Technická univerzita v Liberci

FAKULTA PEDAGOGICKÁ

Katedra: Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Studijní program: 3. stupeň

Kombinace: matematika

DIFERENCIÁLNÍ POČET VE ŠKOLSKÉ MATEMATICE

DIFFERENTIAL CALCULUS IN SCHOOL MATHEMATICS

DIE DIFFERENZRECHNUNG IN DER SCHULMATHEMATIK

08-FP-KMD-004

Diplomová práce:

Autor:

Pavel KOLÁR

Podpis: Pavel Kolár

Adresa:

Štefanikova 461

40747, Varnsdorf

Vedoucí práce: RNDr. Alena Kopáčková, Ph.D.

Konzultant: RNDr. Alena Kopáčková, Ph.D.

Počet

stran	slov	obrázků	tabulek	pramenů	příloh
96	20 308	17	1	24	1

V Liberci dne: 13.05.2008

TU v Liberci, FAKULTA PEDAGOGICKÁ
461 17 LIBEREC 1, Hálkova 6 Tel.: 485 352 515 Fax: 485 352 332

Katedra: matematiky a didaktiky matematiky

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

(pro magisterský studijní program)

pro (diplomant) Pavel Kolár

adresa: Štefánikova 461/1, 40747 Varnsdorf

obor (kombinace): MA (pro 3. st.) - FY

Název DP: **DIFERENCIÁLNÍ POČET VE ŠKOLSKÉ MATEMATICE – SROVNÁVACÍ STUDIE**

Název DP v angličtině: **DIFFERENTIAL CALCULUS IN SCHOOL MATHEMATICS – COMPARATIVE STUDY**

Vedoucí práce: RNDr. Alena Kopáčková, Ph.D.

Konzultant:

Termín odevzdání: květen 2008

Pozn.: Podmínky pro zadání práce jsou k nahlédnutí na katedrách. Katedry rovněž formulují podrobnosti zadání. Zásady pro zpracování DP jsou k dispozici ve dvou verzích (stručné.resp. metodické pokyny) na katedrách a na Děkanátě Fakulty pedagogické TU v Liberci.

V Liberci dne 20.5.2007

....

děkan **vedoucí katedry**

Převzal (diplomant): ....

Datum: ....

Podpis: ....

KMD

Téma práce: DIFERENCIÁLNÍ POČET VE ŠKOLSKÉ MATEMATICE – srovnávací studie (3. st.) (Differential calculus in school mathematics – comparative study)

Vedoucí práce: RNDr. Alena Kopáčková, Ph.D.

Cíl práce: Posluchač prostuduje první známou českou učebnici diferenciálního počtu pro střední školu, Šimerkův text s názvem „Dodatek k algebře" vydaný r. 1864. Učební text bude stručně charakterizován a podle vhodných kritérií porovnán se soudobými středoškolskými učebnicemi diferenciálního počtu (alespoň dvě učebnice určené pro různé cílové skupiny). Je třeba se zaměřit na výklad základních pojmů diferenciálního počtu, jako jsou např. funkce, spojitost, limita, derivace, diferenciál. Očekává se, že autor v duchu metody ontogenetické a fylogenetické paralely pojmotvorných procesů využije i zdrojů z historie matematiky a připomene stručně i Newtonovu a Leibnizovu roli při zrodu diferenciálního počtu. Součástí diplomové práce bude komentovaný soubor příkladů a situací vybraných z historické učebnice, které by bylo možné využít i při výuce v dnešní střední škole. Předpokládá se i praktické ověření některých úloh na vybrané střední škole.

Požadavky: Dobrá orientace v matematické analýze v rozsahu vysokoškolského kurzu na FP (reálná funkce jedné reálné proměnné), hlubší vhled do základních pojmů jako limita, spojitost, derivace. Schopnost tvůrčí práce.

Literatura:

Učební texty k úvodnímu kurzu matematické analýzy na VŠ.
Hejný, M. a kol.: Teória vyučovania matematiky 2. SPN, Bratislava 1990.
Učebnice matematiky pro gymnázia a další střední školy.
Šimerka, V.: Dodatek k algebře. 1864.

Prohlášení:

Byl(a) jsem seznámen(a) s tím, že na mou diplomovou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. o právu autorském, zejména § 60 – školní dílo.

Beru na vědomí, že Technická univerzita v Liberci (TUL) nezasahuje do mých autorských práv užitím mé diplomové práce pro vnitřní potřebu TUL.

Užiji-li diplomovou práci nebo poskytnu-li licenci k jejímu využití, jsem si vědom povinnosti informovat o této skutečnosti TUL; v tomto případě má TUL právo ode mne požadovat úhradu nákladů, které vynaložila na vytvoření díla, až do jejich skutečné výše.

Diplomovou práci jsem vypracoval(a) samostatně s použitím uvedené literatury a na základě konzultací s vedoucím diplomové práce a konzultantem.

V Liberci dne: 13.05.2008 Mgr. Pavel Kolár

Poděkování:

Děkuji všem, kteří měli se mnou v posledním roce při psaní této práce dostatek trpělivosti, rodině a kolegům v zaměstnání. Předně pak paní RNDr. Aleně Kopáčkové, Ph.D. za mnoho námětů a vlastních postřehů k tématu diplomové práce, za vstřícnost a toleranci při vzájemné spolupráci. Dále pak děkuji Doc. RNDr. Ing. Karlu Mačákovi, CSc. za poskytnutí námětu na diplomovou práci a rovněž za zapůjčení literatury a fotokopií a konečně Doc. RNDr. Martině Bečvářové, Ph.D. za doporučení vhodné literatury.

DIFERENCIÁLNÍ POČET VE ŠKOLSKÉ MATEMATICE

Mgr. Pavel Kolár DP–2008 Vedoucí DP: **RNDr. Alena Kopáčková, Ph.D.**

Resumé:

Tato diplomová práce se zabývá nejstarší českou středoškolskou učebnicí diferenciálního počtu vytvořenou v roce 1861 Václavem Šimerkou nejprve jako součást učebnice „*Algebra, čili počtářství obecné*" a o dva roky později vydanou samostatně pod názvem „*Přídavek k Algebře pro vyšší gymnázia*". Práce se skládá z šesti částí. V úvodních dvou částech se zabýváme historií diferenciálního počtu na pozadí výuky matematiky převážně v Českých zemích. Hlavní část komentuje a rozebírá uvedenou učebnici. Ve třetí části nabízíme vhodné příklady k aplikaci na střední škole. V předposlední kapitole srovnáváme text „Přídavku" se současnými učebnicemi a na závěr celý „Přídavek" hodnotíme.

DIFFERENTIAL CALCULUS IN SCHOOL MATHEMATICS

Summary

This diploma work engages in the oldest Czech secondary school textbook of the differential number made in 1861 by Václav Šimerka at first as a part of the textbook, Algebra or the universal counting‘, and two years later published independently under the title ‚Addition to the algebra for the higher grammar schools.‘ The work consists of six parts. In the introductory two parts we are engaged in the history of the differential number at the background of teaching of mathematics above all in the Bohemian regions. The main part comments and analyses the introduced textbook.In the third part we offer suitable exemples to the application at the secondary school. In the last but one chapter we compare the text of the ‚Addition‘ with the actual textbooks and to the close we evaluate the whole ‚Addition‘.

DIE DIFFERENZRECHNUNG IN DER SCHULMATHEMATIK

Zusammenfassung

Diese Diplomarbeit befasst sich mit dem ältesten tschechischen Mittelschullehrbuch für Differenzialrechnung geschaffen im Jahre 1861 durch Václav Šimerka zuerst als ein Einzelteil des Lehrbuches „Algebra oder Gemeinrechnen“ und zwei Jahre später herausgegeben selbstständig unter der Bezeichnung „ Eine Zugabe zur Algebra für höhere Gymnasien“. Die Arbeit besteht aus sechs Teilen. In zwei Eingangsteilen befassen wir uns mit der Geschichte der Differentialrechnung auf dem Hintergrund des Mathematikunterrichts vornähmlich in den Böhmischen Ländern.

Der Hauptteil kommentiert und analysiert das angegebene Lehrbuch.Im dritten Teil bieten wir passende Beispiele zur Anwendung an der Mittelschule an. In dem vorletzten Kapitel vergleichen wir den Text der „Zugabe“ mit den gegenwärtigen Lehrbüchern und zum Schluss wird die ganze „Zugabe“ bewertet.

OBSAH:

1. Z HISTORIE MATEMATIKY V ČESKÝCH ZEMÍCH 8
   1.1. Středověk 8
   1.2. Doba pobělohorská 10
   1.3. Národní obrození 10
   1.4. Období druhé poloviny 19. století až do vzniku ČSR 12
   1.5. Období po vzniku ČSR 13
   1.6. Období po 2. světové válce do současnosti 14
2. Z HISTORIE INFINITESIMÁLNÍHO POČTU 15
   2.1. Newtonova metoda 17
   2.2. Leibnizova metoda 18
3. VÁCLAV ŠIMERKA 19
   3.1. ŽIVOT A DÍLO VÁCLAVA ŠIMERKY 19
   3.2. PŘÍDAVEK K ALGEBŘE PRO VYŠŠÍ GYMNASIA 22
      3.2.1. Differencialy daných úkonů 24
      3.2.2. Proměňování úkonů v řady 30
      3.2.3. Úkony trigonometrické 39
      3.2.4. Taylorova poučka 46
      3.2.5. Základy počtu integrálného 58
      3.2.6. Upotřebení počtu nekonečného v geometrii 64
4. SROVNÁNÍ „*PŘÍDAVKU*“ SE SOUČASNÝMI UČEBNICEMI 81
5. SBÍRKA ÚLOH 89
6. ZÁVĚR 93

1. Z HISTORIE MATEMATIKY V ČESKÝCH ZEMÍCH

Historie osídlení střední Evropy sahá podobně tak jako jinde ve světě do pravěku před 1,7 miliónu let. Na našem území lze nalézt pozůstatky z doby kamenné, doby bronzové i doby železné. Území v povodí Labe a Moravy obývali původně Keltové, potom Germáni a v 5. století při stěhování národů se zde usídlili Slované. První informace o školách se vážou k existenci Velké Moravy. Po příchodu Cyrila a Metoděje v roce 863 došlo k založení kněžských škol, kde ale hlavní a v podstatě jedinou náplní byla výuka teologie v latině a staroslověnštině, eventuálně čtení a psaní (po roce 906 je doložena první církevní latinská škola na Budči, po založení biskupství v Praze v roce 973 existuje katedrální škola, po roce 993 klášterní i farní školy, atd.). Matematika se tak do škol dostává až za panování Karla IV. (po založení Karlovy university). Je třeba ale poznamenat, že absolutní nezájem o matematiku panoval po pádu Západořímské říše prakticky po celé Evropě, nejenom na našem území. Z matematické latergie vybočovala činnost snad jen Bedy Ctihodného, Theodosia a nebo Alkuina[1] .

1.1. Středověk

V období vrcholného středověku se na našem území s rostoucím počtem měst objevují kromě ryze církevních škol i školy městské (někdy nazývané partikulární). V těchto školách, které hmotně zajišťovala městská správa a učitele dosazovala církev, se objevuje výuka i v češtině. Jinak se ale výuka neustále soustřeďovala pouze na latinské texty, vesměs náboženské. Matematika není sice nikde zmiňována, ale dá se předpokládat, že některé základní početní dovednosti se v těchto školách objevují (potřeba výpočtů v zeměměřictví, daně, apod.). První výrazný zlom nastává v roce 1348 po založení Karlovy University.

[1] O Alkuinovi jsem napsal diplomovou práci v roce 1998, která se zabývá latinsky psanou sbírkou padesáti úloh pro bystření ducha mládeže „Propositiones“ (TU Liberec).

Na universitě se na artistické fakultě konečně vyučovala také matematika. V roce 1393 byl vydán první matematický spis českého autora Jana z Březnice *„Comptus clericorum"*. Obsahuje cykly a epakty (číslo udávající počet dnů od posledního dne novoluní v roce do 1. ledna následujícího roku) vypočtené na několik let a návod, jak vypočítat tato čísla důležitá pro určení pohyblivých svátků. Za zmínku stojí i jméno rektora artistické fakulty Křišťana z Prachatic, přítele J. Husa, matematika, který napsal na počátku 15. století *„Algoritmus prosaycus"*. Do uvedeného období vzniku a počátku Karlovy university patří i Mistr Bartoloměj Klaret, který se snažil řešit problémy s latinou nalezením českých slov pro latinské vědecké názvy (například matematik = vtipnéř, [18]). Rozvoj university přibrzdily husitské bouře i neutěšená sociální a politická situace celého 15. století .

Z dalších českých matematiků doby předbělohorské uveďme Ondřeje Šimkovice, autora první české učebnice matematiky *„Nowe knižky wo pozctech na cifry a na liny"* z roku 1530. Dále pak Beneše Optáta z Telče, autora knížky „Isagogikon". V této knížce je popsáno jak nové počítání s arabskými číslicemi, tak počítání s římskými číslicemi na abaku. A konečně jméno Georg Goerl z Goerlštejna, učitele počtů v Praze, který napsal knihu *„Ein Nutzlich und künstlich Rechenbuch"*, kterou věnoval císaři Rudolfu II., za což byl povýšen do šlechtického stavu. Kniha je rozdělena do tří částí. V první popisuje jak počítání na linách, tak s arabskými číslicemi. Druhá část je věnována základům algebry a poslední část je věnována problémům kupecké praxe. Později připravil knihu v českém jazyce, která byla obsažnější a důkladnější.

1.2. Doba pobělohorská

Nepodařené stavovské povstání z let 1618-1620 uvrhlo české země pod nadvládu přísně katolických Habsburků. Mnoho vědecky aktivních lidí opustilo vlast, Karlova universita byla poněmčena (přejmenována na Karlo-Ferdinandovu). Vliv a kontrolu nad školstvím získali jesuité. Pokud se dalo hovořit před Bílou Horou o jakémsi rozvoji vědy a tedy i matematiky, nastává pod správou jesuitů návrat k aristotelovské matematice, české učebnice jsou páleny a nepoužívají se. Výjimku v tomto období tvoří dvojice autorů. Josef Wenceslaus Pelikán, který v roce 1712 publikuje *„Arithmeticus perfectus"*, text, ve kterém se objevují algoritmy pro výpočty ve dvojkové soustavě. Druhým matematikem je Josef Václav Veselý, který v roce 1734 přeložil do češtiny německou učebnici G. C. Stahla pod názvem *„Česká učebnice matematiky pro samouky"*.

1.3. Národní obrození

Výrazná změna ve vývoji matematiky u nás nastala v době vlády Marie Terezie a Josefa II. Oba panovníci pochopili, že rakouská monarchie může udržet krok s rozvíjející se Evropou pouze tehdy, provedou-li nezbytné ekonomické i sociální reformy. A tak je v rámci školské reformy z roku 1774 zavedena na všech školách povinně i matematika. Nejnižší stupeň triviálních tříd (zpravidla 2 třídy) už obsahoval základy počtů. Na těchto školách se navíc učilo česky. Na dalších stupních (od roku 1775 po reorganizaci středních škol existovala i šestiletá gymnázia, na něž navazovala dvouletá lycea) už měla matematika své místo. V roce 1763 byla na Karlově universitě zřízena poprvé i profesura vyšší matematiky a tak se i na našem území můžeme seznámit se základy infinitesimálního počtu a newtonovské mechaniky. Nejznámějším a hlavně nejtvořivějším naším matematikem této doby byl Stanislav Vydra. Kromě Vydry je třeba se zmínit i o J. Steplingovi, který vydal dvoustránkové *„Aritmetické tabulky"*, v nichž je vždy ke každému heslu vyřešen jeden příklad. Na universitu se infinitesimální počet dostal pomocí přednášek J. Tesánka a jeho nástupce F. J. Gerstera. Během 2. poloviny 18. století přinesl tedy tlak vídeňské vlády podstatné zlepšení pozice matematiky. Jak již bylo uvedeno, nejtvořivějším a asi nejznámějším českým matematikem této doby byl Stanislav Vydra. Věnujme mu následující odstavce.

Narodil se 13. listopadu 1741 v Hradci Králové. V osmi letech přišel na jezuitské gymnázium tamtéž. V roce 1757 vstoupil do jezuitského řádu a byl poslán na dvouroční noviciát do Brna. V letech 1762-64 studoval v Praze na univerzitě filozofii a matematiku. Jeho učiteli byli již zmiňovaní J. Stepling i J. Tesánek. Určitou dobu učí v Jičíně, v roce 1772 je jmenován profesorem matematiky na pražské universitě. Později se stává děkanem filosofické fakulty a dokonce i rektorem celé University. V roce 1803 oslepl a krátce na to (v roce 1804) umírá.

V povědomí českého národa se po celé 19. století připomínalo vlastenecké působení profesora S. Vydry, který si vysloužil titul „cordatus Bohemus (srdnatý Čech)". Ačkoliv byl členem jesuitského řádu, jako jeden z mála českých jesuitů si po celý svůj život zachoval hrdost na slavnou minulost národa a víru v jeho obrození a tu také vštěpoval svým studentům, mezi něž patřili všichni universitně vzdělaní buditelé Jungmanovy generace. Vydrovým žákem byl i známý matematik Bernard Bolzano, který se zabýval problémy s limitami, funkcemi, úvahami o infimu i supremu (některé Bolzanovy úvahy pak nezávisle na sobě zformuloval a zveřejnil Cauchy, například Bolzanovo-Cauchyho kriterium konvergence posloupnosti).

Stanislav Vydra vydal v roce 1783 první vysokoškolskou učebnici diferenciálního a integrálního počtu u nás pod názvem *„Elementa calculi differentialis et integralis"*. V úvodu se autor po svém vyrovnává s námitkami proti infinitesimálnímu počtu a proti matematice vůbec ze strany církve. Učebnici lze rozdělit do dvou částí, na 63 odstavců základů diferenciálního počtu a jeho aplikací a na 34 odstavců zabývajících se integrálním počtem. Podobně jako později Šimerka i Vydra začíná výklad diferenciálem jako nekonečně malou veličinou a postupně se propracovává k diferenciálům dalších funkcí jedné, dvou i tří proměnných. Nikde však nepracuje s exponenciálními, logaritmickými ani goniometrickými funkcemi. V části o integračním počtu nepracuje s integrační konstantou, vypočítává vzorce pro obsahy a objemy a řeší jednoduché diferenciální rovnice pomocí separace proměnných.

1.4. Období druhé poloviny 19. století až do vzniku ČSR

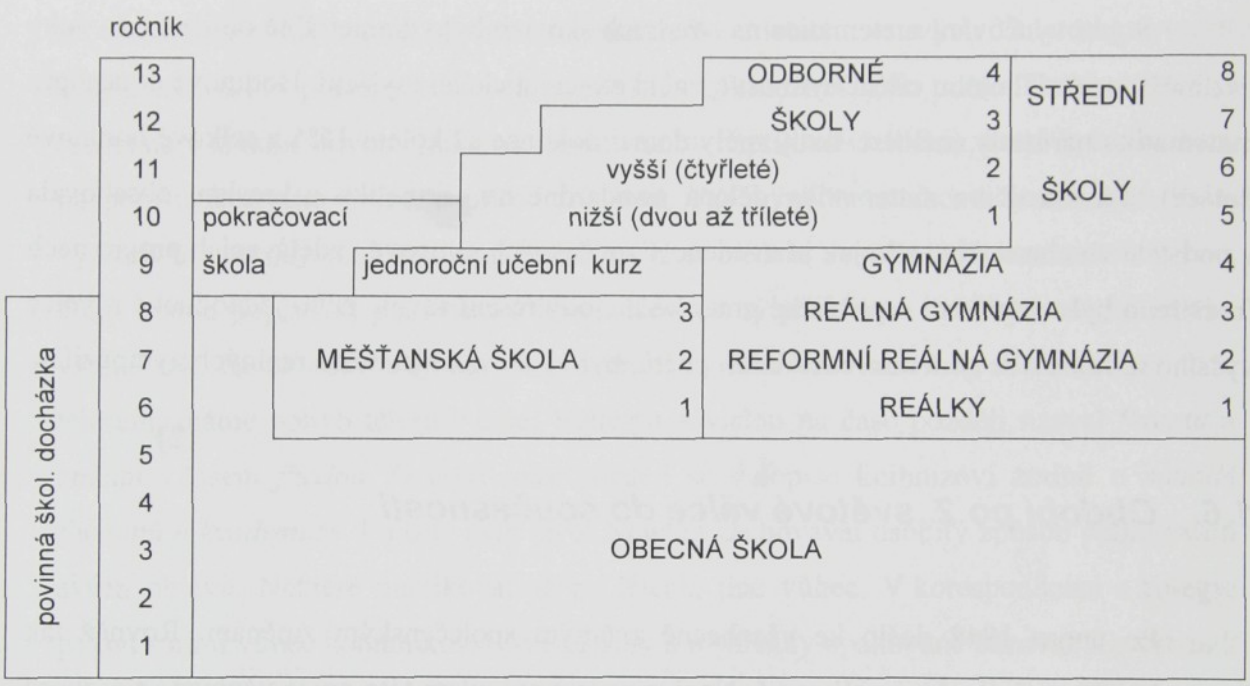
Uvedené období lze charakterizovat velkou roztříštěností školského systému rakouského mocnářství. Velký vliv na výuku měla po roce 1848 (v období Bachova absolutismu) opět církev na základě dohody státu a církve (konkordátu). Církev schvalovala učebnice, dosazovala učitele, vyučování i pedagogické porady začínaly modlitbou a církevním zpěvem atd. První změna nastala v roce 1869 vydáním nového říšského školního zákona. Byla jím zavedena povinná osmiletá školní docházka a dozor státu nad školstvím. Dosavadní trivium (čtení, psaní, počítání) bylo rozšířeno o přírodopis, zeměpis, dějepis, měřictví a tělocvik. Vzdělávání bylo dvojího typu. Za prvé vzdělávání, které mělo hlavní cíl v rozvoji rozumových schopností, představivosti, paměti, pozornosti a přesnosti. Tento typ výuky byl hlavně na gymnáziích a následně na vysokých školách a universitách. Druhý typ vzdělávání byl reakcí na rozvoj průmyslu a techniky ve druhé polovině 19. století. Školy tohoto zaměření připravovaly učně pro dělnická povolání, řemesla a obchod. Příprava středních techniků na odborných školách byla zaměřena na potřeby oboru, pro který se žáci připravovali. Na měšťanských a obecných školách, určených pro děti rolníků, dělníků, řemeslníků a drobných obchodníků, se vyučování (i v matematice) omezovalo na poznatky potřebné pro praktický život. Důraz se kladl na mechanické ovládnutí dovedností, třeba bez porozumění, bez důkazů a často vůbec bez vysvětlení. Oba typy vzdělávaní se postupem času od sebe stále více vzdalovaly.

Objevovaly se ale i pokusy opačného ražení, tedy školy, hlavně reálná gymnázia (první vzniklo v roce 1860 v Táboře) a reálky (o rok kratší výuka než na gymnáziu, student nemohl pokračovat ve studiu na universitě), které preferovaly výuku matematiky, deskriptivní geometrie, přírodních věd a kreslení, tedy předmětů potřebných pro přípravu budoucích inženýrů.

Určení obsahu a rosahu učiva pro jednotlivé typy škol tedy záviselo pouze na stupni užitečnosti pro život. Na jedné straně byla klasická gymnázia s latinou a řečtinou a formální matematikou a proti nim stály čistě praktické měšťanské nebo pokračovací školy. Na tento rozpor poukazovali ke konci 19. století mnozí didaktici matematiky v různých evropských zemích. Syntézou obou krajních směrů pak byl na počátku 20. století tzv. meranský program, vypracovaný pod vedením prof. Felixe Kleina. Tento program uznával význam matematického vzdělávání pro rozvoj rozumových schopností a logického myšlení, ale požadoval vypuštění kapitol, které nebyly vhodné k praktickému využití.

Naproti tomu vyžadoval rozvíjení schopností chápat matematické vztahy v realitě a v kontextu dalších přírodovědných předmětů. V duchu těchto zásad pak vydávala na našem území Jednota českých matematiků a fyziků (založena 1862 v Praze) své učebnice matematiky, což činí dodnes (ve spolupráci s nakladatelstvím Prométheus).

Jak jsme uvedli v úvodu této kapitoly, existovalo na našem území velké množství velmi často vzájemně neprostupných typů škol. V následující schématu z ([18], str. 8) je zobrazena „Školská soustava ČSR po roce 1932“, která se téměř nelišila od stavu na přelomu 19. a 20. století.



1.5. Období po vzniku ČSR

Období do roku 1948 se příliš nelišilo od systému zavedeného ještě za Rakouska-Uherska. Projevovaly se některé reformní směry, např. protiherbatovský proud (herbatismus byl směr, který dělil výchovu na vedení, vyučování a výchovu mravní, kdy vnějšího ukáznění jako výsledek vedení se mělo dosáhnout dozorem, příkazy a zákazy, ale i láskou učitele) nebo pedagogický reformismus (v pokusných školách využíval například vyučování pomocí projektů, ale opomíjel výchovu).

Uveďme si pro ilustraci obsah učiva matematiky na tehdejších školách. V 1.-5. ročníku obecné školy se vyučovala aritmetika přirozených čísel z důrazem kladeným na zběhlost v provádění početních úkonů. Dále se řešily slovní úlohy a probíralo se velmi málo geometrie. V 6.-8. ročníku obecné školy se v aritmetice přidaly zlomky, desetinná čísla, procenta a řešení typových slovních úloh, eventuálně úlohy na aplikaci matematiky v obchodě, řemeslech a podobně. Na měšťanských školách se učivo zaměřilo na jisté a hbité řešení praktických úloh, v geometrii šlo o to, vštípit žákům základní poznatky rovinného i prostorového měřictví se zaměřením na praktický život. K eventuálnímu postupu na odborné střední školy sloužil roční „vyrovnávací“ kurz.

Pojetí vyučování matematice na středních školách bylo diametrálně odlišné od výuky na „měšťance“. Hlavním cílem bylo osvojení si matematického myšlení. Hodinové dotace pro matematiku narůstaly (některé školy měly dotaci dokonce až kolem 15% z celkové hodinové dotace). Témata učiva matematiky dělená standardně na aritmetiku a kreslení obsahovala v podstatě všechno učivo tak, jak je uvedeno v současných rámcově vzdělávacích programech (rozšířeno bylo například o přibližné grafické metody řešení rovnic nebo jednoduché rovnice vyššího řádu). Co se týká diferenciálního počtu, byl vyučován hlavně na reálných gymnáziích.

1.6. Období po 2. světové válce do současnosti

Po únoru 1948 došlo ke všeobecně známým společenským změnám. Rovněž tak listopad 1989 změnil vývoj naší země. Není smyslem ani cílem této práce věnovat se rozboru vyučování v těchto našich historických epochách. Poznamenejme jen, že po druhé světové válce došlo k několika školským reformám (1949, 1953, 1960, … 1991, 2005). První reformy odstraňovaly dvojkolejnost školského systému první republiky (jednotná národní škola, později osmiletá a jedenáctiletá střední škola, základní devíti a později osmiletá škola, atd.) a tím se odstraňovala častá neprostupnost z různých typů škol. Měnila se délka povinné školní docházky (snaha o přizpůsobení se potřebám průmyslu), vzniká učňovské školství. Systém struktury škol byl a koneckonců je více méně jednotný. Povinnou školní docházku absolvují žáci na stejném typu škol, diferenciace je až na středních školách. Prostupnost pro studium není téměř omezena. Z pohledu obsahu výuky matematiky se ustupuje od některých nepoužívaných témat (řetězové zlomky) a pevně se v učivu středních škol (hlavně gymnázií a průmyslových škol) usazují základy diferenciálního počtu.

2. Z HISTORIE INFINITESIMÁLNÍHO POČTU

Na konci 17. století prodělala matematika asi největší skok ve své historii. Nezávisle na sobě objevili Issac Newton a Gottfried Wilhelm Leibniz základy nového kalkulu, počítání s nekonečně malými veličinami, infinitezimální počet. Oba matematici se znali, korespondovali spolu a dokonce se i v roce 1672 v Londýně osobně setkali.

Newton uskutečnil svůj objev o 10 let dříve. V letech 1665-1667 zachvátila morová epidemie Londýn a mladý Newton opustil studium na Trinity College v Cambridgi. Odjel na venkov na rodný statek, kde v následujících dvou letech (ve svých 22 letech) vytvořil svůj „*fluxionový*“ počet, předstupeň pozdějšího infinitezimálního počtu. Tento počet byl reakcí na v té době novou fyziku reprezentovanou například Galileem, která byla založena na popisu časového průběhu přírodních jevů. Pro výpočty v takové fyzice bylo třeba vytvořit novou „dynamickou“ matematiku (již se nedalo vystačit s řeckou matematikou, která mohla popisovat jen statické jevy). Newton si představil, že matematická křivka vzniká tak, že se bod pohybuje během určitého časového intervalu. Nahradíme-li bod tělesem, máme pohyb tělesa v čase. Veličinu závislou na čase později nazval *fluenta* a změnu s časem *fluxion*. O čtyři roky později se v dopise Leibnizovi zmínil o *metodě fluxionů a kvadratuře*. Po celý svůj život Newton zachovával osobitý způsob publikování svých objevů. Některé publikoval až po létech, jiné vůbec. V korespondenci s kolegy, pokud s nimi vůbec komunikoval, své nápady a myšlenky opakovaně šifroval. To vše pak vedlo k tomu, že často vedl ostré spory s kolegy, v nichž se navzájem obviňovali z plagiátorství. Tak byl například ve sporu s R. Hookem o prioritu objevení gravitačního zákona a nebo právě s G. W. Leibnizem o to, kdo první vytvořil diferenciální a integrální počet. Rozhodnutí padlo v obou případech tím, že jeho sokové zemřeli. Newton přežil Leibnize o 11 let. Dosáhl velkého uznání jak vědeckého (hlavně za vydání komplexního díla popisující fyzikálně i matematicky celou mechaniku *Philosophiae naturalis mathematica*), tak společenského (stal se "Master of the Mint“ v královské mincovně, což odpovídá přibližně dnešnímu ministru financí). Zemřel ve věku 84 let a byl pohřben ve Westminsterském opatství s téměř královskými poctami.

Leibniz patří dodnes k největším německým filosofům. Ačkoliv již jako dvacetiletý získal doktorát na universitě v Altdorfu, odmítl vědeckou dráhu a dal se spíše na politickou kariéru. Tak se ve službách mohučského kurfiřstského rady Boineburga dostává do Paříže na dvůr Ludvíka XIV. Tam se setkává s Newtonem i s Huygensem a právě díky jim proniká do tajů matematiky. Jeho matematické zapálení vyvrcholilo vytvořením základů diferenciálního počtu. Roku 1876 odchází jako vévodský knihovník do Hannoveru. Tam pracuje zejména jako právník a historik. Na jeho popud byla založena Berlínská akademie věd, sblížil se s ruským carem Petrem Velikým, hodně cestoval, napsal rozsáhlá filosofická, historická a teologická díla, udržoval korespondenci s předními evropskými vědci, atd. Na sklonku života upadl v nemilost, vedl ostrý spor s Newtonem, a tak v roce 1716 opuštěný a zahořklý, umírá. Muž, jenž patrně naposledy v evropských duchovních dějinách ovládal všechny vědy a téměř ve všech dosahoval vynikajících výsledků, byl pochován bez slavnostních obřadů, jen francouzská Akademie věd mu věnovala důstojný nekrolog.

Přiblížili jsme si osudy dvou strůjců diferenciálního počtu. Spor o prvenství objevení tohoto kalkulu je dnes již vyřešen, vyhráli oba. Věnujme se tedy nyní konkrétním matematickým postupům jak Newtona, tak Leibnize ([2], str.157).

2.1. Newtonova metoda

Jak již bylo uvedeno výše, základním impulsem pro vznik infinitezimálního počtu u Newtona byl problém *fluxionů*, tedy řešení pohybu hmotného bodu (tělesa) v čase, speciálně pak popis okamžité rychlosti přímočarého pohybu. Ukažme si ji.

Úloha o pohybu:

Předpokládejme, že pohyb hmotného bodu po přímce je popsán funkcí $s = f(t)$, kde t značí čas, který měříme od určitého počátečního okamžiku, a s značí dráhu, kterou urazil hmotný bod po přímce od určeného okamžiku. Označme Δs přírůstek dráhy s za dobu Δt od okamžiku t_0 do okamžiku $t_0 + \Delta t$.

Pak pro přírůstek dráhy můžeme psát $\Delta s = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$. Podíl

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} \qquad (1.1.)$$

označuje průměrnou rychlost pohybu bodu po přímce v časovém intervalu $\langle t_0; t_0 + \Delta t \rangle$. Zmenšuje-li se Δt, charakterizuje podíl (1.1.) stále lépe uvažovaný pohyb v okamžiku t_0. Limita průměrné rychlosti $\bar{v}$ pro $\Delta t \to 0$ definuje tzv. okamžitou rychlost v_0 pohybujícího se bodu. Je tedy

$$v_0 = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} \qquad (1.2.).$$

2.2. Leibnizova metoda

Jestliže hlavní myšlenkou Newtonova postupu u zavedení infinitezimálního počtu byla úloha z mechaniky, u Leibnize jde o geometrický problém. Ukažme si jej.

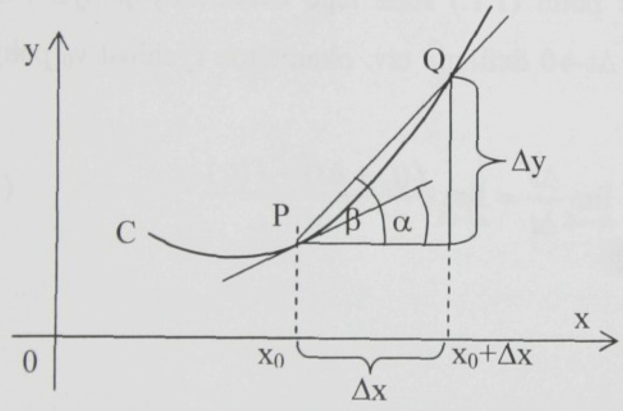
Úloha o tečně:

Označme C graf spojité funkce $y = f(x)$ (viz obr.1). Chceme najít tečnu grafu v bodě $P[x_0; f(x_0)]$. Bude určena tímto bodem a směrnicí $k = tg\,\alpha$. Můžeme ji definovat jako přímku, ke které se „blíží" sečny grafu C, procházející bodem P. Směrnice sečny PQ grafu C je dána jako

$$tg\,\beta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (1.3.)$$

Směrnice tečny $k = tg\,\alpha$ pak bude limitou směrnice $tg\,\beta$ sečny pro $\Delta x \to 0$, tedy

$$tg\,\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (1.4.)$$



(Obr.1.1.)

Je vidět, že po matematické stránce vedou obě uvedené úlohy na stejnou limitu (1.2.) nebo (1.4.). Nahradíme-li v symbolice $x=t$ a $y=s$, lze obr. 1.1. použít i pro úlohu z mechaniky. Na závěr už jen dodejme, že pro svou důležitost získala tato limita speciální název, derivace.

3. VÁCLAV ŠIMERKA

3.1. ŽIVOT A DÍLO VÁCLAVA ŠIMERKY

Václav Šimerka (někdy také Wenzel Schimerka) se narodil 20. prosince roku 1819 ve Vysokém Veselí (15 km jižně od Jičína), kde byl jeho otec Petr nejprve bednářem a později obchodníkem s předivem. Do obecné školy chodil ve svém rodišti, pak v Löwenberce v pruském Slezku a konečně v Jičíně, kde také vystudoval gymnázium u profesora Kudrny a profesora Macháčka. Jeho studium pokračovalo v Praze na filosofii a následně v Hradci Králové na theologii, kde byl taky v roce 1845 vysvěcen na kněze. Stal se kaplanem ve Žlunicích u Jičína, kde se se svým postojem (ve prospěch obyčejného lidu) dostal do prvních sporů s nadřízenými. Ještě jako kaplan ve Žlunicích složil státní zkoušku z matematiky pro gymnázia a kvůli přetrvávajícím sporům s nadřízenými odchází v roce 1852 do Prahy studovat fyziku u proslulého profesora Petřiny. Po složení státní zkoušky z fyziky je poslán na jih Čech do Českých Budějovic jako suplující profesor na tamní gymnázium. Jeho pedagogická práce sklízela uznání hlavně u studentů. Během tohoto působení sepisuje učebnici „*Algebra, čili počtářství obecné*“, jejímž dodatkem o diferenciálním počtu se v této práci zabýváme. Po devíti letech vyučování (v roce 1862) bez možnosti na jakýkoliv postup (prý měl opět spory s nadřízenými) odchází jako farář na faru do Slatin u Vamberka. Od roku 1866 působí celých 20 let jako farář v Jenšovicích u Vysokého Mýta. Na poslední necelé dva roky života odchází na penzi na rodné Hradecko, do obce Praskačka, kde 26. prosince 1887 umírá. O dva roky později 1. listopadu 1889 mu Jednota českých matematiků a fyziků jako jednomu ze svých prvních členů odhalila v Praskačce pomník (ačkoliv bylo velmi nepříznivé počasí, sešlo se na svěcení velké množství lidí, například předseda Jednoty M. Pokorný, básník E. Miřiovský, profesor gymnázia v Hradci Králové J. Hron, studenti, sokolové a další).

Václav Šimerka se, jak již bylo uvedeno, věnoval kromě služby církvi i matematice. První jeho matematickou publikaci vydala Vídeňská akademie věd r. 1858 s názvem „*Die Perioden der quadratischen Zahlformen bei negativen Determinanten*“. Tato práce se ale nedočkala kladného přijetí (dokonce byla ještě před vydáním odmítnuta Královskou českou společností nauk a Šimerkovi bylo doporučeno profesorem Kulíkem, jedním ze zakladatelů Jednoty, aby tuto práci vydal spíše v českém jazyce, což neučinil). Táž akademie vydala již s větším úspěchem následující rok „*Lösungen zweier Arten von Gleichungen*“ a pak „*Die* *trinären Zahlformen und Zahlwerthe*". V roce 1862 vydala Královská česká společnost nauk jeho „*Příspěvky k neurčité analytice*". O rok později vychází v Praze jeho učebnice matematiky „*Algebra, čili počtářství obecné*", které se budeme v této kapitole ještě věnovat. Z dalších publikovaných prací uveďme například „*Die rationalen Dreiecke*" uveřejněnou v roce 1869 v Grunertově „*Archiv der Mathematik und Physik*".

Do „*Časopisu pro pěstování mahtematiky a fysiky*" přispěl následujícími články: „*Součty celých v lomené arithmetické posloupnosti*" (roč. V.); „*Řetězové pravidlo u shoď*" (roč. VI.); „*Jednočlenná perioda zbytků z mocnin bez předchozích členů, t. j. řešení shody $C^2 \equiv C(\bmod M)$*" (roč. VIII.); „*Jednočlenná perioda zbytků z mocnin s předcházejícími členy*" (roč. XIII.), „*Zbytky z arithmetické posloupnosti*" (roč. XIV.).

Další z jeho aktivit týkajících se matematiky byla kalkulace výše členských příspěvků a penze pro pensijní spolek sv. Josefa u Sv. Trojice v Praze pro světské kněze v Čechách, která dle vlastních Šimečkových slov byla „*obtížnější než sepsati nějaké obšírné dílo vědecké*".

Důkazem Šimerkovy všestrannosti je práce „*Síla přesvědčení - pokus v duchovní mechanice*" vydaná v roce 1881 česky a o dva roky později německy. Šlo o první pokus o aplikaci matematiky v psychologii. Tato práce může být považována za předchůdce teorie subjektivní pravděpodobnosti, která se rozvíjela ve 20. a 30. letech 20. století díly Ramseye a Finettiho a zejména v 50. letech prací Savageho. Subjektivní pravděpodobností se rozumí reálný stupeň víry, u Šimerky pojem přesvědčenost, do kterého zahrnuje tušení, domněnku, možnost, pravděpodobnost, hypotézu, víru, vědění a jistotu. Matematickými vztahy se zde vyjadřují pojmy jako víra, jistota nebo přesvědčení. Ukažme si jednu úlohu:

Je-li důvěra ve vlastní brannou moc známa (v), s kolika muži svého vojska x rozumno pak se odvážiti na c nepřátel?

Z toho, že $v = \dfrac{c}{x+c}$ *vyplývá pro* $x = \dfrac{c(1-v)}{v}$ *a tak pro důvěru o velikosti* $v = \dfrac{5}{7}$ (pravděpodobností vyjádřena víra ve vlastní brannou moc) *a 30 000 nepřátel stačí x=12 000 mužů našeho vojska.*

O vážnosti, které si toto téma získalo, svědčí i Šimerkova korespondence s T. G. Masarykem. Ta se týká právě *„Síly přesvědčení"* a Masarykova zájmu o počet pravděpodobnosti. V závěrečné části tohoto spisu Šimerka napsal (tento výrok bychom mohli pokládat za jeho odkaz): *„Nejedná se tu o nic více ani méně, než o sílu pravdy. A kdož by mohl mohutnost její popírati? Působí nejen v soukromých rozmluvách, ve školách, spisech a na řečništích, ale ozbrojuje i paže, prolévá krev na bojištích, a neleká se ani smrti na popravišti, vědouc, že tělo sice zmařeno býti může, duch ale nikoli"*.

Poslední odstavec této kapitoly věnujeme Šimerkově učebnici *„Algebra, čili počtářství obecné"* (190 stran). Jak již bylo uvedeno, sepsal ji při svém působení na gymnáziu v Českých Budějovicích a vydal v roce 1863 v Praze (celkem 3 vydání). Tato učebnice byla schválena ministerstvem kultu a vyučování habsburské monarchie jako učební kniha pro české střední školy. Součástí tohoto textu byl i první přehled základu diferenciálního a integrálního počtu v našich středoškolských učebnicích *„Přídavek k algebře"*, který pak V. Šimerka vydal následující rok i samostatně pod názvem *„Přídavek k Algebře pro vyšší gymnasia"*. Věnujme se ale nejprve *„Algebře"*. V předmluvě vyjadřuje autor potěšení z kladného přijetí učebnice a děkuje za zaslané připomínky, o něž sám žádal. Za hlavní a nejdůležitější učivo považuje rovnice a jak sám uvádí: *„Čím pak dále v předmětu tom bádám, tím více přicházím ku přesvědčení, že rovnice jsou to pro celou matematiku, co shoda obrazců pro geometrii"*. Uvedená učebnice má 5 částí:

1. O čtveru početním. Sčítání, odnímání, násobení, dělení.
2. Následky dělení. Dělitelnost čísel. Zlomky obyčejné. Zlomky desetinné. Poměry a srovnalosti.
3. Upotřebení čtvero druhu početného. Některá zvláštní početná pravidla. Určité rovnice prvního stupně. Neurčité rovnice prvního stupně. Řetězce (řetězové zlomky).
4. Následky umocňování. O mocnostech zvláště. Veličiny kořenové. Rovnice druhého stupně. Logaritmy.
5. Upotřebení veličin mocnosťových. Řady včetně posloupností. Skladna (kombinatorika). Přemisťování. Sestavování.

Na závěr této kapitoly citujme Augustina Pánka, který v ([12], str. 256) uvádí: *„Šimerka byl muž povahy veskrze šlechetné, přímé a srdečné, a milým i význačným zjevem v národním životě našem, náležeje k těm českým a moravským kněžím, kteří rozumějí velikým ideám moderním a kteří s lidem cítí, jsouce hotovi, za svobodu a práva jeho i život v oběť. Velice jest litovati, že Šimerkovi nebylo dopřáno, domoci se působiště, mathematickému talentu jeho přiměřeného, čím by jistě česká literatura mathematická od něho ještě více byla získala"*.

3.2. PŘÍDAVEK K ALGEBŘE PRO VYŠŠÍ GYMNASIA

„*Přídavek*" nebo též někdy uváděn jako „*Dodatek*" je první středoškolskou učebnicí diferenciálního počtu u nás. Tato učebnice má 56 stran a 6 kapitol včetně osmi obrazců na závěr[2]. Nejprve si uveďme její obsah:

I. Differencialy daných úkonů.

1. Pojem a vlastnosti nekonečně malého. 2. Differencialy obecných funkcí, pak 3. součtů, 4. součinů a podílů, 5. mocností a kořenů, 6. logaritmů a exponencialných veličin. 7. Differenciály vyšší.

II. Proměňování úkonů v řady.

8. Řada Mac-Laurinova. 9. O rovných řadách též proměnné. 10. Vlastnosti veličiny $\binom{n}{r}$. *11. Obecný důkaz na poučku binomickou. 12. Řada logaritmická. 13. Řady exponencialné.*

III. Úkony trigonometrické.

14. O funkcích sin x, cos x. 15. Rovnice pro sin (x ±y) a cos (x ±y). 16. Význam funkcí těch ve kruhu. 17. Co znamená log (-M) a $\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$ *? 18. Pomocné funkce trigonometrické. 20. Differenciály funkcí těch. 21. Řada pro arc tg x.*

IV. Taylorova poučka a její následky.

22. Řada Taylorova. 23. Úkony v % přecházející. 24. Největší a nejmenší hodnoty úkonů. 25. Řešení určitých rovnic o jedné neznámé. 26. Rovnice třetího stupně.

V. Základy počtu integralného.

27. Obecné věty integralné. 28. Formule integralné zvláštní. 29. Integraly složité. 30. Integrování v úkolech. 31. O pohybu v přímkách. 32. Integrace zakuklená.

VI. Upotřebení počtu nekonečného v geometrii.

33. Rovnice některých čar v rovině, zvláště pak cykloidy. 34. Příklady na maxima a minima. 35. Veličiny tangencialné. 36. Kruhy křivné. 37. Evoluty. 38. Délka oblouků u křivek. 39. Plochy křivočarných obrazců.

---

[2] Celý „*Přídavek k Algebře pro vyšší gymnasia*" je přílohou této práce

Věnujme se nyní vysvětlení některých matematických pojmů, které Václav Šimerka používá a jejichž tehdejší pojmenování by se nám dnes mohlo jevit jako nesrozumitelné. Tedy:

lišné (počinek) = diferenciál

úkon = funkce

odvozený úkon = derivace

pomyslné = imaginární

čísla spřežitá = komplexní čísla

celení = integrování

abscis = kladná poloosa x

ordinanta = vzdálenost na osa y

koordinanty = souřadnice

schodnice = elipsa

rozchodnice = hyperbola

stejnice = parabola

trapéz = lichoběžník

tangenta = tečna

křivný kruh = oskulační kružnice

Poznamenejme ještě, že komentář, současná zavedení a současné definice a věty budou psány normálním písmem. Oproti tomu, pokud budeme citovat Václava Šimerku z jeho „*Přídavku*“, bude mít text formu kurzívy.

Věnujme se tedy dále rozboru, komentáři a porovnání jednotlivých kapitol s důrazem na oblastí týkajících se diferenciálního počtu.

3.2.1. Differencialy daných úkonů

Úvodní kapitola se zabývá výlučně pojmem diferenciál, který je zde chápán jako hlavní a základní stavební kámen diferenciálního počtu. Neobjevuje se ani pojem limita funkce, spojitost funkce nebo derivace. Diferenciál zde zavádíme jako ([20], str. 1).: *„Nesmírně čili nekonečně malou část, o niž spojitou proměnnou veličinu (x, y, z atd.) růsti necháváme, ,jmenuje se differencial veličiny této, a znamená písmenou δ před veličinu onu postavenou (δx, δy, δz, atd.)“*

Diferenciál zde tedy chápeme jako velmi malou veličinu nacházející se mezi nulou a nejmenšími zlomky, jaké lze kdy v praktickém počtu vůbec použít. Veličinu x pak diferenciál ani nezvětšuje, ani nezmenšuje. Tedy, ve vztahu $x \pm \delta y$, kde $\delta y = \dfrac{y}{10^m}$, pak pro velmi velké m lze z úvodního vztahu uvažovat pouze veličinu x. Tato intuitivní myšlenka se pak neustále opakuje v odvozování pravidel pro počítání s diferenciály. Samotný diferenciál je odvozen ze vztahu pro obecnou funkci proměnné x a to následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} y &= fx \\ y + \delta y &= f(x + \delta x) \\ \delta y &= f(x + \delta x) - y \end{aligned}$$

a odtud už samotný vztah pro diferenciál

$$\delta y = f(x + \delta x) - fx \qquad (2.1.).$$

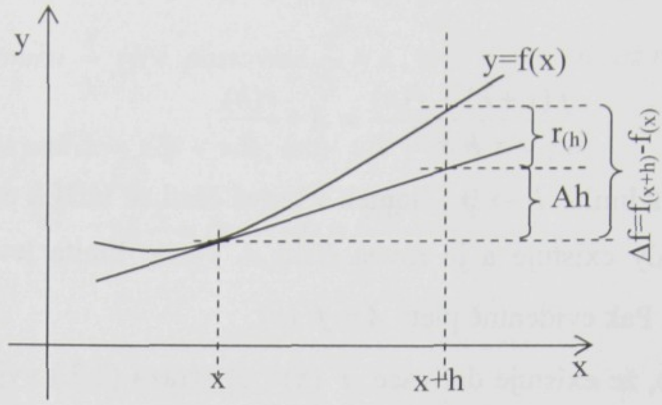
Pro takto zavedený diferenciál používá ve všech svých dalších úvahách zabývajících se diferenciály a nebo jejich aplikací následující intuitivní pravidlo: *„Mocnosti vyšších stupňů diferenciálů mizejí přičteny neb odejmuty k mocnostem nižších stupňů. To platí i u součinů majících za činitele více diferenciálů“* ([20], str. 2). Vyjádřeno rovnicemi dostaneme

$$a\delta x + b(\delta x)^2 = \delta x(a + b\delta x) = a\delta x \quad \text{(jelikož } b\delta x \text{ proti } a \text{ zmizí)}$$

a podobně tak

$$a\delta x \pm b\delta x \cdot \delta y = \delta x(a \pm b\delta y) = a\delta x \text{ (jelikož } b\delta y \text{ proti } a \text{ zmizí)''}.$$

Toto pravidlo se dnes může jevit jako zvláštní. Při zanedbání určitých, byť velmi malých částí funkce bychom očekávali, že nedojdeme k přesnému výsledku. Ale i s používáním tohoto intuitivního pravidla dosáhneme nakonec správných závěrů.



Obr 2.1.

Uveďme nyní, jak vnímáme pojem diferenciálu funkce v současných učebnicích ([8], str. 96). Jak je vidět na obr. 2.1, z geometrického pohledu jde o nahrazení grafu funkce $y=f(x)$ grafem lineární funkce, tj. přímkou $y=Ax$ (přímka se směrnicí A). Dále postupujeme tak, že se snažíme nalézt směrnici A takovou, aby chyba $r(h)$ byla pro $h \to 0$ daleko menší než veličina h, přesněji, aby pro $h \to 0$ se podíl $\frac{r(h)}{h}$ blížil k nule. Po těchto úvahách už můžeme zavést diferenciál.

Funkce f má v bodě x diferenciál, jestliže existuje číslo A takové, že pro funkci $r(h)$ definovanou vztahem

$$f(x+h)-f(x) = Ah + r(h) \qquad (2.2.)$$

platí

$$\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0 \qquad (2.3.).$$

Diferenciálem funkce f v bodě x pak rozumíme lineární funkci Ah, tedy funkci proměnné h, kterou označujeme $df(x)$, nebo ještě podrobněji $df(x,h) = Ah$.

Pro výpočet diferenciálu dnes používáme například následující větu:

Funkce f má v bodě x diferenciál tehdy a jen tehdy, má-li v bodě x derivaci (vlastní). Konstanta A z definice je pak jednoznačně určena a platí

$$A = f'(x) \qquad (2.4.).$$

Uvedenou větu si dokážeme ekvivalencí dvou podmínek, důkaz bude mít proto dvě části.

1. Podmínka (2.4.) je nutná, tedy platí $A = f'(x)$. Vycházíme z toho, že existuje diferenciál, tedy číslo A splňující vztahy (2.2.) a (2.3.). Výraz (2.2.) vydělíme číslem h a dostaneme

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = A + \frac{r(h)}{h}.$$

Nyní přejdeme k limitě $h \to 0$. Zlomek v pravé části se blíží k nule dle (2.3.), limita pravé strany tedy existuje a je rovna číslu A. Navíc limita levé strany přestavuje derivaci $f'(x)$. Pak evidentně platí $A = f'(x)$.

2. Vyjdeme z toho, že existuje derivace $f'(x)$. Z výrazu (2.2.) vyjádříme $r(h)$. Místo Ah píšeme $f'(x)h$. Máme pak

$$r(h) = f(x+h) - f(x) - f'(x)h.$$

Výraz vydělíme číslem h a přejdeme k limitě $h \to 0$. Dostaneme

$$\lim_{h\to 0}\frac{r(h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f'(x) = f'(x) - f'(x) = 0.$$

Je zřejmé, že je splněna podmínka diferencovatelnosti v bodě x s konstantou $A = f'(x)$. Tím jsme uvedenou větu dokázali. Z ní vyplývá, že přímka nahrazující křivku je tečna (což jsme předpokládali) a proto diferenciál znamená přírůstek na tečně.

Mohli bychom očekávat, že Šimerkovo nerozlišování skutečného přírůstku funkce $\Delta y = f(x+\delta x) - f(x)$ od přibližného přírůstku daného diferenciálem δy bude mít v konečném důsledku za následek chybné závěry. Není tomu tak. Porovnejme například Šimerkův vztah pro diferenciál součinu funkcí se vztahem pro výpočet derivace součinu funkcí.

Pro diferenciál součinu různých funkcí t, u lze podle Šimerky psát ([20], str.3):

$$\delta(tu) = (t+\delta t)(u+\delta u) - tu = tu + t\delta u + u\delta t + \delta t\delta u - tu$$

Poněvadž pak $\delta t\delta u$ *k* $u\delta t$ *přičteno mizí, bude*

$$\delta(tu) = u\delta t + t\delta u \tag{2.5.}$$

Srovnejme (2.5.) se vztahem pro derivaci součinu dvou funkcí $(u \cdot v)' = u'v + uv'$.

Podobně porovnejme vztah pro diferenciál podílu dvou funkcí s derivací podílu funkcí ([20], str. 4).

Co se differencialu zlomku $\frac{x}{y}$ *týče, postavme* $\frac{x}{y} = z$, tedy $x=yz$, *kteráž rovnice diferencovaná dle formule (2.5.) Dále pak* $\delta x = z\delta y + y\delta z$, *tedy* $y\delta z = \delta x - z\delta y$ *pak*

$$y\delta\frac{x}{y} = \delta x - \frac{x}{y}\delta y = \frac{y\delta x - x\delta y}{y}$$

čili

$$\delta\frac{x}{y} = \frac{y\delta x - x\delta y}{y^2} \qquad (2.6.)$$

Opět po porovnání uvedeného vztahu se vzorcem pro derivaci podílu funkcí $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ můžeme za předpokladu $u = x, y = v$ a tím i $u' = \delta x, v' = \delta y$ potvrdit shodu.

Podobně jsou v této kapitole odvozeny i vztahy pro diferenciál součtu, rozdílu, mocniny a odmocniny funkcí. Dostáváme tak vzorce pro diferenciály totožné se vzorci pro derivaci. Tento výsledek je srozumitelný, neboť derivaci vnímáme jako $y' = \frac{\delta y}{\delta x}$ a odtud snadno dostaneme $\delta y = y'\delta x$. Podobně lze rozumět i dalším vztahům uvedeným a odvozeným v [20] na starnách 4 a 5 (vztahy 2.7.-2.9.).

$$\delta(t + u + v + atd.) = \delta t + \delta u + \delta v + atd. \qquad (2.7.)$$

$$\delta\left(x^n\right) = nx^{n-1}\delta x \qquad (2.8.)$$

$$\delta x^{\frac{m}{r}} = \frac{m}{r}x^{\frac{m}{r}-1}\delta x \qquad (2.9.)$$

Můžeme namítnout, že vztah 2.9. je jen jinou podobou vztahu 2.8.. Odvození vztahu 2.8. je u Šimerky provedeno jako opakované násobení diferenciálů. Oproti tomu vztah 2.9. je odvozen nejprve umocněním obou stran vztahu $y = x^{\frac{m}{r}}$ a následným diferencováním obou stran. Ukažme si naznačený postup:

Nalezneme z $x^{\frac{m}{r}} = y$ *zmocňováním* $x^m = y^r$, *což differencujíce* $mx^{m-1}\delta x = ry^{r-1}\delta y$.

Z tohoto vztahu je vyjádřeno δy, což při $\delta x^{\frac{m}{r}} = \delta y$ a po úpravě dává vztah 2.9..

Výpočet diferenciálu složené funkce je zde ukázán pouze na dvou konkrétních úlohách (chybí obecný algoritmus). Vzhledem k tomu, že v dalších kapitolách se s výpočty složených funkcí setkáváme, ukažme si Šimerkovo řešení uvedených úloh ([20], str. 5).

Použijeme-li formuli (2.9.) pro výpočet $\delta\sqrt{x}$, dostáváme následující:

Při $n=\frac{1}{2}, \delta\sqrt{x}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\delta x$ *, čili* $\delta\sqrt{x}=\frac{\delta x}{2\sqrt{x}}$*, a postavíme-li a+bx místo x*

$$\delta\sqrt{a+bx}=\frac{b\delta x}{2\sqrt{a+bx}} \tag{2.10.}$$

necháme-li pak ještě nad to x ve x^2 *přejíti, bude*

$$\delta\sqrt{a+bx^2}=\frac{bx\delta x}{\sqrt{a+bx^2}} \tag{2.11.}$$

Opět se zde setkáváme s téměř intuitivním výpočtem. Ačkoliv v některých případech postupuje Šimerka krok po kroku, aby byla idea úprav úplně zřejmá, v tomto případě bez jakékoliv poznámky ukazuje pouze výsledek. Vhodnější by se nám jevil postupný výpočet

$$\delta\sqrt{a+bx}=\frac{\delta(a+bx)}{2\sqrt{a+bx}}=\frac{\delta a+b\delta x}{2\sqrt{a+bx}}=\frac{b\delta x}{2\sqrt{a+bx}}, \text{ kde } \delta a \text{ mizí.}$$

V závěru jsou pak vyřešeny diferenciály logaritmu a exponenciálu. Vzhledem k tomu, že v dalších částech „Přídavku“ se k uvedeným diferenciálům často vracíme, ukážeme si zde opět jejich odvození ([20], str.5-6). Poznamenejme navíc, že Šimerka označuje přirozený logaritmus čísla x řeckými písmeny, tedy tvarem $\lambda o\gamma\, x$. Dekadickému logaritmu ponechává tvar $\log x$.

Differencial logaritmu dá se nejsnáze následovně naleznouti: Budiž $\delta\log x = fx\cdot\delta x$*, kdež fx neznámý posud úkon udává; dosaďme do rovnice té* x^n *místo x, a obdržíme z ní*

$$\delta\log x^n = f(x^n)\,\delta(x^n),$$

čili

$$n\delta\log x = nx^{n-1}f(x^n)\,\delta x \;\; ; \;\; fx\cdot\delta x = x^{n-1}f(x^n)\cdot\delta x,$$

tedy i

$$xfx = x^n f(x^n).$$

Poněvadž n libovolně vzatá veličina jest, může vždy $x^n=a$*, tedy i afa=A postaviti, z čehož*

$$fx=\frac{A}{x}, \quad a \quad \delta\log x=\frac{A\delta x}{x} \quad \text{jde.}$$

Logaritmy, u nichž A=1 vzato, nazývají matematikové[3] přirozenými , z té příčiny jest pak

$$\delta\ \lambda o\gamma\ x = \frac{\delta x}{x} \qquad (2.12.).$$

Pro srozumitelnost postupu poznamenejme, že při přechodu ze vztahu $n\delta \log x = nx^{n-1} f(x^n)\delta x$ na $fx \cdot \delta x = x^{n-1} f(x^n) \cdot \delta x$ jsme obě strany rovnice podělili n a místo $\delta \log x$ dosadíme vztah $fx \cdot \delta x$. Pak už jenom rovnici rozšíříme x. Doplňme ještě, že pro jiný než přirozený logaritmus platí podobný vztah

$$\delta \log x = \frac{\mu \delta x}{x}, \qquad (2.13.)$$

kde μ $(\mu = A)$ je modul jakékoliv jiné soustavy logaritmů. Tento modul vzájemně spojuje logaritmy mezi sebou a tedy i dekadický logaritmus s přirozeným logaritmem, kdy pro $\mu=1$ dostaneme z dekadického logaritmu logaritmus přirozený.

Nyní k výpočtu diferenciálu exponenciálu (δa^x).

Hledajíce nápotom δa^x, postavme $a^x=y$, to dá logaritmováno $x\,\lambda o\gamma\, a = \lambda o\gamma\, y$ a diferencováno

$$\lambda o\gamma\, a \cdot \delta x = \frac{\delta y}{y}, \text{ čili } \delta y = \lambda o\gamma\, a \cdot y\delta x$$

tedy

$$\delta a^x = \lambda o\gamma\, a \cdot a^x\, \delta x, \qquad (2.14.)$$

a dosadíme-li místo a základ přirozených logaritmů e, kdež tedy $\lambda o\gamma\, e = 1$, nalezneme

$$\delta e^x = e^x \cdot \delta x \qquad (2.15.).$$

Uvedený výpočet není třeba nijak komentovat. Ve zbytku kapitoly jsou odvozeny vztahy pro diferenciály vyšších řádů, stejně tak i pro funkce více proměnných a polynomy.

Na závěr prvního kapitoly „Přídavku k algebře" shrneme výše uvedené. Václav Šimerka zde jako hlavní a nosné téma staví diferenciál, derivaci vnímá pouze jako „úkon odvozený". Zavedení diferenciálu je založeno na intuitivních infinitesimálních kalkulacích bez použití pojmu limita. Chybí jakýkoliv obrázek a tedy i jakýkoliv geometrický význam zavedených pojmů. Výsledné vždy odvozené vztahy pro výpočty s diferenciály (využívající téměř pokaždé zanedbání velmi malých přírůstků funkce) jsou totožné s dnes používanými vzorci pro derivování. Pro porovnání přístupu k zavedení určitého matematického pojmu „tehdy" a „nyní" jsme si ukázali na stránkách 24-26 této práce zavedení diferenciálu.

---

[3] Šimerka zde píše „matematikové", ačkoliv bychom vzhledem k době psaní tohoto textu očekávali spíše zápis „matematikové"

3.2.2. Proměňování úkonů v řady

V této části „Přídavku" je jako jedna z aplikací diferenciálů ukázána přeměna funkce na Mac-Laurinovu řadu, je zde uvedena a dokázána (přes Mac-Laurinovu řadu) binomická poučka a na závěr jsou odvozeny některé řady a ukázány výpočty odmocnin, logaritmů a exponenciálů.

Mac-Laurinovu řadu vnímáme jako speciální případ Taylorovy řady pro případ $c=0$ (c je střed rozvoje). Samotnou Taylorovu řadu však Šimerka uvádí v samostatném oddíle IV., kde jsou popsány i její aplikace. Věnujme se tedy pouze řadě Mac-Laurinově s tím, že v odstavci 3.2.4. „*Taylorova poučka a její následky*" splníme dluh a podrobně porovnáme ideu a aplikaci Taylorovy řady z pohledu dnešních učebnic a Šimerkova „Přídavku".

Základní myšlenka Mac-Laurinovy řady je podobná jako u diferenciálu, tedy nahradit libovolnou složitou funkci v bodě x funkcí jednodušší, a to mnohočlenem nejvýše stupně n. Speciálně pak pro $x=0$ má tato funkce tvar:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + r_{n+1}(0) \qquad (2.16.)$$

kde $r_{n+1}(0)$ je chyba, s níž nahradil polynom původní funkci. Odvození vztahu (2.16.) je provedeno později v kapitole 3.2.4. „*Taylorova poučka a její následky*".

Ukažme si nyní postup Václava Šimerky:

Mnohé úkony proměnné x dají se naznačiti řadou dle mocnosti z x postupující, totiž $fx = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \dots A_rx^r$, *kdež* A_0, A_1, A_2, A_3, $\dots A_r$ *stálé, posud však neznámé veličiny jsou. Má-li řada tato míti obecnou platnost, musí býti pravou i pro nesmírně malé x, tedy i pro x=0, z čehož potom* $A_0 = f0$ *jde. Diferencujíce výraz onen, obdržíme* $\delta fx = (A_1 + 2A_2x + 3A_3x^2 + \dots rA_r x^{r-1})\delta x$ *, a však* $\frac{\delta fx}{\delta x}$ *čili* $\frac{\delta y}{\delta x}$ *jest dle článku předešlého* $= f^1x$*, protož bude první odvozená funkce*

$$f^1x = A_1 + 2A_2x + 3A_3x^2 + \dots rA_r x^{r-1}$$

ježto pro každou hodnotu čísla x platí. Vezmeme-li i zde x nekonečně malé čili x=0, nalezneme $A_1 = f^10$.

Tímto způsobem postupuje Šimerka dále, postupně opakovaně diferencuje uvedenou funkci a dostává tak $f^2x = 2A_2 + 2\cdot 3A_3x + 3\cdot 4A_4x^2 + ... + (r-1)rA_r x^{r-2}$, při $x=0$ bude $f^2x = 2!A_2$, tedy $A_2 = \dfrac{f^2 0}{2!}$. Podobně $f^3x = 6A_3 + 2\cdot 3\cdot 4A_4x + ... + (r-2)(r-1)rA_r x^{r-2}$, při $x=0$ bude $f^3x = 3!A_3$, tedy $A_3 = \dfrac{f^3 0}{3!}$. Pokračujme nyní opět tak, jak je uvedeno v „Přídavku“:

odkudž snadno nahlédneme, že vůbec $A_r = \dfrac{1}{r}!f^r 0$ *platí. Takto jsme obdrželi*

$$fx = f0 + \frac{x}{1}f^1 0 + \frac{x}{2}!f^2 0 + \frac{x}{3}!f^3 0 + atd.atd.\frac{x^r}{r}!f^r 0 \qquad (2.17.).$$

Návodu toho bude tedy vždy a jen tu lze použíti, kdykoli se žádná z veličin $f0, f^1 0, f^2 0, atd. f^r 0$ *nestává nekonečně velikou.*

Je zřejmé, ačkoliv to zde není výslovně uvedeno, že při nahrazení funkce mnohočlenem Šimerka neuvažuje žádnou chybu, respektive malou chybu v řádu $(r+1)$ zanedbává. Jde tedy opět o další z intuitivních úprav.

Druhou odlišností je koncový tvar, kde faktoriál figuruje vedle zlomku, ačkoliv ho později používá pouze ve jmenovateli. V tomto případě se domnívám, že jde nejspíš o tehdejší dohodu v zápisu. Pokud bychom uvažovali označení faktoriálem pro celý zlomek, dostali bychom se do potíží se zavedením samotného faktoriálu, neboť jak později v této kapitole i Šimerka uvádí při výpočtu kombinačních čísel podle vztahu $\binom{n}{r} = \dfrac{n\cdot(n-1)\cdot...(n-r+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot r}$, uvažuje r pouze jako celé kladné číslo, ale n může být racionální nebo i záporné. Označením součinu $1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot r = r!$ dostáváme faktoriál jako součin celých kladných čísel. Faktoriál zlomku není definován (člen v Šimerkou udané řadě by byl řešitelný pouze pro celočíselné x, nemluvě o změně smyslu a neplatnosti odvození uvedené řady).

Třetí odlišností je absence mocnin proměnné x třetím členem počínaje a *(r-1)-tým* členem konče ([20], str.8). V tomto případě jde o chybu.

V další části této kapitoly je dokázána binomická věta přes Mac-Laurinovu řadu. Připomeňme si nejprve způsob odvození a vlastně i dokázání binomické poučky v takové podobě, jak se s nim mohou setkat současní středoškolští studenti například v [11], str. 77.

Pro $(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+ab+ba+b^2$ mají všechny součiny tvar aa, ab, ba, bb (což jsou vlastně všechny uspořádané dvojice z prvků a, b) a protože $ab+ba=2ab$ dostáváme tvar

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$$

Podobně tak pro $(a+b)^3=(a+b)(a+b)(a+b)=a^3+a^3b+2a^2b+2ab^2+ab^2+b^3$ mají všechny součiny tvar aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb (což jsou všechny uspořádané trojice z prvků a, b) a protože $aab+aba+baa=3a^2b$; $abb+bab+bba=3ab^2$ dostáváme

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

V obecném případě součinu n dvojčlenů dostaneme

$$(a+b)(a+b)\ldots(a+b)=(a+b)^n.$$

Jednotlivé součiny vzniklé roznásobením představují uspořádané n-tice sestavené z prvků a, b. Dále je důležité si uvědomit, kolik n-tic obsahuje stejný počet prvků a a stejný počet prvků b, neboť pouze součiny odpovídající těmto n-ticím lze sloučit (sečíst). Vzhledem k tomu, že se jedná o n-tou mocninu, bude platit, že pokud se prvek a bude v uspořádané n-tici opakovat k-krát, pak se prvek b bude opakovat $(n-k)$-krát. Uveďme si nyní některé n-tice a to tak, že jednotlivé členy a, b odlišíme indexy. Máme tedy

$$[a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, b_1, b_2, \ldots b_{n-k}, a_k],$$

$$[a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots b_{n-k}, a_{k-1}],$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$[a_k, a_{k-1}, \ldots, a_2, b_1, b_2, \ldots b_{n-k}, a_1].$$

Počet všech takto uspořádaných n-tic je vlastně permutace složená z n prvků, tedy $P(n)=n!$. Odstraníme-li dále v těchto permutacích indexy u prvku a, jejich počet se zmenší $k!$-krát. Provedeme-li totéž u prvků b, zmenší se navíc tato permutace ještě $(n-k)!$-krát. Označíme-li hledaný počet všech uspořádaných n-tic, v nichž se jeden ze dvou daných opakuje k-krát a druhý (n-k)-krát, symbolem $P_{(k,\,n-k)}$, dostaneme

$$P_{(k,n-k)}=\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Protože ale také platí

$$C_{k(n)}=\binom{n}{k}=\frac{n!}{(n-k)!k!},$$

znamená to, že

$$P_{(k,n-k)}=C_{k(n)}=\binom{n}{k}$$

Vynásobíme-li tedy n dvojčlenů $(a+b)$, dostaneme právě $\binom{n}{1}$ součinů $a^{n-1}b$ (existuje právě $\binom{n}{1}$ uspořádaných n-tic sestavených z $(n-1)$ prvků a z jednoho prvku b), dále pak právě $\binom{n}{2}$ součinů $a^{n-2}b^2$ atd. Obecně dostaneme právě $\binom{n}{k}$ součinů $a^{n-k}b^k$. Pro n-tou mocninu dvojčlenu $(a+b)$ tak dostáváme výsledek formulovaný v tzv. binomické větě:

Pro libovolná čísla a, b a pro každé přirozené číslo n platí:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

Václav Šimerka zde používá binomickou formuli pro ukázku výpočtu odmocniny, její platnost tedy rozšiřuje i pro racionální n. Nejprve se věnuje výpočtům kombinačního čísla podle pravidla $\binom{n}{r} = \dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot r}$ a ukazuje výpočet tohoto čísla pro jakoukoliv hodnotu čísla n a dokonce i pro záporná r. Vzhledem k tomu, že operace s kombinačními čísly nejsou námětem této práce, nebudeme se jimi zde dále zabývat[4]. Důkaz binomické poučky provádí přiřazením n-té mocniny dvojčlenu $(a+x)^n$ funkci a následně ji převádí na Mac-Laurinovu řadu. Tedy ([20], str. 11):

Pro $fx = (a+x)^n$ *bude* $f(0) = a^n$, *pak* $f^1x = n(a+x)^{n-1}$, *tedy* $f^1 0 = na^{n-1}$,

jakož i $f^2x = n(n-1)(a+x)^{n-2}$ *a* $f^2 0 = n(n-1)a^{n-2}$,

a dále $f^3x = n(n-1)(n-2)(a+x)^{n-3}$ $f^3 0 = n(n-1)(n-2)a^{n-3}$ *atd.*

Každým novým odvozením zmenšuje se exponent veličiny $(a+x)$ o jedničku, protož bude u $f^r x, (a+x)^{n-r}$. *Součinitel potence této jest součin, jenž při každém odvození o jednoho činitele roste; poněvadž pak činitelové tito n, n-1, n-2 atd. jsou, bude rtý z nich n-r+1, tedy* $f^r x = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)(a+x)^{n-r}$ *a* $f^r 0 = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)a^{n-r}$. *Způsobem tímto jsme nalezli* $(a+x)^n = a^n + na^{n-1}x + \dfrac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}x^2$ *atd.* $\dfrac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{r!}a^{n-r}x^r$, *čili*

$$(a+x)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}x + \ldots + \binom{n}{r}a^{n-r}x^r \qquad (2.18.),$$

ať již n jakékoli číslo znamená.

---

[4] Toto téma by bylo zajímavé jako rozšíření operací s kombinačními čísly na střední škole

Je viditelné, že Šimerkovo „dokázání" binomické poučky sleduje jinou myšlenku (rozklad přes Mc-Laurinovu řadu), než s jakou jsme se setkali ve výše uvedené středoškolské učebnici (odvození přes témata kombinatoriky). Je tomu bezesporu proto, že zde binomickou formuli definujeme pro libovolná *n*.

Aplikaci binomické poučky si ukážeme a porovnáme na výpočtu $\sqrt{101}$ přes Mac-Laurinovu řadu současným způsobem ([8], str. 303 a [11], str.129) a metodou uvedenou v „*Přídavku*" ([20], str. 13).

K výpočtu uvedené odmocniny použijeme Mac-Laurinův rozvoj funkce $f(x)=(1+\alpha)^{\alpha}$ O čísle α předpokládáme, že je reálné, speciálně může být i přirozené. Pro *k*-tou derivaci této funkce platí vztah $f^{(k)}(x)=\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$. Dosadíme-li do vzorce (2.16.), dostaneme

$$(1+x)^{\alpha}=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^{2}+...+\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^{n}+r_{n+1}(x).$$

Zavedením binomických koeficientů $\binom{\alpha}{0}=1,\binom{\alpha}{1}=\frac{\alpha}{1!},\binom{\alpha}{2}=\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}$ a obecně $\binom{\alpha}{k}=\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)}{k!}$ dostáváme hledaný binomický rozvoj

$$(1+x)^{\alpha}=1+\binom{\alpha}{1}x+\binom{\alpha}{2}x^{2}+...\binom{\alpha}{n}x^{n}+r_{n+1}(x). \qquad (2.19.)$$

Podobně jako Šimerka i my vzhledem k velmi malé velikosti r_{n+1} tento zbytek zanedbáme. Nyní se už můžeme věnovat samotnému výpočtu $\sqrt{101}$.

$$\sqrt{101}=\sqrt{100*1{,}01}=10\sqrt{(1+0{,}01)}=10(1+0{,}01)^{\frac{1}{2}}$$

K výpočtu $(1+0{,}01)^{\frac{1}{2}}$ využijeme binomický rozvoj (2.19.) dosazením x=0,01 pro *n=3*.

$$(1+0{,}01)^{\frac{1}{2}}=1+\binom{\frac{1}{2}}{1}\cdot 0{,}01+\binom{\frac{1}{2}}{2}\cdot 0{,}01^{2}+\binom{\frac{1}{2}}{3}\cdot 0{,}01^{3}=$$

$$=1+\frac{\frac{1}{2}}{1}\cdot 10^{-2}+\frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{1*2}\cdot 10^{-4}+\frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{1*2*3}\cdot 10^{-6}=$$

$$=1+\frac{1}{200}-\frac{1}{80000}+\frac{3}{48000000}=1{,}004988$$

Tedy $\sqrt{101}=10{,}04988$.

Proveďme výpočet stejné odmocniny metodou uvedenou v *„Přídavku“*. Podobně jako v předešlé úloze si nejprve odvodíme vhodnou formuli a pak provedeme konkrétní výpočet. Vyjdeme ze vzorce (2.18.), kdy členy binomického rozvoje nahradíme členy A_r, tedy:

$$(a+x)^n = A_0 + A_1 + A_2 + \dots A_r + A_{r+1} + \dots,$$

jest $A_r = \binom{n}{r} a^{n-r} x^r$, $A_{(r+1)} = \binom{n}{r+1} a^{n-r-1} x^{r+1} = \frac{n-r}{r+1}\binom{n}{r} a^{n-r} x^r \frac{x}{a}$ *z čehož*

$$A_{(r+1)} = \frac{n-r}{r+1}\cdot\frac{x}{a}\cdot A_r$$

co formule návratná plyne. Tak podává

$$\sqrt{b^2-y} = (b^2-y)^{\frac{1}{2}}, A_0 = b,$$

pak

$$A_{(r+1)} = \frac{\frac{1}{2}-r}{r+1}\cdot\frac{-y}{b^2}\cdot A_r = \frac{2r-1}{2r+2}\cdot A_r\cdot\frac{y}{b^2};$$

z toho jde při $r=0; A_1 = -\frac{1}{2}\cdot\frac{y}{b}$, $r=1; A_2 = -\frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}\cdot\frac{y^2}{b^3}$, $r=2; A_3 = -\frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{y^3}{b^5}$,

$r=3; A_4 = -\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{y^4}{b^7}$ *atd., z čehož další postup seznati; protož jest*

$$\sqrt{b^2-y} = b - \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{y}{b} + \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}\cdot\frac{y^2}{b^3} + \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{y^3}{b^5} + \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{y^5}{b^7}\ \text{atd. atd.}\right) \qquad (2.20.)$$

V odvození výše uvedeného vztahu používá Šimerka rekurentní postup. Jak sám uvádí ([20], str. 11): *„Mnohdy, zvláště, je-li n záporné neb lomené, bývá prospěšno následující členy řady této* (myšleno binomické řady) *z předcházejících vyvinovati, kterýž způsob počítání se návratným (rekurrirend) jmenuje“.* Je třeba jen pro plné porozumění způsobu odvození doplnit, že nahrazením ve formuli $A_{(r+1)} = \frac{n-r}{r+1}\binom{n}{r} a^{n-r} x^r \frac{x}{a}$ člen $A_r = \binom{n}{r} a^{n-r} x^r$ dostaneme

$A_{(r+1)} = \frac{n-r}{r+1}\cdot\frac{x}{a}\cdot A_r$. Ve vztahu pro odmocninu jsme pak do výše uvedeného dosadili $n = \frac{1}{2}$, $x=-y$, $a=b^2$. Nyní k samotnému výpočtu $\sqrt{101}$ pomocí předpisu (2.20.).

$$\sqrt{100-(-1)} = 10 - \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{(-1)}{10} + \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}\cdot\frac{(-1)^2}{10^3} + \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{(-1)^3}{10^5}\right) =$$

$$= 10 - \left(-\frac{1}{20} + \frac{1}{800} - \frac{3}{4800000}\right) = 10{,}04875$$

Poznamenejme, že Šimerka uvádí v příkladech na procvičení jiný výsledek, ke kterému se dostává následujícím způsobem:

$$\sqrt{101}=\sqrt{100*1{,}01}=10\sqrt{(1+0{,}01)}=10(1+0{,}01)^{\frac{1}{2}}$$

A volbou $b=1, y=-0{,}01$ pro $(1+0{,}01)^{\frac{1}{2}}$ dostává

$$[1-(-0{,}01)]^{\frac{1}{2}}=1-\left(\frac{1}{2}*\frac{(-0{,}01)}{1}+\frac{1*1}{2*4}*\frac{(-0{,}01)^2}{1^3}+\frac{1*1*3}{2*4*6}*\frac{(-0{,}01)^3}{1^5}\right)=$$

$$=1-\left(-\frac{1}{200}+\frac{1}{80000}-\frac{3}{48000000}\right)=1{,}004988$$

tedy

$$\sqrt{101}=10{,}04988,$$

(oba výsledky se nyní shodují). Dá se ukázat, že libovolný člen binomické řady je shodný s libovolným členem Šimerkou uvedené řady (Šimerkův rozvoj $(a+x)^n$ přejde pro volbu $a=1$ na námi používaný rozvoj $(1+x)^n$). Nespornou výhodou našeho způsobu je použití pro jakoukoliv odmocninu, zatímco v „Přídavku" je pouze odvození pro výpočet druhé odmocniny. Je zajímavé, že ačkoliv je zde uveden vzorec pro výpočet $\sqrt{b^2-y}$, tak se při konkrétním výpočtu dostáváme vhodnou úpravou ke vztahu $\sqrt{1-y_1}$, kde y_1 je hodnota proměnné y po vhodné úpravě. Rozdíl ve znaménku uvnitř dvojčlenu je pak samozřejmě kompenzován změnou znaménka v koncové formuli (2.20.).

Předposlední oddíl této kapitoly řeší otázku výpočtu logaritmů. Odvození vztahu si nebudeme uvádět, poznamenejme jen finální tvar

$$\lambda o\gamma\, y=\frac{1}{2}[\lambda o\gamma(y-1)-\lambda o\gamma(y+1)]+fy \qquad (2.21.),$$

kde

$$fy=\frac{1}{2y^2-1}+\frac{1}{3(2y^2-1)^3}+\frac{1}{5(2y^2-1)^5}+\dots \qquad (2.22.).$$

V odvození Šimerka přímo nenahrazuje $\log x$ Mac-Laurinovou řadou (ono to ani nejde, neboť pro $x=0$ není logaritmus definován, což zde není ani zmíněno), ale využívá rozvoj

$$\lambda o\gamma(1+x)=Ax+Bx^2+Cx^3+\dots.$$

Pro výpočet logaritmů využívá hodnotu čísel $\lambda o\gamma 2$ a $\lambda o\gamma 3$ a postupně dalších dopočítaných logaritmů. Ukažme si nyní výpočet právě $\lambda o\gamma 2$ a $\lambda o\gamma 3$ ([20], str. 14). Nejprve si dosazením do (2.22.) vypočteme hodnoty *f2=0,14384* a *f3=0,05889*. Dále pak s použitím (2.21.) dostaneme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, jejímž řešením jsou hledané logaritmy. $\lambda o\gamma 2 = \frac{1}{2}(\lambda o\gamma 3 + \lambda o\gamma 1) + f2 = \frac{1}{2}\lambda o\gamma 3 + f2$ a odtud $2\lambda o\gamma 2 - \lambda o\gamma 3 = 2f2$

$\lambda o\gamma 3 = \frac{1}{2}(\lambda o\gamma 2 + \lambda o\gamma 4) + f3 = \frac{1}{2}(\lambda o\gamma 2 + 2\lambda o\gamma 2) + f3$ a odtud $-3\lambda o\gamma 2 + 2\lambda o\gamma 3 = 2f3$

Dořešením výše uvedené soustavy dvou rovnic o dvou neznámých dostaneme

$$\lambda o\gamma 2 = 4f2 + 2f3 = 0{,}69315$$

$$\lambda o\gamma 3 = 6f2 + 4f3 = 1{,}09861$$

K výpočtu dalších logaritmů se pak využívá vět pro součin, podíl a mocniny argumentu logaritmů a využíváme samozřejmě hodnot logaritmů již dříve vypočítaných. Uveďme si například výpočet $\lambda o\gamma 5$.

$$\lambda o\gamma 5 = \frac{1}{2}(\lambda o\gamma 4 + \lambda o\gamma 6) + f5 = \frac{1}{2}(2\lambda o\gamma 2 + \lambda o\gamma 2 + \lambda o\gamma 3) + f5 = 1{,}60944.$$

Poznamenejme jen, tak jak již bylo uvedeno v předchozí kapitole, že pod zápisem $\lambda o\gamma\, x$ dnes rozumíme přirozený logaritmus $\ln x$. Jiné než přirozené logaritmy řeší Šimerka pomocí převodových modulů μ (zmínili jsem se o nich v minulé kapitole).

V poslední části je pak ukázán výpočet a^n opět rozvojem přes Mac-Laurinovu řadu na $a^n = 1 + \lambda n + \frac{1}{2}!(\lambda n)^2 + \frac{1}{3}!(\lambda n)^3 + \ldots$, kde se opět setkáme s problémem faktoriálu zlomku, který jsme si už jednou v této kapitole vysvětlili. Speciálně je pak v úplném závěru vypočítána hodnota *e*. K tomuto rozvoji se budeme odvolávat hned v následující kapitole, proto si jeho odvození uvedené v „Přídavku" nyní ukážeme([20], str.15).

Vezměme funkci $f(x) = a^x$ f(x)=a^x a s použitím vztahu (2.17.) vyjádřeme uvedenou funkci jako řadu. Poznamenejme ještě, že Václav Šimerka zde pro zjednodušení zápisu používá $\lambda o\gamma\, a = \lambda$.

$$f^1x = \lambda a^x, f^2x = \lambda^2 a^x, f^3x = \lambda^3 a^x, \ldots atd \ldots f^r x = \lambda^r a^x$$

tedy

$$a^x = 1 + \lambda x + \frac{1}{2}!(\lambda x)^2 + \frac{1}{3}!(\lambda x)^3 + \ldots + \frac{1}{r}!(\lambda x)^r$$

Pro pochopení tvaru řady jen připomeňme, že $\lambda x = \lambda o\gamma\, a \cdot x$ (součin x a $ln a$) a pro Mac-Laurinovu řadu bude $a^x = 1$. Je-li navíc a základ dané logaritmické soustavy, budeme moci pro libovolné číslo n psát $n = \log_a X$ a odtud $X=a^n$. Nyní zpět k postupu uvedeném v „Přídavku".

$$X = a^n = 1 + \lambda n + \frac{1}{2}!(\lambda n)^2 + \frac{1}{3}!(\lambda n)^3 + \dots .$$

Dosadíme-li za a basis přirozených logaritmů, jde z toho při $\lambda = \lambda o\gamma\, e = 1$ *řada*

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}!x^2 + \frac{1}{3}!x^3 + \frac{1}{4}!x^4 + \dots \qquad (2.23.),$$

z čehož při $x = 1$ *nalezneme* $e = 2{,}71828183$.

Shrňme si nyní celou tuto kapitolu. Václav Šimerka zde zavádí pojem Mac-Laurinovy řady a ukazuje její aplikaci na výpočty odmocnin (přes binomický rozvoj), logaritmů a exponenciálů. Vůbec se nezmiňuje o Taylorově řadě, ačkoliv právě Mac-Laurinova řada je zvláštním tvarem Taylorovy řady. Opět se objevují intuitivní úpravy, kdy je určitá funkce nahrazena přibližnou řadou tak, jako by se řada a funkce sobě rovnaly (nezmiňuje se o zbytku řady). Samotná postupná odvození jednotlivých formulí jsou často obtížně pochopitelná, (např. výpočet logaritmů), objevují se zde zdánlivě bezúčelné úpravy, které se pak v závěru ukážou jako vhodné (např. při odvození výpočtu logaritmů se používá substituce $\frac{1+x}{1-x} = \frac{y^2}{y^2-1}$). Přidáme-li k výše uvedenému i pro nás neznámé nebo spíše nesrozumitelné formy zápisu (faktoriál zlomku $\frac{1}{x}!$ chápeme jako $\frac{1}{x!}$), jeví se tato kapitola jako obtížně pochopitelná.

3.2.3. Úkony trigonometrické

Třetí kapitola „*Přídavku*" se zabývá goniometrickými funkcemi, respektive rozšiřuje jejich zavedení nejen pro úhly z intervalu $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, tak jak je zavedeno již dříve v trigonometrii[5], ale na celou množinu R. Postup tohoto rozšíření využívá porovnání již dříve zavedených pravidel (funkce součtu, rozdílu a dvojnásobného argumentu u funkcí sinus a kosinus) s pravidly odvozenými nyní. Ukažme si a okomentujme tento postup ([20], str. 15).

K odvození využijeme Mac-Laurinův rozvoj funkce e^x (2.23.) z předešlé kapitoly. *Dosadíme-li do uvedené rovnice ix čili* $x\sqrt{-1}$ *místo x, obdržíme oddělivše část reálnou od pomyslné*

$$e^{ix}=1-\frac{1}{2}!x^2+\frac{1}{4}!x^4-\frac{1}{6}!x^6+\ldots+i\left(x-\frac{1}{3}!x^3+\frac{1}{5}!x^5-\frac{1}{7}!x^7+atd.\right),$$

a uvedeme-li do formule této hodnoty

$$Sinx=x-\frac{1}{3}!x^3+\frac{1}{5}!x^5-\frac{1}{7}!x^7+\ldots \qquad (2.24.)$$

$$Cosx=1-\frac{1}{2}!x^2+\frac{1}{4}!x^4-\frac{1}{6}!x^6+\ldots \qquad (2.25.),$$

kdež prozatím pro rozeznávání od trigonometrických sinů a cosinů velkého S a C užívati, a výrazy ty za pouhé algebraické funkce považovati můžeme, bude

$$e^{ix}=Cosx+iSinx \qquad (2.26.).$$

Ve zbytku tohoto oddílu a i v následujících dvou oddílech odvozuje Šimerka některé vztahy pro sinus a kosinus pomocí formulí (2.24.), (2.25.) a (2.26.) a porovnává je se vztahy uvedenými v kapitole „Trigonometrie" učebnice „*Algebra, čili počtářství obecně*". Ukažme si je:

a) dosazením do (2.24.) a (2.25.) dostaneme *Sin(-x)=-Sinx* a *Cos(-x)=Cosx*

b) záměnou *ix* za *–ix* dostaneme z (2.26.) $e^{-ix}=Cosx-iSinx$, pak $e^{ix}\cdot e^{-ix}=e^0=1$ a tedy $e^0=Cos^2x-(iSinx)^2$ čili $Cos^2x+Sin^2x=1$

---

[5] Goniometrické funkce, respektive vztahy pro výpočty s nimi, na intervalu $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ jsou zavedeny v oddíle XII. Šimerkovy učebnice „Algebra, čili počtářství obecně"

c) z předešlého plyne $Sinx = \pm\sqrt{1 - Cos^2 x}$ a $Cosx = \pm\sqrt{1 - Sin^2 x}$ a odtud plyne, že *jak Sinx tak i Cosx vždy ≤1 býti musí*

d) protože máme zavedeno $e^{ix} = Cosx + iSinx$, zavedeme i $e^{iy} = Cosy + iSiny$ a odtud pro součin dostáváme $e^{ix} \cdot e^{iy} = e^{i(x+y)} = (Cosx + iSinx) \cdot (Cosy + iSiny)$, což po roznásobení a rozdělení na reálnou a imaginární složku dává $e^{i(x+y)} = CosxCosy - SinxSiny + i(SinxCosy + CosxSiny)$. Odtud už dostáváme vzorce: $Sin(x+y) = SinxCosy + CosxSiny$;

$Cos(x+y) = CosxCosy - SinxSiny$.

S využitím pravidla *a)* uvedeného na předchozí straně a při dosazení $(-y)$ dostáváme: $Sin(x-y) = SinxCosy - CosxSiny$

$Cos(x-y) = CosxCosy + SinxSiny$.

e) s využitím předchozího součtového vzorce dosazením x za y dostaneme

$$Sin2x = 2Sin\,x\,Cos\,x$$

$$Cos2x = Cos^2 x - Sin^2 x$$

f) zvolíme nějaký úhel φ, pro nějž platí $Sin\varphi = \frac{1}{4}\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)$ a nalezneme pomocí pravidla *c)* uvedeného výše $Cos\varphi = \frac{1}{4}\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)$. Odtud pak využitím pravidel pro dvojnásobný úhel a součtového pravidla dostaneme:

$$Sin2\varphi = \frac{1}{2}\ ;\ Cos2\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$Sin3\varphi = \sqrt{\frac{1}{2}}\ ;\ Cos3\varphi = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$Sin6\varphi = 1\ ;\ Cos6\varphi = 0$$

$$Sin12\varphi = 0\ ;\ Cos12\varphi = -1$$

$$Sin24\varphi = Sin0 = 0\ ;\ Cos24\varphi = Cos0 = 1$$

Tyto a svrchu udané vlastnosti funkcí Sin x, Cos x okazují, že úkony ty zde to samé znamenají, co v trigonometrii, takže napotom 24φ souhlas s 360 čili φ s 15ti stupni; protož budeme i místo Sin x, Cos x moci pouze sin x a cos x psáti.

Srovnáním právě odvozených pravidel s pravidly odvozenými v trigonometrii (přesněji jde o shodu pravidel v obou zmiňovaných případech) vyvozuje Šimerka zavedení *sinx* a *cosx* pomocí formulí (2.24.) a (2.25.). Bylo by vhodné doplnit, jak se nám podaří ze $Sin\varphi = \frac{1}{4}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$ pomocí $Cos\,x = \pm\sqrt{1-Sin^2 x}$ určit hodnotu $Cos\varphi = \frac{1}{4}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$.

Ačkoliv je zde přímo navržen postup (vedl by k výsledku $Cos\,x = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$), nalezení tvaru $Cos\varphi = \frac{1}{4}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$ vychází z využití $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$. Nabízí se dále otázka, proč byla zvolena velikost úhlu φ právě 15°. Zřejmě se jedná o úmyslně zvolenou velikost úhlu tak, aby se jeho sinus a kosinus dal vyjádřit vhodnými čísly.

Citujme ještě jednou Václava Šimerku tak, jak uvádí v poznámce k právě probrané části kapitoly „Úkony trigonometrické" ([20], str. 17):

„Rovnice 8., 9., 10., 11. (formule uvedené v *d)*) *jakož i věty tuto co jejich následek uvedené nejsou, ač o nich též trigonometrie jedná, zde zbytečně umístěny. V trigonometrii nelze je totiž v úplné jich obecnosti provésti, jelikož tam x, y pouze za kladné platí a* $x+y\langle 90°$ *neb nanejvýš =90° jest. Za to však zde použito pomyslného, jehož se posud mnozí algebraisté štítí; avšak veličina* $i=\sqrt{-1}$ *slouží tuto jen ku zkrácení důkazů, jež i bez ní ovšem že dosti obtížně provést lze".*

Uvedená citace ukazuje, s čím se potýkali mnozí matematici ve vztahu ke svému odbornému okolí. Zavádění nových metod (nemluvě o nových tématech v matematice) vždy naráželo na nedůvěru nebo dokonce neochotu (v našem případě se někteří algebraisté „štítí" komplexních čísel a to už se ve vyšší matematice používaly téměř 100 let).

Další kapitola navazuje na výpočty s úhlem φ. Nejprve je zde zaveden pojem „doplňkové úhly", což jsou dva úhly, kde sinus jednoho je roven kosinu druhého a jejichž součet dává $\frac{\pi}{2}$ (Šimerka uvádí 6φ). Pro doplňkový úhel *a* pak evidentně platí:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right) = \cos a \quad \text{jakož i} \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)$$

Opět podobným způsobem jako při výpočtu s úhlem φ ukazuje Šimerka (s použitím vzorců pro součty a rozdíly argumentů sinů a kosinů a vztahu pro doplňkové úhly) jejich vzájemné vztahy postupně pro $\frac{\pi}{2} \pm a; \pi \pm a, 2\pi + a,\ 4\pi + a$ a z toho obecně vyvozuje:

$$\sin(2\pi t + a) = \sin a \quad , \quad \cos(2\pi t + a) = \cos a \qquad (2.27.)$$

pro jakékoliv celé číslo t. Tímto způsobem se zde uvádí další vlastnost goniometrických funkcí sinus a kosinus – periodičnost s periodou 2π (Šimerka nemluví o periodičnosti a periodě, ale používá pojem „model oblouků 2π").

V tomto odstavci si ukážeme dva zajímavé výsledky, logaritmy záporných čísel a tvar čísla i^i ([20], str. 17). Nejprve si zvolíme ve vztahu (2.27.) za $a = \frac{\pi}{2}$ a dostaneme

$$\sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right) = 1\,;\, \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right) = 0\,.$$

Vezmeme-li v rovnici (2.26.) $x = \left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}(4t+1)$, dostaneme $e^{\frac{i\pi}{2}(4t+1)} = 0 + 1i = i\,.$

Když potom uvedenou rovnost logaritmujeme, dostaneme

$$e^{\frac{i\pi}{2}(4t+1)} = i$$

$$\frac{i\pi}{2}(4t+1) = \lambda o\gamma\sqrt{-1}$$

$$\frac{i\pi}{2}(4t+1) = \frac{1}{2}\lambda o\gamma(-1)$$

Odtud potom Šimerka vyvozuje vztah

$$\lambda o\gamma(-M) = \lambda o\gamma M + i\pi(4t+1) \qquad (2.28.),$$

a uvádí: *„Logaritmy veličin záporných jsou čísla přežitá".*

Není zřejmé, jak se ze vztahu $\frac{i\pi}{2}(4t+1) = \frac{1}{2}\lambda o\gamma(-1)$ dostal Šimerka k výrazu (2.28.).

Pravděpodobně, jak už bylo několikrát ukázáno, rozšířil Šimerka odvození pro $\lambda o\gamma\sqrt{-1}$ na odmocninu z jakéhokoliv záporného čísla aniž by cokoliv dokázal. Předpokládáme, že zobecnění bylo provedeno intuitivně a pomocí znalostí z předcházející učebnice, jejíž je náš „*Přídavkem*" dodatkem (není tady dokonce ani žádný důkaz naznačen, není zde žádné odvolání na látku dříve probranou). Důkaz uvedeného by studenti mohli provést asi přes komplexní čísla, respektive přes jejich exponenciální tvar (vzhledem k tomu, že komplexní čísla byla tehdy novinkou a někteří algebraisté se jich dokonce „štítili", je naše úvaha pouze dohad). Dokažme si tedy nyní platnost vztahu (2.28.).

Nejprve si vyjádříme $\sqrt{-M}$ jako komplexní číslo v goniometrickém tvaru a následně v exponenciálním tvaru (viz obr.2.2.).

$$\varphi = \pi, \text{ tedy } -M = M[\cos(\pi + 2t\pi) + i\sin(\pi + 2t\pi)] \text{ pro } t \in Z$$

a odtud s použití Moivreovy věty

$$\sqrt{-M} = \sqrt{M}\left(\cos\frac{\pi + 2t\pi}{2} + i\sin\frac{\pi + 2t\pi}{2}\right) = \sqrt{M} * e^{i\left(\frac{\pi+2t\pi}{2}\right)} = \sqrt{M} * e^{\frac{i\pi}{2}(2t+1)} = \sqrt{M * e^{i\pi(2t+1)}}.$$

Budeme-li uvedenou rovnost logaritmovat, dostane téměř Šimerkův vztah (u nás vycházejí všechny liché násobky $i\pi$, v „*Přídavku*“ jen ob liché násobky $i\pi$).

$$\sqrt{-M} = \sqrt{M * e^{i\pi(2t+1)}}$$

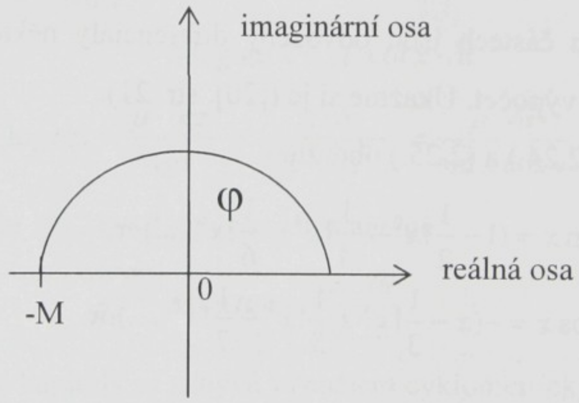
$$\ln\sqrt{-M} = \ln\sqrt{M * e^{i\pi(2t+1)}}$$

$$\frac{1}{2}\ln(-M) = \frac{1}{2}\ln\left(M * e^{i\pi(2t+1)}\right)$$

$$\frac{1}{2}\ln(-M) = \frac{1}{2}\ln M + \frac{1}{2}\ln e^{i\pi(2t+1)}$$

$$\ln(-M) = \ln M + i\pi(2t+1)$$

Důvod, proč se v koncovém vztahu lišíme v násobcích, bude pravděpodobně, že pro Šimerku je kořenem $\sqrt{-1}$ pouze *i*, nikoliv *±i*.



Obr. 2.2.

Není bez zajímavosti, že je zde sice nepřímo zmíněn jeden z nejzajímavějších vztahů matematiky $e^{i\pi} + 1 = 0$, který vychází už z Eulerem známým a Gaussem dokázaným řešením rovnice $x^2+1=0$ mimo obor reálných čísel[6]. Hledáme-li řešení uvedené rovnice, dostáváme se ke vztahu $x=\pm\sqrt{-1}$, který jsme již výše zmínili.

---

[6] Již dvakrát jsme se zmínili o zvláštním vztahu ke komplexním číslům a nyní tak učiníme naposledy, kdy jen pro posouzení pozice komplexních čísel uvádíme,že takový matematik, jako byl Leibniz, je nazval „kříženci mezi bytím a nebytím“

Ukažme si nyní výpočet čísla i^i tak, jak je uveden v *„Přídavku"*. Využijeme výsledku získaném v předchozím odstavci.

Postavme $i^i=u$, *bude* $\lambda o\gamma\, u = i\lambda o\gamma\, i$ *a poněvadž* $\lambda o\gamma\, i = \lambda o\gamma\sqrt{-1} = \frac{i\pi}{2}(4t+1)$, *obdržíme*

$\lambda o\gamma\, u = -\frac{\pi}{2}(4t+1)$, *tedy* $u = i^i = e^{-\frac{\pi}{2}(4t+1)}$, *ať již t jakékoli celé číslo jest.*

Opět by se náš výsledek lišil pouze v násobku $-\frac{\pi}{2}$.

V oddíle 18. jsou zavedeny další goniometrické funkce

$$tg\, x = \frac{\sin x}{\cos x};\ \cot x = \frac{\cos x}{\sin x};\ \sec x = \frac{1}{\cos x};\ \cos ec\, x = \frac{1}{\sin x}.$$

Pro funkci *tg x* se odvozují vztahy pro součet a rozdíl argumentů a pro dvojnásobný argument. Odvození se provádí dosazením $tgx = \frac{\sin x}{\cos x}$ a použitím dříve uvedených vzorců pro $\sin x$ a. $\cos x$. Poznamenejme, že tehdejší označení $\cot x$je shodné s dnešním $\cot g\, x$. V dalším oddíle jsou zavedeny inversní funkce ke všem uvedeným goniometrickým funkcím (cyklometrické funkce).

V posledních dvou částech jsou odvozeny diferenciály některých goniometrických funkcí a je ukázán i jejich výpočet. Ukažme si je ([20], str. 21):

Diferencujeme-li vztahy (2.24.) a (2.25.) obdržíme

$$\delta \sin x = (1 - \frac{1}{2}!x^2 + \frac{1}{4}!x^4 - \frac{1}{6}!x^6 .....)\delta x,$$

$$\delta \cos x = -(x - \frac{1}{3}!x^3 + \frac{1}{5}!x^5 - \frac{1}{7}!x^7 .....)\delta x,$$

z čehož jde

$$\delta \sin x = \cos x\, \delta x \qquad (2.29.)$$

$$\delta \cos x = -\sin x\, \delta x \qquad (2.30.).$$

Ten samý výsledek podává i diferencování rovnice (2.26.). *Dále jde z článku předešlého*

$$\delta tgx = \delta\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x\,\delta \sin x - \sin x\,\delta \cos x}{\cos^2 x} = \frac{\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right)\delta x}{\cos^2 x}$$

tj.

$$\delta tgx = \frac{\delta x}{\cos^2 x} \qquad (2.31.)$$

Pro plné porozumění úpravy dodejme, že nejprve byl výraz $\frac{\sin x}{\cos x}$ rozšířen $\cos x$ a pak byl v čitateli použit vztah pro součin diferenciálů z první kapitoly. Další úpravy jsou zřejmé.

Dále pak $\delta \cot x = \delta \frac{\cos x}{\sin x} = -\frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)\delta x}{\sin^2 x}$, *tedy*

$$\delta \cot x = -\frac{\delta x}{\sin^2 x} \qquad (2.32.)$$

Podobným způsobem, tedy s pomocí vztahů odvozených v předešlých kapitolách jsou zde ukázány formule pro výpočty diferenciálů cyklometrických funkcí a to pro $arc\sin x$, $arc\cos x$ a pro $arc\,tg\,x$ Ukažme si pro ilustraci výpočet diferenciálu například $arc\sin x$:

Je-li $\sin y = x$, *bude* $\cos y \cdot \delta y = \delta x$ *a* $\cos y = \sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{1-x^2}$, *tedy* $\delta y = \frac{\delta x}{\sqrt{1-x^2}}$ *a*

protože $arc\sin x = y$ *bude*

$$\delta\, arc\sin x = \frac{\delta x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (2.33.).$$

Z dalších diferenciálů jsou v této části odvozeny ještě dva. Nejprve $\delta \log \sin x = \frac{\mu \cdot \delta \sin x}{\sin x} = \frac{\mu \cdot \cos x \cdot \delta x}{\sin x}$ a odtud pak dostaneme

$$\delta \log \sin x = \mu \cdot \cot x \cdot \delta x \qquad (2.34.).$$

Podobně odvodíme i $\delta \log tgx = \frac{\mu \cdot \delta tgx}{tgx} = \frac{\mu \cdot \delta x}{tgx \cdot \cos^2 x} = \frac{\mu \cdot \delta x}{\sin x \cos x}$ a s použitím vztahu pro sinus dvojnásobného úhlu $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ dostaneme

$$\delta \log tgx = \frac{2\mu \cdot \delta x}{\sin 2x} \qquad (2.35.).$$

Poslední část celé kapitoly se zabývá výpočtem cyklometrických funkcí rozvojem přes Mac-Laurinovu řadu. Opět je ukázán pouze rozvoj funkcí $arc\sin x$ a $arc\,tg\,x$, kdy se předpokládá, že zbývající cyklometrické funkce si student odvodí sám. Příslušný výpočet je ukázán na konkrétních příkladech (x vyjde v radiánech).

Tak, jako v předchozích kapitolách, shrneme vše výše probrané. Celá kapitola, tak jak její název napovídá, se zabývá goniometrickými a cyklometrickými funkcemi. Dochází k rozšíření pole působnosti těchto funkcí z trigonometrie do dalších částí matematiky. Za zvláštní zmínku stojí určitě aplikace komplexních čísel pro zavedení sinu a kosinu proměnné x.

3.2.4. Taylorova poučka

Čtvrtá kapitola pojednává o Taylorově řadě. Jak Václav Šimerka uvádí: *„Poučka tato se nazývá dle svého nálezce Taylor'ovou, jest pak jedna z nejdůležitějších v počtu differenciálném*" ([20]; str. 24). Očekávali bychom, už pro její zmíněnou důležitost, že zde najdeme její odvození i s důkazem, že se objeví i její geometrický význam, ale není tomu tak. Podobně, jako v kapitole 3.2.2. („*Proměňování úkonů v řady*"), je zde uvedeno odvození se zanedbáním zbytku řady a následují aplikace uvedené řady. Jde o výpočty čísel ve tvaru $\frac{0}{0}$, výpočet maxim a minim funkce a výpočet rovnic vyšších než kvadratických řádů, speciálně pak kubických rovnic.

Ukažme si nejprve odvození Taylorovy řady uvedené v našich učebnicích ([11], str.124) a následně v „*Přídavku*".

Vyjdeme ze stejné úvahy, jako při zavedení diferenciálu na str. 24 této práce. Nějakou složitější funkci $f(x)$ v nejbližším okolí bodu c nebudeme nahrazovat pouze lineární funkcí, tedy $f(x) = A_0 + A_1(x-c)$, ale obecným polynomem nejvýše stupně n ve tvaru $P_n(x)$. Příslušný „náhradní" polynom, který se nejlépe přimyká v nejbližším okolí bodu c k původní funkci $f(x)$ má tvar

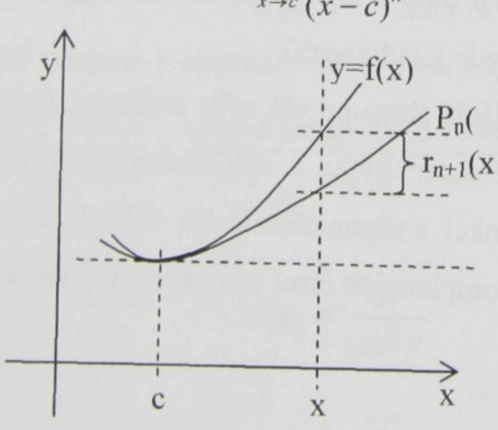
$$P_n(x) = A_0 + A_1(x-c) + A_2(x-c)^2 + \ldots + A_n(x-c)^n.$$

Odtud tedy pro původní funkci $f(x)$ platí vztah

$$f(x) = P_n(x) + r_{n+1}(x) = A_0 + A_1(x-c) + A_2(x-c)^2 + \ldots + A_n(x-c)^n + r_{n+1}(x),$$

kde $r_{n+1}(x)$ je chyba, kterou uděláme, nahradíme-li funkci $f(x)$ hodnotou $P_n(x)$ (viz obr.2.3.). Chyba by měla být co nejmenší. Tento požadavek vyjádříme podmínkou

$$\lim_{x \to c} \frac{r_{n+1}(x)}{(x-c)^n} = 0. \qquad (2.36.)$$



Obr 2.3.

Myšlenka , která se za podmínkou (2.36.) skrývá, je plně srozumitelná, uvědomíme-li si, jaká je vzájemná velikost funkčních hodnot funkcí $1;(x-c);(x-c)^2;...,(x-c)^n$ v okolí bodu c. Je-li $|x-c|<1$, pak se absolutní hodnoty mocnin $(x-c)^k$ se vzrůstajícím k zmenšují. Užijeme-li proto všech mocnin až do n-té, pak by mohlo být docela dobře možné, že při vhodně zvolených konstantách $A_0, A_1, ...A_n$ bude rozdíl $f(x)-P_n(x)=r_{n+1}(x)$ menší než poslední použitá mocnina, kterou je $(x-c)^n$, a která je ze všech použitých mocnin v blízkosti bodu c skutečně nejmenší. Ukažme si, že konstanty $A_0, A_1, ...A_n$ jsou podmínkou (2.36.) jednoznačně určeny.

Nechť existuje n-tá derivace $f^{(n)}(c)$, konečná. Pak existuje právě jeden polynom P_n , tj. konstanty $A_0, A_1, ...A_n$, že funkce $r_{n+1}(x)$ splňuje podmínku *(2.2.4.1.)*. Konstanty, které jsou tedy jednoznačně určeny, jsou rovny

$$A_0 = f(c); A_1 = \frac{f'(c)}{1!}; A_2 = \frac{f''(c)}{2!};...; A_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}.$$

Pokračujme dále důkazem Taylorovy věty ([8],str. 126).

Důkaz si ukážeme pro polynom stupně $n=2$. Funkce by v tomto případě byla nahrazena polynomem $P_2(x) = A_0 + A_1(x-c) + A_2(x-c)^2$, tedy podmínka (2.36.) má tvar

$$\lim_{x\to c}\frac{r_3(x)}{(x-c)^2} = \lim_{x\to c}\frac{f(x)-A_0-A_1(x-c)-A_2(x-c)^2}{(x-c)^2} = 0. \qquad (2.37.)$$

Dosadíme-li $x=c$, dostaneme zlomek $\frac{f(c)-A_0}{0}$. Pokud by $A_0 \neq f(c)$, byly by limita (2.37.) nevlastní. Jelikož ale má býti nulová, musí být $A_0 = f(c)$. Dosadíme-li tedy opět do té samé limity, dostaneme $\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)-A_1(x-c)-A_2(x-c)^2}{(x-c)^2} = 0$. Odtud znovu po dosazení za $x=c$ dostaneme tvar $\frac{0}{0}$. Na limitu tohoto tvaru můžeme použít l'Hospitalovo pravidlo. Dostaneme pak

$$\lim_{x\to c}\frac{f'(x)-A_1-2A_2(x-c)}{2(x-c)}. \qquad (2.38.)$$

Existuje-li tato limita, musí být rovna nule. Dosadíme-li $x = c$, dostaneme $\dfrac{f'(c) - A_1}{0}$. A opět: bylo-li by $A_1 \neq f'(c)$, byla by limita (2.38.) nevlastní a protože musí být nulová, musí být $A_1 = f'(c)$. Dosadíme-li za A_1 do (2.38.), budeme mít

$$\lim_{x \to c} \frac{f'(x) - f'(c) - 2A_2(x - c)}{2(x - c)}. \qquad (2.39.)$$

Dosadíme-li $x = c$, dostaneme zlomek $\dfrac{0}{0}$. Na limitu tohoto tvaru můžeme opět použít l'Hospitalovo pravidlo. Dostaneme pak

$$\lim_{x \to c} \frac{f''(x) - 2!\,A_2}{2!}. \qquad (2.40.)$$

Existuje-li tato limita, musí být rovna nule, neboť předchozí výrazy musí mít tutéž limitu a o (2.37.) víme, že má být nulová. Dosadíme-li v (2.40.) $x = c$, dostaneme $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f''(c) - 2!\,A_2}{2!}$.

Tato limita bude nulová jen v případě, když $A_2 = \dfrac{f''(c)}{2!}$. Tak jsme zjistili, že platí-li (2.37.), platí nutně $A_k = \dfrac{f^{(k)}(c)}{k!}$, *k=0, 1, 2*. Tím je úvodní tvrzení pro n=2 dokázané. Nyní už můžeme zformulovat „Taylorovu větu“:

Nechť existuje $f^n(c)$, konečná. Definujeme-li funkci $r_{n+1}(x)$ předpisem

$$T_n(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x - c) + \frac{f''(c)}{2!}(x - c)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} + r_{n+1}(x), \qquad (2.41.)$$

pak platí

$$\lim_{x \to c} \frac{r_{n+1}(x)}{(x - c)^n} = 0.$$

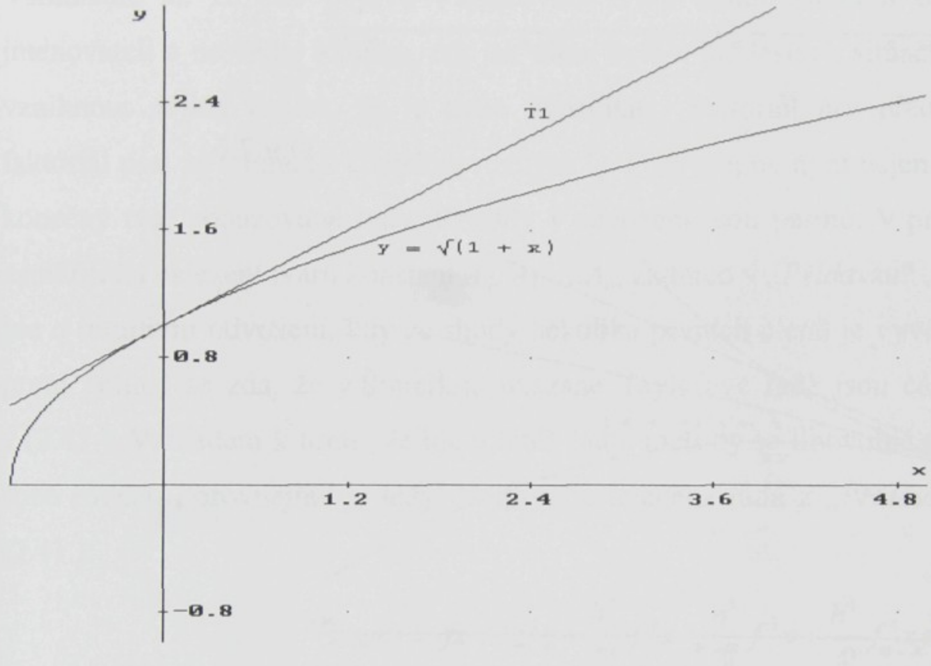
Je třeba si uvědomit, že vhodnou aproximaci funkce $T_n(x)$ Taylorovým polynomem provádíme v nejbližším okolí bodu *c*. (příslušná „náhradní“ funkce neaproximuje původní funkci na jejím celém definičním oboru, ale jen v nejbližším okolí bodu *c*). Pro plné porozumění Taylorovy řady si zde ukažme například funkci $f(x) = \sqrt{1 + x}$, kterou si nahradíme v bodě *c=0* postupně polynomem stupněm 1,2,3 (tuto funkci jsme používali v kapitole 3.2.2. „*Proměňování úkonů v řady*“). Dostaneme tak následující Taylorovy polynomy:

$$T1 = 1 + \frac{1}{2}x \text{......................obr. 2.4.}$$

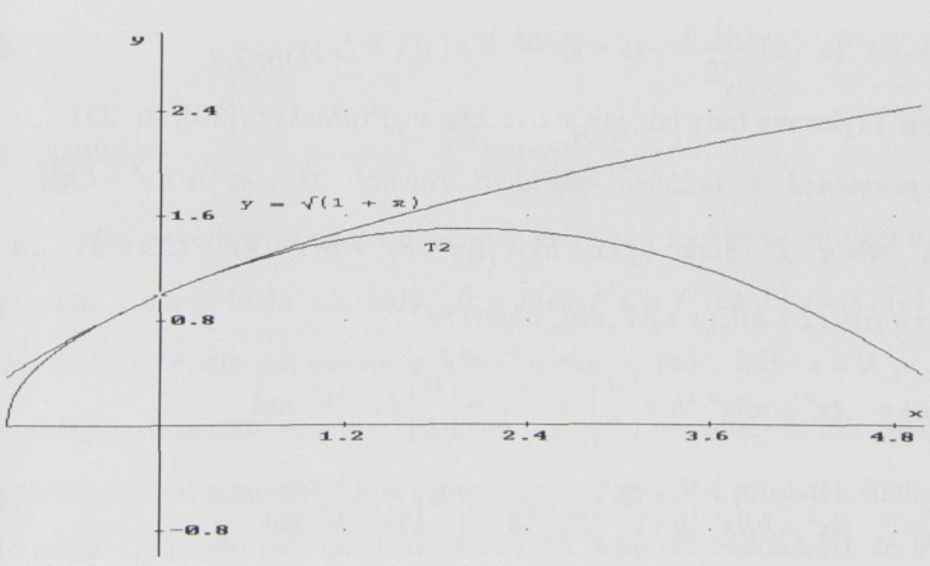
$$T2 = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \text{................obr. 2.5.}$$

$$T3 = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} \text{..........obr.2.6.}$$

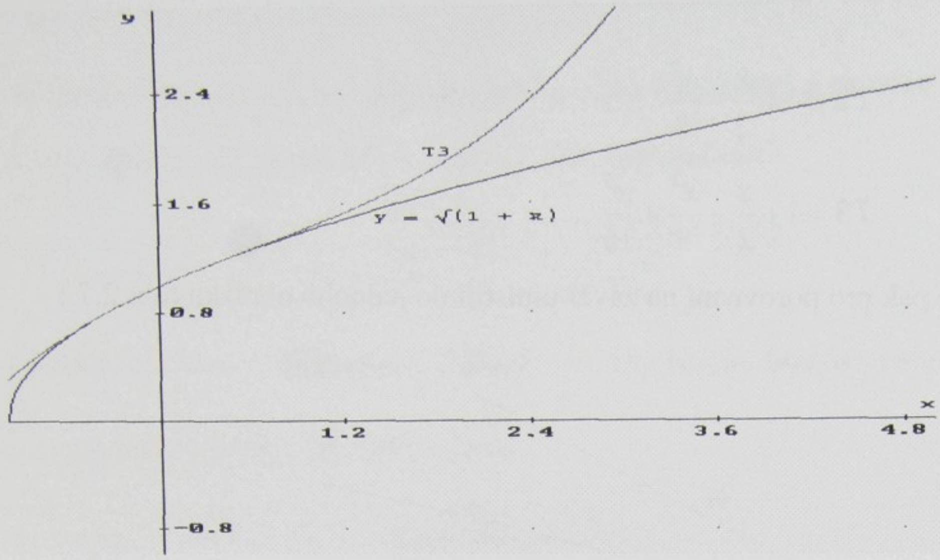
Všechny polynomy jsme pak pro porovnání na závěr umístili do jednoho obrázku (obr.2.7.)



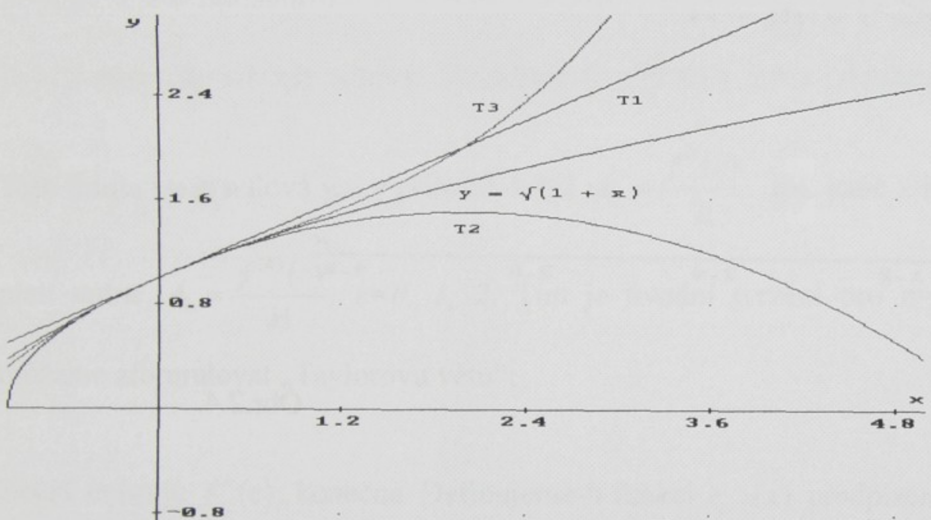
Obr.2.4.



Obr.2.5.



Obr.2.6.



Obr.2.7.

Nyní se věnujme zavedení Taylorovy řady tak, jak je uvedeno v „*Přídavku*“ ([20], str. 23).

Každou funkci proměnné x můžeme naznačiti rovnicí $fx = Ax^a + Bx^b + Cx^c \ldots.$ *Dosadíme-li sem x+h místo x, bude* $f(x+h) = A(x+h)^a + B(x+h)^b + C(x+h)^c \ldots.$ *a vyvineme-li dvoučleny* $(x+h)^a, (x+h)^b, (x+h)^c, atd.$ *objeví se*

$$f(x+h) = Ax^a + aAx^{a-1}h + \binom{a}{2}Ax^{a-2}h^2 + \binom{a}{3}Ax^{a-3}h^3 \text{ atd}$$

$$Bx^b + bBx^{b-1}h + \binom{b}{2}Bx^{b-2}h^2 + \binom{b}{3}Bx^{b-3}h^3 \text{ atd.}$$

$$Cx^a + cCx^{c-1}h + \binom{c}{2}Cx^{c-2}h^2 + \binom{c}{3}Cx^{c-3}h^3 \text{ atd.}$$

atd. atd. atd. atd. atd.

V obrazci tomto jest však první sloupec $= fx$, *na druhém snadno poznati, že jest* $= hf^1x$, *podobně jest třetí* $= \frac{h^2}{2}f^2x$, *čtvrtý* $= \frac{1}{3}!h^3f^3x$ *atd.; protož obdržíme po dosazení výrazů těchto*

$$f(x+h) = fx + hf^1x + \frac{h^2}{2!}f^2x + \frac{h^3}{3!}f^3x + \frac{h^4}{4!}f^4x \text{ atd. atd.} \qquad (2.42.)$$

Je zde připomenuto, že dosazením za $x = 0$ a $h = y$ dostaneme Mac-Laurinovu řadu. Všimněme si, že zde poprvé v koncovém tvaru uvádí Šimerka označení faktoriálu ve jmenovateli a ne vedle zlomku, tak jak tomu bylo v předešlých situacích. Zde by totiž mohl vzniknout mylný dojem, že je třeba vypočítat i faktoriál *h(*v předchozích případech se faktoriál psal za zlomek s čitatelem rovným 1). Porovnejme nyní nejen postup odvození, ale i konečný tvar posuzované řady. Rozdíly v odvození jsou patrné. V prvním případě jsme se zaměřili na nalezení tvarů konstant $A_0, A_1, \ldots A_n$, zatímco v „*Přídavku*“, jako už po několikáté, jde o intuitivní odvození, kdy ze shody několika prvních členů je vyvozen obecný závěr. Na první pohled se zdá, že v Šimerkou ukázané Taylorově řadě jsou částečně jiné členy, než v (2.41.). Vzhledem k tomu, že jde o tutéž řadu, měli by se libovolné členy „tehdy“ a „nyní“ sobě rovnat. Porovnejme je tedy. Nejprve je uvedena řada z „*Přídavku*“ (2.42.) a pak řada (2.41.):

$$f(x+h) = fx + hf^1x + \frac{h^2}{2!}f^2x + \frac{h^3}{3!}f^3x + \frac{h^4}{4!}f^4x \text{ atd. atd.}$$

a

$$f(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} + r_{n+1}(x)$$

s podmínkou

$$\lim_{x\to c}\frac{r_{n+1}(x)}{(x-c)^n} = 0\,.$$

Dá se celkem snadno odhadnout, že rozvoj funkce se provádí v okolí bodu x (v našem případě v okolí bodu c), tedy $fx = f(c); f^1x = f'(c); f^2x = f''(c)$ atd. Zbývá objasnit $h = (x-c)$. Podle poznámky o Mac-Laurinově řadě, kdy $x = 0$ a $h = y$, nahrazujeme h funkčním vztahem pro y. Dvojčlen $(x-c)$ popisuje blízké okolí bodu c, výraz h pravděpodobně znamená funkci proměnné x popisující přírůstek funkce v okolí bodu x, tedy to samé. Obě řady tedy popisují totéž (což jsme předpokládali). Je třeba ještě upozornit na chybu v zápisu, respektive v rozvoji řady do sloupců chybí znaménko početního úkonu mezi jednotlivými řádky (chybí doplnění „+“).

Z aplikací Taylorovy řady (neuvažujeme aplikace Mac-Laurinovoy řady uvedené v kapitole 3.2.2. „*Proměňování úkonů v řady*“) jsou zde uvedeny výpočty zlomků tvaru $\frac{0}{0}$ a důkazy určování maxim a minim funkce. Malou část řady (při zanedbání členů $\frac{h^2}{2!}f^2x; \frac{h^3}{3!}f^3x; \frac{h^4}{4!}f^4x$ a vyšších) pak využívá k výpočtům algebraických rovnic vyšších řádů. Věnujme se nyní výpočtu číselných hodnot výrazů vedoucích ke tvaru $\frac{0}{0}$ ([20], str. 24 a 25).

Hledáme řešení podílu funkcí $\frac{fx}{\varphi x}$ při použití $x = a$, které vede ke tvaru $\frac{fx}{\varphi x} = \frac{fa}{\varphi a} = \frac{0}{0}$.

Obě funkce rozvineme na Taylorovu řadu

$$\frac{f(x+h)}{\varphi(x+h)} = \frac{fx + hf^1x + \frac{1}{2}!h^2f^2x + \frac{1}{3}!h^3f^3x + atd.}{\varphi x + h\varphi^1x + \frac{1}{2}!h^2\varphi^2x + \frac{1}{3}!h^3\varphi^3x + atd.}$$

a při $x = a; fa = \varphi a = 0$ a při zkrácení výrazu proměnnou h dostáváme

$$\frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)} = \frac{f^1a + \frac{1}{2}!hf^2a + \frac{1}{3}!h^2f^3a + atd.}{\varphi^1a + \frac{1}{2}!h\varphi^2a + \frac{1}{3}!h^2\varphi^3a + atd.},$$

z čehož při $h=0$ dostáváme

$$\frac{fa}{\varphi a} = \frac{f^1a}{\varphi^1a}.$$

Dále pak podobně, bylo-li by $f^1a = \varphi^1a = 0$, můžeme stejným postupem dojít k

$$\frac{fa}{\varphi a} = \frac{f^2a}{\varphi^2a}$$

a opět, pokud by bylo $f^1a = \varphi^1a = 0$, dostaneme

$$\frac{fa}{\varphi a} = \frac{f^2a}{\varphi^2a} \text{ atd.}$$

Situaci , kdy $\frac{fx}{\varphi x} = \frac{fa}{\varphi a} = \frac{\infty}{\infty}$ vyřešíme převodem na předcházející tvar vydělením čitatele i jmenovatele součinem $fa \cdot \varphi a$.

Pak tedy

$$\frac{fx}{\varphi x} = \frac{fa}{\varphi a} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{\frac{1}{\varphi a}}{\frac{1}{fa}} = \frac{0}{0}.$$

Řešení výrazu ve tvaru $\frac{0}{0}$ jsme si ukázali výše.

Podíl $\frac{0}{0}$ nebo $\frac{\infty}{\infty}$ nemá smysl, můžeme se s ním setkat v případě výpočtu limity funkce. Je otázka, z jakého důvodu ji zde Šimerka uvádí. Každopádně limitu funkce $\frac{fx}{\varphi x}$, která při $x \to a$ dává tvar $\frac{0}{0}$, eventuálně $\frac{\infty}{\infty}$, dnes řešíme tzv. l'Hospitalovým pravidlem[7].

Toto pravidlo zní:

Nechť funkce $f(x), g(x)$ mají derivaci v prstencovém okolí bodu $a \in R$ a nechť $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ nebo $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = \lim\limits_{x \to a} |g(x)| = +\infty$. Existuje-li limita (vlastní či nevlastní) $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, potom existuje i limita $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ a platí rovnost

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{2.43.}$$

Je zřejmé, že obě pravidla jsou v podstatě shodná, tedy pokud nelze vypočítat podíl dvou funkcí v konkrétním bodě a (vyjde nám $\frac{0}{0}$ nebo $\frac{\infty}{\infty}$), pak lze obě funkce derivovat respektive diferencovat, a to i opakovaně, dokud nelze podíl obou funkcí vypočítat. Rozdíl je samozřejmě v použití limity. Dodejme jen, že v celém *„Přídavku"* není použita ani jedna limita, ačkoliv právě limita je dnes jedním ze základních pojmů diferenciálního počtu.

Další oddíl se nazývá *„Největší a nejmenší hodnoty úkonů (Maxima et minima)"*. Maximum a minimum se zde zavádí pro jakoukoliv funkci $f(x)$ při $x = a$ a pro jakékoliv velmi malé h jako $f(a)$, které splňuje nerovnosti

$$f(a-h) < fa > f(a+h) \ldots \text{ pro maximum}$$

$$f(a-h) > fa < f(a+h) \ldots \text{ pro minimum}$$

---

[7] Je pojmenováno po francouzském matematiku G.F.de l'Hospitalovi, který se zasloužil v roce 1696 o jeho publikování, ačkoliv jeho skutečným autorem byl švýcarský matematik Johann Bernoulli

K určení lokálních extrémů (maxim a minim) se zde uvádí dnes běžně užívané pravidlo([20], str. 27):

Postavíme-li $f^1 x = 0$ *čili* $dfx = 0$, *a dosadíme nápotom hodnotu neznámé* $x = a$ *z rovnice té nalezenou do daného úkonu, stává se* fa *maximum, je-li* $f^2 a$ *záporné, minimum, je-li* $f^2 a$ *kladné.*

Důkaz uvedeného pravidla se provádí opět přes Taylorovu řadu, ukažme si jej:

$$f(x+h) = fx + hf^1 x + \frac{h^2}{2!} f^2 x + \frac{h^3}{3!} f^3 x + \frac{h^4}{4!} f^4 x \text{ atd. atd.}$$

$$f(x-h) = fx - hf^1 x + \frac{h^2}{2!} f^2 x - \frac{h^3}{3!} f^3 x + \frac{h^4}{4!} f^4 x \text{ atd. atd.}$$

(v „Přídavku“ je v rozvoji $f(x-h)$ u členu $\frac{h^3}{3!} f^3 x$ znaménko „+“, ačkoliv má být a bylo již dříve použito „-“, jde o chybu). Pokud vezmeme h velmi malé, můžeme členy s h^2 a vyšší zanedbat. Obě řady pak mají tvar $f(x+h) = fx + hf^1 x$ a $f(x-h) = fx - hf^1 x$. Bylo-li by h kladné i $f^1 x$ kladné, pak $f(x-h) < fx < f(x+h)$f. Pokud by bylo $f^1 x$ záporné, pak $f(x-h) > fx > f(x+h)$. V těchto případech nemůže ale nastat ani minimum, ani maximum.

A odtud: „*Má-li se* fx *největším neb nejmenším státi,* $f^1 x$ *ani kladné ani záporné býti nesmí, což pouze při* $f^1 x = 0$ *čili* $dfx = 0$ *možno jest.*“

Dále postupujeme tak, že z podmínky $f^1 x = 0$ nalezneme takové $a = x$, které podmínku splňuje. Dosadíme-li do úvodních řad a za předpokladu první derivace nulové dostaneme

$$f(a+h) - fa = \frac{h^2}{2!} f^2 a + \frac{h^3}{3!} f^3 a + \frac{h^4}{4!} f^4 a \text{ atd. atd.}$$

$$f(a-h) - fa = \frac{h^2}{2!} f^2 a - \frac{h^3}{3!} f^3 a + \frac{h^4}{4!} f^4 a \text{ atd. atd.}\,.$$

A vezmeme-li opět h tak malé, že členy s h^3 a vyšší zmizí (Šimerka uvádí, že člen $\frac{h^2}{2!} f^2 a$ ostatní členy převyšuje), dostaneme při $f^2 a$ záporné nerovnost $f(a-h) < fa > f(a+h)$, tedy fa je maximum. Bude-li $f^2 a$ kladné, dostaneme $f(a-h) > fa < f(a+h)$, tedy fa je minimum. Tím je pravidlo dokázáno.

Za některými odstavci příslušných kapitol jsou umístěny příklady na procvičování. Již dříve jsme si některé úlohy, respektive jejich řešení ukázali. Uveďme zde na ukázku další úlohu

Kupec jeden veze a korců obilí do ciziny, nalézá pak, že každým dnem, o nějž dále jede, na korci b zl. získá. Dovoz stojí však první den c zl., a v každém z následujících dnů o d zl. více, než den předtím. Jak daleko bude moci obilí to vézt, by co možno nejvíc vydělal?

Je-li x počet dní, bude zisk obnášeti abx zl., dovoz ale stojí za oněch x dní

$$c+(c+d)+(c+2d)+\ldots+[c+(x-1)d]=\frac{x}{2}[2c+(x-1)d],$$

protož má čistého zisku

$$fx=abx-\frac{x}{2}[2c+(x-1)d],$$

kterýžto výraz se stává maximum při

$$x=\frac{ab-c}{d}+\frac{1}{2}.$$

Je-li a=100, $b=\frac{1}{2}$, *c=21, d=2, jest x=15, a čistý užitek f15=225 zl., kdež pouze f16 pouze 224 zl. obnáší.*

Poslední dva oddíly této kapitoly se zabývají další aplikací Taylorovy řady, a to řešením *„každé určité rovnice o jedné neznámé, v nížto pouze zvláštní čísla přicházejí"* ([20], str. 30) a řešením rovnic třetího stupně o jedné neznámé pomoci tzv. Kardanovy formule.

Tato formule je zde odvozena pro rovnici $y^3+Ay^2+By+C=0$ pomocí substituce $y=x-\frac{A}{3}$ a následně vhodnými úpravami dostáváme pro x vztah

$$x=-\sqrt[3]{\frac{1}{2}(b+c)}-\sqrt[3]{\frac{1}{2}(b-c)},$$

kde

$$a=B-\frac{A^2}{3};\, b=\frac{2A^3}{27}-\frac{1}{3}AB+C;\, c=\sqrt{b^2+\frac{4a^3}{27}}.$$

Způsob odvození zde uvádět nebudeme, neboť to přímo nesouvisí s tématem této práce. Jen podotkněme, že pokud by $a<0$ a zároveň by $b^2<\frac{4a^3}{27}$, tak by c vyšlo jako komplexní číslo. Pro určení x bychom pak museli členy $\sqrt[3]{\frac{1}{2}(b+c)}$ a $\sqrt[3]{\frac{1}{2}(b-c)}$ rozvinout na binomickou řadu (zde je právě zmiňovaná aplikace Taylorovy řady), což je často velmi obtížné.[8]

Řešení *„určité rovnice o jedné neznámé, v nížto pouze zvláštní čísla přicházejí"* si ukážeme na jedné ze tří úloh zde uvedených. Výpočet rovnic tohoto typu označuje Šimerka přímo *„makáním, jemuž se vůbec při vyšších rovnicích vyhnouti nelze"*. Okomentujme postup pro řešení rovnice $6x^4 - 13x^3 + 2x^2 + 8x - 9 = 0$.

1. Rovnici nahradíme funkcí a vypočteme funkční hodnoty tak, abychom se co nejvíce přiblížili tvaru $f(x) = 0$ (průsečíky funkce $f(x) = 0$ s osou x je řešením rovnice)

   $f0 = \text{-}9$; $f1 = \text{-}6$; $f2 = +7$; $f1{,}5 = \text{-}6$; $f1{,}8 = \text{-}0{,}9504$; $f1{,}9 = 2{,}4456$

2. Využijeme Šimečkův tvar Taylorůva rozvoje

$$f(x+h) = fx + hf^1x + \frac{h^2}{2!}f^2x + \frac{h^3}{3!}f^3x + \frac{h^4}{4!}f^4x \text{ atd. atd.},$$

kdy členy $\frac{h^2}{2!}f^2x; \frac{h^3}{3!}f^3x; \frac{h^4}{4!}f^4x$ atd. atd. jako velmi malé neuvažujeme, dostaneme za předpokladu, že $f(x+h) = 0$ a tedy $0 = fx + hf^1x$ pro h vztah

$$h = \frac{-fx}{f^1x}.$$

Vypočtěme si ještě $f^1x = 24x^3 - 39x^2 + 4x + 8$. Nyní bude další výpočet zřejmý:

$$f^1 1{,}8 = 28{,}808 \quad a\ tedy\ h = 0{,}33,\ pak$$

$$f1{,}833 = 0{,}054107,\ f^1 1{,}833 = 32{,}104566,\ h = \text{-}0{,}001685$$

$$f1{,}831315 = 0{,}00015767,\ f^1 1{,}831315 = 31{,}9313794,\ h = \text{-}0{,}00000494$$

$$f1{,}83131006 = \text{-}0{,}00000038$$

a tedy

$$x = 1{,}83131006$$

---

[8] Šimerka uvádí, že se tento tvar nazývá „casus irreducibilis", tedy „pád nezvodný" ([20], str. 33)

Na závěr této kapitoly shrneme výše uvedené. Václav Šimerka na adresu Taylorovy řady sám uvádí: „*Poučka tato jest pak jedna z nejdůležitějších v počtu differencialném*" ([20]; str. 24) a ukazuje zde i celkem širokou aplikaci této poučky. Ačkoliv se zde poprvé v „*Přídavku*" objevuje důkaz jedné z vět, není to důkaz věty Taylorovy, který bychom pro její důležitost očekávali. Místo důkazu je zde opět odvození na základě zanedbání některých částí řady.

3.2.5. Základy počtu integrálného

Předposlední kapitola „Přídavku" je zcela věnována zavedení integrálu jako *„uvádění nekonečně malých veličin na konečné"*. Symbol pro integrování (celení) je brán jako znak pro sumu $\int$. A protože se zde integrování a diferencování považuje za *„výkony protivné"*(myšleno opačné operace) k diferencování, lze psát $\int \delta z = z$. Nejprve je ukázáno integrování součtu funkcí, pak je zmíněno vytýkání konstanty před integrování a nakonec je uvedena nutnost přidání do výsledku stálé veličiny c. Hodnota c se určuje *„ze zvláštního kteréhosi pádu, jejž obecný úkon v sobě obsahuje"* (z počátečních podmínek). Následuje zavedení 23 vzorců pro integrování s tím, že vzorce pro integrování jsou jen obrácenou formulací vzorců pro diferenciály uvedené v dřívějších kapitolách.

Z integračních metod jsou pak v oddíle 29 na konkrétních příkladech bez jakékoliv obecnosti a odvození ukázány metody výpočtu přes rozklad na parciální zlomky a následně i per-partes (ani jedna z těchto metod není nijak pojmenována, uvádí se jen, že pokud bychom nevystačili s 23 vzorci, lze postupovat ještě takto). Ukažme si obě úlohy, tak jak jsou uvedeny v *„Přídavku"* ([20], str. 38) .

Výpočet $\int \frac{x^2 \delta x}{(x^2-1)^2}$ provedeme rozkladem uvedeného výrazu na parciální zlomky tak, abychom mohli jednotlivé části integrovat.

Poněvadž $(x^2-1)^2 = (x-1)^2(x+1)^2$, *můžeme postaviti*

$$\frac{x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{t}{(x-1)^2} + \frac{u}{x-1} + \frac{v}{(x+1)^2} + \frac{w}{x+1},$$

čili

$$x^2 = t(x^2+2x+1) + u(x^3+x^2-x-1) + v(x^2-2x+1) + w(x^3-x^2-x+1)$$

$$x^2 = (u+w)x^3 + (t+u+v-w)x^2 + (2t-u-2v-w)x + t-u+v+w.$$

Postavíme-li ohledně určení neznámých t,u,v,w

$$u+w=0; t+u+v-w=1; 2t-u-2v-w=0; t-u+v+w=0 \;,$$

učiníme tím poslední rovnici zadost; pak jest $t = \frac{1}{4}, u = \frac{1}{4}, v = \frac{1}{4}, w = -\frac{1}{4}$.

Z toho jde

$$\int\frac{x^2\delta x}{(x^2-1)^2}=\frac{1}{4}\left[\int\frac{\delta x}{(x-1)^2}+\int\frac{\delta x}{x-1}+\int\frac{\delta x}{(x+1)^2}-\int\frac{\delta x}{x+1}\right]$$

Dle hořejších formulí (již zmíněné obrácené vzorce pro diferenciály) nalezneme

$$\int\frac{\delta x}{(x-1)^2}=-\frac{1}{x-1},\int\frac{\delta x}{(x+1)^2}=-\frac{1}{x+1},$$

pak dle další formule

$$\int\frac{\delta x}{(x-1)}=\lambda o\gamma(x-1),\int\frac{\delta x}{(x+1)}=\lambda o\gamma(x+1).$$

Protož obdržíme

$$\int\frac{x^2\delta x}{(x^2-1)^2}=-\frac{1}{4}\left[\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+}-\lambda o\gamma(x-1)+\lambda o\gamma(x+1)\right]=-\frac{1}{4}\left(\frac{2x}{x^2-1}+\lambda o\gamma\frac{x+1}{x-1}\right).$$

Celý postup je plně srozumitelný, připomeňme jen, že zápis λογ odpovídá označení přirozeného logaritmu. Věnujme se nyní okomentování postupu při řešení integrálu součinu funkcí ([20], str. 39).

Vypočtěme $\int\sqrt{a^2-x^2}*\delta x$. Využijeme věty (2.4.), tedy $\delta(tu)=u\delta t+t\delta u$, odkud po integraci obou stran dostaneme $tu=\int u\delta t+\int t\delta u$, čili $\int t\delta u=tu-\int u\delta t$, což je námi používaný vzorec při aplikaci metody per-partes. Šimerka postupuje následovně:

Položme $\delta x=1\,\delta u$, tedy $u=x;\ t=\sqrt{a^2-x^2}$, tedy $\delta t=-\frac{x\delta x}{\sqrt{a^2-x^2}}$, pak obdržíme

$$\int\delta x\sqrt{a^2-x^2}=x\sqrt{a^2-x^2}+\int\frac{x^2\delta x}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Dále rozložíme $\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}+\frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$, z čehož při použití dříve odvozených vzorců dostaneme

$$\int\frac{x^2\delta x}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\int\delta x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\int\frac{\delta x}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\int\delta x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{a}.$$

Dosadíme-li pak do úvodního zadání vypočítané části úlohy, dostaneme

$$\int\delta x\sqrt{a^2-x^2}=x\sqrt{a^2-x^2}-\int\delta x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{a},$$

což po přičtení $\int \delta x \sqrt{a^2 - x^2}$ k oběma stranám rovnice a následně rozšířením rovnice $\frac{1}{2}$ dává výsledek

$$\int \delta x \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}.$$

Domníváme se, že jako vzorová úloha na integrál součinu dvou funkcí jde o velmi obtížný příklad. Na druhou stranu je ale pravda, že se v „Přídavku“ před výpočty posledních dvou úloh přímo uvádí : *"Formule integralné svrchu uvedené vystačí ve velmi mnoha pádech, a kde se to nestává, dají se z nich odvodit jiné, jež požadavkům zadost činí, a však odvozování takové požaduje často mnoho důvtipu. Co se obyčejných potřeb týče, postačující ještě následující dodati".*([20], str. 38). A pak jsou uvedeny obě úlohy, tedy $\int \frac{x^2 \delta x}{\left(x^2 - 1\right)^2}$ a $\int \sqrt{a^2 - x^2} * \delta x$. Lze pochopit, že tyto úlohy jsou jen ukázkou dalších metod řešení.

V oddílech 30 a 31 je pak dále odvozena Newton-Leibnizova věta pro výpočet určitého integrálu $\int_a^b Fx \cdot \delta x = fb - fa$. Všimněme si opačného (než jak je tomu dnes) označení funkce a primitivní funkce. Důvodem je zavedení integrace jako inversní operace k diferencování ([20], str. 41) a opět myšlenka zanedbání součinu diferenciálů. S ohledem na téma této práce, tedy na porovnání a okomentování diferenciálního počtu v současných učebnicích a v „Přídavku“, se nebudeme o této kapitole již více rozepisovat. Přesto ale uvedeme jeden příklad z mechaniky, který ukazuje řešení úlohy bez použití i s použitím integrálu ([20], str. 41-45). Tento neintegrálový postup nazývá Šimerka „*zakuklenou integrací*“. Příklad zní:

Těleso kterési puzeno silami jakýmis opisuje v čase t přímku s (stop) dlouhou, a dosahuje na konci času tohoto rychlosti v, t.j. kdyby po uplynutí času t síly ony účinkovati přestaly, opisovalo by dané těleso v každé následující časové jednosti (sekundě) dráhu v (stop) dlouhou. Jaká souvislost se nalézá mezi veličinami těmito. Jak tomu bude při kolmém vrhu dolů.

Nejprve jsou zde odvozeny vztahy srovnáním výše uvedeného pohybu při velmi malých změnách času, dráhy a rychlosti $(t+\delta t; s+\delta s; v+\delta v)$ s pohybem rovnoměrně přímočarým. Při zavedení zrychlení (acceleratio, označení φ) dostaneme rovnice popisující výše uvedený pohyb a to

$$\delta s = v\delta t \qquad (2.44.)$$

a

$$\delta v = \varphi\delta t \qquad (2.45).$$

Pokračujme tedy konkrétním řešením pro kolmý vrh dolů.

Tak při kolmém vrhu dolů v prostoru vzduchu prázdnou roste rychlost v stejných dobách o tutéž veličinu, a sice u nás v každé sekundě o g=31,03 vídeňských stop. Následkem toho dává rovnice druhá $\delta v = g\delta t$, tedy

$$v=c+gt, \qquad (2.47.)$$

kdež konstanta c počátečnou vrhem tělesu sdělenou rychlost znamená. K tomu dává rovnice první čili $\delta s = (c+gt)\delta t$, tedy

$$s = ct + \frac{1}{2}gt^2, \qquad (2.48.)$$

Kdež se žádná konstanta nepřipisuje, jelikož z úkolu patrno, že při $t=0, s=0$ vzíti třeba.

Doplňme jen, že zrychlení dnes označujeme *a*, nikoliv *φ*. Podobně bychom přírůstek rychlosti za 1 sekundu označený *g* uvedli v jednotkách odpovídajících zrychlení a ne v délkové jednotce , kdy („*v každé sekundě o g=31,03 vídeňských stop*")[9]. Může být trošku úsměvné, že Václav Šimerka, ač jeden z pokračovatelů vlasteneckého profesora Vydry, používá jednotku „vídeňská stopa", byť mohl použít „českou stopu" (1 česká stopa=29,6 cm). Je samozřejmě možné, že „vídeňská stopa" byla oficiální školní jednotka (základní jednotky SI a jejich zavedení do školských učebnic je otázkou až druhé poloviny 20. století). Poslední poznámka k uvedenému příkladu se týká koncového tvaru hledaných vztahů. Je zřejmé, ačkoliv to zde není uvedeno, že je-li $\delta v = g\delta t$, pak $v = \int g\delta t = c + gt$ stejně tak z $\delta s = (c+gt)\delta t$ plyne $s = \int (c+gt)\delta t = ct + \frac{1}{2}gt^2$.

[9] 1 vídeňská stopa, též střevíc=31,6081 cm

Ukažme si nyní řešení bez použití infinitezimálního počtu. Nejprve si dobu pohybu rozdělíme na velmi malé časové intervaly τ, tedy $t = n\tau$. Bude-li počáteční rychlost c a poroste-li při každé z dob τ právě o γ, budou pro dráhu při kolmém vrhu dolů platit vztahy

$$s > c\tau + (c+\gamma)\tau + (c+2\gamma)\tau + \ldots + [c + (n-1)\gamma]\tau = A$$

a zároveň

$$s < (c+\gamma)\tau + (c+2\gamma)\tau + \ldots + (c+n\gamma)\tau = B$$

(na vysvětlenou uveďme, že při malých časových úsecích τ lze uvažovat uvedený pohyb za rovnoměrný přímočarý a protože rychlost c stále roste o γ, bude vztah $B > A$, neboť $(c+n\gamma)\tau > c\tau$.

Při roznásobení a vhodné úpravě a při $cn\tau = c\tau$ dostaneme řady A i B ve tvarech

$$A = cn\tau + [0+1+2+\ldots+(n-1)]\gamma\tau = ct + \frac{n(n-1)}{2}\gamma\tau$$

a podobně

$$B = ct + \frac{n(n+1)}{2}\gamma\tau .$$

(opět na vysvětlenou, člen $[0+1+2+\ldots+(n-1)]$ je aritmetická řada pro jejíž součet platí vztah $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ a po dosazení za $a_1 = 0, a_n = (n-1)$ dostaneme $\frac{n(n-1)}{2}$).

Označíme-li déle g jako přírůstek rychlosti za 1 sekundu, bude pro poměry přírůstků rychlosti platit $\frac{g}{\gamma} = \frac{1}{\tau}$ a odtud $\gamma = g\tau$ dále pak $n\gamma = ng\tau = gt$. Odtud obdržíme

$$A = ct + \frac{1}{2}n^2\gamma\tau - \frac{1}{2}n\gamma\tau = ct + \frac{1}{2}gt^2 - \frac{1}{2}gt\tau$$

$$B = ct + \frac{1}{2}n^2\gamma\tau + \frac{1}{2}n\gamma\tau = ct + \frac{1}{2}gt^2 + \frac{1}{2}gt\tau$$

(pro plné pochopení ukažme výše uvedenou úpravu $n^2\gamma\tau = n\tau g n\tau = (n\tau)^2 g = gt^2$).

A se od B liší velmi malou veličinou $\frac{1}{2}gt\tau$, kterou když vynecháme , dostaneme vztahy (2.46.) a (2.47.) bez použití integrálního počtu. Šimerka zde na okomentování tohoto postupu uvádí ([20], str. 45): *„Ostatně viděti, že zde τ tolik co δt a γ co δv znamená. Příklad tento slouží spolu k objasnění věty, že integrování není leč sčítání veličin, jež jsme si nekonečně malými učinili“.*

Této kapitole jsme se věnovali výrazně méně, než kterékoliv předtím. Důvodem je, že značná část této kapitoly jen v obráceném pořadí odvozuje vzorce pro integrování ze vztahů pro diferenciál a i téma této kapitoly částečně vybočuje z tématu celé diplomové práce.

3.2.6. Upotřebení počtu nekonečného v geometrii

V úvodu poslední kapitoly citujme Šimerku ([20], str. 46): *„Důležitost počtu differenciálného okazuje se zvláště v měřictví, kdež jím množství úkolů dle stálých pravidel řešiti lze, což jinak buď velmi nesnadno neb zcela nemožno jest“.* Tato formulace ukazuje, jakou vážnost a potřebnost získával diferenciální počet na konci 19. století i ve výuce už na středních školách, nejenom na universitách a polytechnikách. Aplikací diferenciálního počtu je velké množství. „*Přídavek*“ se omezil pouze na využití v geometrii, tedy vyjma mechanické úlohy v minulé kapitole se z fyzikálních aplikací diferenciálního počtu v „Přídavku“ neobjevuje nic. I geometrických aplikací je relativně málo.

Tuto kapitolu lze rozdělit do tří rozdílných částí. První, nejkratší a úvodní, analyticky popisuje bez odvození a geometrického významu několik křivek a to přímku, kruh, parabolu, elipsu, hyperbolu a obyčejnou cykloidu. Druhý, menší (oddíl 34), využívá možnosti určení extrému funkcí pomocí infinitezimální počtu. Třetí pak ukazuje sestavení rovnic pro tečny (tangenciály) a normály, poloměry křivosti a evoluty některých výše uvedených křivek. V posledním oddíle jsou pak ukázány k uvedeným křivkám i výpočty jejich oblouků a obsahů. Poznamenejme ještě, že všechny zde dále uvedené obrázky, tedy obr. 2.8. až obr. 2.16. bez obr. 2.11., jsou obrázky uvedené v závěru „*Přídavku*“. Úmyslně jsme ponechali původní označení, i když bychom asi dnes některé údaje označovali jinak a přehledněji. Věnujme se nyní první skupině, tedy analytickému zavedení zmiňovaných křivek.

„Nemohouce zde obšírně o měřictví zvláště pak analytickém jednati, musíme hlavní zásady z něho co známé předpokládati.“ ([20], str. 46). Zavedeme tedy rovnici přímky

$$y=ax+b, \qquad (2.49.)$$

kde a udává tangentu úhlu nad osou *abscis* (kladná poloosa x), b je *ordinanta* v počátku (při $x=0$).

Dále zavedeme rovnici kruhu

$$(x-t)^2+(y-u)^2=r^2, \qquad (2.50.)$$

kde t, u jsou *koordinanty* (souřadnice) středu a r je poloměr kruhu.

Pro středovou rovnici *schodnice* (elipsy) dostaneme

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2), \qquad (2.51.)$$

kde a je větší a b je menší poloosa. Jednoduchou úpravou (odstranit závorku, převést člen s x na levou stranu rovnice a rovnici podělit b^2) bychom se dostali k námi používanému tvaru $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Všimněme si, že středová rovnice kruhu umožňuje volbu středu mimo počátek soustavy souřadnic, zatímco u elipsy je střed umístěn do bodu $[0;0]$. Stejně tak je tomu i u dalších křivek.

Středová rovnice *rozchodnice* (hyperboly) má tvar

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2), \qquad (2.52.)$$

kde a,b jsou poloosy hyperboly.

Rovnice obyčejné cykloidy mají tvar

$$x = r(\varphi - \sin\varphi)\,;\; y = r(1 - \cos\varphi) = 2r\sin^2\frac{1}{2}\varphi \quad . \qquad (2.53.)$$

Po vhodné úpravě pak dostaneme nepříliš často používaný tvar

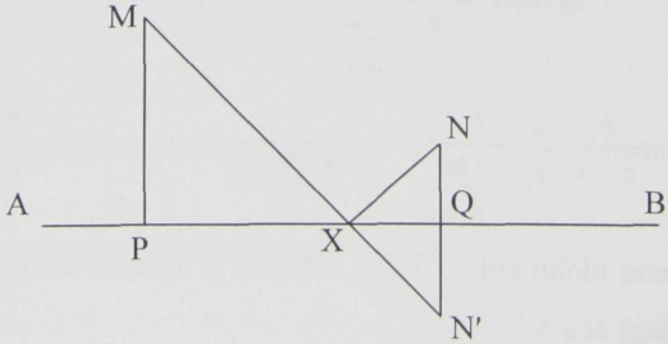
$$x = r * arc\cos\frac{r-y}{r} - \sqrt{2ry - y^2}\,.$$

Na závěr této části dodejme, že kromě cykloidy se Šimerka zmiňuje i o epicykloidě a hypercykloidě, ale více k nim již neuvádí.

Rozeberme si nyní druhou část, která obsahuje celkem 5 řešených úloh a dvě neřešené úlohy, u kterých není uveden ani výsledek.

1. úloha ([20], str. 47)

Máme danou přímku AB (obr.2.8.) a mimo ni body M, N; má pak se naleznouti bod X, při němž by vzdálenosti MX a NX co nejkratší byly.



Obr. 2.8.

Označíme-li v uvedeném (obr.2.8.) vzdálenosti $|MP| = a; |NQ| = b; |PQ| = c; |PX| = x$, dostaneme pro hledanou velikost h lomené úsečky MXN následující vztah $h = f(x) = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (c-x)^2}$ (odvození pomocí Pythagorovy věty přes pravoúhlé trojúhelníky *MPX, XQN*). Pokud využijeme vztahů z kapitoly 3.2.4. pro maxima a minima funkcí, tedy položíme první derivaci vztahu pro h rovnu nule, nalezneme extrém. Tedy:

$$h = f(x) = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (c-x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{c-x}{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}} = 0$$

Šimerka uvádí řešení $x = \dfrac{ac}{a+b}$, ačkoliv uvedená rovnice má dvě řešení, a to $x_1 = \dfrac{ac}{a+b}; x_2 = \dfrac{ac}{a-b}$. I když zde není nijak uvedeno, proč by právě kořen x_2 nemohl být minimem uvedené funkce, lze si celkem snadno ukázat, proč právě jen x_1 bude minimem.

Předpokládejme, že bod X leží někde mezi body P, Q, tedy $x \leq c$ (pokud by ležel mimo tuto oblast, nemůžeme hovořit o minimu, ale s rostoucí vzdáleností od bodů P, Q poroste i velikost lomené čáry *MXN* až do nekonečna). Odtud pak pro oba kořeny :

1) $\dfrac{ac}{a+b} \leq c$, tedy $a \leq a+b$, což platí,

2) $\dfrac{ac}{a-b} \leq c$, tedy $a \leq a-b$, což neplatí.

Uvažujme tedy pouze první kořen (pokud bychom chtěli postupovat standardním způsobem, tedy určit hodnotu druhé derivace pro oba kořeny, bylo by to početně náročnější, než předcházející úvaha). Odtud dále můžeme ukázat pro úhly *MXP* a *NXQ*, že jsou shodné. Využijeme-li již dříve zavedené označení $|QX| = (c-x)$ v obr.2.8., dostaneme pro tangenty úhlů *MXP* a *NXQ*:

$$tg\,MXP = \frac{a}{x} = \frac{a}{\dfrac{ac}{a+b}} = \frac{a+b}{c},$$

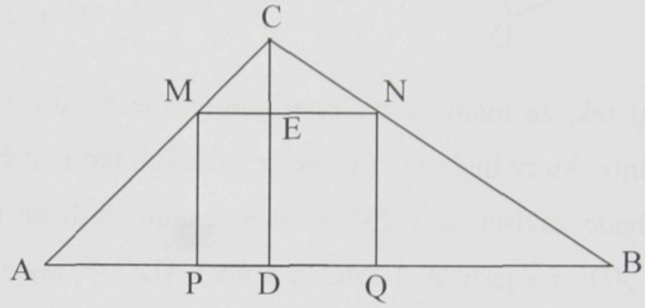
$$tg\,NXQ = \frac{b}{c-x} = \frac{b}{c - \dfrac{ac}{a+b}} = \frac{b}{\dfrac{ca+cb-ac}{a+b}} = \frac{b}{\dfrac{cb}{a+b}} = \frac{a+b}{c}.$$

odpověď na uvedenou úlohu zní: „*Chtíce tedy bod X naleznouti, prodlužme NQ až jest N'Q=NQ a spojme pak M s N'.*

Tato úloha by se dala geometricky a následně i početně řešit výrazně snadněji. V osové souměrnosti s osou *AB* bychom našli bod *N'*, vzdálenosti *XN* a *XN'* jsou shodné (to plyne například z vlastností osové souměrnosti). Jaká je nejkratší vzdálenost dvou bodů, tedy bodů *MN''*? Je to úsečka *MN'*. Odtud už lehce určíme a eventuálně vypočteme (přes podobnost trojúhelníků *MXP* a *N'XQ*) hledaný bod X.

2. úloha: ([20], str. 48)

Do daného trojúhelníku se má vepsati co největší obdélník (obr.2.9.).



Obr. 2.9.

Podobně jako v úloze 1 (stejně tak i v dalších úlohách) si nejprve zavedeme funkci $f(x)$ popisující velikost obsahu obdélníku *PQMN*. Tentokrát vyjdeme z podobnosti dvou dvojic trojúhelníků, tedy $\Delta ADC \cong \Delta MEC$ a $\Delta ABC \cong \Delta MNC$. Obě dvojce trojúhelníků budou podobné ve stejném poměru (*ADC* je částí *ABC* a stejně tak *MEC* je částí *MNC*). Označíme-li *CD=b* jako výšku, *AB=a, CE=x, MP=DE=b-x*, pak z podobnosti výše uvedených trojúhelníků plyne $\frac{MN}{AB}=\frac{CE}{CD}$, čili $\frac{MN}{a}=\frac{x}{b}$ a odtud $MN=\frac{ax}{b}$. Pro hledanou funkci obsahu obdélníku dostaneme:

$$f(x)=|MN|*|DE|=\frac{ax}{b}(b-x).$$

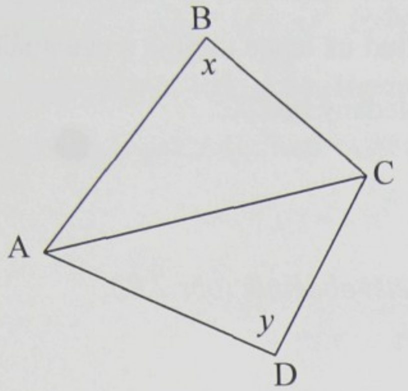
Odtud při $f'(x)=0$ máme $f'(x)=\frac{ab-2ax}{b}=0$, což vede k

$$x=\frac{b}{2}.$$

Následně pro obsah obdélníku dostaneme $P=f_{\left(\frac{b}{2}\right)}=\frac{ab}{4}$. Hledaný obdélník bude mít nejvýše obsah rovný polovině obsahu trojúhelníku.

3. úloha: ([20], str. 48)

Který ze čtyřúhelníků majících tytéž strany jest největší (obr.2.10.)?



(Obr. 2.10.)

Zadání je třeba chápat tak, že máme dány čtyři strany obecného čtyřúhelníku a máme nalézt takový čtyřúhelník, který bude mít ze všech možných ten největší obsah. Je jasné, že tvar čtyřúhelníku bude záviset na volbě jednoho z úhlů. Je-li na uvedeném obrázku $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $AD=d$ a je-li úhel $ABC=x$ a úhel ADC=y, bude plocha uvedeného obrazce $P = f(x) = \frac{1}{2}ab\sin x + \frac{1}{2}cd\sin y$. Plocha čtyřúhelníku je vyjádřena funkcí se dvěma proměnnými. Ukažme si, jaké řešení uvádí Šimerka:

Plocha bude $P = f(x) = \frac{1}{2}ab\sin x + \frac{1}{2}cd\sin y$. *K tomu nám dává Carnotova poučka* $AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos x = c^2 + d^2 - 2cd\cos y$. *Z* $\delta fx = 0$ *jde*

$$\frac{\delta y}{\delta x} = -\frac{ab\cos x}{cd\cos y}$$

a z rovnice druhé

$$\frac{\delta x}{\delta y} = \frac{cd\sin y}{ab\sin x};$$

násobením obdržíme

$$\sin x\cos y + \cos x\sin y = \sin(x+y) = 0 \quad \textit{čili}\ x+y=\pi,$$

t.j. čtyřúhelník, kol něhož kruh opsati lze, jest největší.

Uvedený postup je velmi nesrozumitelný, proto si ho postupně rozeberme. Nejprve poznamenejme, že Carnotovu poučku známe jako kosinovu větu.[10] Nyní k samotné úloze.

---

[10] Lazare Nicolas Mrguérite Carnot byl francouzký matematik přelomu 18. a 19. století, který tuto větu uvedl pravděpodobně v díle „*Geometrie de position*“ a proto ji zde Šimerka uvádí jako poučku nesoucí jeho jméno.

Budeme-li diferencovat formuli $f(x)$ popisující obsah čtyřúhelníku a položíme-li uvedený diferenciál roven *0* (kvůli určení extrému), dostaneme

$$\frac{1}{2}ab\cos x\cdot\delta x+\frac{1}{2}cd\cos y\cdot\delta y=0$$

a odtud

$$\frac{\delta y}{\delta x}=-\frac{ab\cos x}{cd\cos y}.$$

Podobně budeme diferencovat kosinovu větu a dostaneme

$$2ab\sin x\cdot\delta x=2cd\sin y\cdot\delta y$$

a odtud

$$\frac{\delta x}{\delta y}=\frac{cd\sin y}{ab\sin x}.$$

Protože násobení $\frac{\delta y}{\delta x}\cdot\frac{\delta x}{\delta y}=1$, lze psát

$$-\frac{ab\cos x}{cd\cos y}\cdot\frac{cd\sin y}{ab\sin x}=1,$$

čili

$$\sin x\cos y+\cos x\sin y=0$$

a tím dostáváme uvedenou podmínku $\sin(x+y)=0$, což dává při $x+y=180°$.

Nyní si dokažme tvrzení „pokud je ve vypuklém čtyřúhelníku součet protilehlých úhlů roven 180°, pak se jedná o čtyřúhelník tětivový“ (obr. 2.11. ukazuje rozdíl mezi vypuklým, dutým a tětivovým čtyřúhelníkem). Tato věta je zde uvedena bez jakéhokoliv odvození, důkazu nebo poznámky, kde v učebnici „*Algebra, čili počtářství obecné*“ lze uvedenou formuli nalézt.[11] K důkazu využijme vztah pro výpočet poloměru kružnice opsané trojúhelníku *ABC*, kdy $r=\frac{a}{2\sin\alpha}$ (tento vztah zde nebudeme odvozovat, je uveden ve středoškolských matematických tabulkách a lze očekávat, že by jej studenti využili). Pro náš konkrétní příklad z obr. 2.10. budeme posuzovat, zda poloměry opsaných kružnic trojúhelníků *ABC* a *ACD* jsou stejné.

[11] V dřívějších kapitolách, pokud se použila některá dříve neukázaná věta, se Šimerka odvolával na věty uvedené právě v „*Algebře, čili…*“.

Vzhledem k předpokladu, že $x+y=180°$, pak $y=180°-x$, lze psát $r_1=\dfrac{|AC|}{2\sin x}$ a $r_2=\dfrac{|AC|}{2\sin(180°-x)}$. Odtud z $r_1=r_2$ dostaneme $\sin x=\sin(180°-x)$. Správnost uvedeného vztahu dokážeme lehce například pomocí jednotkové kružnice nebo použitím součtových vzorců pro goniometrické vzorce (kapitola 2.2.3."*Úkony trigonometrické*").

Na závěr uvedeného příkladu poznamenejme, že řešení uvedené úlohy je obtížné. Pokud bychom postupovali přes derivování funkce obsahu čtyřúhelníku udané vztahem $P=f(x)=\frac{1}{2}ab\sin x+\frac{1}{2}cd\sin y$, museli bychom derivovat (diferencovat) funkci dvou proměnných. Pokud bychom chtěli postupovat jinak, je třeba si uvědomit následující. Hledáme takový čtyřúhelník zadaný čtyřmi stranami, který bude mít co největší obsah. Vzhledem k tomu, že takto zadaný čtyřúhelník je nesestrojitelný, respektive pro jednoznačnost zadání je třeba znát ještě jeden úhel. Když bychom se tedy pokusili vyjádřit obsah uvedeného obrazce právě pomocí jednoho proměnného úhlu, dostaneme se s použitím kosinovy věty a vzorce $S=\frac{1}{2}ab\sin x+\frac{1}{2}cd\sin y$ ke složitému vztahu

$$S=\frac{1}{2}ab\sin x+\frac{1}{2}cd\sin\arccos\frac{c^2+d^2-a^2-b^2+2ab\cos x}{2cd},$$

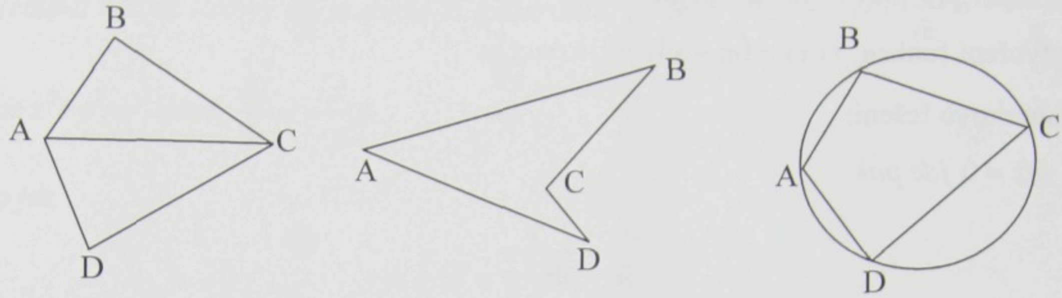
což se nejenom bude špatně derivovat, ale i rovnice, která by vyšla po použití věty pro extrém funkce $f'(x)=0$, by byla obtížně řešitelná. Uvědomme si navíc, že Šimerkův výsledek uvažuje závislost úhlu y na velikosti proměnného úhlu x ($y=180°-x$), což v tomto případě nedostaneme. Jestliže bychom chtěli zvolit jiný postup, třeba využít Ptolemaiův vzorec

$$ac+bd=u_1u_2$$

nebo vztah pro obsah tětivového čtyřúhelníku

$$S=\frac{1}{2}u_1u_2\sin\gamma,$$

kde figurují úhlopříčky čtyřúhelníku, dostali bychom se do podobných potíží.

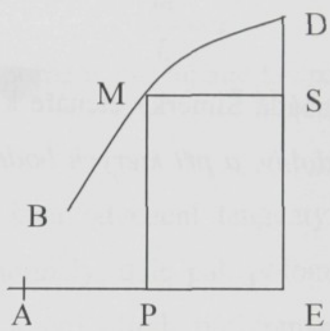


vypuklý čtyřúhelník — dutý čtyřúhelník — tětivový čtyřúhelník

(Obr. 2.11.)

4. úloha: ([20], str. 48)

Má se do daného křivočarého obrazce vepsati největší obdélník (obr.2.12.).



(Obr. 2.12.)

Pokud na uvedeném obr. 2.12. bude BD oblouk dané křivky, $AE = m$ *abscisa* (*x-ová* souřadnice) bodu D, dále $AP = x, PM = y$ pak pro hledaný obsah obdélníku $EPMS$ (opět se zde útvary označují po směru hodinových ručiček, tedy obráceně, než dnes) bude platit $P = f(x, y) = (m - x)y$. Pak podobně jako v předcházející úloze dostaneme při $\delta fx = 0$ tvary $(-y)\cdot\delta x = 0, (x - m)\cdot\delta y = 0$ a odtud dostaneme $\dfrac{\delta y}{\delta x} = \dfrac{y}{m - x}$.

Pokud by uvedená křivka byla parabola daná rovnicí $y^2=2px$, pak by stejným postupem bylo $2y\cdot\delta y = 0, 2p\cdot\delta y = 0$, odkud $\dfrac{\delta y}{\delta x} = \dfrac{p}{y}$. Z rovnosti $\dfrac{\delta y}{\delta x} = \dfrac{y}{m - x} = \dfrac{p}{y}$ dále plyne $y^2 = (m - x)p$. Odtud po odečtení rovnice paraboly od získané rovnice

$$\begin{aligned} y^2 &= mp - px \\ -y^2 &= -2px \end{aligned}$$

dostaneme vhodnou úpravou pro hledanou pozici bodu P jako počátečního bodu maximálního obdélníku vztah $x = \dfrac{m}{3}$.

Opět pro porovnání uvedeme řešení v *„Přídavku"*. Přeskočíme zadání a srozumitelné vytvoření funkce $f(x) = (m - x)y$ *f(x)=(m-x)y*.

Šimerkovo řešení:

Z $\delta fx = 0$ *jde pak*

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{y}{m - x}.$$

Jiný výraz pro $\frac{\delta y}{\delta x}$ *plyne z rovnice dané křivky. Tak nalezneme u paraboly z* $y^2 = 2px$,

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{p}{y} = \frac{y}{m - x},$$

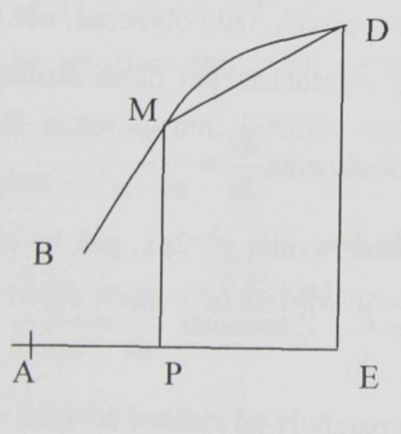
tedy

$$x = \frac{m}{3}.$$

Co se týká dalších křivek, nabádá Šimerka čtenáře k tomu, aby: *„ Co platí o tom u kruhu, u elipsy, hyperboly a cykloidy, a při kterých hodnotách veličiny m obdržíme zde zajímavé výsledky?"*.

5. úloha: ([20], str.49)

Jak se v daném křivočarém obrazci nalezne největší lichoběžník (trapez) DEMP (obr.2.13.)



(Obr. 2.13.)

Označíme-li *AE=m, DE=n, AP=x* a *PM=y*, dostaneme pro funkci obsahu lichoběžníku:

$$f(x, y) = \frac{1}{2}(n + y)(m - x),\ tedy\ \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{n + y}{m - x}.$$

Vpisujeme-li trapez takový do kruhového quadrantu, bude m=0, n=r tedy $\frac{\delta y}{\delta x} = -\frac{r+y}{x}$ *a*

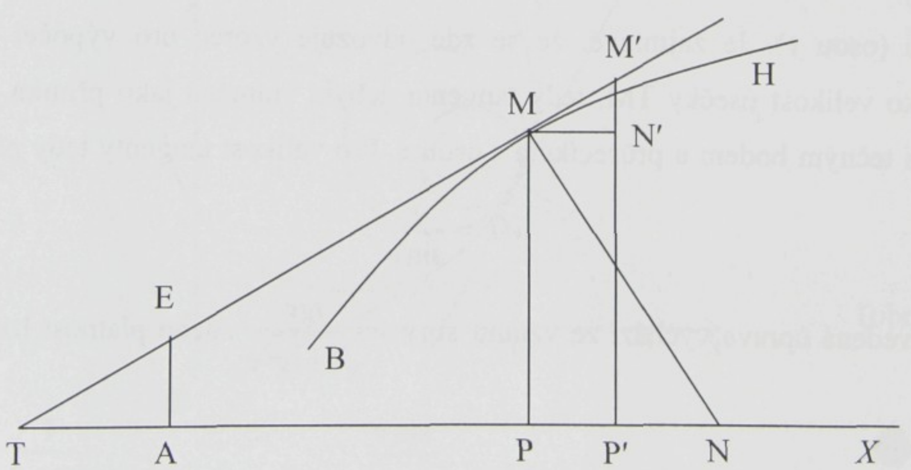
rovnice $x^2+y^2=r^2$ *dává* $\frac{\delta y}{\delta x} = -\frac{x}{y}$.

Z toho jde

$$y = \frac{r}{2}; x = \frac{r}{2}\sqrt{3}.$$

Po předchozích úlohách je již postup téměř srozumitelný, přesto si ale vysvětleme koncový zápis úlohy, tedy „*z toho jde* $y = \frac{r}{2}; x = \frac{r}{2}\sqrt{3}$“. Porovnáním podílů diferenciálů funkce obsahu a kružnice dostaneme po úpravě $x^2 = y(r+y)$. Společně s rovnicí kružnice dostaneme soustavu dvou kvadratických rovnic, jejímiž kořeny jsou $[0;-r]$ a $\left[\frac{r}{2}\sqrt{3};\frac{r}{2}\right]$. První kořen má záporné y, uvažujeme tak pouze druhý kořen.

Poslední částí této kapitoly jsou odvození tangenty (tečny) a výpočet její velikosti, subtangenty, normály a subnormály, dále pak poloměru křivosti a evoluty a na závěr uvedení vzorců pro oblouk a pro obsah probíraných křivek. Všechna odvození pro tangentu, subtangentu, normálu a subnormálu se vztahují k obr. 2.14..Ukažme si tedy odvození uvedená v „*Přídavku*“ (jsou celkem srozumitelná, tak je nebudeme opisovat, jen je okomentujeme).



(Obr. 2.14.)

Mějme oblouk BH jakékoliv křivky, M bude její libovolný bod se souřadnicemi $[x;y]$. Necháme-li pak $x=AP$ o nesmírně malou část $PP' = \delta x$ růsti, bude $x+\delta x = AP'$, $y+\delta y = M'P$, kde $M'N' = \delta y$.

Tangenta (tečna): ([20], str.49)

Body M, M' mohou být tak blízko sebe, že téměř v jeden splývají a proto přímka TMM' se křivky pouze dotýká, čili je její tangentou. Je-li pak $y=ax+b$ její obecná rovnice, bude rovněž $y+\delta y = a(x+\delta x)+b$. Z obou rovnic vyplývá

$$a = \frac{\delta y}{\delta x}.$$

Postavíme-li úhel $MTP = v$ dostaneme (s využitím podobnosti trojúhelníků MTP a $M'MN'$ nebo přes trojúhelník MTP)

$$tg\, v = \frac{\delta y}{\delta x},$$

tedy $tg\, v = a$. Je-li pak daná křivka kruh s rovnicí (2.50.), obdržíme po diferencování $(x-t)\delta x + (y-u)\delta y = 0$, odkud snadno určíme $a = tg\, v = -\frac{x-t}{y-u}$. Jak získat hodnotu b se zde neuvádí, její hodnota je uvedena v úvodu kapitoly jako velikost AE. Speciálně se zde navíc uvádí situace $(x-t)=0$, tedy bod M má *x-ovou* souřadnici shodnou s *x-ovou* souřadnicí středu $x=t$, čili $tg\, v = 0$ a tím pádem bude tangenta rovnoběžná s osou abscis (osa x). Podobně tak situace $(y-u)=0$, tedy $tg\, v = \infty$ a odtud bude tangenta rovnoběžná s ordinantou (osou y). Je zajímavé, že se zde odvozuje vzorec pro výpočet velikosti tangenty jako velikost úsečky TM, tedy tangenta nebyla vnímána jako přímka, ale jako úsečka mezi tečným bodem a průsečíkem s osou x. Pro velikost tangenty tedy platí vztah

$$MT = \frac{y}{\sin v}.$$

Další zde uvedená úprava vychází ze vztahu $\sin v = \frac{tgv}{\sqrt{1+tg^2 v}}$. Jeho platnost lze potvrdit relativně jednoduchou úpravou, kdy $\sin v = \dfrac{\frac{\sin v}{\cos v}}{\sqrt{1+\frac{\sin^2 v}{\cos^2 v}}}$ a odtud $1 = \dfrac{\frac{1}{\cos v}}{\sqrt{\frac{\cos^2 x + \sin^2 v}{\cos^2 v}}}$.

Dosazením do $\sin v = \dfrac{tgv}{\sqrt{1+tg^2 v}}$ za $tgv = \dfrac{\delta y}{\delta x}$ dostaneme po položení $\delta s = \sqrt{\delta x^2 + \delta y}$ konečný tvar pro velikost tangenty

$$MT = \frac{y}{\sin v} = \frac{y\delta s}{\delta y}.$$

Subtangenta:

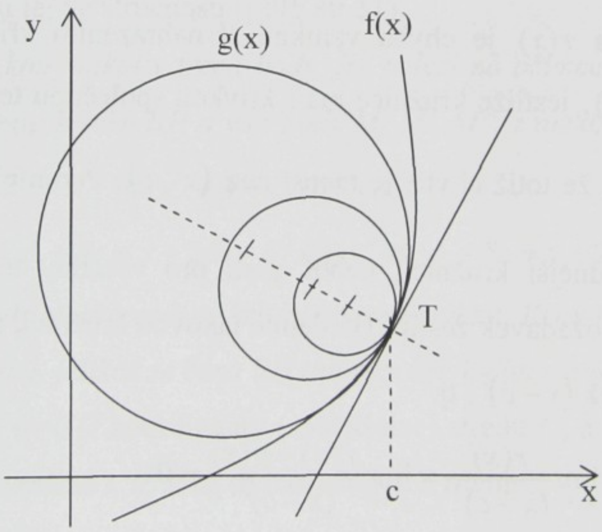
Subtangentou rozumíme úsečku PT a její velikost určíme ze vztahu *MP=PTtgv*, tedy

$$PT = \frac{y\delta x}{\delta y}$$

Normala:

Normála je na obr.2.14. přímka *MN* jdoucí kolmo na tangentu. Neuvádí se zde její obecná ani žádná jiná rovnice, pouze se počítá její velikost ze vztahu $MN = MT \cdot tg\,v$ (opět Šimerka nevnímá normálu jako přímku, ale jako úsečku), čili

$$MN = \frac{y\delta s}{\delta x}.$$



(obr.2.15.)

Subnormala:

Úsečku NP nazveme subnormálou. Její velikost určíme z $\Delta MNP \sim \Delta MTP$, odkud $\frac{PT}{MP} = \frac{MP}{NP}$ a při $MP = y$ dostaneme

$$NP = \frac{y\delta y}{\delta x}.$$

Podobně jako u předchozích zavedení i nyní zde není uveden žádný konkrétní příklad, jen se uvádí koncový tvar pro cykloidu a parabolu.

Poloměr křivosti:

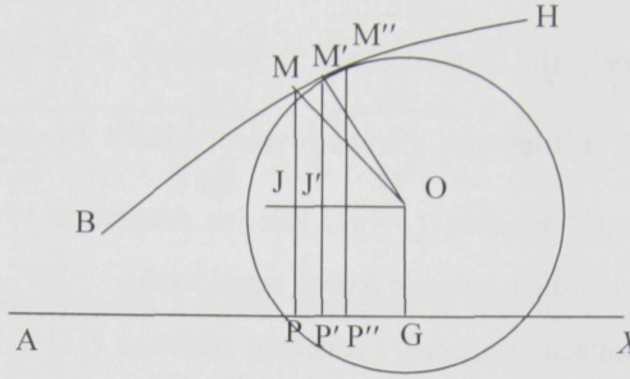
Připomeňme si nejprve zavedení poloměru křivosti v ([11], str. 131-132). Využijeme stejnou myšlenku, jako u Taylorovy řady. K dané funkci f hledáme mezi všemi polynomy stupně nejvýše n takový, který by funkci f v okolí bodu c co nejlépe aproximoval. V našem případě budeme aproximovat pomocí kružnice. Hledaná kružnice by měla určitě procházet bodem $T[c; f(c)]$, který samozřejmě leží i na aproximované křivce. Jistě se můžeme domnívat, že by taková kružnice měla mít v bodě T s křivkou společnou tečnu. Proto by střed hledané kružnice měl ležet na normále křivky (viz. obr.2.15.). Takových kružnic je ovšem nekonečně mnoho. Vzniká otázka, která je pro aproximaci nejvhodnější. Každou kružnici lze v okolí bodu c popsat rovnicí $y = g(x)$, kdy $f(x) = g(x) + r(x)$ a $r(x)$ je chyba vzniknuvší nahrazením křivky kružnicí. Co můžeme říct o chybě $r(x)$, jestliže kružnice má s křivkou společnou tečnu? Patrně totéž, co v případě diferenciálu, že totiž chyba je menší než $(x-c)$. Podmínka $\lim_{x\to c} \frac{r(x)}{(x-c)} = 0$ nám tedy neurčí nejvhodnější kružnici, neboť platí pro všechny tečné kružnice bez výjimky. Proto zkusíme požadavek zesílit. Hledejme takovou kružnici, aby v okolí bodu c byla chyba $r(x)$ menší než $(x-c)^2$, tj.

$$\lim_{x\to c} \frac{r(x)}{(x-c)^2} = \lim_{x\to c} \frac{f(x) - g(x)}{(x-c)^2} = 0. \qquad (2.54.)$$

Pokud taková kružnice existuje, nazýváme ji oskulační kružnicí ke křivce f(x). Funkce g(x) musí navíc splňovat podmínky (důkaz se provádí l'Hospitalovým pravidlem)

$$g(c) = f(c), g'(c) = f'(c), g''(c) = f''(c) g(c)=f(c) \qquad (2.55.),$$

přirozeně za předpokladu, že uvedené derivace v bodě c existují.



(Obr.2.16.)

Po stanovení výše uvedených podmínek je již oskulační kružnice jednoznačně určena. Je dána kružnice se středem $S[t,u]$ o poloměru r a na ní bod $T[x;y]$, kde $y \neq b$. Rovnicí kružnice je definována funkce, jejíž graf prochází bodem T. Označme $y(x), y^{/}(x), y^{//}(x)$ hodnotu této funkce a jejích derivací v bodě x. Máme nalézt vztah mezi $y(x), y^{/}(x), y^{//}(x)$ a konstantami t, u, r. Vztahy nebudeme odvozovat, jen je pro porovnání uvedeme:

$$t = x - \frac{1+y^{/2}}{y^{//}} y^{/} \ ; \ u = y + \frac{1+y^{/2}}{y^{//}} \ ; \ r = \frac{\sqrt{(1+y^{/2})^3}}{\left|y^{//}\right|} \qquad (2.56.)$$

Šimerkův postup se pochopitelně liší, neboť nepoužil a ani nepoužívá v „*Přídavku*" limit. Ukažme si jej ve stručnosti ([20], str.51):

Jak známo, lze kterýmikoliv třemi body, jež neleží na přímce, kruh vésti. Máme-li tedy v obr. 2.16. obecnou křivku BH a v ní body M, M', M'', z nichž první je dán koordinantami x, y, druhý pak $x^{/} = x + \delta x, y^{/} = y + \delta y$ *a třetí*

$$x^{//} = x^{/} + \delta x = x + 2\delta x + \delta^2 x \ , \ y^{//} = y^{/} + \delta y = y + 2\delta y + \delta^2 y \ ,$$

bude se kruh body těmito vedený křivky pouze dotýkati. Kruh takovýže pak nazývá křivným (Krümmungskreis), jelikož se čára BH tím více křiví, čím menší jeho poloměr jest.

Budou-li $t=AG$, $u=GO$ koordinanty (souřadnice) středu O, a $R = MO$ poloměr kružnice, pak lze nalézt neznámé t, u, R ze tří následujících rovnic:

- rovnice kruhu (2.50.) $\quad f(x,y) = (x-t)^2 + (y-u)^2 = R^2$
- diferencováním rovnice kruhu dostaneme $\quad f(x^{/}, y^{/}) = (x-t)\delta x + (y-u)\delta y = 0$
- další diferencování máme $\quad f(x^{//}, y^{//}) = (x-t)\delta^2 x + \delta^2 x + (y-u)\delta^2 y + \delta^2 y = 0$

Z těchto rovnic bez jakéhokoliv výpočtu nebo odvození vyslovuje Šimerka následující vzorce:

$$x-t=\frac{\delta y\delta s^2}{\Delta}\ ;\ x-u=\frac{\delta x\delta s^2}{\Delta}\ ;\ R=\frac{\delta s^3}{\Delta}\ , \qquad (2.57.)$$

při zavedení $\delta s=\sqrt{\delta x^2+\delta y^2}$ (již jsme zavedli u *tangenty*) a $\Delta=\delta y\delta^2 x-\delta x\delta^2 y$.

Odvození ale není nijak složité, stačí z druhé rovnice vyjádřit $(x-t)=-\dfrac{(y-u)\delta y}{\delta x}$, dosadit do třetí a vyjádřit tak dvojčlen $(y-u)$. Pak jen dosazením výsledku určíme $(x-t)$ a následně i R (jde o soustavu 3 rovnic o třech neznámých).

Srovnali jsme ideu oskulační kružnice v současné učebnici [11] a v „Přídavku". Srovnání výsledných vzorců je numericky náročné, ukažme si ale, jaké středy a poloměr křivosti by měla parabola daná vztahem $y^2=2px$. Odvození provedeme nejprve tak, je uvedené v „Přídavku" a po té s použitím vztahů z [11].

U paraboly jest $y=\sqrt{2p}x^{\frac{1}{2}}$, *tedy* $\delta y=\frac{1}{2}\sqrt{2p}x^{-\frac{1}{2}}$, $\delta s=\delta x\cdot\sqrt{\dfrac{p+2x}{2x}}$, $\delta^2 y=-\frac{1}{4}\sqrt{2p}x^{-\frac{3}{2}}\delta x^2$, $\Delta=-\delta x\cdot\delta^2 y$ *tedy*

$$R=\sqrt{\frac{(p+2x)^3}{p}}.$$

Příslušné výsledky nastanou v okamžiku, když položíme $\delta^2 x=0$, což je v souladu s myšlenkou z kapitoly 3.2.1. *Diferenciály daných úkonů*, kdy diferenciály vyšších řádů jsou tak malé, že je můžeme zanedbat.

Nyní vypočtěme poloměr křivosti podle vztahu $r=\dfrac{\sqrt{(1+y'^2)^3}}{|y''|}$ uvedeného výše ([11], str. 131-132). Máme tedy

$$f(x)=y=\sqrt{2p}x^{\frac{1}{2}},$$

$$f'(x)=y'=\frac{1}{2}\sqrt{2p}x^{-\frac{1}{2}},$$

$$f''(x)=y''=-\frac{1}{4}\sqrt{2p}x^{-\frac{3}{2}}$$

Odtud dosazení a úpravou dostaneme

$$r=\frac{\left\{1+\left(\frac{\sqrt{2p}}{2\sqrt{x}}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{\sqrt{2p}}{4\sqrt{x^3}}}=\frac{\left(1+\frac{p}{2x}\right)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\frac{p}{8x^3}}}=\sqrt{\frac{\left(\frac{2x+p}{2x}\right)^3}{\frac{p}{8x^3}}}=\sqrt{\frac{(2x+p)^3}{8x^3}*\frac{8x^3}{p}}=\sqrt{\frac{(2x+p)^3}{p}}.$$

Je zřejmé, že výsledek uváděný Šimerkou je totožný s výsledkem získaným použitím vzorců z [11].

Evoluta:

Evoluta je množina všech středů oskulačních kružnic křivky, kterou aproximujeme. Rovnici evoluty jsme si v podstatě odvodili v předchozím odstavci. Hledanou rovnici dostává Šimerka tak, že z prvních dvou vztahů vzorců 2.57. vyloučí veličiny x ,y. Z našeho pohledu bychom pro rovnici evoluty použili první dva vzorce ze vztahů 2.56. a získali tak parametrické vyjádření evoluty.

Oblouk:

Pro určení vztahu k výpočtu délky oblouku využívá Šimerka nejprve obrázek 2.14., kde při označení $PP' = MN' = \delta x$ můžeme uvažovat δx tak malé, že oblouk MM′ splyne s přímkou. Z uvedeného obrázku pak plyne $MM' = \sqrt{MN'^2 + M'N'^2} = \sqrt{\delta x^2 + \delta y^2}$. Pro oblouk křivky pak dostáváme vztah

$$\delta s = \sqrt{\delta x^2 + \delta y^2}. \qquad (2.58.)$$

Stejný výraz dostává Šimerka odvození pomocí obrázku 2.16. a postupu uvedeného u *poloměru křivosti.* V uvedeném obrázku je střed křivosti zadán $S[t,u]$, pak platí

$$tg\,MOJ = \frac{y-u}{t-x};\ tg\,M'OJ' = \frac{y+\delta y-u}{t-x-\delta x}.$$

Využijeme-li vztah, kdy $tg\,MOM' = tg\,(M'OJ' - MOJ)$, tedy $tg\,MOM' = \frac{\Delta}{\delta s^2}$. Pak pro velikost oblouku *MM′* platí

$$MM' = R * tgMOM' = \frac{\delta s^3}{\Delta} * \frac{\Delta}{\delta s^2} = \delta s.$$

Dále je zde podobným způsobem jako u poloměru křivosti určena délka oblouku pro parabolu a následně i pro cykloidu. Vzhledem k tomu, že uvedený postup vede k integrování (což není tématem této práce), nebudeme jej zde prezentovat.

Plocha: ([20], str.53)

Plochou P rozumí Šimerka plochu mezi obloukem, abscisou x a ordinantou y. Použijeme-li k vysvětlení obrázek 2.14., pak elementárním prvkem plochy pod obloukem rozumíme obsah obrazce $MM'PP'$, čili δP. . Odtud lze psát

$$\delta P > PM \cdot PP' = y \cdot \delta x$$

$$\delta P < M'P \cdot PP' = (y + \delta y) \cdot \delta x = y \cdot \delta x + \delta x \cdot \delta y$$

Obě tyto nerovnosti dávají pak dohromady s použitím již několikrát uvedeného zanedbání $\delta x \cdot \delta y$, (čili $\delta x \cdot \delta y = 0$) rovnost mezi oběma nerovnostmi a odtud už dostaneme vztah pro velikost plochy ve tvaru:

$$\delta P = y\delta x, \tag{2.59.}$$

tedy

$$P = \int y\delta x .$$

Je evidentní, že se jedná o běžně používaný vzorec pro výpočet plochy s tím rozdílem, že zde není použit určitý integrál (Newton-Leibnizova věta). Důvod nepoužití určitého integrálu je pochopitelný, neboť plocha pod křivkou je již v zadání omezena kladnou poloosou x (abscisou) a osou y (ordinantou). Tím získáváme jednu mez integrálu. Druhá mez se pak určuje z konkrétních podmínek příslušné úlohy. Tak například pro výpočet plochy pod elipsou řešíme integrál na intervalu $\langle 0;a\rangle$, kde a je hlavní poloosa. Je zřejmé, že s použitím Newton-Leibnizovy věty bude hodnota primitivní funkce $F(0)=0$. Integrál se pak řeší obecně a výsledek se získá dosazení hodnoty a. Tak je třeba rozumět i Šimerkovým výpočtům. Tímto naznačeným způsobem (i s odvoláváním na integrační vzorce uvedené v 3.2.5.) jsou odvozeny vzorce pro obsah elipsy, kruhu, hyperboly, paraboly a cykloidy.

Hodnocení Šimerkova „*Přídavku*“, porovnání obsahu s obsahem v současných středoškolských učebnicích, eventuální výběr vhodných úloh pro zpestření výuky diferenciálního počtu na současné střední škole bude proveden v dalších částech této práce.

4. SROVNÁNÍ „*PŘÍDAVKU*“ SE SOUČASNÝMI UČEBNICEMI

Porovnejme nyní zkoumaný „Přídavek“ se současnými učebnicemi ([7], [1], [11]). První dvě učebnice jsem vybral po provedení průzkumu mezi svými kolegy na 8 středních školách ve Šluknovském výběžku (gymnázia, obchodní akademie, průmyslové školy-strojírenství, polygrafie, VOŠ). Nejpoužívanější středoškolskou učebnicí pro výuku diferenciálního počtu byla podle očekávání „Matematika pro gymnázia“ ([7]) vydaná Prométheem (je zpracována ve spolupráci s JČMF). Druhá učebnice [1] se používá jen jako doplnění učiva na gymnáziu. Třetí učebnice je vysokoškolské skriptum používaná na Technické universitě v Liberci. Důvod volby těchto skript do srovnání s „Přídavkem“ je následující. Učím na technickém typu střední školy se zaměřením na strojírenství a tak se mi jako nejvhodnější jevila právě tato učebnice dílem proto, že ji znám a dílem proto, že pokud jdou z naší školy studenti studovat na vysokou školu, odcházejí zpravidla právě na TU Liberec. Podívejme se nyní velmi stručně na skladbu a náplň uvedených učebnic. Pro srovnání uveďme i „Přídavek“.

1. **„Přídavek k Algebře pro vyšší gymnázia“** [20]:

Jak již bylo několikrát uvedeno, základním pojmem je diferenciál zavedený jako: „N*esmírně čili nekonečně malou část, o niž spojitou proměnnou veličinu (x, y, z atd.) růsti necháváme, ,jmenuje se differencial veličiny této, a znamená písmenou δ před veličinu onu postavenou (δx, δy, δz, atd.)*“([20], str. 1). Po zavedení diferenciálu následuje odvození vzorců pro diferenciály mocninných, logaritmických a exponenciálních funkcí. Rovněž je odvozen vztah pro diferenciál součtu, součinu a podílu funkcí a diferenciály vyšších řádů. Nyní již následují aplikace diferenciálů. Nejprve je zavedena Mac-Laurinova řada a následně je s její pomocí odvozena binomická řada. Ta se pak využívá k výpočtům odmocnin a logaritmů. Dále se opět přes řady zavádějí trigonometrické funkce (sinus, kosinus, tangens, kotangens, sekans a kosekans) a jim odpovídající cyklometrické funkce. Je zajímavé, že zde Šimerka udává i funkce sekans a kosekans, se kterými se dnes již v učebnicích nesetkáváme, dokonce ve všech třech posuzovaných učebnicích nebyly uvedeny ani v poznámce.

řipomeňme si definiční vztahy obou funkcí:

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}\ ;\ \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}.$$

Samozřejmostí je odvození vzorců pro diferenciály uvedených funkcí. Teprve nyní se zavádí Taylorova řada a s její pomocí pak poučka, kterou dnes známe pod názvem l'Hospitalovo pravidlo. Další aplikací Taylorovy řady jsou algoritmy pro určení extrémů funkcí a přibližné řešení algebraických rovnic vyšších řádů, které jsou jinými způsoby velmi obtížně řešitelné (dnes bychom je řešili různými přibližnými metodami nebo třeba počítačovými programy, např. Derive).

Předposlední část učebnice se zabývá vzorci pro integrování vybraných funkcí. V poslední části jsou uvedeny některé aplikace výše probraného hlavně při určování tečen, normál, evolut, poloměrů oskulační kružnic, délek oblouků a obsahů regulárních kuželoseček a cykloidy. Další aplikací jsou výpočty extrému funkcí, respektive určování největších obsahů, nejkratších vzdáleností, atd., ve vybraných obrazcích (celkem 8 úloh). Za zmínku stojí i fyzikální využití integrálního počtu při kolmém vrhu (nahoru i dolů) v prostředí bez i s odporem vzduchu. Tyto úlohy jsou ale jedinou fyzikální aplikací diferenciálního počtu zde uvedenou. V celé sbírce se objevuje více než 40 řešených a přibližně stejný počet neřešených úloh

2. **„Matematika pro gymnázia - diferenciální a integrální počet“** [7]:

Pravděpodobně nejpoužívanější středoškolská učebnice infinitezimálního počtu známých a v pedagogické veřejnosti populárních učitelů matematiky Daga Hrubého a Josefa Kubáta [12] je učebnice [7]. Uveďme její tematickou strukturu. Nejprve připomíná základní vlastnosti funkcí a udává přehled elementárních funkcí. Nejprve je definována spojitost funkce pomocí okolí bodu (uvádí se i Weierstrassova věta) a navazuje zavedení pojmu limita funkce v bodě (včetně limit zprava a zleva, nevlastní limity, atd.) i s její aplikací při výpočtu asymptot funkce. Ještě v kapitole o limitách je zavedena tečna ke grafu funkce v bodě $T[x_0; y_0]$ a to jako přímka $y - y_0 = k_T(x - x_0)$, kde pro směrnici této přímky platí vztah $k_T = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$. Teprve nyní následuje kapitola nazvaná „Derivace funkce“.

[12] několikrát jsem měl možnost vyslechnout jejich přednášky na celé spektrum témat z matematické analýzy a z geometrie při každoročním setkání středoškolských učitelů nazvaném „Tři dny s matematikou“

Podobně jako ve všech textech o infinitezimálním počtu i zde jsou ukázány obě historické úlohy (Newtonova i Leibnizova) a následně pak zavedena derivace (včetně její geometrické interpretace). Uveďme si definici derivace funkce uvedenou v [7], str. 85:

Mějme funkci f definovanou v jistém okolí bodu x_0. Existuje-li

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

Nazýváme jí derivací funkce f v bodě x_0.

Dále jsou pak uvedeny věty pro derivace zprava a zleva, pro derivaci na intervalu a souvislost derivace se spojitostí funkce. Následuje odvození a důkazy vztahů pro konstantní, mocninné, goniometrické, exponenciální a logaritmické funkce, stejně tak jako pravidla pro derivaci součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí. Nechybí ani algoritmus pro derivování složené funkce. Velká část této kapitoly (25 stran) je věnována průběhu funkce, respektive využití diferenciálního počtu k vyšetřování průběhu funkce. Z geometrických aplikací diferenciálního počtu jsou zde uvedeny dva typy úloh: při daném obvodu najít útvar s maximálním obsahem a do daného útvaru vepsat jiný útvar maximálního obvodu. Z fyzikálních aplikací se uvedená učebnice zmiňuje o sledování časových změn a o výpočtech extrémních hodnot určité veličiny. I v integrálním počtu je nejprve definován pojem primitivní funkce ([7], str. 135:

Mějme dány funkce F, f definované na otevřeném intervalu J. Jestliže pro všechna $x \in J$ platí

$$F'(x) = f(x),$$

říkáme, že funkce F je primitivní funkcí k funkci f v intervalu J.

Celkem je zde pak dále uvedeno jedenáct integrálních vzorců pro konstantní, mocninnou a lomenou funkci (tvaru $f(x) = y = \frac{1}{x}$), dále pak pro funkce $y = e^x$ a $y = a^x$ a nakonec pro goniometrické funkce sinus a kosinus, respektive pro $y = \frac{1}{\cos^2 x}$ a $y = \frac{1}{\sin^2 x}$. Do integračních vzorců spadá i integrace součtu funkcí. Z integračních metod jsou uvedeny metody per partes a substituční. Následně se zavádí určitý integrál včetně geometrického významu . V aplikacích integrálního počtu jsou uvedeny pouze geometrické, tedy obsah rovinného útvaru a objem rotačního tělesa.

3. „Matematika pro IV. ročník gymnázií“ [1]:

Tuto učebnici zde uvádím ze dvou důvodů. Za prvé je skladba kapitol rozdílná od dvou předcházejících učebnic a za druhé to je jediná jiná učebnice než [7], kterou využívají kolegové učitelé matematiky u nás ve Šluknovském výběžku. Uvedeme jen sled kapitol, na němž bude znatelná odlišnost od [7]:

1. Tečna (intuitivní zavedení limity jako „...jestliže se blíží... „ [(1), str. 14])
2. Limita (zavedení limity v bodě pomocí okolí bodu)
3. Derivace (bez Newtonovy a Leibnizovy úlohy, derivace je směrnice tečny, vztah pro derivaci konstanty a mocninné funkce)
4. Přibližné řešení rovnic (najít průsečík vhodně zvolené tečny k funkci)
5. Derivace a monotónnost, derivace a spojitost
6. Extrémy (lokální i globální)
7. Derivace goniometrických funkcí, součinu a podílu, složené funkce, exponenciální a logaritmické funkce a znovu derivace mocninné funkce (hlavně iracionální)
8. Derivace funkce zadané implicitně
9. Přehled výše probraného
10. Primitivní funkce (základní vzorce navíc i pro *tg x*, *cotg x*, bez odvození, s odvoláním na přehled derivací respektive na odbornou literaturu)
11. Určitý integrál a jeho výpočet
12. Aplikace určitých integrálů (objem tělesa, dráha jako funkce rychlosti, práce proměnlivé síly)

4. Matematika I [11]:

Tyto vysokoškolská skripta má tři části, funkce a grafy, diferenciální počet a integrální počet. Uvedený text je vytvořen dnes běžným způsobem (podobný sled mají i další vysokoškolské učebnice [2], [8]). Po zavedení elementárních funkcí definuje spojitost funkce v bodě pomocí okolí tohoto bodu. Následuje pojem limita (s důrazem na vzájemnou propojenost pojmu limita a spojitost funkce v bodě) a před zavedením derivace ukazuje ještě vztahy pro asymptoty grafu funkce. Derivaci pak zavádí známým způsobem jako $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$. Dále jsou zde uvedeny základní vzorce pro derivování a odvození obecných pravidel pro derivování. Teprve nyní následuje (u Šimerky úvodní a hlavní pojem) diferenciál. V další části této učebnice jsou ukázány výpočty vyšších derivací a výpočty derivací funkcí zadaných implicitně, parametricky a v polárních souřadnicích. Dále pak už ukazuje aplikace diferenciálního počtu na větě o přírůstku funkce, l'Hospitalově pravidle a na vyšetřování průběhu funkce. Poslední částí kapitoly zabývající se diferenciálním počtem je Taylorův rozvoj a jeho speciální tvar tzv. Mac-Laurinův rozvoj (při volbě středu rozvoje $c=0$) a jeho využití k výpočtům několika funkcí stejně tak i využití zmíněné Taylorovy řady k výpočtu parametrů oskulační kružnice (souřadnice středu a poloměr).

Poslední částí této učebnice je integrální počet. Po zavedení neurčitého integrálu prostřednictvím primitivní funkce jsou ukázány základní integrační metody: substituce, integrace po částech (per partes), rekurentní vzorce, rozklad na parciální zlomky. Poslední částí je pak Riemanův integrál se všemi větami (Newton-Leibnizova, o střední hodnotě, atd.) a s ním související matematické aplikace: funkce gama, délky křivek, obsahy rovinných ploch, rotačních útvarů a válcových ploch. Z velkého počtu fyzikálních aplikací infinitezimálního počtu jsou zde uvedeny práce proměnlivé síly, hmotnost tyče, výpočet těžiště soustavy hmotných bodů, těžiště křivek, ploch a rotačních útvarů.

Pokračujme tedy dále ve srovnávání „Přídavku" s [7], respektive [11], učebnici [1] vynecháme. Nejprve je třeba si uvést, pro jakou cílovou skupinu napsal Václav Šimerka svůj „*Přídavek k Algebře pro vyšší gymnázia*". Jak jsme již uvedli dříve, Václav Šimerka napsal při svém působení na gymnáziu v Českých Budějovicích učebnici „*Algebra, čili počtářství obecné*", kterou vydal až v roce 1863 v Praze, tedy po svém odchodu z Budějovic. Součástí této učebnice byl i náš „*Přídavek*", který vyšel později (v roce 1864) samostatně. Můžeme se jen dohadovat, zda byl určen pro studenty gymnázia, nebo zda je výsledkem Šimerkova zájmu o nové směry v matematice, a je tedy jeho příspěvkem k diskuzi o zavedení infinitezimálního počtu do výuky na střední škole. Tak či onak, budeme uvažovat, že je určen pro studenty závěrečných ročníků gymnázií (tehdejší studenti odpovídají délkou studia 13 let dnešním studentům závěrečných ročníků středních škol, tedy i gymnázií) eventuálně pro studenty na rozmezí střední školy a university.

Shrňme tedy základní odlišnosti mezi „Přídavkem" a současnými učebnicemi [7] a [1]. Rozdílů je velké množství. Pomineme-li pochopitelnou odlišnost v jazyce, tak lze odlišnosti charakterizovat dvojím způsobem.

První rozdíl je v pořadí probírané látky. Nejprve si ale uvědomme, že Šimerkův pojem diferenciálu můžeme po jednoduché úpravě ztotožnit s námi používaným pojmem derivace (důkazů je několik, připomeňme například odvození integračních vzorců jako obrácených vztahů pro diferenciál, atd.). Nyní již popišme obsahovou strukturu posuzovaných učebnic. Na jedné straně máme intuitivní zavedení plné „zanedbání velmi malého" v pořadí: *diferenciál (derivace) a její aplikace (Taylorova a Mac-Laurinova řada) → integrální počet → užití obého hlavně v geometrii.* Na druhé straně máme systematické zavedení sledující linii: *funkce → spojitost funkce → limita → derivace a její aplikace → integrální počet a jeho aplikace*. Je viditelné, že největší rozdíl je právě v zavedení derivace, respektive v nezavedení pojmu limita v Šimerkově „*Přídavku*". Je třeba ale dodat, že k výraznějšímu pronikání základů analýzy a funkčního myšlení do vyučování matematiky na středních školách docházelo až na počátku 20. století. První pokusy zavádění tohoto učiva byly právě bez používání limit, neboť definici derivace jako $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ zavedl až D'Alambert (v 18. stol.) a dnes obvyklou $\varepsilon - \delta$ definici limity začal používat až Weierstrass (v 19. stol.). Je tedy zřejmé, že ve druhé polovině 19. století byly znalosti základů diferenciálního počtu ve značné míře založené právě na této intuitivní představě. V těchto souvislostech se jeví i případná kritika Šimerkova díla kvůli absenci pojmu limita jako neopodstatněná.

Další odlišností je pořadí uvedení Maclaurinovy a Taylorovy řady. Dnes považujeme Mac-Laurinovu řadu za speciální případ Taylorova rozvoje, oproti tomu zavádí Šimerka nejprve jako jednu z možných řad Mac-Laurinovu a teprve o dvě kapitoly později je uvedena Taylorova řada. V této souvislosti si připomeňme, že Taylorova řada má velké uplatnění v diferenciálním počtu a právě u Šimerky je její aplikace plně patrná. Zatímco v [11] jí využíváme jen k rozvoji funkcí $y = e^x, y = \cos x, y = \sin x, y = (1+x)^n$, v „*Přídavku*“ jí využíváme k výpočtům podílů $\frac{fx}{\varphi x}$, která po dosazení dávají tvar $\frac{0}{0}$ nebo $\frac{\infty}{\infty}$ (l'Hospitalovo pravidlo), k určování extrémů funkcí, k přibližnému výpočtu jinak těžko řešitelných algebraických rovnic vyšších řádů, atd.

Druhým rozdílem posuzovaných učebnic je obsahová odlišnost. V „*Přídavk*u“ z dnešního pohledu asi nejvíce postrádáme téma funkcí (spojitost), limit a aplikací diferenciálního počtu na funkce (vyšetřování průběhu funkce). Důvod této absence jsme si již uvedli výše. Další obsahovým rozdílem je velmi malé množství fyzikálních aplikací infinitezimálního počtu. I zde se můžeme domnívat a to i s ohledem na neuvedení Newtonovy mechanické úlohy[13], že tyto aplikace ještě nebyly rozšířené. Posledním závažnějším obsahovým rozdílem je malé množství úloh na procvičování (zejména těch jednodušších). Vzhledem k tomu, že v Šimerkově učebnici „*Algebra, čili počtářství obecné*“ je úloh na procvičování dostatečný počet, může vést tato skutečnost opět zpětně k otázce, zda je „*Přídavek*“opravdu určen pro studenty závěrečných ročníků gymnázií.

Za samostatný komentář stojí symbolika používaná v „*Přídavku*“. V úvodu kapitoly 3.2. jsme uvedli malý slovník ukazující odlišné pojmenování matematických pojmů (str. 23). Dále pak Šimerka používá v některých situacích symbol pro násobení „·“ a ještě v témže příkladu jej vynechá bez zjevného důvodu. Zápis pak budí dojem, že symbolem pro násobení mělo být něco zdůrazněno, ale není tomu tak. Tento formální nedostatek je pak výrazně viditelnější v zápisech funkčních hodnot (například zápis *afa* bychom současnou symbolikou zapsali $a \cdot f(a)$), kde navíc i absence závorek v zápise *f(a)* může vést ke špatnému porozumění celého zápisu. O tvaru $\frac{x}{3}!$, tedy o faktoriálu zlomku jsme se již zmiňovali v kapitole 3.2.2. a podobně tak i o zápisu přirozeného $(\lambda o\gamma)$ a dekadického (*log*) logaritmu (kapitola 3.2.1.).

---

[13] Není zde uvedena ani Leibnizova geometrická idea o tečně

Stejně tak i zápis pro diferencování funkce vyšších řádů ve tvarech $f^1, f^2, f^3, \dots f^n$ nepoužívá současnou symboliku $f^{\prime}, f^{\prime\prime}, f^{\prime\prime\prime}, \dots f^{(n)}$. Tak může být například zápis pro jednotlivé členy Taylorova rozvoje $\frac{h^2}{2!} f^2 x$ pro současného čtenáře hůře pochopitelný. Oproti tomu je v kapitole 2.2.6. pro souřadnice bodu na obecné křivce k určení jejího poloměru křivosti uveden zápis $x^{\prime} = x + \delta x$ a následně $x^{\prime\prime} = x^{\prime} + \delta x^{\prime} = x + 2\delta x + \delta^2 x$, který budí dojem současného zápisu i výpočtu derivace, ale není tomu tak. Jde o odvození plynoucí z obrázku 2.15. V závěru celé učebnice je uvedeno osm obrazců používaných hlavně v závěrečné kapitole. Odlišností oproti naší symbolice je pravotočivé označování vrcholů obrazců.

Mohlo by se zdát, že právě odlišnosti ve formě zápisu budou v učebnici z 19. století největším problémem k plnému pochopení uváděného matematického textu. Obzvláště, popisuje-li oblasti dnes běžně používané jak ve středoškolské tak ve vysokoškolské matematice. Po „zvyknutí“ si na odlišnosti se nám ale jako největší problém jevila nerovnoměrnost způsobu výpočtů a odvozování. Některé vztahy a příklady byly odvozovány srozumitelně, „krok za krokem“, u některých naopak z úvodní úvahy vystoupí rovnou výsledný vzorec. Typickým příkladem je řešení úlohy 3 (určení, který z konvexních čtyřúhelníků má největší obsah při pevně zadaných stranách) z kapitoly 3.2.6. (str. 68).

Samostatnou kategorií „čitelnosti“ „Přídavku“ jsou intuitivní úpravy (zanedbávání diferenciálů vyšších řádů, atd.), které se občas v některých odvozeních objevují (například odvození vzorce pro poloměr křivosti paraboly v kapitole 3.2.6, str. 78). Právě tyto intuitivní úpravy nám činily při ověřování Šimerkových postupů a výsledků určité problémy.

5. SBÍRKA ÚLOH

Jedním z cílů diplomové práce bylo vytvořit sbírku vhodných úloh a následně ověřit její použitelnost na střední škole. Položme si nejprve otázku, jak by taková sbírka měla vypadat, jaká kritéria by měla splňovat. Domníváme se, že by taková sbírka měla být zpestřením pro studenty, měla by být zajímavá jak jiným jazykem, tak i tématem uvedených úloh. Dalším omezujícím kritériem sbírky je zaměření úloh. Vzhledem k zadání diplomové práce a i s ohledem na ověření těchto úloh v praxi jsme se soustředili na úlohy použitelné na střední škole.

„*Přídavek*“ obsahuje celkem 87 úloh, některé řešené, jiné pouze s výsledkem. Středoškolské učivo obsažené v Šimerkově učebnici (derivace, extrémy, integrál, obsah křivek) je zastoupeno menší částí těchto příkladů. Dále nebudeme uvažovat úlohy typu $\delta\frac{a+x}{a-x}$, tedy úlohy na numerické procvičení probrané látky, neboť každá dnes používaná středoškolská učebnice doplněná vhodnou sbírkou úloh obsahuje dostatečné množství úloh tohoto typu. Zbývá tedy 15 úloh, které by bylo vhodné použít. Některé jsou ale velmi obtížné (například úloha 3 ze strany 68 této práce, kterou jsme v uvedené části rozebrali). Nakonec jsme vybrali následující 4 úlohy, respektive 8 úloh. Dále uvádíme i jejich částečně upravené řešení tak, jak je uvedeno v „*Přídavku*“ (pokud bylo uvedeno). První 4 příklady jsem pak zadával jako dobrovolný domácí úkol studentům SŠT Varnsdorf, obor mechanik seřizovač, 4. ročník v rámci předmětu „Cvičení z matematiky“ (volitelný předmět pro studenty závěrečného ročníku, kteří uvažují o studiu na VŠ).

Příklad 1 ([20], str. 28):

Číslo a má se rozvrhnouti ve dvě části tak, by jejich součin co možná veliký byl (řešte obecně a následně zvolte $a=20$).

Komentované řešení:

Číslo a rozdělíme na dvě části, máme tedy a, $(a\text{-}x)$. Funkce popisující závislost velikosti součinu na jeho činitelích a, $(a\text{-}x)$ má tvar $f(x)=x(a-x)$. Odtud $f'(x)=a-2x$, což dává při položení první derivace rovno nule $x=\frac{a}{2}$. Lze tedy říci, že maximální součin nastane, pokud mezi sebou vynásobíme poloviny čísla a $(10\cdot 10>9{,}9\cdot 11{,}1>\dots)$.

Většina studentů úlohu vyřešila, někteří vynechali obecné řešení. Při rozboru úlohy jsem vyslovil dotaz, zda jde o maximum nebo minimum funkce. Vzhledem k tomu, že druhá derivace je záporná, jde o maximum. Po nápovědě přišli studenti na to, že uvedená funkce je kvadratickou funkcí se záporným kvadratickým členem a ta může mít pouze maximum. Uvedená úloha by se dala lehce převést na úlohu typu „Urči rozměry obdélníku daného obvodu tak, aby měl co největší obsah".

Příklad 2 ([20], str. 29):

Kupec jeden veze a korců obilí do ciziny, nalézá pak, že každým dnem, o nějž dále jede, na korci b zl. získá. Dovoz stojí však první den c zl., a v každém z následujících dnů o d zl. více, než den předtím. Jak daleko bude moci obilí to vézt, by co možno nejvíc vydělal (řešte obecně, pokud to zvládnete a pak konkrétně pro $a=100$; $b=0,5$; $c=21$; $d=2$).

Komentované řešení:

Zvolíme x počet dní. Zisk z přepravy bude dán vztahem $Z=abx$. Náklady na dopravu první den budou c, druhý den $c+d$, třetí den $c+2d$, atd. Odtud pro celkové náklady dostaneme vztah $N = c + (c+d) + (c+2d) + \ldots + [c + (x-1)d] = \frac{x}{2}[2c + (x-1)d]$. Následně pro funkci čistého zisku dostaneme vztah: $fx = Z - N = abx - \frac{x}{2}[2c + (x-1)d]$. Vypočítáme-li první derivaci a položíme-li ji rovnu nule, dostaneme pro x tvar: $x = \frac{ab-c}{d} + \frac{1}{2}$. Po dosazení vyjde $x=15$, tedy nejvhodnější je vést obilí *15* dní cesty a vyděláme tak *225* zlatých (pro *16* dní by byl čistý zisk *224* zlatých, pro *14* dní rovněž *224* zlatých).

Tuto úlohu jsem rovněž zadal studentům jako dobrovolný domácí úkol. Nikdo z oslovených studentů ale úlohu nevypracoval. Největším problém bylo vyjádřit funkci pro zisk, nikdo „neoddhalil" v zápisu $c + (c+d) + (c+2d) + \ldots + [c + (x-1)d] = \frac{x}{2}[2c + (x-1)d]$ součet aritmetické řady. Úlohu jsme nakonec řešili společně. Po větší nápovědě pak několik studentů (jen 2 studenti) dokázalo sestavit funkci zisku. Následnou derivaci a určení maxima funkce již zvládla většina studentů samostatně (studenti odstraňovali závorky, nederivovali jako součin). Opět jsme diskutovali o extrému. Po roznásobení funkce, podobně jako v předchozím příkladě, dostaneme kvadratickou funkci se záporným kvadratickým členem, extrém je tedy maximem (což je patrné i z výpočtu zisku pro *14* respektive *16* dní).

Příklad 3 ([20], str. 47):

Máme danou přímku AB (obr. 2.8.) a mimo ni body M, N; má pak se naleznouti bod X, při němž by vzdálenosti MX a NX co nejkratší byly.

Komentované řešení:

Uvedenou úlohu jsme vyřešili a okomentovali na straně 65 této práce. Doplňme jen, že vyjádření a následná derivace funkce délky lomené čáry *MXN* byla pro studenty velmi obtížná, nakonec jsme je vyřešili společně u tabule. Nikoho ze studentů nenapadlo provést řešení pomocí osové souměrnosti (vzhledem k tomu, že jsme procvičovali derivace, dalo se to očekávat).

Příklad 4 ([20], str. 48):

Do daného trojúhelníku se má vepsati co největší obdélník (obr. 2.9.).

Komentované řešení:

Uvedenou úlohu jsme rovněž vyřešili a okomentovali na straně 67 této práce. Podobně jako v předchozí úloze byl největším studentským problémem vyjádření funkce obsahu obdélníka. Samotná derivace i následná diskuze o extrému už proběhla bez obtíží. Studentům jsem napověděl dvojici podobných trojúhelníků a nechal je úlohu dořešit doma.

Asi bychom očekávali, že vhodných úloh bude výrazně více. Připomeňme si ale, co by měly vybrané příklady splňovat. Měly by být pro studenty střední školy a měly by zpestřit výuku pomocí zajímavého jazyka i netypického zadání. Už výše jsme uvedli, že větší část úloh není středoškolská. Další část je „jen“ na numerické procvičování. Zbývá tedy úzká skupina příkladů zaměřená tématicky na výpočet extrémů funkcí (hledání obrazců vepsaných do jiných obrazců s maximálním obsahem, atd.) a pak na aplikaci integrálů (výpočty obsahů kuželoseček, apod.). Z první skupiny jsme vybrali 4 úlohy. Další jsou obtížnější (hlavně na vyjádření funkční závislosti a výpočty $f'(x) = 0$) a domnívám se, že by už výuku příliš nezpestřily. Přesto je zde uvedeme, ale bez komentovaného řešení (studentům jsem je nezadával):

Příklad 5 ([20], str. 48):

Má se do daného křivočarého obrazce vepsati největší obdélník (obr. 2.12.)

Řešení je na straně 71 této práce.

Příklad 6 ([20], str. 49):

Jak se v daném křivočarém obrazci nalezne největší lichoběžník (Trapez) DEMP (obr. 2.13.)

Řešení je na straně 72 této práce.

Příklad 7 ([20], str. 49):

Který z obdélníků do trojúhelníku neb do křivočarého obrazce vepsaných má nejkratší diagonalu?

Řešení je podobné příkladu 4 uvedeného výše. Místo funkce plochy s použitím Pythagorovy věty vyjádříme funkci délky úhlopříčky jako $f(x)=\sqrt{(b-x)^2+\left(\frac{ax}{b}\right)^2}$. Následná derivace, respektive výpočet extrému při $f'(x)=0$ jsou numericky náročné.

Příklad 8 ([20], str. 49):

Který do přímého kužele vepsaný válec jest největší? Který má největší povrch? Který největší pobočnou plochu?

Řešení je podobné opět úloze 4 uvedené výše. Využijeme obr. 2.9. a následně podobnost trojúhelníků, kdy $\Delta ADC \cong \Delta MEC$ a $\Delta ABC \cong \Delta MNC$. Objem, povrch i plášť vepsaného válce do kužele budou závislé na výšce válce ($|MP|=b-x$) a na průměru podstavy ($|MN|=\frac{ax}{b}$). Postavme tedy funkce s proměnnou x pro objem, povrch i plášť. Příslušné funkce derivujme a položme první derivace rovno nule. Vyjma objemu budeme mít pouze jedno řešení. V případě objemu bude minimum pro x=0 (válec ani nevznikne) a maximum pro $x=\frac{a^2\pi}{6b^2}\pi$. Ve zbylých případech je postup podobný.

Další zajímavé úlohy jsou výpočty obsahů kuželoseček. Studenti se například u elipsy seznamují se vzorcem pro výpočet jejího obsahu, ale mohlo by být pro ně zajímavé, odvodit si uvedený vzorec s použitím integrálního počtu. Počáteční zaujetí touto myšlenkou je ale záhy zchlazeno výsledným integrálem, jehož tvar $\int\sqrt{b-\frac{x^2b}{a}}dx$ po vhodné úpravě můžeme vyřešit pomocí tzv. Eulerových substitucí. Pro studenty střední školy jsou tyto úlohy bohužel nevhodné.

6. ZÁVĚR

Cílem diplomové práce bylo prostudovat nejstarší českou středoškolskou učebnici diferenciálního počtu nazvanou „Přídavek k algebře“. V zadání této práce byly stanoveny následující úkoly:

a) připomenout historii diferenciálního počtu
b) stručně charakterizovat uvedenou učebnici
c) porovnat tuto učebnici se současnými učebnicemi
d) vytvořit sbírku historických úloh a prakticky ověřit její použitelnost na střední škole

Na prvních osmi stranách jsme se věnovali historii diferenciálního počtu na pozadí historie vyučování matematice převážně na našem území. Při psaní tohoto textu jsme vycházeli z literatury [10], [15], [16], [18] a [19]. Pokusili jsme se ukázat jednotlivé etapy vývoje výše uvedeného s důrazem na období národního obrození, respektive s důrazem na osobnost Stanislava Vydry, který se stal pravděpodobně odborným i mentálním zázemím Václava Šimerky při tvorbě jeho matematických prací. Rozsah uvedené kapitoly byl několikrát upravován, neboť tento historický úvod měl být pouze uvedením do problematiky a doby, nikoliv odbornou historickou prací. Podobný přístup jsme zvolili i u stručné historie diferenciálního počtu (literatura [2], [3], [9], [17], [21]). Podrobněji jsme se zaměřili pouze na osobnost Václava Šimerky (literatura [6], [12], [18], [20]).

Hlavní částí této diplomové práce (59 stran) byl rozbor a komentář dodatku Šimerkovy učebnice „*Algebra, čili počtářství obecné*“ pod názvem „*Přídavek k Algebře pro vyšší gymnásia*“. Původně jsme si stanovili vybrat z jednotlivých kapitol jednu úlohu nebo jedno téma o provést jeho (její) rozbor a komentář. Uvedený postup se ale velmi záhy stal nedostatečným, neboť v celé Šimerkově učebnici spolu jednotlivá témata a příklady úzce souvisí, řešené úlohy se často „odvolávají“ na „dříve ukázané“ a tak by uvedené komentáře ztratily kontinuitu a srozumitelnost. Nakonec jsme vynechali jen několik úloh (např. v kapitole 3.2.5. „*Základy počtu integrálného*“ jsme vynechali úlohy na vrhy s odporem prostředí nebo v kapitole 3.2.6. „*Upotřebení počtu nekonečného v geometrii*“ jsme neukázali vztahy pro poloměr křivosti, evolutu, oblouk a plochu u cykloidy). U několika příkladů jsme ukázali jen koncové vztahy bez odvozování, neboť právě neuvedené odvození sledovalo stejnou ideu jako již dříve ukázané úlohy. Lze tedy říci, že tato část diplomové práce v podstatě rozebírá a komentuje celou učebnici „*Přídavek k Algebře pro vyšší gymnásia*“.

Sbírka úloh obsahuje pouze 8 úloh. V této části jsme se nejvíce odchýlili od cílů diplomové práce. Důvodů je několik. Předně obsah Šimerkova „*Přídavku*" je z větší části učivem vysoké školy. Dále mnohé úlohy použitelné na střední škole jsou obtížné. Vzhledem k tomu, že jsem uvedené úlohy zadával studentům na volitelném předmětu Cvičení z matematiky (tento dobrovolný předmět navštěvuje jen 6 studentů) pouze ve školním roce 2007/2008 a nikdo ze studentů žádnou z úloh samostatně nevyřešil, neuvádím v příloze žádnou ze studentských prací. Jedinou přílohou diplomové práce tak zůstává kopie učebnice s názvem „*Přídavek k Algebře provyšší gymnásia*" poskytnutá RNDr. Alena Kopáčkovou, Ph.D, za což jí ještě jednou toutou formou děkuji.

V zadání této diplomové jsme si stanovili určité cíle. Některé jsme naplnili zcela, některé jen z části. Každopádně můžeme na závěr prohlásit, že Šimerkova učebnice je netypickou učebnicí uvedeného tématu (ze současného pohledu na učebnice matematiky) a že by pro současné studenty byla obtížně čitelná. Oproti tomu se ale domnívám, že je zajímavou sondou do historie vyučování matematice a že alespoň některé její části mohou být svým intuitivním přístupem přínosem pro studenty matematiky a podobně tak i pro současné nebo budoucí učitele matematiky.

POUŽITÁ LITERATURA:

1. Riečan, B. – Bero, P. – Smida, J. – Šedivý, J.: Matematika pro IV. ročník gymnázií. Praha 1987, počet stran 360, 1. vydání
2. Brabec, J. - Martan, F. - Rozenský, Z.: Matematická analýza I. Praha 1985, 488 stran, 1. vydání
3. Bührke, T.: Převratné objevy fyziky. Z německého originálu Newtons Apel, Sternstunden der Physik, Von Galilei bis Lise Meitner přeložila Eckertová L., Praha 1999, 230 stran, 1. vydání
4. Cantor, M.: Vorlesungen über Geschichte der Matematik. Dritter Band., B.G. Teubner, Leipzig 1901
5. Cantor, M.: Vorlesungen über Geschichte der Matematik. Zweite Band., B.G. Teubner, Leipzig 1900
6. Fiala, J.: Síla přesvědčení Václava Šimerky. Jubilejní almanach Jednoty čs. Matematiků a fyziků 1862-1987, JČSFM, Praha 1987, str. 97-106, kopie
7. Hrubý, D. - Kubát, J.: Matematika pro gymnázia - Diferenciální a integrální počet. Prométheus 1997, 195 stran, 1. vydání
8. Jarník, V.: Diferenciální počet (I). Praha 1984, 392 stran, 7. vydání
9. Kopáčková, A.: Počátky diferenciálního a integrálního počtu ve školské matematice. ICPM 2006, Liberec, TUL 2006
10. Mikulčák, J. - Žídek, S.: Antologie z učebnic matematiky – období 1860-1960. Praha 1988, 320 stran, 1. vydání
11. Nekvinda, M.: Matematika I. Liberec 1994, 238 stran, 1. vydání
12. Pánek A.: Život a působení P. Václava Šimerky. Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 17 (1888), str. 253-256, kopie
13. Petránek, O. – Calda, E. – Hebák, P.: Matematika pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť IV. Prométheus, 2006, 148 stran, dotisk 5. vydání
14. Polák, J. : Přehled středoškolské matematiky. Praha 1983, 628 stran, 4. vydání
15. Potůček, J.: Vývoj vyučování matematice na českých středních školách v období 1900-1945, I. díl . Plzeň 1992, 55 stran, 1. vydání
16. Potůček, J.: Vývoj vyučování matematice na českých středních školách v období 1900-1945, II. díl: Plzeň 1993, 49 stran, 1. vydání
17. Struik, D. : Dějiny matematiky. Praha 1963, 256 stran, 1. vydání

18. Šedivý, J. – Mikulčák, J. – Žídek, S.: Antologie z učebnic matematiky, období 1860-1960. Praha 1987, 320 stran, 1. vydání
19. Šedivý, J. a kol.: Antologie matematických didaktických textů - období 1360-1860. Praha 1987, 264 stran, 1. vydání
20. Šimerka, V.: Přídavek k Algebře pro vyšší gymnasia. Tiskem a nákladem Dr. E. Grégra v Praze 1864, 57 stran, fotokopie
21. Thiele, R.: Matematické důkazy. Z německého originálu Mathematische Beweise vydaného nakladatelstvím BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1979 přeložili Kufner, A. – Schwabik, Š., Praha 1985, 160 stran, 1. vydání
22. www.birtanica.com
23. www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history
24. www.math.muni.cz/math

PŘÍLOHY:

PŘÍDAVEK

k Algebře pro vyšší gymnasia,

již sepsal

Václav Šimerka,

farář ve Slatině.

S osmi obrazci.

V PRAZE.

Tiskem a nákladem Dr. E. Grégra.

1864.

Obsah.

Počátky počtu differencialného a integralného.

I. Differencialy daných úkonů.

1. Pojem a vlastnosti nekonečně malého. 2. Differencialy obecných funkcí, pak 3. součtů, 4. součinů a podílů, 5. mocností a kořenů, 6. logaritmů a exponencialných veličin. 7. Differencialy vyšší.

II. Proměňování úkonů v řady.

8. Řada Mac-Laurinova. 9. O rovných řadách též proměnné. 10. Vlastnosti veličiny $\binom{n}{r}$. 11. Obecný důkaz na poučku binomickou. 12. Řada logaritmická. 13. Řady exponencialné.

III. Úkony trigonometrické.

14. O funkcích $\sin x$, $\cos x$. 15. Rovnice pro $\sin(x \pm y)$ a $\cos(x \pm y)$. 16. Význam funkcí těch ve kruhu. 17. Co znamená $\log(-M)$ a $\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$? 18. Pomocné funkce trigonometrické. 19. Protivy trigonometrické. 20. Differencialy funkcí těch. 21. Řada pro $arc\ tg\ x$.

IV. Taylorova poučka a její následky.

22. Řada Taylorova. 23. Úkony v $\frac{0}{0}$ přecházející. 24. Největší a nejmenší hodnoty úkonů. 25. Řešení určitých rovnic o jedné neznámé. 26. Rovnice třetího stupně.

V. Základy počtu integralného.

27. Obecné věty integralné. 28. Formule integralné zvláštní. 29. Integraly složité. 30. Integrování v úkolech. 31. O pohybu v přímkách. 32. Integrace zakuklená.

VI. Upotřebení počtu nekonečného v geometrii.

33. Rovnice některých čar v rovině, zvláště pak cykloidy. 34. Příklady na maxima a minima. 35. Veličiny tangencialné. 36. Kruhy křivné. 37. Evoluty. 38. Délka oblouků u křivek. 39. Plochy křivočarných obrazců.

Počátky počtu differencialného a integralného.

I. Differencialy daných úkonů.

1.

a) Každá funkce (čl. 145. *A* *) obsahuje veličiny stálé, mimo ně pak i jednu neb více proměnných. Proměnné jsou buď opět veličiny rozpojité jako u obecných členů řad ukazovatelé (čl. 142. *A*) a protož i členy samy; neb jsou spojité, jako čas, délka a p. U prvních děje se změna skokem, u druhých však poznenáhla ve velmi malých přechodech. *Nesmírně čili nekonečně malá část, o niž spojitou proměnnou veličinu* (x, y, z, atd.) *růsti necháváme, jmenuje se differencial* (lišné, rozčinek) *veličiny této, a znamená písmenou ∂ před veličinu onu postavenou* (∂x, ∂y, ∂z, atd.).

b) Differencialům můžeme vždy tu vlastnost přiřknouti, že k veličinám konečným (t. j. těm, které nejsou differencialy neb funkce z nich) přičteny neb od nich odejmuty mizejí, čili že se jimi veličiny konečné ani nezvětšují aniž zmenšují. Zdánlivý tento odpor dá se nejsnáze následovně objasniti: Obyčejně počítáme nejvýš v 7mi neb v 8mi cifrách, pro které i logaritmické desky (čl. 137, 138. *A*) upraveny jsou; představujíli tedy x, y třeba i celá 10ticifrová čísla, zvětší se sice x, pakli k němu

$$\frac{y}{10^m}$$

(kdež m as sto neb ještě více jest) přičteme, a zmenší, pakli zlomek ten odejmeme, ale změna ta jest tak malá, že se logaritmických desk ani netýká, a proto se též vždy místo

$$x \pm \frac{y}{10^m}$$

*) Články znamenané *A* vztahují se na Algebru.

čili $x \pm \delta y$ pouze x bráti může. Kdyby se

$$\delta y = \frac{y}{10^m}$$

při $m = 100$ velikým zdálo, vezme se m větší, tedy δy ještě menší. Differencialy jsou tedy veličiny nalézající se mezi nullou a nejmenšími zlomky, jaké kdy v praktickém počtu přicházejí.

Mezi sebou mohou však differencialy konečné poměry míti.

c) Z té samé příčiny mizejí mocnosti vyšších stupňů z differencialů k mocnostem nižších stupňů přičteny neb od nich odejmuty; tak dává na př.

$$a\delta x + b\,(\delta x)^2 = \delta x\,(a + b\delta x) = a\delta x,$$

jelikož $b\delta x$ proti a zmizí. Neb

$$g(\delta x)^2 + h(\delta x)^3 = (\delta x)^2\,(g + h\delta x) = g(\delta x)^2.$$

To platí i u součinů majících za činitele více differencialů, na př.

$$a\delta x \pm b\delta x . \delta y = \delta x\,(a \pm b\delta y) = a\delta x.$$

Poznamenání. Poněvadž δ pouze úkonové znamení jest, platí δx^n za tolik co $(\delta x)^n$; podobně jest i $\delta x \delta y = (\delta x) . (\delta y)$.

2.

Máme-li tu jakýkoli úkon $y = fx$, kdežto f obecná známka funkce jest, místo níž se též v čas potřeby F, φ, ψ a p. píše, mění se y, pakli x ve $x + \delta x$ přechází. Znamenáme-li nekonečně malou změnu, již y při tom béře, výrazem δy, bude

$$y + \delta y = f(x + \delta x),$$

tedy $\delta y = f(x + \delta x) - y$ čili $\delta fx = f(x + \delta x) - fx$; (1)

differencial funkce každé nalezneme tedy, když od změněné funkce původní úkon odejmeme.

To se též stává u funkcí o dvou proměnných, na př. z

$$u = f(x, y) \text{ jde } u + \delta u = f(x + \delta x, y + \delta y),$$
$$\delta u = f(x + \delta x, y + \delta y) - u,$$

protož

$$\delta f(x, y) = f(x + \delta x, y + \delta y) - f(x, y); \qquad (2)$$

a vůbec

$$\delta f\,(x, y, z, \text{atd.}) = f(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z, \text{atd}). - f(x, y, z, \text{atd.}) \qquad (3).$$

Význam spon a čárek jest zde tentýž, který čl. 8. *A*) udává.

3.

Je-li $fx = a + bx$, bude $f(x + \delta x) = a + b\,(x + \delta x)$, tedy dle formule 1) $\delta(a + bx) = a + bx + b\delta x - (a + bx)$

t. j. $\quad \delta(a + bx) = b\delta x. \qquad (4)$

Z toho jde dvoje, a sice při $b = 0$, $\delta a = 0$; t. j. *veličiny stálé nemají žádných differencialů*; napotom při $a = 0$, $\delta bx = b\delta x$; což okazuje, že *při differencování stálí činitelové před znamení differencialné vyjímáni býti mohou.*

Z rovnice 3) následuje

$$\delta\,(t + u + v \text{ atd.}) = t + \delta t + u + \delta u + v + \delta v \text{ atd.} - (t + u + v \text{ atd.})$$

tedy

$$\delta(t + u + v \text{ atd.}) = \delta t + \delta u + \delta v \text{ atd.} \qquad (5)$$

Differencial součtu z vícera veličin neb funkcí rovná se součtu differencialů sčítanců.

4.

Dle formule 2) jest

$$\delta\,(tu) = (t + \delta t)\,(u + \delta u) - tu = t\delta u + u\delta t + \delta t\delta u;$$

poněvadž pak dle čl. 1. c) $\delta t\delta u$ k $u\delta t$ přičteno mizí, bude

$$\delta\,(tu) = u\delta t + t\delta u, \qquad (6)$$

čímž differencial součinu z dvou proměnných veličin čili funkcí najíti lze. Postavíme-li zde uv místo u, bude

$$\delta\,(tuv) = uv\delta t + t\delta(uv) = uv\delta t + tv\delta u + tu\delta v;$$

podobně nalezneme

$$\delta\,(tuvx) = uvx\delta t + tvx\delta u + tux\delta v + tuv\delta x;$$

a jeli vůbec $X = tuvxyz$ atd., objeví se

$$\delta X = \frac{X}{t}\,\delta t + \frac{X}{u}\,\delta u + \frac{X}{v}\,\delta v + \frac{X}{x}\,\delta x + \frac{X}{y}\,\delta y \text{ atd. atd.,} \qquad (7)$$

odkudž differencial součinu z mnoha proměnných veličin neb funkcí plyne.

Co se differencialu zlomku

$$\frac{x}{y}$$

týče, postavme

$$\frac{x}{y} = z,$$

tedy $x = yz$, kteráž rovnice differencovaná dává dle form. 6) $\delta x = z\delta y + y\delta z$, tedy $y\delta z = \delta x - z\delta y$ pak

$$y\delta\,\frac{x}{y} = \delta x - \frac{x}{y}\,\delta y = \frac{y\delta x - x\delta y}{y}$$

čili

$$\delta\,\frac{x}{y} = \frac{y\delta x - x\delta y}{y^2}\,, \tag{8}$$

kterýžto výsledek dle formule 2) i z

$$\delta\,\frac{x}{y} = \frac{x + \delta x}{y + \delta y} - \frac{x}{y}$$

plyne.

5.

Představuje-li svrchu X součin z n stejných činitelů, tedy

$$t = u = v = x = y \text{ atd. a } X = x^n,$$

bude

$$\delta X = \frac{x^n}{x}\,\delta x + \frac{x^n}{x}\,\delta x + \frac{x^n}{x}\,\delta x \text{ atd. atd.}$$
$$= n\,x^{n-1}\,\delta x\,;$$

protož máme při každém kladném a celém n

$$\delta(x^n) = n x^{n-1}\,\delta x \tag{9}$$

To samé jde i z rovnice 1) při

$$\delta(x^n) = (x + \delta x)^n - x^n\,,$$

což dle čl. 166) ve

$$\delta(x^n) = nx^{n-1}\delta x + \binom{n}{2} x^{n-2}\delta x^2 + \binom{n}{3} x^{n-3}\delta x^3 \text{ atd.}$$

přechází, kdež dle 1. c) členy δx^2, δx^3 atd. obsahující mizí.

Rovnice 9) platí však i u mocností se zápornými a lomenými exponenty; postavíme-li totiž $x^{-m} = y$, bude $1 = x^m y$, což differencováno

$$0 = y\delta(x^m) + x^m\delta y\,,$$
$$x^m\delta y = -\,myx^{m-1}\delta x = -\,mx^{-m}x^{m-1}\delta x = -\,mx^{-1}\delta x\,,$$
$$\delta y = -\,mx^{-m-1}\delta x\,, \text{ t. j. } \delta x^{-m} = -\,mx^{-m-1}\,\delta x \text{ dává.}$$

Podobně nalezneme z

$$x^{\frac{m}{r}} = y$$

zmocňováním $x^m = y^r$, což differencujíce $mx^{m-1}\delta x = ry^{r-1}\delta y$,

$$\delta y = \frac{m}{r}\,x^{m-1}\delta x : y^{r-1} = \left[\frac{m}{r}\,x^{m-1} : (x^{\frac{m}{r}})^{r-1}\right]\delta x$$
$$= \left[\frac{m}{r}\,x^{m-1} : x^{m-\frac{m}{r}}\right]\delta x$$

obdržíme

$$\delta x^{\frac{m}{r}} = \frac{m}{r}\,x^{\frac{m}{r}-1}\,\delta x.$$

Oboje se srovnává s hořejším výrazem jednou při $n = -\,m$, a po druhé při

$$n = \frac{m}{r}\,;$$

poněvadž pak nad to každého nesměrného mocnitele zlomkem tak určiti lze, že rozdíl zmizí, platí formule 9) vůbec při každém exponentu. Z ní jde nápotom při

$$n = \tfrac{1}{2}\,, \quad \delta\sqrt{x} = \tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\,\delta x,$$

čili

$$\delta\sqrt{x} = \frac{\delta x}{2\sqrt{x}}\,,$$

a postavíme-li $a + bx$ místo x,

$$\delta\sqrt{a + bx} = \frac{b\delta x}{2\sqrt{a+bx}} \tag{10}$$

necháme-li pak ještě nad to x ve x^2 přejíti, bude

$$\delta\sqrt{a + bx^2} = \frac{bx\delta x}{\sqrt{a + bx^2}} \tag{11}$$

Příklady.

1. $\delta(a + bx - cx^2) = (b - 2cx)\delta x$,
2. $\delta\,\dfrac{a + x}{a - x} = \dfrac{2a\delta x}{(a - x)^2}$,
3. $\delta\sqrt{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{y\delta x - x\delta y}{2y\sqrt{xy}}$,
4. $\delta\sqrt{\dfrac{x + y}{x - y}} = \dfrac{x\delta y - y\delta x}{(x - y)\sqrt{x^2 - y^2}}$,
5. $\delta\,\dfrac{\sqrt{a + bx^2}}{x} = -\,\dfrac{a\delta x}{x^2\sqrt{a + bx^2}}$.

6.

Differencial logaritmu dá se nejsnáze následovně naleznouti: Budiž $\delta\log x = fx\,.\,\delta x$, kdež fx neznámý posud úkon udává; dosaďme do rovnice té x^n místo x, a obdržíme z ní

$$\delta\log x^n = f(x^n)\,\delta(x^n),$$

čili

$$n\delta\log x = nx^{n-1}f(x^n)\,\delta x\,, \quad fx\,.\,\delta x = x^{n-1}f(x^n)\,.\,\delta x,$$

tedy i $$xfx = x^n f(x^n).$$
Poněvadž n libovolně vzatá veličina jest, můžeme vždy $x^n = a$, tedy i $afa = A$ postaviti, z čehož

$$fx = \frac{A}{x}, \quad \text{a} \quad \partial \, log \, x = \frac{A \partial x}{x} \quad \text{jde.}$$

Logaritmy, u nichž $A = 1$ vzato, nazývají matematikové přirozenými; z té příčiny jest pak

$$\partial \, \lambda o \gamma \, x = \frac{\partial x}{x} \tag{12}$$

Je-li dále μ modul jakékoli jiné na př. Briggické soustavy ohledem logaritmů přirozených (čl. 135. A), jest $log\, x = \mu \, \lambda o \gamma \, x$, $\partial \, log \, x = \mu \partial \, \lambda o \gamma \, x$ t. j.

$$\partial \, log \, x = \frac{\mu \partial x}{x}; \tag{13}$$

hořejší A jest tedy modul μ.

Hledajíce nápotom ∂a^x, postavme $a^x = y$, to dá logaritmováno $x \, \lambda o \gamma \, a = \lambda o \gamma \, y$ a differencováno

$$\lambda o \gamma \, a \,.\, \partial x = \frac{\partial y}{y} \quad \text{čili} \quad \partial y = \lambda o \gamma \, a \,.\, y \partial x$$

tedy $$\partial a^x = \lambda o \gamma \, a \,.\, a^x \, \partial x, \tag{14}$$
a dosadíme-li místo a základ přirozených logaritmů e, kdež tedy $\lambda o \gamma \, e = 1$, nalezneme

$$\partial e^x = e^x \,.\, \partial x \tag{15}.$$

Příklady.

1. $\partial \, \lambda o \gamma \, (1 + \sqrt{x}) = \dfrac{\partial x}{2(x + \sqrt{x})}$,
2. $\partial \, \lambda o \gamma \, \dfrac{1 + x}{1 - x} = \dfrac{2 \partial x}{1 - x^2}$,
3. $\partial \, \lambda o \gamma \, (x + \sqrt{a + x^2}) = \dfrac{\partial x}{\sqrt{a + x^2}}$,
4. $\partial x^x = x^x \, (1 + \lambda o \gamma \, x) \, \partial x$,
5. $\partial x^y = x^{y-1} \, (y \partial x + x \, \lambda o \gamma \, x \,.\, \partial y)$.

7.

Nic nevadí, proč by se differencial kterýs nemohl opět differencovati, čímž pak druhý, třetí atd. atd. $r$tý differencial obdržíme, jež výrazy $\partial^2 y$, $\partial^3 y$, atd. atd. $\partial^r y$ naznačiti lze.

V případu takovém zastupuje jedna proměnná na př. y funkci kterous druhé čili x, při čemž si myslíme, že x o částky nekonečně malé a však stejné roste, tedy ∂x stálé a protož

$$\partial^2 x = \partial \, (\partial x) = 0$$

jest. Tak na př. z $y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$ obdržíme $\partial y = (B + 2Cx + 3Dx^2) \, \partial x$, $\partial^2 y = (2C + 6Dx) \, \partial x^2$, $\partial^3 y = 6D \, \partial x^3$.

Podobně dává $y = \sqrt{x}$,

$$\partial y = \frac{\partial x}{2\sqrt{x}}, \quad \partial^2 y = -\frac{\partial x^2}{4\sqrt{x^3}}, \quad \partial^3 y = \frac{3 \partial x^3}{8 \sqrt{x^5}},$$

$$\partial^4 y = -\frac{15 \, \partial x^4}{16 \sqrt{x^7}}, \quad \text{atd. atd.}$$

Je-li vůbec $y = fx$, obdržíme posloupným differencováním

$$\partial y = f^1 x \,.\, \partial x, \quad \partial^2 y = \partial f^1 x \,.\, \partial x = f^2 x \,.\, \partial x^2,$$
$$\partial^3 y = \partial f^2 x \,.\, \partial x^2 = f^3 x \,.\, \partial x^3 \quad \text{atd. atd.}$$

až
$$\partial^r y = f^r x \,.\, \partial x^r,$$

a jednotlivé z podílů

$$\frac{\partial y}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}, \quad \ldots \quad \frac{\partial^r y}{\partial x^r} \quad \text{čili}$$
$$f^1 x, \quad f^2 x, \quad f^3 x, \quad \ldots \quad f^r x$$

jmenují se potažně prvním, druhým, třetím atd. $r$tým odvozeným úkonem, ohledně čehož se pak fx úkonem původním nazývá. Tak z

$$fx = \lambda o \gamma \, x$$

jde $f^1 x = x^{-1}$, $f^2 x = -x^{-2}$, $f^3 x = 2! \, x^{-3}$, $f^4 x = -3! \, x^{-4}$ atd. atd. $f^r x = (-1)^{r-1} \, (r-1)! \, x^{-r}$.

Kde tedy o funkcích odvozených řeč jest, vyrozumívají se vždy differencováním povstalé.

Že se při jednání tomto y čili fx obecnému členu řad v oddělení XVII. podobá, kdežto x s ukazovatelem,

$$f^1 x, \quad f^2 x, \quad f^3 x, \quad \text{atd.}$$

s obecným členem první, druhé, třetí atd. rozdílové řady souhlasí, patrno samo sebou.

Otázka: Jaký jest rozdíl mezi

$$f\,(x^r), \; (fx)^r, \; f^r x, \; frx, \; fx_r$$

čili

$$\partial\,(x^r), \; \partial x^r, \; \partial^r x, \; \partial rx, \; \partial x_r \,?$$

II. Proměňování úkonů v řady.

8.

Řada Mac-Laurin'ova.

Mnohé úkony proměnné x dají se naznačiti řadou dle mocností z x postupující, totiž

$$fx = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots A_r x^r,$$

kdež $A_0\ A_1\ A_2\ A_3 \ldots A_r$ stálé, posud však neznámé veličiny jsou. Má-li řada tato míti obecnou platnost, musí býti pravou i pro nesmírně malé x, tedy i pro $x = 0$, z čehož potom $A_0 = f0$ jde. Differencujíce výraz onen, obdržíme

$$\partial fx = (A_1 + 2A_2 x + 3A_3 x^2 + \ldots rA_r\ x^{r-1})\ \partial x,$$

a však

$$\frac{\partial fx}{\partial x} \quad \text{čili} \quad \frac{\partial y}{\partial x}$$

jest dle článku předešlého $= f^1 x$, protož bude první odvozená funkce

$$f^1 x = A_1 + 2A_2 x + 3A_3 x^2 + \ldots rA_r\, x^{r-1},$$

ježto pro každou hodnotu čísla x platí. Vezmeme-li i zde x nekonečně malé čili $x = 0$, nalezneme $A_1 = f^1 0$. Podobně jest následkem $\partial f^1 x = f^2 x \,.\, \partial x$ druhý odvozený úkon

$$f^2 x = 1\,.\,2\,A_2 + 2\,.\,3\,A_3 x + 3\,.\,4\,A_4 x^2 + \ldots (r-1) r A_r\, x^{r-2},$$

z něhož při $x = 0$, $2!\,A_2 = f^2 0$, tedy $A_2 = \frac{1}{2}!\,f^2 0$ plyne.

Dále obdržíme

$$f^3 x = 1\,.\,2\,.\,3\,A_3 + 2\,.\,3\,.\,4\,A_4 x + \ldots (r-2)(r-1) r A_r\, x^{r-3},$$

z čehož

$A_3 = \frac{1}{3}!\,f^3 0$ jde, odkudž snadno nahlédneme, že vůbec

$$A_r = \frac{1}{r}!\ f^r 0$$

platí.

Takto jsme obdrželi

$$fx = f0 + \frac{x}{1}\,f^1 0 + \frac{x}{2}!\,f^2 0 + \frac{x}{3}!\,f^3 0 + \text{atd. atd.}\ \frac{x^r}{r}!\,f^r 0,$$

kdežto $f^r 0$ znamená, že se v $r$té odvozené funkci, totiž ve $f^r x$ vzalo $x = 0$.

Návodu tohoto bude tedy vždy a jen tu lze použíti, kdykoli

se žádná z veličin $f0$, $f^1 0$, $f^2 0$, atd. $f^r 0$ nestává nekonečně velikou, v kteréž případnosti fx jinak upraviti třeba.

9.

Jiný podobný způsob funkce v řady proměňovati spočívá na poučce, že u dvou rovných řad majících tutéž proměnnou součinitelé stejných mocností proměnné rovnými býti musí; máme-li totiž

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots,$$

obdržíme, poněvadž řady ty i při velmi malém x rovnými býti musí, z $x = 0$, $A = a$; což odejmuto

$$bx + cx^2 + dx^3 \text{ atd.} = Bx + Cx^2 + Dx^3 \text{ atd.}$$

čili

$$b + cx + dx^2 \text{ atd.} = B + Cx + Dx^2 \text{ atd.}$$

podává, odkud opět $B = b$, pak $C = c$ atd. plyne.

Návodu tohoto lze tu s prospěchem použiti, kde

$$f^1 x \quad \text{neb} \quad f^2 x \quad \text{atd.}$$

jest buď zlomek, jenž dělením řadu dává (čl. 45. A), neb kde již řada pro

$$f^1 x \quad \text{čili} \quad f^2 x$$

jest známa.

10.

Prve než dále pokročíme, jest třeba pojem veličiny

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{1\,.\,2\,.\,3\ \ldots\ r}$$

v článku 159 A) uvedené objasniti a rozšířiti.

Co se r týče, nemůže býti lomené, jelikož v řadě 1, 2, 3 atd. pouze celá čísla přicházejí; n však může vždy co lomené neb záporné vzato býti, pakli

$$\binom{n}{r}$$

co podíl z dvou faktoriel (čl. 156. A pozn.) považujeme.

a) Pouze při celém kladném n platí věta

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

dokázaná v čl. 166. A); věty ostatní platí i při jiných hodnotách čísla n. Takť

b) z

$$\binom{n}{r+1} = \frac{n(n-1)\ \ldots\ldots (n-r+1)}{1\ .\ 2\ \ldots\ldots\ r} \cdot \frac{n-r}{r+1}$$

jde

$$\binom{n}{r+1} = \binom{n}{r}\frac{n-r}{r+1}$$

čili

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{r+1}\frac{r+1}{n-r}$$

pro jakoukoli hodnotu čísla n. Z toho pak plyne

$$\binom{n}{1} = n,\ \binom{n}{0} = 1,\ \binom{n}{-r} = 0.$$

c) Dále jde z

$$\binom{n}{r} = \frac{(n-1)(n-2)\ \ldots\ldots (n-r+1)}{1 \times 2\ \ldots\ldots\ (r-1)} \cdot \frac{n}{r}, \text{ že}$$

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1}\frac{n}{r}, \quad \text{čili} \quad \binom{n-1}{r-1} = \binom{n}{r}\frac{r}{n}.$$

d) Podobně plyne z

$$\binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1} = \binom{n-1}{r-1}\left(\frac{n-r}{r}+1\right)$$

$$= \binom{n-1}{r-1}\frac{n}{r}$$

čili

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}.$$

Při $n = -5$, $r = 4$ jest na př.

$\binom{-5}{4} = \binom{-6}{4} + \binom{-6}{3}$ čili $70 = 126 - 56$.

Pokustež se o to dokázati, že jest

1) $\binom{-1}{r} = (-1)^r$,

2) $\binom{-2}{r} = (-1)^r(r+1)$,

3) $\binom{-3}{r} = (-1)^r\binom{r+2}{2}$,

4) $\binom{-n}{r} = (-1)^r\binom{n+r-1}{r}$,

5) $\binom{\frac{1}{2}}{r} = (-1)^{r-1}\dfrac{1\ .\ 1\ .\ 3\ .\ 5\ \ldots\ldots\ (2r-3)}{2\ .\ 4\ .\ 6\ .\ 8\ \ldots\ldots\ 2r}$,

a vůbec

6) $\binom{\frac{m}{n}}{r} = (-1)^{r-1}\dfrac{m(n-m)(2n-m)(3n-m)\text{ atd. }[(r-1)n-m]}{n\ .\ 2n\ .\ 3n\ .\ 4n\ .\text{ atd. }nr}$.

11.

Obecný důkaz na poučku binomickou (čl. 166. A) lze nejsnáze provésti takto:

Postavíme-li v řadě Mac-Laurin-ově (čl. 8.)

$fx = (a+x)^n$ bude $f0 = a^n$

pak

$f^1x = n(a+x)^{n-1}$ tedy $f^10 = na^{n-1}$,

jakož i

$f^2x = n(n-1)(a+x)^{n-2}$ a $f^20 = n(n-1)a^{n-2}$,

a dále

$f^3x = n(n-1)(n-2)(a+x)^{n-3}$ „ $f^30 = n(n-1)(n-2)a^{n-3}$ atd.

Každým novým odvozením zmenšuje se exponent veličiny $(a+x)$ o jedničku, protož bude u f^rx, $(a+x)^{n-r}$. Součinitel potence této jest součin, jenž při každém odvození o jednoho činitele roste; poněvadž pak činitelové tito n, $n-1$, $n-2$ atd. jsou, bude $r$tý z nich $n-r+1$ (čl. 143. A), tedy

$$f^rx = n(n-1)(n-2)\ \ldots\ldots (n-r+1)(a+x)^{n-r}$$

a $\quad f^r0 = n(n-1)(n-2)\ \ldots\ldots (n-r+1)a^{n-r}$.

Způsobem tímto jsme nalezli

$$(a+x)^n = a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}x^2$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}x^3 \text{ atd. } \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)}{r!}a^{n-r}x^r,$$

čili

$$(a+x)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}x + \binom{n}{2}a^{n-2}x^2 + \ldots\ldots \binom{n}{r}a^{n-r}x^r,$$

ať již n jakékoli číslo znamená.

Co se celého kladného n týče, podotknuto při čl. 166. A; není-li n celé neb kladné, stává se řada binomická nekonečnou. Obyčejně jest sbíhavou (čl. 77. A) neb může takovou udělána býti, vždy ale není tomu tak.

Mnohdy, zvláště je-li n záporné neb lomené, bývá prospěšno následující členy řady této z předcházejících vyvinovati, kterýž způsob počítání se *návratným* (rekurrirend) jmenuje; máme-li tedy ohledně toho

$(a+x)^n = A_0 + A_1 + A_2 + \ldots\ldots A_r + A_{(r+1)} + \ldots$

jest

$$A_r = \binom{n}{r}a^{n-r}x^r,$$

$$A_{(r+1)} = \binom{n}{r+1} a^{n-r-1} x^{r+1} = \frac{n-r}{r+1}\binom{n}{r} \cdot a^{n-r} x^r \cdot \frac{x}{a}$$

z čehož

$$A_{(r+1)} = \frac{n-r}{r+1} \cdot \frac{x}{a} \cdot A_r$$

co formule návratná plyne. Tak podává

$$\sqrt{b^2 - y} = (b^2 - y)^{\frac{1}{2}}, \quad A_0 = b,$$

pak

$$A_{(r+1)} = \frac{\frac{1}{2} - r}{r+1} \cdot \frac{-y}{b^2} \cdot A_r,$$

t. j.

$$A_{(r+1)} = \frac{2r-1}{2r+2} \cdot A_r \cdot \frac{y}{b^2};$$

z toho jde při

$$r = 0, \quad A_1 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{y}{b}; \quad r = 1, \quad A_2 = -\frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} \cdot \frac{y^2}{b^3},$$

$$r = 2, \quad A_3 = -\frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{y^3}{b^5};$$

$$r = 3, \quad A_4 = -\frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{y^4}{b^7} \text{ atd.}$$

z čehož další postup snadno seznati; protož jest

$$\sqrt{b^2 - y} = b - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{y}{b} + \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} \cdot \frac{y^2}{b^3} + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{y^3}{b^5} + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{y^4}{b^7} \text{ atd. atd.}\right)$$

Poznamenání 1. Při $b = 1$, $y = 2$ jde z formule této, že $\sqrt{-1}$ se rovná řadě rozbíhavé; t. j. $\pm \infty$ (čl. 77. *A*) jest právě tak veličina pomyslná jako $\sqrt{-1}$ (čl. 116. c. *A*).

Pozn. 2. Vezmeme-li v binomické řadě $x = -a$, $n = 0$, jest $0^0 = 1$ (čl. 77. b. *A*).

Pozn. 3. Příčinu, proč o binomické poučce vzdor čl. 10. *A*) dvakráte jednáno, udává předmluva.

Příklady.

1. $\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$

2. $\frac{1}{(a-x)^2} = (a-x)^{-2} = \frac{1}{a^2}\left(1 + \frac{2x}{a} + \frac{3x^2}{a^2} + \frac{4x^3}{a^3} + \ldots\right)$

3. $\sqrt{a+b} = \sqrt{a}\left(1 + \frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}\left(1 + \frac{b}{2a} - \frac{b^2}{8a^2} + \frac{b^3}{16a^3} - \frac{5b^4}{128a^4} + \ldots\right)$

4. $\sqrt{101} = 10\left(1 + \frac{1}{100}\right)^{\frac{1}{2}} = 10{\cdot}0498756,$

5. $\sqrt[m]{a+b} = (a+b)^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a}\left(1 + \frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{m}}$

$$= \sqrt[m]{a}\left(1 + \frac{1}{m} \cdot \frac{b}{a} - \frac{m-1}{2m^2}\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{(m-1)(2m-1)}{2 \cdot 3\, m^3}\left(\frac{b}{a}\right)^3 - \ldots\right)$$

12.

Poněvadž $\lambda o\gamma\,(1+x)$ při $x = 0$ mizí, můžeme postaviti $\lambda o\gamma\,(1+x) = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots\ldots$; rovnice ta differencována a veličinou ∂x zkrácena dává dle čl. 6)

$$\frac{1}{1+x} = A + 2\,Bx + 3\,Cx^2 + 4\,Dx^3 + \ldots\ldots;$$

proměníme-li však

$$\frac{1}{1+x}$$

dělením v řadu, bude

$$1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots\ldots = A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + 5Ex^4 + \ldots\ldots$$

a protož jest dle čl. 9)

$$A = 1,\ B = -\tfrac{1}{2},\ C = \tfrac{1}{3},\ D = -\tfrac{1}{4},\ E = \tfrac{1}{5}, \text{ atd. atd.}$$

tedy

$$\lambda o\gamma\,(1+x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{5}x^5 \text{ atd. atd.}$$

Bychom řadu tuto k vypočítávání logaritmů upravili, vezměme x záporné, tu jest

$$\lambda o\gamma\,(1-x) = -\left(x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{5}x^5 \text{ atd. atd.}\right);$$

poněvadž pak

$$\lambda o\gamma\,(1+x) - \lambda o\gamma\,(1-x) = \lambda o\gamma\,\frac{1+x}{1-x},$$

dává rozdíl rovnic těchto

$$\lambda o\gamma\,\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 + \ldots\right)$$

Postavíme-li zde

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{y^2}{y^2-1}$$

bude $$x = \frac{1}{2y^2-1},$$

protož máme

$$\lambda o\gamma\, \frac{y^2}{y^2-1} = 2\,\lambda o\gamma\, y - \lambda o\gamma\,(y-1) - \lambda o\gamma\,(y+1) =$$

$$= 2\left[\frac{1}{2y^2-1} + \frac{1}{3(2y^2-1)^3} + \frac{1}{5(2y^2-1)^5} \text{ atd.}\right]$$

a je-li pro krátkost

$$fy = \frac{1}{2y^2-1} + \frac{1}{3(2y^2-1)^3} + \frac{1}{5(2y^2-1)^5} + \ldots$$

obdržíme

$$\lambda o\gamma\, y = \tfrac{1}{2}[\lambda o\gamma\,(y-1) + \lambda o\gamma\,(y+1)] + fy.$$

Z toho plyne dále

$$f2 = 0{\cdot}14384\ 10362 \qquad f3 = 0{\cdot}05889\ 15178$$

jakož i

$$\lambda o\gamma\, 2 = \tfrac{1}{2}\,\lambda o\gamma\, 3 + f2 \quad \text{t. j.} \quad 2\,\lambda o\gamma\, 2 - \lambda o\gamma\, 3 = 2f2$$

$$\lambda o\gamma\, 3 = \tfrac{1}{2}\,(\lambda o\gamma\, 2 + 2\,\lambda o\gamma\, 2) + f3$$

$$\text{čili} \quad -3\,\lambda o\gamma\, 2 + 2\,\lambda o\gamma\, 3 = 2f3;$$

protož jest

$$\lambda o\gamma\, 2 = 4f2 + 2f3 = 0{\cdot}69314\ 71804$$

$$\lambda o\gamma\, 3 = 6f2 + 4f3 = 1{\cdot}09861\ 22884.$$

Potom snadno z řady hořejší přirozený logaritmus každého prvočtu najíti, takť pro $y = 5$ jest

$$\lambda o\gamma\, 5 = \tfrac{1}{2}\,(\lambda o\gamma\, 4 + \lambda o\gamma\, 6) + f5 = 1{\cdot}60943\ 79121$$

$$\text{a } \lambda o\gamma\, 10 = 2{\cdot}30258\ 50925.$$

Z té příčiny jest dle čl. 135. *A*) $\mu' = 2{\cdot}30258\ 50925$ modul, jímž se Briggické logaritmy v přirozené proměňují. Podobně naleznem

$$\mu = \frac{1}{\lambda o\gamma\, 10} = 0{\cdot}4342\ 9448$$

co modul, jímž se přiroz. logaritmy převádějí v Briggické.

13.

a) Vezmeme-li v čl. 8) $fx = a^x$, bude, pakli pro krátkost $\lambda o\gamma\, a = \lambda$ stavíme, dle čl. 6. fm. (14).

$$f^1x = \lambda\, a^x,\ f^2x = \lambda^2\, a^x,\ f^3x = \lambda^3\, a^x, \text{ atd. } f^rx = \lambda^r\, a^x$$

tedy $$a^x = 1 + \lambda x + \tfrac{1}{2}!\,(\lambda x)^2 + \tfrac{1}{3}!\,(\lambda x)^3 + \ldots \frac{1}{r}!\,(\lambda x)^r,$$

řada, kterouž z daného logaritmu číslo naleznouti lze, jemuž logaritmus ten náleží; je-li totiž a základ dané soustavy, jde z

$$n = \log X,\ a^n = X$$

tedy

$$X = a^n = 1 + \lambda n + \tfrac{1}{2}!\,(\lambda n)^2 + \tfrac{1}{3}!\,(\lambda n)^3 + \ldots$$

b) Dosadíme-li za a basis přirozených logaritmů, jde z toho při $\lambda = \lambda o\gamma\, e = 1$ řada

$$e^x = 1 + x + \tfrac{1}{2}!\,x^2 + \tfrac{1}{3}!\,x^3 + \tfrac{1}{4}!\,x^4 \ldots,$$

z čehož při $x = 1$ nalezneme $e = 2{\cdot}7182\ 8183$ (čl. 135. *A*).

III. Úkony trigonometrické.

14.

Dosadíme-li do rovnice pro e^x v článku předešlém ix čili $x\sqrt{-1}$ místo x, obdržíme oddělivše část realnou od pomyslné

$$e^{ix} = 1 - \tfrac{1}{2}!\,x^2 + \tfrac{1}{4}!\,x^4 - \tfrac{1}{6}!\,x^6 + \ldots$$
$$i\,(x - \tfrac{1}{3}!\,x^3 + \tfrac{1}{5}!\,x^5 - \tfrac{1}{7}!\,x^7 \text{ atd.}),$$

a uvedeme-li do formulé této hodnoty

$$Sin\ x = x - \tfrac{1}{3}!\,x^3 + \tfrac{1}{5}!\,x^5 - \tfrac{1}{7}!\,x^7 + \ldots \tag{1}$$

$$Cos\ x = 1 - \tfrac{1}{2}!\,x^2 + \tfrac{1}{4}!\,x^4 - \tfrac{1}{6}!\,x^6 + \ldots \tag{2}$$

kdež prozatím pro rozeznávání od trigonometrických sinusů a cosinusů velikého S a C užívati, a výrazy ty za pouhé algebraické funkce považovati můžeme, bude

$$e^{ix} = Cos\ x + i\ Sin\ x. \tag{3}$$

Vezmeme-li v (1) a (2) $x = 0$, jest

$$Sin\ 0 = 0,\quad Cos\ 0 = 1; \tag{4}$$

a uděláme-li x záporným, bude

$$Sin - x = -\,Sin\ x,\quad Cos - x = Cos\ x \tag{5}$$

t. j. *Sinus* mění s x znamení, *Cosinus* však ne.

Změníme-li v (3) dle čl. 120. d. *A*) znamení u i, jest

$$e^{-ix} = Cos\ x - i\ Sin\ x,$$

což s formulí (3) násobeno dává

$$e^0 = Cos^2x - (i\ Sin\ x)^2 \text{ čili } Sin^2x + Cos^2x = 1, \tag{6}$$

jednu to z nejdůležitějších vlastností úkonů těchto, z níž pak dále

$$Sin\ x = \pm\sqrt{1 - Cos^2x},\quad Cos\ x = \pm\sqrt{1 - Sin^2x} \tag{7}$$

plyne. Z toho spolu viděti, že jak *Sinus* tak i *Cosinus* vždy $\leqq$ 1 býti musí, což i při záporných hodnotách funkcí těchto platí.

15.

Rovnice (3) svrchu dává též

$$e^{iy} = Cos\ y + i\ Sin\ y,$$

a násobíme-li oba ty výrazy, bude

$$e^{i(x+y)} = Cos\ x\ Cos\ y - Sin\ x\ Sin\ y + i\,(Sin\ x\ Cos\ y + Cos\ x\ Sin\ y);$$

dosadíme-li však do (3) $x + y$ místo x, obdržíme

$$e^{i(x+y)} = Cos\ (x + y) + i\ Sin\ (x + y);$$ protož jest

$$Cos\ (x + y) + i\ Sin\ (x + y) = Cos\ x\ Cos\ y - Sin\ x\ Sin\ y + i\ (Sin\ x\ Cos\ y + Cos\ x\ Sin\ y).$$

Z toho jde napotom dle čl. 120. *d*)

$$Sin\ (x + y) = Sin\ x\ Cos\ y + Cos\ x\ Sin\ y \qquad (8)$$

$$Cos\ (x + y) = Cos\ x\ Cos\ y - Sin\ x\ Sin\ y, \qquad (9)$$

a pakli y záporným učiníme dle (5)

$$Sin\ (x - y) = Sin\ x\ Cos\ y - Cos\ x\ Sin\ y \qquad (10)$$

$$Cos\ (x - y) = Cos\ x\ Cos\ y + Sin\ x\ Sin\ y \qquad (11)$$

Při $x = y$ dává rov. (8)

$$Sin\ 2x = 2\ Sin\ x\ Cos\ x \qquad (12)$$

pak rov. (9) $Cos\ 2x = Cos^2 x - Sin^2 x$, což dle rov. (6) ve

$$Cos\ 2x = 1 - 2\ Sin^2 x,\ Cos\ 2x = 2 Cos^2 x - 1 \qquad (13)$$

přechází.

Otázka. Jak lze rovnice 6. 8, 9) dokázati z 1) a 2) bez použití pomyslného i?

16.

Máme-li $Sin\ \varphi = \frac{1}{4}\,(\sqrt{6} - \sqrt{2})$, nalezneme též dle (7) $Cos\ \varphi = \frac{1}{4}\,(\sqrt{6} + \sqrt{2})$, z čehož dle článku předešlého jde dále

$$\begin{aligned} Sin\ 2\varphi &= \tfrac{1}{2}, & Cos\ 2\varphi &= \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \\ Sin\ 3\varphi &= \sqrt{\tfrac{1}{2}}, & Cos\ 3\varphi &= \sqrt{\tfrac{1}{2}} \\ Sin\ 6\varphi &= 1, & Cos\ 6\varphi &= 0 \\ Sin\ 12\varphi &= 0, & Cos\ 12\varphi &= -1 \\ Sin\ 24\varphi = Sin\ 0 &= 0, & Cos\ 24\varphi = Cos\ 0 &= 1. \end{aligned}$$

Tyto a svrchu udané vlastnosti funkcí $Sin\ x$, $Cos\ x$ okazují, že úkony ty zde to samé znamenají, co v trigonometrii, tak že napotom 24φ souhlasí s 360 čili φ s 15ti stupni; protož budeme i místo $Sin\ x$, $Cos\ x$ moci pouze $sin\ x$ a $cos\ x$ psáti.

Jakž dále uvidíme, jest x oblouk kruhu, tedy 12φ oblouk 180 stupňů neboli polovice obvodu (periferie) čili

$$12\varphi = \pi = 3{\cdot}1415927,$$ kdež jest poloměr $= 1$.

Dva úhly, jichž součet 90^0, tedy zde oblouk

$$6\varphi = \frac{\pi}{2}$$

činí, jmenují se úhly doplňkové, pro ně pak platí věta, že *sinus* jednoho jest roven *cosinusu* druhého; máme totiž

$$sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = sin\ (6\varphi - a)$$

tedy dle rovn. (10)

$$sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = cos\ a \quad \text{jakož i} \quad cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = sin\ a.$$

Podobně dá se dokázati, že jest

$$\begin{aligned} sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) &= cos\ a, & cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) &= -\,sin\ a \\ sin\ (\pi - a) &= sin\ a, & cos\ (\pi - a) &= -\,cos\ a \\ sin\ (\pi + a) &= -\,sin\ a, & cos\ (\pi + a) &= -\,cos\ a \\ sin\ (2\pi + a) &= sin\ a, & cos\ (2\pi + a) &= cos\ a; \end{aligned}$$

dosadíme-li pak zde $2\pi + a$ místo a, bude

$$sin\ (4\pi + a) = sin\ (2\pi + a) = sin\ a$$

$$cos\ (4\pi + a) = cos\ (2\pi + a) = cos\ a,$$

a vůbec ať t jakékoli celé číslo znamená, bude

$$sin\ (2\pi t + a) = sin\ a, \quad cos\ (2\pi t + a) = cos\ a.$$

Porovnáme-li to s větami o shodě čísel v XII. *A.* uvedenými, patrno, že zde 2π co model oblouků považovati třeba, tak že se nápotom každý oblouk za $< 2\pi$, a připustíme-li zápornost, jež u oblouků vlastně následek takovéto shody jest, za $< \pi$ bráti může. Modelem úhlů stupní daných bude pak číslo 360.

Poznamenání 1. Je-li $sin\ x = sin\ y$ neb $cos\ x = cos\ y$, nemusí ještě proto $x = y$ býti (čl. 9. a) *A*).

Poznamenání 2. Rovnice 8., 9., 10., 11. v čl. 15. jakož i věty tuto co jich následek uvedené nejsou, ač o nich též trigonometrie jedná, zde zbytečně umístěny. V trigonometrii nelze je totiž v úplné jich obecnosti provésti, jelikož tam x, y pouze za kladné platí a $x + y < 90^0$ neb na nejvýš $= 180^0$ jest. Za to však zde použito pomyslného, jehož se posud mnozí algebraisté štítí; avšak veličina $i = \sqrt{-1}$ slouží tuto jen ku zkrácení důkazů, jež i bez ní ovšem že dosti obtížně provésti lze.

17.

a) Při

$$a = \frac{\pi}{2}$$

dávají poslední z hořejších rovnic

$$sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right) = 0;$$

vezmeme-li tedy v rovnici (3) čl. 14)

$$x = 2\pi t + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}(4t + 1)$$

bude

$$e^{\frac{i\pi}{2}(4t+1)} = i,$$

což logaritmujíce obdržíme

$$\frac{i\pi}{2}(4t + 1) = \lambda o\gamma\ i = \lambda o\gamma \sqrt{-1} = \tfrac{1}{2}\lambda o\gamma(-1),$$

tedy $\qquad \lambda o\gamma(-M) = \lambda o\gamma\ M + i\pi(4t + 1);$

logaritmy veličin záporných jsou tedy čísla spřežitá.

b) Co znamená as i^i?

Postavme $i^i = u$, bude $\lambda o\gamma\ u = i\ \lambda o\gamma\ i$, a poněvadž

$$\lambda o\gamma\ i = \frac{i\pi}{2}(4t + 1), \text{ obdržíme } \lambda o\gamma\ u = -\frac{\pi}{2}(4t + 1),$$

tedy

$$u = i^i = e^{-\frac{\pi}{2}(4t+1)},$$

ať již t jakékoli celé číslo jest.

18.

a) Z ostatních trigonometrických funkcí jsou důležitější:

$$tg\ x = \frac{sin\ x}{cos\ x}, \quad cot\ x = \frac{cos\ x}{sin\ x}, \quad sec\ x = \frac{1}{cos\ x},$$

$$cosec\ x = \frac{1}{sin\ x},$$

z kterýchžto rovnic všechny jejich vlastnosti a poměry odvoditi lze. Tak nalezneme

$$tg\ (x + y) = \frac{sin\ (x + y)}{cos\ (x + y)} = \frac{sin\ x\ cos\ y + cos\ x\ sin\ y}{cos\ x\ cos\ y - sin\ x\ sin\ y},$$

a dělíme-li čitatele i jmenovatele zlomku toho výrazem $cos\ x\ cos\ y$, bude

$$tg\ (x + y) = \frac{\frac{sin\ x}{cos\ x} + \frac{sin\ y}{cos\ y}}{1 - \frac{sin\ x}{cos\ x} \cdot \frac{sin\ y}{cos\ y}}$$

t. j. $$tang\ (x + y) = \frac{tg\ x + tg\ y}{1 - tg\ x\ tg\ y} \tag{14}$$

Z toho jde při $x = y$,

$$tg\ 2x = \frac{2\ tg\ x}{1 - tg^2 x}; \tag{15}$$

pak, poněvadž

$$tg - y = \frac{sin - y}{cos - y} = -\frac{sin\ y}{cos\ y}$$

čili $tg - y = -tg\ y$, bude když v (14) $-y$ místo y dosadíme

$$tg\ (x - y) = \frac{tg\ x - tg\ y}{1 + tg\ x\ tg\ y} \tag{16}$$

Příklady.

1. Je-li $tg\ a = \frac{1}{3}$, $tg\ b = \frac{1}{7}$, mnoho-li bude obnášeti $tg\ (2a + b)$?
   Zde jest
   $$tg\ 2a = \frac{2\ tg\ a}{1 - tg^2 a} = \tfrac{3}{4},$$
   pak
   $$tg\ (2a + b) = \frac{tg\ 2a + tg\ b}{1 - tg\ 2a\ tg\ b} = \frac{\frac{3}{4} + \frac{1}{7}}{1 - \frac{3}{28}}$$
   protož i $\qquad tg\ (2a + b) = 1.$
2. Mnoholi obnáší v čl. 16) $tg\ \varphi$, $tg\ 2\varphi$, $tg\ 3\varphi$, $tg\ 6\varphi$ atd. pak jak veliké jsou cotangenty, sekanty a cosekanty těch oblouků?

b) Dělíme-li řadu pro $sin\ x$ (čl. 14. 1) řadou pro $cos\ x$, nalezneme

$$tg\ x = x + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{2}{15}x^5 + \tfrac{17}{315}x^7 + \tfrac{62}{2835}x^9 \text{ atd.} \tag{17}$$

Dle zásad trigonometrických jest v obrazci I.

$$MP = sin\ x, \quad AT = tang\ x;$$

vezmeme-li tedy x tak malé, že x^3 a protož i x^5, x^7 atd. zmizí, obdržíme z rovn. (1) a (17) $sin\ x = tg\ x = x$; protož může ve funkcích těchto x nejen při malých, nýbrž při všech vůbec hodnotách pouze oblouk AM znamenati, jakž v čl. 16) podotknuto.

Je-li úhel $AOT = a$ ve stupních dán, nalezneme

$$x = \frac{a\pi}{180} = 0{\cdot}0174533\,a.$$

Otázka: Jakou řadu dává cotang x, sec x a cosec x?

19.

Máme-li tu $sin\ x = y$, a chceme-li o samotném x jednati ne pak o jeho sinusu, můžeme znamení úkonové totiž *sin* přenésti na druhou stranu rovnice výrazem

$$x = arc\ sin\ y$$

(arcus sinus y) t. j. jinými slovy: x jest oblouk, jehož sinus y obnáší. Podobně přecházejí funkce

$cos\ x = y$	ve	$x = arc\ cos\ y$
$tg\ x = y$	„	$x = arc\ tg\ y$
$cotg\ x = y$	„	$x = arc\ cotg\ y$
$sec\ x = y$	„	$x = arc\ sec\ y$
$cosec\ x = y$	„	$x = arc\ cosec\ y$,

kteréžto všechny obecným jmenem trigonometrických protiv zahrnouti můžeme. Ohledem jejich upotřebení stůjtež zde tři příklady:

1. Je-li $sin\ x = y$ bude $cos\ x = \sqrt{1-y^2}$; dle čl. 15. (12) jest však
$sin\ 2x = 2\ sin\ x\ cos\ x$ tedy $2x = arc\ sin\ [2\ sin\ x\ cos\ x]$, což při
$x = arc\ sin\ y$ dává $2\ arc\ sin\ y = arc\ sin\ (2y\sqrt{1-y^2})$, v kteréžto rovnici x nepřichází.

2. Z $sin\ y = x$ jde též

$$sin\ y = cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = x,$$

tedy

$$y = arc\ sin\ x,\quad \frac{\pi}{2} - y = arc\ cos\ x,$$

následovně jest

$$arc\ sin\ x + arc\ cos\ x = \frac{\pi}{2}.$$

3. Dle článku předešlého jde z $tg\ a = \frac{1}{3}$, $tg\ b = \frac{1}{7}$ rovnice $tg\ (2a + b) = 1$. To nám dává
$a = arc\ tg\ \frac{1}{3}$, $b = arc\ tg\ \frac{1}{7}$, $2a + b = arc\ tg\ 1$
tedy $arc\ tg\ 1 = 2\ arc\ tg\ \frac{1}{3} + arc\ tg\ \frac{1}{7}$.

20.

Differencujeme-li v čl. 14. rov. 1) a 2) obdržíme

$$\partial\ sin\ x = \left(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 \ldots\right)\partial x \text{ pak}$$

$$\partial\ cos\ x = -\left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 \ldots\right)\partial x$$

z čehož jde

$$\partial\ sin\ x = cos\ x\ \partial x \qquad (18)$$

$$\partial\ cos\ x = -\ sin\ x\ \partial x \qquad (19)$$

Ten samý výsledek podává i differencování rov. 3). Dále jde z článku předešlého dle 4. 8)

$$\partial\ tg\ x = \partial\ \frac{sin\ x}{cos\ x} = \frac{cos\ x\ \partial\ sin\ x - sin\ x\ \partial\ cos\ x}{cos^2 x}$$

$$= \frac{(cos^2 x + sin^2 x)\,\partial x}{cos^2 x}$$

t. j.

$$\partial\ tg\ x = \frac{\partial x}{cos^2 x} \qquad (20)$$

pak $\partial\ cot\ x = \partial\ \dfrac{cos\ x}{sin\ x} = -\ \dfrac{(sin^2 x + cos^2 x)\,\partial x}{sin^2 x}$

tedy

$$\partial\ cot\ x = -\ \frac{\partial x}{sin^2 x} \qquad (21)$$

Je-li napotom $sin\ y = x$, bude $cos\ y \,.\, \partial y = \partial x$, a $cos\ y = \sqrt{1 - sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$,

tedy

$$\partial y = \frac{\partial x}{\sqrt{1 - x^2}};$$

dle čl. 19) jest však $y = arc\ sin\ x$, tedy

$$\partial\ arc\ sin\ x = \frac{\partial x}{\sqrt{1 - x^2}}. \qquad (22)$$

Z příkladu 2ho v čl. předešlém jde pak

$$\partial\ arc\ cos\ x = -\ \partial\ arc\ sin\ x = -\ \frac{\partial x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Rovnice $tgy = x$ dává

$$\partial x = \frac{\partial y}{cos^2 y}$$

tedy $\partial y = cos^2 y\ \partial x$.

Ohledně $cos^2 y$ nalezneme

$$1 + x^2 = 1 + ty^2 y = 1 + \frac{sin^2 y}{cos^2 y}$$

$$= \frac{sin^2 y + cos^2 y}{cos^2 y} = \frac{1}{cos^2 y}$$

tedy

$$cos^2 y = 1 : (1 + x^2),$$

a jelikož $y = arc\ tg\ x$ jest, bude

$$\delta\ arc\ tg\ x = \frac{\delta x}{1 + x^2} \qquad (23)$$

Jedna z funkcí častěji přicházející jest též $\log sin\ x$ t. j. logaritmus ze $sin\ x$; ohledně té bude

$$\delta\ log.\ sin\ x = \frac{\mu\ \delta\ sin\ x}{sin\ x} = \frac{\mu\ cos\ x\ \delta\ x}{sin\ x}$$

tedy $\delta\ log\ sin\ x = \mu\ cot\ x\ \delta x$ (24)

Podobně plyne ze $\delta\ log\ tg\ x =$

$$\frac{\mu\ \delta\ tg\ x}{tg\ x} = \frac{\mu\ \delta\ x}{tg\ x\ .\ cos^2 x} = \frac{\mu\ \delta\ x}{sin\ x\ cos\ x},$$

a jelikož $sin\ x\ cos\ x = \frac{1}{2}\ sin\ 2x$ jest, obdržíme

$$\delta\ log\ tg\ x = \frac{2\ \mu\ \delta\ x}{sin\ 2\ x} \qquad (25)$$

Příklady.

1) $\delta\ sec\ x = tg\ x\ sec\ x\ \delta\ x$,

2) $\delta\ cosec\ x = -\ cot\ x\ cosec\ x\ \delta\ x$,

3) $\delta\ arc\ sec\ x = \dfrac{\delta x}{x\sqrt{x^2 - 1}}$,

4) $\delta\ arc\ cos\ (1 - x) = \dfrac{\delta x}{\sqrt{2\ x - x^2}}$

5) $\delta\ log\ cos\ x = -\ \mu\ tg\ x\ \delta\ x$,

6) $\delta\ log \sqrt{\dfrac{1 + sin\ x}{1 - sin\ x}} = \dfrac{\delta x}{cos\ x}$

21.

Differencujeme-li rovnici

$$arc\ tg\ x = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 \text{ atd.}$$

obdržíme dle 20. 23)

$$\frac{1}{1 + x^2} = A + 2Bx + 3Cx^2 + 4\ Dx^3 + 5Ex^4 + \ldots$$

$$= 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots .$$

protož bude

$$A = 1,\ B = 0,\ C = -\tfrac{1}{3},\ D = 0,\ E = \tfrac{1}{5}, \ldots .$$

následovně

$$arc\ tg\ x = x - \tfrac{1}{3}\ x^3 + \tfrac{1}{5}\ x^5 - \tfrac{1}{7}\ x^7 + \ldots .$$

Z té příčiny nalezneme

$$arc\ tg\ \tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{3} - \frac{1}{3\ .\ 3^3} + \frac{1}{5\ .\ 3^5} - \text{atd.} = 0{\cdot}3217\ 50554$$

$$arc\ tg\ \tfrac{1}{7} = \tfrac{1}{7} - \frac{1}{3\ .\ 7^3} + \frac{1}{5\ .\ 7^5} - \text{atd.} = 0{\cdot}1418\ 97055$$

Dle čl. 19. př. 3) jest však

$$arc\ tg\ 1 = 2\ arc\ tg\ \tfrac{1}{3} + arc\ tg\ \tfrac{1}{7}$$

tedy $arc\ tg\ 1 = 0{\cdot}7853\ 98163$. Čl. 16) podává k tomu

$$sin\ 3\ \varphi : cos\ 3\ \varphi = tg\ 3\ \varphi = 1, \text{ tedy } 3\ \varphi = arc\ tg\ 1,$$

a protož

$$12\ \varphi = \pi = 4\ arc\ tg\ 1 = 3{\cdot}1415\ 92652,$$

jakž svrchu v 16) udáno.

Kdybychom dle 14) a 18. b) chtěli $sin\ 1^0$, $cos\ 1^0$, $tg\ 1^0$ hledati, bude třeba $x = \pi : 180 = 0{\cdot}01745329$ vzíti.

Na podobný způsob nalezneme též

$$arc\ sin\ x = x + \tfrac{1}{2}\ .\ \frac{x^3}{3} + \frac{1\ .\ 3}{2\ .\ 4}\ .\ \frac{x^5}{5}$$

$$+ \frac{1\ .\ 3\ .\ 5}{2\ .\ 4\ .\ 6}\ .\ \frac{x^7}{7} + \ldots .$$

Z toho jde při

$$x = \tfrac{1}{2},\quad arc\ sin\ \tfrac{1}{2} = \frac{\pi}{6} = \text{oblouk } 30^0.$$

IV. Taylor'ova poučka a její následky.

22.

Každou funkci proměnné x můžeme naznačiti rovnicí

$$fx = Ax^a + Bx^b + Cx^c + \ldots .$$

Dosadíme-li sem $x + h$ místo x, bude

$$f(x + h) = A\,(x + h)^a + B\,(x + h)^b + C\,(x + h)^c + \ldots ,$$

a vyvineme-li dvoučleny $(x + h)^a$, $(x + h)^b$, $(x + h)^c$ atd. objeví se

$$\begin{aligned} f(x + h) = Ax^a &+ a\,A\,x^{a-1}h + \binom{a}{2} Ax^{a-2}h^2 + \binom{a}{3} Ax^{a-3}h^3 \text{ atd.} \\ Bx^b &+ b\,B\,x^{b-1}h + \binom{b}{2} Bx^{b-2}h^2 + \binom{b}{3} Bx^{b-3}h^3 \text{ atd.} \\ Cx^c &+ c\,C\,x^{c-1}h + \binom{c}{2} Cx^{c-2}h^2 + \binom{c}{3} Cx^{c-3}h^3 \text{ atd.} \\ \text{atd.} &\qquad \text{atd.} \qquad \text{atd.} \qquad \text{atd.} \qquad \text{atd.} \end{aligned}$$

V obrazci tomto jest však první sloupec $= fx$, na druhém snadno poznati, že jest $= hf'x$ (čl. 7), podobně jest

$$\text{třetí} = \frac{h^2}{2} f^2x,$$

$$\text{čtvrtý} = \frac{1}{3!} h^3 f^3x \text{ atd.};$$

protož obdržíme po dosazení výrazů těchto

$$f(x+h) = fx + h f'x + \frac{h^2}{2!} f^2x + \frac{h^3}{3!} f^3x$$

$$+ \frac{h^4}{4!} f^4x \text{ atd. atd.}$$

Stane-li se h záporným, bude

$$f(x-h) = fx - hf'x + \frac{h^2}{2!} f^2x - \frac{h^3}{3!} f^3x$$

$$+ \frac{h^4}{4!} f^4x \text{ atd. atd.}$$

Poučka tato nazývá se dle svého nálezce Taylor'ovou, jest pak jedna z nejdůležitějších v počtu differencialném.

Z ní jde řada Mac Laurin'ova, postavíme-li $x = 0$, $h = y$ totiž

$$fy = f0 + yf'0 + \frac{y^2}{2!} f^20 + \frac{y^3}{3!} f^30 \text{ atd. atd.}$$

Podobně se při $x = 1$, $h = y$ dle čl. 7) nalezne $\lambda o\gamma\,(1 + y) = y - \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{3} y^3 - \frac{1}{4} y^4$ atd. atd.

Jaké plynou z poučky této řady pro $(a + y)^n$, $sin\,(a + y)$, $cos\,(a + y)$, $tg\,(a + y)$?

23.

Úkol. Jest dán lomený úkon, kterýž tu vlastnost má, že se při kterési hodnotě proměnné $x = a$ jak jeho čítatel tak jmenovatel nulou stává; jak se nalezne jeho hodnota?

Je-li

$$\frac{fx}{\varphi x}$$

dáno, což při $x = a$ ve

$$\frac{fa}{\varphi a} = \frac{0}{0}$$

přechází, jest $\frac{0}{0}$ (čl. 39. b. *A*) veličina neurčitá; bychom ji nalezli, vyhledejme $f'x$, $\varphi'x$ a bude

$$\frac{fa}{\varphi a} = \frac{f'a}{\varphi' a};$$

pakliby ale i tu $f'a = \varphi'a = 0$ se stalo, určeme dále f^2x, φ^2x, kdež se potom

$$\frac{fa}{\varphi a} = \frac{f^2a}{\varphi^2 a} \text{ neboli } = \frac{f^3a}{\varphi^3 a} \text{ atd. objeví.}$$

Důkaz. Dle Taylorovy poučky jest

$$\frac{f(x+h)}{\varphi(x+h)} = \frac{fx + hf'x + \frac{1}{2}h^2f^2x + \frac{1}{3!}h^3f^3x \text{ atd. atd.}}{\varphi x + h\varphi'x + \frac{1}{2}h^2\varphi^2x + \frac{1}{3!}h^3\varphi^3x \text{ atd. atd.}};$$

poněvadž se pak při $x = a$, $fa = \varphi a = 0$ stane, obdržíme, zlomek ten veličinou h zkrátíce,

$$\frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)} = \frac{f'a + \frac{1}{2}h\,f^2a + \frac{1}{3!}h^2\,f^3a \text{ atd. atd.}}{\varphi'a + \frac{1}{2}h\,\varphi^2a + \frac{1}{3!}h^2\,\varphi^3a \text{ atd. atd.}}$$

z čehož při $h = 0$,

$$\frac{fa}{\varphi a} = \frac{f'a}{\varphi' a}$$

jde. Kdyby však $f'a = \varphi'a = 0$ bylo, třeba ještě zlomek ten číslem $\frac{1}{2}h$ krátiti, tak že se ve

$$\frac{f\,(a+h)}{\varphi\,(a+h)} = \frac{f^2a + \frac{1}{3}\,h\,f^3a \text{ atd. atd.}}{\varphi^2a + \frac{1}{3}\,h\,\varphi^3a \text{ atd. atd.}}$$

promění, z čehož při $h = 0$,

$$\frac{fa}{\varphi a} = \frac{f^2a}{\varphi^2 a},$$

a pakliby i tu $f^2a = \varphi^2a = 0$ bylo,

$$\frac{fa}{\varphi a} = \frac{f^3a}{\varphi^3 a} \text{ atd. atd. plyne.}$$

Bylo-li by z

$$\frac{Fx}{\psi x} \text{ při } x = a, \quad \frac{Fa}{\psi a} = \frac{\infty}{\infty},$$

dělme čítatele i jmenovatele zlomku tohoto součinem $Fx\,.\,\psi x$, bude

$$\frac{1 : \psi x}{1 : Fx},$$

a pakli napotom $1 : \psi x = fx$, $1 : Fx = \varphi x$ učiníme, objeví se

$$\frac{Fa}{\psi a} = \frac{fa}{\varphi a} = \frac{1 : \psi a}{1 : Fa} = \frac{0}{0},$$

čímž případ tento na předešlý uveden.

Příklady.

1) Mnoho-li obnáší

$$\frac{x^m - a^m}{x^n - a^n} \text{ při } x = a?$$

Zde máme

$$fx = x^m - a^m, \quad \varphi x = x^n - a^n \quad \text{tedy} \quad f'x = mx^{m-1},$$
$$\varphi' x = n\, x^{n-1};$$

protož

$$\frac{fa}{\varphi a} = \frac{f'a}{\varphi' a} = \frac{ma^{m-1}}{na^{n-1}} = \frac{m}{n}\, a^{m-n}.$$

2) Co dává $\dfrac{a^x - x^a}{x - a}$ při $x = a$?

Z $f'x = a^x\, \lambda o \gamma\, a - ax^{a-1}$,

$\varphi' x = 1$ jde $\dfrac{fa}{\varphi a} = \dfrac{f'a}{\varphi' a} = a^a\, (\lambda o\gamma\, a - 1)$.

3) Při vrchu kolmém v prostoře vzduchem naplněné přichází rovnice

$$H = \frac{1}{2x}\, \lambda o\gamma\, \frac{g + c^2 x}{g};$$

jak velké jest H při $x = 0$?

Odpověď:

$$H = \frac{c^2}{2g}.$$

4) Platí součet geometrické posloupnosti (čl. 150. b. *A*) totiž

$$s = \frac{a\,(q^n - 1)}{q - 1}$$

i při $q = 1$, čili nic?

5) $$\frac{5x^3 - 11\,x^2 + 7x - 1}{x^2 - 2x + 1}$$

při $x = 1$ dává $f'x = 15x^2 - 22x + 7$, $\varphi' x = 2x - 2$, tedy

$$\frac{f'1}{\varphi' 1} = \frac{0}{0};$$

protož se hledá dále

$f^2 x = 30\, x - 22$, $\varphi^2 x = 2$ pak jest

$$\frac{f'1}{\varphi' 1} = \frac{f^2 1}{\varphi^2 1} = 4.$$

6) $$\frac{tg\, 2x}{tg\left(\frac{\pi}{4} + x\right)}$$

dává při

$$x = \frac{\pi}{4}, \quad \frac{\infty}{\infty};$$

postavmež tedy

$$\frac{cot\left(\frac{\pi}{4} + x\right)}{cot\ 2\,x},$$

a bude

$$f'x = -1 : sin^2\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \qquad \varphi' x = -2 : sin^2 2x,$$

pročež jest výsledek $= \frac{1}{2}$.

7) Při $x = 0$ jest $\dfrac{a\ arc\ sin\ x}{x}$ rovno a?

8) Při $x = 0$ jest $\dfrac{a^x - b^x}{\lambda o\gamma\,(1 - x)}$ rovno $\lambda o\gamma\, \dfrac{b}{a}$.

9) Při $x = a$ jest $\dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x - a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ rovno $\sqrt{\dfrac{1}{2a}}$.

24.

Největší a nejmenší hodnoty úkonů. (Maxima et minima.)

Když úkon kterýsi na př. fx při $x = a$ větší hodnotu má než $f(a - h)$ a $f(a + h)$, kdež h jakékoli, obyčejně však jen malé číslo znamená, říkáme, že se při $x = a$ stává fx největším čili maximum. V pádu tom jest tedy $f(a - h) < fa > f(a + h)$. Podobně má fx nejmenší hodnotu čili jest minimum, pakli tu

$$f(a - h) > fa < f(a + h)$$

přichází. Bylo-li by však buď

$f(a - h) < fa < f(a + h)$ neb $f(a - h) > fa > f(a + h)$, nemůže tu o maximu neb minimu řeči býti. Ostatně se slovy: fa jest maximum neb minimum, ještě nad to vyrozumívá, že veličina tato konečná jest. Tak má $sin\ x$ maximum při

$$x = 90^0 \quad \text{čili} \quad \frac{\pi}{2}$$

minimum však u $x = 270^0$; $tg\ x$, $log\ x$ nemají však ani jedno ani druhé.

Co do určování největších a nejmenších hodnot funkcí platí následující pravidlo: *Postavíme-li $f'x = 0$ čili $dfx = 0$, a dosadíme nápotom hodnotu neznámé $x = a$ z rovnice té nalezenou do daného úkonu, stává se fa maximum, je-li $f^2 a$ záporné, a minimum, je-li $f^2 a$ kladné.*

Dle Taylorovy poučky jest totiž

$$f(x + h) = fx + hf'x + \tfrac{1}{2}!\,h^2 f^2 x + \tfrac{1}{3}!\,h^3 f^3 x + \ldots$$
$$f(x - h) = fx - hf'x + \tfrac{1}{2}!\,h^2 f^2 x + \tfrac{1}{3}!\,h^3 f^3 x + \ldots$$

Vezmeme-li zde h tak malé, že h^2, h^3 atd. zmizí, bude $f(x+h) = fx + hf^1x$, $f(x-h) = fx - hf^1x$; byl-li by pak při kladném h úkon f^1x kladný, máme

$$f(x-h) < fx < f(x+h);$$

je-li však f^1x záporné, bude $f(x-h) > fx > f(x+h)$: protož v žádném z pádů těch nemůžeme k maximu neb minimu přijíti, tak že, má-li se fx největším neb nejmenším státi, f^1x ani kladné ani záporné býti nesmí, což pouze při $f^1x = 0$ čili $dfx = 0$ možno jest, odkudž se pak $x = a$ nalezne.

Z hořejších řad obdržíme nápotom

$$f(a+h) - fa = \tfrac{1}{2}h^2f^2a + \tfrac{1}{3}!\,h^3f^3a + \ldots\ldots$$
$$f(a-h) - fa = \tfrac{1}{2}h^2f^2a - \tfrac{1}{3}!\,h^3f^3a + \ldots\ldots$$

Vezmeme-li zde h^2 tak malé, že $\frac{1}{2}h^2f^2a$ všechny ostatní členy přesahuje, obdržíme, pakli f^2a záporné jest,

$$f(a-h) < fa > f(a+h),$$

tedy jest fa maximum; pakli však f^2a kladné jest, bude

$$f(a-h) > fa < f(a+h)$$

tedy fa minimum; čímž hořejší věta dokázána.

Příklady.

1) Číslo a má se rozvrhnouti ve dvě části tak, by jich součin co možná veliký byl. Zde jest x činitel jeden, $a - x$ pak druhý; tedy $fx = x(a-x) = ax - x^2$; protož

$$f^1x = a - 2x = 0.$$

Následovně

$$x = \frac{a}{2}, \quad \text{z čehož jde} \quad fa = \frac{a^2}{4}.$$

Takť u $a = 20$ jest $fa = 100$, a všechny ostatní součiny, jako 3×17, 5×15, 11×9, $9{\cdot}5 \times 10{\cdot}5$, -3×23 atd. jsou menší.

2) Úkol předcházející dá se zobecniti, jelikož úkon

$$fx = x^m(a-x)^n$$

též maximum podává; nalezne pak se

$$f^1x = mx^{m-1}(a-x)^n - nx^m(a-x)^{n-1} = 0, \quad \text{tedy}$$
$$x = \frac{am}{m+n}, \quad \text{a Max. } fx = m^m n^n \left(\frac{a}{m+n}\right)^{m+n}.$$

Jiný podobný úkon jest $fx = x^m(a - x^n)$, dává pak

$$x = \sqrt[n]{\frac{am}{m+n}}, \quad \text{a Max. } fx = \frac{an}{m+n}\left(\frac{am}{m+n}\right)^{\frac{m}{n}}.$$

3) Kdy dosahuje x^x nejmenší hodnoty? Zde máme dle čl. 6. příkl. 4)

$$f^1x = x^x(1 + \lambda og\, x) = 0,$$

tedy

$$x = \frac{1}{e},$$

z čehož jde Min. $x^x = 0{\cdot}6922006$.

4) Jakou má v rovnici $(x-g)^2 + (y-h)^2 = r^2$, (jež kruhu náleží) x a y největší a nejmenší hodnotu? Differencujeme-li rovnici tu, bude

$$(x-g)\partial x + (y-h)\partial y = 0.$$

V tomto a v podobných případech jest vždy $x = fy$, a $y = Fx$, tedy

$$f^1y = \frac{\partial x}{\partial y}, \quad F^1x = \frac{\partial y}{\partial x};$$

hledáme-li tedy největší a nejmenší hodnotu veličiny x, bude třeba $f^1y = 0$, tedy i $\partial x = 0$ vzíti, jakož se i při maximu a minimu z y, $\partial y = 0$ bráti musí. V případnosti první dává hořejší výraz $(y-h)\partial y = 0$ čili $y = h$, hledané hodnoty x jsou pak $g + r$, $g - r$. Co se veličiny druhé týče, bude $(x-g)\partial x = 0$, následovně $x = g$, a $h+r$, $h-r$ hledané hodnoty čísla y.

5) Kupec jeden veze a korců obilí do ciziny, nalezá pak, že každým dnem, o nějž dále jede, na korci b zl. získá. Dovoz stojí však první den c zl., a v každém z následujících dnů o d zl. více než den před tím. Jak daleko bude moci obilí to vézti, by co možno nejvíce vydělal?

Je-li x počet dní, bude zisk obnášeti abx zl., dovoz stojí však za oněch x dní

$$c + (c+d) + (c+2d) \ldots\ldots [c + (x-1)d] = \frac{x}{2}[2c + (x-1)d],$$

protož má čistého užitku

$$fx = abx - \frac{x}{2}[2c + (x-1)d];$$

kterýžto výraz se stává maximum při

$$x = \frac{ab - c}{d} + \tfrac{1}{2}.$$

Je-li $a = 100$, $b = \frac{1}{5}$, $c = 21$, $d = 2$, jest $x = 15$, a čistý užitek $f15 = 225$ zl., kdež $f16$ pouze 224 zl. obnáší.

6) $fx = a + bx - cx^2$ dává při

$$x = \frac{b}{2c} \quad \text{maximum} = a + \frac{b^2}{4c}.$$

7) $nx^2[a - (n + 1)x]$ má při

$$x = \frac{2a}{3(n+1)} \quad \text{max.} = \frac{4a^3n}{27(n+1)^2}$$

8) $fx = \sin x + \cos x$ dává max. $= \sqrt{2}$.

25.

Taylorova poučka podává nám též prostředek, jímž každou určitou rovnici o jedné neznámé, v nížto pouze zvláštní čísla přicházejí, řešiti lze.

Dejme totiž rovnici takové podobu $fn = 0$, pak vyhledejme dvě čísla m, n, při nichž fm a fn nestejná znamení má. Nápotom se bude s velmi řídkými výminkami mezi m a n alespoň jeden kořen rovnice té nalezati. Vezmeme-li totiž za x hodnotu m' mezi m a n ležící, dá nám fm' buď 0, a pak jest m' hledaným kořenem rovnice té, neb máme kladný čili záporný výsledek. Tím jsme našli dvě jiná bližší čísla, u nichž fx nestejná znamení dává, tak že kořen v užší hranici sevřen. Pokračujeme-li takto dále, přijdeme jednou na hodnotu x, kteráž fx téměř neb úplně $= 0$ činí, a u níž se pak znamení mění; hodnota taková jest nápotom hledaným kořenem.

Takto jednajíce nenalezneme kořen toliko tenkráte, kde fx tím více roste, čím více se hodnoty m, n sobě blíží. Pak přichází mezi m, n veličina α, při níž se $f\alpha = \infty$ stává, kdež následkem rovnic

$$\infty = \frac{1}{0} = \frac{1}{-0} = -\infty$$

znamení změnu berou. To platí na př. v rovnici

$$x + tgx - 1 = 0,$$

kdež při

$$\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$$

jest fx kladné, při

$$x > \frac{\pi}{2} \quad \text{však záporné, mezi čímž se } x = \frac{\pi}{2}$$

nalezá, což $fx = \pm \infty$, činí.

Ostatně jest vždy z dané rovnice viděti, přihodí-li se tento druhý pád čili nic.

Když tedy x takovýmto makáním (čl. 151. *A.* Pozn.), jemuž se vůbec při vyšších rovnicích vyhnouti nelze, poněkud určeno jest, a máme-li $fx = r$, bude nám do pravého kořene chyběti jakási malá veličina h, tak že $f(x + h) = 0$ vzíti můžeme. Dle Taylorovy poučky jest pak

$$f(x + h) = fx + hf'x + \tfrac{1}{2}h^2f''x + \tfrac{1}{3!}h^3f'''x + \ldots,$$

a když na členy $\frac{1}{2}h^2f''x$, $\frac{1}{3!}h^3f'''x$ atd., co velmi malé nehledíme, bude $0 = fx + hf'x$, tedy $h = -fx : f'x$, čímž hodnotu x opraviti lze. Opakováním výkonu tohoto nalezneme x jak libo úplně.

Příklady.

1) $6x^4 - 13x^3 + 2x^2 + 8x - 9 = 0$. Zde máme
$f0 = -9$, $f1 = -6$, $f2 = +7$, $f1{\cdot}5 = -6$,
$f1{\cdot}8 = -0{\cdot}9504$, $f1{\cdot}9 = 2{\cdot}4456$.
Při hodnotě 1·8 můžeme se zastaviti. Ze
$f'x = 24x^3 - 39x^2 + 4x + 8$ jde $f'1{\cdot}8 = 28{\cdot}808$
tedy $h = 0{\cdot}033$ pak
$f1{\cdot}833 = 0{\cdot}054107$, $f'1{\cdot}833 = 32{\cdot}104566$, $h = -0{\cdot}001685$,
$f1{\cdot}831315 = 0{\cdot}0001576$, $f'1{\cdot}831315 = 31{\cdot}9313794$, $h = -0{\cdot}00000494$
$f1{\cdot}83131006 = -0{\cdot}00000038$ tedy $x = 1{\cdot}83131006$.

2) $x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$. Zde máme sice $f0 = 1$, $f1 = -1$, tedy mezi 0, 1 jeden kořen; jest však i $f2 = 1$, protož $1 < x < 2$. Dále nalezneme
$f'x = 3x^2 - 2x - 2$ tedy $f'2 = 6$,
z čehož jde $h = -1 : 6 = -0{\cdot}17$, tedy kořen přibl. 1·83; dále jest
$f1{\cdot}83 = 0{\cdot}1196$, $f'1{\cdot}83 = 4{\cdot}38$, $h = -0{\cdot}0273$,
$f1{\cdot}8027 = 0{\cdot}0031561$, $f'1{\cdot}8027 = 4{\cdot}1438$, $h = -0{\cdot}000761$,
$f1{\cdot}801939 = 0{\cdot}0000051$, $f'1{\cdot}801939 = 4{\cdot}137075$, $h = -0{\cdot}0000012$,
$f1{\cdot}8019378 = 0$, protož $x = 1{\cdot}8019378$.
Dělíme-li hořejší rovnici činitelem kořenovým (čl. 127. *A*) $x - 1{\cdot}8019378$ bude $x^2 + 0{\cdot}8019378x - 0{\cdot}5549581 = 0$, z čehož se dále $x = 0{\cdot}4450395$ a $-1{\cdot}2469773$ nalezne.

3) $10x + \log x - 100 = 0$. V rovnici této jest
$f1 = -90$, $f10 = 1$, $f9 = -9{\cdot}0457575$
pak

$$f'x = 10 + \frac{\mu}{x} = \frac{10x + 0{\cdot}4342945}{x};$$

z toho jde

$f^1\,10 = 10{\cdot}04343,\quad h = -\,1 : 10{\cdot}043 = -\,0{\cdot}0996,$

$f9{\cdot}9004 = -\;0{\cdot}0003473,\ f^1 9{\cdot}9004 = 10{\cdot}044,\ h = 0{\cdot}0000346,$

$f9{\cdot}9004346 = 0{\cdot}0000002$ tedy $x = 9{\cdot}9004346.$

26.

a) Každé rovnici třetího stupně o jedné neznámé lze dáti podobu $y^3 + Ay^2 + By + C = 0$, z čehož, když

$$y = x - \frac{A}{3}$$

postavíme, bude

$$x^3 + \left(B - \frac{A^2}{3}\right)x + \frac{2A^3}{27} - \frac{AB}{3} + C = 0,$$

kdežto se neznámá pouze v třetí a první mocnosti nalézá. Výraz tento přechází při

$$a = B - \frac{A^2}{3},\ b = \frac{2A^3}{27} - \tfrac{1}{3}AB + C \quad \text{ve}$$

$$x^3 + ax + b = 0.$$

Chtíce takto upravenou rovnici řešiti, postavme $x = p + q$, a x bude známo, pakli se p, q jakým koli způsobem najíti dá. Z této hodnoty x plyne

$x^3 = p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3 = p^3 + 3pq\,(p+q) + q^3$ čili $x^3 - 3pqx - (p^3 + q^3) = 0$; kteréžto rovnice přechází v danou, postavíme-li $3pq = -\,a,\ p^3 + q^3 = -\,b$, z čehož p, q určiti lze. Druhý z výrazů posledních dává totiž

$$p^6 + 2p^3q^3 + q^6 = b^2,$$

a k tomu první

$$-\,4p^3q^3 = \frac{4a^3}{27},$$

protož bude

$$(p^3 - q^3)^2 = b^2 + \frac{4a^3}{27} \quad \text{čili} \quad p^3 - q^3 = \sqrt{b^2 + \frac{4a^3}{27}},$$

a když pro krátkost

$$c = \sqrt{b^2 + \frac{4a^3}{27}}$$

postavíme, jde z $p^3 + q^3 = -\,b,\ p^3 - q^3 = c$;

$$p = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}(-b+c)},\ q = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}(-b-c)}$$

tedy

$$x = -\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}(b+c)} - \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}(b-c)}.$$

Návod tento jmenuje se formule Kardanova, neboť Kardano byl první, jenž důkaz na ni uveřejnil. Formulí tou nalezneme z každé takové rovnice realný kořen; takť dává

1) $y^3 + 6y^2 + 6y - 13 = 0$, při $y = x - 2$

$x^3 - 6x - 9 = 0$ tedy $c = \sqrt{81 - 32} = 7$;

$$x = \sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{8} = 3,\quad y = 1.$$

2) $x^3 + 3x - 7{\cdot}875 = 0,\ c = \frac{65}{8},\ p = 2,\ q = -\,\frac{1}{2}$

$x = 1{\cdot}5$

3) $x^3 - x + 1 = 0,\quad c = \sqrt{\tfrac{23}{27}} = 0{\cdot}922958.$

$$\left.\begin{aligned} p &= -\sqrt[3]{0{\cdot}038521} = -\;0{\cdot}3377271 \\ q &= -\sqrt[3]{0{\cdot}961479} = -\;0{\cdot}9869912 \end{aligned}\right\}\ x = -\;1{\cdot}3247183.$$

b) Má-li však daná rovnice podobu $x^2 - ax + b = 0$, kdež

$$b^2 < \frac{4a^3}{27},$$

stává se c pomyslným. Bychom pak x nalezli, museli bychme výrazy

$$\sqrt[3]{\frac{-\,b+c}{2}} \quad \text{a} \quad \sqrt[3]{\frac{-\,b-c}{2}}$$

v binomickou řadu proměňovati, což ovšem mnohdy velmi obtížné jest, z kteréž příčiny se i pád tento nezvodným (casus irreducibilis) nazývá. Ohledně jeho řešitelnosti jest však

$\sin 3y = \sin y \cos 2y + \sin 2y \cos y = \sin y\,(1 - 2\sin^2 y)$
$+\;2 \sin y \cos^2 y = \sin y - 2\sin^3 y + 2\sin y\,(1 - \sin^2 y)$

tedy $\quad \sin 3y = 3\sin y - 4\sin^3 y,$

z čehož jde $\sin^3 y - \frac{3}{4}\sin y + \frac{1}{4}\sin 3y = 0.$

Postavíme-li v rovnici hořejší $x = r \sin y$, obdržíme z ní

$$\sin^3 y - \frac{a}{r^2}\sin y + \frac{b}{r^3} = 0,$$

což s nadepsanou rovnicí porovnáno

$$\frac{a}{r^2} = \tfrac{3}{4} \quad \text{tedy} \quad r = 2\sqrt{\frac{a}{3}},$$

pak $\quad \frac{1}{4} \sin 3y = \frac{b}{r^3} \quad$ čili $\quad \sin 3y = \sqrt{\frac{27b^2}{4a^3}}$

podává, z čehož se, poněvadž $4a^3 > 27b^2$ jest, vždy y, tedy i

$$x = 2 \sin y \cdot \sqrt{\frac{a}{3}}$$

nalezne. Jelikož pak

$$\sin 3y = \sin (180^\circ - 3y) = - \sin (180^\circ + 3y),$$

obdržíme ostatní dva kořeny z

$$x' = 2 \sin (60^\circ - y) \sqrt{\frac{a}{3}}, \quad x'' = - 2 \sin (60^\circ + y) \sqrt{\frac{a}{3}}.$$

Takť jde z

$$x^3 - \tfrac{3}{5} x + \tfrac{1}{10} = 0, \qquad r = 2\sqrt{\tfrac{1}{5}},$$

$$\sin 3y = \sqrt{\tfrac{5}{16}}, \quad \text{tedy} \quad y = 11^\circ 19' 45''.4 \quad \text{pak} \quad x = 0{\cdot}1757077$$

$$x' = 0{\cdot}6716491, \qquad x'' = - 0{\cdot}847357.$$

V. Základy počtu integralného.

27.

Uvádění veličin nekonečně malých čili úkonů differencialných na konečné nazývá se *integrováním* (celením), a protož jsou differencování a integrování výkony protivné. Za znamení integralné vzato $\int$ (Summa), které se tedy se znamením ∂, kdykoli obě po sobě přicházejí, ruší; tak jest na př. $\int \partial z = z$ neboli

$$\partial \int a \partial y = a \partial y.$$

Dle toho můžeme se vždy differencováním přesvědčiti, zdali dobře integrováno.

Funkce výkonem tímto nalezená jmenuje se *integral*, a proto se na př. $\int fx \,.\, \partial x = Fx$ čte: Integral z $fx \,.\, \partial x$ činí Fx.

Z pojmů těchto plyne dle výrazu $a\partial x = \partial(ax + c)$, jejž v čl. 3. rovn. 4) podává

$$\int a\partial x = \int \partial(ax + c) \quad \text{čili} \quad \int a\partial x = ax + c \tag{1}$$

Z toho pak následuje dvoje, a sice lze jednou veličiny stálé, jež co násobitelé proměnných přicházejí, před znamení integralné vyjmouti, neboť $\int a\partial x = ax = a\int \partial x$; za druhé třeba ku každému integralu konstantu čili stálou veličinu c přidati, jež differencováním byla zmizela. Konstanta taková určuje se ze zvláštního kteréhosi pádu, jejž obecný úkon v sobě obsahuje. Tak by se

na př. integrováním objevila rovnice $y = ax^2 + c$, a bylo by známo, že se při $x = m$ stává $y = n$, pak obdržíme

$$n = am^2 + c \quad \text{tedy} \quad c = n - am^2.$$

Dále jde z čl. 3. rovn. 5)

$$\int (\partial t + \partial u + \partial v \text{ atd.}) = t + u + v \text{ atd.}; \tag{2}$$

dá-li se tedy úkon differencialný rozložiti ve více částí, můžeme každou z nich zvláště integrovati.

Podobně obdržíme dle čl. 4. rovn. 6)

$$tu = \int u\partial t + \int t\partial u \quad \text{čili} \quad \int t\partial u = tu - \int u\partial t, \tag{3}$$

kterýžto výkon se počástným integrováním nazývá. Tím lze funkce, jež nesnadno integrovati, mnohdy uvesti na jiné, u nichž se to lehčeji stává.

28.

Dosadíme-li do rovn. 9) v čl. 5. $n + 1$ místo n, bude

$$(n + 1)\, x^n \,\partial x = \partial x^{n+1} \quad \text{což dává}$$

$$\int x^n \,\partial x = \frac{x^{n+1}}{n + 1}, \tag{4}$$

z toho jde při záporném n

$$\int \frac{\partial x}{x^n} = - \frac{1}{(n - 1)\, x^{n-1}}. \tag{5}$$

Podobně plyne z rovn. 10)

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{a + bx}} = \frac{2}{b} \sqrt{a + bx} \tag{6}$$

a z rovnice 11)

$$\int \frac{x\partial x}{\sqrt{a + bx^2}} = \frac{1}{b} \sqrt{a + bx^2}. \tag{7}$$

V článku 6. dává rovn. 12)

$$\int \frac{\partial x}{x} = \lambda o \gamma\, x,$$

a pakli sem $a + bx$ místo x dosadíme, bude

$$b \int \frac{\partial x}{a + bx} = \lambda o \gamma (a + bx), \text{ tedy } \int \frac{\partial x}{a + bx} = \frac{1}{b} \lambda o \gamma (a + bx), \tag{8}$$

což nám, když x^2 za x vezmeme, dává

$$\int \frac{x\partial x}{a + bx^2} = \frac{1}{2b} \lambda o \gamma\, (a + bx^2). \tag{9}$$

Z rovnice 14) čl. 6. jde

$$\int a^x \,\partial x = \frac{a^x}{\lambda o \gamma\, a}, \tag{10}$$

což při $a = e$ ve $\int e^x \partial x = e^x$, (11)

přechází. Z čl. 20. obdržíme $\int \cos x \partial x = \sin x$; (12)

$$\int \sin x \partial x = -\cos x \tag{13}$$

$$\int \frac{\partial x}{\cos^2 x} = tg\, x; \tag{14}$$

$$\int \frac{\partial x}{\sin^2 x} = -\cot x \tag{15}$$

Z rovnice 22. čl. 20) obdržíme,

$$x\sqrt{\frac{b}{a}} \quad \text{místo } x$$

dosadíce,

$$\partial \, arc \sin x \sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{\sqrt{\frac{b}{a}} \cdot \partial x}{\sqrt{1 - \frac{bx^2}{a}}} = \frac{\sqrt{b}\, \partial x}{\sqrt{a - bx^2}},$$

tedy

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{a - bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \, arc \sin x \sqrt{\frac{b}{a}}, \tag{16}$$

kdežto b kladným býti musí. Co se výrazu

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{a + bx^2}},$$

kdež b kladné jest, týče, postavme v čl. 6. do příkladu 3)

$$x\sqrt{b} \quad \text{místo } x, \text{ bude}$$

$$\frac{\sqrt{b}\partial x}{\sqrt{a + bx^2}} = \partial \, \lambda o\gamma \, (x\sqrt{b} + \sqrt{a + bx^2}),$$

z toho jde pak

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{a + bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \, \lambda o\gamma \, (x\sqrt{b} + \sqrt{a + bx^2}) \tag{17}$$

Vezmeme-li v rovn. 23. čl. 20)

$$x\sqrt{\frac{b}{a}} \quad \text{místo } x,$$

nalezneme

$$\frac{\partial x \cdot \sqrt{\frac{b}{a}}}{1 + \frac{bx^2}{a}} = \partial \, arc \, tg \, x \sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{\sqrt{ab}\, \partial x}{a + bx^2},$$

tedy

$$\int \frac{\partial x}{a + bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \, arc \, tg \, x \sqrt{\frac{b}{a}}. \tag{18}$$

Dále snadno nahlédnouti, že jest

$$\frac{1}{1 - x^2} = \frac{1}{2(1 + x)} + \frac{1}{2(1 - x)},$$

což veličinou ∂x násobeno a integrováno ve

$$\int \frac{\partial x}{1 - x^2} = \tfrac{1}{2} \int \frac{\partial x}{1 + x} + \tfrac{1}{2} \int \frac{\partial x}{1 - x}$$

přechází. Dle 8. z hořejších rovnic dává zde při

$$a = 1, \; b = 1, \; \int \frac{\partial x}{1 + x} = \lambda o\gamma \, (1 + x),$$

pak při

$$a = 1, \; b = -1, \; \int \frac{\partial x}{1 - x} = -\lambda o\gamma \, (1 - x),$$

tedy

$$\int \frac{\partial x}{1 - x^2} = \tfrac{1}{2} [\lambda o\gamma \, (1 + x) - \lambda o\gamma \, (1 - x)] = \tfrac{1}{2} \, \lambda o\gamma \frac{1 + x}{1 - x},$$

a dosadíme-li sem

$$x\sqrt{\frac{b}{a}} \quad \text{místo } x,$$

jest

$$\int \frac{\partial x \cdot \sqrt{\frac{b}{a}}}{1 - \frac{bx^2}{a}} = \tfrac{1}{2} \, \lambda o\gamma \frac{1 + x\sqrt{\frac{b}{a}}}{1 - x\sqrt{\frac{b}{a}}},$$

z čehož plyne nápotom

$$\int \frac{\partial x}{a - bx^2} = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \, \lambda o\gamma \frac{\sqrt{a} + x\sqrt{b}}{\sqrt{a} - x\sqrt{b}}. \tag{19}$$

Mimo to dává nám článek 20. rovn. 24), když s přirozenými logaritmy počítáme

$$\int \cot x \, . \, \partial x = \lambda o\gamma \sin x \tag{20}$$

a pakli sem

$$\frac{\pi}{2} - x \quad \text{místo } x$$

dosadíme, $\int tg\, x \partial x = -\lambda o\gamma \cos x$ (21)

Podobně jde z rovn. 25. čl. 20)

$$\int \frac{\partial 2x}{\sin 2x} = \lambda o\gamma \, tg \, x,$$

a pakli

$$\frac{x}{2} \quad \text{místo } x \text{ postavíme,}$$

$$\int \frac{\partial x}{\sin x} = \lambda o\gamma \, tg \, \frac{x}{2}, \tag{22}$$

z čehož $\frac{\pi}{2} - x$ místo x vezmouce, nalezneme

$$\int \frac{\delta x}{\cos x} = -\log tg\, \frac{\pi - 2x}{4} \tag{23}$$

29.

Formule integralné svrchu uvedené vystačí ve velmi mnoha pádech, a kde se to nestává, dají se z nich odvoditi jiné, jež požadavkům zadost činí, a však odvozování takové požaduje často mnoho důvtipu.

Co se obyčejných potřeb týče, postačí ještě následující dodati:

a) Ohledem integrování výrazu

$$\frac{x^2 \delta x}{(x^2-1)^2}$$

rozvrhněme si zlomek

$$\frac{x^2}{(x^2-1)^2}$$

v součet z více jiných, by se pak s každou částí zvláště jednati mohlo. Poněvadž $(x^2-1)^2 = (x-1)^2\,(x+1)^2$, můžeme postaviti

$$\frac{x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{t}{(x-1)^2} + \frac{u}{x-1} + \frac{v}{(x+1)^2} + \frac{w}{x+1},$$

což dává

$$x^2 = t(x^2+2x+1) + u(x^3+x^2-x-1) + v(x^2-2x+1) + w(x^3-x^2-x+1)$$

čili

$$x^3 = (u+w)\,x^3 + (t+u+v-w)\,x^2 + (2t-u-2v-w)\,x + t-u+v+w.$$

Postavíme-li ohledně určení neznámých t, u, v, w
$u+w=o$, $t+u+v-w=1$, $2t-u-2v-w=o$, $t-u+v+w=o$,
učiníme tím poslední rovnici zadost; pak jest

$$t = \tfrac{1}{4},\quad u = \tfrac{1}{4},\quad v = \tfrac{1}{4},\quad w = -\tfrac{1}{4}.$$

Z toho jde

$$\int \frac{x^2\delta x}{(x^2-1)^2}$$

$$= \tfrac{1}{4}\left[\int\frac{\delta x}{(x-1)^2} + \int\frac{\delta x}{x-1} + \int\frac{\delta x}{(x+1)^2} - \int\frac{\delta x}{x+1}\right].$$

Dle 5té z hořejších formulí nalezneme

$$\int\frac{\delta x}{(x-1)^2} = -\frac{1}{x-1},\quad \int\frac{\delta x}{(x+1)^2} = -\frac{1}{x+1};$$

pak dle 8mé fm.

$$\int\frac{\delta x}{x-1} = \log(x-1),\quad \int\frac{\delta x}{x+1} = \log(x+1).$$

Protož obdržíme

$$\int\frac{x^2\delta x}{(x^2-1)^2}$$

$$= -\tfrac{1}{4}\left[\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} - \log(x-1) + \log(x+1)\right] \text{ t. j.}$$

$$\int\frac{x^2\delta x}{(x^2-1)^2} = -\tfrac{1}{4}\left(\frac{2x}{x^2-1} + \log\frac{x+1}{x-1}\right) \tag{24}$$

b) Má-li se $\delta x\sqrt{a^2-x^2}$ integrovati, postavme svrchu ve frm. 3)
$u = x$, $t = \sqrt{a^2-x^2}$ tedy

$$\delta t = -\frac{x\delta x}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

pak obdržíme

$$\int \delta x\sqrt{a^2-x^2} = x\sqrt{a^2-x^2} + \int\frac{x^2\delta x}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

A však

$$\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} + \frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$= -\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

z čehož

$$\int\frac{x^2\delta x}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\int\delta x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\int\frac{\delta x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$= -\int\delta x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \operatorname{arc.sin}\frac{x}{a}$$

dle fm. 16. jde. To dosazeno dává

$$\int\delta x\sqrt{a^2-x^2} = x\sqrt{a^2-x^2} - \int\delta x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \operatorname{arc\,sin}\frac{x}{a}$$

čili

$$\int\delta x\sqrt{a^2-x^2} = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{arc\,sin}\frac{x}{a} \tag{25}$$

Podobným spůsobem nalezneme dle form. 3)

$$\int\delta x\sqrt{x^2-a^2} = x\sqrt{x^2-a^2} - \int\frac{x^2\delta x}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$= x\sqrt{x^2-a^2} - \int\delta x\left[\frac{x^2-a^2}{\sqrt{x^2-a^2}} + \frac{a^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\right]$$

$$= x\sqrt{x^2 - a^2} - \int \partial x \sqrt{x^2 - a^2} - a^2 \int \frac{\partial x}{\sqrt{x^2 - a^2}},$$

což dle form. 17) dává

$$2\int \partial x \sqrt{x^2 - a^2} = x\sqrt{x^2 - a^2} - a^2 \log (x + \sqrt{x^2 - a^2})$$

čili

$$\int \partial x \sqrt{x^2 - a^2} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \log (x + \sqrt{x^2 - a^2}). \quad (26)$$

c) Měla-li by se veličina $a - bx^2$, jež v hořejších integralech vícekráte přichází, převesti na podobu $\alpha + \beta y - \gamma y^2$, postavme $x = ty + u$, pak bude

$$a - bx^2 = a - bu^2 - 2btuy - bt^2y^2,$$

protož nalezneme

$$\alpha = a - bu^2, \quad \beta = -2btu, \quad \gamma = bt^2.$$

Poněvadž pak tuto pro určení veličin a, b, t, u pouze tři rovnice máme, bude nejpříhodnější $b = 1$ vzíti, pak jest

$$t = \sqrt{\gamma}, \quad u = -\frac{\beta}{2\sqrt{\gamma}}, \quad a = \alpha + \frac{\beta^2}{4\gamma}.$$

Podobným způsobem lze $a + bx^2$ proměniti ve

$$\alpha + \beta y + \gamma y^2.$$

Dosazováním a převáděním takovýmto lze hořejším formulím velmi rozmanité podoby dáti, o čemž však obšírněji jednati účel spisu tohoto nedovoluje.

Příklady.

1) $\int (a + bx + cx^2)\, \partial x = ax + \frac{1}{2}bx^2 + \frac{1}{3}cx^3$,

2) $\int \frac{(a + bx)\partial x}{x^2} = -\frac{a}{x} + b \log x$,

3) $\int \frac{x+1}{x-1}\, \partial x = x + 2 \log (x - 1)$,

4) $\int \log x \,.\, \partial x = x (\log x - 1)$,

5) $\int xe^x \partial x = e^x (x - 1)$,

6) $\int x \sin x \,.\, \partial x = \sin x - x \cos x$,

7) $\int \sin^2 x \,.\, \partial x = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin 2x$,

8) $\int \frac{\partial x}{x\sqrt{x^2 - 1}} = \operatorname{arc\,sec} x$,

9) $\int \frac{\partial x}{x\sqrt{ax^2 - b}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \operatorname{arc\,sec} x \sqrt{\frac{a}{b}}$,

10) $\int \frac{y\partial x - x\partial y}{y^2} = \frac{x}{y}$.

30.

Differencovati lze každou rovnici, v níž proměnná kterás přichází. Mimo to jsme při řešení rovnic v čl. 25) viděli, jak veličiny jinak stálé mnohdy za proměnné považovány býti mohou. Nyní povstane jiná důležitá otázka, kdy a co se bude v daných úkolech integrovati?

Že každou rovnici, v níž proměnná x přichází, veličinou ∂x násobiti a pak integrovati lze, patrno samo sebou; avšak okolnost ta přináší mimo vyvinutí některých řad málo jiných následků. Obyčejně jest dána proměnná x, z kteréžto více jiných proměnných určiti lze, tak že se ohledně jich ∂x dle čl. 7) za stálé považovati může, což se u ostatních proměnných nestává; hledáme pak výraz pro novou proměnnou, totiž $y = fx$. Necháme-li x o ∂x růsti, stává se, že jest

$$\partial y = f(x + \partial x) - fx > Fx \,.\, \partial x \text{ a spolu}$$

$$\partial y = f(x + \partial x) - fx < Fx \,.\, \partial x + \varphi x \,.\, \partial x \,.\, \partial z,$$

kdež ∂z jedné z daných proměnných náleží a též $= \partial x$ neb ∂y býti může. Výrazy $Fx \,.\, \partial x$ a $Fx \,.\, \partial x + \varphi x \,.\, \partial x \,.\, \partial z$ liší se však od sebe pouze nesmírně malou veličinou druhého stupně, protož lze $\varphi x \,.\, \partial x \,.\, \partial z$ vynechati, z čehož pak

$$\partial y = Fx \,.\, \partial x \quad \text{čili} \quad y = \int Fx \,.\, \partial x$$

obdržíme. Chceme-li, když integrace dle uvedených formulí neb jakkoli jinak vykonána, pouze výraz pro fx míti, určuje se konstanta, a sice obyčejně tím, že při $x = a$, $fa = 0$ přichází, čemuž říkáme, že se úkon fx od $x = a$ vzal; pak jde z $y = \int Fx \,.\, \partial x = fx + C$, $fa + C = 0$ čili $y = fx - fa$.

Má-li však y úplně určeno býti, třeba často ještě udati, až jak daleko se x bere; to se pak stává jiným číslem b, jež se za x dosadí, tak že se a nejmenší, b pak největší hodnotou proměnné x stává. V počtu naznačuje se okolnost ta výrazem

$$\int_a^b Fx \,.\, \partial x = fb - fa,$$

kterýžto výkon se integrováním v mezích a, b nazývá.

K objasnění vět těchto stůjž zde následující úkol z mechaniky:

30.

Těleso kterési puzeno silami jakýmis opisuje v čase t přímku s (stop) dlouhou, a dosahuje na konci času toho rychlosti v, t. j. kdyby po uplynutí času t síly ony účinkovati přestaly, opisovalo by dané těleso v každé následující časové jednosti (sekundě) dráhu v (stop) dlouhou. Jaká souvislost naleză se mezi veličinami těmito?

Zde třeba k veličinám s t v přibrati ještě φ, udávající zrychlení (acceleratio), totiž rozdíl mezi rychlostí na konci času t a $t + 1$, tak že kladné φ vzrůst a záporné úbytek rychlosti udává, a též proměnné býti může.

V úkolu tomto bude nejlépe s v φ považovati za funkce z času t; mohlo by se též na př. s t φ bráti za funkci z v avšak v počtu činilo by to obtíže.

Ku konci času t jsou tedy prostora a rychlost s, v, po uplynutí nesmírně malé časové doby ∂t totiž ku konci času $t + \partial t$ jsou potažně $s + \partial s$, $v + \partial v$, a vzrostly proto o ∂s, ∂v. Pohybování v době ∂t můžeme vzíti za jednostejné (gleichförmig), kdež jest nápotom prostora proběhnutá rovna součinu z rychlosti a času, jako na př. u párníků při tichém moři; pak ale bude

$$\partial s > v\partial t, \quad \partial s < (v + \partial v)\partial t = v\partial t + \partial v \,.\, \partial t$$

t. j. vezmeme-li rychlost z počátku doby ∂t, nalezneme prostoru ∂s poněkud malou, vezmeme-li ji však z konce doby té, bude výsledek o něco větší než ∂s; jelikož ale $\partial v \partial t$ proti $v\partial t$ mizí, máme

$$\partial s = v\partial t$$

co první rovnici pohybu.

Jako roste rychlost v čase ∂t o ∂v, tak roste i zrychlování o $\partial \varphi$. Vzrůst rychlosti můžeme podobně v okamžení ∂t za jednostejný bráti, a protož nalezneme

$$\partial v > \varphi\partial t, \quad \partial v < (\varphi + \partial\varphi)\partial t = \varphi\partial t + \partial\varphi \,.\, \partial t$$

t. j.

$$\partial v = \varphi\partial t$$

co rovnici druhou; z obou plyne pak dále

$$\varphi\partial s = v\partial v, \quad \partial^2 s = \varphi\partial t^2.$$

Z rovnic těchto dají se nápotom všechny druhy pohybu v přímkách rozpočísti, pakli se jen některá z proměnných oněch blíže určí.

a) Tak při kolmém vrhu dolů v prostoru vzduchu prázdnou roste rychlost v stejných dobách o tutéž veličinu, a sice u nás v každé sekundě o $g = 31{\cdot}03$ vídeňských stop. Následkem toho dává rovnice druhá

$$\partial v = g\partial t, \quad \text{tedy} \quad v = c + gt,$$

kdež konstanta c počátečnou vrhem tělesu sdělenou rychlost znamená. K tomu dává rovnice první čili

$$\partial s = (c + gt)\,\partial t, \quad s = ct + \tfrac{1}{2} gt^2,$$

kdež se žádná konstanta nepřipisuje, jelikož z úkolu patrno, že při $t = 0$, $s = 0$ vzíti třeba.

b) Při prostém pádu v prostoře vzduchu prázdné jest počátečná rychlost $c = 0$, tedy $v = gt$, $s = \frac{1}{2} gt^2$.

Totéž platí o pohybování na hladké šikmé ploše a na pádostroji, toliko že tu g jiné hodnoty má.

c) Při kolmém vrhu vzhůru v prostoru vzduchu prázdnou působí tíže proti počátečné síle vrhu, protož třeba zrychlení čili g záporně vzíti, čímž se $v = c - gt$, $s = ct - \frac{1}{2} gt^2$ objeví.

Když těleso při vrhu takovém nejvyššího místa dosáhne, jest tam $v = 0$, což dává čas výstupu

$$t' = \frac{c}{g},$$

a výšku výstupu

$$s' = \frac{c^2}{2g}.$$

Ten samý výsledek podává maximum veličiny s.

Koule dělová rychlostí 2300 stop kolmo vzhůru vystřelená dosáhla by dle toho výšky as 85300' t. j. $3\frac{1}{2}$ míle; což ovšem znamenitě menší vypadne, poněvadž tření se vzduchem jí veliký odpor činí.

d) Byloliby těleso na hladkou obzornou rovinu na př. led vrhnuto počátečnou rychlostí c, nepůsobí naň tíže, ale tření se vzduchem a ledem činí pohybu odpor, ten pak berou mechanikové co poměrný čtverci rychlosti, tedy $\varphi = - mv^2$, jelikož se jím běh umenšuje. Z té příčiny máme

$$\partial v = - mv^2 \partial t, \quad \text{tedy} \quad \frac{\partial v}{v^2} = - m\partial t,$$

$$\text{což dává} - \frac{1}{v} = - mt + C.$$

Při $t = 0$ jest $v = c$,

$$\text{tedy } C = - \frac{1}{c}, \quad \text{a} \quad v = \frac{c}{cmt + 1}$$

Z toho jde dále

$$\partial s = \frac{c\partial t}{cmt + 1},$$

a dle rov. 8 čl. 28)

$$s = \frac{1}{m} \, \lambda og \, (1 + cmt),$$

kdežto konstanta mizí, poněvadž $t = 0$ též $s = 0$ dává. Při $m = 0$ jde z toho $s = ct$ (čl. 23).

Poznamenání. Co se veličiny m týče, může býti jen ze zkušenosti, totiž z předsevzatých zkoušek určena.

e). Při kolmém vrhu vzhůru v prostoru vzduchem naplněnou činí nejen tíže ale i tření se vzduchem odpor, protož jest $\varphi = -g - mv^2$, tedy $\partial v = -(g + mv^2)\,\partial t$,

$$\partial t = -\frac{\partial v}{g + mv^2},$$

a dle rov. 18. čl. 28)

$$t = -\int \frac{\partial v}{g + mv^2} = C - \frac{1}{\sqrt{gm}}\, arc\,tg\, v \sqrt{\frac{m}{g}}.$$

Při $t = o$ jest $v = c$ tedy

$$C = \frac{1}{\sqrt{gm}}\, arc\,tg\, c \sqrt{\frac{m}{g}},$$

a pakli pro krátkost

$$a = arc\,tg\, c \sqrt{\frac{m}{g}}$$

vezmeme, jest

$$t = \frac{1}{\sqrt{gm}}\left(a - arc\,tg\, v \sqrt{\frac{m}{g}}\right)$$

z čehož nápotom

$$v = \sqrt{\frac{g}{m}}\; tg\,(a - t\sqrt{gm})$$

plyne. Dále jest

$$\partial s = v\partial t = -\frac{v\partial v}{g + mv^2},$$

což integrováno dává

$$s = C - \frac{1}{2m} \log\,(g + mv^2),$$

a jelikož při $v = c$, $s = 0$ jest, bude

$$C = \frac{1}{2m} \log\,(g + mc^2) \quad \text{tedy} \quad s = \frac{1}{2m} \log \frac{g + mc^2}{g + mv^2}.$$

Výšku výstupu (h) naleznouti chtíce, postavme $v = 0$, $s = h$; pak jest

$$h = \frac{1}{2m} \log \frac{g + mc^2}{g}.$$

Otázka: Při jakých hodnotách veličin c, g, m jest v pádu tomto 1., 2., 3. a 4. z předcházejících obsažen, a jak se to nalezne počtem?

32.

V dílech mechanických a fysikálných, jichž spisovatelé známost počtu nekonečného nepředpokládají, přichází často způsob početný, jejž integrací zakuklenou jmenovati můžeme. Co příklad takové stůjž zde vrh v odděl. a) článku předešlého uvedený.

Mysleme sobě totiž čas t v n nesmírně malých částek, z nichž každá τ jest, rozvržen, tedy $t = n\tau$, pak bude i n nesmírně veliké číslo. Je-li počáteční rychlost daného tělesa c, a roste-li v každé z dob τ o γ, bude prostora při vrhu tom opsaná

$$s > c\tau + (c+\gamma)\tau + (c+2\gamma)\tau + \ldots\ldots (c + (n-1)\gamma)\tau = A,$$

a spolu

$$s < (c+\gamma)\tau + (c+2\gamma)\tau + (c+3\gamma)\tau + \ldots\ldots (c+n\gamma)\tau = B;$$

neboť pohyb v dobách τ lze považovati co jednostejný, vezmeli se tedy potažně v 1., 2., 3. ... $n$té době počáteční rychlost

$$c,\ c+\gamma,\ c+2\gamma \ldots\ldots c + (n-1)\gamma,$$

bude výsledek o něco menší, jelikož rychlosti stále přibývá; vezme-li se však rychlost konečná v každé z naduvedených dob, totiž

$$c+\gamma,\ c+2\gamma,\ c+3\gamma, \ldots\ldots c+n\gamma,$$

bude opět výsledek o něco větší, než vlastně býti má. Řada A, jakž snadno poznati, jest

$$= cn\tau + \big(0 + 1 + 2 \ldots (n-1)\big)\gamma\tau = ct + \frac{n(n-1)}{2}\gamma\tau,$$

a podobně

$$B = ct + \frac{n(n+1)}{2}\gamma\tau.$$

Je-li g vzrůst rychlosti v jednosti časové, bude, poněvadž γ vzrůst v době τ jest, a rychlost jednostejně roste, $g : \gamma = 1 : \tau$, tedy $\gamma = g\tau$, jakož i $n\gamma = gn\tau = gt$. Z té příčiny obdržíme

$$A = ct + \tfrac{1}{2}n^2\gamma\tau - \tfrac{1}{2}n\gamma\tau = ct + \tfrac{1}{2}gt^2 - \tfrac{1}{2}gt\tau.$$

$$B = ct + \tfrac{1}{2}n^2\gamma\tau + \tfrac{1}{2}n\gamma\tau = ct + \tfrac{1}{2}gt^2 + \tfrac{1}{2}gt\tau.$$

A se liší tedy od B pouze o nekonečně malou veličinu $gt\tau$, a tu když vynecháme, bude $s = ct + \frac{1}{2}gt^2$.

Podobně se nalezne i $v = c + gt$.

Ostatně viděti, že zde τ tolik co ∂t, a γ co ∂v znamená. Příklad tento slouží spolu k objasnění věty, že integrování není leč sčítání veličin, jež jsme si nekonečně malými učinili (článek 1. a. b.)

VI. Upotřebení počtu nekonečného v geometrii.

33.

Důležitost počtu differencialného okazuje se zvláště v měřictví, kdež jím množství úkolů dle stálých pravidel řešiti lze, což jinak buď velmi nesnadno neb zcela nemožno jest.

Nemohouce zde obšírně o měřictví zvláště pak analytickém jednati, musíme hlavní zásady z něho co známé předpokládati; z těch pak jsou nejdůležitější následující části:

a) Rovnice přímky totiž $y = ax + b$, kdež a tangentu úhlu znamená, jejž daná přímka nad osou abscis s její kladnou stranou tvoří, b pak ordinata v počátku (při $x = 0$) jest; tedy dle obrazce VII. $a = tg\, MTP$, $b = AE$, $x = AP$, $y = MP$.

b) Rovnice kruhu $(x - t)^2 + (y - u)^2 = r^2$, kdež jsou t, u koordinaty středu a r poloměr. V obrazci VIII. jest tedy $t = AG$, $u = GO$, $r = MO$.

c) Středová rovnice ellipsy (schodnice) čili
$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2),$$
kdež a větší, b pak menší poloosa jest.

d) Středová rovnice hyperboly (rozchodnice) čili
$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2),$$
kdežto a, b podobně poloosy jsou.

e) Vrcholová rovnice paraboly (stejnice) $y^2 = 2px$, u níž p polovici parametru t. j. ordinatu v ohnisku znamená.

f) K čárám těmto připojme ještě obyčejnou cykloidu pro její důležitost co do počtu nekonečného. Opisuje pak křivku tuto bod M (obr. II.) ležící v periferii kruhu EGM, když se kruh ten po přímce AX valí. Protož jest AX vždy tangentou kruhu opisujícího, pak kolmá $EO = r$ jeho poloměr, a přímka AE rovna oblouku EM. Platí-li nám dále φ za oblouk úhlu EOM při poloměru 1, bude oblouk úhlu
$$FMO = \pi - \varphi,$$
když MP ordinata bodu M jest. Z toho jde
$$x = AP = AE - PE = EM - FO = r\varphi - r \sin \varphi$$
$$y = MP = EO + FM = r - r \cos \varphi,$$

pakli FO kolmá z bodu O na MP jest; čímž jsme nalezli $x = r(\varphi - \sin \varphi)$, $y = r(1 - \cos \varphi) = 2r \sin^2 \frac{1}{2}\varphi$ rovnice, z nichž cykloidu nejsnáze rozpočítati lze. Z druhé rovnice jde
$$\cos \varphi = \frac{r - y}{r}, \text{ tedy } \sin \varphi = \frac{1}{r}\sqrt{2ry - y^2}$$
a
$$\varphi = arc \cos \frac{r - y}{r},$$
z čehož nápotom
$$x = r\, arc \cos \frac{r - y}{r} - \sqrt{2ry - y^2}$$
co rovnice cykloidy plyne.

Největší hodnotu y nalezneme dle čl. 24) z
$$\partial y = r \sin \varphi \partial \varphi = 0,$$
při $\varphi = \pi$, jež $CD = 2r$ obnáší; cykloida tato má tedy v C vrchol, a jelikož jak φ tak $2\pi - \varphi$ ty samé hodnoty pro y dává, a $AD = BD = \pi$, jest CD osou křivky této, a obě její půly totiž ACD a BCD se shodují.

Poznamenání. Je-li opisující bod M vnitř kruhu mezi středem a periferií, povstává zkrácená, a je-li vně, prodloužená cykloida. Otáčí-li se kruh kolem kruhu vně, dává epicykloidu, a děje-li se to vnitř, hypocykloidu, které též zkrácené neb prodloužené býti mohou.

34.

Měřictví podává přede vším hojnost příkladů na maxima a minima, z nichž zde následující umístěny buďtež:

1. Máme danou přímku AB (obr. III.) a mimo ni body M, N; má pak se naleznouti bod X, při němž by vzdálenosti MX a NX co nejkratší byly.

Zde jsou stálé veličiny $MP = a$, $NQ = b$, $PQ = c$, pak proměnná $PX = x$; z pravoúhelníků MPX, NQX jde
$$MX = \sqrt{a^2 + x^2}, \quad NX = \sqrt{b^2 + (c - x)^2}$$
tedy
$$fx = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (c - x)^2}.$$
Dle čl. 24) jest tedy
$$0 = f'x = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{c - x}{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}}$$
což dává
$$x = \frac{ac}{a + b} \text{ jakož i } c - x = \frac{bc}{a + b}$$

Z toho jde dále

$$tg\, MXP = \frac{a}{x} = \frac{b}{c-x} = tg\, NXQ \text{ čili } MXP = NXQ.$$

Chtíce tedy bod X naleznouti, prodlužme NQ až jest $N'Q = NQ$ a spojme pak M s N'.

2. Do daného trojúhelníku má se vepsati co největší obdélník.

Je-li v obr. IV. $\triangle ABC$ daný trojúhelník a v něm $AB = a$ spod, pak $CD = b$ výška, je-li mimo to $MNPO$ hledaný obdélník, obdržíme z $CE = x$, $MP = DE = b - x$, pak z

$$MN : AB = CE : CD \quad \text{čili} \quad MN : a = x : b,$$

$$MN = \frac{ax}{b}.$$

Zde jest fx plocha $MNPO$ tedy

$$fx = (b - x)\frac{ax}{b} \quad \text{a} \quad f'x = 0 \quad \text{dává} \quad x = \frac{b}{2};$$

$$\text{protož} \quad fx = \frac{ab}{4} \quad \text{a je-li} \quad P = \frac{ab}{2}$$

plocha daného trojúhelníku, bude $fx = \frac{1}{2}P$. Hledaný obdélník obnáší tedy polovici trojúhelníku.

3. Který ze čtyrúhelníků majících tytéž strany jest největší?

Je-li v obr. V. $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $AD = d$ pak $\sphericalangle ABC = x$, $\sphericalangle ADC = y$, bude plocha

$$fx = \tfrac{1}{2}ab\, sin\, x + \tfrac{1}{2}cd\, sin\, y.$$

K tomu nám dává Carnotova poučka

AC^2 rovno $a^2 + b^2 - 2ab\, cos\, x = c^2 + d^2 - 2cd\, cos\, y$.

Z $\partial fx = 0$ jde

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{ab\, cos\, x}{cd\, cos\, y},$$

a z rovnice druhé

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{cd\, sin\, y}{ab\, sin\, x};$$

násobením obdržíme

$sin\, x\, cos\, y + cos\, x\, sin\, y = sin\,(x + y) = 0$ čili $x + y = \pi$,

t. j. čtyrúhelník, kol něhož kruh opsati lze, jest největší.

4. Má se do daného křivočárného obrazce vepsati největší obdélník.

Představuje-li v obr. VI. oblouk BD danou křivku, pak je-li $AE = m$ abscisa bodu D, $AP = x$, $PM = y$ a $\square\, EPMS$ hledaný obdélník, bude $fx = EP \times MP$ čili $fx = (m - x)y$.

Z $\partial fx = 0$ jde pak

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{y}{m - x}.$$

Jiný výraz pro

$$\frac{\partial y}{\partial x}$$

plyne z rovnice dané křivky. Tak nalezneme u paraboly z

$$y^2 = 2px, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{p}{y} = \frac{y}{m - x},$$

tedy

$$x = \frac{m}{3}.$$

Co platí o tom u kruhu, u ellipsy, hyperboly a cykloidy, a při kterých hodnotách veličiny m obdržíme zde zajímavé výsledky?

5. Jak se v daném křivočárném obrazci nalezne největší lichoběžník (Trapez) $DEMP$? (Obr. VI.)

Při $AE = m$, $DE = n$ jest zde $fx = \frac{1}{2}(MP + DE).EP$, čili

$$fx = \tfrac{1}{2}(n + y)(m - x) \quad \text{tedy} \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{n + y}{m - x}.$$

Vpisujeme-li trapez takový do kruhového quadrantu, bude

$$m = 0,\; n = r \quad \text{tedy} \quad \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{r + y}{x},$$

a rovnice

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{dává} \quad \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{x}{y}.$$

Z toho jde

$$y = \frac{r}{2},\; x = \frac{r}{2}\sqrt{3}.$$

6. Který z obdélníků do trojúhelníku neb do křivočárného obrazce vepsaných má nejkratší diagonalu?

7. Který do přímého kužele vepsaný válec jest největší? Který má největší povrch? Který největší pobočnou plochu?

35.

a) Je-li v obr. VII. BH oblouk jaké koliv křivky a M její obecný bod mající koordinaty x, y, pak necháme-li $x = AP$ o nesmírně malou část $PP' = \partial x$ růsti, jsou

$$x + \partial x = AP', \quad y + \partial y = M'P'$$

koordinaty bodu M', a protož když MN' s PP'' rovnoběžné jest, bude $M'N' = \delta y$. Body M, M' mohou tak blízko sebe vzaty býti, že téměř v jeden splývají, a protož se přímka jimi tažená, totiž TMM' křivky pouze dotýká čili jest její tangentou. Je-li tedy dle čl. 33) $y = ax + b$ rovnice tangenty této, bude též $y + \delta y = a(x + \delta x) + b$. Z obou rovnic těchto jde

$$a = \frac{\delta y}{\delta x},$$

postavíme-li pak $MTP = v$, tedy $a = tg\, v$, obdržíme hodnotu trigonometrické tangenty jakého koliv bodu M z

$$tg\, v = \frac{\delta y}{\delta x}.$$

To samé plyne z podobnosti trojúhelníků $\triangle\ MTP$ a $\triangle\ M'MN'$; neboť

$$tg\, v = MP : PT = M'N' : MN' = \delta y : \delta x.$$

Je-li daná křivka kruh s rovnicí $(x - t)^2 + (y - u)^2 = r^2$, obdržíme

$$(x - t)\, \delta x + (y - u)\, \delta y = 0 \quad \text{tedy} \quad tg\, v = -\frac{x - t}{y - u}.$$

Vezmeme-li zde $x - t = 0$ tedy $tg\, v = 0$, jest v bodech $x = t$, $y = u \pm r$ tangenta s osou abscis rovnoběžná. Podobně jde z

$$y - u = 0,\ tg\, v = \infty \text{ čili } v = \frac{\pi}{2},$$

a tangenta bodů $x = t \pm r$, $y = u$ stojí kolmo na AX.

Co se cykloidy týče, jde z

$$\delta y = r \sin\varphi\, \delta\varphi, \quad \delta x = r(1 - \cos\varphi)\, \delta\varphi,$$

$$tg\, v = \frac{\sin\varphi}{1 - \cos\varphi} = \cot\frac{\varphi}{2} \text{ tedy } v = \frac{\pi - \varphi}{2}.$$

Mnoho-li obnáší $tg\, v$ u ellipsy, mnoho-li u hyperboly a paraboly?

b) Poněvadž $MP = MT \sin v$, bude

$$MT = \frac{y}{\sin v}.$$

Ale

$$\sin v = \frac{tg\, v}{\sqrt{1 + tg^2 v}} = \frac{\delta y}{\sqrt{\delta x^2 + \delta y^2}}.$$

Z toho obdržíme, pro krátkost

$$\delta s = \sqrt{\delta x^2 + \delta y^2}$$

stavíce, výraz pro délku tangenty

$$MT = \frac{y \delta s}{\delta y}.$$

U cykloidy se nalezne

$$\delta s = 2r \sin\frac{\varphi}{2} . \delta\varphi, \text{ tedy } MT = 2r \sin\frac{\varphi}{2}\ tg\ \frac{\varphi}{2}.$$

Jak dlouhá jest tangenta u ostatních křivek?

c) Přímka PT v obr. VII. nazývá se *subtangentou*, hodnotu její nalezneme pak z $MP = PT\, tg\, v$; tedy jest dle a)

$$PT = \frac{y \delta x}{\delta y}.$$

U paraboly obdržíme $PT = 2x$; dle čehož snadno ku křivce té tangentu vésti.

d) Přímka MN kolmo v bodu M na tangentu postavená jmenuje se *normala*, a délka její plyne z rovnice

$$MN = MT\, tg\, v \quad \text{tedy} \quad MN = \frac{y \delta s}{\delta x}.$$

U cykloidy nalezneme

$$MN = 2r \sin\frac{\varphi}{2}.$$

e) Přímka NP slove *subnormala*, a poněvadž NMT pravý úhel jest, jde z $PT : MP = MP : NP$ čili

$$\frac{y \delta x}{\delta y} : y = y : NP, \text{ tedy } NP = \frac{y \delta y}{\delta x}.$$

U cykloidy obnáší délka subnormaly $r \sin\varphi$. Porovnáme-li hodnotu tuto a délku normaly v d) nalezenou s obr. II., jest EM normalou a EP subnormalou, z čehož pak k bodu M snadno tangentu najíti.

U paraboly jest $NP = p$, tedy subnormala veličinou stálou.

36.

Jak známo, lze kterými koliv třemi body, jež neleží v přímce, kruh vésti. Máme-li tedy v obr. VIII. obecnou křivku BH a v ní body M, M', M'', z nichž první jest dán koordinatami x, y, druhý pak $x' = x + \delta x$, $y' = y + \delta y$, a třetí podobně

$$x'' = x' + \delta x' = x + 2\delta x + \delta^2 x,$$
$$y'' = y' + \delta y' = y + 2\delta y + \delta^2 y,$$

bude se kruh body těmito vedený křivky pouze dotýkati. Kruh takový nazývá se pak *křivným* (Krümmungskreis), jelikož se čára BH tím více křiví, čím menší jeho poloměr jest.

Jsou-li $t = AG$, $u = GO$ koordinaty středu O, a $R = MO$ poloměr křivný, nalezneme neznámé t, u, R ze třech rovnic, a sice z

$$(x-t)^2 + (y-u)^2 = R^2,$$

pak z rovnice prvním a druhým differencováním z této odvozené, totiž z

$$(x-t)\,\partial x + (y-u)\,\partial y = o,\quad (x-t)\,\partial^2 x + \partial x^2 + (y-u)\,\partial^2 y + \partial y^2 = 0.$$

Poněvadž kruh křivný body $M\ M'\ M''$ jde, jest nejen

$$f(x,y) = (x-t)^2 + (y-u)^2 = R^2,$$

nýbrž i

$$f(x', y') = f(x + \partial x, y + \partial y) = R^2,$$

a protož z

$$f(x + \partial x, y + \partial y) - f(x,y) = \partial f(x,y) = 0, \text{ (čl. 2. 2)}$$

jde rovnice druhá; a podobně dává

$$f(x'', y'') = f(x' + \partial x', y' + \partial y') = R^2$$

čili

$$f(x' + \partial x', y' + \partial y') - f(x', y') = \partial f(x', y')$$

tedy

$$\partial\,[f(x + \partial x, y + \partial y) - f(x,y)] = \partial^2 f(x,y)$$

rovnici třetí.

Z nadřečených třech rovnic nalezneme, pakli pro krátkost

$$\triangle = \partial y\, \partial^2 x - \partial x\, \partial^2 y$$

a jako svrchu $\partial s = \sqrt{\partial x^2 + \partial y^2}$ stavíme,

$$x - t = -\frac{\partial y\, \partial s^2}{\triangle},\quad y - u = \frac{\partial x\, \partial s^2}{\triangle},\quad R = \frac{\partial s^3}{\triangle}.$$

Je-li y funkcí z x, jakž se to u ellipsy, hyperboly a paraboly stává, třeba dle čl. 7) vzíti $\partial^2 x = o$; jsou-li však jak x tak y funkce z jiné proměnné jako u cykloidy z φ, pak má i $\partial^2 x$ jinou hodnotu.

U paraboly jest

$$y = \sqrt{2p}\ x^{\frac{1}{2}} \text{ tedy } \partial y = \tfrac{1}{2}\sqrt{2p}\ x^{-\frac{1}{2}}\,\partial x,$$

$$\partial s = \partial x \,.\, \sqrt{\frac{p + 2x}{2x}},\quad \partial^2 y = -\tfrac{1}{4}\sqrt{2p}\ x^{-\frac{3}{2}}\,\partial x^2,$$

$$\triangle = -\partial x \,.\, \partial^2 y \text{ tedy}$$

$$R = \sqrt{\frac{(p + 2x)^3}{p}}.$$

Ve vrcholu paraboly jest tedy při $x = 0$, $R = p$; od tud pak roste R neustále.

U cykloidy máme

$$\partial x = r\,(1 - \cos\varphi)\,\partial\varphi = 2r \sin^2 \frac{\varphi}{2}\,.\,\partial\varphi,$$

$$\partial^2 x = r \sin\varphi\, \partial\varphi^2,\quad \partial y = r \sin\varphi\, \partial\varphi,\quad \partial^2 y = r\cos\varphi\, \partial\varphi^2,$$

$$\partial s = 2r \sin\frac{\varphi}{2}\,.\,\partial\varphi,\quad \triangle = 2r^2 \sin^3\frac{\varphi}{2}\,.\,\partial\varphi^3$$

$$\text{tedy}\quad R = 4r \sin\frac{\varphi}{2}.$$

37.

Křivka vedená středy křivných kruhů jiné dané jmenuje se *evoluta*, ohledně jíž se pak daná křivka evolventou nazývá. Rovnici evoluty nalezneme, když z hořejších (36) hodnot t, u vyloučíme veličiny x, y.

Tak jest u paraboly dle čl. 36)

$$3x = t - p,\quad u = -4x\sqrt{\frac{x}{2p}};$$

z toho jde $27pu^2 = 8\,(t-p)^3$ co rovnice evoluty u paraboly, jež se Neil'ovou čili kubickou parabolou nazývá, a pakli

$$u = y,\quad t - p = x,\quad a = \frac{8}{27p}$$

postavíme, ve $y^2 = ax^3$ přechází.

U cykloidy nalezneme

$$x - t = -2r \sin\varphi,\quad y - u = 2r\,(1 - \cos\varphi)$$

a dle 33. *f*)

$$t = r\,(\varphi + \sin\varphi),\quad u = -r\,(1 - \cos\varphi);$$

z čehož když $\varphi = \pi + \psi$ postavíme, bude

$$t - \pi r = r\,(\psi - \sin\psi) = x',\quad u + 2r = r\,(1 - \cos\psi) = y'.$$

Evoluta cykloidy jest tedy tatáž cykloida jen v jiné poloze.

38.

V obrazci VII. můžeme $PP' = MN' = \partial x$ vzíti tak malé, že oblouk MM' s přímkou tou splyne, pak jest

$$MM' = \sqrt{MN'^2 + M'N'^2} = \sqrt{\partial x^2 + \partial y^2}.$$

Z té příčiny jest dle čl. 35) s oblouk dané křivky, jejž nalezneme z

$$\partial s = \sqrt{\partial x^2 + \partial y^2}.$$

Ten samý výsledek podává nám i věta, že se u kruhu při velmi malém úhlu tangenta oblouku rovná (čl. 18).

V obrazci VIII. jest totiž MM' u kruhu a křivky BH totéž; z

$$tg\, MOJ = \frac{y-u}{t-x},\quad tg\, M'OJ' = \frac{y+\delta y-u}{t-x-\delta x}$$

jde pak dle čl. 18. rov. 16), když při rozpočtu v jmenovateli na čl. 1. b) ohled vezmeme,

$$tg\, MOM' = tg(M'OJ' - MOJ) = \frac{\triangle}{\delta s^2};$$

tedy oblouk

$$MM' = R\, tg\, MOM' = \frac{\delta s^3}{\triangle} \cdot \frac{\triangle}{\delta s^2} = \delta s.$$

U paraboly bude dle čl. 36)

$$s = \int \delta x \cdot \sqrt{\frac{p+2x}{2x}}.$$

Postavíme-li zde

$$\sqrt{\frac{p+2x}{2x}} = z,$$

tedy

$$x = \frac{p}{2(z^2-1)},\quad \delta x = -\frac{pz\delta z}{(z^2-1)^2},$$

obdržíme dle čl. 29. rovn. 24)

$$s = -p\int \frac{z^2\delta z}{(z^2-1)^2} = \frac{p}{4}\left(\frac{2z}{z^2-1} + \lambda o\gamma\, \frac{z+1}{z-1}\right) + C,$$

a dosadíme-li sem hodnotu z,

$$s = \sqrt{\tfrac{1}{2}px + x^2} + \frac{p}{4}\, \lambda o\gamma\, \frac{\sqrt{p+2x} + \sqrt{2x}}{\sqrt{p+2x} - \sqrt{2x}},$$

kdež se konstanta nepřidává, pakli oblouk od vrcholu bereme.

Parabolický oblouk mezi vrcholem a parametrem obnáší dle toho při

$$x = \tfrac{1}{2}p,\quad s = \frac{p}{2}\left[\sqrt{2} + \lambda o\gamma\,(1+\sqrt{2})\right].$$

U cykloidy jest dle čl. 36)

$$\delta s = 4r\, sin\, \frac{\varphi}{2} \cdot \delta\, \frac{\varphi}{2},$$

tedy následkem čl. 28. rovn. 13)

$$s = C - 4r\, cos\, \frac{\varphi}{2},$$

a bereme-li oblouk od bodu A obr. II., jest při $\varphi = 0$, $s = 0$, protož $C = 4r$ a $s = 4r\left(1 - cos\, \frac{\varphi}{2}\right)$.

Polovice cykloidy obnáší při $\varphi = \pi$, $AC = 4r$; a délka celé cykloidy $8r$.

Oblouk ellipsy a hyperboly lze jen nekonečnou řadou udati.

39.

Znamenáme-li písmenou P plochu mezi obloukem, abscisou x a ordinatou y, jest v obr. VII. $MM'P'P''$ prvek plochy čili δP, tedy $\delta P > PM \,.\, PP' = y\delta x$; a spolu

$$\delta P < M'P' \,.\, PP' = (y+\delta y)\delta x = y\delta x + \delta x \,.\, \delta y;$$

protož obdržíme (čl. 30) $\delta P = y\delta x$.

U ellipsy jest

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

tedy dle čl. 29. form. 25)

$$P = \frac{b}{a}\int \sqrt{a^2-x^2}\; \delta x = \frac{bx}{2a}\sqrt{a^2-x^2} + \tfrac{1}{2}ab\; arc\, sin\, \frac{x}{a},$$

kdež se konstanta nepřipojuje, pakli s a x spolu mizejí. Poněvadž

$$arc\, sin\, 1 = \frac{\pi}{2},$$

bude pro elliptický quadrant při $x = a$, $Q = \tfrac{1}{4}\pi ab$; protož jest plocha celé ellipsy rovna πab.

Znamená-li Y ordinatu kruhu nad větší osou ellipsy opsaného, jde z rovnic

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},\quad Y = \sqrt{a^2 - x^2}$$

srovnalost $y : Y = b : a$. Je-li tedy $\delta E = y\delta x$ prvek elliptické a $\delta K = Y\delta x$ prvek kruhové plochy, bude $\delta E : \delta K = b : a$; tedy

$$\delta E = \frac{b}{a}\,\delta K \quad \text{čili} \quad E = \frac{b}{a}\,K,$$

a při $K = \pi a^2$ jako svrchu $E = \pi ab$.

U hyperboly jde z

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

dle čl. 29. form. 26)

$$P = \frac{b}{a}\int \sqrt{x^2-a^2}\; \delta x = \frac{bx}{2a}\sqrt{x^2-a^2} - \tfrac{1}{2}ab\; \lambda o\gamma\, (x + \sqrt{x^2-a^2}) + C.$$

Integrujeme-li od vrcholu hyperboly, kde při $x = a$ jest $P = 0$, bude $C = \frac{1}{2} ab \log a$ tedy

$$P = \frac{1}{2} xy - \frac{1}{2} ab \log \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}.$$

U paraboly máme

$$y = \sqrt{2p}\, x^{\frac{1}{2}} \quad \text{tedy} \quad P = \sqrt{2p} \int x^{\frac{1}{2}} \partial x$$

čili $P = \frac{2}{3}\sqrt{2p}\, x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{2px}\,.\,x$ t. j. $P = \frac{2}{3} xy$.

U cykloidy nalezneme z

$$y = r(1 - \cos\varphi), \qquad \partial x = r(1 - \cos\varphi)\, \partial\varphi,$$
$$P = r^2 \int (1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi)\, \partial\varphi.$$

Poněvadž však

$\cos^2\varphi = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi)$ tedy $\int \cos^2\varphi\, \partial\varphi = \frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi$, bude

$$P = \frac{r^2}{4}(6\varphi - 8\sin\varphi + \sin 2\varphi).$$

Plochu celé cykloidy obdržíme z $\varphi = 2\pi$ tedy $P' = 3\pi r^2$; protož obsahuje plocha tato opisující kruh třikrát.

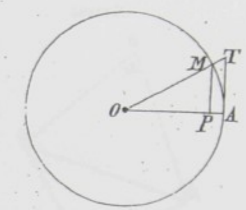
U Neil-ovy paraboly jest

$$y = \sqrt{a}\,.\,x^{\frac{3}{2}} \quad \text{tedy} \quad P = \sqrt{a}\int x^{\frac{3}{2}} \partial x = \frac{2}{5}\sqrt{a}\,.\,x^{\frac{5}{2}}$$
t. j. $P = \frac{2}{5} xy$.

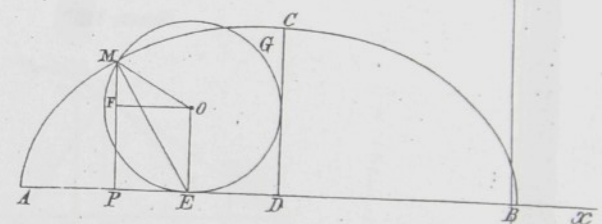
Omyly.

Stránka:	řádek:		na místě:		má býti:
17	4	ze zdola	180°	......	90°
26	9	se shora	vrchu	......	vrhu
30	10	„	fn	......	fx
33	15	„	x^3	......	x^2

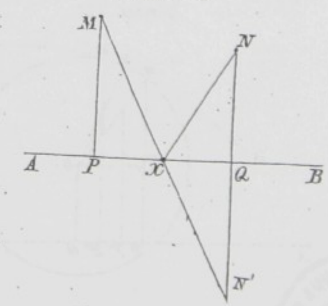
Obrazec I.



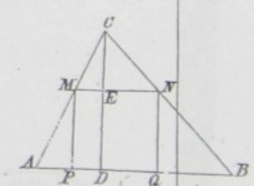
Obrazec II.



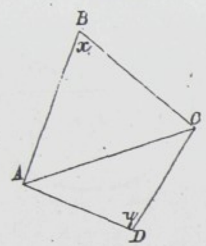
Obrazec III.



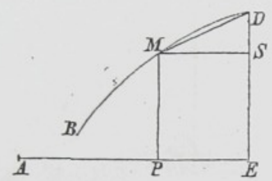
Obrazec IV.



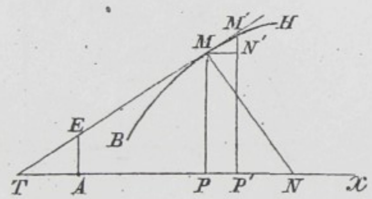
Obrazec V.



Obrazec VI.



Obrazec VII.



Obrazec VIII.