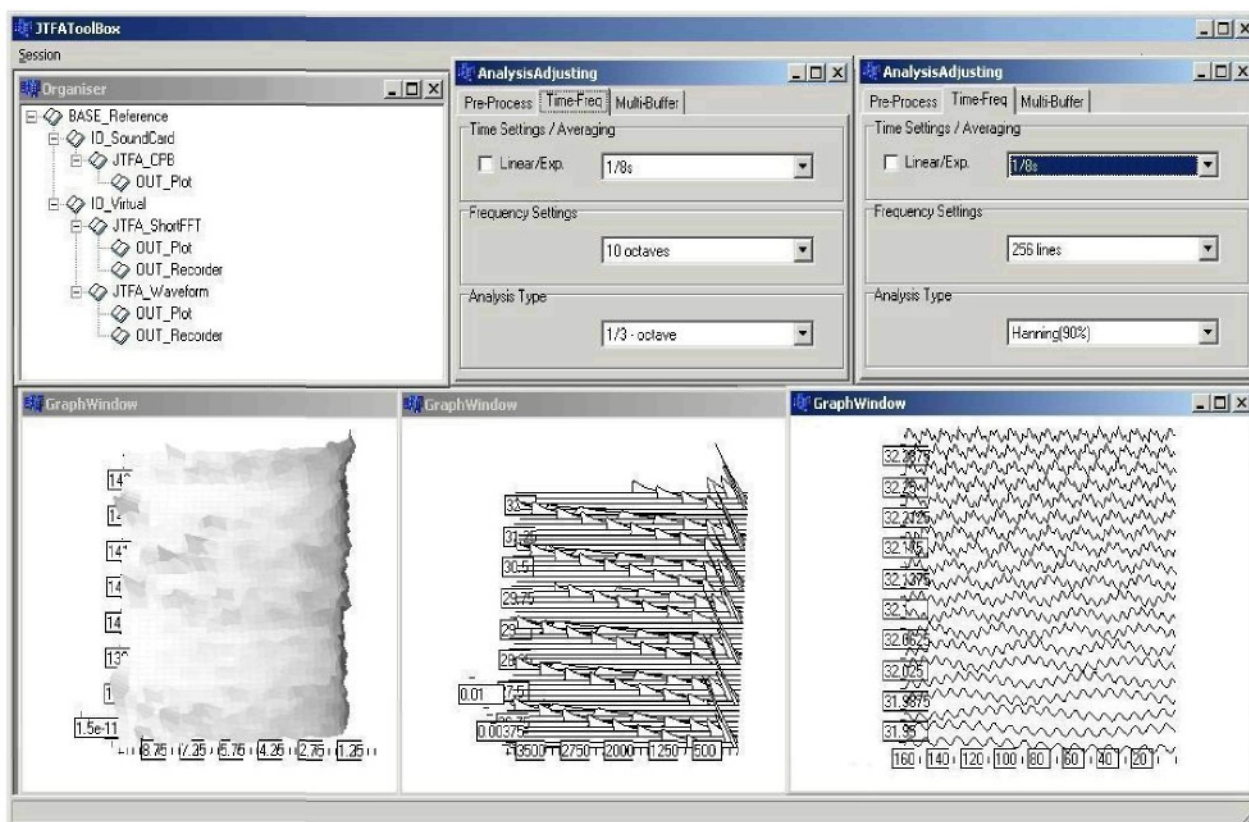
je potřebným posuvem pro dělení do P pásem.

Jak jsme v Kap. 5.2 uvedli, je možné WVD algoritmizovat i pro real-time výpočty. Bohužel i s aplikací všech vzpomínaných optimalizací je obvyklý výpočetní výkon běžného PC schopen souběžného výpočtu právě jen jediné WVD, mnohdy navíc s omezením vzorkovací rychlosti. Tím padá potenciální možnost, že by se nám to samé povedlo i s implementací IPWVD. Popisované mechanismy jsme realizovali jako offline vylepšení záznamových časově-frekvenčních distribucí, vše využitím základních funkcí Matlabu 5.2.

Jiná situace je ale u diskrétních forem wavelet transformací a jejich popisované vylepšené varianty. Základní WT algoritmy v real-time formě již máme a jak jsme uvedli, WVD vzorník je nutné vypočítat pouze jednou. I přes to jsme ani tuto verzi nezahrnuli do balíku nástrojů real-time JTFA analýzy. Problém je ve velkém objemu dat, který vylepšené formy WT produkují. Tyto data se musí uložit, popřípadě vizualizovat, což samo o sobě představuje velkou zátěž pro celý systém. Jako možnost jsme je proto opět ponechali na post proces zpracování pomocí námi připravených funkcí Matlabu.

6 Aplikace, JTFA Toolbox

Rostoucí výpočetní výkon osobních počítačů nás motivoval, paralelně spolu s Matlabovými skripty, implementovat vybrané metody i v rámci účelového software pro real-time spojenou časově-frekvenční analýzu. Pro program se ustálil název „JTFAToolbox“, což zhruba vystihuje jeho záběr. Ten je nicméně širší, neboť zasahuje zvlášť samostatně časovou i frekvenční inspekci signálů. Kompletní výčet možností ponecháme na následujících stránkách. Typické rozložení prvků vystihující možnosti uživatele JTFAToolboxu je na Obr. 6.1.



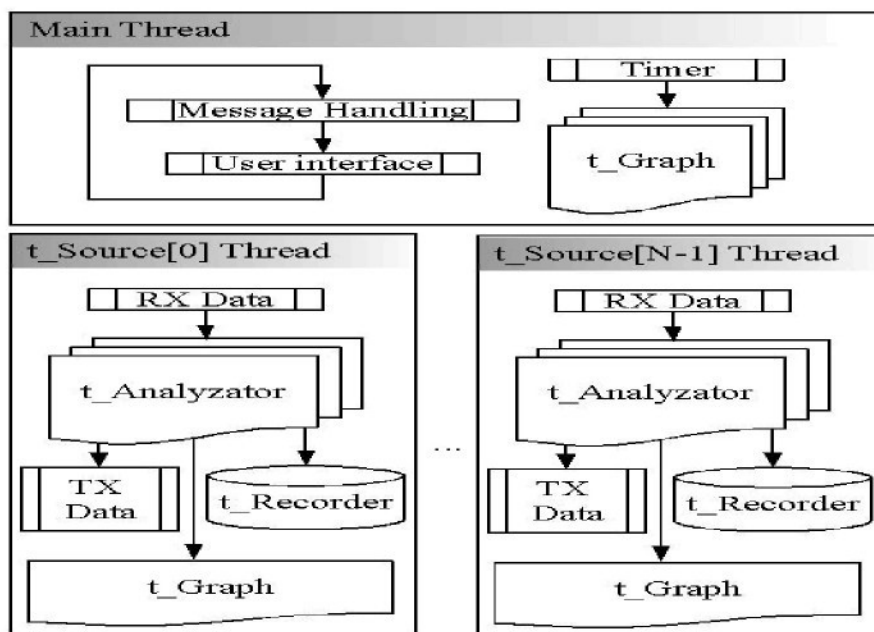
Obr. 6.1 Uživatelské rozhraní programu JTFAToolbox

6.1 Struktura programu

Pro popis fungování našeho programu bude výstižné vycházet z jeho struktury. V zásadě bychom mohli stavební prvky dělit podle pořadí toku dat a interakcí, Obr.6.2, nebo podle hierarchické struktury, Obr. 6.3. Toto druhé dělení odvozujeme od posloupnosti dědění vlastností a funkcí objektů, z kterých se program skládá, a spíše se týká vnitřní implementační roviny. První je více funkčním schématem.

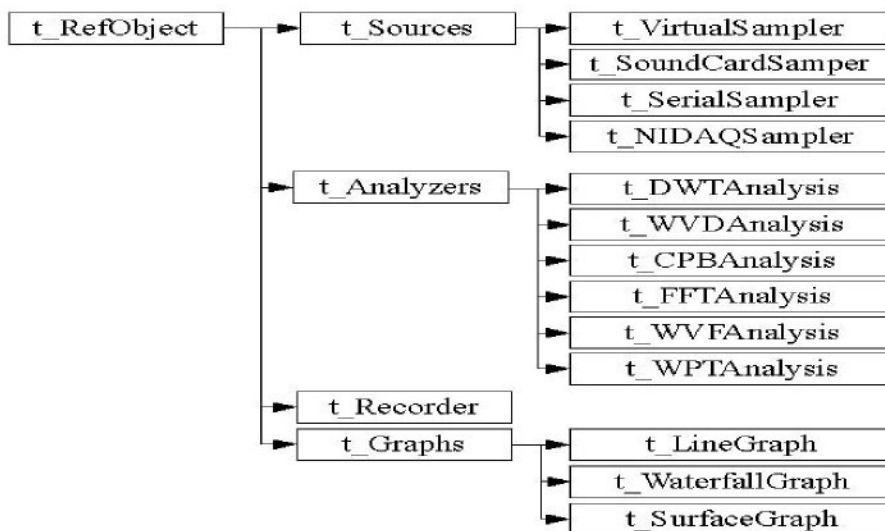
Vlastní kód programu je výlučně objektovým C++, které doplňují šablonové knihovny pro

analýzu signálů, a které jsou také formou výstupu této práce. Systémové rozhraní zajišťují nízkourovňové Win32 funkce. Kompatibilita programu nebyla zvlášť ověřována, jistě je ale spustitelný na nejrozšířenějších Windows XP a starších Win2k.



Obr. 6.2 Struktura spojové vrstvy programu JTFAToolbox

Jednotlivý blok na Obr. 6.2 seskupuje všechny procesy, jež budou vykonávány v rámci separátního vlákna. Program dynamicky vytváří nové výpočetní vlákno s každým zdrojem dat, neboli vzorkovačem, tak, aby se real-time procesy, které na ně navazují, vzájemně neovlivňovaly. Synchronizaci a řízení vláken obstarává hlavní vlákno aplikace s nízkou prioritou, které se navíc věnuje také periodickému vykreslování výstupu z grafů. Tato činnost je velmi náročná na výpočetní čas, ale tolerantní ke kolísání nebo zpomalení rychlosti vykreslování, pokud se nebude dostávat procesorový čas. Zásadní je, aby se v žádném případě nezahltil výpočet v pracovních vláknech, k čemuž by mohlo dojít kdybychom i grafické zobrazení napojili na ně. Důsledkem přetížení výpočetního vlákna je ztráta vzorků, což naprosto znehodnocuje probíhající analýzu. Vykreslování grafů je tedy sice prováděno real-time stejně jako analýza, probíhá však pouze ve „volném čase“. K přetížení může dojít i za použití současné architektury, Obr. 6.2, neboť na každý zdroj je možné zavěsit neomezený počet analýz. Systém bohužel zatím nedisponuje robustním mechanismem predikce výpočetní náročnosti a zůstatkového výkonu tak, aby tomuto mohl zabránit.



Obr. 6.3 Hierarchická struktura objektů v programu JTFA Toolbox

Platformou programu je klasická MDI, angl. „Multi document intarface“, aplikace s dynamicky generovanými okny. Jediným stabilním prvkem je okno „Organizer“. „Organizer“ využívá grafický spojový seznam, každá položka seznamu reprezentuje jednu komponentu z Obr. 6.3. Jedná se o centrální správcovské rozhraní, díky kterému máme neustále přehled o aktuální konfiguraci analýz. Návaznost prvků se řídí logickým tokem dat směrem od zdroje, přes analyzátor, až k uložení nebo grafickému výstupu, viz. příklad na Obr. 6.1. Nastavení a řízení se děje pomocí kontextového menu, které má přiřazený každý prvek. Typizované jsou možnosti odebrání prvku, zastavení, pauzy, spuštění, přidání návazného prvku a nastavení. Každý prvek lze libovolně za běhu zastavovat a pouštět. Menu nastavení je více, anebo méně unikátní pro každou komponentu.

6.2 Zdroje signálových dat

Z Obr. 6.3 je patrné že máme na výběr 4 varianty. Námi nejpoužívanějším byl virtuální vzorkovač „t_VirtualSampler“ simulující real-time proces přísunu dat pomocí 1ms multimediálního časovače systému Windows. Data se mohou zatím zadat pouze ve formátu monofonního „*.wav“ souboru. Soubory se dají za sebe řadit, na výběr máme možnost cyklického nebo jednorázového vzorkování, kdy se po vyčtení všech dat (předepsanou simulovanou vzorkovací rychlostí) vzorkovač vypne. Nejpoužívanější je proto, že nám dovoluje zpětně se vrátit k uloženým měření a celý proces zopakovat s alternativním nastavením. To bylo zásadní pro komparativní zkoumání výkonosti jednotlivých JTFA metod.

„t_SoundCardSampler“ je variantou vzorkovače, kterou může opět využít kdokoli, stačí k tomu počítač vybavený zvukovou kartou. Z dřívějších experimentálních prací jsme se mohli

přesvědčit, že kvalita integrovaných vstupů zvukových karet současných PC postačuje pro srovnávací akustická měření. Překvapivě jak statická převodní, tak frekvenční charakteristika testovaných kodeků neprokázala závažnější nelinearity. Pokud tedy nepotřebujeme kalibrované výsledky, pak můžeme pro rychlá a jednoduchá vibro akustická měření zvukovou kartu použít. JTFAToolbox při této volbě automaticky nedetekuje všechny disponibilní zvukové karty a všechny jejich vstupy. Na uživateli je vybrat, který ze vstupů zvolí, a jakou rychlostí a přesností bude vzorkování probíhat.

Více sofistikovanější variantou je externí vzorkovač připojený pomocí vysokorychlostního sériového rozhraní. Ideální je USB standard s ovladačem pro třídu CDC, který se v systému Windows bude tvářit jako klasický RS232 COM port. Výhodou tohoto řešení je rychlost, která je omezena pouze variantou USB protokolu a relativní jednoduchost programového API rozhraní. „t_SerialSampler“ na způsob předchozího vzorkovače ze zvukové karty pouze vybídne k zadání čísla COM portu. Nevýhodou je nestandardnost neboť externí sériový převodník není typizovaným produktem. Námí používaný byl zakázkově vyroben a byl k němu navržen i speciální proprietární komunikační protokol. V této konfiguraci byl JTFAToolbox po úpravách používán jako prototyp stanice pro automatickou inspekci akustické kvality.

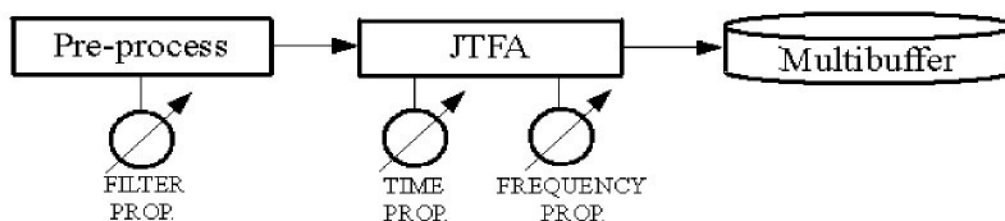
Nedostatek nutnosti atypického převodníku řeší použití průmyslové měřicí karty. My jsme experimentovali s produkty firmy National Instrument, z toho název komponenty „t_NIDAQSampler“. Tento záměr je ale stále ve vývojovém stádiu, neboť se nám nepodařilo do používaného vývojového prostředí importovat správně uživatelské knihovny, takže tento vstup využívá pouze omezený netransparentní režim (vzorkování se řídí pomocí pravidelných dotazů a neběží proto v asynchronním kontinuálním přímém režimu zápisu).

V původních záměrech bylo i propojení s profesionálním měřicím frontendem firmy Bruel&Kjaer, který je součástí analyzátoru PULSE. Napojení se omezuje pouze na využití OLE2 softwarového rozhraní. Studium dokumentace jsme se ale přesvědčili, že tento způsob se naprosto nehodí do zvolené architektury, navíc poskytovaná data jsou omezena pouze na vyčítání hodnot multibuferů virtuálních přístrojů, kde jsou data již předzpracovaná a nelze přistupovat nízkourovňově přímo ke snímaným vzorkům. Ani s touto variantou jsme se nedostali dále než k základním experimentům.

6.3 Analyzátory

Analyzátory jsou výpočetním jádrem programu. Vycházejí ze stejného předka „t_Analyzers“, který centrálně řeší předzpracování vstupního signálu a bufferování výsledků.

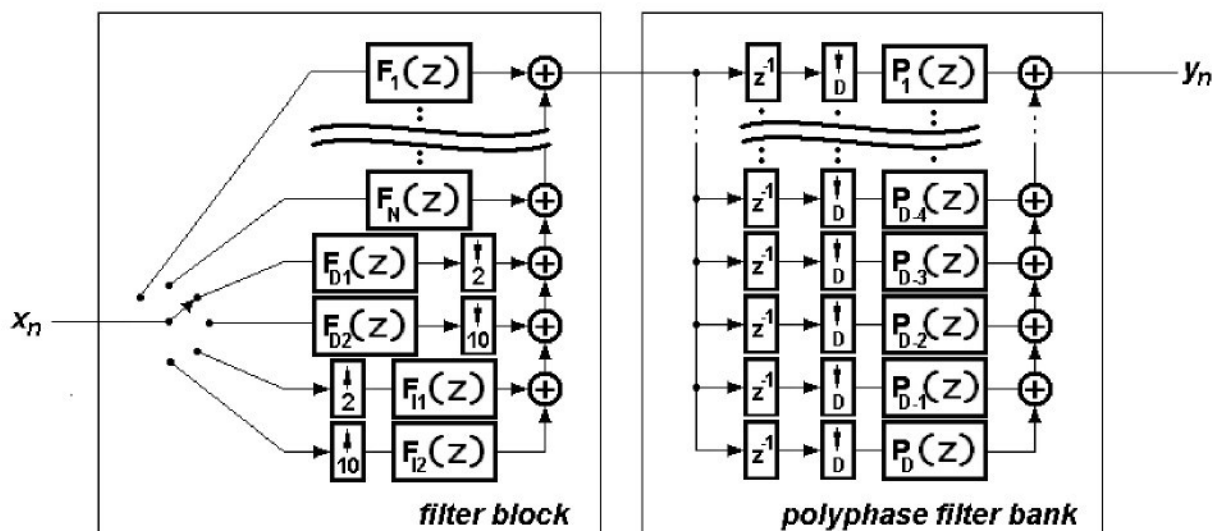
Nastavení analyzátorů je řešené pomocí jednotného formuláře, příklady na Obr. 6.1, a je rozděleno do tří záložek – „Pre-Process“, „Time-Freq.“ a „Multi-Buffer“. Každá záložka se vztahuje k oddělenému prvku analyzátoru, Obr. 6.4. Jednotlivě je popíšeme více v následujících podkapitolách.



Obr. 6.4 Blokové schéma prvků analyzátoru

6.3.1 Pre-proces blok

Prvním stupněm, do kterého signál vstupuje, je blok filtrací, Obr. 6.5. Je navržen velmi variabilně a obecně. K dispozici je série předdefinovaných kanonických dvoupólových IIR filtrů typu dolní a horní propust s různě nastavenou mezní frekvencí ($F_1, \dots, F_N$), plus čtveřice převzorkovacích filtrů ($F_{D1}, F_{D2}, F_{I1}, F_{I2}$). Takto filtrovaný signál vstupuje do bloku polyfázové uniformní banky filtrů, zkráceně PFB. Tady jsme se inspirovali u firmy Bruel&Kjaer a jejího profesionálního systému PULSE, kde se tomuto mechanismu říká angl. „time enhancement“.



Obr. 6.5 Principiální schéma prvků předzpracovacího stupně

Fungování PFB vyjadřuje druhý blok na Obr. 6.5 stejně dobře jako rovnice (6.1). Po Fourierově transformaci diskrétní rovnice bychom po několika úpravách došli k odvození (6.2). To je zase adekvátní k výsledku experimentu s PFB na Obr. 6.6, kde $D=4$ a $N=8$.

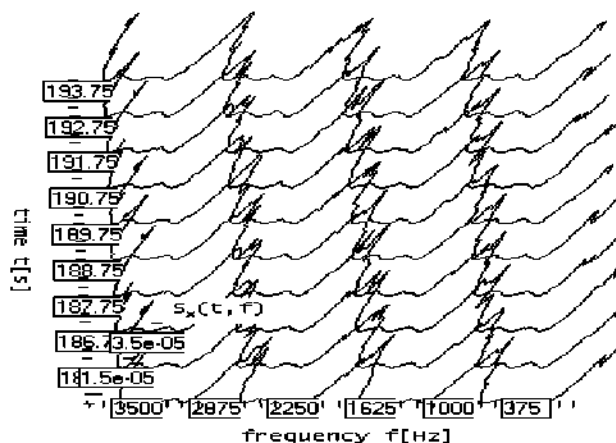
$$y[n] = \sum_{k=0}^{D-1} \sum_{i=0}^{N-1} p[i] x[n-iD-k] \quad (6.1)$$

$$\hat{y}(\omega) = \hat{x}(\omega) \sum_{k=0}^{D-1} \hat{p}(D\omega + \frac{2\pi k}{D}) \quad (6.2)$$

Naše implementace PFB pracuje s uniformní sítí průměrovacích FIR filtrů, platí že

$$P_k(z) = P_l(z) = 1/N \sum_{i=0}^{N-1} z^{-i}, \text{ kde } k, l \in \langle 0, D-1 \rangle.$$

Projev PFB ve spektru je přímější než jak bychom ho mohli pozorovat v časové rovině. Díky němu umíme vysvětlit i označení „time enhancement“ a typický způsob použití. Ze všech frekvencí, jak vidíme na Obr. 6.6, zůstávají jen násobné frekvence základní harmonické f_s/D , tvarované filtrem $P(z)$. Jak v čase tak v obraze diskrétní Fourierovy transformace, která by byla nastavena na stejný počet čar jako je stupňů PFB D , bychom významnou měrou omezili vliv šumu. V časovém záznamu by se toto projevilo vyhlazením neomezuujícím vysokofrekvenční komponenty, ve spektrech bychom redukovali bias. V nastavení se tedy držíme označení této možnosti podle terminologie firmy Bruel&Kjaer. V jejich softwaru je totiž počet stupňů PFB svázán s počtem čar navazující FFT, my jsme si ponechali možnost nastavovat obojí nezávisle.



Obr. 6.6 Filtrace čtyřúrovňovou PFB

Účinek doplňkových filtrací, decimací a interpolací ponecháváme bez komentáře a příkladu užití, neboť jde o dobře známé principy.

6.3.2 Výpočetní blok

Ke všem implementovaným formám JTFA analýz byly již detailní komentáře v průběhu celého textu podány. Nutné je pouze uvést způsob nakládání s nimi v rámci programu JTFAToolbox. Jde o to, že v rámci nastavení není možné ponechat všechny modifikace analýz dostupné, komplikovala by se tím přehlednost a obsluha programu. Z možných nastavení jsme ponechali vždy základní prvky vztahující se zejména k časově-frekvenčním atributům jednotlivých analýz.

První vytvořenou komponentou skupiny JTFA analyzátorů byl „t_FFTAnalysis“. Realizuje výpočet STFT, variabilním parametrem je počet čar zastupující frekvenční rozlišení, průměrování v rozsahu (*MIN*, 1/64, 1/32, ..., 1, ..., 64, *MAX*) sekund za časové rozlišení. Další modifikací je spojená volba typu okénka a procentuální míry překrytí včetně inovativního adaptivního Gaussova okna. Průměrování je možné přepínat mezi lineárním a exponenciálním. Tato filosofie odděleného nastavení frekvenčního rozlišení, časového rozlišení a modifikací byla následně zachována i pro ostatní typy analyzátorů. U obou extrémů průměrování *MIN* a *MAX* záleží na konkrétní analýze, v rámci STFT značí *MIN* vypnuté průměrování (rozlišení je pak dané jen oknem a překrytím), *MAX* má obvykle význam jen pro lineární průměrování a ruční řízení běhu analýzy.

„t_CPBAnalysis“, jako druhá klasická analýza, nesmí také chybět. K dispozici je ve třech modifikacích: jednooktávová (pro porovnání s analogickou diskretní wavelet transformací), třetino a dvanáctinooktávová. Současný stav nedovoluje volit z vícero specifikací filtrů, jednotně jsou použity IIR eliptické struktury pro horní pásmovou filtraci, FIR stejnoměrná aproximace pro decimální filtraci. Všechny charakteristiky filtrů analyzátoru sledují specifikaci podle normy ANSI S1.1. Průměrovací rozsah je ponechán jako u STFT, frekvenční rozlišení je definováno počtem oktáv. „t_CPBAnalysis“ má zabudovanou kompenzaci na skupinové zpoždění, obdobně tomu, jak jsme ji definovali u real-time DWT.

Nejenom pro účely přímého ukládání a pozorování časových průběhů signálu jsou analyzátory doplněny komponentou „t_WVFAAnalysis“, zkratka WVF vyjadřuje angl. „waveform“. Pro tento případ frekvenční volba vyjadřuje počet bodů v imaginárním obdélníkovém okně, jako by tomu bylo u nepřekrývajících se STFT. Průměrování se chová obdobně, je tak možné sledovat přímo časovou stacionaritu, resp. vývoj průměrných hodnoty, napříč výběry.

Ze speciálních metod byla lehkou modifikací CPB nejdříve implementována „t_DWTAnalysis“, tedy oktávová diskretní wavelet transformace. S oktávovou CPB sdílí většinu algoritmů, největší rozdíl je v typech filtrů. Zde jsou to jednoznačně filtry FIR přímé struktury. Modifikace dovolují volit mezi oblíbenými třídami Daubechies a Symlet. Průměrování

je ponecháno z důvodu kompatibility. Prakticky průměrování užijeme pro redukci rozlišení, pokud to charakter signálu dovoluje.

Druhá základní varianta jednorozměrné wavelet transformace je také zastoupena. „t_WPTAnalysis“ užívá stromovou strukturu paketové wavelet dekompozice. Nastavení se neliší od předchozího typu.

Výpočetně nejnáročnějším nástrojem JTFA je „t_WVDAnalysis“ skrývající analýzu postavenou na bázi Wigner-Ville distribuce. U jediné této varianty je definice časového rozlišení nahrazena jinou stupnicí, spektra se neprůměrují vůbec. V počtu vzorků místo průměrovací doby volíme překrytí jednotlivých segmentů PWVD, (1,2,4,..128). Frekvenční nastavení je opět definované přímo počtem čar, modifikace typem okna.

6.3.3 Multibuffer

Výstupní buffer slouží k dočasnému uložení výsledků ve formě spektrogramů a je také hlavním rozhraním analyzátoru. Napojují se na něj výstupní zobrazovací a zálohovací výstupní komponenty.

Uspořádání je analogické k osám spektrogramu, velikost je omezena uživatelsky: vertikálně frekvenčním rozlišením a položkou „History Size“, horizontálně na záložce nastavení multibufferu. Buffer se chová kruhově, novějším spektrem přepisuje nejstarší. Perioda ukládání se optimálně implicitně rovná nastavenému časovému rozlišení, ale je možné v *ms* zadat libovolnou pevnou hodnotu.

6.4 Výstupy

Jako velmi komplikovanou komponentou se ukázala být vizualizace. Podmínky, které si real-time pojetí klade, se odrážejí v celém řetězci toku dat, jinak by celá snaha neměla příliš význam. Týká se to i zobrazení výsledků, tj. rychlosti vykreslování.

Je pravdou že navržené metody poskytují spektrogramy s časovým krokem, který limitně může dosahovat i vzorkovací periody. Takové rozlišení není schopen uživatel sledující online analýzu zrakem zachytit a tedy ani nijak okamžitě využít. Popisované měření ale typizuje spíše extrémní případ. Dynamiku analýzy (a tedy i výstupu) přizpůsobujeme potřebnému časovému rozlišení odvozenému mírou nestacionarity signálu – pro velký obor problematik se tak dostáváme do časových měřítek, které při přímém výpočtu spektra a jeho vykreslení na obrazovku uživatelsky postřehnutelné jsou. Pokusili jsme se vytvořit takovou grafickou presentaci výstupů, která by uvedeným potřebám vyhověla a byla navíc dostatečně přehledná.

Na grafickou stánku presentace to klade nároky hned v několika směrech. Graf musí být

dynamický, je zásadní, aby vlastní překreslení trvalo minimální dobu. Musí být pokud možno inteligentní. Tím máme na mysli, že se aktuálním limitním hodnotám musí automaticky přizpůsobovat měřítka. Na to je navázána inteligence stupnice a dělení os. Stupnice se má umět optimálně zaokrouhlovat, dělení musí být smysluplné vzhledem k vykreslované délce osy. Zastoupeny by měly být nejpoužívanější formy zobrazení spektrogramů – waterfall, spojnicový, síťový, barevná mapa, plocha, vrstevnicový. atd. Samozřejmostí je podpora logaritmické a decibelové stupnice. Ve výčtu požadavků bychom mohli dlouho pokračovat.

Výsledkem hledání grafického programového prostředku, který by přímo disponoval alespoň podporou dynamických 3D grafů, nevedlo v době vzniku programu nikam. Obecné prostředky real-time prostorové grafiky, jako je OpenGL nebo DirectShow, jsou zase podle studia základních materiálů a úvodních experimentů příliš vázané na podporu 3D modelování scén a objektů podobných těm, co známe z počítačových her. Jako nutné a nejpřímější se nakonec ukázalo realizovat nástroje podpory 3D real-time grafů vlastní cestou. Naše knihovna staví pouze na využití nízkourovňového Win32 grafického rozhraní, vyšší funkce - jako jsou promítání, 3D transformace, výpočet viditelnosti a podobně - už si řešíme sami.

Dopředu je nutné říci, že ne vše se z časových důvodů podařilo dotáhnout do původně zamýšlených detailů. Výsledky byly průběžně presentovány v průběhu celého tohoto textu. Základem jsou prostorové grafy umožňující real-time natočení scény i v průběhu spuštěné analýzy. Každý graf se v takovém režimu překresluje v závislosti na rychlosti aktualizace multibufferu a vytiženosti procesoru. V současné době umožňuje nastavení měnit mezi těmito formami grafu: waterfall, spojnicový-x, spojnicový-y, síťový, plocha. Barevnou mapu získáme průmětem plošného typu do roviny xy . Omezená je funkčnost logaritmických měřítek. I tak je ale forma grafického výstupu na velmi dobré úrovni a takto realizované 3D dynamické grafy jsou jedním z příspěvků k inovativním prvkům této práce.

Pro vlastní archivaci výsledků je samozřejmě grafická forma naprosto nevhodná. O uložení se postará výstupní komponenta „t_Recorder“. Výstupem je systém souborů automaticky číslovaných, název vychází ze zadaného základního tvaru jména souboru a cesty. Velikost výstupního souboru je omezena pouze volným místem na disku. S každým zastavením/spuštěním se automaticky vytvoří soubor nový. Soubor je buď textový, nebo datový. Textový je přímo importovatelný do prostředí Matlab.

7 Závěr

7.1 Shrnutí

Ne všechny navržené varianty JTFA metod se daly zahrnout do sjednocující aplikace nazývané JTFAToolbox. Z jmenovaných jsou vynechány analýzy vyšších řádů, Cohenovy třídy, Wigner-Ville série. U některých jsme narazily na nekompatibilitu s výpočetní architekturou programu optimalizovanou pro kontinuální zpracování dat, u jiných prostě jen na výpočetní náročnost.

Průměrná doba připadající na zpracování jednoho vzorku nesmí být rozhodně vyšší než je vzorkovací perioda. Tato podmínka je principiální záležitostí všech real-time implementací. S ohledem na současný výpočetní potenciál běžných procesorů je to real-time PWVD, která je pomyslným stropem zvládnutelného objemu a složitosti výpočtů. Na opačném konci stojí oktávová DWT a CPB analýzy, používající velmi úsporného Mallatova algoritmu, na který při analýze vibro-akustických měření a libovolném rozlišení na limity maximálního vytížení procesoru nenarazíme. U ostatních JTFA metod má různé nastavení rozlišení přímý vliv na zatížení procesoru. Bohužel je velmi obtížné dopředu predikovat, jestli aktuální volná výpočetní kapacita bude tomu kterému nastavení stačit, neboť systém Windows není specializovaným real-time operačním systémem. Všechny jeho varianty přidělují procesorový čas úlohám periodicky, program sám může jen omezeně tento přepínací mechanismus ovlivnit. Teoretický výpočet počtu operací k jednotlivým metodám by tudíž nebyl v naší implementaci ničím nápomocný. Riziko ztráty vzorků doposud řešíme poměrně objemnou vyrovnávací pamětí, kterou je vybaven každý modul zdrojů. Toto řešení je doporučenou cestou kompenzace výkyvů zatížení procesoru, nutno říci, že se nám v programu JTFAToolbox také osvědčila.

U každé formy presentovaných metod jsou na závěr kapitoly nebo i v průběhu popisu srovnány její atributy s vhodnou alternativní metodou. Jenom na několika místech se dostáváme k tomu kriticky posoudit vícero metod naráz. Odsuneme teď hodnocení vlastností jednotlivých metod do pozadí. Platí, co už jsme jinde přednesli, že každá je charakteristická něčím jiným, což indukuje i jinou třídu problémů jež optimálně řeší. Schází sumarizovat použitelnost vytipovaných JTFA z pohledu dvou typizovaných okruhů signálu - z impulsních a rozjezdových jevů.

Příklady rozjezdových charakteristik je ukázáno několik. Společný projev této skupiny signálů se podobá frekvenční modulaci, kterou je také simulujeme. STFT je na tomto poli velmi úspěšná, nicméně se setkáváme s rozjezdovými projevy kde brzy narážíme na její rozmazání resp. fixní časové rozlišení. Cíleně proto byla vyprojektována metodika adaptivního Gaussova okénka, kterou můžeme doporučit jako nejdostupnějšího kandidáta náhrady STFT. Jako více

novátorský přístup pak byla odvozena zobecněná teorie sérií Wigner-Ville distribucí. Ve variantě frekvenčních řezů je odpovědí na velmi rychlé přeladované signály. Pro vyhodnocení IPWVD spektrogramů je nutná ale jistá erudice uživatele, neboť i přes předzpracovatelský časově-frekvenční systém zůstávají ve výsledcích produkty křížových interferencí znesnadňující jejich čtení. Pokud nárokům na míru interferencí předřadíme požadavek real-time analýzy, pak je k dispozici jednodušší varianta PWVD obsažená spolu s adaptivní Gaussovo STFT v systému JTFAToolbox.

Variace WVD byly testovány i na účinnost dekompozice impulsních jevů. Pokud jako referenční použijeme opět STFT, pak je i jednoduchá PWVD minimálně stejně dobrou metodou. Protože byl ale záběr rozšířen i na metody založené na digitální filtraci, ukázalo se, že nárokům impulsních hluků mnohem lépe vyhovují varianty diskretních wavelet transformací a s nimi související CPB, Sellerbeck, Stanley, Young [31], Genuit [27], Tang [39]. Výhodou je velké časové rozlišení logicky stupňované úměrně s efektivní frekvenční šířkou pásma. Nejvíce vyniká oktávová DWT a oktávová nebo třetinooktávová CPB. Snadné vyhodnocení skalogramů je dáno minimálním počtem výstupních koeficientů analýz zpřehledňujících čtení nebo případnou automatickou kvalifikaci. Pro srovnávací analýzu spektrogramů a skalogramů je doporučeno kombinovat DWT s WVD distribucí tak, jak to bylo odvozeno v Kap. 5.4.2. DWT a CPB jsou k dispozici i v JTFAToolboxu, ikdyž real-time provedení těchto analýz není pro tak krátké děje úplnou nutností.

JTFAToolbox je ve finále jakýmsi kompendiem real-time časově-frekvenčních analýz. Jednotlivé nástroje byly do programu přidávány simultánně s programováním funkcí JTFA analýzy pro Matlab, kde byly odladěny detaily algoritmů. Vlastní rozšíření palety nástrojů programu je snadnou operací díky použití objektového programování a aplikovanému principu dědění. Vyvážilo se tak větší pracovní úsilí na začátku, kdy jsme vymýšleli a realizovali celou základní architekturu. Opravdu největší objem práce ale bylo nutné investovat do programování univerzálního grafického rozhraní, o kterém mluvíme v Kap.6.4. I přes to je vizualizační stránka prvkem, který lze v mnoha ohledech dále vylepšovat.

7.2 Dosažení cílů

V rámci této práce byly zmapovány vybrané časově-frekvenční přístupy analýzy signálů. Jak bylo naším cílem, zaměřili jsme se na modifikace známých a výzkum zcela nových metod specializovaných na impulsní hluky a problematiku rozjezdových vibro-akustických měření. V předchozí stati jsou shrnuty závěry, z kterých vychází nejvýhodnější varianty diskutovaných JTFA. Z tohoto pohledu byly bezesporu nalezeny optimální řešení.

Ne všechny vytipované analýzy jsou zcela nové, naše realizace diskrétní wavelet transformace a Pseudo Wigner-Ville distribuce jsou inspirovány již existujícími pracemi, Boashash, Black [20], které tyto metody algoritmicky rozpracovávají i do real-time provedení. S odkazem na provedenou řešeršní práci můžeme tvrdit, že jako inovativní a autorské lze předkládat varianty JTFA Wigner-Ville sérii a zejména adaptivní Gaussova STFT, pracující bez tachy signálů.

V žádné referenční práci nebyly také publikovány postupy kompenzace skupinového zpoždění u analýz založených na multirezolučních digitálních filtrech. Pro nižší stupně se chyba způsobená různým zpožděním neprojevuje příliš silně, ale u vyšších řádů, nebo s malým počtem vzorků je její kompenzace naprosto zásadní. Pro offline analýzu je možné použít nekauzálních filtrů, v online implementaci jsme problém řešili doplňkovým systémem zpožďovacích linek.

Ústředním prakticky aplikovaným výstupem této práce je již několikrát zmiňovaný JTFAToolbox. Jeho největší výhodou je modulárnost dovolující neomezené doplňování o další komponenty. Modulárnost je potenciál robustní základní architektury, díky které bylo možno na této kostře vystavět kompletní měřicí systém od vzorkování až po vizualizaci a uložení. Univerzálnost systému potvrzují i praktické zkušenosti s jeho nasazením jako prototypem automatického testeru akustických vlastností realizovaný ve spolupráci s firmou JabloCom.s.r.o. Doplňkově lze za výstup práce také považovat C++ knihovnu funkcí a objektů zahrnující kompletní použitý matematický aparát JTFA a obdobný soubor funkcí v Matlabovém skriptu.

Soubor existujících JTFA metod není v této práci jmenován kompletně. Stranou zůstaly rozličné varianty Cohenových tříd, obecných Wavelet framů, adaptivních forem WVD a DWT, parametrické přístupy odhadu spekter, atd. Tyto a další nutně nebylo možno důkladně zmapovat, neboť jsme logicky postupovali od klasických JTFA. Zvolené kandidáty optimálních metod je ještě možné dále rozpracovat, stav v jakém jsou popisovány není nutně konečný. Pravdou zůstává, že tyto vyšší formy jsou pro zahrnutí do JTFAToolboxu již z mnoha důvodů nevhodné.

V teoretické části je možné více rozpracovat zmíněné potlačení šumu, jež může být součástí výpočetního procesu postaveného na diskrétní wavelet transformaci nebo adaptivních filtracích. Tato nadstavba nebyla v práci kompletně a uspokojivě dokončena. Pokračování vývoje nabízí také adaptivní Gaussova STFT, kde byl navržen doplněk ve formě regulačního prvku adaptivního procesu, který by přizpůsoboval rychlost změny okna vlastní dynamice otáček rozběhů.

Velkou kapitolou je také finalizace celého systému JTFAToolbox. V současné podobě mu nejvíce schází dotáhnout vizuální podobu grafických výstupů o vrstevnicový graf a odladění logaritmických měřitek, stabilní podporu měřicích karet a zavedení kalibrace. Úplně obecně není

vyřešena stabilita systému při současném běhu několika analyzátorů v kombinaci se změnou nastavení. Ve výsledku by měl systém také podporovat inteligentní nabídku kurzorů a možnost uživatelsky definovat barevný rozsah palety. Pro možnost komfortního vyhodnocování spektrogramů by uživatelé také ocenili sjednocení vícero analýz do jediného grafu. Podobných nápadů na budoucí vylepšení systému je ovšem nespočetně.

Seznam použité literatury

- [1] Davídek, V.; Laipert, M.; Vlček, M., Analogové a číslicové filtry, Nakladatelství ČVUT, 80-01-03026-1, 2006, Praha
- [2] Strang, G.; Nguyen, T., Wavelets and Filter Banks, , Wellesley-Cambridge Press, 1996, Boston, USA
- [3] Qian, S.; Chen, D., Joint time-frequency analysis: methods and applications, Prentice Hall PTR, 0-13-254384-2, 1996, New Jersey, USA
- [4] Randall, R.B., Frequency analysis, Brüel & Kjær, 87 87355 14 0, 1977, Nærum, Dánsko
- [5] Mallat, S., A wavelet tour of signal processing, , Academic press, 0-12-466606-X, 1999, Elsevier, USA
- [6] Kadlec, F., Zpracování akustických signálů, Vydavatelství ČVUT, 80-01-02588-8, 2002, Praha
- [7] Shi, D.F.; Tsung, F.; Unsworth, P.J., Adaptive time–frequency decomposition for transient vibration monitoring of rotating machinery, Mechanical Systems and Signal Processing, Academic Press Limited, 2004,
- [8] Fiácrio, D., de Arruda Santiago; Pederiva, R., Application of Wavelet transform to detect faults in rotating machinery, ABCM Symposium Series in Mechatronics, ABCM, 2004,
- [9] Daubechies, I.; Planchon, F., Adaptive Gabor transforms, , Academic press, 2002,
- [10] Čížek, V., Diskrétní Fourierova transformace, SNTL, 1981, Praha
- [11] Smith, S.W., Digital signal processing, , California technical publishing, 1999, Saint Diego, USA
- [12] Uhlíř, J.; Sovka, P., Číslicové zpracování signálů, ČVUT, 2002, Praha
- [13] Tůma, J., Zpracování signálů z mechanických systémů užitím FFT, Sdělovací technika, 1997, Praha
- [14] Press, W.H.; Teukolsky, S.A.; Vetterling, W.T.; Flannery, B.F., Numerical recipients in C: The Art of Scientific Computing, Cambridge university press, 0-521-43108-5, 2002
- [15] Cohen, L., Time frequency analysis, , Prentice Hall PTR, , 1994,
- [16] Pelant, P.; Tůma, J.; Beneš, T., Vold-Kalman order tracking filtration in car noise and vibration measurement, International congress and exposition on noise control engineering, Inter Noise, 2004, Praha
- [17] Baraniuk, R.G., Nonlinear Wigner-Ville spectrum estimation using wavelet soft-thresholding, Rice University, 1995, Houston, USA
- [18] Huerta-Lopez, C.I.; Shin, Y.; Powers, E.J.; Roesset, J.M., Time-frequency analysis of earthquake records, 1995
- [19] Bradford, S.C.; Yang, J.; Heaton, T., Variations in the dynamic properties of structures: The wigner-ville distribution, 2005
- [20] Boashash, B.; Black, P.J., An Efficient Real-Time Implementation of the Wigner-Ville Distribution, ASSP, IEEE, 1987,
- [21] Peyrin, F.; Prost R., A Unified Definition for the Discrete-Time, Discrete-Frequency, and Discrete-Time/Frequency Wigner Distributions, ASSP, IEEE, 1986
- [22] Cristán, A.C.; Walden, A.T., Wavelet Packet Thresholding and Spectrum Estimation, Joint statistical meetings, 2001, Atlanta, USA
- [23] Wang, W.J., Application of Wavelets to Gearbox Vibration Signals for Fault Detection, Journal of Sound and Vibration, Academic Press Limited, 1996
- [24] Boashash, B.; O'Shea, P., Use of the Cross Wigner-Ville Distribution for Estimation of

Instantaneous Frequency, Transactions on Signal Processing, IEEE, 1993

[25] Cohen, L., Time-Frequency Distributions - A Review, Proceedings of the IEEE, IEEE, 1989

[26] Hammond, J.K.; White, P.R., The analysis of non-stationary signals using time-frequency methods, Journal of Sound and Vibration, Academic Press, 1996

[27] Genuit, K., Noise when closing doors of vehicles, Integrated Vehicle Acoustics and Comfort, 2001, Graz, Rakousko

[28] Zou, J.; Chen, J., A comparative study on time-frequency feature of cracked rotor by Wigner-Ville distribution and wavelet transform, Journal of Sound and Vibration, Academic Press, 2003

[29] Brogioli, D.; Vailati, A., Real-time wavelet-transform spectrum analyzer, Università di Milano, 2002, Milano, Itálie

[30] Jones, D.L., Quadrature Mirror Filterbanks (QMF), 2005

[31] Sellerbeck, P.; Stanley, R.; Young, S., Binaural Transfer Path Analysis and Simulation for Door Opening/Closure Sound Improvement, Inter noise 2004, 2004, Praha

[32] Zheng, Y.; Tay, D.B.H.; Li, L., Signal extraction and power spectrum estimation using wavelet transform scale space filtering and Bayes shrinkage, Signal Processing, Elsevier, 2000, Singapore, Čína

[33] O'Toole, J.M.; Mesbah, M.; Boashash, B., A new discrete-time analytic signal for reducing aliasing in discrete time-frequency distributions, University of Queensland, 2006, Queensland, Austrálie

[34] Daubechies, I.; Han, B.; Ron, A.; Shen, Z., Framelets: MRA-based constructions of wavelet frames, Applied and Computational Harmonic Analysis, Academic Press, 2003

[35] Park, Y.K.; Kim, Y.H., A method to minimise the cross-talk of the wigner-ville distribution, Mechanical Systems and Signal Processing, Academic Press Limited, 1997, Taejon-shi, Korea

[36] Mallat, S.G., A Theory for Multiresolution Signal Decomposition: The Wavelet Representation, Pattern analysis and machine intelligence, IEEE, 1989

[37] Hlawatsch, F.; Boudreaux-Bartels, G.F., Linear and Quadratic Time-Frequency Signal Representations, SP Magazine, IEEE, 1992

[38] Smutný, J., Measurement and analysis of dynamic and acoustic parameters of rail fastening, NDT&E International, Elsevier, 2004

[39] Tang, S.K., On the Time-Frequency Analysis of Signals that Decay Exponentially with Time, Journal of Sound and Vibration, Academic Press, 2000

[40] Marques de Sá, J.P., A Note on The Kaiser Window, FEUP/DEEC, 2003

[41] Saliu, S., Definition of Instantaneous Frequency on real Signals, Chalmers Lindholmen University College, 1998

[42] Narasimhan, S.V.; Pavanalatha, S., Estimation of Evolutionary spectrum based on STFT and modified group Delay, Elsevier, 2000

[43] Narasimhan, S.V.; Nayak, M.B., Improved Wigner-Ville distribution performance by signal decomposition and modified group delay, Signal Processing, Elsevier, 2003

[44] Swami, A.; Mendel, J.M.; Nikias, Ch L., Higher-Order Spectral analysis Toolbox, The MathWorks, Inc., 1998, Natick, MA

[45] Johansson, M., The Hilbert transform, Växjö University, Växjö, Švédsko

[46] Brown, R., Lecture notes: harmonic analysis, University of Kentucky, 2001, Lexington, KY, USA

[47] Matz, G.; Hlawatsch, F.; Kozek, W., Generalized Evolutionary Spectral Analysis and the Weyl Spectrum of Nonstationary Random Processes, Signal Processing, IEEE, 1997

[48] Edwards, T., Discrete Wavelet Transforms: Theory and Implementation, Stanford

University, 1992, Stanford, USA

[49] Çankaya, E., Use of the ambiguity function technique for target detection in phase coded continuous wave radars, Middle East Technical University, 2005, Ankara, Turecko

[50] Autorský kolektiv, Měření zvuku, Brüel & Kjær, 1984, Nærum, Dánsko

[51] Autorský kolektiv, Měření chvění, Brüel & Kjær, 1984, Nærum, Dánsko

[52] Rektorys, K. a spol., Přehled užití matematiky, SNTL - Nakladatelství technické literatury, 1973, Praha

Seznam publikací

- Mareš, J.; Jaksch, I.: CPB analyzer design using signal processor. In: 6th International Workshop on Electronics, Control, Measurement and Signals „ECMS 2003“, Technická Universita Liberec, 2003
- Mareš, J.: Srovnání výpočtu wavelet a CPB analýzy, In: Technická diagnostika strojů a výrobních zařízení "DIAGO 2004". Technická Univerzita Ostrava, 2004, ISBN 80-248-0465-4
- Mareš, J.; Pavelka, M.: Stanovení akustické kvality metodou RASTI, In: Technická diagnostika strojů a výrobních zařízení "DIAGO 2004". Technická Univerzita Ostrava, 2004, ISBN 80-248-0465-4
- Mareš, J.: Přednáška The Light Discharge Modeling, In: Work Group meeting of the cost Action 529, "Efficient Lighting for the 21st Century", Technical University of Liberec, 2004
- Richter, A.; Mareš J.; Koprnický J.: Conductance model of discharge lamps, parameter verification and identification for modelling of electric circuits in light-nets, „Light Sources“, Toulouse, 2004, ISBN 0-7503-1007-3