

VYSOKÁ ŠKOLA STROJNÍ A TEXTILNÍ V LIBERCI
fakulta strojní

PŘÍSPĚVEK K ALGEBRAICKÉMU
POJETÍ SYNTÉZY REGULAČNÍHO OBVODU

HABILITAČNÍ PRÁCE

Vědní obor : 26-15-9 Technická kybernetika
Autor : Ing. Josef JANEČEK, CSc.
Vedoucí pracoviště : Doc. Ing. Vojtěch Konopa, CSc.
Rok : 1993

VYSOKÁ ŠKOLA STROJNÍ A TEXTILNÍ
Univerzitní knihovna
Voroněžská 1329, Liberec 1
PSČ 461 17

U285



Ing. JANEČEK Josef, CSc., narozen 4.2.1947, vystudoval v roce 1971 FEL ČVUT v Praze, od roku 1975 pracuje jako vědeckopedagogický pracovník na katedře technické kybernetiky VŠST v Liberci, disertační práci obhájil v roce 1987 na SF ČVUT v Praze.

Děkuji vedení školy a katedry technické kybernetiky za vytvoření podmínek pro vypracování habilitační práce. Doc.Ing.Vladimíru Kracíkovi, CSc. děkuji za plodné diskuse a originální přístupy, které jsem mohl s jeho laskavým svolením rozpracovat.

A handwritten signature in blue ink, appearing to read "Janeček". The signature is stylized with a long horizontal stroke at the end.

Mámě, Tomovi a Lukášovi .

(A taky trochu Dáše .)

Memo, Tomov & Lukesov

1. A very large lot

O B S A H

	Seznam použitých symbolů	5
1	Úvod	9
2	Model dynamického systému zatížený obecným šumem	13
2.1	Aditivní bílý šum zatěžující vektor $x(t)$	17
2.2	Aditivní bílý šum zatěžující vektor $x(t)$	24
2.3	Obecný aditivní šum zatěžující stavový vektor . .	31
2.4	Víceparametrový dynamický systém zatížený obecným šumem	33
3	Syntéza regulačního obvodu	35
3.1	Syntéza jednoparametrového regulačního obvodu . .	36
3.2	Syntéza víceparametrového regulačního obvodu . .	54
Appendix 1		
A1	Kapitoly z algebry	71
A1.1	Základní algebraické pojmy a struktury ; okruh, těleso	71
A1.2	Polynomy, racionální lomená funkce	78
A1.3	Polynomiální matice	85
A1.3.1	Společný dělitel matic	87
A1.3.1.1	Algoritmus výpočtu největšího společného pravého dělitele dvou matic	89
A1.3.1.2	Algoritmus výpočtu největšího společného levého dělitele dvou matic	95
A1.3.2	Kanonický tvar polynomiální matice	99

A1.3.3	Faktorizace polynomiální matice	104
A1.3.4	Algebraický kalkul	110

Appendix 2

A2	Důkaz vět V2.1, V2.2	113
----	--------------------------------	-----

Appendix 3

A3	Řešení soustav algebraických rovnic	125
----	---	-----

Literatura	129
----------------------	-----

SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ

$\left. \begin{array}{cc} A & B \\ (n,n) & (r,m) \end{array} \right\}$	číselné matice (počet řádků, počet sloupců)
$\left. \begin{array}{cc} a & b \\ (n,1) & (r,1) \end{array} \right\}$	číselné vektory (počet řádků, počet sloupců)
$E, E_{(n,n)}, E_n$	jednotková matice (n - tého stupně)
$\mathcal{A}(s), \mathcal{B}(q)$	konečné polynomy
	POZOR ! V a Z transformaci značeny v souladu se zvyklostmi velkými písmeny i obrazy funkcí.
$\alpha(s), \beta(q)$	racionální lomené funkce /RLF/ (podíl dvou polynomů), nekonečný polynom, rekurentní a kauzální řady
$\mathbb{A}(s), \mathbb{B}(q)$	polynomiální matice
$\mathfrak{a}(s), \mathfrak{b}(q)$	polynomiální matice RLF, matice rekurentních řad
$\mathbb{J}$	elementární matice, jednotka okruhu polynomiálních matic, $\det \mathbb{J} = \text{číslo}$
$\det A$	determinant matice
$\text{adj } A$	adjungovaná matice

$\text{rank } A$	...	hodnost matice
$\text{tr } A$	...	stopa matice
A^T, a^T	...	transpozice matice resp. vektoru
$A^{-1} = \frac{\text{adj } A}{\det A}$	...	inverze čtvercové regulární matice
A_P^{-1}	...	pravá pseudoinverze obdélníkové matice $A_P^{-1} = A^T (A A^T)^{-1}, \quad A A_P^{-1} = E$
A_L^{-1}	...	levá pseudoinverze obdélníkové matice $A_L^{-1} = (A^T A)^{-1} A^T, \quad A_L^{-1} A = E$
$\bar{a}, \bar{a}, \bar{A}$	...	komplexně sdružené číslo resp. vektor resp. matice
$\bar{\mathcal{A}}, \bar{a}, \bar{A}, \bar{a}$	...	sdružený polynom resp. RLF resp. polynomiální matice resp. matice RLF, $\bar{\mathcal{A}}(q) = \mathcal{A}(1/q)$ apod.
$\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{A}$	...	reciproký polynom resp. polynomiální matice $\tilde{\mathcal{A}} = q^n \bar{\mathcal{A}}$ apod.
$\mathcal{A}^*, a^*, A^*, a^*$	...	reflexe polynomu resp. RLF resp. polynomiální matice resp. matice RLF
a_+, a_-, a_+, a_-	...	složky součtového rozkladu RLF resp. matice RLF ; $a = a_+ + a_-$ apod.
$\mathcal{A}^+, \mathcal{A}^-, a^+, a^-$	...	faktory součinnového rozkladu polynomu resp. RLF ; $\mathcal{A} = \mathcal{A}^+ \mathcal{A}^-$ apod.
A_P^+, A_P^-	...	faktory pravého součinnového rozkladu polynomiální matice ; $A = A_P^- A_P^+$
A_L^+, A_L^-	...	faktory levého součinnového rozkladu polynomiální matice ; $A = A_L^+ A_L^-$

$\langle a, \bar{b} \rangle$. . . skalární součin RLF ;

$$\langle a, \bar{b} \rangle = \frac{1}{2\pi i} \int_{\zeta} a \bar{b} \frac{dq}{q}$$

$\langle a, \bar{b} \rangle$. . . skalární součin matic RLF

$$\langle a, \bar{b} \rangle = \frac{1}{2\pi i} \int_{\zeta} \text{tr } a \bar{b}^T \frac{dq}{q}$$

$\|a\|^2, \|b\|^2$. . . skalární čtverec RLF resp. matice RLF

$$\|a\|^2 = \langle a, a \rangle \quad \text{apod.}$$

$\text{Diag}(a_1, a_2, \dots, a_r, 0, \dots, 0)$. . . diagonální obecně obdélníková matice s vyjmenovanými prvky na hlavní diagonále
 (m,n)

$\text{Diag}(a_1, a_2, \dots, a_r, 0, \dots, 0)$. . . diagonální obecně obdélníková polynomiální matice s vyjmenovanými polynomiálními prvky na hlavní diagonále
 (m,n)

$\text{gcd}_k A, \text{gcd}_k \bar{A}$. . . největší společný dělitel všech subdeterminantů k-tého stupně matice A resp. $\bar{A}$

$K, \mathbb{K}$. . . kanonická diagonální forma matice

σ_y^2 . . . rozptyl signálu y

$S_{yy}(\omega)$. . . výkonová spektrální hustota signálu y

$\mathcal{L}(\cdot), \mathcal{L}^{-1}(\cdot)$. . . Laplaceova resp. inverzní Laplaceova
 traface

$\mathcal{Z}(\cdot), \mathcal{Z}^{-1}(\cdot)$. . . Z resp. inverzní Z-transformace
 argumentu

s . . . operátor Laplaceovy transformace

z, q = 1/z . . . operátor Z-transformace

ζ . . . jednotková kladně orientovaná kružnice

- ∂ stupeň polynomu, polynomiální matice
- $\eta(t)$ jednotkový Heavisideův skok ,

$$\eta(t) < \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$
- $\delta(t)$ jednotkový Dirackův impuls
- RLF racionální lomená funkce

1. Ú V O D

Práce se zabývá diskretním řízením lineárních dynamických systémů. Těžiště je v poněkud nestandardním přístupu k optimalizaci kvadratického kritéria.

Ačkoliv princip zpětné vazby a některé prvky automatické regulace jsou velmi staré, začala se teorie řízení výrazněji prosazovat až v období technické revoluce, zejména až na přelomu 19. a 20. století, v období, kdy bylo formulováno a dostatečně propracováno teoretické zázemí této disciplíny. Skutečný "boom" však zaznamenává těsně před a v průběhu druhé světové války. V posledních padesáti letech prošel vývoj bouřlivým vývojem zejména v technologické oblasti.

Nejprve se pozornost soustřeďovala na spojitě dynamické systémy řízené jednoduchými PID regulátory. Vývoj číslicové výpočetní techniky a potřeba řídit složité procesy dala vzniknout celé nové oblasti diskretně řízených systémů. Funkci regulátoru zde vykonává diskretně pracující prvek, číslicový počítač, který numericky zpracovává informaci o chování řízené regulované soustavy a vypočítává vhodné změny akční veličiny působící na tuto soustavu. Ještě před několika málo lety byl nedostatek vhodných řídicích počítačů brzdou aplikací tohoto druhu. Závratné tempo vývoje mikroprocesorové techniky a technologií prvků vysoké integrace způsobilo, že jsou v současné době tyto prvky snadno přístupné a diskretní systémy se staly samozřejmou součástí všech moderních řídicích systémů.

Vlivem tradičního matematického aparátu Laplaceovy transformace se i k diskretnímu popisu chování dynamických systémů začala

používat modifikace tohoto aparátu, tzv. Z-transformace [2, 3], [26-29]. Metoda pracuje s pojmem přenosu systému, který je chápán jako funkce komplexní proměnné. Řešení úloh optimálního řízení vede na poměrně složité výpočty, které navíc nejsou příliš vhodné pro algoritmizaci na číslicových počítačích. Tímto způsobem lze charakterizovat pouze přenosové vlastnosti systému, nikoliv jeho vnitřní chování. Nevýhoda se však z jiného pohledu jeví jako výrazná přednost přístupu nevyžadující pro syntézu optimálního řízení úplnou informaci o systému, ale pouze znalost jeho přenosových vlastností.

Snaha o popis a analýzu vnitřního chování systémů vedla ke stavové teorii založené na axiomatickém pojmu stavu systému [13, 34-41] a rozkladu jeho popisu na soustavu diferenciálních či diferenčních rovnic 1. řádu. Postup syntézy optimálního řízení lze takto snadněji algoritmizovat. Použitelnost metody je mnohotvárná - zahrnuje spojitě i diskrétní, jedno i víceparametrové systémy. Naopak její nevýhodou je potřeba úplné informace o stavu systému v každém časovém okamžiku. Až na výjimky však nejsou složky stavového vektoru reálných regulovaných soustav měřitelné, je proto nutné je z vnějšího chování dynamického systému rekonstruovat - estimovat, čímž složitost obvodu vzrůstá. Stav systému je navíc odhadován obvykle asymptoticky, což poněkud zhoršuje celkové dynamické vlastnosti obvodu. Další významnou nevýhodou tohoto přístupu jsou numericky náročné výpočty rekurentního řešení maticových rovnic Riccatiho typu.

Algebraický přístup spojuje výhody obou předchozích metod. Základními prvky popisu jsou polynomy, které chápeme nikoliv jako funkce, ale jako konečné posloupnosti jejich koeficientů. Konečné posloupnosti chápeme pak jako mocninné řady, které definují přenos dynamických systémů (Z-obraz váhové funkce) a lze je

vyjádřit podílem dvou polynomů. Rekurentní řady charakterizují lineární systémy, kauzální řady fyzikálně realizovatelné a stabilní řady pak stabilní dynamické systémy. Základní myšlenka algebraického přístupu k syntéze optimálního řízení využívá skutečnosti, že je možné s těmito polynomy pracovat zcela samostatně a tak algebru racionálních přenosů převést na jednodušší algebru polynomů. Základní operací optimalizace se stává řešení lineární diofantické polynomiální rovnice, které je snadno algoritmizovatelné pro numerický výpočet. Předností přístupu je úsporná a elegantní formulace úlohy a jejího řešení a kromě toho lze poměrně jednoduše analyzovat existenci, jednoznačnost a další důležité vlastnosti řešení dané úlohy.

Vícerozměrné (víceparametrové) systémy nejsou charakterizovány jedinou mocninnou řadou, ale maticí řad, resp. maticí racionálních lomených funkcí. Jejich přenosy lze chápat jako součin polynomiální matice a inverze jiné polynomiální matice, a to s ohledem na pořadí násobení. V tomto smyslu je teorie řízení vícerozměrných dynamických systémů přirozeným zobecněním teorie řízení jednorozměrných - místo s polynomy pracujeme s polynomiálními maticemi. Přestože je toto zobecnění zcela přirozené, není triviální. Předně, násobení polynomiálních matic není na rozdíl od polynomů komutativní, což znesnadňuje formulaci některých kauzálních vazeb. Komplikace vznikají při optimalizaci kvadratického kritéria zejména s penalizací akční veličiny. Problémy zobecnění jsou způsobeny hlavně okolností, že algebra operací s polynomy přechází na algebru operací s polynomiálními maticemi. Původně tak algebra tvořící obecně komutativní okruh přechází na okruh nekomutativní, navíc pouze parciální (není definován součin mezi libovolnými prvky definiční množiny). Řešení optimalizační úlohy není v těchto případech obecně jednoznačné, vykazuje jistou

strukturální neurčitost. Realizace závisí na jistém počtu volitelných parametrů. To na jedné straně znesnadňuje algoritmizaci syntézy, na druhé straně však umožňuje jistou volnost a variabilitu konkrétního řešení, které může splnit navíc i některé další požadavky na vlastnosti regulačního obvodu.

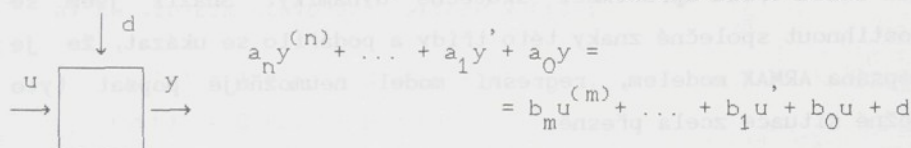
Pravděpodobně první prací vůbec, v níž se objevuje myšlenka použití polynomiálních rovnic pro syntézu optimálního řízení, je práce [44]. Některé prvky tohoto přístupu se vyskytují v literatuře již delší dobu. Poměrně známá je možnost využití této metody pro úlohy eliminace obecného rozvážení dynamických systémů v konečném a minimálním počtu regulačních kroků [3, 25, 44, 46], méně již pro kvadraticky optimální řízení [15, 19, 44, 46] a stochastické řízení [45]. Monotematicky se zabývá algebraickou teorií lit. [15], problematikou řízení víceparametrových systémů [15, 21].

Z práce [15] jsem převzal základní princip a využil některé publikované algoritmy, na které se v práci odvolávám, některé operace řeším algoritmicky poněkud odlišně. Přístup k syntéze řízení je však jiný, vychází v hlavních rysech z práce [19]. Výklad návrhu optimálního řízení je oproti [19] pojat trochu odlišným způsobem, rozvíjejícím popis přenosových vlastností systému pomocí racionálních funkcí. Rozdílný je také uvažovaný model a výchozí předpoklady návrhu. Zde uvedený přístup k syntéze víceparametrových systémů je zobecněním teorie syntézy jednoparametrových systémů, koresponduje s [21], řeší však úlohu v obecnějším rozsahu - včetně optimalizace kritéria s penalizací akční veličiny, s obecně různým počtem vstupních a výstupních signálů regulované soustavy a opět se strukturálně odlišným modelem.

Poznamenejme, že kvůli větší srozumitelnosti textu jsou jednotlivé úvahy rozvíjeny pro systémy jednoparametrové s následným paralelním rozšířením i na systémy víceparametrové.

2. MODEL DYNAMICKÉHO SYSTÉMU ZATÍŽENÉHO OBEČNÝM ŠUMEM

Tuto kapitolu jsem věnoval otázce modelu dynamického systému, který v dalších kapitolách při syntéze optimálního řízení uvažuji. Budiž tato kapitola chápána jako příspěvek k diskusi na téma adekvátnosti popisu chování skutečného reálného systému zatíženého provozním šumem prostřednictvím regresního modelu



nebo modelu ARMAX

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b_m u^{(m)} + \dots + b_1 u' + b_0 u + c_r d^{(r)} + \dots + c_1 d' + c_0 d$$

Snažím se v této části přesvědčit čtenáře o přednostech ARMAX modelu, se kterým pak nadále pracuji. Musím však připustit, že ani jeden z těchto modelů nemůže popsat chování reálného systému absolutně věrně. Za uvedených předpokladů je však ARMAX model nesporně dokonalejší (ale také složitější).

Pokud přijmete toto mé tvrzení, můžete bez rizika ztráty logiky výkladu přeskóčit následující, poněkud "ponuře" se tvářící kapitolu a pokračovat kapitolou 3.

Pro čtenáře, kteří jsou ochotni sledovat můj výklad a argumentaci, nejprve jednoduché uvedení do problému (a také jeho

pojetí), které se snažím dále rozvíjet. Myšlenka, ze které jsem se snažil vyvodit obecné závěry vznikla při modelování jednoduchého dynamického systému zatíženého šumem. Zvolil jsem stavové vyjádření, realizoval simulační model a ke každé složce stavového vektoru x_i jsem přičetl jednu nezávislou složku šumu v_i . Všechny složky takto vzniklého vektoru šumu byly vzájemně nezávislé. Získal jsem tak model obecné reálné soustavy, jak označuji, zatížené aditivním šumem. Takto vzniklý model však přirozeně nebyl jediný možný. Při každém jiném stavovém vyjádření získáme jiný simulační model, navíc můžeme popsaným způsobem aditivně zatěžovat nejen stavové složky, ale i jejich derivace. Získáme tak celou třídu aproximací skutečné dynamiky. Snažil jsem se postihnout společné znaky této třídy a podařilo se ukázat, že je popsána ARMAX modelem, regresní model neumožňuje popsat tyto možné situace zcela přesně.

Důležitou charakteristikou v mnoha úlohách lineární regulace, zejména v časté stochastické úloze minimalizace rozptylu σ_y^2 výstupní veličiny y regulované soustavy, je výkonová spektrální hustota $S_{yy}(\omega)$

$$\sigma_y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_{yy}(\omega) d\omega \rightarrow \min. \quad (2.1)$$

Prostřednictvím této charakteristiky budeme posuzovat adekvátnost chování reálného objektu a modelu. Regulovanou soustavu chápeme pro účely tohoto výkladu jako obecný lineární jednoparametrový dynamický systém s konstantními koeficienty. Jednoparametrový systém je uvažován pouze z důvodu jednoduchosti úvah, rozšíření i na systémy víceparametrové je naznačeno v závěru kapitoly.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A x(t) + B u(t) \\ y(t) &= C x(t) + D u(t) \end{aligned} \quad \begin{array}{c} u \rightarrow \boxed{f(s)} \rightarrow y \end{array} \quad (2.2)$$

Dynamický systém zatížený obecným šumem chápeme v souladu s předcházejícím jako zatížení každé složky stavového vektoru šumovou složkou $v_i(t)$ charakteru bílého šumu s nulovou střední hodnotou,

$$v(t) = [v_1(t), v_2(t), \dots, v_n(t)]^T, \quad (2.3)$$

$v_i(t) \dots$ vzájemně nezávislé.

Předpokládejme, že složky vektoru $v(t)$ se přičítají :

a) ke složkám stavového vektoru $\dot{x}(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A x(t) + B u(t) + v(t) \\ y(t) &= C x(t) + D u(t) \end{aligned} \quad (2.4)$$

b) ke složkám stavového vektoru $x(t)$:

$$\begin{aligned} x(t) &= A x(t) + B u(t) + A v(t) \\ y(t) &= C x(t) + D u(t) + C v(t) \end{aligned} \quad (2.5)$$

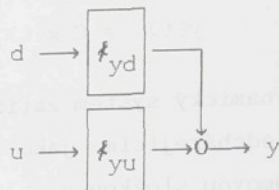
Vzhledem k předpokladům platí

$$\begin{aligned} S_{v_i v_i}(\omega) &= 1, \quad S_{v_i u}(\omega) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ S_{v_i v_j}(\omega) &= 0 \quad \text{pro } i \neq j. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Je zřejmé, že vzhledem k možné regulární transformaci stavového popisu není uvedena představa jednoznačná.

Hledejme náhradní dynamický systém, model, ve kterém je vektorový šum $v(t)$ nahrazen jediným skalárním bílým šumem $d(t)$ s

nulovou střední hodnotou, nezávislým na akční veličině $u(t)$, který prochází filtrem $f_{yd}(s)$ a aditivně zatěžuje regulovanou veličinu $y(t)$. Požadavkem je, aby výkonové spektrální hustoty $S_{yy}(\omega)$ takto chápaného modelu a vlastního systému byly shodné.



Vzhledem k principu superpozice, který v tomto případě platí (lineární systém), je obrazový přenos $f_{yu}(s) = B(s)/A(s)$ jednoznačně dán diferenciálním popisem uvažovaného systému (2.2), nezávislým na vstupujícím šumu a je invariantní i vzhledem k možné regulární transformaci stavového popisu

$$f_{yu}(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = C(sE-A)^{-1}B + D = C \frac{\text{adj}(sE-A)}{\det(sE-A)} B + D \quad (2.7)$$

Diskutujeme proto dále pouze obrazový přenos $f_{yd}(s) = \mathcal{C}(s)/\mathcal{A}(s)$, který je jistě (na rozdíl od předcházejícího přenosu) jistou funkcí jednak uvažovaného místa působení šumu, jednak funkcí možné regulární transformace stavového popisu. Pro tyto účely můžeme bez újmy na obecnosti uvažovat $u(t) = 0$. Potom :

$$\begin{aligned} S_{yy}(\omega) &= |f_{yd}(i\omega)|^2 S_{dd}(\omega) + |f_{yu}(i\omega)|^2 S_{uu}(\omega) = \\ &= \begin{bmatrix} S_{dd}(\omega) = 1 \\ S_{uu}(\omega) = 0 \end{bmatrix} = |f_{yd}(i\omega)|^2 = f_{yd}(i\omega) f_{yd}(-i\omega) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Vyjádříme dále za výše uvedených předpokladů výkonovou spektrální hustotu $S_{yy}(\omega)$ dynamického systému zatíženého obecným šumem a naznačeným způsobem provedme diskusi přenosu $f_{yd}(s)$.

2.1 ADITIVNÍ BÍLÝ ŠUM ZATĚŽUJÍCÍ VEKTOR $x'(t)$

V tomto případě předpokládáme, že složky šumového vektoru $v(t)$ se přičítají vždy k derivacím stavových proměnných bez ohledu na možnou regulární transformaci stavového vyjádření. Stavový popis potom předpokládáme ve tvaru

$$x'(t) = TAT^{-1}x(t) + TB u(t) + v(t) \quad , \quad (2.9)$$

$$y(t) = CT^{-1}x(t) + D u(t) \quad ,$$

T ... regulární transformační matice .

O modelu, který je z hlediska výkonové spektrální hustoty $S_{yy}(\omega)$ ekvivalentní uvažovanému systému (2.9), a ve kterém je působení šumového vektoru $v(t)$ nahrazeno působením skalárního bílého šumu $d(t)$ prostřednictvím filtru $f_{yd}(s)$ (viz diskuse kap.2), lze vyslovit následující větu.

Věta V2.1

Obeční lineární jednoparametrový dynamický systém s konstantními koeficienty zatížený aditivním bílým šumem

$$x'(t) = TAT^{-1}x(t) + TB u(t) + v(t) \quad ,$$

$$y(t) = CT^{-1}x(t) + D u(t) \quad , \quad (2.10)$$

kde $v(t) = [v_1(t), v_2(t), \dots, v_n(t)]^T$,

$$v_j(t) \quad , \quad j = 1, 2, \dots, n \quad ,$$

n -tice vzájemně nezávislých bílých šumů s nulovou střední hodnotou, nezávislých na $u(t)$,

T ... regulární transformační matice ,

lze nahradit z hlediska výkonové spektrální hustoty $S_{yy}(\omega)$ ekvivalentním ARMAX modelem

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b_m u^{(m)} + \dots + b_1 u' + b_0 u + c_r d^{(r)} + \dots + c_1 d' + c_0 d \quad (2.11)$$

d ... skalární Gaussovský bílý šum s nulovou střední hodnotou nezávislý na $u(t)$.

V Laplaceově transformaci (při zleva nulových počátečních podmínkách)

$$y(s)[a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0] = u(s)[b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0] + d(s)[c_r s^r + \dots + c_1 s + c_0] \quad ,$$

$$y(s) = \frac{B(s)}{A(s)} u(s) + \frac{C(s)}{A(s)} d(s) = \tilde{f}_{yu}(s) u(s) + \tilde{f}_{yd}(s) d(s) \quad , \quad (2.12)$$

$$A(s) = a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0 \quad , \quad B(s) = b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0 \quad ,$$

$$C(s) = c_r s^r + \dots + c_1 s + c_0 \quad .$$

- 1) Určení polynomů $A(s)$, $B(s)$, $C(s)$ modelu je v rámci minimálně fázových $\tilde{f}_{yd}(s)$ jednoznačné

$$A(s) = \det(sE - A) \quad , \quad (2.13)$$

$$B(s) = C \operatorname{adj}(sE - A) B + D A(s) \quad , \quad (2.14)$$

$$C(i\omega) C(-i\omega) = C \operatorname{adj}(i\omega E - A) T^{-1} T^{-T} \operatorname{adj}^T(-i\omega E - A) C^T \quad (2.15)$$

- 2) Polynomy $A(s)$, $B(s)$ jsou invariantní vůči volbě transformační matice T , polynom $C(s)$ pouze v případě, že se jedná o transformaci ortogonální ($T^{-1} T^{-T} = E$).
- 3) V případě neortogonální transformace je třída možných polynomů $C(s)$ dána vztahem (2.15).
- 4) Pro dynamické systémy řádu vyššího než prvního ($n > 1$), do třídy (2.15) případ $C(s) = 1$ nepatří. Neexistuje tedy

taková volba stavového vyjádření, aby bylo možné popsat proces regresním modelem, $\mathcal{E}(s) = 1$.

Důkaz věty viz Appendix 2.

Příklad 2.1

Je dán dynam. systém popsaný diferenciální rovnicí

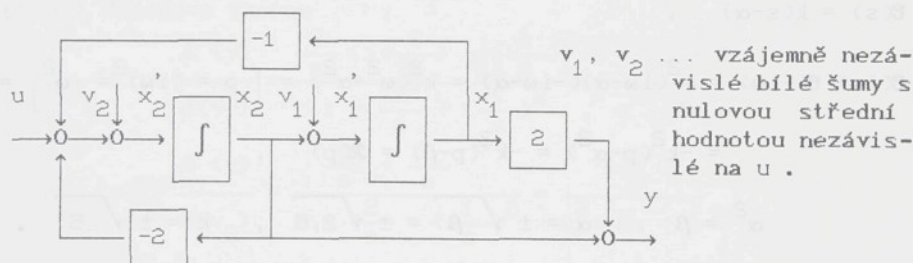
$$y'' + 2y' + y = u' + 2u.$$

Uvažujme jeho stavový popis v kanonické formě vzhledem k řízení a zatížení šumem podle (2.10)

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} u(t) + \mathbf{v}(t), \quad \mathbf{v}(t) = \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix}, \\ y(t) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} u(t), \end{aligned}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [2 \quad 1], \quad \mathbf{D} = [0].$$

Jeho strukturální simulační schéma



Podle (2.7)

$$\mathcal{F}_{yu}(s) = \frac{\mathcal{B}(s)}{\mathcal{A}(s)} = \mathbf{C} \frac{\text{adj}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})}{\det(s\mathbf{E} - \mathbf{A})} \mathbf{B} + \mathbf{D} = [2 \quad 1] \frac{\text{adj} \begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s+2 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s+2 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}}{s^2 + 2s + 1} \begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \dots = \frac{s+2}{s^2 + 2s + 1},$$

$$A(s) = s^2 + 2s + 1, \quad B(s) = s + 2.$$

Pro určení polynomu $B(s)$ obrazového přenosu $k_{yd}(s) = B(s)/A(s)$ platí (2.15)

$$B(i\omega) B(-i\omega) = C \operatorname{adj}(i\omega E - A) T^{-1} T^{-T} \operatorname{adj}^T(-i\omega E - A) C^T, \quad T = E,$$

$$i\omega E - A = \begin{bmatrix} i\omega & -1 \\ 1 & i\omega+2 \end{bmatrix}, \quad \operatorname{adj}(i\omega E - A) = \begin{bmatrix} i\omega+2 & 1 \\ -1 & i\omega \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} B(i\omega) B(-i\omega) &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i\omega+2 & 1 \\ -1 & i\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i\omega+2 & -1 \\ 1 & -i\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \dots = \\ &= 5\omega^2 + 13 = \left[(i\omega)^2 = p \right] = -5p + 13 = R(p). \end{aligned}$$

Kořen polynomu $R(p)$ je $\beta = 13/5 = 2,6$. Polynom $B(s)$ je zřejmě 1. stupně, pro jeho kořen α platí

$$B(s) = k(s - \alpha),$$

$$\begin{aligned} B(i\omega) B(-i\omega) &= k^2 (i\omega - \alpha)(-i\omega - \alpha) = k^2 (\omega^2 + \alpha^2) = \left[p = (i\omega)^2 = -\omega^2 \right] = \\ &= -k^2 (p - \alpha^2) = -k^2 (p - \beta) = R(p), \end{aligned}$$

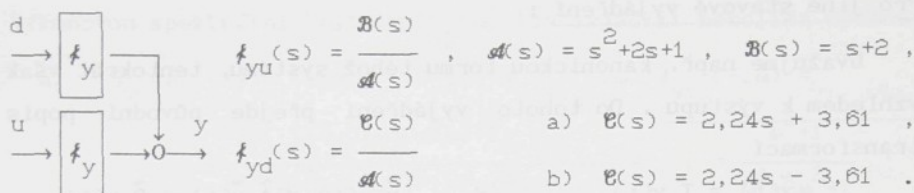
$$\alpha^2 = \beta, \quad \alpha = \pm \sqrt{\beta} = \pm \sqrt{2,6}, \quad k = \pm \sqrt{5}.$$

(Nejednoznačnost rozkladu viz diskuse Appendix 2.)

$$a) \quad B(s) = \sqrt{5} (s + \sqrt{2,6}) \approx 2,24 s + 3,61,$$

$$b) \quad B(s) = \sqrt{5} (s - \sqrt{2,6}) \approx 2,24 s - 3,61.$$

Z hlediska $S_{yy}(\omega)$ jsme našli dva ekvivalentní modely



Pouze varianta ad a) je však z hlediska $f_{yd}(s)$ fázově minimální.

Pozn.: Je zřejmé, že vyhovují i varianty $C(s) \rightarrow -C(s)$, což je v souladu s fyzikálními vlastnostmi uvažovaného bílého šumu d .

Výkonová spektrální hustota $S_{yy}(\omega)$ potom

$$S_{yy}(\omega) = f_{yd}(i\omega) f_{yd}(-i\omega) = \frac{C(i\omega) C(-i\omega)}{A(i\omega) A(-i\omega)} = \dots = \frac{5\omega^2 + 13}{\omega^4 + 2\omega^2 + 1} .$$

Správnost určení $S_{yy}(\omega)$ lze ověřit i jiným způsobem. Z uvedeného strukturálního simulačního schématu systému lze (uvažujeme-li přenos integrátoru $1/s$) určit přenosy prostředky blokové algebry pomocí Masonova vzorce

$$f_{yv_1}(s) = \frac{\mathcal{L}\langle y \rangle}{\mathcal{L}\langle v_1 \rangle} = \frac{\frac{2}{s} (1 + \frac{2}{s}) - (\frac{1}{s})^2}{1 + \frac{2}{s} + (\frac{1}{s})^2} = \frac{2s + 3}{s^2 + 2s + 1} ,$$

$$f_{yv_2}(s) = \frac{\mathcal{L}\langle y \rangle}{\mathcal{L}\langle v_2 \rangle} = \frac{\frac{2}{s} + \frac{1}{s}}{1 + \frac{2}{s} + (\frac{1}{s})^2} = \frac{s + 2}{s^2 + 2s + 1} ,$$

S ohledem na přijaté předpoklady pak

$$S_{yy}(\omega) = f_{yv_1}(i\omega) f_{yv_1}(-i\omega) + f_{yv_2}(i\omega) f_{yv_2}(-i\omega) =$$

$$= \frac{[2(i\omega) + 3][2(-i\omega) + 3] + [i\omega + 2][-i\omega + 2]}{[(i\omega)^2 + 2i\omega + 1][(i\omega)^2 - 2i\omega + 1]} = \dots = \frac{5\omega^2 + 13}{\omega^4 + 2\omega^2 + 1} .$$

(Srovnejte !)

Pro jiné stavové vyjádření :

Uvažujme např. kanonickou formu téhož systému, tentokrát však vzhledem k výstupu. Do tohoto vyjádření přejde původní popis transformací

$$\tilde{x}(t) = T x(t) \quad , \quad \tilde{x}'(t) = \tilde{A} \tilde{x}(t) + \tilde{B} u(t) \quad ,$$

$$x(t) = T^{-1} \tilde{x}(t) \quad , \quad y(t) = \tilde{C} \tilde{x}(t) + D u(t) \quad .$$

kde

$$T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \quad ,$$

$$\tilde{A} = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \dots = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad ,$$

$$\tilde{B} = TB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad ,$$

$$\tilde{C} = CT^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad ,$$

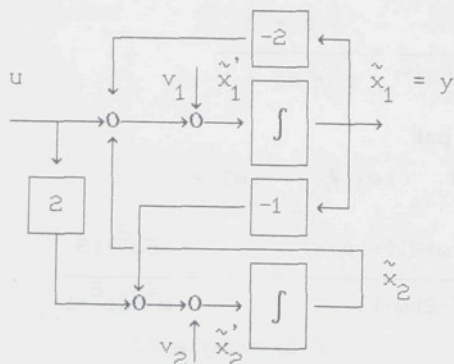
$$D = 0$$

Uvažujme opět aditivní šum $v(t)$ zatěžující v tomto případě transformovaný vektor derivací stavových proměnných $\tilde{x}'(t)$

$$\tilde{x}'(t) = \tilde{A} \tilde{x}(t) + \tilde{B} u(t) + v(t) \quad ,$$

$$\tilde{x}_1' = -2 \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 + u + v_1 \quad ,$$

$$\tilde{x}_2' = -\tilde{x}_1 + 2u + v_2 \quad , \quad y = \tilde{x}_1 \quad .$$



Strukturální schéma

$$f_{yv_1}(s) = \frac{\mathcal{L}\{y\}}{\mathcal{L}\{v_1\}} = \frac{s}{s^2 + 2s + 1} \quad ,$$

$$f_{yv_2}(s) = \frac{\mathcal{L}\{y\}}{\mathcal{L}\{v_2\}} = \frac{1}{s^2 + 2s + 1} \quad .$$

Výkonovou spektrální hustotu $S_{yy}(\omega)$ lze vyjádřit několika způsoby

$$\begin{aligned} \text{a) } S_{yy}(\omega) &= f_{yv_1}(i\omega) f_{yv_1}(-i\omega) + f_{yv_2}(i\omega) f_{yv_2}(-i\omega) = \\ &= \frac{(i\omega)(-i\omega)+1}{[(i\omega)^2+2i\omega+1][(i\omega)^2-2i\omega+1]} = \dots = \frac{\omega^2+1}{\omega^4+2\omega^2+1}, \end{aligned}$$

nebo

$$\begin{aligned} \text{b) } i\omega E - \tilde{A} &= \begin{bmatrix} i\omega+2 & -1 \\ 1 & i\omega \end{bmatrix}, \quad \text{adj}(i\omega E - \tilde{A}) = \begin{bmatrix} i\omega & 1 \\ -1 & i\omega+2 \end{bmatrix}, \\ \det(i\omega E - \tilde{A}) &= (i\omega)^2 + 2i\omega + 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{yy}(\omega) &= \tilde{C} \frac{\text{adj}(i\omega E - \tilde{A}) \text{adj}^T(-i\omega E - \tilde{A})}{\det(i\omega E - \tilde{A}) \det(-i\omega E - \tilde{A})} \tilde{C}^T = \\ &= \frac{[1 \ 0] \begin{bmatrix} i\omega & 1 \\ -1 & i\omega+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i\omega & -1 \\ 1 & -i\omega+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}{[(i\omega)^2+2i\omega+1][(i\omega)^2-2i\omega+1]} = \dots = \frac{\omega^2+1}{\omega^4+2\omega^2+1}, \end{aligned}$$

případně

$$\begin{aligned} \text{c) } S_{yy}(\omega) &= C \frac{\text{adj}(i\omega E - A) T^{-1} T^T \text{adj}^T(-i\omega E - A)}{\det(i\omega E - A) \det(-i\omega E - A)} C^T = \\ &= \frac{[2 \ 1] \begin{bmatrix} i\omega+2 & 1 \\ -1 & i\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i\omega+2 & -1 \\ 1 & -i\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}{[(i\omega)^2+2i\omega+1][(i\omega)^2-2i\omega+1]} = \\ &= \dots = \frac{\omega^2+1}{\omega^4+2\omega^2+1}. \end{aligned}$$

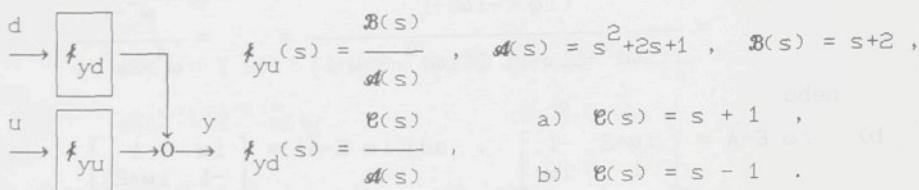
Určení polynomu $\mathcal{U}(s)$ obrazového přenosu $f_{yd}(s) = \mathcal{U}(s)/\mathcal{A}(s)$ hledaného modelu je obdobné jako v předcházejícím případě

$$\mathcal{U}(i\omega) \mathcal{U}(-i\omega) = \omega^2 + 1 = [(i\omega)^2 + p] = 1 - p = \mathcal{R}(p).$$

Kořen polynomu $\mathcal{R}(p)$ je $\beta=1$. Polynom $\mathcal{U}(s)$ je zřejmě 1. stupně, jeho kořen α je

$$\begin{aligned} \text{buď a) } \alpha &= -1, & \mathcal{U}(s) &= s + 1, \\ \text{nebo b) } \alpha &= +1, & \mathcal{U}(s) &= s - 1. \end{aligned}$$

Nalezli jsme v tomto případě opět dva modely, varianta ad a) je z hlediska $f_{yd}(s)$ fázově minimální, varianta ad b) naopak fázově neminimální.



Ukázali jsme, že regulární transformace stavového vektoru ovlivňuje pouze polynom $\mathcal{U}(s)$ modelu. Třída polynomů $\mathcal{U}(s)$ pro všechny možné regulární transformace je dána vztahem (2.15).

□ KONEC PŘÍKLADU

2.2 ADITIVNÍ BÍLÝ ŠUM ZATĚŽUJÍCÍ VEKTOR $x(t)$

V tomto případě předpokládáme, že složky šumového vektoru $v(t)$ se přičítají vždy ke složkám stavového vektoru $x(t)$ bez ohledu na možnou regulární transformaci stavového vyjádření. Stavový popis systému předpokládáme podle (2.16). Závěry kapitoly 2.1 platí shodně i v tomto případě, pouze s tím, že třída možných polynomů $\mathcal{B}(s)$ modelu je dána jiným vztahem (2.21). Lze proto formulovat analogickou větu.

Věta V2.2

Obecný lineární jednoparametrový dynamický systém s konstantními koeficienty zatížený aditivním bílým šumem

$$\dot{x}(t) = TAT^{-1}x(t) + TB u(t) + TAT^{-1}v(t) \quad , \quad (2.16)$$

$$y(t) = CT^{-1}x(t) + CT^{-1}v(t) + D u(t) \quad ,$$

kde $v(t) = [v_1(t), v_2(t), \dots, v_n(t)]^T$,
 $v_j(t)$, $j = 1, 2, \dots, n$

n -tice vzájemně nezávislých bílých šumů s nulovou střední hodnotou, nezávislých na $u(t)$,

$T \dots$ regulární transformační matice ,

lze nahradit z hlediska výkonové spektrální hustoty $S_{yy}(\omega)$ ekvivalentním ARMAX modelem

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b_m u^{(m)} + \dots + b_1 u' + b_0 u + \quad (2.17)$$

$$+ c_r d^{(r)} + \dots + c_1 d' + c_0 d \quad ,$$

$d \dots$ skalární bílý šum s nulovou střední hodnotou

nezávislý na $u(t)$.

V Laplaceově transformaci (při zleva nulových počátečních podmínkách)

$$y(s)[a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0] = u(s)[b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0] +$$

$$+ d(s)[c_r s^r + \dots + c_1 s + c_0] \quad ,$$

$$y(s) = \frac{B(s)}{A(s)} u(s) + \frac{C(s)}{A(s)} d(s) = f_{yu}(s) u(s) + f_{yd}(s) d(s) \quad , \quad (2.18)$$

$$A(s) = a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0 \quad , \quad B(s) = b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0 \quad ,$$

$$C(s) = c_r s^r + \dots + c_1 s + c_0 \quad .$$

1) Určení polynomů $A(s)$, $B(s)$, $C(s)$ modelu je v rámci minimálně fázových $f_{yd}(s)$ jednoznačné

$$A(s) = \det(sE - A) \quad , \quad (2.19)$$

$$B(s) = C \operatorname{adj}(sE - A) B + D A(s) \quad , \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(i\omega) \mathcal{B}(-i\omega) &= C [\text{adj}(i\omega E - A) A + \det(i\omega E - A) E] T^{-1} T^{-T} \cdot \\ &\cdot [\text{adj}(-i\omega E - A) A + \det(-i\omega E - A) E] T^T C^T . \\ &\quad (2.21) \end{aligned}$$

- 2) Polynomy $\mathcal{A}(s)$, $\mathcal{B}(s)$ jsou invariantní vůči volbě transformační matice T , polynom $\mathcal{B}(s)$ pouze v případě, že se jedná o transformaci ortogonální ($T^{-1} T^{-T} = E$).
- 3) V případě neortogonální transformace je třída možných polynomů $\mathcal{B}(s)$ dána vztahem (2.21).
- 4) Do třídy (2.21) případ $\mathcal{B}(s) = 1$ nepatří. Neexistuje tedy taková volba stavového vyjádření, aby bylo možné popsat proces regresním modelem,

$$c_0 = 1; c_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, r.$$

Důkaz věty viz Appendix 2.

Pozn.:

- * Poušimněte si, že tvrzení ad 4) platí na rozdíl od V2.1 i pro $n = 1$.
- * Příklad aditivního šumu uvažovaného v této kapitole obsahuje obecně i případ, že bílý šum zatěžuje přímo výstupní signál $y(t)$.

Příklad 2.2

Je dán dynam. systém popsany diferenciální rovnicí

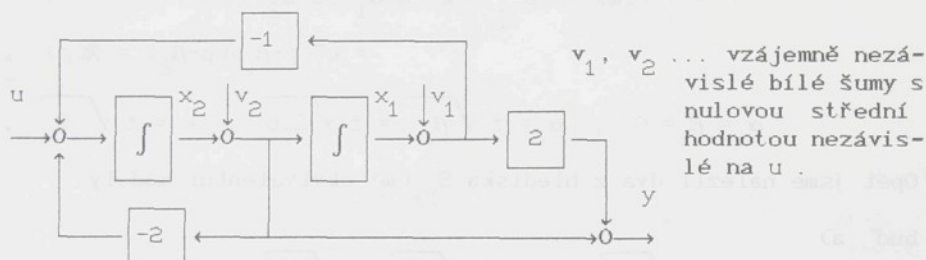
$$y'' + 2y' + y = u' + 2u.$$

Uvažujme jeho stavový popis v kanonické formě vzhledem k řízení a zatížení šumem podle (2.16)

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A x(t) + B u(t) + A v(t) \quad , \quad v(t) = \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} \quad , \\ y(t) &= C x(t) + D u(t) + C v(t) \quad , \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad C = [2 \ 1] \quad , \quad D = [0] \quad .$$

Jeho strukturální simulační schéma



Podle (2.7)

$$\begin{aligned} f_{yu}(s) &= \frac{B(s)}{A(s)} = C \frac{\text{adj}(sE-A)}{\det(sE-A)} B + D = \dots = \frac{s+2}{s^2+2s+1} \quad , \\ A(s) &= s^2+2s+1 \quad , \quad B(s) = s+2 \quad . \end{aligned}$$

Podle (2.21), jestliže $T = E$

$$\mathcal{E}(i\omega) \mathcal{E}(-i\omega) = M(i\omega) M^T(-i\omega) \quad ,$$

$$M(i\omega) = C [\text{adj}(i\omega E-A) A + \det(i\omega E-A) E] =$$

$$= [2 \ 1] \left\{ \begin{bmatrix} i\omega+2 & 1 \\ -1 & i\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} + [(i\omega)^2+2(i\omega)+1] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} =$$

$$= \dots = [2(i\omega)^2+3i\omega, (i\omega)^2+2i\omega] \quad ,$$

$$\mathcal{E}(i\omega) \mathcal{E}(-i\omega) = [2(i\omega)^2+3i\omega, (i\omega)^2+2i\omega] [2(i\omega)^2+3i\omega, (i\omega)^2+2i\omega]^T =$$

$$= \dots = 5(i\omega)^4-13(i\omega)^2 = 5\omega^4+13\omega^2 \quad .$$

Pro určení polynomu $\mathcal{E}(s)$ obrazového přenosu $f_{yd}(s) = \mathcal{E}(s)/A(s)$ je nutné provést rozklad

$$\mathcal{E}(i\omega) \mathcal{E}(-i\omega) = 5\omega^4+13\omega^2 = [(i\omega)^2 = p] = 5p^2-13p = \mathcal{R}(p) \quad .$$

Kořeny polynomu $\mathcal{X}(p)$ jsou $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 2,6$. Polynom $\mathcal{B}(s)$ je zřejmě druhého stupně, pro jeho kořeny α_1 , α_2 platí

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(s) &= k(s-\alpha_1)(s-\alpha_2) \quad , \\ \mathcal{B}(i\omega)\mathcal{B}(-i\omega) &= k^2(i\omega-\alpha_1)(i\omega-\alpha_2)(-i\omega-\alpha_1)(-i\omega-\alpha_2) = \dots = \\ &= [(i\omega)^2 = p] = k^2(p-\alpha_1^2)(p-\alpha_2^2) = \\ &= k^2(p-\beta_1)(p-\beta_2) = \mathcal{X}(p) \quad ,\end{aligned}$$

$$\alpha_1 = \beta_1 = 0 \quad , \quad \alpha_2 = \pm \sqrt{\beta_2} = \pm \sqrt{2,6} \quad , \quad k = \pm \sqrt{5} \quad .$$

Opět jsme našli dva z hlediska $S_{yy}(\omega)$ ekvivalentní modely

buď a)

$$\alpha_1 = 0 \quad , \quad \alpha_2 = -\sqrt{2,6} \quad , \quad \mathcal{B}(s) = \sqrt{5} s(s + \sqrt{2,6}) \approx s(2,24s + 3,61)$$

nebo b)

$$\alpha_1 = 0 \quad , \quad \alpha_2 = +\sqrt{2,6} \quad , \quad \mathcal{B}(s) = \sqrt{5} s(s - \sqrt{2,6}) \approx s(2,24s - 3,61) \quad .$$

Varianta ad a) odpovídá fázově minimálnímu přenosu $f_{yd}(s)$.

$$f_{yu}(s) = \frac{\mathcal{B}(s)}{\mathcal{A}(s)} = \frac{s+2}{s^2+2s+1} \quad ,$$

$$f_{yd}(s) = \frac{\mathcal{B}(s)}{\mathcal{A}(s)} = \frac{s(2,24s+3,61)}{s^2+2s+1} \quad .$$

Z fyzikálních vlastností uvažovaného bílého šumu plyne, že vyhovuje i varianta $\mathcal{B}(s) \rightarrow -\mathcal{B}(s)$, což je i příčinou nejednoznačnosti $k = \pm \sqrt{5}$. Výkonová spektrální hustota $S_{yy}(\omega)$ je u všech nalezených modelů stejná a je dána vztahem

$$S_{yy}(\omega) = f_{yd}(i\omega) f_{yd}(-i\omega) = \frac{\mathcal{B}(i\omega) \mathcal{B}(-i\omega)}{\mathcal{A}(i\omega) \mathcal{A}(-i\omega)} = \dots = \frac{5\omega^4 + 13\omega^2}{\omega^4 + 2\omega^2 + 1} \quad .$$

Určenou $S_{yy}(\omega)$ lze potvrdit následující souvislostí. Z uvedeného

strukturálního stavového schématu systému určíme prostředky blokové algebry pomocí Masonova vzorce přenosy

$$f_{yV_1}(s) = \frac{Z(y)}{Z(v_1)} = \frac{2(1 + \frac{2}{s}) - \frac{1}{s}}{1 + \frac{2}{s} + (\frac{1}{s})^2} = \frac{2s^2 + 3s}{s^2 + 2s + 1},$$

$$f_{yV_2}(s) = \frac{Z(y)}{Z(v_2)} = \frac{1 + \frac{2}{s}}{1 + \frac{2}{s} + (\frac{1}{s})^2} = \frac{s^2 + 2s}{s^2 + 2s + 1},$$

S ohledem na přijaté předpoklady pak

$$\begin{aligned} S_{yy}(\omega) &= f_{yV_1}(i\omega) f_{yV_1}(-i\omega) + f_{yV_2}(i\omega) f_{yV_2}(-i\omega) = \\ &= \frac{[2(i\omega)^2 + 3(i\omega)][2(i\omega)^2 - 3(i\omega)] + [(i\omega)^2 + 2(i\omega)][(i\omega)^2 - 2(i\omega)]}{[(i\omega)^2 + 2(i\omega) + 1][(i\omega)^2 - 2(i\omega) + 1]} = \\ &= \dots = \frac{5\omega^4 + 13\omega^2}{\omega^4 + 2\omega^2 + 1}. \quad (\text{Srovnejte !}) \end{aligned}$$

Pro jiné stavové vyjádření :

Uvažujme např. kanonickou formu téhož systému vzhledem k výstupu. Do tohoto vyjádření přejde původní popis transformací

$$\tilde{x}(t) = T x(t), \quad \tilde{x}'(t) = \tilde{A} \tilde{x}(t) + \tilde{B} u(t) + \tilde{A} v(t),$$

$$x(t) = T^{-1} \tilde{x}(t), \quad y(t) = \tilde{C} \tilde{x}(t) + D u(t) + \tilde{C} v(t).$$

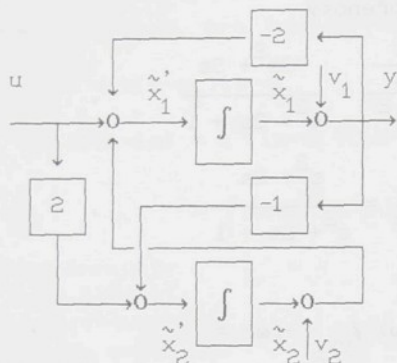
$$\text{kde } T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{A} = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \dots = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{B} = TB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{C} = CT^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = 0.$$

Strukturální schéma pak



$$f_{y v_1}^{(s)} = \frac{\mathcal{L}\{y\}}{\mathcal{L}\{v_1\}} = \frac{s^2}{s^2 + 2s + 1},$$

$$f_{y v_2}^{(s)} = \frac{\mathcal{L}\{y\}}{\mathcal{L}\{v_2\}} = \frac{s}{s^2 + 2s + 1}.$$

Polynomy $\mathcal{A}(s)$, $\mathcal{B}(s)$ se transformací nezmění, polynom $\mathcal{C}(s)$ podle vztahu (2.21)

$$\mathcal{C}(i\omega) \mathcal{C}(-i\omega) = \tilde{\mathcal{M}}(i\omega) \tilde{\mathcal{M}}^T(-i\omega),$$

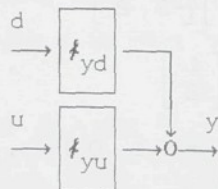
$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{M}}(i\omega) &= \mathcal{M}(i\omega) T^{-1} = \begin{bmatrix} 2(i\omega)^2 + 3(i\omega) & (i\omega)^2 + 2(i\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \\ &= \dots = [(i\omega)^2, i\omega] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(i\omega) \mathcal{C}(-i\omega) &= [(i\omega)^2, i\omega] [(i\omega)^2, -i\omega]^T = (i\omega)^4 - (i\omega)^2 = \omega^4 - \omega^2 = \\ &= [(i\omega)^2 = p] = p(p-1) = \mathcal{R}(p). \end{aligned}$$

Kořeny polynomu $\mathcal{R}(p)$ jsou $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 1$. Polynom $\mathcal{C}(s)$ je 2. stupně. Hledáme-li fázově minimální $f_{yd}^{(s)}$, jsou jeho kořeny

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = -1 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{C}(s) = s(s+1).$$

Nalezený model :



$$f_{yu}^{(s)} = \frac{\mathcal{B}(s)}{\mathcal{A}(s)} = \frac{s+2}{s^2 + 2s + 1},$$

$$f_{yd}^{(s)} = \frac{\mathcal{C}(s)}{\mathcal{A}(s)} = \frac{s(s+1)}{s^2 + 2s + 1}.$$

Přesvědčete se, že i zde platí

$$\begin{aligned} S_{yy}(\omega) &= \frac{B(i\omega) B(-i\omega)}{A(i\omega) A(-i\omega)} = f_{yd}(i\omega) f_{yd}(-i\omega) = \\ &= f_{yv_1}(i\omega) f_{yv_1}(-i\omega) + f_{yv_2}(i\omega) f_{yv_2}(-i\omega) . \end{aligned}$$

□ KONEC PŘÍKLADU

2.3 OBECNÝ ADITIVNÍ ŠUM ZATĚŽUJÍCÍ STAVOVÝ VEKTOR

Tato kapitola je věnovaná jednoduché úvaze o struktuře modelu v případě, že složky šumového vektoru $v(t)$ nemají charakter bílého šumu.

I v tomto případě je dán přenos $f_{yu}(s) = B(s)/A(s)$ modelu jednoznačně vztahem (2.7) bez ohledu na transformaci stavového popisu. Pro určení přenosu $f_{yd}(s) = B(s)/A(s)$ předpokládejme $u(t) = 0$. Potom zřejmě platí

$$y(s) = f_1(s)v_1(s) + f_2(s)v_2(s) + \dots + f_n(s)v_n(s) , \quad (2.22)$$

kde

$$f_j(s) = \frac{B_j(s)}{A(s)} = \frac{\mathcal{L}\{y_j\}}{\mathcal{L}\{v_j\}} , \quad j = 1, 2, \dots, n$$

jsou obrazové přenosy vyjadřující dynamickou závislost $y(t)$ na jednotlivých složkách $v_j(t)$ šumového vektoru $v(t)$

$$v_j(s) = \mathcal{L}\{v_j(t)\} , \quad v(t) = [v_1(t), v_2(t), \dots, v_n(t)]^T .$$

Předpokládáme, že $v_j(t)$ nemají charakter bílého šumu. Existuje však n -tice lineárních filtrů $g_j(s) = N_j(s)/M_j(s)$, $j = 1, 2, \dots, n$ pro něž platí:

$$\begin{array}{c} \hat{v}_j \rightarrow \boxed{g_j} \rightarrow v_j \\ v_j(s) = g_j(s) \hat{v}_j(s), \quad j = 1, 2, \dots, n \\ \hat{v}_j(s) \dots \text{bílý šum.} \end{array} \quad (2.23)$$

Potom lze vztah (2.22) vyjádřit

$$\begin{aligned} y(s) &= f_1(s)g_1(s)\hat{v}_1(s) + f_2(s)g_2(s)\hat{v}_2(s) + \dots \\ &\quad \dots + f_n(s)g_n(s)\hat{v}_n(s) = \\ &= \frac{B_1(s)}{A(s)} \frac{N_1(s)}{M_1(s)} \hat{v}_1(s) + \dots + \frac{B_n(s)}{A(s)} \frac{N_n(s)}{M_n(s)} \hat{v}_n(s). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Pro výkonovou spektrální hustotu

$$\begin{aligned} S_{yy}(\omega) &= f_{yd}(\omega) f_{yd}(-i\omega) = \\ &= \frac{B_1(i\omega)N_1(i\omega)}{A(i\omega)M_1(i\omega)} \frac{B_1(-i\omega)N_1(-i\omega)}{A(-i\omega)M_1(-i\omega)} + \dots \\ &\quad \dots + \frac{B_1(i\omega)N_1(i\omega)}{A(i\omega)M_1(i\omega)} \frac{B_1(-i\omega)N_1(-i\omega)}{A(-i\omega)M_1(-i\omega)} = \\ &= \frac{B(i\omega)}{A(i\omega)D(i\omega)} \frac{B(-i\omega)}{A(-i\omega)D(-i\omega)}, \quad f_{yd}(s) = \frac{B(s)}{A(s)D(s)}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Lze tedy i v tomto případě vyjádřit proces z hlediska $S_{yy}(\omega)$ ekvivalentním modelem

$$\begin{array}{c} d \rightarrow \boxed{f_{yd}} \\ u \rightarrow \boxed{f_{yu}} \rightarrow \text{O} \rightarrow y \end{array} \quad \begin{aligned} f_{yu}(s) &= \frac{B(s)}{A(s)}, & \partial A(s) &= n, \\ f_{yd}(s) &= \frac{B(s)}{A(s)D(s)}, & \partial [A(s)D(s)] &> n, \\ & & \partial B(s) &\leq \partial [A(s)D(s)]. \end{aligned}$$

Obrazový přenos $K_{yd}(s)$ modelu je však na rozdíl od případů uvažovaných v kap. 2.1 a 2.2 vyššího řádu.

2.4 VÍCEPARAMETROVÝ DYNAMICKÝ SYSTÉM ZATÍŽENÝ OBEČNÝM ŠUMEM

Závěry předcházejících kapitol 2.1-3 platí prakticky shodně i pro dynamické systémy víceparametrové.

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} u_1 \rightarrow \\ u_2 \rightarrow \\ \vdots \\ u_r \rightarrow \end{array} & \begin{array}{c} \boxed{K(s)} \\ \end{array} & \begin{array}{c} \rightarrow y_1 \\ \rightarrow y_2 \\ \vdots \\ \rightarrow y_m \end{array}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) \\
 y(t) = C x(t) + D u(t)
 \end{array}
 \quad (2.26)$$

Výchozí stavový popis (2.26) je strukturálně stejný s (2.2), skalární veličiny $y(t)$, $u(t)$, D jsou nahrazeny vektory

$$y(t) = [y_1(t), y_2, \dots, y_m]^T, \quad u(t) = [u_1(t), u_2, \dots, u_m]^T$$

a maticí D . Všechny uvedené úvahy platí buď shodně nebo jen s formálními odchylkami.

Diskutované obrazové přenosy nejsou v tomto případě skalární racionální lomené funkce (RLF), ale polynomiální matice RLF, respektive matice rekurentních či kauzálních řad. Z této skutečnosti vyplývají odchylky způsobené nekomutativním charakterem násobení matic a násobení inverzní maticí místo operace dělení. Diskutovaná ekvivalence chování skutečného dynamického systému zatíženého šumem a jeho modelu prostřednictvím $S_{yy}(\omega)$ je nutné chápat v tomto případě jako tenzorový součin odvozený od přenosu závislosti vektoru y na v modelu uvažovaném skalárním šumem d .

$$S_{yy}(\omega) = F_{yd}(i\omega) F_{yd}^T(-i\omega) = \begin{bmatrix} f_{y_1 d}(i\omega) \\ f_{y_2 d} \\ \vdots \\ f_{y_m d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{y_1 d}(-i\omega), \dots, f_{y_1 d} \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Ekvivalentní ARMAX model víceparametrového systému pak nabývá tvaru

$$\begin{matrix} \mathbf{A}(s) & \mathbf{y}(s) = & \mathbf{B}(s) & \mathbf{u}(s) + & \mathbf{C}(s) & \mathbf{d}(s) \\ (m,m)(m,1) & & (m,r)(r,1) & & (m,1)(1,1) \end{matrix} \quad (2.28)$$

Pozn.: Diskretizací spojitého popisu dynamického systému zůstává jeho struktura zachována.

Z Á V Ě R

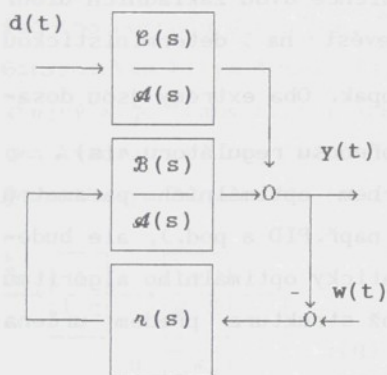
Nejdůležitějším závěrem kap.2 je dokázané tvrzení, že nelze systém zatížený šumem podle kap 2.1, 2.2 nahradit z hlediska $S_{yy}(\omega)$ ekvivalentním regresním modelem ($\mathcal{E}(s) = 1$). Tato náhrada může být v obecném případě pouze přibližná. Přesnou náhradu umožňuje pouze ARMAX model (obecně $\mathcal{E}(s) \neq 1$).

Transformací stavového popisu (změnou míst působení šumového vektoru) se mění pouze polynom $\mathcal{E}(s)$ přenosu $f_{yd}(s)$. Nemůže být libovolný, ale patří do třídy dané vztahy (2.15) resp. (2.21).

Uvažujeme-li, že působící šum není bílý, je nutné uvažovat řád přenosu $f_{yd}(s)$ vyšší než řád přenosu $f_{yu}(s)$ modelu. Charakteristický polynom $\mathcal{A}(s)$ přenosu $f_{yu}(s)$ je však obsažen v charakteristickém polynomu přenosu $f_{yd}(s)$.

3. SYNTÉZA REGULAČNÍHO OBVODU

V této kapitole se budeme zabývat problematikou návrhu regulátoru, přesněji algoritmu řízení regulačního obvodu, za předpokladu známého modelu regulované soustavy zatížené obecným šumem podle kapitoly 2. Předpokládejme, že $d(t)$ je nezávislý bílý šum s nulovou střední hodnotou a $w(t) = 0$. Účelem je navrhnout $r(s)$ tak, aby rozptyl $\sigma_Y^2 \rightarrow \min$. Označme $f_{yd}(s) = \mathcal{L}(y)/\mathcal{L}(d)$ za výše uvedených předpokladů potom



$$\sigma_Y^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{YY}(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f_{yd}(\omega)|^2 S_{dd}(\omega) d\omega =$$

$$= \left[S_{dd}(\omega) = 1 \right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f_{yd}(\omega)|^2 d\omega =$$

$$= \left[|f_{yd}(\omega)|^2 \dots \text{sudé} \right] = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |f_{yd}(\omega)|^2 d\omega. \quad (3.1)$$

Stejně hodnoty nabývá i kvadratický kritériální funkcionál stabilního regulačního pochodu vyvolaného při nulových počátečních podmínkách vstupem poruchy ve tvaru Diracova impulsu $d(t) = \delta(t)$

neboť

$$J = \int_0^{\infty} y^2(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |y(i\omega)|^2 d\omega = \left[\begin{array}{l} y(s) = f_{yd}(s)d(s) \\ d(s)=1 \Rightarrow y(s) = f_{yd}(s) \end{array} \right] =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |f_{yd}(\omega)|^2 d\omega \quad . \quad (3.2)$$

Srovnáním (3.1), (3.2) je zřejmá ekvivalence dvou základních úloh. Stochastickou úlohu $\sigma_y^2 \rightarrow \min.$ lze převést na deterministickou úlohu hledání $J = \int_0^{\infty} y^2 dt \rightarrow \min.$ a naopak. Oba extrémy jsou dosaženy současně při stejném optimálním přenosu regulátoru $\alpha(s)$.

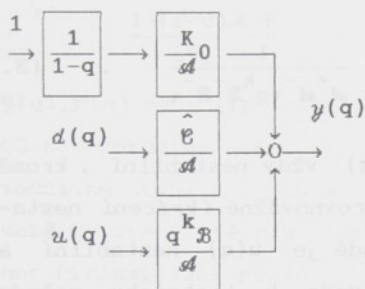
V dalším se nebudeme zabývat návrhem optimálních parametrů regulátoru předem zvolené struktury (např. PID a pod.), ale budeme řešit obecnější úlohu návrhu kvadraticky optimálního algoritmu řízení realizovaného regulátorem, jehož struktura předem určena není.

3.1 SYNTÉZA JEDNOPARAMETROVÉHO REGULAČNÍHO OBVODU

Uvažujme obecný jednoparametrový ARMAX model regulované soustavy podle kapitoly 2.

$$y(j) + a_1 y(j-1) + \dots = b_0 u(j-k) + b_1 u(j-k-1) + \dots \quad (3.3)$$

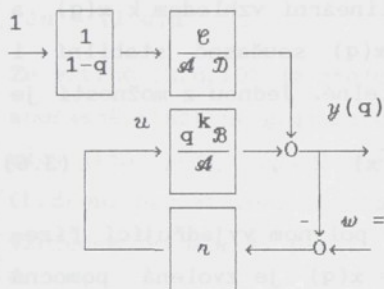
$$+ c_0 d(j) + c_1 d(j-1) + \dots + K_0$$



$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \mathcal{A}(q) = 1 + a_1 q + a_2 q^2 + \dots, \\ \mathcal{B} &= \mathcal{B}(q) = b_0 + b_1 q + b_2 q^2 + \dots, \\ \hat{\mathcal{E}} &= \hat{\mathcal{E}}(q) = \hat{c}_0 + \hat{c}_1 q + \hat{c}_2 q^2 + \dots, \\ q &= z^{-1}, \end{aligned}$$

$K_0 \dots$ parametr zahrnující nepřesnost odhadu prac.bodu a odchylky od linearity regulované soustavy.

Stochastická úloha minimalizace váženého součtu rozptylů regulačního pochodu $J_0 = \sigma_Y^2 + \lambda \sigma_{\Delta u}^2 \rightarrow \min.$, vybuzeného předpokládaným Gaussovským bílým šumem $d(j)$ s nulovou střední hodnotou, vede na stejný algoritmus řízení jako deterministická úloha hledání minima kvadratické regulační plochy J , viz vztah (3.4), při buzení jednotkovým Dirackovým impulsem $d(j) = \delta(j)$.



Pro $d(j) \dots$ diskrétní bílý šum $\Rightarrow \mathcal{Z}(d(j)) = d(q) = d=1$,
v obecném stacionárním případě

$$d(q) = \frac{\mathcal{E}_d(q)}{\mathcal{D}(q)},$$

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(q) = K_0 \mathcal{D}(q) + (1-q) \hat{\mathcal{E}}(q) \mathcal{E}_d(q),$$

$$J = \sum_{j=0}^{\infty} Y^2(j) + \lambda \sum_{j=0}^{\infty} \Delta u^2(j) = \quad (3.4)$$

$$= \|y(q)\|^2 + \lambda \|\Delta u(q)\|^2 \rightarrow \min.$$

$$\Delta u(j) = u(j) - u(j-1), \quad \Delta u(q) = (1-q)u(q).$$

Uvažujeme zcela obecný ARMAX model popisující chování fyzikálně reálného dynamického systému zatíženého obecným stacionárním šumem.

$k > 0 \dots$ diskrétní dopravní zpoždění ;

$\mathcal{A}(q), \mathcal{B}(q) \dots$ polynomy, které nemají nulový kořen, jinak obecně

nestabilní s antistabilním společným faktorem $\mathcal{A}_s^-(q)$;

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}^+ \mathcal{A}_s^-, \quad \mathcal{B} = \mathcal{B}^+ \mathcal{B}_s^-;$$

$\mathcal{D}(q) \dots$ stabilní polynom.

Pro obraz regulované veličiny platí

$$y = \frac{e}{(1-q)A^+D} \frac{1}{1 + \frac{q^k B^-}{A^+}} n = \frac{e}{(1-q)A_s^-D} \frac{1}{A^+A^- + q^k B^+B^-} n \quad (3.5)$$

Vzhledem k antistabilnímu $A_s^-(q)$ je $y(q)$ vždy nestabilní, kromě případů volby $n = n/A_s^-$, kdy je $y(q)$ rovnovážné (krácení nestabilních faktorů). Ovšem i v tomto případě je $u(q)$ nestabilní a syntéza (byť teoreticky možná je) nevede k technicky možným aplikacím - posloupnost $u(j)$ diverguje. Předpokládejme proto dále pouze $A_s^- = 1$, $A = A^+A^-$, $B = B^+B^-$.

Hledáme řešení optimalizační úlohy pro současně stabilní $\Delta u(q)$ i $y(q)$. Obraz $y(q)$ regulované veličiny (3.5) je nelineární funkcí přenosu regulátoru $n(q)$, což přináší jisté problémy při určení jeho optimální hodnoty. Z tohoto důvodu volíme vhodně pomocnou funkci $x(q)$ tak, aby $y(q)$ bylo jednak lineární vzhledem k $x(q)$ a jednak, aby bylo pro každé stabilní $x(q)$ současně stabilní i $y(q)$, $\Delta u(q)$ a $n(q)$ fyzikálně realizovatelné. Jednou z možností je volba

$$y = \frac{e}{A^+D} (F e + q^k B^- x) \quad (3.6)$$

kde $F = F(q)$ je jistý (zatím neurčený) polynom vyjadřující řízením neovlivnitelnou část $y(q)$ a $x = x(q)$ je zvolená pomocná funkce, pomocí které provedeme dále optimalizaci kritéria (3.4)

$$x = \frac{e}{q^k B^-} \left[\frac{1}{(1-q) \left(A^- + \frac{q^k B^-}{A^+} n \right)} - F \right] = \frac{e}{1-q} \frac{\frac{1-(1-q)A^-F}{q^k B^-} - \frac{B^+ n F}{A^+}}{A^- + \frac{q^k B^-}{A^+} n} \quad (3.7)$$

Vzhledem k antistabilnímu $q^k B^-$ může být funkce $x(q)$ stabilní při současně stabilním $y(q), \Delta u(q)$ pouze tehdy, jsou-li $[1-(1-q)FA^-]$ a $[q^k B^-]$ soudělné, tedy

$$\frac{1-(1-q)\mathcal{A}^-\mathcal{F}}{q^k\mathcal{B}^-} = \mathcal{G} \quad \Rightarrow \quad (1-q)\mathcal{A}^-\mathcal{F} + q^k\mathcal{B}^-\mathcal{G} = 1 \quad , \quad (3.8)$$

$\mathcal{G}(q), \mathcal{F}(q)$ jsou libovolné polynomy vyhovující diofantické rovnici (3.8). Pokud by neplatila rovnost (3.8), nemohly by být $x(q), y(q)$ současně stabilní. Naopak splnění této rovnosti, ještě samo o sobě ke stabilitě $x(q)$ nestačí. Její stabilitu zajistíme následnou minimalizací pouze v podprostoru stabilních $x_+(q)$.

$$x = \frac{\mathcal{B}^+\mathcal{F}}{\mathcal{A}^+} \cdot \frac{\mathcal{G} - (1-q)\mathcal{A}^-x}{(1-q)\left[\mathcal{A}^- + q^k\frac{\mathcal{B}^-}{\mathcal{A}^+}\right]} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\mathcal{A}^+}{(1-q)\mathcal{B}^+} \cdot \frac{\mathcal{G} - (1-q)\mathcal{A}^-x}{\mathcal{F} - (1-q)\mathcal{A}^-x} \quad , \quad (3.9)$$

$$u = -x \quad y = \dots = \frac{1}{(1-q)\mathcal{B}^+} \left[(1-q)\mathcal{A}^-x - \mathcal{G} \right] \quad , \quad (3.10)$$

$$\Delta u = (1-q)u \quad .$$

Ze vztahů (3.6, 10) je zřejmé, že pro všechny stabilní $x(q)$ jsou současně stabilní $y(q), \Delta u(q)$ a naopak, pro všechny nestabilní $x(q)$ jsou $y(q), \Delta u(q)$ nestabilní nebo rovnovážné nestabilní (krácení nezávislého nestabilního kořenového činitele). Dále, vzhledem k tomu, že platí

$$x = \frac{1}{q^k\mathcal{B}^-} \left[\mathcal{B}^+\mathcal{F} - \mathcal{F}\mathcal{G} \right] = \frac{1}{(1-q)\mathcal{A}^-} \left[(1-q)\mathcal{B}^+u + \mathcal{G} \right] \quad , \quad (3.11)$$

je zřejmé, že přiřazení (3.6) je úplné, vzájemně jednoznačné.

Abychom přijali transformaci (3.6) je nutné dále ukázat, že pro všechny stabilní $x(q)$ je obrazový přenos regulátoru $\kappa(q)$ fyzikálně realizovatelný (regulární v bodě $q=0$, t.j. polynom jmenovatele $\kappa(q)$ nemá nulový kořen, váhová funkce regulátoru je dána kauzální řadou).

Skutečně, limita jmenovatele $\nu(q)$ pro $q \rightarrow 0$, viz (3.9), je rovna součinu $\mathcal{B}^+(0)\mathcal{F}(0)\mathcal{E}(0)$. Vzhledem k předpokladu $\mathcal{B}^+(q) \dots \text{stab.}$ je pak $\mathcal{B}^+(0) \neq 0$. Limitním přechodem rovnosti (3.8) pro $q \rightarrow 0$ dostáváme $\mathcal{A}^-(0)\mathcal{F}(0) = 1 \Rightarrow \mathcal{F}(0) \neq 0, \mathcal{E}(0) \neq 0$ můžeme vzhledem k charakteru úlohy bez újmy obecnosti očekávat. V opačném případě by se jednalo o dopravní zpoždění filtru poruchy (buzení). Optimalizační úloha by měla však stejné řešení i v tomto případě. Nulový kořen čitatele tohoto filtru bychom jednoduše vypustili, fyzikálně to odpovídá časovému posunu posloupností regulačního pochodu o jeden, případně více regulačních kroků. Je tedy zřejmé, že je pro stabilní $x(q)$ vždy $\nu(q)$ fyzikálně realizovatelný.

Vzhledem k diskutovaným vlastnostem transformace zavedené vztahem (3.8), lze optimalizaci kritériálního funkcionálu (3.4) nalézt prostřednictvím zavedené pomocné funkce $x(q)$.

Pozn.:

- a) Pokud by nebyl ve vztahu (3.6) vytknut antistabilní faktor q^k , nebyla by zajištěna současná stabilita funkcí $x(q), y(q), \Delta u(q)$. Postup lze zřejmě modifikovat vytknutím před závorku ve vztahu (3.6) libovolné racionální funkce, která je tvořena podílem dvou stabilních polynomů. Tato modifikace se na přenosu regulátoru neprojeví, viz [24].
- b) Řešení diofantické rovnice (3.8) není jednoznačné, optimální řízení je však nezávislé na jeho volbě. Libovolné řešení rovnice (3.8) vede ke stejnému řízení, viz [24].

Úloha minimalizace kritériálního funkcionálu (3.4) pro stabilní regulační pochod a fyzikálně reálné řízení je převedena transformací (3.6) na problém hledání minima tohoto funkcionálu v podprostoru stabilních funkcí $x(q) \in \mathcal{M}_+$.

$$J = \|y(q)\|^2 + \kappa \|\Delta u(q)\|^2 = \left\| \frac{q^k \bar{B}^-}{\mathcal{A}^+ \mathcal{D}} x + \frac{\mathcal{F} \mathcal{E}}{\mathcal{A}^+ \mathcal{D}} \right\|^2 + \kappa \left\| \frac{(1-q)\mathcal{A}^-}{\mathcal{D} \bar{B}^+} x - \frac{\mathcal{E} \mathcal{E}}{\mathcal{D} \bar{B}^+} \right\|^2 = J(x). \quad (3.12)$$

Podle vztahu (A1.30), viz Appendix 1, dosahuje $J(x)$ svého minima pro

$$x_{\text{opt.}}(q) = -\frac{1}{g(q)} m_+(q) = -\frac{1}{g} m_+, \quad (3.13)$$

kde $g(q)$ získáme rozkladem

$$g \cdot \bar{g} = \frac{q^k \bar{B}^-}{\mathcal{A}^+ \mathcal{D}} \frac{\bar{B}^-}{q^k \bar{\mathcal{A}}^+ \bar{\mathcal{D}}} + \kappa \frac{(1-q)\mathcal{A}^- (q-1)\bar{\mathcal{A}}^-}{\mathcal{D} \bar{B}^+ q \bar{\mathcal{D}} \bar{B}^+} = \frac{1}{\mathcal{D} \bar{\mathcal{D}}} \frac{q \bar{B} \bar{B} - \kappa(1-q)^2 \mathcal{A} \bar{\mathcal{A}}}{q \mathcal{A}^+ \bar{\mathcal{A}}^+ \bar{B}^+ \bar{B}^+}, \quad (3.14)$$

$$g = \frac{1}{\mathcal{D}^+ \bar{\mathcal{D}}^-} \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{A}^+ \bar{B}^+} = \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{D}^* \mathcal{A}^+ \bar{B}^+}, \quad g, \frac{1}{g} \dots \text{stab.},$$

$$\mathcal{P} \bar{\mathcal{P}} = \frac{q \bar{B} \bar{B} - \kappa(1-q)^2 \mathcal{A} \bar{\mathcal{A}}}{q} = \bar{B} \bar{B} - \kappa \frac{(1-q)^2}{q} \mathcal{A} \bar{\mathcal{A}}, \quad \mathcal{P} \dots \text{stab.} \quad (3.15)$$

Funkci $m_+(q)$ získáme extrakcí stabilní části součtového rozkladu funkce $m(q)$, která nabývá podle (A1.30), viz Appendix 1, tvaru

$$m = \frac{1}{\bar{g}} \left[\frac{\bar{B}^-}{q^k \bar{\mathcal{D}} \bar{\mathcal{A}}^+} \frac{\mathcal{E} \mathcal{F}}{\mathcal{D} \mathcal{A}^+} - \kappa \frac{(q-1)\bar{\mathcal{A}}^-}{q \mathcal{D} \bar{B}^+} \frac{\mathcal{E} \mathcal{E}}{\mathcal{D} \bar{B}^+} \right] =$$

$$= \dots = \frac{\mathcal{E} \bar{B}^+ \bar{B} \mathcal{F} + \kappa(1-q)q^{k-1} \mathcal{A}^+ \bar{\mathcal{A}} \mathcal{E}}{\mathcal{A}^+ \bar{B}^+ \mathcal{D}^*} \frac{1}{q^k \bar{\mathcal{P}}}, \quad (3.16)$$

kterou pak dále rozložíme, viz Appendix 1 vztah (A1.23)

$$m = \frac{\mathcal{E} \bar{B}^+ \bar{B} \mathcal{F} + \kappa(1-q)q^{k-1} \mathcal{A}^+ \bar{\mathcal{A}} \mathcal{E}}{\mathcal{A}^+ \bar{B}^+ \mathcal{D}^*} \frac{1}{q^k \bar{\mathcal{P}}} = Q + \frac{\mathcal{R}}{q^k \mathcal{A}^+ \bar{B}^+ \mathcal{D}^* \tilde{\mathcal{P}}} = \quad (3.17)$$

$$= Q + \underbrace{\frac{\mathcal{H}_1}{\mathcal{A}^+ \mathcal{B}^+ \mathcal{D}^*}}_{m_+} + \frac{\mathcal{H}_2}{q^k \tilde{\mathcal{P}}} \quad , \quad q^{k\tilde{\mathcal{P}}} \mathcal{H}_1 + \mathcal{A}^+ \mathcal{B}^+ \mathcal{D}^* \mathcal{H}_2 = \mathcal{H} \quad (3.18)$$

Naznačeným dělením získáme $Q(q), \mathcal{H}(q)$; $\partial \mathcal{H} < \partial(q^k \mathcal{A}^+ \mathcal{B}^+ \mathcal{D}^* \tilde{\mathcal{P}})$. Polynomy $\mathcal{H}_1(q), \mathcal{H}_2(q)$ pak následným rozkladem vzniklé ryzí racionální lomené funkce na stabilní a nestabilní parciální zlomky, kde $\partial \mathcal{H}_1 < \partial(\mathcal{A}^+ \mathcal{B}^+ \mathcal{D}^*)$, $\partial \mathcal{H}_2 < \partial(q^k \tilde{\mathcal{P}})$. Rozklad provedeme řešením diofantické rovnice (3.18), jejíž řešení je s ohledem na uvedené stupně polynomů jednoznačné (jednoznačnost rozkladu na parciální zlomky). Zaveďme formálně dále

$$m_+ = Q + \frac{\mathcal{H}_1}{\mathcal{A}^+ \mathcal{B}^+ \mathcal{D}^*} = \frac{\mathcal{A}^+ \mathcal{B}^+ \mathcal{D}^* Q + \mathcal{H}_1}{\mathcal{A}^+ \mathcal{B}^+ \mathcal{D}^*} = \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{A}^+ \mathcal{B}^+ \mathcal{D}^*} \quad , \quad \mathcal{R} = \mathcal{A}^+ \mathcal{B}^+ \mathcal{D}^* Q + \mathcal{H}_1 \quad (3.19)$$

$$(3.20)$$

Optimální hodnoty nabývá pomocná funkce $x(q)$ pro

$$x_{\text{opt.}} = -\frac{1}{g} m_+ = -\frac{\mathcal{A}^+ \mathcal{B}^+ \mathcal{D}^*}{\mathcal{P}} \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{A}^+ \mathcal{B}^+ \mathcal{D}^*} = -\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{P}} \quad , \quad (3.21)$$

dosazením do (3.9) dostáváme hledaný přenos optimálního regulátoru

$$n_{\text{opt.}} = \frac{\mathcal{A}^+}{(1-q)\mathcal{B}^+} \frac{\mathcal{F}\mathcal{E} - (1-q)\mathcal{A}^- x_{\text{opt.}}}{\mathcal{F}\mathcal{E} + q^k \mathcal{B}^- x_{\text{opt.}}} = \frac{\mathcal{A}^+}{(1-q)\mathcal{B}^+} \frac{\mathcal{F}\mathcal{E}\mathcal{P} + (1-q)\mathcal{A}^- \mathcal{R}}{\mathcal{F}\mathcal{E}\mathcal{P} - q^k \mathcal{B}^- \mathcal{R}} \quad (3.22)$$

Pozn.:

a) Rozklad (3.15) je jednoznačný až na znaménko, to však neovlivní výsledný přenos regulátoru $n_{\text{opt.}}(q)$, viz vztahy (3.17,18).

b) Ze vztahu (3.13) je zřejmé, že má-li být $x_{\text{opt.}}(q)$ stabilní, nutně musí být také stabilní $1/g(q)$. Nevyplývá však odtud podmínka na stabilitu funkce $g(q)$, jak bylo uvedeno v

(3.14). Optimalizace by byla možná i v tomto případě, nedosáhli bychom však absolutního minima funkcionálu. Připustíme-li totiž $g(q)$ obecně nestabilní, provádíme potom minimalizaci pouze pro takové $x(q)$, pro které je součin $x(q)g(q)$ stabilní, tedy nikoliv pro všechny stabilní $x(q)$. Musíme pak proto očekávat obecně horší výsledek. Důkaz tohoto tvrzení viz [24].

Optimální přenos regulátoru je určen vztahem (3.22), optimalizační úloha je tím vyřešena. Praktický návrh lze však dále zjednodušit a snížit tím i objem nutných aritmetických operací, povšimneme-li si, že $d^+(q)$ je dělitelem jmenovatele a současně i $B^+(q)$ dělitelem čitatele obrazového přenosu regulátoru, dají se tedy ve vztahu (3.22) krátit.

Oprávněnost předcházejícího tvrzení vypývá z následující úvahy. Nechť α je kořenem polynomu $d^+(q) \Rightarrow d^+(\alpha) = 0$. Ze vztahu (3.17) plyne pro čítele zlomku

$$q^k d^+ B^+ \tilde{D} \tilde{P} Q + \mathcal{R} = \mathcal{E} q^\xi \left[B^+ \overline{B} \mathcal{F} + \kappa (1-q) q^{k-1} d^+ \overline{d} \mathcal{G} \right],$$

$$\Rightarrow \mathcal{R}(\alpha) = \mathcal{E}(\alpha) \alpha^\xi B^+(\alpha) \overline{B}(\alpha) \mathcal{F}(\alpha) \quad , \quad (3.23)$$

$$\xi = \partial \mathcal{P} \quad , \quad \tilde{\mathcal{P}} = \overline{\mathcal{P}} q^\xi \quad ,$$

ze vztahů (3.18, 20) pak

$$\alpha^k \tilde{\mathcal{P}}(\alpha) \mathcal{R}_1(\alpha) = \mathcal{R}(\alpha) \quad , \quad \mathcal{R}(\alpha) = \mathcal{R}_1(\alpha) \quad . \quad (3.24)$$

Lze se pak snadno o správnosti tvrzení přesvědčit jednoduchým dosazením do jmenovatele (3.22)

$$\mathcal{F}(\alpha) \mathcal{E}(\alpha) \mathcal{P}(\alpha) - \alpha^k \overline{B}^-(\alpha) \mathcal{R}(\alpha) =$$

$$= \mathcal{F}(\alpha) \mathcal{E}(\alpha) \mathcal{P}(\alpha) - \alpha^k \overline{B}^-(\alpha) \frac{\mathcal{E}(\alpha) \alpha^\xi B^+(\alpha) \overline{B}(\alpha) \mathcal{F}(\alpha)}{\alpha^k \tilde{\mathcal{P}}(\alpha)} =$$

$$= \frac{\mathcal{C}(\alpha)\mathcal{F}(\alpha)}{\bar{\mathcal{P}}(\alpha)} \left[\mathcal{P}(\alpha)\bar{\mathcal{P}}(\alpha) - \mathcal{B}(\alpha)\bar{\mathcal{B}}(\alpha) \right] = \quad (3.25)$$

$$= \left[\begin{array}{l} \mathcal{P}(\alpha)\bar{\mathcal{P}}(\alpha) = \\ \mathcal{B}(\alpha)\bar{\mathcal{B}}(\alpha) - \alpha \frac{(1-\alpha)^2}{\alpha} \mathcal{A}(\alpha)\bar{\mathcal{A}}(\alpha) \end{array} \right] \stackrel{\text{viz (3.15)}}{=} =$$

$$= \frac{\mathcal{C}(\alpha)\mathcal{F}(\alpha)}{\bar{\mathcal{P}}(\alpha)} \alpha \frac{(1-\alpha)^2}{\alpha} \mathcal{A}(\alpha)\bar{\mathcal{A}}(\alpha) = \left[\begin{array}{l} \mathcal{A}(\alpha) = \mathcal{A}^+(\alpha) \mathcal{A}^-(\alpha) \\ \mathcal{A}^+(\alpha) = 0 \end{array} \right] = 0.$$

Zcela obdobně i pro druhou část tvrzení. Nechť β je kořenem polynomu $\mathcal{B}^+(q) \Rightarrow \mathcal{B}^+(\beta) = 0$.

$$\mathcal{H}(\beta) = \mathcal{C}(\beta)\beta^{\mathcal{F}} \alpha (1-\beta)\beta^{k-1} \mathcal{A}^+(\beta)\bar{\mathcal{A}}(\beta)\mathcal{G}(\beta),$$

$$\mathcal{H}(\beta) = \beta^k \tilde{\mathcal{P}}(\beta)\mathcal{H}_1(\beta), \quad \mathcal{R}(\beta) = \mathcal{H}_1(\beta). \quad (3.26)$$

Pro čitatel zlomku (3.22) pak platí

$$\mathcal{G}(\beta)\mathcal{C}(\beta)\mathcal{P}(\beta) + (1-\beta)\mathcal{A}^-(\beta) \frac{\mathcal{C}(\beta)\beta^{\mathcal{F}} \alpha (1-\beta)\beta^{k-1} \mathcal{A}^+(\beta)\bar{\mathcal{A}}(\beta)\mathcal{G}(\beta)}{\beta^k \tilde{\mathcal{P}}(\beta)} = \dots = 0. \quad (3.27)$$

Tím je tvrzení dokázáno, lze proto přenos optimálního regulátoru vyjádřit podílem polynomů $\mathcal{N}(q), \mathcal{M}(q)$

$$z_{\text{opt.}} = \frac{1}{(1-q)} \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{M}},$$

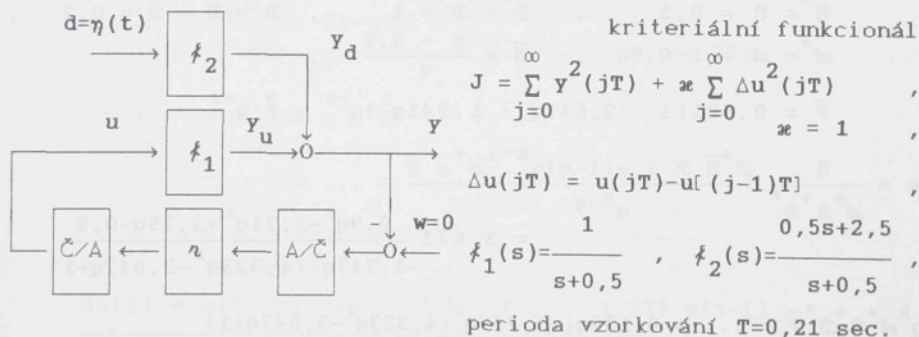
$$\mathcal{N} = \frac{\mathcal{G}\mathcal{C}^*\mathcal{P} + (1-q)\mathcal{A}^-\mathcal{R}}{\mathcal{B}^+}, \quad \mathcal{M} = \frac{\mathcal{F}\mathcal{C}^*\mathcal{P} - q^k\mathcal{B}^-\mathcal{R}}{\mathcal{A}^+}. \quad (3.28)$$

Použité operace jsou vesměs algebraické, realizovány podle [15]. Algoritmus výpočtu reflexe nemá finitní charakter, provádí se iteračně, diofantické rovnice se řeší pomocí Euklideova algoritmu.

Popsaná varianta návrhu nevede k zásadně odlišným řídicím algoritmům, než které získáme např. pomocí dynamického programování, návrh je však numericky výhodnější.

Příklad návrhu optimálního řídicího algoritmu.

Úkolem je navrhnout optimální regulátor $u(q)$ minimalizující



$$m = Q + \frac{\mathcal{R}}{q^k \mathcal{A}^+ \mathcal{B}^+ \mathcal{D}^* \tilde{\mathcal{P}}} = -1,892 + \frac{0,5q(-0,482q^2 + 0,922q - 0,385)}{0,136q(-1,747q^3 + 4,323q^2 - 3,547q + 1)},$$

$$Q = -1,892, \quad \mathcal{R} = 0,5q(-0,482q^2 + 0,922q - 0,385).$$

Rozklad $m(q)$ na stabilní a antistabilní součtové faktory provedeme řešením rovnice (3.18)

$$q^k \tilde{\mathcal{P}} \mathcal{X}_1 + \mathcal{A}^+ \mathcal{B}^+ \mathcal{D}^* \mathcal{X}_2 = \mathcal{R},$$

$$q \cdot 0,681(1,941q^2 - 2,647q + 1) \cdot \mathcal{X}_1 + (1 - 0,9q)0,2 \cdot \mathcal{X}_2 = 0,5q(-0,482q^2 + 0,922q - 0,385),$$

$$\partial \mathcal{X}_1 < \partial (\mathcal{A}^+ \mathcal{B}^+ \mathcal{D}^*) = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{X}_1 = h_{10},$$

$$\partial \mathcal{X}_2 < \partial (q^k \tilde{\mathcal{P}}) = 3 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{X}_2 = h_{20} + h_{21} q.$$

Srovnáním koeficientů u stejných mocnin dostáváme soustavu lineárních rovnic. Řešením této soustavy jsou koeficienty hledaného rozkladu.

$$h_{10} = \mathcal{X}_1 = \dots = 0,072.$$

Dosazením do (3.20) určíme polynom $\mathcal{R}(q)$

$$\mathcal{R} = \mathcal{A}^+ \mathcal{B}^+ \mathcal{D}^* Q + \mathcal{X}_1 = \dots = 0,340q - 0,307$$

a konečně dosazením do (3.28) hledaný algoritmus řízení

$$\mathcal{N} = \frac{\mathcal{E} \mathcal{C} \mathcal{P} + (1-q)\mathcal{A}^- \mathcal{R}}{\mathcal{B}^+} = \dots = -1,271q + 1,771,$$

$$\mathcal{M} = \frac{\mathcal{F} \mathcal{C} \mathcal{P} - q^k \mathcal{B}^- \mathcal{R}}{\mathcal{A}^+} = \dots = 0,661,$$

$$u = \frac{1}{(1-q)} \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{M}} = \frac{2,681 - 1,924q}{1-q} = \frac{u}{e},$$

$$\Delta u(j) = u(j) - u(j-1) = 2,681 e(j) - 1,924 e(j-1).$$

Ověření činnosti :

Dynamiku regulované soustavy popisuje diferenční rovnice

$$y(j) = 1,9y(j-1) - 0,9y(j-2) + 0,2\Delta u(j-1) + 0,5d(j) \quad .$$

Rekurzivně pro $j = 0, 1, 2, \dots$ vypočteme hodnoty regulačního pochodu

$$y(0) = 0,5 \quad , \quad \Delta u(0) = -1,340 \quad ; \quad y(1) = 0,682 \quad , \quad \Delta u(1) = -0,866 \quad ;$$

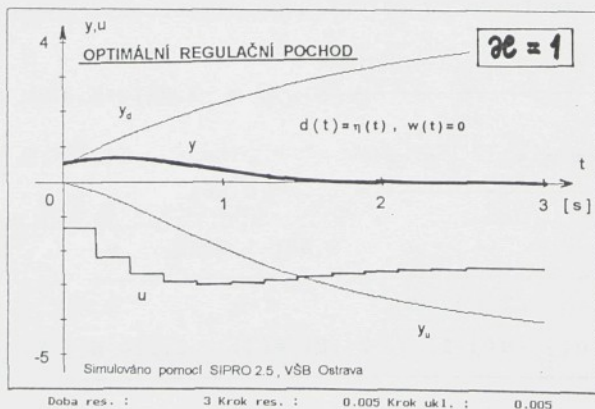
$$y(2) = 0,672 \quad , \quad \Delta u(2) = -0,491 \quad ; \quad y(3) = 0,566 \quad , \quad \Delta u(3) = -0,223 \quad ;$$

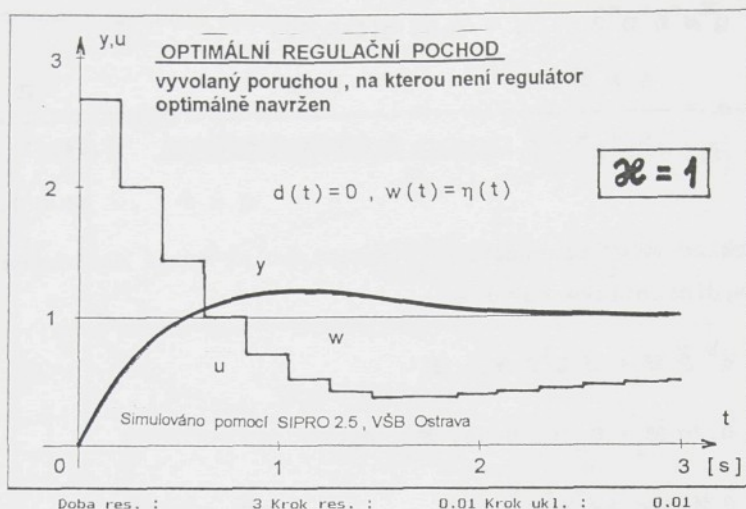
atd.

Ke stejnému výsledku dojdeme i Laurentovým rozvojem Z-obrazu příslušných posloupností v okolí bodu $q = 0$

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{1-q} \cdot \frac{0,5}{1+q} = \dots = \frac{0,5}{1-1,364q+0,515q^2} = \\ &= 0,5 + 0,682q + 0,672q^2 + 0,66q^3 + \dots \quad , \\ \Delta u &= -(1-q)^{-1}y = \dots = \frac{-1,40+0,96q}{-1,64q+0,5q^2} = \\ &= -1,340 - 0,866q - 0,49q^2 - 0,223q^3 - \dots \quad . \end{aligned}$$

Simulované regulační pochody



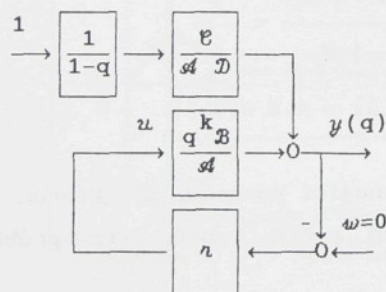


☐ KONEC PŘÍKLADU

Příklad 3.2

Nalezněme optimální regulátor strategie MVC

(Minimum Variance Control) pro $\alpha = 0$ stejného regulačního obvodu jako v příkladu 3.1 . Návrh regulátoru se v tomto případě podstatně zjednoduší.



$$\begin{aligned}
 A &= A^+ = 1 - 0,9q & , & \quad A^- = 1 , \\
 B &= B^+ = \bar{B} = 0,2 & , & \\
 C &= C^* = 0,5 & , & \\
 D &= D^* = 1 & , & \\
 F &= \bar{F} = \tilde{F} = B = 0,2 & , & \\
 G &= G = 1 & , &
 \end{aligned}$$

$$q^k \mathcal{A}^+ \mathcal{B}^+ \mathcal{D}^* \tilde{\mathcal{P}} = \dots = 0,04 q(1-0,9q) \quad ,$$

$$\mu = \frac{\mathcal{C} \mathcal{B}^+ \mathcal{F}}{\mathcal{A}^+ \mathcal{B}^+ \mathcal{D}^* q^k \tilde{\mathcal{P}}} = \dots = \frac{0,02}{0,04q(1-0,9q)} = Q + \frac{\mathcal{H}}{0,04q(1-0,9q)} \quad ,$$

$$Q = 0 \quad , \quad \mathcal{H} = 0,02 \quad ,$$

Rozklad $\mu(q)$ na stabilní a antistabilní části dostaneme řešením diofantické rovnice

$$q^k \tilde{\mathcal{P}} \mathcal{H}_1 + \mathcal{A}^+ \mathcal{B}^+ \mathcal{D}^* \mathcal{H}_2 = \mathcal{H} \quad ,$$

$$0,2q \mathcal{H}_1 + 0,2(1-0,9q) \mathcal{H}_2 = 0,02 \quad ,$$

$$\partial \mathcal{H}_1 < \partial (\mathcal{A}^+ \mathcal{B}^+ \mathcal{D}^*) = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H}_1 = 0,09 \quad ,$$

$$\partial \mathcal{H}_2 < \partial (q^k \tilde{\mathcal{P}}) = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H}_2 = 0,1 \quad .$$

Přenos regulátoru pak dosazením do (3.28)

$$\mathcal{N} = \frac{\mathcal{C} \mathcal{B} \mathcal{P} + (1-q)\mathcal{A}^-\mathcal{R}}{\mathcal{B}^+} = \dots = -0,45q+0,95 \quad ,$$

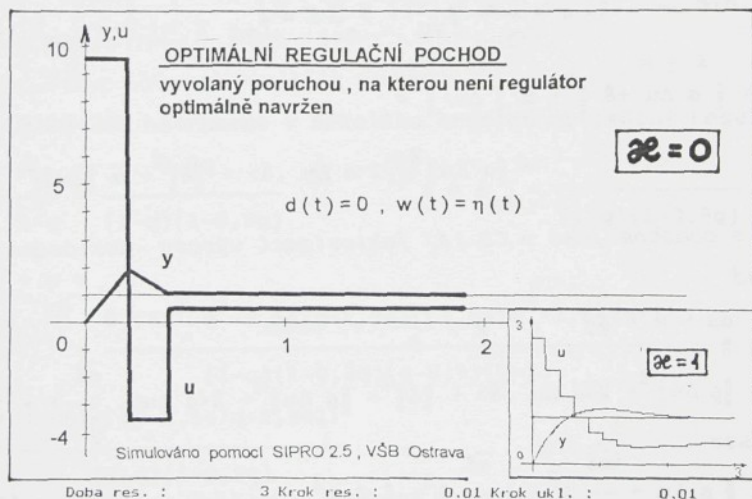
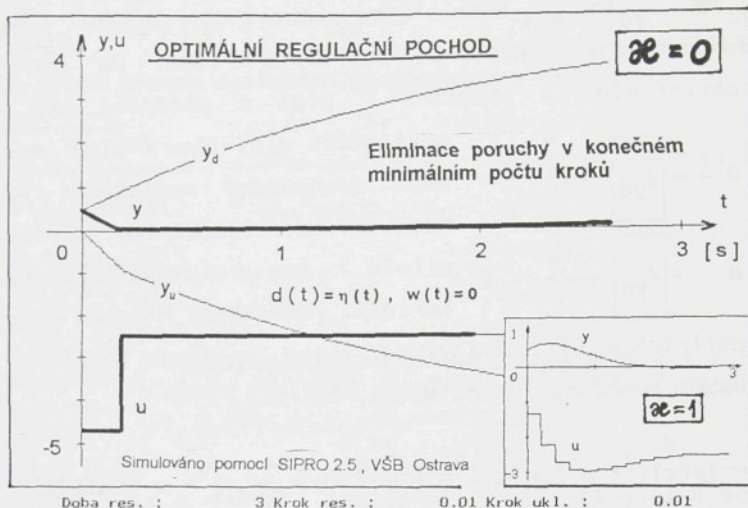
$$\mathcal{M} = \frac{\mathcal{F} \mathcal{B} \mathcal{P} - q^k \mathcal{B}^-\mathcal{R}}{\mathcal{A}^+} = \dots = 0,1 \quad ,$$

$$z = \frac{1}{(1-q)} \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{M}} = \dots = \frac{-4,5q+9,5}{1-q} = \frac{u}{e} \quad ,$$

$$\Delta u(j) = u(j) - u(j-1) = 9,5 e(j) - 4,5 e(j-1) \quad .$$

Dostali jsme tak regulátor eliminující poruchu, pro kterou je navržen v konečném a minimálním počtu kroků, viz průběhy simulovaných reakcí.

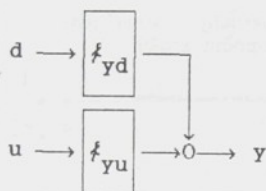
Simulované regulační pochody



☐ KONEC PŘÍKLADU

POZNÁMKA:

Jestliže je regulovaná soustava stabilní (viz např. př. 3.1) $f_{yu}(q), f_{yd}(q) \dots$ stab., lze návrh optimálního regulátoru podstatně zjednodušit. Dochází totiž k tomu, že pro všechna stabilní $u(q)$ je stabilní i $y(q)$ a obráceně pro všechna nestabilní $u(q)$ jsou i $y(q)$ nestabilní nebo rovnovážně nestabilní (krácení nezávislého nestabilního kořenového činitele). Lze proto optimalizovat kritériální funkcionál v celém podprostoru stabilních $u_+(q)$, není proto nutné v tomto případě vůbec zavádět pomocnou funkci $x(q)$.



$$J = \|y(q)\|^2 + \alpha \|\Delta u(q)\|^2 = \left\| \frac{f_{yu}}{1-q} \Delta u + f_{yd} \right\|^2 + \alpha \|\Delta u(q)\|^2, \\ \alpha = \frac{1}{1-q} f_{yu}, \quad \beta = f_{yd}, \quad (3.29)$$

$$J = \|a \Delta u + \beta\|^2 + \alpha \|\Delta u\|^2 = \\ = \|a \Delta u\|^2 + 2\langle a \Delta u, \beta \rangle + \|\beta\|^2 + \alpha \|\Delta u\|^2.$$

Dále obdobně jako v (3.14) faktorizací výrazu dostáváme rozklad

$$a\bar{a} + \alpha = g\bar{g}, \quad g, \frac{1}{g} \dots \text{stab.}, \\ J = \|g \Delta u\|^2 + 2\langle a \Delta u, \beta \rangle + \|\beta\|^2 = \|g \Delta u\|^2 + 2\langle g \Delta u, \frac{\bar{a}\beta}{g} \rangle + \|\beta\|^2 = \\ = \|g \Delta u + \frac{\bar{a}\beta}{g}\|^2 - \|\frac{\bar{a}\beta}{g}\|^2 + \|\beta\|^2. \quad (3.30)$$

Optimum funkcionálu v podprostoru stabilních $\Delta u_+(q)$ již snadno

nalezneme

$$\Delta u_{\text{opt.}} = - \frac{1}{g} \left[\frac{\bar{a}b}{\bar{g}} \right]_+ , \quad y_{\text{opt.}} = f_{yu} \frac{1}{1-q} \Delta u_{\text{opt.}} + f_{yd} . \quad (3.31)$$

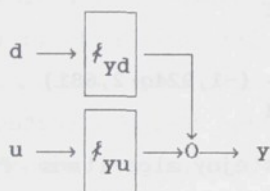
Odtud přímo přenos optimálního regulátoru

$$n_{\text{opt.}} = - \frac{u_{\text{opt.}}}{y_{\text{opt.}}} = - \frac{1}{1-q} \frac{\Delta u_{\text{opt.}}}{y_{\text{opt.}}} . \quad (3.32)$$

□ Konec poznámky

Příklad 3.3

Uvažujme stejnou situaci jako v př.3.1 a ukažme shodu výsledku dosaženého různými přístupy.



$$f_{yu} = \frac{0,2q}{1-0,9q} , \quad f_{yd} = \frac{0,5}{(1-q)(1-0,9q)} ,$$

$$J = \sum_{j=0}^{\infty} y^2(jT) + \kappa \sum_{j=0}^{\infty} \Delta u^2(jT) \rightarrow \min. ,$$

$$\kappa = 1 ,$$

Podle (3.29-32) navrhne v několika krocích optimální regulátor

$$a = \frac{f_{yu}}{1-q} = \frac{0,2q}{(1-q)(1-0,9q)} , \quad b = f_{yd} = \frac{0,5}{(1-q)(1-0,9q)} ,$$

$$a \bar{a} + \kappa = \dots$$

$$\dots = \frac{0,681^2 [q^2 - 2,647q + 1,941] [1,941q^2 - 2,647q + 1]}{(1-q)(1-0,9q)(q-0,9)(q-1)} = g \bar{g} ,$$

$$g = \frac{0,681 [q^2 - 2,647q + 1,941]}{(1-q)(1-0,9q)} , \quad g , \frac{1}{g} \dots \text{stab.} ,$$

$$\begin{aligned}
 m &= \frac{\bar{a} \bar{b}}{\bar{g}} = \dots = \frac{0,147q}{(1-q)(1-0,9q)(1,941q^2-2,647q+1)} = \\
 &= \frac{1,413q-0,913}{q^2-1,364q+0,515} + \frac{3,587}{q-1,111} - \frac{5,000}{q-1}, \\
 m_+ &= \left[\frac{\bar{a}\bar{b}}{\bar{g}} \right]_+ = \dots = \frac{-1,413q+1,968}{(q-1)(q-1,111)}, \\
 \Delta u_{\text{opt.}} &= - \frac{1}{\bar{g}} \left[\frac{\bar{a}\bar{b}}{\bar{g}} \right]_+ = \dots = \frac{1,867(q-1,393)}{q^2-2,647q+1,941}, \\
 y_{\text{opt.}} &= a \Delta u_{\text{opt.}} + \bar{b} = \dots = \frac{0,970}{q^2-2,647q+1,941}, \\
 n_{\text{opt.}} &= - \frac{u_{\text{opt.}}}{y_{\text{opt.}}} = - \frac{1}{1-q} \frac{\Delta u_{\text{opt.}}}{y_{\text{opt.}}} = \dots = \frac{1}{1-q} (-1,924q+2,681).
 \end{aligned}$$

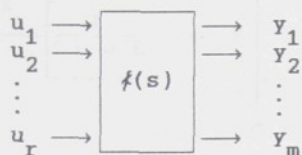
Srovnajte s příkladem př.3.1, dostali jsme stejný algoritmus řízení. Zdůrazněme však, že uvedený přístup lze užít pouze pro stabilní regulovanou soustavu.

☐ KONEC PŘÍKLADU

3.2 SYNTÉZA VÍCEPARAMETROVÉHO REGULAČNÍHO OBVODU

V této části se budeme zabývat syntézou víceparametrových regulačních obvodů s regulovanou soustavou, která má obecně více vstupních i výstupních veličin. Počet vstupních i výstupních

veličin může být obecně různý. Zřejmě je problematika kapitoly



3.1 speciálním případem tohoto zobecnění. Filozofie návrhu je shodná, výklad budu záměrně rozvíjet tak, aby bylo možné jednotlivé kroky paralelně sledovat s předcházející kapitolou.

Přestože zobecnění této kapitoly je přirozené, není (jak jsem již uvedl dříve) zcela triviální. Předně násobení polynomiálních matic není na rozdíl od polynomů komutativní, což znesnadňuje formulaci některých kauzálních vazeb, ale hlavně optimalizaci kvadratického kritéria s penalizací akční veličiny algebraickými prostředky. Problémy zobecnění jsou způsobeny okolnostmi, že algebra operací s polynomy tvořící obecně komutativní okruh přechází na okruh nekomutativní, navíc pouze parciální (není definován součin mezi libovolnými prvky definiční množiny). Řešení optimalizační úlohy není v těchto případech obecně jednoznačné, vykazuje jistou strukturální neurčitost. Realizace v obecném případě závisí na jistém počtu volitelných parametrů. To na jedné straně znesnadňuje algoritmizaci syntézy, na druhé straně však umožňuje jistou volnost a variabilitu konkrétního řešení, které může splnit navíc i některé další požadavky na vlastnosti regulačního pochodu.

ARMAX model regulované soustavy, který jsme diskutovali v kap.2 uvažujeme v tomto případě ve tvaru

$$\begin{bmatrix} y_1(j) \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = -A_1 \begin{bmatrix} y_1(j-1) \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} - A_2 \begin{bmatrix} y_1(j-2) \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} - \dots + \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned}
 & + B_k \begin{bmatrix} u_1(j-k) \\ u_2 \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix} + B_{k+1} \begin{bmatrix} u_1(j-k) \\ u_2 \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix} + \dots + \\
 & + \hat{c}_0 d(j) + \hat{c}_1 d(j-1) + \dots + k_0
 \end{aligned}$$

$(m,1) \quad (m,1) \quad (m,1)$

jeho Z-obraz (při zleva nulových počátečních podmínkách)

$$\mathbf{A} \mathbf{y} = q^k \mathbf{B} \mathbf{u} + \hat{\mathbf{C}} d + \frac{1}{1-q} k_0, \quad q = z^{-1} \quad (3.34)$$

kde

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &= \mathbf{E} + \mathbf{A}_1 q + \mathbf{A}_2 q^2 + \dots, \\
 \mathbf{B} &= \mathbf{B}_k + \mathbf{B}_{k+1} q + \mathbf{B}_{k+2} q^2 + \dots, \quad \mathbf{y} = \mathcal{Z} \begin{bmatrix} y_1(j) \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \mathcal{Z} \begin{bmatrix} u_1(j) \\ u_2 \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix}, \\
 \hat{\mathbf{C}} &= \hat{c}_0 + \hat{c}_1 q + \hat{c}_2 q^2 + \dots, \\
 d &= \mathcal{Z} \left\{ d(j) \right\}.
 \end{aligned}$$

Předpokládejme obraz žumu modelu

$$d = \frac{e_d(q)}{\mathcal{D}(q)} \quad (3.35)$$

potom

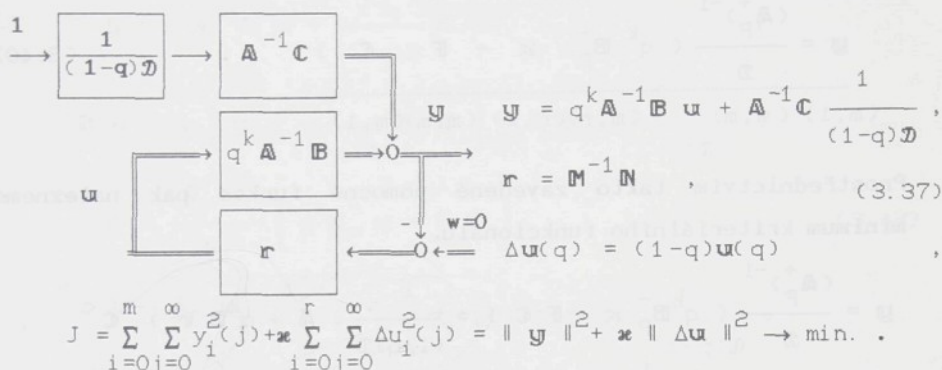
$$\begin{aligned}
 \mathbf{y}_{(m,1)} &= q^k \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{u} + \mathbf{A}^{-1} \left(\frac{\hat{\mathbf{C}} e_d}{\mathcal{D}} + \frac{k_0}{1-q} \right) = \\
 &= q^k \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{u} + \mathbf{A}^{-1} \mathbf{C} \frac{1}{(1-q)\mathcal{D}},
 \end{aligned} \quad (3.36)$$

$(m,m)(m,r)(r,1) \quad (m,m)(m,1) \quad (1,1)$

$$\mathbf{C} = (1-q) \hat{\mathbf{C}} e_d + k_0 \mathcal{D}.$$

Matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ jsou polynomiální matice ; $\mathbf{y}$, $\mathbf{u}$ vektory racionálních lomených funkcí Z-obrazů příslušných veličin ; $\mathcal{D}$ skalární polynom.

Schéma předpokládaného regulačního obvodu



Obrazy kritériálních veličin snadno vyjádříme

$$u = -r y = -M^{-1} N y,$$

$$y = -q^k A^{-1} B r y + \frac{1}{(1-q)D} A^{-1} C, \quad (3.38)$$

$$(E + q^k A^{-1} B r) y = \frac{1}{(1-q)D} A^{-1} C,$$

$$y = \frac{1}{(1-q)D} (E + q^k A^{-1} B r)^{-1} A^{-1} C$$

$$(m, 1) = \frac{1}{(1-q)D} (A + q^k B r)^{-1} C, \quad (m, m)(m, r)(r, m)(m, 1)$$

srovnajte s (3.5). Provedme nejprve pravou a levou faktorizaci matic A , B , C , viz Appendix 1, kap. A1.3.3

$$A = A_P^- A_P^+ = A_L^+ A_L^-, \quad B = B_P^- B_P^+ = B_L^+ B_L^-,$$

$$(m, m) (m, m)(m, m)(m, m)(m, m) \quad (m, r) (m, r)(r, r)(m, m)(m, r)$$

$$C = C_P^- C_P^+ = C_L^+ C_L^-. \quad (3.39)$$

$$(m, 1) (m, 1)(1, 1)(m, m)(m, 1)$$

Analogicky jako v (3.6) volme i v tomto případě vektor pomocných

RLF (racionálních lomených funkcí) $x(q)$ vztahem

$$y = \frac{(A_P^+)^{-1}}{D} (q^k B_P^- x + F C) \quad (3.40)$$

(m,1) (m,m) (m,r)(r,1) (m,m)(m,1)

Prostřednictvím takto zavedené pomocné funkce pak nalezneme minimum kritériálního funkcionálu.

$$y = \frac{(A_P^+)^{-1}}{D} (q^k B_P^- x + F C) = \frac{1}{(1-q)D} (A + q^k B r)^{-1} C$$

$$q^k B_P^- x + F C = \frac{1}{1-q} A_P^+ \left[A_P^- A_P^+ + q^k B r (A_P^+)^{-1} A_P^+ \right]^{-1} C$$

$$q^k B_P^- x = \left\{ \frac{1}{1-q} \left[A_P^- + q^k B r (A_P^+)^{-1} \right]^{-1} - F \right\} C = \quad (3.41)$$

$$= \left\{ \frac{1}{1-q} \left[A_P^- + q^k B r (A_P^+)^{-1} \right]^{-1} - \frac{1}{1-q} \left[* \right]^{-1} \left[* \right] F (1-q) \right\} C =$$

$$= \frac{1}{1-q} \left[* \right]^{-1} \left\{ E - A_P^- F (1-q) - q^k B_P^- B_P^+ r (A_P^+)^{-1} F (1-q) \right\} C.$$

S ohledem na stabilitu x musíme volit F tak, aby byla řešením diofantické rovnice

$$E - (1-q) A_P^- F = q^k B_P^- G$$

$$(1-q) A_P^- F + q^k B_P^- G = E \quad (3.42)$$

(m,m)(m,m) (m,r)(r,m) (m,m)

srovnajte s (3.8). Řešitelnost této rovnice koresponduje s regulovatelností regulované soustavy. Splnění rovnice (3.42) je nutnou podmínkou stability x , její stabilitu však zajistíme minimalizací pouze v podprostoru stabilních $x_+(q)$. Sledujme dále

korespondenci mezi x a vektorem řízení u .

$$y = q^k A^{-1} B u + \frac{1}{(1-q)D} A^{-1} C,$$

$$q^k B u = A \left(y - \frac{1}{(1-q)D} A^{-1} C \right) = A y - \frac{C}{(1-q)D},$$

$$y = \frac{(A_P^+)^{-1}}{D} \left(q^k B_P^- x + F C \right), \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} q^k B u &= A_P^- A_P^+ \frac{(A_P^+)^{-1}}{D} \left(q^k B_P^- x + F C \right) - \frac{C}{(1-q)D} = \\ &= \frac{1}{(1-q)D} \left\{ (1-q) A_P^- \left(q^k B_P^- x + F C \right) - C \right\} = \\ &= \frac{1}{(1-q)D} \left\{ q^k (1-q) A_P^- B_P^- x + \left[(1-q) A_P^- F C - C \right] \right\}. \end{aligned}$$

Využitím (3.42) pak

$$q^k B u = \frac{1}{(1-q)D} \left\{ q^k (1-q) A_P^- B_P^- x - q^k B_P^- G C \right\}, \quad (3.44)$$

$$B u = \frac{1}{(1-q)D} \left\{ (1-q) A_P^- B_P^- x - B_P^- G C \right\},$$

$$(m, r)(r, 1)$$

$$(m, m)(m, r)(r, 1) (m, r)(r, m)(m, 1)$$

srovnajte s (3.10). Z (3.40) a (3.44) je zřejmé, že pro všechna x stabilní jsou současně y i $\Delta u = (1-q)u$ stabilní a naopak, pro všechna x nestabilní jsou $y, \Delta u$ nestabilní nebo rovnovážné nestabilní (krácení nezávislého nestabilního kořenového činitele). Lze proto hledat optimum kritéria prostřednictvím x .

Za povšimnutí stojí, že přiřazení $x \rightarrow y$ podle (3.40) jednoznačné je na rozdíl od přiřazení $x \rightarrow u$ (m rovnic pro r neznámých složek vektoru u). Jednoznačné je pouze přiřazení $x \rightarrow Bu$.

Tato nejednoznačnost sice nevylučuje použití transformace (3.40), ale představuje jistou nepříjemnost při vyjadřování kritériálního funkcionálu pomocí Bu .

Všimněme si dále korespondence $x \rightarrow r$, kterou potřebujeme pro finální určení přenosu regulátoru po provedené optimalizaci.

$$\begin{aligned}
 u &= -r y, \\
 Bu &= -B r y, \\
 \frac{1}{(1-q)D} \left\{ (1-q)A_P^- B_P^- x - B_P^- G C \right\} &= \frac{(A_P^+)^{-1}}{D} \left(q^k B_P^- x + F C \right), \\
 A_P^- B_P^- x - \frac{B_P^- G C}{1-q} &= \quad (3.45)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (m, m)(m, r)(r, 1)(m, r)(r, m)(m, 1) \\
 = -B r (A_P^+)^{-1} \left(q^k B_P^- x + F C \right). \\
 (m, r)(r, m)(m, m) \quad (m, r)(r, 1) (m, m)(m, 1)
 \end{aligned}$$

Jedná se opět o soustavu m rovnic pro rm neznámých prvků r . Řešení není jednoznačné, lze splnit ještě další podmínky. Řešíme např. rozpisem soustavy, která má následující strukturu

$$\begin{array}{c} 1 \\ m \end{array} \begin{array}{c} r \\ m \end{array} \begin{array}{c} m \\ r \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ m \end{array} \begin{array}{c} -B \\ r \end{array} \begin{array}{c} m \\ m \end{array} \quad (3.46)$$

Abychom mohli přijmout transformaci (3.40) zbývá ukázat, že pro všechna stabilní x je r fyzikálně realizovatelný, tedy $\lim_{q \rightarrow 0} r \neq \infty$. Skutečně, limitním přechodem (3.44 a 45)

$$A_P^-(0) B_P^-(0) x(0) = D(0) B(0) u(0) + B_P^-(0) G(0) C(0), \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_P^-(0) \mathbf{B}_P^-(0) \mathbf{x}(0) - \mathbf{B}_P^-(0) \mathbf{G}(0) \mathbf{C}(0) &= \\ &= -\mathbf{B}(0) \mathbf{r}(0) \left[\mathbf{A}_P^+(0) \right]^{-1} \mathbf{F}(0) \mathbf{C}(0) . \end{aligned} \quad (3.48)$$

Dosazením (3.47) do (3.48) dostaneme vzhledem k předpokladu konečného řízení

$$\mathbf{D}(0) \mathbf{u}(0) = -\mathbf{r}(0) \left[\mathbf{A}_P^+(0) \right]^{-1} \mathbf{F}(0) \mathbf{C}(0) \neq \infty , \quad (3.49)$$

$$\mathbf{F}(0) = \lim_{q \rightarrow 0} \mathbf{F}(q) \neq 0 ,$$

což vyplývá z limitního přechodu (3.42)

$$\mathbf{A}_P^-(0) \mathbf{F}(0) = \mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F}(0) \neq 0 . \quad (3.50)$$

Limitu $\mathbf{C}(0)$ můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, v opačném případě by se jednalo pouze o dopravní zpoždění filtru poruchy. V tomto případě můžeme se stejným výsledkem řešit úlohu tak, že ve všech složkách matice $\mathbf{C}$ vypustíme nulové kořenové činitele. Fyzikálně se jedná pouze o časový posun posloupností regulačního pochodu. Dále, vzhledem k tomu, že i $[\mathbf{A}_P^+(0)]^{-1} \neq 0$

$$\left[\mathbf{A}_P^+(0) \right]^{-1} \mathbf{F}(0) \mathbf{C}(0) \neq 0 , \quad (3.51)$$

$$\mathbf{r}(0) \left[\mathbf{A}_P^+(0) \right]^{-1} \mathbf{F}(0) \mathbf{C}(0) \neq \infty \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r}(0) \neq \infty \quad \text{cbd.}$$

V tomto okamžiku jsme ukázali, že navržená strategie hledání optima vede na fyzikálně reálný regulátor.

V dalším se věnujeme výkladu konstrukce a způsobu hledání optima kritériálního funkcionálu. Úvodem poznamenejme, že přesné vyjádření kvadratického funkcionálu podle (3.37) je možné pouze v případě, že regulovaná soustava má stejný počet vstupních i výstupních veličin $m = r$. V obecném případě je nutné přijmout omezení či spíše modifikaci kritériálního pohledu vyplývající ze zvoleného přístupu. Potíže při sestavení kritéria plynou z

poněkud nepříjemných okolností, o kterých jsem se již zmiňoval dříve, z nejednoznačnosti přiřazení $x \rightarrow u$, viz (3.44)

$$B u = \frac{1}{(1-q)D} \left\{ (1-q) A_P^- B_P^- x - B_P^- G C \right\},$$

$$\Delta u = (1-q)u, \quad du = -ry \quad (3.52)$$

$$B \Delta u = \frac{1}{D} \left\{ (1-q) A_P^- B_P^- x - B_P^- G C \right\}.$$

$$(m, r)(r, 1)(1, 1) \quad (m, m)(m, r)(r, 1) \quad (m, r)(r, m)(m, 1)$$

Úloha určení Δu (které potřebujeme ke konstrukci kritéria) je úlohou řešení obecně m lineárních rovnic pro r neznámých složek vektoru Δu . Mohou nastat obecně tři různé situace.

- 1) $r > m$ větší počet vstupních než výstupních veličin regulované soustavy

V tomto případě se jedná o řešení soustavy méně rovnic než je neznámých. Řešení takové soustavy není jednoznačné.

Volme takové řešení $\tilde{\Delta u}$ (touto volbou specifikujeme modifikaci kritéria), které má minimální normu $\|\tilde{\Delta u}\|^2$, viz Appendix 3

$$\tilde{\Delta u} = \frac{1}{D} B_P^{-1} \left\{ (1-q) A_P^- B_P^- x - B_P^- G C \right\},$$

$$(r, 1)(1, 1)(r, m) \quad (m, m)(m, r)(r, 1) \quad (m, r)(r, m)(m, 1)$$

$$B_P^{-1} = B^T (B B^T)^{-1} \quad (3.53)$$

- 2) $r < m$ menší počet vstupních než výstupních veličin regulované soustavy

Jedná se o řešení přeuročené soustavy více rovnic než je neznámých. Přesné řešení takové soustavy neexistuje, volme však takové odchýlené řešení $\tilde{\Delta u} = \Delta u + e$ s minimální odchyl-

kou ε (ve smyslu minima součtu čtverců jednotlivých složek), viz Appendix 3

$$\mathbf{B} \Delta \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{B} (\Delta \mathbf{u} + \varepsilon) = \frac{1}{\mathcal{D}} \left\{ (1-q) \mathbf{A}_P^- \mathbf{B}_P^- \mathbf{x} - \mathbf{B}_P^- \mathbf{G} \mathbf{C} \right\},$$

$$\varepsilon^T \varepsilon \rightarrow \min.,$$

$$\Delta \tilde{\mathbf{u}} = \frac{1}{\mathcal{D}} \mathbf{B}_L^{-1} \left\{ (1-q) \mathbf{A}_P^- \mathbf{B}_P^- \mathbf{x} - \mathbf{B}_P^- \mathbf{G} \mathbf{C} \right\},$$

$$(r,1) \quad (1,1)(r,m) \quad (m,m)(m,r)(r,1) \quad (m,r)(r,m)(m,1)$$

$$\mathbf{B}_L^{-1} = (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T. \quad (3.54)$$

- 3) $r = m$ stejný počet vstupních a výstupních veličin regulované soustavy (nejčastější situace)

V tomto případě jde o řešení stejného počtu lineárních rovnic jako neznámých. Je-li matice $\mathbf{B}$ regulární, řešení je jediné a jednoznačné, pravá a levá pseudoinverze matice $\mathbf{B}$ ad 1) a 2) přechází v prostou inverzi a kriteriální funkcionál lze minimalizovat přesně ve tvaru (3.37).

$$\Delta \tilde{\mathbf{u}} = \Delta \mathbf{u} = \frac{1}{\mathcal{D}} \mathbf{B}^{-1} \left\{ (1-q) \mathbf{A}_P^- \mathbf{B}_P^- \mathbf{x} - \mathbf{B}_P^- \mathbf{G} \mathbf{C} \right\}.$$

$$(r,1) \quad (1,1)(r,r) \quad (r,r)(r,r)(r,1) \quad (r,r)(r,r)(r,1)$$

$$(3.55)$$

Poznámka : Jestliže by $\mathbf{B}$ nebyla regulární, jednalo by se fyzikálně o dynamický systém jehož některý výstupní signál by buď vůbec nezávisel na vstupních signálech, případně jeho výstupy by byly lineárně závislé nebo by některý vstup neovlivňoval výstupní signály vůbec, případně by bylo lze stejné reakce dosáhnout ∞ mnoha způsoby lineárně závislými vstupy. Ve všech těchto případech lze však definovat kritérium podle 1) nebo 2) a modifikovat tak kriteriální pohled tak, aby měl fyzikální smysl.

☐ Konec poznámky

Kritérium, které budeme dále uvažovat je obecně modifikováno do tvaru

$$J = \| \mathbf{y} \|^2 + \alpha \| \Delta \tilde{\mathbf{u}} \|^2 \rightarrow \min. \quad (3.56)$$

Uvažujme nejprve situaci $r > m$ (více vstupů než výstupů z regulované soustavy). Ostatní možné situace se liší od uvedené pouze tím, že v souladu s (3.54) je pro $r < m$ nahrazena pseudoinverze pravá pseudoinverzí levou, případně pro $r = m$ prostou inverzí matice $\mathbf{B}$, viz (3.55).

$$J = \left\| \mathbf{q}^k \frac{(\mathbf{A}_P^+)^{-1}}{\mathcal{D}} \mathbf{B}_P^- \mathbf{x} + \frac{(\mathbf{A}_P^+)^{-1}}{\mathcal{D}} \mathbf{F} \mathbf{C} \right\|^2 + \\ + \alpha \left\| \frac{1-q}{\mathcal{D}} \mathbf{B}_P^{-1} \mathbf{A}_P^- \mathbf{B}_P^- \mathbf{x} - \frac{\mathbf{B}_P^{-1}}{\mathcal{D}} \mathbf{B}_P^- \mathbf{G} \mathbf{C} \right\|^2, \\ \mathbf{a} = \mathbf{q}^k \frac{(\mathbf{A}_P^+)^{-1}}{\mathcal{D}} \mathbf{B}_P^-, \quad \mathbf{b} = \frac{(\mathbf{A}_P^+)^{-1}}{\mathcal{D}} \mathbf{F} \mathbf{C}, \\ \mathbf{c} = \frac{1-q}{\mathcal{D}} \mathbf{B}_P^{-1} \mathbf{A}_P^- \mathbf{B}_P^-, \quad \mathbf{d} = - \frac{\mathbf{B}_P^{-1}}{\mathcal{D}} \mathbf{B}_P^- \mathbf{G} \mathbf{C}, \quad (3.57)$$

$$J = \| \mathbf{a} \mathbf{x} + \mathbf{b} \|^2 + \| \mathbf{c} \mathbf{x} + \mathbf{d} \|^2 = \left[\text{viz (A1.59)} \right] = \\ = \| \mathbf{g} \mathbf{x} \|^2 + 2 \left[\langle \mathbf{a} \mathbf{x}, \mathbf{b} \rangle + \alpha \langle \mathbf{c} \mathbf{x}, \mathbf{d} \rangle \right] + \| \mathbf{b} \|^2 + \alpha \| \mathbf{d} \|^2, \\ \mathbf{g}^T \mathbf{g} = \mathbf{a}^T \mathbf{a} + \alpha \mathbf{c}^T \mathbf{c} \quad ; \quad \mathbf{g}, 1/\mathbf{g} \dots \text{stab.} \quad (3.58)$$

Věnujme se podrobněji naznačenému rozkladu, který v případě více-parametrové syntézy není zcela triviální

$$\mathbf{a}^T \mathbf{a} + \alpha \mathbf{c}^T \mathbf{c} = \frac{(\mathbf{B}_P^-)^T}{\mathcal{D} \bar{\mathcal{D}}} \left[(\mathbf{A}_P^+)^{-1} \right]^T (\mathbf{A}_P^+)^{-1} \bar{\mathbf{B}}_P^- - \\ - \frac{(1-q)^2}{q \mathcal{D} \bar{\mathcal{D}}} (\mathbf{B}_P^-)^T (\mathbf{A}_P^-)^T (\mathbf{B}_P^{-1})^T \bar{\mathbf{B}}_P^{-1} \bar{\mathbf{A}}_P^- \bar{\mathbf{B}}_P^-, \quad (3.58a)$$

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \bar{A}_P^- \bar{A}_P^+ \Rightarrow \bar{A}_P^- = \bar{A} (\bar{A}_P^+)^{-1} \Rightarrow \bar{A}_P^- = \bar{A} (\bar{A}_P^+)^{-1}, \\ &\Rightarrow (\bar{A}_P^-)^T = \left[(\bar{A}_P^+)^{-1} \right]^T \bar{A}^T, \\ \bar{A}^T \bar{A} + \alpha \bar{C}^T \bar{C} &= \end{aligned} \quad (3.59)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{(\bar{B}_P^-)^T}{\alpha} \left[(\bar{A}_P^+)^{-1} \right]^T \left\{ E - \frac{(1-\alpha)^2}{\alpha} \bar{A}^T (\bar{B}_P^{-1})^T \bar{B}_P^{-1} \bar{A} \right\} (\bar{A}_P^+)^{-1} \bar{B}_P^-, \\ \bar{W} &= (\bar{B}_P^-)^T \text{adj}(\bar{A}_P^+)^T \left\{ E - \frac{(1-\alpha)^2}{\alpha} \bar{A}^T \text{adj}(\bar{B}\bar{B}^T) \bar{B}\bar{B}^T \text{adj}(\bar{B}\bar{B}^T) \bar{A} \right\} \cdot \\ &\quad \cdot \text{adj} \bar{A}_P^+ \bar{B}_P^- = \frac{\tilde{W}}{\alpha}, \end{aligned} \quad (3.60)$$

α ... stupeň matice $\begin{bmatrix} \bar{B}^T \text{adj}(\bar{B}\bar{B}^T) \bar{A} & \text{adj} \bar{A}_P^+ \bar{B}_P^- \end{bmatrix}$
zvětšený o jedničku .

Aplikujeme-li symetrický reflexní rozklad na matici $\bar{W}$, dostaneme

$$\bar{W} = \bar{W}^* (\bar{W}^*)^T = \tilde{W}^* (\tilde{W})^T, \quad (3.61)$$

$\bar{W}^*$ resp. $\tilde{W}^*$... reflexe matice $\bar{W}$ resp. $\tilde{W}$.

Nejprve provedeme kanonický rozklad matice $\tilde{W}$, viz Appendix 1, vztahy (A1.48, 49)

$$\begin{aligned} \tilde{W} &= \mathbb{J} \text{diag}(\omega_1 \bar{\omega}_1, \omega_2 \bar{\omega}_2, \dots, \omega_s \bar{\omega}_s, 0, \dots, 0) \mathbb{J}^T, \quad (3.62) \\ (r, r) \quad (r, r) \quad s &= \text{rank } \tilde{W}, \end{aligned}$$

$\omega_i \bar{\omega}_i$... symetrický rozklad invariantních faktorů matice $\bar{W}$,
 $i = 1, 2, \dots, s$,

$\mathbb{J}$... jistá elementární matice ($\det \mathbb{J} = \text{konst.}$) získaná
kanonickým rozkladem .

Naznačený symetrický rozklad invariantních faktorů je možný,

neboť $\tilde{W}^T = \tilde{W}$. Následnou reflexí jeho složek již dostaneme snadno hledanou $\tilde{W}^*$

$$\tilde{W}^* = \mathcal{D} \text{diag} (w_1^*, w_2^*, \dots, w_s^*, 0, \dots, 0) \quad (3.63)$$

(r, r)

Zbývá ještě určit reflexní rozklad skalárního polynomu jmenovatele (3.59)

$$w_0 = \det A_P^+ \det(BB^T) \det(\overline{B\overline{B}^T}) \det \overline{A_P^+} = w_0^* \overline{w_0^*} \quad (3.64)$$

Pozn.: Determinant sdružené polynomiální matice je RLF, proto i w_0 je RLF a značím malým písmenem.

Konečně pro hledanou matici RLF g ze vztahu (3.58) můžeme psát

$$g^T = \frac{W^*}{\mathcal{D}^* w_0^*}, \quad g = \frac{(W^*)^T}{\mathcal{D}^* w_0^*} \quad (3.65)$$

(r, r)

Poznámka :

1) Pro případ $r < m$ (více výstupních než vstupních signálů regulované soustavy) je třeba ve vztahu (3.57) nahradit pravou pseudoinverzi B_P^{-1} pseudoinverzí levou B_L^{-1} , viz (3.54)

$$c = \frac{1-q}{\mathcal{D}} B_L^{-1} A_P^- B_P^-, \quad d = - \frac{B_L^{-1}}{\mathcal{D}} B_P^- G C \quad (3.66a)$$

Matice W podle (3.60) přechází v tomto případě na

$$W = (B_P^-)^T \text{adj}(A_P^+)^T \cdot \left\{ E - \frac{(\det(B^T B) \det(\overline{B^T \overline{B}}))^{(1-q)^2}}{q} A^T B \text{adj}(B^T B) \left[\text{adj}(\overline{B^T \overline{B}}) \right] B^T \overline{A} \right\} \text{adj} \overline{A_P^+} \overline{B_P^-} = \frac{\tilde{W}}{q}$$

$$\alpha = \partial \left\{ \left[\text{adj}(B^T B) \right] B^T A \text{adj} \overline{A_P^+} \overline{B_P^-} \right\} + 1,$$

a polynom w_0 podle (3.64) na tvar

$$\omega_0 = \det \mathbf{A}_P^+ \det(\mathbf{B}^T \mathbf{B}) \det(\overline{\mathbf{B}}^T \overline{\mathbf{B}}) \det \overline{\mathbf{A}}_P^+ \quad (3.67)$$

2) Pro nejčastější případ $r=m$ (stejný počet vstupních a výstupních veličin regulované soustavy) přechází v uvedených vztazích pseudoinverze matice $\mathbf{B}$ na inverzi prostou.

$$\mathbf{c} = \frac{1-q}{D} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_P^- \mathbf{B}_P^-, \quad \mathbf{d} = - \frac{\mathbf{B}^{-1}}{D} \mathbf{B}_P^- \mathbf{G} \mathbf{C} \quad (3.68a)$$

Potom

$$\begin{aligned} \mathbf{W} &= (\mathbf{B}_P^-)^T \text{adj}(\mathbf{A}_P^+)^T \cdot \\ &\cdot \left\{ E - \frac{(1-q)^2}{q} \mathbf{A}^T \text{adj} \mathbf{B}^T \text{adj} \overline{\mathbf{B}} \overline{\mathbf{A}} \right\} \text{adj} \overline{\mathbf{A}}_P^+ \overline{\mathbf{B}}_P^- = \frac{\tilde{W}}{q^\alpha} \\ \alpha &= \partial \left\{ \text{adj} \mathbf{B} \mathbf{A} \text{adj} \mathbf{A}_P^+ \mathbf{B}_P^- \right\} + 1 \end{aligned} \quad (3.68)$$

a ω_0 podle (3.64)

$$\omega_0 = \det \mathbf{A}_P^+ \det \mathbf{B} \det \overline{\mathbf{B}} \det \overline{\mathbf{A}}_P^+ \quad (3.69)$$

□ Konec poznámky

Ukázali jsme způsob rozkladu (3.58), pokračujeme v úvahách týkajících se minimalizace kritériálního funkcionálu (3.57)

$$J = \| \mathbf{g} \mathbf{x} \|^2 + 2 \left[\langle \mathbf{a} \mathbf{x}, \mathbf{b} \rangle + \mathbf{x} \langle \mathbf{c} \mathbf{x}, \mathbf{d} \rangle \right] + \| \mathbf{b} \|^2 + \mathbf{x} \| \mathbf{d} \|^2,$$

$$\langle \mathbf{a} \mathbf{x}, \mathbf{b} \rangle + \mathbf{x} \langle \mathbf{c} \mathbf{x}, \mathbf{d} \rangle =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\zeta} \left[\text{tr} (\mathbf{a} \mathbf{x} \overline{\mathbf{b}}^T) + \text{tr} \mathbf{x} \mathbf{c} \mathbf{x} \overline{\mathbf{d}}^T \right] \frac{d\mathbf{q}}{q} =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \nabla \text{tr} \mathbf{A} \mathbf{B} = \text{tr} \mathbf{B} \mathbf{A} \\ \text{tr}(\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2) = \text{tr} \mathbf{C}_1 + \text{tr} \mathbf{C}_2 \end{array} \right] = \quad (3.70)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\zeta} \text{tr} (\mathbf{x} \overline{\mathbf{b}}^T \mathbf{a} + \mathbf{x} \mathbf{x} \overline{\mathbf{d}}^T \mathbf{c}) \frac{d\mathbf{q}}{q} =$$

$$= \langle x, \bar{a}^T b + \alpha \bar{c}^T d \rangle = \left[\langle a, b \rangle = \langle a \bar{c}, b (\bar{c}^{-1})^T \rangle \right] = \left[\begin{array}{c} \langle d \bar{c}, (\bar{d}^T)^{-1} b \rangle \\ \text{viz (A1.57/10)} \end{array} \right] =$$

$$= \langle g x, (\bar{a}^T b + \alpha \bar{c}^T d) (\bar{g}^T)^{-1} \rangle,$$

tedy

$$\begin{aligned} J &= \| g x \|^2 + 2 \langle g x, (\bar{a}^T b + \alpha \bar{c}^T d) (\bar{g}^T)^{-1} \rangle + \| b \|^2 + \alpha \| d \|^2 = \\ &= \| g x + \underbrace{(\bar{a}^T b + \alpha \bar{c}^T d) (\bar{g}^T)^{-1}}_m \|^2 - \| (\bar{a}^T b + \alpha \bar{c}^T d) (\bar{g}^T)^{-1} \|^2 + \| b \|^2 + \alpha \| d \|^2. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Abychom zajistili stabilitu regulačního obvodu je nutné minimalizovat kritériální funkcionál (3.71) pouze v podprostoru stabilních $x = x_+$. Je proto nutné provést nejprve součtovou faktORIZACI zavedené matice RLF m

$$m = (\bar{a}^T b + \alpha \bar{c}^T d) (\bar{g}^T)^{-1} = m_+ + m_- \quad (3.72)$$

Tento rozklad lze realizovat buď součtovou faktORIZACÍ každého prvku matice zvlášť nebo v uzavřeném tvaru dále naznačeným řešením diofantické rovnice. Pro $r > m$,

$$\begin{aligned} m &= (\bar{a}^T b + \alpha \bar{c}^T d) (\bar{g}^T)^{-1} = \dots = \\ &= \frac{w_0}{q^k} (\bar{B}_P)^T \left\{ \left[(\bar{A}_P^+)^T \right]^{-1} (\bar{A}_P^+)^{-1} F + \right. \\ &\quad \left. + \alpha (1-q) q^{k-1} (\bar{A}_P^-)^T (\bar{B} \bar{B}^T)^{-1} \bar{B} \bar{B}^T (\bar{B} \bar{B}^T)^{-1} \bar{B}_P^T G \right\} C (\bar{W}^*)^{-1} = \\ &= \frac{M}{M_0} \quad (3.73) \end{aligned}$$

Poznámka : Matice RLF m má opět pro jiné relace počtů vstupních a výstupních veličin regulované soustavy poněkud modifikovanou strukturu

1) $r < m$ (více výstupních než vstupních veličin)

$$\begin{aligned} m &= (\bar{a}^T b + \alpha \bar{c}^T d) (\bar{g}^T)^{-1} = \dots = \\ &= \frac{\bar{\omega}_0^*}{q^k d^*} (\bar{b}_P^-)^T \left\{ \left[(\bar{A}_P^+)^T \right]^{-1} (\bar{A}_P^+)^{-1} F + \right. \\ &\quad \left. + \alpha (1-q) q^{k-1} (\bar{A}_P^-)^T \bar{b} (\bar{b}^T \bar{b})^{-1} (\bar{b}^T \bar{b})^{-1} \bar{b}^T \bar{b}_P^- G \right\} C (\bar{D}^*)^{-1} = \\ &= \frac{M}{M_0} \quad (3.74) \end{aligned}$$

2) $r = m$ (stejný počet vstupních a výstupních veličin)

$$\begin{aligned} m &= (\bar{a}^T b + \alpha \bar{c}^T d) (\bar{g}^T)^{-1} = \dots = \quad (3.75) \\ &= \frac{\bar{\omega}_0^*}{q^k d^*} (\bar{b}_P^-)^T \left\{ \left[(\bar{A}_P^+)^T \right]^{-1} (\bar{A}_P^+)^{-1} F + \right. \\ &\quad \left. + \alpha (1-q) q^{k-1} (\bar{A}_P^-)^T \bar{b}^{-1} \bar{b}^{-1} \bar{b}_P^- G \right\} C (\bar{D}^*)^{-1} = \frac{M}{M_0} . \end{aligned}$$

□ Konec poznámky

Jmenovatele M_0 rozložíme na součin stabilního a nestabilního faktoru

$$M_0 = M_0^+ M_0^- \quad (3.76)$$

a rozkladem m na parciální maticové zlomky a sružením stabilních a nestabilních pak získáme hledanou diofantickou rovnici

$$m = \frac{M}{M_0^+ M_0^-} = \frac{K_1}{M_0^+} + \frac{K_2}{M_0^-} = m_+ + m_- \quad (3.77)$$

$$K_1 M_0^- + K_2 M_0^+ = M \quad (3.78)$$

Koeficienty rozkladu získáme řešením diofantické rovnice (3.78)

$$m_+ = \frac{K_1}{M_0^+} \quad (3.79)$$

Potom již snadno určíme hledané optimum kritériálního funkcionálu (3.71) v podprostoru stabilních $x = x_+$

$$J = \| g x + m_+ + m_- \|^2 - \| (\bar{a}^T b + x \bar{c}^T d) (\bar{g}^T)^{-1} \|^2 + \| b \|^2 + x \| d \|^2 = J(x) .$$

$$\min_{x \in x_+} J(x) = \| m_- \|^2 - \| (\bar{a}^T b + x \bar{c}^T d) (\bar{g}^T)^{-1} \|^2 + \| b \|^2 + x \| d \|^2 \quad (3.80)$$

$$\text{pro } g x = -m_+ , \quad (3.81)$$

$$x = x_{\text{opt.}} = -g^{-1} m_+ = - \frac{D^* \omega_0^*}{M_0^+} \left[(W^*)^T \right]^{-1} K_1 .$$

K návrhu přenosové matice optimálního regulátoru je nutné vyřešit soustavu lineárních rovnic (3.45)

$$A_P^- B_P^- x_{\text{opt.}} - \frac{B_P^- G C}{1-q} = \quad (3.82)$$

$$(m, m)(m, r)(r, 1)(m, r)(r, m)(m, 1)$$

$$= -B \quad r \quad (A_P^+)^{-1} \left(q^k B_P^- x + F C \right) .$$

$$(m, r)(r, m)(m, m) \quad (m, r)(r, 1) \quad (m, m)(m, 1)$$

Jedná se o soustavu m rovnic pro rm neznámých prvků přenosové matice regulátoru r . Řešení není pro $r > 1$ jednoznačné, lze obecně splnit ještě další podmínky. Řešme rozpisem soustavy, která má následující strukturu.

$$\begin{array}{c} 1 \\ m \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c} r \\ m \end{array} \begin{array}{|c|} \hline -B \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} m \\ r \end{array} \begin{array}{|c|} \hline r \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ m \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array}$$

Zde naše strastiplná a možná i tak trochu krkolomná cesta za algoritmem řízení končí, řešením je hledaná přenosová matice regulátoru, která definuje algoritmus řízení.

VYSOKÁ ŠKOLA STROJNÍ A TEXTILNÍ V LIBERCI
fakulta strojní

JANEČEK Josef

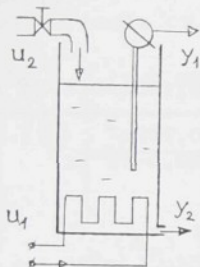
PŘÍSPĚVEK K ALGEBRAICKÉMU

POJETÍ SYNTÉZY REGULAČNÍHO OBVODU

APLIKAČNÍ PŘÍKLAD

PŘÍLOHA post festum HABILITAČNÍ PRÁCE

Příklad 3.4



Navrhněme optimální algoritmus řízení strategie MVC ($\pi = 0$) dvouparametrového regulačního obvodu.

Regulovanou soustavou je nádrž s otvorem u dna, kterým odtéká volně kapalina. Množství kapaliny je úměrné hydrostatickému tlaku, který odpovídá výšce hladiny v nádrži. Úkolem je řídit teplotu a množství vytékající kapaliny z výměníku, akčními veličinami jsou příkon topidla a přítok kapaliny do nádrže.

Parametry : průřez nádrže

teplota vstupní kapaliny

perioda vzorkování

$$S = 4255,32 \text{ mm}^2 \sim 42,6 \text{ cm}^2,$$

$$\theta_0 = 10^\circ\text{C},$$

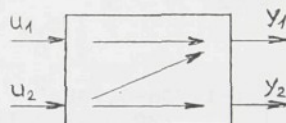
$$T = 5 \text{ sec.}$$

u_1 ... příkon topidla [kW]

u_2 ... vstupní přítok [l/min]

y_1 ... teplota na výstupu [$^\circ\text{C}$]

y_2 ... výstupní průtok [l/min]



Pracovní bod, ke kterému je popis vztažen, a ve kterém je linearizován :

$$u_{10} = 1 \text{ kW}, \quad y_{10} = 15^\circ\text{C},$$

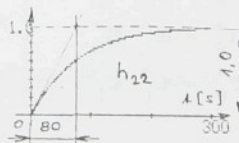
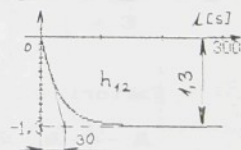
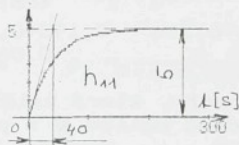
$$u_{20} = 2,88 \text{ l/min}, \quad y_{20} = 2,88 \text{ l/min},$$

$$f_{y_1 u_1} = \frac{1}{40 s + 1} = f_{11}(s)$$

$$f_{y_1 u_2} = \frac{-1,3}{30 s + 1} = f_{12}(s)$$

$$f_{y_2 u_1} = 0 = f_{21}(s)$$

$$f_{y_2 u_2} = \frac{1}{80 s + 1} = f_{22}(s)$$



Diskrétní popis :

$$f_{11}(q) = \dots = \frac{0,6q}{1-0,88q} \quad , \quad f_{12}(q) = \dots = \frac{-0,19q}{1-0,85q}$$

$$f_{22}(q) = 0 \quad , \quad f_{22}(q) = \dots = \frac{0,06q}{1-0,94q}$$

$$y_1(q) = f_{11}(q)u_1(q) + f_{12}(q)u_2(q) = \dots$$

$$\dots = \frac{(0,6q-0,51q^2)u_1 + (-0,195q+0,172q^2)u_2}{1-1,73q+0,748q^2}$$

$$y_2(q) = f_{22}(q)u_2(q) = \frac{0,06q}{1-0,94q} u_2$$

Diferenční vyjádření :

$$y_1(j) = 1,73y_1(j-1) - 0,748y_1(j-2) + 0,6u_1(j-1) - 0,51u_1(j-2) - 0,195u_2(j-1) + 0,172u_2(j-2)$$

$$y_2(j) = 0,94y_2(j-1) + 0,06u_2(j-1)$$

Maticové vyjádření :

$$\begin{bmatrix} y_1(j) \\ y_2(j) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,73 & 0 \\ 0 & 0,94 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(j-1) \\ y_2(j-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,748 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(j-2) \\ y_2(j-2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,6 & -0,195 \\ 0 & 0,06 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(j-1) \\ u_2(j-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,51 & 0,172 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(j-2) \\ u_2(j-2) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1-1,73q+0,748q^2 & 0 \\ 0 & 1-0,94q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(q) \\ y_2(q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,6q-0,51q^2 & -0,195q+0,172q^2 \\ 0 & 0,06q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(q) \\ u_2(q) \end{bmatrix}$$

$$A y = q^k B u + \hat{C} d + \frac{1}{1-q} k_0$$

$$A = \begin{bmatrix} 1-1,73q+0,748q^2 & 0 \\ 0 & 1-0,94q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-0,88q)(1-0,85q) & 0 \\ 0 & 1-0,94q \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0,6-0,51q & -0,195+0,172q \\ 0 & 0,06 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,6(1-0,85q) & -0,195(1-0,88q) \\ 0 & 0,06 \end{bmatrix}$$

Uvažujme poruchu, která zatěžuje vektor regulovaných veličin regre způsobem, odtud matice C a polynom $D(q)$

$$C = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad D(q) = 1$$

Faktorizace matic A , B , C je v tomto případě jednoduchá

$$A = A_P^- A_P^+ = A_L^+ A_L^-$$

$$B = B_P^- B_P^+ = B_L^+ B_L^-$$

$$C = C_P^- C_P^+ = C_L^+ C_L^-$$

$$A_P^+ = A_L^+ = A \quad , \quad A_P^- = A_L^- = E$$

$$B_P^+ = B_L^+ = B \quad , \quad B_P^- = B_L^- = E$$

$$C_P^+ = 1 \quad , \quad C_P^- = C \quad , \quad C_L^+ = E \quad , \quad C_L^- = C$$

Řešením diofantické rovnice (3.42) vyjádříme $\mathbb{F}$, $\mathbb{G}$

$$(1-q) \mathbb{A}_P^- \mathbb{F} + q^k \mathbb{B}_P^- \mathbb{G} = \mathbb{E} \quad ,$$

$$(1-q) \mathbb{F} + q^k \mathbb{G} = \mathbb{E} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{F} = \mathbb{G} = \mathbb{E} \quad .$$

Rozklad podle (3.58) realizujeme rozkladem jednotlivých prvků

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} (1-0,88q) (1-0,85q) & 0 \\ 0 & 1-0,94q \end{bmatrix} \quad ,$$

$$\mathbb{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{(1-0,88q) (1-0,85q)} & 1 \\ 0 & \frac{1}{1-0,94q} \end{bmatrix} \quad ,$$

$$\mathbb{a} = q^k \frac{(\mathbb{A}_P^+)^{-1}}{\mathcal{D}} \mathbb{B}_P^- = \begin{bmatrix} k=1, \mathcal{D}=1 \\ \mathbb{A}_P^+ = \mathbb{A}, \mathbb{B}_P^- = \mathbb{E} \end{bmatrix} = q \mathbb{A}^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} q & 0 \\ \frac{q}{(1-0,88q) (1-0,85q)} & \frac{q}{1-0,94q} \end{bmatrix} \quad ,$$

$$\mathcal{G} \mathcal{G}^- = \mathbb{a} \mathbb{a}^- + \kappa \mathbb{c} \mathbb{c}^- \quad ; \quad \mathcal{G}, 1/\mathcal{G} \dots \text{stab.} \quad ,$$

$$\mathcal{G} \mathcal{G}^- = \mathbb{a} \mathbb{a}^- + \kappa \mathbb{c} \mathbb{c}^- = \begin{bmatrix} \kappa = 0 \end{bmatrix} = \mathbb{a} \mathbb{a}^- =$$

$$= \begin{bmatrix} q & 0 \\ \frac{q}{(1-0,88q) (1-0,85q)} & \frac{q}{1-0,94q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{q}{(q-0,88) (q-0,85)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{q-0,94} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \quad ,$$

$$\alpha = \frac{q}{(1-0,88q) (1-0,85q)} \frac{q}{(q-0,88) (q-0,85)} = \vartheta_1^- \vartheta_1 \quad ,$$

$$\vartheta_1 = \frac{1}{(1-0,88q) (1-0,85q)} \quad , \quad \vartheta_1^- = \frac{q^2}{(q-0,88) (q-0,85)} \quad ,$$

$$\beta = \frac{q}{1-0,94q} \frac{1}{q-0,94} = \vartheta_2^- \vartheta_2 \quad , \quad \vartheta_2 = \frac{1}{1-0,94q} \quad , \quad \vartheta_2^- = \frac{q}{q-0,94} \quad ,$$

$$\mathbb{a} \mathbb{a}^- = \mathcal{G} \mathcal{G}^- \quad , \quad \mathcal{G} = \begin{bmatrix} \vartheta_1 & 0 \\ 0 & \vartheta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{(1-0,88q) (1-0,85q)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-0,94q} \end{bmatrix} \quad .$$

Pomocný vektor RLF určíme podle (3.75)

$$\mathbb{m} = (\mathcal{G}^T)^{-1} (\mathbb{a}^T \mathbb{b} + \kappa \mathbb{c}^T \mathbb{d}) = \begin{bmatrix} \kappa = 0 \end{bmatrix} = (\mathcal{G}^T)^{-1} \mathbb{a}^T \mathbb{b} \quad ,$$

$$(\mathcal{G}^T)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{q^2}{(q-0,88)(q-0,85)} & 0 \\ 0 & \frac{q}{q-0,94} \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$= \frac{(q-0,88)(q-0,85)(q-0,94)}{q^3} \begin{bmatrix} \frac{q}{q-0,94} & 0 \\ 0 & \frac{q^2}{(q-0,88)(q-0,85)} \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{B} = \frac{(\mathbb{A}_P^+)^{-1}}{\mathcal{D}} \mathbb{F} \mathbb{C} = \begin{bmatrix} \mathbb{A}_P^+ = \mathbb{A} \\ \mathbb{F} = \mathbb{E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(1-0,88q)(1-0,85q)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-0,94q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{(1-0,88q)(1-0,85q)} \\ \frac{1}{1-0,94q} \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{M} = \frac{(q-0,88)(q-0,85)(q-0,94)}{q^3} \begin{bmatrix} \frac{q}{q-0,94} & 0 \\ 0 & \frac{q^2}{(q-0,88)(q-0,85)} \end{bmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{bmatrix} \frac{q}{(q-0,88)(q-0,85)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{q-0,94} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{(1-0,88q)(1-0,85q)} \\ \frac{1}{1-0,94q} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{q(1-0,88q)(1-0,85q)} \\ \frac{1}{q(1-0,94q)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{q} \\ \frac{1}{q} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1,73(1-0,432q)}{(1-0,88q)(1-0,85q)} \\ \frac{0,94}{1-0,94q} \end{bmatrix}}_{m_+}$$

Optimální hodnotu $x_{\text{opt.}}$ vyjádříme podle vztahu (3.81)

$$x_{\text{opt.}} = -\mathcal{G}^{-1} m_+ =$$

$$= -(1-0,88q)(1-0,85q)(1-0,94q) \begin{bmatrix} \frac{1}{1-0,94q} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(1-0,88q)(1-0,85q)} \end{bmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{bmatrix} \frac{1,73(1-0,432q)}{(1-0,88q)(1-0,85q)} \\ \frac{0,94}{1-0,94q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1,73(1-0,432q) \\ -0,94 \end{bmatrix}$$

a přenosovou matici regulátoru řešením rovnice (3.82)

$$\mathbb{A}_P^- \mathbb{B}_P^- x_{\text{opt.}} - \frac{\mathbb{B}_P^- \mathbb{G} \mathbb{C}}{1-q} = -\mathbb{B} r (\mathbb{A}_P^+)^{-1} \left(q^k \mathbb{B}_P^- x_{\text{opt.}} + \mathbb{F} \mathbb{C} \right),$$

$$\mathbb{A}_P^- = \mathbb{B}_P^- = \mathbb{G} = \mathbb{F} = \mathbb{E}, \quad \mathbb{A}_P^+ = \mathbb{A}, \quad k = 1,$$

$$x_{\text{opt.}} - \frac{\mathbb{C}}{1-q} = -\mathbb{B} r \mathbb{A}^{-1} \left(q x_{\text{opt.}} + \mathbb{C} \right),$$

$$\begin{bmatrix} -1,73(1-0,432q) \\ -0,94 \end{bmatrix} - \frac{1}{1-q} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0,6(1-0,85q) & -0,195(1-0,88q) \\ 0 & 0,06 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{(1-0,88q)(1-0,85q)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-0,94q} \end{bmatrix} \cdot \left[q \begin{bmatrix} -1,73(1-0,432q) \\ -0,94 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right],$$

$$\frac{1}{1-q} \begin{bmatrix} -2,73+2,478q-0,748q^2 \\ -1,94+0,94q \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0,6(1-0,85q) & -0,195(1-0,88q) \\ 0 & 0,06 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix},$$

$$a_1 = a_{11} + a_{12} \quad , \quad a_2 = a_{21} + a_{22}.$$

Jedná se o soustavu dvou algebraických rovnic pro dvě neznámé a_1, a_2

$$\frac{-2,73+2,478q-0,748q^2}{1-q} = -0,6(1-0,85q) a_1 + 0,195(1-0,88q) a_2,$$

$$\frac{-1,94+0,94q}{1-q} = -0,06 a_2,$$

jejíž řešení je

$$a_2 = a_{21} + a_{22} = \frac{32,33-15,67q}{1-q},$$

$$a_1 = \left[\frac{-2,73+2,478q-0,748q^2}{1-q} - 0,195(1-0,88q) \frac{32,33-15,67q}{1-q} \right].$$

$$\frac{1}{-0,6(1-0,85q)} = \dots = \frac{15,058-18,469q+5,727q^2}{(1-q)(1-0,85q)} = a_{11} + a_{12}.$$

Nejednoznačnost řešení nám umožňuje splnit ještě další podmínky. Např. autonomnost obvodu

$$y = (E + q A^{-1} B r)^{-1} q A^{-1} B r w$$

autonomní obvod $\Rightarrow q A^{-1} B r \dots$ diagonální.

$$\begin{bmatrix} \frac{q}{(1-0,88q)(1-0,85q)} & 0 \\ 0 & \frac{q}{1-0,94q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,6(1-0,85q) & -0,195(1-0,88q) \\ 0 & 0,06 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{0,6q}{1-0,88q} & \frac{-0,195q}{1-0,85q} \\ 0 & \frac{0,06q}{1-0,94q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \diagup & 0 \\ 0 & \diagdown \end{bmatrix},$$

$$\underline{a_{21} = 0} \Rightarrow \underline{a_{22} = \frac{32,33-15,67q}{1-q}},$$

$$\frac{0,6q}{1-0,88q} a_{12} = \frac{0,195q}{1-0,85q} a_{22},$$

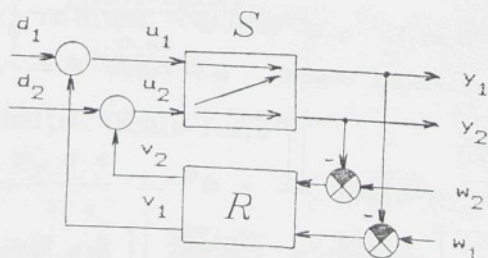
$$\underline{a_{12} = \frac{0,195q (32,33-15,67q)}{(1-0,85q)(1-q)} \frac{1-0,88q}{0,6q} = \dots = \frac{10,508-14,339q+4,481q^2}{1-1,85q+0,85q^2}}$$

$$\underline{a_{11} = a_1 - a_{12} = \frac{15,058-18,469q+5,727q^2-10,508+14,339q-4,481q^2}{(1-0,85q)(1-q)} = \frac{4,55-4,13q+1,247q^2}{1-1,85q+0,85q^2}}.$$

$$r = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} u_1(q) &= a_{11}(q) e_1(q) + a_{11}(q) e_2(q), \\ u_2(q) &= a_{22}(q) e_2(q). \end{aligned}$$

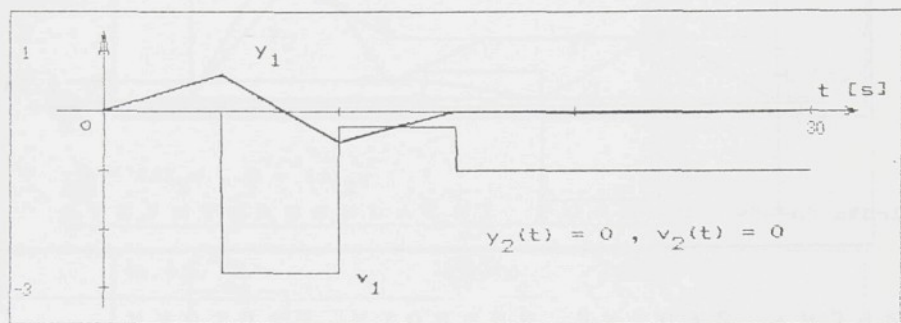
Nalezený algoritmus řízení :

$$\begin{aligned} u_1(k) &= 1,85 u_1(k-1) - 0,85 u_1(k-2) + \\ &+ 4,55 e_1(k) - 4,13 e_1(k-1) + 1,247 e_1(k-2) + \\ &+ 10,508 e_2(k) - 14,339 e_2(k-1) + 4,481 e_2(k-2), \\ u_2(k) &= u_2(k) + 32,333 e_2(k) - 15,66 e_2(k-1) \end{aligned}$$

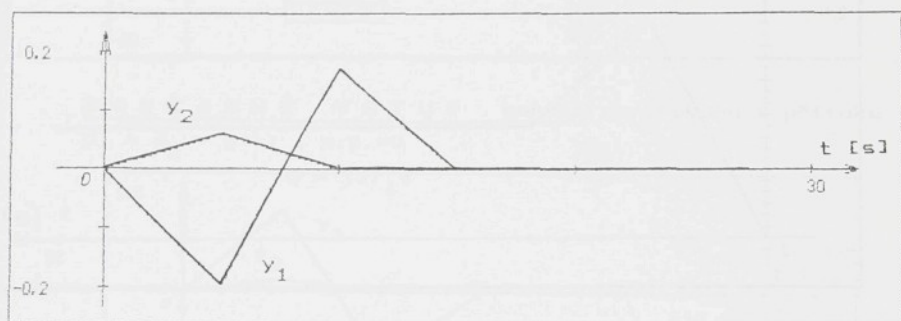


SIMULOVANÉ REGULAČNÍ POCHODY

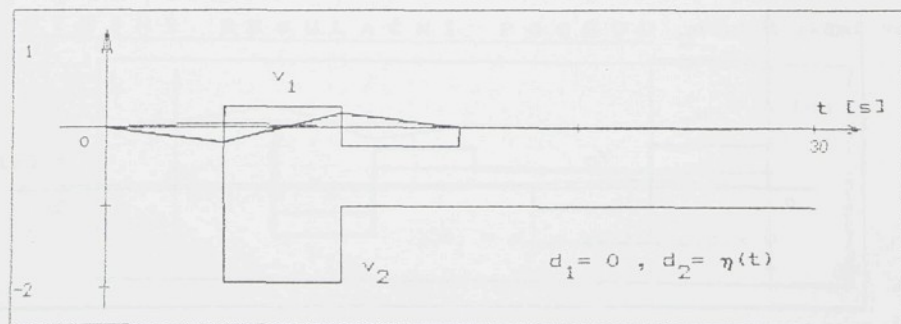
PORUCHA NA PŘÍKONU $d_1 = \eta(t)$, $d_2 = 0$, p.p. = 0



PORUCHA NA PŘÍTOKU $d_1 = 0$, $d_2 = \eta(t)$, p.p. = 0

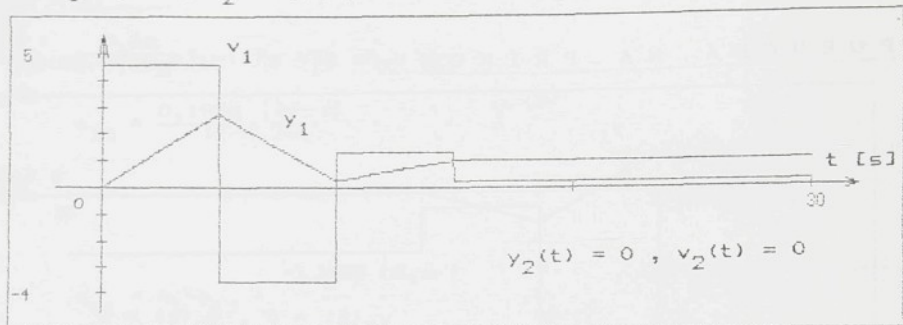


STEJNÝ REGULAČNÍ POCHOD včetně akční vel.



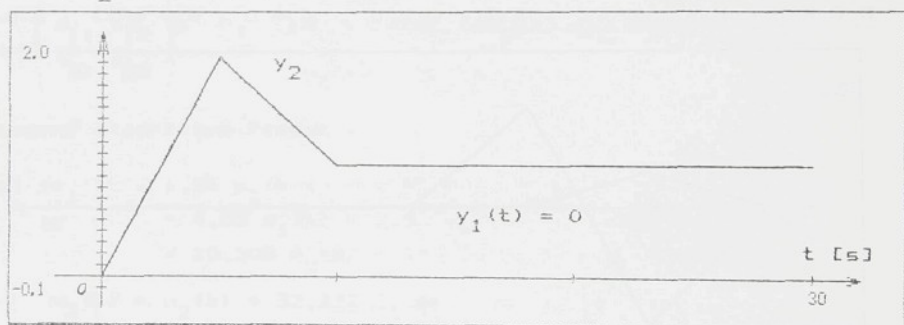
ZMĚNA ŽÁDANÉ HODNOTY TEPLOTY

$$w_1 = \eta(t), w_2 = 0, \text{ p.p.} = 0$$

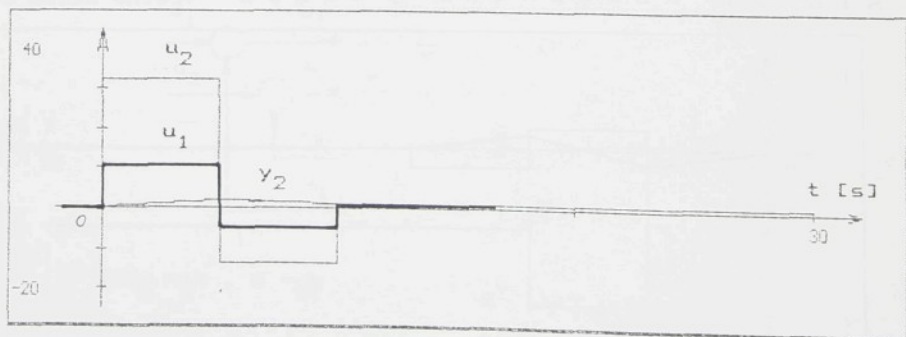


ZMĚNA ŽÁDANÉ HODNOTY PRŮTOKU

$$w_1 = 0, w_2 = \eta(t), \text{ p.p.} = 0$$

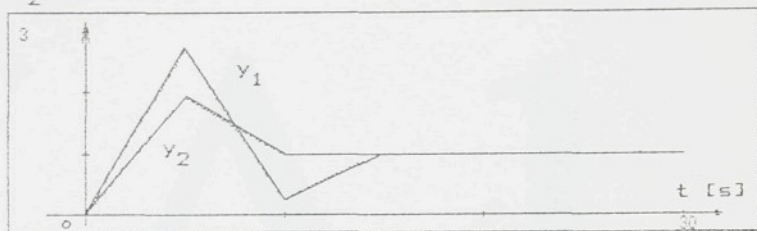


STEJNÝ REGULAČNÍ POCHOD včetně akční vel.

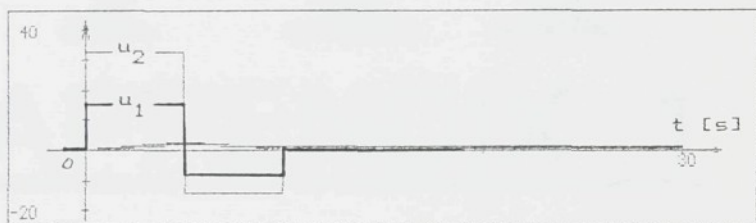


S O U Č A S N Á Z M Ě N A Žádané hodnoty teploty a průtoku

$$w_1 = w_2 = \eta(t), \text{ p.p.} = 0$$

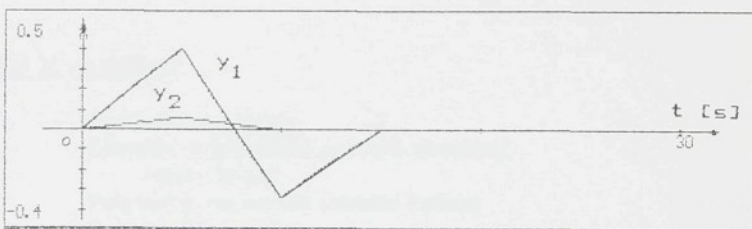


S T E J N Ý R E G U L A Č N Í P O C H O D včetně akční vel.

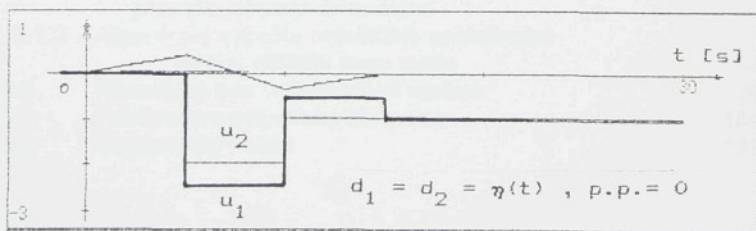


S O U Č A S N Ý V S T U P poruch na příkonu i přítoku

$$d_1 = d_2 = \eta(t), \text{ p.p.} = 0$$



S T E J N Ý R E G U L A Č N Í P O C H O D včetně akční vel.



$$d_1 = d_2 = \eta(t), \text{ p.p.} = 0$$

A1

APPENDIX 1

KAPITOLY Z ALGEBRY

A1	Kapitoly z algebry	71
A1.1	Základní algebraické pojmy a struktury, okruh, těleso	71
A1.2	Polynomy, racionální lomené funkce	78
A1.3	Polynomiální matice	85
A1.3.1	Společný dělitel matic	87
A1.3.1.1	Algoritmus výpočtu největšího společného pravého dělitele dvou matic	89
A1.3.1.2	Algoritmus výpočtu největšího společného levého dělitele dvou matic	95
A1.3.2	Kanonický tvar polynomiální matice	99
A1.3.3	Faktorizace polynomiální matice	104
A1.3.4	Algebraický kalkul	110

APPENDIX 1

A1 KAPITOLY Z ALGEBRY

Aneb stučný popis používaných nástrojů. V této kapitole je uveden pouze stučný přehled základních pojmů a některých ve výkladu používaných vlastností algebraických struktur. Kapitola si v žádném případě neklade za cíl (a ani vzhledem ke svému rozsahu nemůže klást) podat vyčerpávající výklad algebraických jevů. Porobnosti lze nalézt v učebnicích a speciálních matematických publikacích týkajících se algebry, např. [8-12, 48-52].

A1.1 ZÁKLADNÍ ALGEBRAICKÉ POJMY A STRUKTURY ; OKRUH, TĚLESO

Zhruba řečeno : OKRUHEM je množina, ve které lze sčítat, odčítat a násobit. Pokud v ní lze navíc dělit, mluvíme o TĚLESE.

Řečeno poněkud přesněji :

O k r u h

Okruhem nazýváme neprázdnou množinu $\mathcal{M}$, pro jejíž prvky jsou definovány binární operace sčítání a násobení

$$a, b \in \mathcal{M} \quad ; \quad a + b \in \mathcal{M} \quad ; \quad a \cdot b \in \mathcal{M} \quad . \quad (A1.1)$$

Násobení musí se sčítáním souviset distributivními zákony

$$\begin{aligned} a(b+c) &= ab + ac \quad , \\ (b+c)a &= ba + ca \quad , \end{aligned} \quad (A1.2)$$

operace sčítání je asociativní a komutativní

$$\begin{aligned} (a+b)+c &= a+(b+c) , \\ a+b &= b+a . \end{aligned} \quad (A1.3)$$

Je-li násobení v okruhu asociativní

$$a(bc) = (ab)c , \quad (A1.4)$$

nazýváme tento okruh asociativním okruhem . Je-li násobení navíc i komutativní

$$ab = ba , \quad (A1.5)$$

jedná se o okruh (asociativní a) komutativní . Pro každé $a \in \mathcal{M}$ existuje nulový prvek $0 \in \mathcal{M}$, pro nějž

$$\begin{aligned} a+0 &= 0+a = a , \\ a \cdot 0 &= 0 \cdot a = 0 \end{aligned} \quad (A1.6)$$

a opačný prvek $(-a) \in \mathcal{M}$ tak, že

$$a + (-a) = 0 . \quad (A1.7)$$

Prvek

$$a - b = a + (-b) \quad (A1.8)$$

nazýváme rozdíl prvků a, b . Existuje-li jednotkový prvek $1 \in \mathcal{M}$ takový, že

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a , \quad (A1.9)$$

pak mluvíme o okruhu s jednotkovým prvkem . V okruhu mohou existovat nenulové prvky a, b , jejichž součin je nulový prvek. Prvek $a \in \mathcal{M}$ se nazývá dělitelem nuly, právě když $a \neq 0$ a existuje takový prvek $b \in \mathcal{M}$, $b \neq 0$, že platí

$$ab = 0 \quad \text{resp.} \quad ba = 0 , \quad (A1.10)$$

Jedná se pak o tzv. levého resp. pravého dělitele nuly.

Komutativní okruh, v němž $0 \neq 1$ (v opačném případě by okruh obsahoval pouze nulový prvek) a jediným dělitelem nuly je 0 , se nazývá obor integrity. Jinými slovy : pro obor integrity platí

$$a, b \in \mathcal{M} \quad ; \quad b \neq 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0 \quad . \quad (A1.11)$$

Příklady :

- Množina všech celých čísel tvoří komutativní okruh s jednotkovým prvkem.
- Množina všech sudých čísel tvoří komutativní okruh bez jednotkového prvku.
- Množina čtvercových matic tvoří nekomutativní okruh, který obsahuje dělitele nuly.
- Množina konečných reálných polynomů tvoří komutativní okruh s jednotkovým prvkem.
- Množina matic RLF (racionálních lomených funkcí) tvoří nekomutativní okruh s jednotkovým prvkem.

Těleso

Tělesem nazýváme takový okruh $\mathcal{M}$ s jednotkovým prvkem ($1 \neq 0$), v němž ke každému prvku $a \neq 0$ existuje právě jeden inverzní prvek $a^{-1} \in \mathcal{M}$ tak, že

$$aa^{-1} = a^{-1}a = 1 \quad . \quad (A1.12)$$

Těleso neobsahuje dělitele nuly. Je-li v tělese součin dvou prvků roven nulovému prvku, je alespoň jeden z prvků roven nule.

Příklady komutativních těles :

- množiny racionálních resp. reálných resp. komplexních čísel,
- množina racionálních lomených funkcí.

V tělese lze dělit, pro každý prvek $a \in \mathcal{M}$ kromě nulového prvku existuje inverzní prvek $a^{-1} \in \mathcal{M}$. Naopak v okruhu obecně dělit nelze, neexistuje totiž k libovolnému prvku prvek inverzní. Neznamená to však, že neexistuje v okruhu prvek, který nemá prvek inverzní. Pokud takový prvek existuje, nazýváme ho jednotkou a značíme j (resp. $J, \mathbb{J}$).

Př.: 1) V okruhu celých čísel jsou jednotky $+1, -1$.

2) V okruhu konečných reálných polynomů je jednotkou libovolný polynom nultého stupně - konstanta.

3) V okruhu matic konečných polynomů je jednotkou čtvercová matice, jejíž determinant je reálné číslo.

POZOR ! Rozlišuj jednotku a jednotkový prvek - jedná se o dva odlišné algebraické pojmy !!

V tomto smyslu můžeme definovat těleso jako komutativní okruh v němž $0 \neq 1$ a každý nenulový prvek je jednotkou.

Nechť $\mathcal{M}$ je komutativní okruh.

1) Jestliže platí $a = b j$, kde j je jednotka v $\mathcal{M}$, pak $a, b \in \mathcal{M}$ jsou prvky asociované a píšeme $a \sim b$.

(V komutativním tělese jsou všechny prvky asociované.)

Asociované prvky tvoří v okruhu třídy tzv. ekvivalentních prvků.

Př.: Prvky $(x+1)$ a $(2x+2)$ jsou prvky asociované v komutativním okruhu konečných polynomů.

2) Říkáme, že b je dělitelem a a píšeme $b|a$, existuje-li prvek $c \in \mathcal{M}$ takový, že $a = bc$.

Př.: Prvek $(x-1)$ je dělitelem prvku (x^2-1) v okruhu reálných polynomů.

- 3) Prvek $d \in \mathcal{M}$ se nazývá společný dělitel prvků $a, b \in \mathcal{M}$, je-li dělitelem každého z nich. Je-li navíc dělitelný každým jiným společným dělitelem těchto prvků, nazývá se největším společným dělitelem a značíme $d = (a, b)$.

Př.: V komutativním okruhu reálných polynomů jsou prvky $(x+1)$, $(x-1)$, (x^2-1) společnými děliteli, prvek (x^2-1) největším společným dělitelem prvků

$$a = x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x+1)(x-1)(x-2) \quad ,$$

$$b = x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x+1)(x-1)(x+2) \quad .$$

Největší společný dělitel není obecně jednoznačný, největší společní dělitelé jsou však prvky asociované.

- 4) Řekneme, že prvky a, b jsou nesoudělné v $\mathcal{M}$, jsou-li jejich společnými děliteli jen jednotky v $\mathcal{M}$. Tedy, platí-li

$$(a, b) = j \quad . \quad (A1.12)$$

Př.: Příkladem nesoudělných prvků v okruhu reálných polynomů jsou prvky :

$$1) \quad a = x + 1, \quad b = x + 2 \Rightarrow (a, b) = 1 \quad .$$

Největším společným dělitelem obou prvků je jednotkový prvek, což je speciální případ jednotky okruhu.

$$2) \quad c = x + 1, \quad d = 2x + 2 \Rightarrow \\ \Rightarrow (c, d) = 2 \quad \dots \text{jednotka okruhu} \quad .$$

Některé důsledky :

- a) Jestliže platí pro dva prvky okruhu $a, b \in \mathcal{M}$, že a je dělitelem b a b je dělitelem a , jedná se o prvky asociované (transformované jednotkou).

$$\left. \begin{array}{l} a|b \quad b = ab_1 \\ b|a \quad a = ba_1 \end{array} \right\} b = ba_1b_1 \Rightarrow a_1b_1 = 1 \quad , \quad (A1.13)$$

a_1, b_1 jsou vzájemně inverzní prvky, tedy jednotky okruhu. Prvky a, b jsou proto asociované.

b) Jestliže prvky c_1, c_2 jsou současně největšími společnými děliteli prvků a, b jsou nutně c_1, c_2 asociované prvky okruhu (transformované jednotkou).

$$\left. \begin{array}{l} c_1 = (a, b) \\ c_2 = (a, b) \end{array} \right\} \begin{array}{l} a = c_1 a_1 = c_2 a_2 \\ b = c_1 b_1 = c_2 b_2 \end{array}, \quad (A1.14)$$

protože však největší společný dělitel je dělitelný libovolným dělitelem

$$c_1 = c_2 \cdot c_3, \quad (A1.15)$$

$$c_2 = c_1 \cdot c_4 = c_2 c_3 c_4 \Rightarrow c_3 c_4 = 1$$

a ze stejného důvodu jako ad a) jsou $c_3 c_4$ jednotky, tedy $c_1 \sim c_2$.

c) V komutativních okruzích platí důležitá souvislost mezi třídami vzájemně asociovaných prvků, kterou často zkoumáme. Touto vlastností je dělitelnost prvků. Platí: je-li a dělitelem b ; $a|b$ potom i libovolný prvek a_1 asociovaný s a je dělitelem libovolného prvku b_1 asociovaného s b .

$$a, b \in \mathcal{M}, \quad a_1 \sim a, \quad b_1 \sim b, \quad a|b \Rightarrow a_1|b_1, \quad \text{neboť} \quad (A1.16)$$

$$a = j_1 a_1, \quad b = j_2 b_1, \\ a|b \Rightarrow b = ac = j_1 a_1 c = j_2 b_1 \quad (A1.16a)$$

$$b_1 = j_2^{-1} j_1 a_1 c = j_3 a_1 c = a_1 j_3 c \Rightarrow a_1|b_1.$$

V nekomutativních okruzích (např. množina matic) je nutné rozlišovat dělitelnost zprava a zleva.

Nekomutativní okruh $\mathcal{M}$; $a, b, c \in \mathcal{M}$; $j, j_1, j_2 \dots$ jednotky v $\mathcal{M}$

- 1) $a = jb \Rightarrow a, b$ zleva asociované ,
- 2) $a = bj \Rightarrow a, b$ zprava asociované ,
- 3) $a = j_1 b j_2 \Rightarrow a, b$ asociované v $\mathcal{M}$,
- 4) $a = cb \Rightarrow b$ pravý dělitel a ,
- 5) $a = bc \Rightarrow b$ levý dělitel a , (A1.17)

- 6) $\left. \begin{array}{l} a = a_1 c \\ b = b_1 c \end{array} \right\} \Rightarrow c$ společný pravý dělitel a, b ,

je-li c dělitelný každým jiným společným pravým dělitelem $c_1 \Rightarrow c = c_1 c_1$, pak se jedná o největší společný pravý dělitel prvků a, b ,

- 7) zcela analogicky společný levý dělitel a největší společný levý dělitel prvků a, b ,

- 8) a, b jsou zprava resp. zleva nesoudělné v $\mathcal{M}$ jestliže jejich společní praví resp. leví dělitelé jsou pouze jednotky v $\mathcal{M}$,

- 9) největší společný dělitel není obecně jednoznačný, největší společní praví resp. leví dělitelé jsou však zleva resp. zprava asociováni.

Řekneme, že okruh $\mathcal{M}_1$ je izomorfní s okruhem $\mathcal{M}_2$, jestliže existuje vzájemně jednoznačné zobrazení $\mathcal{D}$ okruhu $\mathcal{M}_1$ na okruh $\mathcal{M}_2$ takové, že pro libovolné prvky $a, b \in \mathcal{M}$ platí

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(a+b) &= \mathcal{D}(a) + \mathcal{D}(b) , \\ \mathcal{D}(ab) &= \mathcal{D}(a) \mathcal{D}(b) . \end{aligned} \quad (\text{A1.18})$$

A1.2 POLYNOMY, RACIONÁLNÍ LOMENÉ FUNKCE

Polynomy (konečné reálné polynomy)

Konečným reálným polynomem chápeme prvek množiny všech konečných řad typu

$$A(q) = \alpha_0 + \alpha_1 q + \dots + \alpha_n q^n, \quad (A1.19)$$

s konečným počtem nenulových členů, kde α_i jsou reálná čísla. Množina takovýchto polynomů tvoří komutativní okruh, dokonce obor integrity.

Konečné reálné polynomy značíme velkými písmeny abecedy $A, B, \dots$. Jestliže $\alpha_n \neq 0$, potom číslo n nazýváme stupněm polynomu a značíme $\partial A = n$. Pro nulový polynom se obvykle definitoricky zavádí $\partial 0 = -\infty$. Jednotky polynomiálního okruhu jsou polynomy nultého stupně (tedy reálné konstanty), jednotkový prvek $\alpha_0 = 1$ je speciální jednotkou. Polynom chápeme jako algebraický objekt, nikoliv jako funkci proměnné q .

Racionální lomené funkce (RLF), plynomiální zlomky

Opět i v tomto případě budeme chápat RLF jako algebraický objekt, nikoliv jako funkci proměnné q . Polynomiální zlomek (RLF) uvažujeme jako podíl dvou konečných polynomů

$$a(q) = \frac{A(q)}{B(q)}, \quad B(q) \neq 0, \quad (A1.20)$$

Zlomek je v základním tvaru jsou-li $A(q)$, $B(q)$ nesoudělné. Množina RLF tvoří komutativní těleso, je izomorfní s tělesem nekonečných rekurentních formálních řad, které vzniknou rozvojem těchto zlomků. Polynomiální zlomky značíme malými písmeny abecedy $a(q)$, $b(q)$,

Některá další označení, vlastnosti a souvislosti

$$\begin{aligned} A(q) &= \alpha_0 + \alpha_1 q + \dots + \alpha_n q^n, \\ \bar{A}(q) &= A(1/q) = \frac{1}{q^n} \tilde{A}(q) = \frac{1}{q^n} (\alpha_0 q^n + \alpha_1 q^{n-1} + \dots + \alpha_n), \\ \tilde{A}(q) &= q^n \bar{A}(q) = \alpha_0 q^n + \alpha_1 q^{n-1} + \dots + \alpha_n, \end{aligned} \quad (A1.21)$$

$\bar{A}(q)$ resp. $\tilde{A}(q)$ nazýváme sduženým resp. reciprokým polynodem vzhledem k $A(q)$. Přestože sdužený polynom je funkcionálně vzato racionální lomenou funkcí, značíme velkým písmenem velké abecedy (jediná výjimka). Pro stupně polynomů platí :

$$\partial \tilde{A} \geq \partial A, \quad (A1.22)$$

rovnost nastává pro tzv. kauzální polynom.

Př.: 1) $A(q) = 1 + 2q + 3q^2$,

$$\bar{A}(q) = 1 + \frac{2}{q} + \frac{3}{q^2} = \frac{q^2 + 2q + 3}{q^2}, \quad \tilde{A}(q) = 3 + 2q + q^2,$$

$$\partial \tilde{A}(q) = \partial A(q) = 2 \Rightarrow A(q) \dots \text{kauzální polynom},$$

2) $B(q) = q + 2q^2 + 3q^3$,

$$\bar{B}(q) = \frac{1}{q} + \frac{2}{q^2} + \frac{3}{q^3} = \frac{q^2 + 2q + 3}{q^3}, \quad \tilde{B}(q) = 3 + 2q + q^2,$$

$$\partial \tilde{B}(q) = 2 \neq \partial B = 3 \Rightarrow B(q) \dots \text{není kauzální polynom},$$

$$\begin{aligned} 3) \quad \mathcal{E}(q) &= 1 + 2q + 3q^2 + 0q^3, \\ \bar{\mathcal{E}}(q) &= 1 + \frac{2}{q} + \frac{3}{q^2} + \frac{0}{q^3} = \frac{q^3 + 2q^2 + 3q}{q^3}, \\ \tilde{\mathcal{E}}(q) &= 3q + 2q^2 + q^3, \end{aligned}$$

$$\partial \tilde{\mathcal{E}}(q) = 3 \neq \partial \mathcal{E} = 2 \Rightarrow \mathcal{E}(q) \dots \text{není kauzální polynom.}$$

□ KONEC PŘÍKLADŮ

- * Je-li $q_1 \neq 0$ kořenem $\mathcal{A}(q)$, je zřejmě q_1^{-1} kořenem $\mathcal{A}(q)$.
- * Stabilní $a(q)$ nazýváme takovou racionální lomenou funkci, která má póly (kořeny jmenovatele) vesměs vně jednotkového kruhu. Z tohoto hlediska je polynom vždy stabilní, mluvíme-li však o stabilním polynomu $\mathcal{A}(q)$, máme na mysli, že $\mathcal{A}^{-1}(q)$ je stabilní.
- * Má-li funkce některé póly uvnitř jednotkového kruhu, je nestabilní, má-li všechny póly uvnitř jednotkového kruhu, je antistabilní.
- * Značíme $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}$ množinu prvků, které nemají póly na jednotkové kružnici, dále $\mathcal{M}_+ \subset \mathcal{M}_0$ množinu stabilních a $\mathcal{M}_- \subset \mathcal{M}_0$ množinu antistabilních prvků.
- * Součtový rozklad. Je zřejmé, že každou $a(q) \in \mathcal{M}_0$ lze jednoznačně rozložit

$$a(q) = a_+(q) + a_-(q), \quad \text{kde } a_+(q) \in \mathcal{M}_+, \quad a_-(q) \in \mathcal{M}_-.$$

(A1.23)

Pozn.: Jestliže $a(q) = \mathcal{A}(q)/\mathcal{B}(q)$, $\partial \mathcal{A}(q) \geq \partial \mathcal{B}(q)$, provedeme nej-
dříve vydělení, $a(q) = \mathcal{F}(q) + \mathcal{E}(q)/\mathcal{B}(q)$; $\partial \mathcal{E}(q) < \partial \mathcal{B}(q)$ a po
rozkladu $\mathcal{E}(q)/\mathcal{B}(q)$ na parciální zlomky potom $a_+(q) = \mathcal{F}(q) +$
součet stabilních parc.zlomků. Součet ostatních zlomků je
 $a_-(q)$.

Důsledek: $a_-(q)$ musí být ryzí, nestačí aby byly všechny její
póly uvnitř jednotkového kruhu.

* Faktorizace. Každý polynom $\mathcal{A}(q)$, pro nějž $\mathcal{A}^{-1}(q) \in \mathcal{M}_0$, lze roz-
ložit

$$\mathcal{A}(q) = \mathcal{A}^+(q) \mathcal{A}^-(q) \quad (\text{A1.24})$$

na součin stabilního $\mathcal{A}^+(q)$ a antistabilního $\mathcal{A}^-(q)$ faktoru.
 $\mathcal{A}^+(q)$ je tvořen součinem stabilních a $\mathcal{A}^-(q)$ součinem nestabi-
lních kořenových činitelů. V případě, že tyto kořenové
činitelé neexistují, uvažujeme jedničku. Multiplikativní
konstantu lze přiřadit k jednomu nebo druhému faktoru
(faktorizace je tedy v tomto smyslu nejednoznačná).

* Zavedme skalární součin $\langle a(q), b(q) \rangle = \langle a, b \rangle$ pro $a(q), b(q) \in \mathcal{M}_0$
vztahem

$$\langle a, b \rangle = \frac{1}{2\pi i} \int a(q) b\left(\frac{1}{q}\right) \frac{dq}{q} = \frac{1}{2\pi i} \int a(q) \bar{b}(q) \frac{dq}{q} \quad , \quad (\text{A1.25})$$

$\int \dots$ jednotková kladně orientovaná kružnice.

* Význam skalárního součinu.

Předpokládejme stabilní $a(q) = \frac{\mathcal{A}(q)}{\mathcal{B}(q)} = a_0 + a_1 q + a_2 q^2 + \dots$,

$$\mathcal{B}(q_1) = 0 \quad , \quad |q_1| > 1 \quad ,$$

$$J = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} a_j^2 = \|a(q)\|^2 \geq 0 \quad ,$$

$$\begin{aligned} a(q)\bar{a}(q) &= \\ &= (a_0 + a_1 q + a_2 q^2 + \dots)(a_0 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2} + \dots) = \\ &= \dots + q^{-1}(a_0 a_1 + a_1 a_2 + \dots) + \\ &\quad + \underbrace{a_0^2 + a_1^2 + \dots}_J + q(a_0 a_1 + a_1 a_2 + \dots) + \dots, \end{aligned}$$

$a(q)$ je regulární pro $|q| < r_0$,

$\bar{a}(q)$ pak pro $|q| > r_0^{-1}$; $r_0 > 1$,

r_0 ... poloměr konvergence obrazu, který je dán exponenciálním řádem předmětu.

Součet kvadrátů pořadnic a_j je dán součtem reziduí funkce $f(q) = a(q)\bar{a}(q)/q$ v singulárních bodech uvnitř kruhu s poloměrem $1/r_0$ a lze jej získat integrací

$$J = \sum_{j=0}^{\infty} a_j^2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\zeta} a(q)\bar{a}(q) \frac{dq}{q} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\zeta} \frac{A(q)}{B(q)} \frac{\bar{A}(q)}{\bar{B}(q)} \frac{dq}{q} = \langle a, a \rangle = \|a\|^2$$

po libovolné kladně orientované cestě v mezikruží (r_0, r_0^{-1}) , lze tedy vždy volit jednotkovou kružnici ζ .

Zcela obdobně i pro stabilní $a(q), b(q) \in M_+$ platí

$$\langle a, b \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} a_j b_j. \quad (A1.26)$$

Zřejmě platí tyto identity:

$$\begin{aligned} \langle a, b \rangle &= \langle b, a \rangle, \\ \langle a_1, b \rangle + \langle a_2, b \rangle &= \langle a_1 + a_2, b \rangle, \\ \langle \lambda a, b \rangle &= \langle a, \lambda b \rangle = \lambda \langle a, b \rangle, \quad \lambda \dots \text{skalár}, \\ \langle ac, b \rangle &= \langle a, \bar{c}b \rangle, \\ \langle a, b \rangle &= \langle ac, b/\bar{c} \rangle, \end{aligned} \quad (A1.27)$$

$$\langle a, b \rangle = \langle q^k a, q^k b \rangle$$

$$\langle x, y \rangle = 0 \quad \text{pro} \quad x(q) \in \mathcal{M}_+, \quad y(q) \in \mathcal{M}_-.$$

Pozn.: Podle poslední identity (A1.27) jsou podprostory $\mathcal{M}_+$, $\mathcal{M}_-$ ve smyslu zavedeného skalárního součinu (A1.25) vzájemně ortogonální.

Pozor !

Skalární součin $\langle a, b \rangle$ je definován pro všechny $a(q), b(q) \in \mathcal{M}_0$ i v případě, že $\sum_{j=0}^{\infty} a_j b_j$ je nevlastní.

$$\begin{aligned} \|a\|^2 = \langle a, a \rangle &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\zeta} \frac{A(q) \overline{A}(q) dq}{B(q) \overline{B}(q) q} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\zeta} \frac{A^+ A^- \overline{A}^+ \overline{A}^- dq}{B^+ B^- \overline{B}^+ \overline{B}^- q} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\zeta} \frac{A^*(q) \overline{A}^*(q) dq}{B^*(q) \overline{B}^*(q) q} \quad ; \quad A^* = A^+ \tilde{A}^-, \quad B^* = B^+ \tilde{B}^-. \end{aligned} \quad (\text{A1.28})$$

Polynom $A^*(q)$ resp. $B^*(q)$ nazýváme reflexním polynomm k polynomu $A(q)$ resp. $B(q)$.

* Reflexní polynom získáme z původního, nahradíme-li všechny nestabilní kořenové činitele $(aq + b)$ stabilními činiteli $(a + bq)$. Všechny kořeny reflexního polynomu leží vně jednotkového kruhu.

$$\begin{aligned} \text{Kvadratický funkcionál } J_1[x(q)] &= J_1(x) = \|x+a\|^2 = \\ &= \|x\|^2 + 2\langle a, x \rangle + \|a\|^2 \quad ; \quad x \in \mathcal{M}_0, \end{aligned}$$

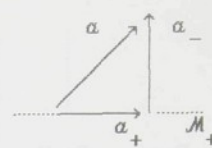
nabývá zřejmě své minimální hodnoty $\min_{x \in \mathcal{M}_0} J_1(x) = 0$ pro $x(q) = -a(q)$.

Hledáme-li však minimum tohoto funkcionálu pouze pro stabilní $x \in \mathcal{M}_+$, je nutné rozložit $a(q)$ na ortogonální složky

$$a(q) = a_+(q) + a_-(q) \quad , \quad a_+(q) \in \mathcal{M}_+ \quad , \quad a_-(q) \in \mathcal{M}_- \quad ,$$

$$\langle a_+, a_- \rangle = 0 \quad ,$$

$$J_1(x) = \|x + a_+ + a_-\|^2 = \|x + a_+\|^2 + 2\langle x + a_+, a_- \rangle + \|a_-\|^2 \quad ,$$

$$\min_{x \in \mathcal{M}_+} J_1(x) = \|a_-\|^2 \quad \text{pro} \quad x(q) = -a_+(q) \quad . \quad (\text{A1.29})$$


Složku $a_+(q)$ lze chápat jako ortogonální projekci $a(q)$ do stabilního podprostoru $\mathcal{M}_+$.

Obdobně platí i pro obecný tvar kvadratického funkcionálu

$$J_2(x) = \|ax + b\|^2 + \alpha \|cx + f\|^2 =$$

$$= \|ax\|^2 + \alpha \|cx\|^2 + 2\langle ax, b \rangle + 2\alpha \langle cx, f \rangle + \|b\|^2 + \alpha \|f\|^2 =$$

$$= \begin{bmatrix} \bar{a}\bar{a} + \alpha \bar{c}\bar{c} = g\bar{g} \\ g, g^{-1} \dots \text{stab.} \end{bmatrix} = \|gx\|^2 + 2\langle gx, \frac{\bar{a}b}{g} \rangle + 2\alpha \langle gx, \frac{\bar{c}f}{g} \rangle + \|b\|^2 + \alpha \|f\|^2 =$$

$$= \|gx\|^2 + 2\langle gx, m \rangle + \|b\|^2 + \alpha \|f\|^2 \quad , \quad \text{kde} \quad m = \frac{\bar{a}b + \alpha \bar{c}f}{g} \quad .$$

Funkcionál $J_2(x)$ tedy dosahuje svého minima $\min_{x \in \mathcal{M}_+} J_2(x)$ pro

$$x(q) = x_{\text{opt.}}(q) = -\frac{1}{\bar{g}(q)} m_+(q) \quad . \quad (\text{A1.30})$$

Prvky množiny $\mathcal{M}$ tvoří nekonečněrozměrný lineární normovaný prostor se skalárním součinem podle (A1.25, 28) s vlastnostmi Hilbertova prostoru. Na této obecné algebraické struktuře lze popsané algebraické operace jednoduše geometricky interpretovat.

Pozn.: Všechny použité algebraické operace včetně řešení polynomiálních diofantických rovnic jsou algoritmizovány pro numerický výpočet. Algoritmus reflexe (na rozdíl od ostatních ryze algebraických algoritmů) nemá finitní charakter. Výpočet reflexe polynomu probíhá iteračně. Zmíněné algoritmy lze nalézt např. v [15].

A1.3 POLYNOMIÁLNÍ MATICE

Polynomiální maticí [PM] chápeme matici, jejíž prvky jsou konečné polynomy s reálnými koeficienty. V některé literatuře, např. [53,54] se můžeme setkat s označením λ -matice. PM je možné chápat jako maticový polynom

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}(q) = A_0 + A_1 q + \dots + A_n q^n \quad (A1.30)$$

Jestliže $A \neq 0$, pak n je stupeň PM a označujeme

$$\partial \mathbb{A} = n \quad (A1.31)$$

Definitoricky zavedeme $\partial 0 = -\infty$.

$$\begin{aligned} \text{Př.: } \mathbb{A} &= \begin{bmatrix} 1+q-0,5q^2 & -q \\ 0 & 1+q^2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} q + \begin{bmatrix} -0,5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} q^2 = A_0 + A_1 q + A_2 q^2, \\ &\partial \mathbb{A} = 2. \end{aligned}$$

Matice $\mathbb{A}$ je obecně obdélníková s m řádky a n sloupci.
(m, n)

Čtvercové matice

Množina čtvercových matic $m = n$ tvoří nekomutativní okruh. Jednotkou okruhu je matice, jejíž determinant je nenulové reálné číslo, inverzní matice k této matici je opět matice polynomiální. Jestliže je $\det \mathbb{A} = 0$ je $\mathbb{A}$ dělitelem nuly.

Poznámka : Častým zdrojem nedorozumění a nejasností bývá záměna pojmů jednotková matice a jednotka okruhu. Abychom se vyhnuli těmto nejasnostem, používáme ve výkladové části této práce označení jednotky okruhu jako elementární matice ve shodě s označením např. v lit.[10, 55]. Můžeme se však setkat i s jiným označením, např. unimodulární matice v lit.[56].

Jestliže $\det A_n \neq 0$, viz (A1.30), říkáme, že A je regulární polynomiální matice. V tomto smyslu např. matice

$$A = \begin{bmatrix} q+1 & q^2 \\ 0 & q-1 \end{bmatrix} \quad \dots \text{ není regulární} \quad . \quad (A1.32)$$

Pro polynomiální matice A, B platí

$$\partial(AB) \leq \partial A + \partial B \quad ,$$

přičemž rovnost nastává právě když buď A nebo B je regulární polynomiální matice.

Poznámka : Někdy se v literatuře, viz např. [54], můžeme setkat s pojmem regulární PM označujícím PM s nenulovým determinantem nezávislým na argumentu q . Toto označení pro účely této práce však nepřebírám.

Obdélníkové matice

Množina obdélníkových matic $\begin{smallmatrix} A \\ (m, n) \end{smallmatrix}$ s obecně různým počtem řádků a sloupců $m \neq n$ tvoří tzv. parciální nekomutativní okruh, ve kterém je násobení definováno pouze mezi třídami prvků se stejným počtem sloupců jedné třídy a řádků třídy druhé. Početní operace se řídí stejnými pravidly jako početní operace s číselnými maticemi (speciální případ PM).

Je nutné rozlišovat prvky asociované zleva a zprava.

Nechť $A \in \mathcal{M}_{(m,n)}$ a $J_1, J_2 \in \mathcal{M}_{(m,m)}$,

$J_i \dots$ elementární matice (jednotka okruhu),
 $\det J_i = \text{reálné nenulové číslo, } i = 1, 2$.

pak jsou matice A, B

- a) asociované zleva, jestliže $A = J_1 B$,
- b) asociované zprava, jestliže $A = B J_2$,
- c) asociované, jestliže $A = J_1 B J_2$.

Pozn.: V lit.[10,55] je pro matice asociované (A1.33c) zaveden pojem matice ekvivalentní - nepoužívám v této práci.

Řádkové operace (násobení všech prvků řádku nenulovou konstantou, změna pořadí řádků, přičítání k libovolnému řádku libovolný jiný řádek vynásobený konstantou nebo polynomem) odpovídají násobení matice zleva elementární maticí (jednotkou okruhu), sloupcové operace (analogické operace se sloupci matice) odpovídají naopak násobení zprava elementární maticí. Proto řádkové a sloupcové operace vedou vždy na matice asociované.

A1.3.1 SPOLEČNÝ DĚLITEL MATIC

Jestliže existují matice $C_1, C_2 \in \mathcal{M}$ takové, že

$$\begin{aligned} A &= C_1 B, & B &\dots \text{právní dělitel matice } A, \\ A &= B C_2, & B &\dots \text{levý dělitel matice } A. \end{aligned} \quad (A1.34)$$

Příklad :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & , & q(1-q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-q) & , & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & q \\ 1+q & 0 \end{bmatrix} = A_1 A_2 \quad ,$$

A_2 je pravým dělitelem a současně A_1 je levým dělitelem matice A . Dělitel matice není zřejmě jednoznačný, každá matice

$$\tilde{A}_2 = J A_2 \quad \text{resp.} \quad \tilde{A}_1 = A_1 J^{-1} \quad , \quad (A1.35)$$

J ... elementární matice ,
(jednotka okruhu)

je opět pravým resp. levým dělitelem A .

☐ KONEC PŘÍKLADU

Společný dělitel matic

Nechť $A, B \in M$, potom matice $D_1 \in M$ je

- 1) společným pravým dělitelem matic A, B jestliže je pravým dělitelem každé z nich

$$\begin{aligned} A &= A_1 D_1 \quad , \quad r = \text{rank} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \quad , \quad (A1.36) \\ (m, n) & \quad (m, r)(r, n) \\ B &= B_1 D_1 \quad . \\ (p, n) & \quad (p, r)(r, n) \end{aligned}$$

Respektive $D_2 \in M$

- 2) společným levým dělitelem matic A, B jestliže je levým dělitelem každé z nich

$$\begin{aligned} A &= D_2 A_2 \quad , \quad r = \text{rank} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \quad , \quad (A1.37) \\ (m, n) & \quad (m, r)(r, n) \\ B &= D_2 B_2 \quad . \\ (m, p) & \quad (m, r)(r, n) \end{aligned}$$

Je-li navíc společný pravý resp. levý dělitel dělitelný zprava

resp. zleva každým jiným společným pravým resp. levým dělitelem těchto matic, nazýváme ho největším společným pravým resp. levým dělitelem matic A, B .

Jestliže jsou společnými pravými resp. levými děliteli matic A, B pouze elementární matice (jednotky okruhu), jsou nesoudělné zprava resp. zleva.

A1.3.1.1 ALGORITMUS VÝPOČTU NEJVĚTŠÍHO SPOLEČNÉHO PRAVÉHO DĚLITELE

DVOU MATIC

Nechť matice $A, B \in M$, $D_1 \in M$ je jistým společným pravým dělitelem A, B viz (A1.36) a $D_1 \in M$ je největším společným pravým dělitelem těchto matic. Matice A, B nemusejí mít nutně shodný počet řádků, počet jejich sloupců však stejný být musí.

Algoritmus využívá skutečnosti, že řádkové úpravy odpovídají násobení zleva jistou elementární maticí (jednotkou okruhu) a vedou na zleva asociované matice. Vhodnými postupnými řádkovými úpravami lze převést matici blokově sestavenou z matic $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} B \\ A \end{pmatrix}$ na matici blokově sestavenou z $\begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix}$ a nulové matice.

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} D_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad J \dots \text{elementární matice}$$

$$J \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} P_1 & Q_1 \\ R_1 & S_1 \end{bmatrix}, \quad (\text{jednotka okruhu}),$$

$$P_1 A + Q_1 B = D_1,$$

$$R_1 A + S_1 B = 0.$$

(A1.38)

Lze snadno ukázat, že D_1 je pravým dělitelem, dokonce největším společným pravým dělitelem matic A, B . Matice J je elementární maticí, tedy čtvercovou maticí jejíž inverze je opět polynomiální maticí ($\det J = \text{reálné číslo}$). Označme

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} T_1 & V_1 \\ U_1 & W_1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} D_1 \\ 0^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 & V_1 \\ U_1 & W_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ 0^1 \end{bmatrix}, \quad (A1.39)$$

$$A = T_1 D_1, \quad B = U_1 D_1.$$

Tedy D_1 je společným pravým dělitelem A, B . Jestliže je dále D_{10} jistým společným pravým dělitelem těchto matic, potom

$$A = A_1 D_{10}, \quad B = B_1 D_{10},$$

$$\begin{bmatrix} P_1 & Q_1 \\ R_1 & S_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix} D_{10} = \begin{bmatrix} D_1 \\ 0^1 \end{bmatrix}, \quad (A1.40)$$

$$(P_1 A_1 + Q_1 B_1) D_{10} = D_1.$$

Matice D_1 je dělitelná libovolným pravým společným dělitelem A, B je tedy největším z nich.

Povšimněme si, že produktem algoritmu je nejen největší společný pravý dělitel matic, ale i řeší velmi důležité polynomiální diofantické rovnice

$$\begin{aligned} P_1 A + Q_1 B &= D_1, \\ R_1 A + S_1 B &= 0. \end{aligned} \quad (A1.41)$$

Postup algoritmických úprav

□ Nejprve sestavíme blokovou matici.

$$\begin{array}{cc|c} m+n & n & \\ \hline E & \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} & \begin{matrix} m \\ p \end{matrix} \end{array} \quad (A1.42)$$

$E \dots$ jednotková matice.

- V prvním sloupci části

$$\begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline B \\ \hline \end{array}$$

najdeme nenulový polynom

nejnižšího stupně, je-li takovýchto polynomů více, vybereme s ohledem na numerickou přesnost polynom s největším (v absolutní hodnotě) koeficientem u nejvyšší mocniny.

- Provedeme výměnu řádků tak, že příslušný řádek celé matice přesuneme na první pozici.
- Přičítáním vhodných násobků prvního řádku k ostatním řádkům celé matice docílíme toho, že ostatní prvky v tomto sloupci budou nižšího stupně než první prvek.
- Opět vybereme prvek nejnižšího stupně a celý postup opakujeme tak dlouho až zůstane na první pozici pouze jediný nenulový polynom, ostatní prvky sloupce jsou nulové.
- V dalším již ponecháme první řádek pevný a obdobně upravujeme postupně další sloupce.
- Po ukončení algoritmu dostaneme transformovanou matici, která vznikla z původní matice vynásobením zleva vhodnou elementární maticí

$$\begin{array}{c} J \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline E & \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline B \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline J \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline J \left[\begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline B \\ \hline \end{array} \right] \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline J & \begin{array}{|c|} \hline D_1 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} =$$

$m \quad p \quad n$ (A1.43)

$$= \begin{array}{|c|c|c|} \hline P_1 & Q_1 & D_1 \\ \hline R_1 & S_1 & 0 \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} r \\ m+p-r \end{array}, \quad r = \text{rank} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \leq n.$$

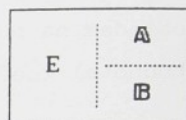
Příklad A1.1

Nalezněme největšího společného pravého dělitele matic

$$A = \begin{bmatrix} q+1 & 0 & q \\ 0 & q-2 & 0 \end{bmatrix} \quad (m, n) \quad , \quad B = \begin{bmatrix} q-2 & 0 & 0 \\ 0 & q-2 & 0 \\ 0 & 0 & q-2 \end{bmatrix} \quad (p, n) = (q-2)E \quad ,$$

$$m = 2 \quad ,$$

$$n = p = 3 \quad , \quad r = \text{rank} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = 3 \quad .$$



$$\left[\begin{array}{ccccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & q+1 & 0 & q \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & q-2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & q-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & q-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & q-2 \end{array} \right] \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \ominus \\ \ominus \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{l} \ominus \\ \ominus \end{array} \right] \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & q+1 & 0 & q \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & q-2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 0 & -q \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & q-2 \end{array} \right] \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \oplus \\ \oplus \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{l} \oplus \\ \oplus \end{array} \right] \end{array} \begin{array}{l} 0, 33q \\ 0, 33q \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 0 & -q \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & q-2 & 0 \\ -0,33q+1 & 0 & 0,33q & 0 & 0 & 1 & 0 & -0,33q+q \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & q-2 \end{array} \right] \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \oplus \\ \oplus \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{l} \oplus \\ \oplus \end{array} \right] \end{array} \begin{array}{l} 3 \\ 3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 0 & -q \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & q-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & q-2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -q+2 & 0 & q+1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -q^2+2q \end{array} \right] \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \oplus \\ \oplus \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{l} \oplus \\ \oplus \end{array} \right] \end{array} \begin{array}{l} q \\ q \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 0 & -q \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & q-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & q-2 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -q+2 & 0 & q+1 & 0 & q & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\mathbb{D}_1 = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -q \\ 0 & q-2 & 0 \\ 0 & 0 & q-2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c|c|c} \mathbb{P}_1 & \mathbb{Q}_1 & \mathbb{D}_1 \\ \hline \mathbb{R}_1 & \mathbb{S}_1 & 0 \end{array}$$

$$\mathbb{P}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{Q}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{R}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -q+2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{S}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ q+1 & 0 & q \end{bmatrix}$$

Ověřme správnost výsledku

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} q+1 & 0 & q \\ 0 & q-2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & \beta \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 & -q \\ 0 & q-2 & 0 \\ 0 & 0 & q-2 \end{bmatrix} = \mathbb{A}_1 \mathbb{D}_1,$$

$$\alpha = -(q+1)/3, \quad \beta = -q/3,$$

$$\mathbb{B} = \begin{bmatrix} q-2 & 0 & 0 \\ 0 & q-2 & 0 \\ 0 & 0 & q-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 & -q \\ 0 & q-2 & 0 \\ 0 & 0 & q-2 \end{bmatrix} = \mathbb{B}_1 \mathbb{D}_1,$$

$$\gamma = -(q-2)/3, \quad \beta = -q/3,$$

$$\mathbb{P}_1 \mathbb{A} + \mathbb{Q}_1 \mathbb{B} = \mathbb{D}_1,$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q+1 & 0 & q \\ 0 & q-2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q-2 & 0 & 0 \\ 0 & q-2 & 0 \\ 0 & 0 & q-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -q \\ 0 & q-2 & 0 \\ 0 & 0 & q-2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbb{R}_1 A + \mathbb{S}_1 B = 0 \quad ,$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -q+2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q+1 & 0 & q \\ 0 & q-2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ q+1 & 0 & q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q-2 & 0 & 0 \\ 0 & q-2 & 0 \\ 0 & 0 & q-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

□ KONEC PŘÍKLADU

Pozn.: Zřejmě největší společný pravý dělitel matic není jednoznačný. Každá zleva asociovaná matice (zleva vynásobená libovolnou elementární maticí) má stejnou vlastnost.

Příklad A1.2

Mějme za úkol nalézt největšího pravého společného dělitele matic

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1+q \\ 2q & 1+q+q^2 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 2(1-q) & 0 \\ 0 & -q \end{bmatrix} \quad ,$$

$$r = \text{rank} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = 2 \quad .$$

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1+q \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2q & 1+q+q^2 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 2(1-q) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -q \end{array} \right] \begin{array}{l} q \left[\begin{array}{c} (1-q) \\ \ominus \end{array} \right] \\ \ominus \end{array} \\ \\ \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1+q \\ -q & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1+q & 0 & 1 & 0 & 0 & -1+q^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -q \end{array} \right] \begin{array}{l} (-1+q^2) \left[\begin{array}{c} q \\ \ominus \end{array} \right] \\ \oplus \end{array} \\ \\ \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1+q \\ -q & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1+q^3 & 1-q^2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -q & q & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{array}$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -q & 1 \end{bmatrix}, \quad Q_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$R_1 = \begin{bmatrix} -1+q^3 & 1-q^2 \\ -q & q \end{bmatrix}, \quad S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1+q \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \det D_1 = 2,$$

$D_1 \dots$ elementární matice ,

$A, B \dots$ zprava NESOUDĚLNĚ .

□ KONEC PŘÍKLADU

A1.3.1.2 ALGORITMUS VÝPOČTU NEJVĚTŠÍHO SPOLEČNÉHO LEVÉHO DĚLITELE

DVOU MATIC

Uvažujeme dvě polynomiální matice $A, B \in \mathcal{M}$. Nechť $D_{20} \in \mathcal{M}$ je jejich jistým společným levým dělitelem, viz (A1.37) a $D_2 \in \mathcal{M}$ je největším společným levým dělitelem těchto matic. Pro existenci společného levého dělitele je nutné, aby matice A, B měly stejný počet řádků, počet sloupců však může být různý.

Algoritmus využívá skutečnosti, že sloupcové úpravy odpovídají násobení zprava jistou elementární maticí (jednotkou okruhu) a vedou na zprava asociované matice. Vhodnými postupnými sloupcovými úpravami lze převést matici blokově sestavenou z matic

A, B na matici blokově sestavenou z D_2 a nulové matice.
 $(m, n) \quad (m, p) \quad (m, r)$

$$\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} D_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad J \dots \text{elementární matice} \\ \text{(jednotka okruhu)},$$

$$\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} J = \begin{bmatrix} D_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} P_2 & R_2 \\ Q_2 & S_2 \end{bmatrix},$$

$$A P_2 + B Q_2 = D_2, \quad (A1.44)$$

$$A R_2 + B S_2 = 0.$$

Důkaz tvrzení lze snadno provést zcela analogicky jako v A1.3.1 pro největšího společného pravého dělitele.

Postup algoritmických úprav

Nejprve sestavíme blokovou matici

E ... jednotková matice.

$$\begin{array}{c} n \quad p \\ \boxed{\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline E & \end{array}} \begin{array}{l} m \\ n+p \end{array}, \quad (A1.45)$$

Dále provádíme naprosto shodné operace jako v případě určování největšího pravého společného dělitele, ALE ! se SLOUPCI - nikoliv s řádky jako v A1.3.1.

Po ukončení algoritmu dostaneme transformovanou matici, která vznikla z původní matice vynásobením zprava vhodnou elementární maticí

$$\boxed{\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline E & \end{array}} J = \boxed{\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline J & \end{array}} = \boxed{\begin{array}{c|c} D_2 & 0 \\ \hline J & \end{array}} = \begin{array}{cc|cc} D_2 & 0 & & \\ \hline P_2 & R_2 & & \\ \hline Q_2 & S_2 & & \end{array} \begin{array}{l} m \\ n \\ p \\ r \quad n+p-r \end{array},$$

$$r = \text{rank} \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \leq m.$$

Pozn.: Algoritmus lze jednoduše transpozicí matic převést formálně na shodnou manipulaci s řádky se stejnou strategií jako v případě algoritmických úprav ad A1.3.1

$$\begin{array}{c} \boxed{\begin{array}{c|c} E & A^T \\ \hline & B^T \end{array}} \begin{array}{l} n \\ p \end{array} \sim \boxed{\begin{array}{c|c|c} P_2^T & Q_2^T & D_2^T \\ \hline R_2^T & S_2^T & 0 \end{array}} \begin{array}{l} r \\ n+p-r \end{array} \quad (A1.46)$$

$n+p \quad m \qquad \qquad n \quad p \quad m$

Příklad A1.3

Mějme za úkol nalézt největšího levého společného dělitele matic

$$A = \begin{pmatrix} q+1 & 0 & q \\ 0 & q-2 & 0 \end{pmatrix} \quad (m,n), \quad B = \begin{pmatrix} q-2 & 0 \\ 0 & q-2 \end{pmatrix} \quad (m,p) = (q-2)E,$$

$$m = p = 2, \quad n = 3, \quad r = \text{rank} \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} = 2.$$

$$\boxed{\begin{array}{c|c} E & A^T \\ \hline & B^T \end{array}}$$

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & q+1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & q-2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & q & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & q-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & q-2 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow \ominus \\ \leftarrow \ominus \\ \leftarrow \ominus \end{array} \\ \\ \left[\begin{array}{ccccc|cc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & q-2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} q \leftarrow 2 \\ \leftarrow \ominus \\ \leftarrow \oplus \end{array} \\ \\ \left[\begin{array}{ccccc|cc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & q-2 \\ \hline -q & 0 & q+1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \mathbb{P}_2^T & \mathbb{Q}_2^T & \mathbb{D}_2^T \\ \hline \mathbb{R}_2^T & \mathbb{S}_2^T & 0 \\ \hline \end{array}, \quad \mathbb{D}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q-2 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{P}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \\
 \mathbb{Q}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{R}_2 = \begin{bmatrix} -q & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ q+1 & -3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{S}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ověřme správnost výsledku

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} q+1 & 0 & q \\ 0 & q-2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q+1 & 0 & q \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \mathbb{D}_2 \mathbb{A}_2,$$

$$\mathbb{B} = \begin{bmatrix} q-2 & 0 \\ 0 & q-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q-2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbb{D}_2 \mathbb{B}_2.$$

$$\mathbb{A} \mathbb{P}_2 + \mathbb{B} \mathbb{Q}_2 = \mathbb{D}_2,$$

$$\begin{bmatrix} q+1 & 0 & q \\ 0 & q-2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q-2 & 0 \\ 0 & q-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q-2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbb{A} \mathbb{R}_2 + \mathbb{B} \mathbb{S}_2 = 0,$$

$$\begin{bmatrix} q+1 & 0 & q \\ 0 & q-2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -q & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ q+1 & -3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q-2 & 0 \\ 0 & q-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

□ KONEC PŘÍKLADU

Pozn.: Zřejmě největší společný levý dělitel matic není jednoznačný. Každá zprava asociovaná matice (zprava vynásobená libovolnou elementární maticí) má stejnou vlastnost.

A1.3.2 KANONICKÝ TVAR POLYNOMIÁLNÍ MATICE

(normální diagonální tvar)

Každou polynomiální matici $\mathbb{A}(q)$ lze napsat v kanonickém tvaru

$$\mathbb{A}(q) = \mathbb{J}_1 \cdot \text{Diag} \left(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_r, 0, \dots, 0 \right) \cdot \mathbb{J}_2, \quad (A1.47)$$

$r = \text{rank } \mathbb{A}$,

kde $\mathbb{J}_1, \mathbb{J}_2$ jsou elementární matice (jednotky okruhu) ,

$\det \mathbb{J}_i =$ reálné nenulové číslo , $i = 1, 2$ a

$$\mathbb{K} = \text{Diag} \left(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_r, 0, \dots, 0 \right) = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{A}_2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \mathcal{A} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0^r & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad m \quad n \quad (A1.48)$$

$$\mathcal{A}_i = \mathcal{A}_i(q) ; \quad i = 1, 2, \dots, r$$

jsou invariantní polynomy matice $\mathbb{A}(q)$, viz (A1.50) mající tu vlastnost, že $\mathcal{A}_{k+1}(q)$ je dělitelný $\mathcal{A}_k(q)$; $k=1, 2, \dots, r-1$ a jsou v normálním tvaru, tj. nenulové polynomy mají koeficient u nejvyšší mocniny roven jedné.

Kanonický tvar je až na jednotky okruhu jednoznačný.

Možné tvary :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{A}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{A}_3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathcal{A}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{A}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{A}_3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathcal{A}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{A}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ atd.}$$

Každá polynomiální matice $\mathbb{A}(q)$ je asociovaná s jistou diagonální maticí $\mathbb{K} = \text{Diag} \left(\begin{matrix} \mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \dots, \mathbb{A}_r, 0, \dots, 0 \end{matrix} \right)$.
 (m, n)
 (m, n)

Kanonický tvar matice hledáme tak, že popstupnými řádkovými a sloupcovými úpravami převedeme matici do tohoto formálního tvaru. Chceme-li určit transformační elementární matice $\mathbb{J}_1, \mathbb{J}_2$ lze nejprve sestavit blokově složenou matici

$$\left(\begin{array}{c|c|c} \mathbb{E}_m & \mathbb{A} & \mathbb{E}_n \\ \hline (m, m) & (m, n) & (n, n) \end{array} \right)$$

a na matici $\mathbb{A}$ provádět příslušné řádkové a sloupcové úpravy. Současně však provádět stejné řádkové úpravy i na matici $\mathbb{E}_m$ a sloupcové úpravy i na matici $\mathbb{E}_n$. Matice $\mathbb{A}$ přechází na $\mathbb{K}$ a $\mathbb{E}_m \rightarrow \mathbb{J}_1^{-1}$; $\mathbb{E}_n \rightarrow \mathbb{J}_2^{-1}$

$$\left(\begin{array}{c|c|c} \mathbb{J}_1^{-1} & \mathbb{K} & \mathbb{J}_2^{-1} \\ \hline \end{array} \right)$$

neboť

$$\begin{aligned} \mathbb{A} &= \mathbb{E}_m \mathbb{A} \mathbb{E}_n, \\ \mathbb{K} &= \mathbb{J}_1^{-1} \mathbb{A} \mathbb{J}_2^{-1} = \mathbb{J}_1^{-1} \mathbb{E}_m \mathbb{A} \mathbb{E}_n \mathbb{J}_2^{-1}, \\ \mathbb{A} &= \mathbb{J}_1 \mathbb{K} \mathbb{J}_2. \end{aligned} \quad (A1.49)$$

K drobné komplikaci algoritmu, kterou je nutné navíc ošetřit, dochází při zajištění soudělnosti prvků diagonální matice. Algoritmus je podrobně zpracován v [15] včetně důkazu. Zde se jím podrobněji zabývat nebudu.

Pozn.: Transformační elementární matice J_1, J_2 nejsou zřejmě určeny maticí A jednoznačně.

Invariantní polynomy

(V lit.[53] označeny jako invariantní faktory, pro účely tohoto textu však toto označení nepřebírám.)

Jsou to polynomy jednoznačně určené maticí $A(q)$, pro které platí

$$a_k = \frac{\gcd_k A}{\gcd_{k-1} A}, \quad k = 1, 2, \dots, r, \quad r = \text{rank } A, \quad (A1.50)$$

$$\gcd_0 A = 1 \quad \dots \text{definitivně,}$$

kde $\gcd_j A$ je největší společný dělitel všech subdeterminantů j -tého stupně matice A .

Příklad A1.5

Nalezněme invariantní polynomy a_1, a_2 matice

$$A(q) = \begin{bmatrix} q+1 & 0 & q \\ 0 & q-2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Podle definice $\gcd_0 A = 1$,

subdeterminanty 1.stupně matice A :

$$q+1, q-2, q \Rightarrow \gcd_1 A = 1,$$

subdeterminanty 2.stupně matice A :

$$(q+1)(q-2), -q(q-2) \Rightarrow \gcd_2 A = q-2,$$

$$a_1 = \frac{\gcd_1 A}{\gcd_0 A} = \frac{1}{1} = 1,$$

$$a_2 = \frac{\gcd_2 A}{\gcd_1 A} = \frac{q-2}{1} = q-2,$$

$$K = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & q-2 & 0 \end{bmatrix},$$

viz předcházející příklad př. A1.4 - srovnajte.

□ KONEC PŘÍKLADU

Je zřejmé, že dále platí :
$$a_k = \frac{\gcd_k A}{\gcd_{k-1} A}, \quad (A1.51)$$

$$\gcd_k A = a_k \gcd_{k-1} A = a_k a_{k-1} \gcd_{k-2} A = \dots \\ \dots = a_k a_{k-1} \dots a_1 = \prod_{i=1}^k a_i.$$

$$A P_2 + B Q_2 = D_2,$$

$$\begin{bmatrix} q+1 & 0 & q \\ 0 & q-2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q-2 & 0 \\ 0 & q-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q-2 \end{bmatrix},$$

$$A R_2 + B S_2 = 0,$$

$$\begin{bmatrix} q+1 & 0 & q \\ 0 & q-2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -q & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ q+1 & -3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q-2 & 0 \\ 0 & q-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

□ KONEC PŘÍKLADU

Pozn.: Zřejmě největší společný levý dělitel matic není jednoznačný. Každá zprava asociovaná matice (zprava vynásobená libovolnou elementární maticí) má stejnou vlastnost.

A1.3.3 FAKTORIZACE POLYNOMIÁLNÍ MATICE

Faktorizací rozumíme způsob rozkladu a vyčlenění stabilního a antistabilního faktoru matice. Vzhledem k nekomutativnosti operace násobení matic je nutné rozlišit pravý a levý rozklad matice.

Pravou faktorizací polynomiální obecně obdélníkové matice $\mathbb{A}(q)$ rozumíme rozklad

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}_P^- \mathbb{A}_P^+ , \quad (A1.52)$$

(m,n) (m,n)(n,n)

kde determinant čtvercové stabilní složky $\det \mathbb{A}_P^+$ je stabilní polynom nejvyššího stupně obsažený v polynomu $\gcd_r \mathbb{A}$, $r = \text{rank } \mathbb{A}$.

Levou faktorizací matice $\mathbb{A}(q)$ pak rozumíme rozklad

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}_L^+ \mathbb{A}_L^- , \quad (A1.53)$$

(m,n) (m,m)(m,n)

kde $\det \mathbb{A}_L^+$ je polynom stejných vlastností. Zřejmě vzhledem k (A1.47) platí

$$\mathbb{A}_P^- = \mathbb{J}_1 \cdot \text{Diag} (\mathcal{A}_1^-, \mathcal{A}_2^-, \dots, \mathcal{A}_r^-, 0, \dots, 0) ,$$

(m,n)(m,m)(m,n)

$$\mathbb{A}_P^+ = \text{Diag} (\mathcal{A}_1^+, \mathcal{A}_2^+, \dots, \mathcal{A}_r^+, 1, \dots, 1) \cdot \mathbb{J}_2 ,$$

(n,n) (n,n) (A1.54)

$$\mathbb{A}_L^- = \text{Diag} (\mathcal{A}_1^-, \mathcal{A}_2^-, \dots, \mathcal{A}_r^-, 0, \dots, 0) \cdot \mathbb{J}_2 ,$$

(m,n) (m,n) (n,n)

$$\mathbb{A}_L^+ = \mathbb{J}_1 \cdot \text{Diag} (\mathcal{A}_1^+, \mathcal{A}_2^+, \dots, \mathcal{A}_r^+, 1, \dots, 1) ,$$

(m,m)(m,m)(m,n)

kde $\mathcal{A}_j = \mathcal{A}_j^+ \mathcal{A}_j^-$, $j=1,2,\dots,r$ je faktorizace invariantních polynomů $\mathcal{A}_j$, viz (A1.24). Stabilní faktory obou rozkladů jsou regulární čtvercové matice. Obě faktorizace jsou určeny jednoznačně až na matice s nimi asociované.

Příklad A1.6 Nalezněme pravou i levou faktorizaci matice

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} q+1 & 0 & q \\ 0 & q-2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Využijme výsledku příkladu př. A1.4

$$\mathbb{K} = \text{Diag} (\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & q-2 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad (2,3)$$

$$\mathcal{A}_1 = 1 = \mathcal{A}_1^+ \mathcal{A}_1^- \quad , \quad \mathcal{A}_1^+ = \mathcal{A}_1^- = 1 \quad ,$$

$$\mathcal{A}_2 = q-2 = \mathcal{A}_2^+ \mathcal{A}_2^- \quad , \quad \mathcal{A}_2^+ = q-2 \quad , \quad \mathcal{A}_2^- = 1 \quad ,$$

$$\mathbb{J}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbb{J}_2 = \begin{bmatrix} q+1 & 0 & q \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ,$$

$$\text{Diag} (\mathcal{A}_1^-, \mathcal{A}_2^-) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \text{Diag} (\mathcal{A}_1^+, \mathcal{A}_2^+, 1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & q-2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad (2,3) \quad (3,3)$$

$$\text{Diag} (\mathcal{A}_1^+, \mathcal{A}_2^+) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q-2 \end{bmatrix} \quad . \quad (2,2)$$

Pravá faktorizace $\mathbb{A} = \mathbb{A}_P^- \mathbb{A}_P^+$

$$\mathbb{A}_P^- = \mathbb{J}_1 \text{Diag} (\mathcal{A}_1^-, \mathcal{A}_2^-) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad (2,3)(2,2)(2,3)$$

$$\mathbb{A}_P^+ = \text{Diag} (\mathcal{A}_1^+, \mathcal{A}_2^+, 1) \mathbb{J}_2 = \begin{matrix} (3,3) & (3,3) & (3,3) \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & q-2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q+1 & 0 & q \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} q+1 & 0 & q \\ 0 & q-2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\det \mathbb{A}_P^+ = q-2 \quad \dots \quad \text{stab.},$$

$$\det [\mathbb{A}_P^- (\mathbb{A}_P^-)^T] = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1,$$

$$\mathbb{A}_P^- \mathbb{A}_P^+ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q+1 & 0 & q \\ 0 & q-2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q+1 & 0 & q \\ 0 & q-2 & 0 \end{bmatrix} = \mathbb{A}.$$

Levá faktorizace $\mathbb{A} = \mathbb{A}_L^+ \mathbb{A}_L^-$

$$\mathbb{A}_L^- = \text{Diag} (\mathcal{A}_1^-, \mathcal{A}_2^-) \mathbb{J}_2 = \begin{matrix} (2,3) & (2,3) & (3,3) \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q+1 & 0 & q \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} q+1 & 0 & q \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbb{A}_L^+ = \mathbb{J}_1 \cdot \text{Diag} (\mathcal{A}_1^+, \mathcal{A}_2^+) = \begin{matrix} (2,2) & (2,2) & (2,2) \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q-2 \end{bmatrix},$$

$$\det [\mathbb{A}_L^- (\mathbb{A}_L^-)^T] = \det \begin{bmatrix} 2q^2+2q+1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2q^2+2q+1 =$$

$$= 2(q-q_1)(q-q_2),$$

$$q_{1,2} = 0,5(-1 \pm i) \quad \dots \quad \text{stab.}$$

$$\det \mathbb{A}_L^+ = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q-2 \end{bmatrix} = q-2 \quad \dots \quad \text{stab.},$$

$$\mathbb{A}_L^+ \mathbb{A}_L^- = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q+1 & 0 & q \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q+1 & 0 & q \\ 0 & q-2 & 0 \end{bmatrix} = \mathbb{A}.$$

Faktorizaci matice lze provést i prostřednictvím algoritmu podle kap. A1.3.1 resp. A1.3.1.2.

$$A = \begin{bmatrix} q+1 & 0 & q \\ 0 & q-2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A A^T = \begin{bmatrix} q+1 & 0 & q \\ 0 & q-2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q+1 & 0 \\ 0 & q-2 \\ q & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2q^2+2q+1 & 0 \\ 0 & (q-2)^2 \end{bmatrix},$$

$$\det A A^T = (2q^2+2q+1)(q-2)^2,$$

$$2q^2+2q+1 = 2(q-q_1)(q-q_2) \dots \text{nestab. faktor},$$

$$q_{1,2} = 0,5(-1 \pm i),$$

$$(q-2)^2 \dots \text{stabilní faktor}.$$

Levá faktorizace

Levý rozklad realizujeme algoritmem výpočtu největšího společného pravého dělitele dvou matic podle kap. A1.3.1.1. Jako vedlejší produkt algoritmu získáme řešení diofantické rovnice

$$R_1 A + S_1 B = 0 \Rightarrow R_1 A = -S_1 B.$$

Volíme-li však speciálně $B = (q-2)E_3$, pak $p = n = r$, viz (A1.43) a můžeme psát

$$A B^{-1} = -R_1^{-1} S_1 \Rightarrow A = -(q-2) R_1^{-1} S_1.$$

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -q+2 & 0 \end{bmatrix}, \quad R_1^{-1} = \frac{1}{-q+2} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -q+2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{viz př. A1.1, kap. A1.3.1.1},$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ q+1 & 0 & q \end{bmatrix},$$

$$A = -(q-2) \frac{1}{-q+2} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -q+2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ q+1 & 0 & q \end{bmatrix},$$

což je již jeden z možných levých rozkladů matice

$$\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{A}}_L^+ \tilde{\mathbf{A}}_L^- = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ q-2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ q+1 & 0 & q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q+1 & 0 & q \\ 0 & q-2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_L^+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ q-2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{A}}_L^- = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ q+1 & 0 & q \end{bmatrix},$$

$$\det \tilde{\mathbf{A}}_L^+ = -(q-2),$$

$$\det [\tilde{\mathbf{A}}_L^- (\tilde{\mathbf{A}}_L^-)^T] = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2q^2+2q+1 \end{bmatrix} = 2q^2+2q+1.$$

Na faktorizaci, kterou jsme získali prostřednictvím kanonického tvaru matice lze výsledek převést jednoduchou transformací.

$$\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{A}}_L^+ \mathbf{Q} \mathbf{Q}^{-1} \tilde{\mathbf{A}}_L^- = \mathbf{A}_L^+ \mathbf{A}_L^-, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_L^+ = \tilde{\mathbf{A}}_L^+ \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ q-2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q-2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_L^- = \mathbf{Q}^{-1} \tilde{\mathbf{A}}_L^- = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ q+1 & 0 & q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q+1 & 0 & q \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pravá faktorizace

Analogicky jako levý rozklad, tentokrát však pravý rozklad realizujeme algoritmem výpočtu největšího společného levého dělitele dvou matic podle kap. A1.3.1.2. Jako vedlejší produkt algoritmu získáme řešení diofantické rovnice

$$\mathbf{A} \mathbf{R}_2 + \mathbf{B} \mathbf{S}_2 = 0 \Rightarrow \mathbf{A} \mathbf{R}_2 = -\mathbf{B} \mathbf{S}_2,$$

Volíme-li opět $\mathbf{B} = (q-2) \mathbf{E}_2$, pak $p = m = r$, viz (A1.46) a můžeme psát

$$\mathbb{B}^{-1}\mathbb{A} = -\mathbb{S}_2 \mathbb{R}_2^{-1} \Rightarrow \underline{\mathbb{A} = -(q-2) \mathbb{S}_2 \mathbb{R}_2^{-1}},$$

$$\mathbb{R}_2 = \begin{bmatrix} -q & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ q+1 & -3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{R}_2^{-1} = \frac{1}{q-2} \begin{bmatrix} -3 & 0 & -2 \\ -(q+1) & 0 & -q \\ 0 & -(q-2) & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbb{S}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{viz př. A1.3, kap. A1.3.1.2}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{A} &= -(q-2) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{q-2} \begin{bmatrix} -3 & 0 & -2 \\ -(q+1) & 0 & -q \\ 0 & -(q-2) & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ q+1 & 0 & q \\ 0 & q-2 & 0 \end{bmatrix} = \tilde{\mathbb{A}}_P^- \tilde{\mathbb{A}}_P^+, \end{aligned}$$

což je opět jeden z možných pravých rozkladů matice

$$\tilde{\mathbb{A}}_P^- = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbb{A}}_P^+ = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ q+1 & 0 & q \\ 0 & q-2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\det [\tilde{\mathbb{A}}_P^- (\tilde{\mathbb{A}}_P^-)^T] = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1,$$

$$\det \tilde{\mathbb{A}}_P^+ = -(q-2)^2.$$

Souvislost tohoto výsledku s faktorizací, kterou jsme získali prostřednictvím kanonického tvaru matice lze ukázat jednoduchou transformací.

$$\mathbb{A} = \tilde{\mathbb{A}}_P^- \mathbb{P} \mathbb{P}^{-1} \tilde{\mathbb{A}}_P^+ = \mathbb{A}_P^- \mathbb{A}_P^+, \quad \mathbb{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -q+2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbb{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a & a & 0 \end{bmatrix}, \quad a = \frac{1}{q-2},$$

$$\tilde{\mathbb{A}}_P^- = \tilde{\mathbb{A}}_P^- \mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -q+2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbb{A}_P^+ = \mathbb{P}^{-1} \tilde{\mathbb{A}}_P^+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a & a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ q+1 & 0 & q \\ 0 & q-2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q+1 & 0 & q \\ 0 & q-2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

□ KONEC PŘÍKLADU

A1.3.4 ALGEBRAICKÝ KALKUL

Algebraickým kalkulem budeme pro účely tohoto textu rozumět soubor algebraických operací a souvislostí používaných při syntéze diskrétního víceparametrového regulačního obvodu. V této kapitole uvedené je jen logickým rozšířením souvislostí a vlastností uvedených v kapitole A1.2 pro syntézu jednoparametrových systémů a polynomy a racionální lomené funkce.

Skalární součin dvou polynomiálních matic racionálních lomených funkcí

$\mathbf{a}(q)$, $\mathbf{b}(q)$, pro jejichž prvky $a_{ij}(q)$, $b_{ij}(q)$ platí
 $(m,n) \quad (m,n)$

$$a_{ij}(q), b_{ij}(q) \in \mathcal{M}_0,$$

je zaveden vztahem

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \frac{1}{2\pi i} \int_{\zeta} \operatorname{tr} \mathbf{a}(q) \mathbf{b}^T(1/q) \frac{dq}{q} =$$

$\zeta \dots$ jednotková kladně orientovaná kružnice,

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\zeta} \operatorname{tr} \mathbf{a} \mathbf{b}^T \frac{dq}{q}, \quad (\text{A1.55})$$

$$\bar{\mathbf{b}}(q) = \mathbf{b}(1/q), \quad \bar{b}_{ij}(q) = b_{ij}(1/q),$$

$$\operatorname{tr} \mathbf{a} \bar{\mathbf{b}}^T = \operatorname{tr} \begin{bmatrix} a_{11}(q) & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11}(1/q) & b_{12} & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{mn} \end{bmatrix} =$$

$$= a_{11} \bar{b}_{11} + a_{12} \bar{b}_{12} + \dots + a_{1n} \bar{b}_{1n} +$$

$$+ a_{21} \bar{b}_{21} + a_{22} \bar{b}_{22} + \dots + a_{2n} \bar{b}_{2n} + \dots +$$

$$+ a_{m1} \bar{b}_{m1} + a_{m2} \bar{b}_{m2} + \dots + a_{mn} \bar{b}_{mn} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} \bar{b}_{ij}, \quad (\text{A1.56})$$

$$\operatorname{tr} \mathbf{a} \bar{\mathbf{a}}^T = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} \bar{a}_{ij}, \quad \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \langle a_{ij}, b_{ij} \rangle,$$

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = \|\mathbf{a}\|^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \langle a_{ij}, a_{ij} \rangle = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \|a_{ij}\|^2.$$

Zřejmě platí také i tyto identity:

$$1) \quad \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle,$$

$$2) \quad \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{c} \rangle,$$

$$3) \quad \langle \lambda \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \lambda \mathbf{b} \rangle = \lambda \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle,$$

$\lambda \dots$ skalární konst.

$$4) \quad \langle \mathbf{a} \mathbf{c}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \mathbf{c}^T \rangle, \quad \langle \mathbf{c} \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c}^T \mathbf{b} \rangle,$$

$$5) \langle a Q_1, b \rangle = \langle a, b Q_1^T \rangle ,$$

$$\langle Q_2 a, b \rangle = \langle Q_2, b \bar{a}^T \rangle ,$$

$Q_1, Q_2 \dots$ matice konstant ,
(n,n) (m,m)

$$6) \langle q^k a, q^k b \rangle = \langle a, b \rangle , \quad (A1.57)$$

$$7) \langle a, b \rangle = \langle a d, b (\bar{d}^T)^{-1} \rangle , \quad d \dots \text{regulární čtvercová,} \\ (n,n)$$

$$8) \langle a, b \rangle = 0 \quad \text{pro} \quad a_{ij} \in \mathcal{M}_+ , \quad b_{ij} \in \mathcal{M}_- ,$$

$$9) \langle a, b \rangle = \langle a^T, b^T \rangle ,$$

$$10) \langle d a, (\bar{d}^T)^{-1} a \rangle = \langle a, a \rangle = \| a \|^2 ,$$

$$\langle d a, (\bar{d}^T)^{-1} b \rangle = \langle a, b \rangle \quad d \dots \text{regulární čtvercová .} \\ (m,m)$$

Rozklad kvadratického funkcionálu $J_1(x)$ ve tvaru skalárního čtverce

$$\begin{aligned} J_1(x) &= \| a x + b \|^2 = \langle a x + b, a x + b \rangle = \\ &= \langle a x, a x + b \rangle + \langle b, a x + b \rangle = \\ &= \langle a x, a x \rangle + \langle a x, b \rangle + \langle b, a x \rangle + \langle b, b \rangle = \\ &= \| a x \|^2 + 2 \langle a x, b \rangle + \| b \|^2 \end{aligned} \quad (A1.58)$$

a funkcionálu $J_2(x)$

$$\begin{aligned} J_2(x) &= \| a x \|^2 + x \| c x \|^2 = \| x^T \bar{a}^T \|^2 + x \| x^T \bar{c}^T \|^2 = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\zeta} \text{tr} \left[x^T \bar{a}^T \bar{a} \bar{x} + x x^T \bar{c}^T \bar{c} \bar{x} \right] \frac{dq}{q} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\zeta} \text{tr} \left[x^T (\bar{a}^T \bar{a} + x \bar{c}^T \bar{c}) \bar{x} \right] \frac{dq}{q} = \\ &= \| x^T \bar{g}^T \|^2 = \| g x \|^2 , \quad \text{kde} \quad \bar{g}^T \bar{g} = \bar{a}^T \bar{a} + x \bar{c}^T \bar{c} . \end{aligned} \quad (A1.59)$$

A2

APPENDIX 2

Důkaz vět V2.1, V2.2

113

APPENDIX 2

A2 DŮKAZ VĚT V2.1, V2.2

Věta V2.1

Obecný lineární jednoparametrový dynamický systém s konstantními koeficienty zatížený aditivním bílým šumem

$$\dot{x}(t) = TAT^{-1}x(t) + TBu(t) + v(t), \quad (A2.1)$$

$$y(t) = CT^{-1}x(t) + Du(t),$$

kde $v(t) = [v_1(t), v_2(t), \dots, v_n(t)]^T$,

$$v_j(t), \quad j = 1, 2, \dots, n$$

n -tice vzájemně nezávislých bílých šumů s nulovou

střední hodnotou, nezávislých na $u(t)$,

$T \dots$ regulární transformační matice,

lze nahradit z hlediska výkonové spektrální hustoty $S_{yy}(\omega)$ ekvivalentním ARMAX modelem

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b_m u^{(m)} + \dots + b_1 u' + b_0 u + \quad (A2.2)$$

$$+ c_r d^{(r)} + \dots + c_1 d' + c_0 d,$$

$d \dots$ skalární bílý šum s nulovou střední hodnotou

nezávislý na $u(t)$.

V Laplaceově transformaci (při zleva nulových počátečních podmínkách)

$$y(s)[a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0] = u(s)[b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0] + d(s)[c_r s^r + \dots + c_1 s + c_0],$$

$$y(s) = \frac{B(s)}{A(s)} u(s) + \frac{C(s)}{A(s)} d(s) = f_{yu}(s) u(s) + f_{yd}(s) d(s),$$

$$A(s) = a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0, \quad (A2.3)$$

$$B(s) = b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0,$$

$$C(s) = c_r s^r + \dots + c_1 s + c_0.$$

1) Určení polynomů $A(s)$, $B(s)$, $C(s)$ modelu je v rámci minimálně-fázových $f_{yd}(s)$ jednoznačné

$$A(s) = \det(sE - A), \quad (A2.4)$$

$$B(s) = C \operatorname{adj}(sE - A) B + D A(s), \quad (A2.5)$$

$$C(-i\omega) C(-i\omega) = C \operatorname{adj}(i\omega E - A) T^{-1} T^{-T} \operatorname{adj}^T(-i\omega E - A) C^T. \quad (A2.6)$$

2) Polynomy $A(s)$, $B(s)$ jsou invariantní vůči volbě transformační matice T , polynom $C(s)$ pouze v případě, že se jedná o transformaci ortogonální ($T^{-1} T^{-T} = E$).

3) V případě neortogonální transformace je třída možných polynomů $C(s)$ dána vztahem (A2.6).

4) Pro dynamické systémy řádu vyššího než prvního ($n > 1$) případ $C(s) = 1$ do třídy (A2.6) nepatří. Neexistuje tedy taková volba stavového vyjádření, aby bylo možné popsat proces regresním modelem ($c_0 = 1$, $c_j = 0$, $j = 1, 2, \dots, r$).

Důkaz :

Uvažujme stavový popis dynamického systému podle (A2.1)

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \tilde{A} x(t) + \tilde{B} u(t) + v(t) \quad , \\ y(t) &= \tilde{C} x(t) + D u(t) \quad , \\ \tilde{A} &= TAT^{-1} \quad , \quad \tilde{B} = TB \quad , \quad \tilde{C} = CT^{-1} \quad . \end{aligned}$$

Laplaceův obraz rovnice při zleva nulových počátečních podmínkách

$$\begin{aligned} x(s) &= (sE - \tilde{A})^{-1} \tilde{B} u(s) + (sE - \tilde{A})^{-1} v(s) \quad , \\ y(s) &= [\tilde{C} (sE - \tilde{A})^{-1} \tilde{B} + D] u(s) + \tilde{C} (sE - \tilde{A})^{-1} v(s) \quad , \\ x(s) &= \mathcal{L} \{ x(t) \} \quad , \quad u(s) = \mathcal{L} \{ u(t) \} \quad , \\ v(s) &= \mathcal{L} \{ v(t) \} = [v_1(s), v_2(s), \dots, v_n(s)]^T \quad . \end{aligned}$$

Obrazový přenos $f_{yu}(s) = \mathcal{B}(s)/\mathcal{A}(s) = y(s)/u(s)$ je invariantní vůči regulární transformaci, neboť

$$\begin{aligned} f_{yu}(s) &= \mathcal{B}(s)/\mathcal{A}(s) = \tilde{C} (sE - \tilde{A})^{-1} \tilde{B} + D = \\ &= CT^{-1} (sE - TAT^{-1})^{-1} TB + D = CT^{-1} [T (sE - A)^{-1}]^{-1} TB + D = \\ &= CT^{-1} T (sE - A)^{-1} T^{-1} TB + D = C (sE - A)^{-1} B + D \quad , \end{aligned}$$

dále pak

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(s) &= \det (sE - A) \quad , \\ \mathcal{B}(s) &= C \operatorname{adj} (sE - A) B + D \mathcal{A}(s) \quad . \end{aligned}$$

Položíme - li $u(t) = 0$, $u(s) = 0$, potom

$$\begin{aligned} y(s) &= \tilde{C} (sE - \tilde{A})^{-1} v(s) = f(s) v(s) = \\ &= f_1(s) v_1(s) + f_2(s) v_2(s) + \dots + f_n(s) v_n(s) \quad , \\ f(s) &= \tilde{C} (sE - \tilde{A})^{-1} = [f_1(s), f_2(s), f_n(s)] \quad , \end{aligned}$$

kde $f_j(s)$, $j = 1, 2, \dots, n$ jsou jisté racionální funkce dílčích obrazových přenosů vyjadřujících dynamickou závislost

Důkaz lemma 1 :

$$\text{ad 1) } Q_1^{-1} = \frac{\text{adj } Q_1}{\det Q_1} \Rightarrow \text{adj } Q_1 = Q_1^{-1} \det Q_1 ,$$

$$\begin{aligned} \text{adj}^T Q_1 &= (Q_1^{-1})^T \det Q_1 = (Q_1^T)^{-1} \det Q_1 = \frac{\text{adj } Q_1^T}{\det Q_1^T} \det Q_1 = \\ &= \text{adj } Q_1^T . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ad 2) } \text{adj } (Q_1 Q_2) &= (Q_1 Q_2)^{-1} \cdot \det (Q_1 Q_2) = Q_2^{-1} Q_1^{-1} \det Q_1 \cdot \det Q_2 = \\ &= \text{adj } Q_2 \cdot \text{adj } Q_1 . \end{aligned}$$

$$\text{ad 3) } i\omega E = T (i\omega E) T^{-1} ,$$

$$\begin{aligned} \text{adj } (i\omega E - T Q_1 T^{-1}) &= \text{adj } [T (i\omega E) T^{-1} - T Q_1 T^{-1}] = \\ &= \text{adj } [T (i\omega E - Q_1) T^{-1}] = [\text{viz (A2.8/2)}] = \\ &= \text{adj } T^{-1} \text{adj } (i\omega E - Q_1) \text{adj } T = \\ &= \frac{T}{\det T} \text{adj } (i\omega E - Q_1) T^{-1} \det T = \\ &= T \text{adj } (i\omega E - Q_1) T^{-1} . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ad 4) } \det (i\omega E - T Q_1 T^{-1}) &= \det [T (i\omega E - Q_1) T^{-1}] = \\ &= \det T \cdot \det (i\omega E - Q_1) \frac{1}{\det T} = \det (i\omega E - Q_1) . \end{aligned}$$

□ KONEC DŮKAZU LEMMA 1

Užitím identit lemma 1 lze vztah (A2.7) zjednodušit

$$\det (\pm i\omega E - T A T^{-1}) = \det (\pm i\omega E - A) ,$$

$$\text{adj } (\pm i\omega E - T A T^{-1}) = T \text{adj } (\pm i\omega E - A) T^{-1} ,$$

$$\text{adj}^T (-i\omega E - T A T^{-1}) = (T^{-1})^T \text{adj } (-i\omega E - A) T^T .$$

Dosazením do (A2.7) a jednoduchou úpravou pak

$$\begin{aligned} S_{yy}(\omega) &= C T^{-1} \frac{T \operatorname{adj}(i\omega E - A) T^{-1} (T^{-1})^T \operatorname{adj}^T(-i\omega E - A) T^T}{\det(i\omega E - A) \cdot \det(-i\omega E - A)} (T^{-1})^T C^T = \\ &= C \frac{\operatorname{adj}(i\omega E - A) T^{-1} (T^{-1})^T \operatorname{adj}^T(-i\omega E - A)}{\det(i\omega E - A) \cdot \det(-i\omega E - A)} C^T = \\ &= k_{yd}(i\omega) k_{yd}(-i\omega) = \frac{\mathcal{E}(i\omega)}{\mathcal{A}(i\omega)} \frac{\mathcal{E}(-i\omega)}{\mathcal{A}(-i\omega)}. \end{aligned}$$

Polynom jmenovatele $S_{yy}(\omega)$ a tedy i polynom $\mathcal{A}(i\omega)$ jmenovatele přenosu $k_{yd}(i\omega)$ je invariantní vůči regulární transformaci a dále je totožný se jmenovatelem přenosu $k_{yu}(i\omega)$. Regulární transformace stavového popisu mění obecně pouze polynom $\mathcal{E}(s)$. Třída těchto možných polynomů je dána vztahem

$$\mathcal{E}(i\omega) \mathcal{E}(-i\omega) = C \operatorname{adj}(i\omega E - A) T^{-1} T^{-T} \operatorname{adj}^T(-i\omega E - A) C^T.$$

Zřejmě v případě ortogonální transformace, pro kterou platí $T^{-1} T^{-T} = E$, je i polynom $\mathcal{E}(s)$ invariantní a na transformaci nezávisí.

Čitatel i jmenovatel $S_{yy}(\omega)$ jsou polynomy, tedy skalárními funkcemi $i\omega$. Čitatel je dán kvadrátem vektoru, jehož prvky jsou polynomy. Tento kvadrát je tvořen součinem transponovaného vektoru $C \operatorname{adj}(i\omega E - A) T^{-1}$ a vektoru komplexně sdruženého (oba jsou tedy vzájemně adjungované). Při rozkladu takto vzniklého polynomu (pouze sudých mocnin $i\omega$) na součin polynomů $\mathcal{E}(i\omega) \mathcal{E}(-i\omega)$ však dochází k nejednoznačnosti tohoto rozkladu. Obdobně platí i pro rozklad jmenovatele $S_{yy}(\omega)$ na součin $\mathcal{A}(i\omega) \mathcal{A}(-i\omega)$.

$$\mathbf{Z}^T(i\omega) \mathbf{Z}(-i\omega) = \mathcal{R}(i\omega) \mathcal{R}(-i\omega),$$

$\mathbf{Z}(i\omega) \dots$ sloupcový polynomiální vektor,

$\mathcal{R}(i\omega) \dots$ polynom,

$$\mathcal{R}(i\omega) = h_n(i\omega - \alpha_1)(i\omega - \alpha_2) \dots (i\omega - \alpha_n),$$

$$\mathcal{R}(-i\omega) = h_n(-i\omega - \alpha_1)(-i\omega - \alpha_2) \dots (-i\omega - \alpha_n),$$

$\alpha_j, j = 1, 2, \dots, n$ kořeny polynomu $\mathcal{R}(i\omega)$,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(i\omega)\mathcal{R}(-i\omega) &= h_n^2[\alpha_1^2 - (i\omega)^2][\alpha_2^2 - (i\omega)^2] \dots [\alpha_n^2 - (i\omega)^2] = \\ &= \left[(i\omega)^2 = p \right] = h_n^2[\alpha_1^2 - p][\alpha_2^2 - p] \dots [\alpha_n^2 - p] = \mathcal{R}(p). \end{aligned}$$

Pro kořeny β_j polynomu $\mathcal{R}(p)$ však platí

$$\beta_j = \alpha_j^2 \Rightarrow \alpha_j = \pm \sqrt{\beta_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Diskutovaný rozklad skutečně jednoznačný není, kořeny $\pm \alpha_j$ lze přiřadit buď polynomu $\mathcal{R}(i\omega)$ nebo $\mathcal{R}(-i\omega)$. V rámci stabilního $\mathcal{R}(i\omega)$ (tj. všechny jeho kořeny ve stabilní oblasti) však tento rozklad jednoznačný je.

Aplikováno na úlohu hledání modelu dynamického systému zatíženého obecným šumem lze učinit závěr, že určení charakteristického polynomu $\mathcal{A}(s)$ přenosů $f_{yu}(s) = \mathcal{B}(s)/\mathcal{A}(s)$, $f_{yd}(s) = \mathcal{C}(s)/\mathcal{A}(s)$ je jednoznačné a je dáno vztahem (A2.4). Polynom $\mathcal{B}(s)$ vztahem (A2.5). Pro jisté stavové vyjádření však určení polynomu $\mathcal{C}(s)$ jednoznačné obecně není, existuje celá třída těchto polynomů. Množina absolutních hodnot kořenů těchto polynomů je identická pro všechny polynomy celé třídy, kořeny různých polynomů se vzájemně liší pouze znaménkem. Z hlediska výkonové spektrální hustoty $S_{yy}(\omega)$ existuje třída ekvivalentních modelů lišících se polynodem $\mathcal{C}(s)$, ale pouze jediný s minimálně fázovým přenosem $f_{yd}(s)$.

Tvrzení ad 4) dokážeme sporem. Předpokládáme $\mathcal{U}(s) = 1$, potom

$$\mathcal{U}(i\omega) \mathcal{U}(-i\omega) = C \operatorname{adj}(i\omega E - A) T^{-1} T^{-T} \operatorname{adj}^T(-i\omega E - A) C^T = 1.$$

Matice $C \operatorname{adj}(i\omega E - A) T^{-1}$ je polynomiální řádková matice

$$C \operatorname{adj}(i\omega E - A) T^{-1} = [\mathcal{R}_1(i\omega), \mathcal{R}_2(i\omega), \dots, \mathcal{R}_n(i\omega)],$$

$$\mathcal{U}(i\omega) \mathcal{U}(-i\omega) = \mathcal{R}_1(i\omega) \mathcal{R}_1(-i\omega) + \mathcal{R}_2(i\omega) \mathcal{R}_2(-i\omega) + \dots + \mathcal{R}_n(i\omega) \mathcal{R}_n(-i\omega),$$

$$\mathcal{R}_j(i\omega) = r_{j(n-1)}(i\omega)^{(n-1)} + \dots + r_{j1}(i\omega) + r_{j0}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$\mathcal{R}_j(i\omega) \mathcal{R}_j(-i\omega) = r_{j(n-1)}^2 \omega^{2(n-1)} + \dots + r_{j1}^2 \omega^2 + r_{j0}^2, \quad r_{j(n-1)}^2 \geq 0.$$

Má-li být $\mathcal{U}(i\omega) \mathcal{U}(-i\omega) = 1$, potom nutně

$$r_{jk} = 0; \quad j = 1, 2, \dots, n; \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \quad \sum_{j=1}^n r_{j0}^2 = 1,$$

tedy $\mathcal{R}_1(i\omega), \mathcal{R}_2(i\omega), \dots, \mathcal{R}_n(i\omega)$ jsou pouze konstanty.

Hledáme takové T regulární, aby :

$$C \operatorname{adj}(i\omega E - A) T^{-1} = C \operatorname{adj}(-A) T^{-1},$$

$$C \operatorname{adj}(i\omega E - A) = C \operatorname{adj}(-A).$$

Matice $\operatorname{adj}(i\omega E - A)$ je polynomiální čtvercovou maticí. Stupně polynomů na hlavní diagonále této matice jsou rovny právě $(n-1)$, polynomy mimo tuto diagonálu jsou však stupňů $(n-2)$ nebo nižších. Matice na levé straně výše uvedené rovnosti je proto řádkovou maticí, jejíž prvky jsou polynomy stupně $(n-1)$. Na pravé straně je však řádková matice, jejíž prvky jsou konstanty. Dospěli jsme tak pro $n > 1$ ke sporu a tvrzení je tím dokázáno.

□ KONEC DŮKAZU VĚTY V2.1

Věta V2.2

Formulace věty V2.2 je obdobná jako věty V2.1 s tím, že stavový popis systému uvažujeme ve tvaru

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= T A T^{-1} x(t) + T B u(t) + T A T^{-1} v(t) \\ y(t) &= C T^{-1} x(t) + C T^{-1} v(t) + D u(t) \end{aligned} \quad (A2.9)$$

místo (A2.1) ve V2.1 a třída možných polynomů $\mathcal{B}(s)$ modelu je dána vztahem

$$\mathcal{B}(i\omega) \mathcal{B}(-i\omega) = C [\text{adj} (i\omega E - A) A + \det (i\omega E - A) E] T^{-1} T^{-T} \cdot [\text{adj} (-i\omega E - A) A + \det (-i\omega E - A) E]^T C^T \quad (A2.10)$$

místo (A2.6) ve větě V2.1.

Důkaz :

Uvažujme stavový popis dynamického systému podle (A2.9)

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \tilde{A} x(t) + \tilde{B} u(t) + \tilde{A} v(t) \\ y(t) &= \tilde{C} x(t) + \tilde{C} v(t) + D u(t) \\ \tilde{A} &= T A T^{-1}, \quad \tilde{B} = T B, \quad \tilde{C} = C T^{-1}. \end{aligned}$$

Předpokládáme-li $u(t) = 0$ a zleva nulové počáteční podmínky, potom

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}(s) &= \tilde{C} [(sE - \tilde{A})^{-1} \tilde{A} + E] v(s) = \mathcal{F}(s) v(s) \\ \mathcal{F}(s) &= \tilde{C} [(sE - \tilde{A})^{-1} \tilde{A} + E] = \tilde{C} \frac{\text{adj} (sE - \tilde{A}) \cdot \tilde{A} + E^T \det (sE - \tilde{A})}{\det (sE - \tilde{A})} \\ S_{yy}(\omega) &= \mathcal{F}(i\omega) \mathcal{S}(\omega) \mathcal{F}^T(-i\omega) \end{aligned}$$

Uvažujeme-li i v tomto případě jednotlivé složky šumového vektoru $v(t)$ vzájemně statisticky nezávislé, potom $\mathcal{S}(\omega) = E$ a lze pak vyjádřit výkonovou spektrální hustotu

$$\begin{aligned}
 S_{yy}(\omega) &= P(i\omega) E P^T(-i\omega) = \\
 &= \frac{1}{\Delta^2} \tilde{C} [\text{adj}(i\omega E - \tilde{A}) \tilde{A} \tilde{A}^T \text{adj}(-i\omega E - \tilde{A}^T) + \\
 &+ \det(i\omega E - \tilde{A}) \tilde{A}^T \text{adj}(-i\omega E - \tilde{A}^T) + \det(-i\omega E - \tilde{A}) \text{adj}(i\omega E - \tilde{A}) \tilde{A} + \\
 &+ E \Delta^2 I] \tilde{C}^T, \quad \Delta^2 = \det(i\omega E - \tilde{A}) \det(-i\omega E - \tilde{A}) .
 \end{aligned}$$

Pomocí lemma 1, vztahy (A2.8), lze dále upravit

$$\begin{aligned}
 S_{yy}(\omega) &= \frac{1}{\Delta^2} C [\text{adj}(i\omega E - A) A + \det(i\omega E - A) E] T^{-1} T^{-T} \\
 &\quad \cdot [\text{adj}(-i\omega E - A) A + \det(-i\omega E - A) E] T^T C^T = \\
 &= f_{yd}(i\omega) f_{yd}(-i\omega) = \frac{\mathcal{B}(i\omega)}{\mathcal{A}(i\omega)} \frac{\mathcal{B}(-i\omega)}{\mathcal{A}(-i\omega)} .
 \end{aligned}$$

Odtud již plyne tvrzení (A2.10). Důkaz tvrzení 1,2,3 vyplývá ze vztahu (A2.10) a je zcela identický jako v důkazu věty A2.1.

Tvrzení 4 lze dokázat opět sporem obdobně jako v případě věty V2.1. Předpokládáme $\mathcal{B}(s) = 1$, potom musí existovat takové T , aby hodnota (A2.10) byla rovna jedné. Pro uvažovanou minimální realizaci systému je stupeň charakteristického polynomu

$$\partial [\det(i\omega E - A)] = n$$

a proto

$$\begin{aligned}
 C [\text{adj}(i\omega E - A) A + \det(i\omega E - A) E] T^{-1} &= \\
 &= [\mathcal{R}_1(i\omega), \mathcal{R}_2(i\omega), \dots, \mathcal{R}_n(i\omega)] ,
 \end{aligned}$$

stupně polynomů $\mathcal{R}_j(i\omega)$, $j = 1, 2, \dots, n$ jsou, na rozdíl od důkazu věty V2.1, obecně rovny n .

$$\begin{aligned}
 \partial [r_j(i\omega)] &= n, \quad j = 1, 2, \dots, n, \\
 \mathcal{R}_j(i\omega) &= r_{jn}(i\omega)^n + \dots + r_{j1}(i\omega) + r_{j0} .
 \end{aligned}$$

Ze stejných důvodů jako v důkazu věty V2.1 pak, má-li platit

$$E(i\omega) E(-i\omega) = 1 \Rightarrow$$

$$r_{jk} = 0 \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, n \quad ; \quad k = 1, 2, \dots, n \quad , \quad \sum_{j=1}^n r_{j0}^2 = 1 \quad ,$$

Potom také

$$\begin{aligned} C [\text{adj}(i\omega E - A) A + \det(i\omega E - A) E] T^{-1} &= \\ &= C [\text{adj}(-A) A + \det(-A) E] T^{-1} \quad , \end{aligned}$$

což je spor vzhledem k tomu, že matice na levé straně výše uvedeného vztahu je nutně řádkovou polynomiální maticí (stupně polynomů tvořících matici $\text{adj}(i\omega E - A)$ jsou obecně rovny $n-1$ a stupeň polynomu $\det(i\omega E - A)$ je roven n a matice na pravé straně vztahu je maticí konstant.

Tím je tvrzení dokázáno. K tomuto sporu dochází na rozdíl od V2.1 i pro případ $n=1$.

□ KONEC DŮKAZU VĚTY V2.2

A3

APPENDIX 3

Uvažujme soustavu m lineárních rovnic pro n neznámých

$x_1, x_2, \dots, x_n$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned} \quad (A3.1)$$

Soustavu (A3.1) lze vyjádřit v uzavřeném maticovém tvaru

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \rightarrow \underline{\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}}, \quad (\text{A3.2})$$

$$\underset{(m,n)}{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \underset{(m,1)}{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad \underset{(n,1)}{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Obecně mohou nastat tři různé případy :

1. $m = n$ stejný počet rovnic jako neznámých ,
2. $m > n$ větší - " - než - " - ,
3. $m < n$ menší - " - než - " -

Ad 1. Stejný počet rovnic jako neznámých, $m = n$,

A ... čtvercová ,

a) Nehomogenní soustava $b \neq 0$, (A3.3)

$\alpha)$ $\det A \neq 0 \Rightarrow$ existuje jediné řešení $x = A^{-1}b$,

$\beta)$ $\det A = 0 \Rightarrow$ buď neexistuje žádné nebo ∞ mnoho ,

b) Homogenní soustava $b=0$,

$\alpha)$ $\det A \neq 0 \Rightarrow$ existuje pouze triviální řešení $x = 0$,

$\beta)$ $\det A = 0 \Rightarrow$ existuje ∞ mnoho řešení .

Příklad A3.1 Řešme soustavu rovnic

$$\left. \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = 2 \end{array} \right\} A x = b , \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} , \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} ,$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = A^{-1}b = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} ,$$

$$x_1 = 1 , \quad x_2 = -1 .$$

KONEC PŘÍKLADU

Ad 2. Větší počet rovnic než neznámých, $m > n$,

A ... obdélníková
svislá .

V tomto případě nelze splnit všechny rovnice současně. Řešení neexistuje, lze však nalézt takový vektor x , aby chyba ε byla minimální.

$$Ax - b = \varepsilon, \quad (A3.4)$$

$$J = \varepsilon^T \varepsilon = (x^T A^T - b^T)(Ax - b) = x^T A^T Ax - b^T Ax - x^T A^T b + b^T b \rightarrow \min.$$

$$\frac{dJ}{dx} = 2 A^T Ax - 2 A^T b = 2 A^T (Ax - b) \stackrel{!}{=} 0, \quad (A3.5)$$

$$A^T Ax = A^T b$$

$$x = (A^T A)^{-1} A^T b = A_L^* b, \quad (A3.6)$$

$$\underbrace{A_L^*}_{(n,m)} = \underbrace{(A^T A)^{-1} A^T}_{(n,m)} \underbrace{A}_{(m,n)} = \underbrace{E}_{(n,n)}. \quad (A3.7)$$

Matici A^* označujeme jako levou pseudoinverzi matice A .

Příklad A3.2

Řešme soustavu rovnic tak, aby $\varepsilon \rightarrow \min$.

$$\left. \begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 &= 0 \\ x_1 - x_2 &= 2 \end{aligned} \right\} \quad A x = b, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad (A^T A)^{-1} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix},$$

$$A_L^* = (A^T A)^{-1} A^T = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 8 & -2 & -4 \end{bmatrix},$$

$$x = A_L^* b = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 8 & -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} x_1 &= 0,5 \\ x_2 &= 0 \end{aligned}.$$

□ KONEC PŘÍKLADU

viz str. 62 1)

Ad 3. Větší počet neznámých než rovnic, $m < n$,

A ... obdélníková
vodorovná.

V tomto případě existuje ∞ řešení, hledíme takové, které má minimální normu $\|x\| \rightarrow \min$.

$$\|x\| = x^T x = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \rightarrow \min. \quad (A3.8)$$

Metodou Lagrangeových multiplikátorů hledíme minimum této normy s vazební podmínkou $Ax = b$

$$J = x^T x + \lambda^T (Ax - b) = x^T x + \lambda^T Ax - \lambda^T b, \quad (A3.9)$$

$$\frac{dJ}{dx} = 2x + A^T \lambda = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} A^T \lambda,$$

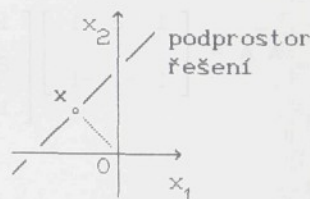
$$b = Ax = -\frac{1}{2} AA^T \lambda \Rightarrow \lambda = -2(AA^T)^{-1} b, \quad (A3.10)$$

$$x = -\frac{1}{2} A^T \lambda = A^T (AA^T)^{-1} b = A_P^* b, \quad A_P^* = A^T (AA^T)^{-1},$$

(n,m)

$$A \underset{(m,n)}{A_P^*} = E, \quad A_P^* A \neq E$$

Geometricky lze interpretovat popsané řešení jako ortogonální projekci počátku do podprostoru řešení.



Příklad A3.3

Nalezneme takové řešení algebraické rovnice, jehož norma $\|x\| = x^T x \rightarrow \min$.

$$5x_1 + 3x_2 = 1, \quad Ax = b, \quad A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix},$$

$$A_P^* = A^T (AA^T)^{-1} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \frac{1}{34} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix},$$

$$x = A_P^* b = \frac{1}{34} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, \quad x_1 = 5/34, \quad x_2 = 3/34.$$

$\square$ KONEC PŘÍKLADU

L

LITERATURA

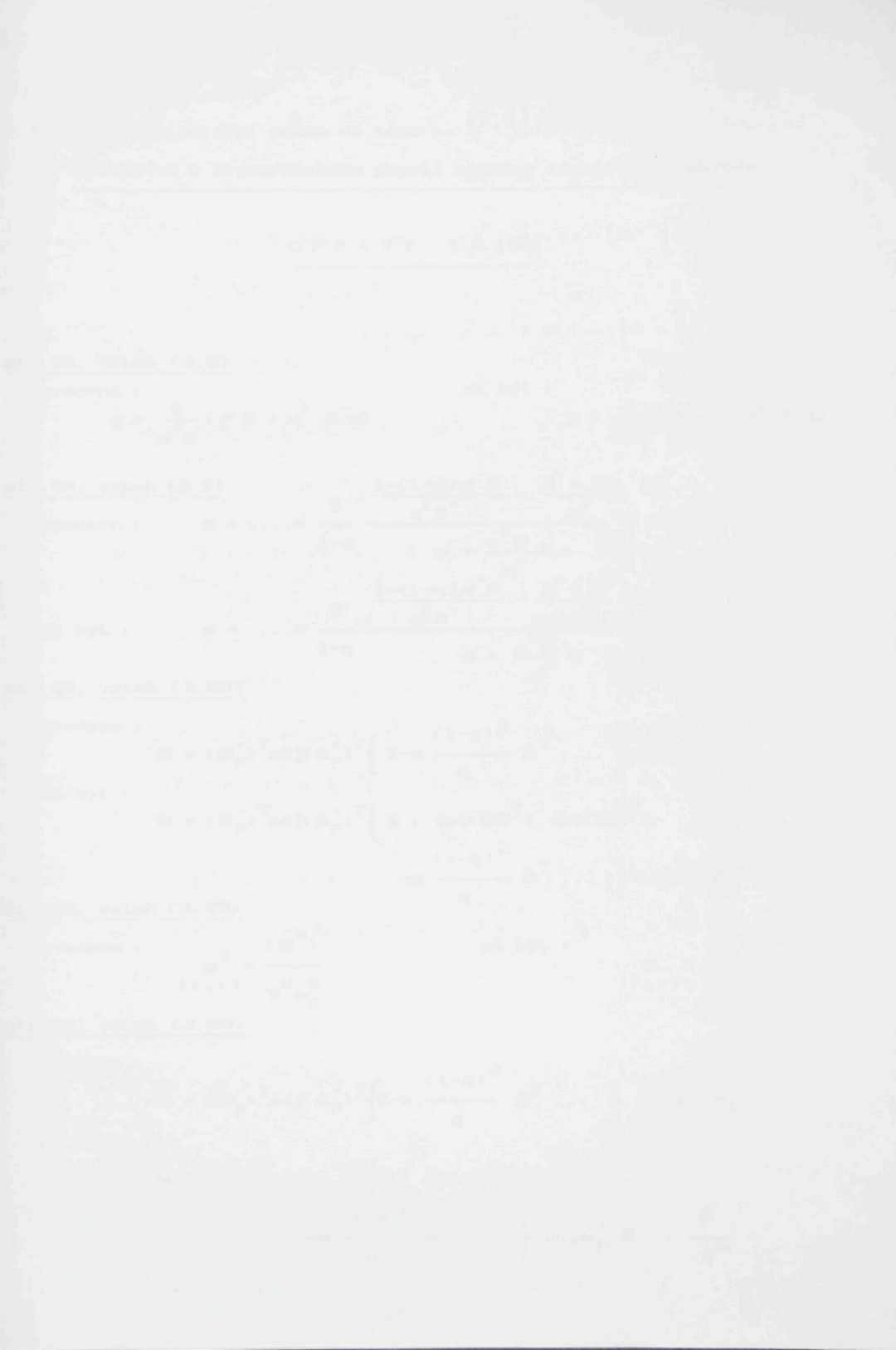
L I T E R A T U R A

- [11] PÍRKO, Z. - VEIT, J.: Laplaceova transformace. Praha / Bratislava, SNTL/ALFA 1972.
- [12] VÍCH, R.: Transformace Z a některá její použití. Praha, SNTL 1979.
- [13] STREJC, V. - KOL.: Syntéza regulačních obvodů s číslicovým počítačem. Praha, NČSAV 1965.
- [14] ISERMANN, R.: Digital control systems. Berlin, Heidelberg, New York, Springer Verlag 1981.
- [15] ŠVEC, J. - KOTEK, Z.: Teorie automatického řízení. Praha, SNTL 1969.
- [16] ARAMANOVIČ, I. G. - LUNC, G. L. - ELSGOLC, L. E.: Funkcie komplexnej premennej, operátorový počet, teória stability. Bratislava/ Praha, ALFA/SNTL 1973.
- [17] SVESHNIKOV, A. - TIKHONOV, A.: The Theory of Functions of a Complex Variable. Moskva, MIR 1971.
- [18] GELFAND, I. M.: Lineární algebra. Praha, NČSAV 1953.
- [19] BORŮVKA, O.: Základy teorie matic. Praha, Academia 1971.
- [10] GANTMACHER, F. R.: Teoria matic. Moskva, Nauka 1966.
- [11] FADDEJEV, D. K. - FADDEJEVA, V. N.: Vyčíslitelnyje metody linejnoj algebry. Moskva, Fizmatgiz 1960.
- [12] HOUSEHOLDER, A. S.: The theory of matrices in numerical analysis. N.Y., Blaisdell Publ.Comp. 1964.
- [13] STREJC, V.: Stavová teorie lineárního diskrétního řízení. Praha, Academia 1978.
- [14] KOLMOGOROV, A. N. - FOMIN, S. V.: Elementy teorii funkcij i funkcionalnovo analiza. Moskva 1972.

- [15] KUČERA, V.: Algebraická teorie diskrétního lineárního řízení. Praha, Academia 1978.
- [16] MICHLIN, S.G.: Problemna minimum kvadratičnovo funkcionala. Moskva 1952.
- [17] HANUŠ, B.: Řídicí algoritmy pro číslicový počítač.
/ Doktorská disertační práce /. Liberec, VŠST 1979.
- [18] PROUZA, L.: Úvod do teorie a aplikací lineárních impulsních soustav. Praha, Academia 1967.
- [19] KRACÍK, V.: Algebraická syntéza řízení diskrétního systému.
/ Výzkumná zpráva KTK-0113 /. Liberec VŠST 1983.
- [20] KRACÍK, V.-TŮMA, L.: Doplnky a příklady k metodě algebraické syntézy regulátoru. / Výzkumná zpráva KTK-0129 /.
Liberec, VŠST 1984.
- [21] KRACÍK, V.: Algebraická syntéza řízení v mnohorozměrném ARMAX modelu. / Výzkumná zpráva KTK-0166 /. Liberec, VŠST 1987.
- [22] JANEČEK, J.: Model dynamického systému zatíženého obecným šumem. / Výzkumná zpráva KTK-0156 /. Liberec, VŠST 1987.
- [23] JANEČEK, J.: Transformace ARMAX modelu dynamického systému na model s násobným krokem.
/ Výzkumná zpráva KTK-0163 /. Liberec, VŠST 1987.
- [24] JANEČEK, J.: Analýza a syntéza regulačního obvodu vybraného tepelně technologického procesu s adaptivními prvky. / Kandidátská disertační práce /. Liberec, VŠST 1987.
- [25] MODRLÁK, O.: Teorie automatického řízení II. / Skriptum /. Liberec, VŠST 1992.
- [26] CYPKIN, Ja.Z.: Teoria impulsnyh sistem. Fizmatgiz, Moskva 1958.

- [27] CYPKIN, Ja. Z.: Teoria linejnych impulsnyh sistem. Fizmatgiz, Moskva 1963.
- [28] RAGAZZINI, J. R. - ZADEH, L. A.: The analysis of sampled - data systems. AIEE Trans. Applications and Industry 7/1952, 225-234.
- [29] JANEČEK, J.: Syntéza spojitých a impulzních regulačních obvodů pomocí číslicového počítače. / Diplomová práce /. Praha, ČVUT 1971.
- [30] CHANG, S. S. L.: Synthesis of Optimal Control Systems. McGraw-Hill, N. Y. 1961.
- [31] JURY, E. J.: Sampled-data Control Systems. Wiley, N. Y. 1958.
- [32] RAGAZZINI, J. R. - FRANKLIN, G. T.: Sampled-data Control Systems. McGraw-Hill, N. Y. 1958.
- [33] TOU, J. T.: Optimum Design of Digital Control Systems. Academic Press, N. Y. 1963.
- [34] BELLMAN, R.: Dynamic Programming. Princeton University Press. Princeton, N. Y. 1957.
- [35] BROCKETT, R. W.: Finite Dimensional Linear Systems. Wiley, N. Y. 70.
- [36] KALMAN, R. E. - BERTRAM, J. E.: A unified approach to the theory of sampling systems. Franklin Inst. J267/1959, 405-436.
- [37] KALMAN, R. E.: Mathematical description of linear dynamical systems. SIAM J. Control, 2/1963, 152-192.
- [38] TOU, J. T.: Modern Control Theory. McGraw-Hill, N. Y. 1964.
- [39] ZADEH, L. A. - DESOER, C. A.: Linear System Theory - The State Space Approach. McGraw-Hill, N. Y. 1963.
- [40] KWAKERNAAK, H. - SIVAN, R.: Linear Optimal Control Systems. J. Wiley & sons, N. Y., London, Sydney, Toronto 1972.
- [41] ŠTECHA, J.: Obecná teorie systémů. /Skriptum/. ČVUT, Pha 79.

- [42] ÅSTRÖM, K. J.: Introduction to Stochastic Control Theory. Academic Press, N.Y. 1970.
- [43] KUČERA, V.: State space approach to discrete linear control. Kybernetika 8/1972, 3, 233-251.
- [44] VOLGIN, L. N.: Elementy teorii upravljajuščich mašin. Sovetskoe radio, Moskva 1962.
- [45] PETERKA, V.: On Steady State Minimum Variance Control Strategy. Kybernetika 8/1972, 3, 219-232.
- [46] KUBÍK, S. -KOTEK, Z. -ŠALAMON, M.: Teorie regulace II - Nelineární regulace. SNTL, Praha 1969.
- [47] KUBÍK, S. -KOTEK, Z. -HRUŠÁK, J. -WACHTL, J. -CHALUPA, V.: Optimální systémy automatického řízení. SNTL, Praha 1972.
- [48] KOŘÍNEK, V.: Základy algebry. NČSAV, Praha 1952.
- [49] KUROŠ, A. G.: Kapitoly z obecné algebry. Academia, Praha 1968.
- [50] LANG, S.: Algebra. Addison-Wesley, Reading, Mass. 1965.
- [51] SCHMIDTMAYER, J.: Maticový počet a jeho použití v technice. SNTL, Praha 1967.
- [52] ZARISKI, O. -SAMUEL, P.: Commutative Algebra. Van Nostrand, Princeton, New York 1958.
- [53] REKTORIS, K. -KOL.: Přehled užité matematiky. SNTL, Praha 68.
- [54] NEČAS, J. -KOL.: Aplikovaná matematika. SNTL, Praha 1977.
- [55] MALCEV, A. I.: Osnovy lin. algebry. Gostechizdat, Moskva 56.
- [56] BARNETT, S.: Matrices, polynomials and linear time-invariant systems. IEEE Trans. Aut. Control AC-18(1973), 1, 1-10.



O P R A V Y 1.2.1994

str.38, vztah (3.6)

uvedeno :

$$y = \frac{e}{A^+ D} (F e + q^k B^- x)$$

má být :

$$y = \frac{1}{A^+ D} (F e + q^k B^- x)$$

str.38, vztah (3.7)

uvedeno :

$$x = \dots = \frac{e}{1-q} \frac{\frac{1-(1-q)A^- F}{q^k B^-} - \frac{B^+ n F}{A^+}}{A^- + \frac{q^k B}{A^+} n}$$

má být :

$$x = \dots = \frac{e}{1-q} \frac{\frac{1-(1-q)A^- F}{q^k B^-} - \frac{B^+ n F}{A^+} (1-q)}{A^- + \frac{q^k B}{A^+} n}$$

str.65, vztah (3.60)

uvedeno :

$$W = (B_P^-)^T \text{adj}(A_P^+)^T \left\{ E - \pi \frac{(1-q)^2}{q} A^T \dots \right\} \text{adj} A_P^+ B_P^- = \dots$$

má být :

$$W = (B_P^-)^T \text{adj}(A_P^+)^T \left\{ E \cdot \det(B B^T) \det(\bar{B} \bar{B}^T) - \pi \frac{(1-q)^2}{q} A^T \dots \right\} \text{adj} A_P^+ B_P^- = \dots$$

str.66, vztah (3.65)

uvedeno :

$$g^T = \frac{(W^*)^T}{D^* w_0^*}$$

má být :

$$g = \frac{(W^*)^T}{D^* w_0^*}$$

str.66, vztah (3.66)

uvedeno :

$$W = (B_P^-)^T \text{adj}(A_P^+)^T \left\{ E - \pi \frac{(1-q)^2}{q} A^T \dots \right\} \text{adj} A_P^+ B_P^-$$

má být :

$$W = (B_P^-)^T \text{adj}(A_P^+)^T \left\{ E \cdot \det(B^T B) \det(\bar{B}^T \bar{B}) - \pi \frac{(1-q)^2}{q} A^T \dots \right\} \text{adj} A_P^+ B_P^- = \frac{\tilde{W}}{q^\alpha}$$

str.67, vztah (3.68)

$$\text{uvedeno : } \mathbb{W} = (\mathbb{B}_P^-)^T \text{adj}(\mathbb{A}_P^+)^T \left\{ E - \alpha \frac{(1-q)^2}{q} \mathbb{A}^T \dots \right\} \text{adj} \bar{\mathbb{A}}_P^+ \bar{\mathbb{B}}_P^-$$

$$\alpha = \partial \left\{ \text{adj } \mathbb{B} \mathbb{A} \text{adj} \bar{\mathbb{A}}_P^+ \bar{\mathbb{B}}_P^- \right\} + 1$$

$$\text{má být : } \mathbb{W} = (\mathbb{B}_P^-)^T \text{adj}(\mathbb{A}_P^+)^T \left\{ E \cdot \det \mathbb{B} \det \bar{\mathbb{B}} - \alpha \frac{(1-q)^2}{q} \mathbb{A}^T \dots \right\} \text{adj} \bar{\mathbb{A}}_P^+ \bar{\mathbb{B}}_P^- = \frac{\tilde{\mathbb{W}}}{q^\alpha}$$

$$\alpha = \partial \left\{ \text{adj } \mathbb{B} \mathbb{A} \text{adj} \bar{\mathbb{A}}_P^+ \bar{\mathbb{B}}_P^- \right\} + 1$$

str.68, vztah (3.70)

$$\text{uvedeno : } = \langle \mathbb{x}, \bar{\mathbb{a}}^T \mathbb{b} + \alpha \bar{\mathbb{c}}^T \mathbb{d} \rangle = \left[\langle \mathbb{a}, \mathbb{b} \rangle = \langle \mathbb{a} \mathbb{c}, \mathbb{b} (\bar{\mathbb{c}}^{-1})^T \rangle \right] =$$

viz (A1.57/7)

$$= \langle \mathbb{g} \mathbb{x}, (\bar{\mathbb{a}}^T \mathbb{b} + \alpha \bar{\mathbb{c}}^T \mathbb{d}) (\bar{\mathbb{g}}^T)^{-1} \rangle$$

$$\text{má být : } = \langle \mathbb{x}, \bar{\mathbb{a}}^T \mathbb{b} + \alpha \bar{\mathbb{c}}^T \mathbb{d} \rangle = \left[\langle \mathbb{a}, \mathbb{b} \rangle = \langle \mathbb{d} \mathbb{a}, (\bar{\mathbb{d}}^T)^{-1} \mathbb{b} \rangle \right]$$

viz (A1.57/10)

$$= \langle \mathbb{g} \mathbb{x}, (\bar{\mathbb{g}}^T)^{-1} (\bar{\mathbb{a}}^T \mathbb{b} + \alpha \bar{\mathbb{c}}^T \mathbb{d}) \rangle$$

str.68, vztah (3.71)

$$\text{uvedeno : } J = \|\mathbb{g} \mathbb{x}\|^2 + 2 \langle \mathbb{g} \mathbb{x}, (\bar{\mathbb{a}}^T \mathbb{b} + \alpha \bar{\mathbb{c}}^T \mathbb{d}) (\bar{\mathbb{g}}^T)^{-1} \rangle + \dots =$$

$$= \underbrace{\|\mathbb{g} \mathbb{x} + (\bar{\mathbb{a}}^T \mathbb{b} + \alpha \bar{\mathbb{c}}^T \mathbb{d}) (\bar{\mathbb{g}}^T)^{-1}\|^2}_{\mathbb{m}} - \|(\bar{\mathbb{a}}^T \mathbb{b} + \alpha \bar{\mathbb{c}}^T \mathbb{d}) (\bar{\mathbb{g}}^T)^{-1}\|^2 + \dots$$

$$\text{má být : } J = \|\mathbb{g} \mathbb{x}\|^2 + 2 \langle \mathbb{g} \mathbb{x}, (\bar{\mathbb{g}}^T)^{-1} (\bar{\mathbb{a}}^T \mathbb{b} + \alpha \bar{\mathbb{c}}^T \mathbb{d}) \rangle + \dots =$$

$$= \underbrace{\|\mathbb{g} \mathbb{x} + (\bar{\mathbb{g}}^T)^{-1} (\bar{\mathbb{a}}^T \mathbb{b} + \alpha \bar{\mathbb{c}}^T \mathbb{d})\|^2}_{\mathbb{m}} - \|(\bar{\mathbb{g}}^T)^{-1} (\bar{\mathbb{a}}^T \mathbb{b} + \alpha \bar{\mathbb{c}}^T \mathbb{d})\|^2 + \dots$$

str.68, vztah (3.72)

$$\text{uvedeno : } \mathbb{m} = (\bar{\mathbb{a}}^T \mathbb{b} + \alpha \bar{\mathbb{c}}^T \mathbb{d}) (\bar{\mathbb{g}}^T)^{-1} = \dots \quad \text{má být : } \mathbb{m} = (\bar{\mathbb{g}}^T)^{-1} (\bar{\mathbb{a}}^T \mathbb{b} + \alpha \bar{\mathbb{c}}^T \mathbb{d}) = \dots$$

str.68, vztah (3.73)

$$\text{uvedeno : } \mathbb{m} = (\bar{\mathbb{a}}^T \mathbb{b} + \alpha \bar{\mathbb{c}}^T \mathbb{d}) (\bar{\mathbb{g}}^T)^{-1} = \dots = \frac{\bar{w}_0}{q^k \mathcal{D}^*} (\bar{\mathbb{B}}_P^-)^T \left\{ \dots \right\} \mathbb{C} (\bar{\mathbb{W}}^*)^{-1} = \dots$$

$$\text{má být : } \mathbb{m} = (\bar{\mathbb{g}}^T)^{-1} (\bar{\mathbb{a}}^T \mathbb{b} + \alpha \bar{\mathbb{c}}^T \mathbb{d}) = \dots = \frac{\bar{w}_0}{q^k \mathcal{D}^*} (\bar{\mathbb{W}}^*)^{-1} (\bar{\mathbb{B}}_P^-)^T \left\{ \dots \right\} \mathbb{C} = \dots$$

str.69, vztah (3.74)

uvedeno :

$$m = (a^T b + x c^T d) (g^T)^{-1} = \dots = \frac{\omega_0^*}{q^k D^*} (\bar{B}_P^-)^T \left\{ \dots \right\} C (\bar{W}^*)^{-1} = \dots$$

má být :

$$m = (g^T)^{-1} (a^T b + x c^T d) = \dots = \frac{\omega_0^*}{q^k D^*} (\bar{W}^*)^{-1} (\bar{B}_P^-)^T \left\{ \dots \right\} C = \dots$$

str.69, vztah (3.75)

uvedeno :

$$m = (a^T b + x c^T d) (g^T)^{-1} = \dots = \frac{\omega_0^*}{q^k D^*} (\bar{B}_P^-)^T \left\{ \dots \right\} C (\bar{W}^*)^{-1} = \dots$$

má být :

$$m = (g^T)^{-1} (a^T b + x c^T d) = \dots = \frac{\omega_0^*}{q^k D^*} (\bar{W}^*)^{-1} (\bar{B}_P^-)^T \left\{ \dots \right\} C = \dots$$

str.70, vztah (3.80)

$$\text{uvedeno : } J = \| g x + m_+ + m_- \|^2 - \| (a^T b + x c^T d) (g^T)^{-1} \|^2 + \dots$$

$$\min_{x \in X} J(x) = \| m_- \|^2 - \| (a^T b + x c^T d) (g^T)^{-1} \|^2 + \dots$$

$$\text{má být : } J = \| g x + m_+ + m_- \|^2 - \| (g^T)^{-1} (a^T b + x c^T d) \|^2 + \dots$$

$$\min_{x \in X} J(x) = \| m_- \|^2 - \| (g^T)^{-1} (a^T b + x c^T d) \|^2 + \dots$$

str.84, vztah (A1.30)

uvedeno :

$$x(q) = x_{opt.}(q) = - \frac{1}{g(q)} m_+(q)$$

má být :

$$x(q) = x_{opt.}(q) = - \frac{1}{g(q)} m_+(q)$$

str.85, označení vztahů

uvedeno : (A1.30)
(A1.31)

má být : (A1.31)
(A1.31a)

$$\text{str.112, vztah (A1.57/10) } \quad \text{chybí : } \langle d^T a, (d^T)^{-1} b \rangle = \langle a, b \rangle$$

str.112, vztah (A1.59)

uvedeno :

$$J_2(x) = \dots = \frac{1}{2\pi i} \int \text{tr} \left[x^T (a^T a + x c^T c) x \right] \frac{dq}{q}$$

$$g^T g = a^T a + x c^T c$$

má být :

$$J_2(x) = \dots = \frac{1}{2\pi i} \int \text{tr} \left[x^T (a^T a + x c^T c) x \right] \frac{dq}{q}$$

$$g^T g = a^T a + x c^T c$$