Technická univerzita v Liberci
FAKULTA PŘÍRODOVĚDNĚ-HUMANITNÍ A PEDAGOGICKÁ

Katedra: Matematiky a didaktiky matematiky

Studijní program: Fyzika

Studijní obor (kombinace): Fyzika se zaměřením na vzdělávání, Matematika se zaměřením na vzdělávání

Kvadratická funkce, kvadratická rovnice a nerovnice

QUADRATIC FUNCTION, QUADRATIC EQUATION AND INEQUALITY

Fonction quadratique, équation du second degré et inégalité

Bakalářská práce: 12–FP–KMD–007

Autor:

Markéta Nováková

Adresa:

Krásnolipská 275/9

408 01, Rumburk

Podpis:

Vedoucí práce: RNDr. Alena Kopáčková, Ph.D.

Konzultant:

Počet

stran	grafů	obrázků	tabulek	pramenů	Příloh
49	0	32	2	19	1

V Liberci dne: 25.4.2012

TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI
Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická
Akademický rok: **2011/2012**

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení:	**Markéta Nováková**
Osobní číslo:	**P09001145**
Studijní program:	**B1701 Fyzika**
Studijní obory:	**Fyzika se zaměřením na vzdělávání**
	Matematika se zaměřením na vzdělávání
Název tématu:	**Kvadratická funkce, kvadratická rovnice a nerovnice**
Zadávající katedra:	**Katedra matematiky a didaktiky matematiky**

Zásady pro vypracování:

Úkolem posluchače je shrnout téma týkající se kvadratické závislosti a problémů s tím souvisejících. Uveden bude přehled základní teorie zahrnující i stručné historické poznámky. Pozornost bude věnována jednak samotné kvadratické funkci a jejímu výskytu v reálných situacích, ale i souvisejícím problémům, jimiž jsou kvadratické rovnice a nerovnice. Důraz bude kladen i na grafické řešení problémů. Dobrá orientace v matematické analýze v rozsahu úvodního kurzu na FP (reálná funkce jedné reálné proměnné). Schopnost tvůrčí práce.

Rozsah grafických prací:

Rozsah pracovní zprávy:

Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná**

Seznam odborné literatury:

Učební texty k úvodnímu kurzu matematické analýzy na VŠ. Hejný, M. a kol.: Teória vyučovania matematiky 2. SPN, Bratislava 1990. Učebnice matematiky pro gymnázia.

Vedoucí bakalářské práce: **RNDr. Alena Kopáčková, Ph.D.**
Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Datum zadání bakalářské práce: **9. listopadu 2011**
Termín odevzdání bakalářské práce: **27. dubna 2012**

L.S.

doc. RNDr. Miroslav Brzezina, CSc.
děkan

doc. RNDr. Jaroslav Mlýnek, CSc.
vedoucí katedry

V Liberci dne 9. listopadu 2011

Anotace

Předmětem bakalářské práce *„Kvadratická funkce, kvadratická rovnice a nerovnice“* je shrnout poznatky o uvedeném tématu. Závěrečná práce obsahuje teoretickou část, jejíž součástí je i historický přehled. Zaobírá se problémy, které se týkají řešení kvadratických rovnic, nerovnic a kvadratických funkcí. K řešení zadaných problémů potřebujeme rozebrat graf kvadratické funkce. Část práce se zaobírá reálným využitím kvadratických rovnic a to s konkrétním zaměřením na fyziku. V závěru bakalářské práce je zmínka o možnostech počítačových appletů a softwarů s touto tématikou.

Annotation

The subject of the thesis "Quadratic Function, Quadratic Equation and Inequalitie" is to summarize the findings about this topic. The final work is include a theoretical part, which is also include a historical overview of the field. The thesis deals with issues related to solving quadratic equation, inequality and quadratic function. For solving problems we need to analyze graphs of quadratic functions. One part of this work focus on using real quadratic equations, with particular emphasis on physics. The concluding part we talk about the possibilities of computer software and applets related to this topic.

Résumé

Le sujet du mémoire „Fonction quadratique, équation du second degré et inégalité“ est de résumer les conclusions sur ce sujet. Le travail final comprendra une partie théorique qui présentera également un aperçu historique. Il traite des questions liées à la résolution des équations du second degré, des inégalités et des fonctions du second degré. Pour résoudre ces problèmes nous aurons besoin d'analyser les graphiques de fonctions du second degré. Une partie du travail abordera le problème des équations réelles du second degré, en mettant un accent particulier sur la physique. La dernière partie parlera des logiciels et des applets disponibles traitant de ce sujet.

Klíčová slova

Kvadratická funkce, kvadratická rovnice, kvadratická nerovnice, graf funkce.

Keywords

Quadratic function, quadratic equations, quadratic inequality, graph of the function.

Mots-clés

Fonction quadratique,équation quadratique , inégalité quadratique, graphique fonction.

Čestné prohlášení

Název práce:	Kvadratická funkce, kvadratická rovnice a nerovnice
Jméno a příjmení autora:	Markéta Nováková
Osobní číslo:	P09001145

Byl/a jsem seznámen/a s tím, že na mou bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. o právu autorském, právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon), ve znění pozdějších předpisů, zejména § 60 – školní dílo.

Prohlašuji, že má bakalářská práce je ve smyslu autorského zákona výhradně mým autorským dílem.

Beru na vědomí, že Technická univerzita v Liberci (TUL) nezasahuje do mých autorských práv užitím mé bakalářské práce pro vnitřní potřebu TUL.

Užiji-li bakalářskou práci nebo poskytnu-li licenci k jejímu využití, jsem si vědom povinnosti informovat o této skutečnosti TUL; v tomto případě má TUL právo ode mne požadovat úhradu nákladů, které vynaložila na vytvoření díla, až do jejich skutečné výše.

Bakalářskou práci jsem vypracoval/a samostatně s použitím uvedené literatury a na základě konzultací s vedoucím bakalářské práce a konzultantem.

Prohlašuji, že jsem do informačního systému STAG vložil/a elektronickou verzi mé bakalářské práce, která je identická s tištěnou verzí předkládanou k obhajobě a uvedl/a jsem všechny systémem požadované informace pravdivě.

V Liberci dne: 25.4.2012

Markéta Nováková

Poděkování

Ráda bych v první řadě poděkovala Technické univerzitě v Liberci, že mi umožnila studovat na Fakultě přírodovědně-humanitní studijní program fyzika (matematika se zaměřením na vzdělávání, fyzika se zaměřením na vzdělávání). Dále děkuji všem učitelům a profesorům, kteří mě doprovázeli mým studiem na této univerzitě. A v neposlední řadě chci vřele poděkovat vedoucí mé závěrečné práce, jmenovitě RNDr. Aleně Kopáčkové Ph.D. a dalším, kteří se podíleli na dokončení mé bakalářské práce.

Obsah

Úvod

Kvadratická funkce, kvadratická rovnice a nerovnice je téma, se kterým se setkáváme na všech stupních škol. Jedná se o druhou nejznámější funkci, hned po lineární funkci. Kvadratická rovnice je jedinou rovnicí, jejíž absolutní hodnota kořenů rovnice může být stejné číslo.

Bakalářská práce má čtyři hlavní části. Začíná historií výskytu druhé mocniny a kvadratické rovnice v různých zemích a v různých dobách. Kladu důraz na kvadratické rovnice, a to zvlášť v Egyptě a v Mezopotámii. Porovnávám zde způsob výpočtu kvadratické rovnice ve druhém století před naším letopočtem a v dnešní době pomocí vzorců. Popisuji vývoj matematiky s ohledem na kvadratické funkce a kvadratické rovnice.

Následuje kapitola, ve které uvádím souhrn všech poznatků známých do dnešní doby o kvadratické funkci, kvadratické rovnici a nerovnici. Zabývám se řešením průběhu kvadratické funkce a sestrojením grafu. Dále jsou zde předvedena řešení kvadratických rovnic a nerovnic různými metodami.

Předposlední kapitola má za úkol ukázat situace, kde se kvadratická závislost vyskytuje při popisu fyzikálních jevů. V kapitole jsou uvedeny příklady z běžného života k jednotlivým fyzikálním vzorcům, které obsahují druhou mocninu proměnné.

Stěžejním tématem práce je propojení matematiky a fyziky přes kvadratickou závislost. Jedná se o shrnutí tématu týkající se kvadratické závislosti. Ukazuji, jak je důležitá znalost kvadratické rovnice ve fyzice. Dokazuji, že kvadratická závislost je velice důležitá při popisu pohybu těles. Ukazuji, že bez znalosti řešení kvadratických rovnic nemůžeme počítat konkrétní příklady ve fyzice.

Ke konci práce je uvedeno několik PC-aplikací, které umějí sestrojit grafy zadaných kvadratických funkcí. Popisuji klady a zápory těchto PC-aplikací. Dále se zabývám výhodami a nevýhodami webových aplikací.

1 Historie kvadratické rovnice

Uveďme si nejprve dvě země, kde matematické myšlení bylo na vysoké úrovni. Jak v Egyptě, tak v Mezopotámii se poprvé setkáváme s kvadratickou rovnicí, která je posána pomocí slov (viz dále). Nikde se s vyjádřením kvadratické rovnice $ax^2+bx+c=0$ nesetkáme. Důvodem je, že základy algebry spadají přibližně k přelomu 15. a 16. století a že v předchozích obdobích nebyly k dispozici potřebné nástroje na vyjádření.

1.1 Egypt

V polovině 19. století byl nalezen v Thébách papyrus, který je znám pod názvem Berlínský papyrus. Pochází z XII. dynastie Střední říše, tzn. 1994 – 1797 př. n. l. Berlínský papyrus (viz obr. 1) byl uložen v Berlínském muzeu pod názvem *papyrus 6619.* Papyrus je popsán oboustranně a skládá se ze dvou větších částí a dalších menších kousků. Domníváme se, že jde o část sbírky příkladů. Text příkladu z Berlínského papyru[1]:

Jiný [výpočet množství.] Řekne-li se ti: [100 je (zadané) množství a ½ ¼ z]
prvního množství je pro druhé. Nuže, udej mi [první a druhé množství.]
Vypočti pravoúhelník z prvního a vypočti ½ ¼ z jedné. [Vypočti]
½ ¼ z prvního množství pro druhé, vyjde ½ ¼. Vypočítej to [pro druhé množství.]
Tedy první množství je 1 a druhé druhé ½ ¼. Přidej celé první ke druhému, sečti je,
vyjde 1 ½ ¼ 1/16[2]*. Vypočti odmocninu z toho, vyjde 1 ¼. Vypočti odmocninu ze 100,*
vyjde [10]. Počítej s 1 ¼, až najdeš 10, vyjde 8-krát. [To je první množství.]
Vypočti ½ ¼ z 8, vyjde [6, to je druhé množství.]

Pozn.: Řádky odpovídají řádkům v papyru. V hranatých závorkách je zapsán text, který není přesný, jedná se o domněnky založené na logických úvahách, z části podpořených zbytky znaků hieroglyfů na papyru.

1 Viz [2], str. 165.

2 Správný výsledek v šestém řádku je 1 ½ 1/16.

V této úloze se setkáváme s jednoduchou kvadratickou rovnicí. Její řešení je naznačeno v knize J. Bečváře[3]:

Slovní zadání se přepíše na soustavu dvou rovnic:

$$x^2+y^2=100, \qquad y=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\cdot x.$$

Egyptští matematici předpokládali, že $x = 1$. Proto mohli počítat:

● levou stranu rovnice $\quad 1^2+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)^2\cdot 1^2=1\frac{1}{2}\frac{1}{16}=\frac{25}{16}, \quad \sqrt{1\frac{1}{2}\frac{1}{16}}=\frac{5}{4},$

● pravou stranu rovnice $\quad \sqrt{100}=10.$

Vrátíme se zpět k zadanému příkladu a vypočteme *x, y*:

$$x=10\cdot\frac{4}{5}=8,\ y=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\cdot 8=6.$$

Výsledky porovnáme s výsledky, kterých bychom dosáhli dnes my:

$$x^2+\frac{9}{16}x^2=100,$$

$$\frac{25}{16}x^2-100=0,$$

$$\left(\frac{5}{4}x+10\right)\left(\frac{5}{4}x-10\right)=0,$$

$$x_1=-10\cdot\frac{4}{5}=-8,\ y_1=-6,$$

$$x_2=10\cdot\frac{4}{5}=8,\ y_2=6.$$

Obrázek 1: Berlínský papyrus, podle J. Bečváře.

Kořen rovnice v Egyptě mohl nabývat jen kladných hodnot, proto Egypťané nedospěli k výsledku x_1, y_1.

3 Viz [2], str. 77.

Dalšími důležitými dokumenty ze starého Egypta jsou Kahúnské papyry. Tyto papyry nalezl roku 1889 W. M. F. Petrie v Káhúnu. Papyry pocházejí z doby XII. dynastie. Dnes je najdeme v Britském muzeu v Londýně. Jedno řešení slovní úlohy vedoucí na kvadratickou rovnici, které najdeme na Kahúnských papyrech, si zde ukážeme[4]:

$$10x\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\cdot x=120.$$

Jako v předchozím příkladě předpokládáme, že $x = 1$:

- pravá strana rovnice $120:10=12,$
- levá strana rovnice $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{4}.$

Obě strany rovnice dáme opět k sobě a dostaneme x:

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\cdot x^2=12,\ \frac{3}{4}\cdot x^2=12,$$

$$x^2=12\cdot\frac{4}{3}=16,\quad x=\sqrt{16}=4.$$

Dnes bychom dostaly $x=\pm4$, ale již bylo řečeno, že egyptští matematici neuvažovali záporný kořen rovnice.

Oba uvedené příklady vedou na kvadratickou rovnici bez lineárního členu. V žádném dochovaném materiálu pocházejícím ze starého Egypta se nedočteme o úplné kvadratické rovnici.

1.2 Mezopotámie

V Mezopotámii se psalo na hliněné tabulky. Tyto tabulky měly velikosti od 2 x 2cm do přibližně 30 x 20 cm. Na větší destičky, o rozměru asi naší A4, se vešlo přepsáním na náš text téměř 830 řádků. Na hliněné destičce s malými rozměry (2,2 x 2,6 cm) najdeme až 30 řádků.[5]

Stejně tak jako u lineárních rovnic i u kvadratických se používá zejména geometrická terminologie. Se známými i neznámými veličinami se zacházelo naprosto stejně, vždy

4 Viz [2], str. 77.

5 Viz [2], str. 189.

matematici počítali pomocí ekvivalentních aritmetických úprav. Za neznámé se považuje délka a šířka a dále jejich součin na plochu a obsah. Vysoká úroveň matematického myšlení v Mezopotámii nezabránila sčítání délek s obsahy. Matematici v Mezopotámii dobře znali symboliku nám známou spíše jako vzorce:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2\mathrm{ab} + b^2, \quad a^2 - b^2 = (a-b) \cdot (a+b).$$

Mezopotámští matematici úlohy převáděli na tzv. *kanonické tvary*, k nimiž dospěli metodami jako jsou substituce a eliminace. K vzorci pro výpočet kvadratických kořenů jak jej známe dnes $\left(x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\mathrm{ac}}}{2\mathrm{a}} \right)$, mezopotámští matematici nikdy nedospěli. Důvodem pro absenci algoritmu je, že kořeny rovnice mohli být pouze kladná čísla. Úlohy ve většině případech obsahují více neznámých, dnes bychom je převedli standardní tvar kvadratické rovnice. V Mezopotámii se úlohy tohoto typu řeší několika způsoby vedoucími na již zmíněné kanonické tvary.

V následujících podkapitolách si uvedeme kvadratické rovnice tříděné podle historických souvislostí (třídění podle J. Bečváře).

1.2.1 Kvadratická rovnice typu $x^2 = q$

V rovnici bylo q dané přirozené číslo, šedesátinný zlomek nebo smíšené číslo. Jednalo se o příklady procvičující Pythagorovu větu a její řešení se poté nacházelo v tabulkách odmocnin a čtverců. Dále se jednalo o formulace: *„Co musíme násobit mezi sebou, aby ... ?, Jaký je kvadratický kořen ...* ?“.[6]

1.2.2 Kvadratická rovnice typu $x^2 + q = px$

Tento typ rovnice lze přepsat jako soustava dvou rovnic o dvou neznámých *x, y*:

$$x + y = p, \quad x \cdot y = q,$$

kde $x > y$ a *p, q* jsou přirozená čísla, šedesátinný zlomek nebo číslo smíšené. Tuto soustavu také můžeme označit jako *první kanonický tvar.* Pokud z druhé rovnice vyjádříme y a dosadíme do první, dostaneme rovnici $x^2 + q = px$. Tabulky, na kterých jsou zachyceny dané typy kvadratických rovnic, jsou z období Seleukovců (3. stol. př. n. l., nalezeny ve Warce) a

6 Viz [2], str. 266.

starobabylonského (tabulka s 15 příklady o obdélnících). Další tabulka ze Senkeru také z doby starobabylonské obsahuje čtyři příklady zaměřující se na počítání délky, šířky a plochy.

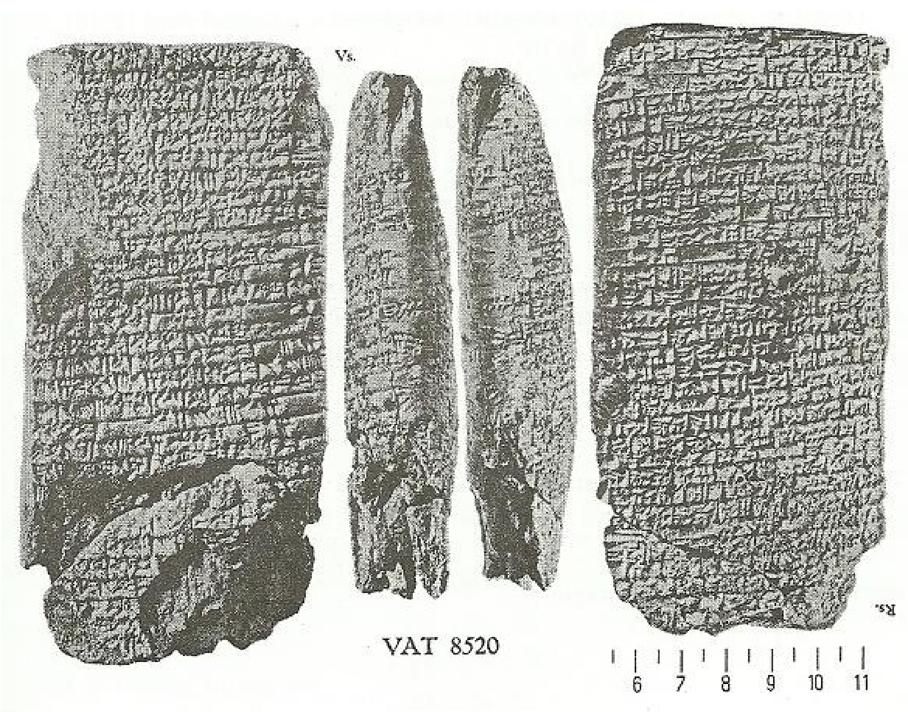
1.2.3 Kvadratická rovnice typu $x^2 = px + q$

I tato rovnice se přepíše do tvaru dvou rovnic o dvou neznámých:

$$x - y = p, \quad x \cdot y = q,$$

kde $x > y$ a p, q jsou přirozená čísla, šedesátinný zlomek nebo číslo smíšené. Tuto soustavu považujeme za *druhý kanonický tvar.* Snadnou úpravou můžeme od těchto rovnic přejít k rovnici kvadratické $x^2 = px + q$ (z druhé rovnice vyjádříme y a dosadíme do první rovnice). Kvadratické rovnice tohoto typu nalezneme na starobabylonské tabulce YBC 6967 (viz obr. 2). Obtížnější příklad je uveden na tabulce VAT 8520 (viz obr. 3).

Obrázek 2: Tabulka YBC 6967, podle J. Bečváře



Obrázek 3: Tabulka VAT 8520, podle J. Bečváře

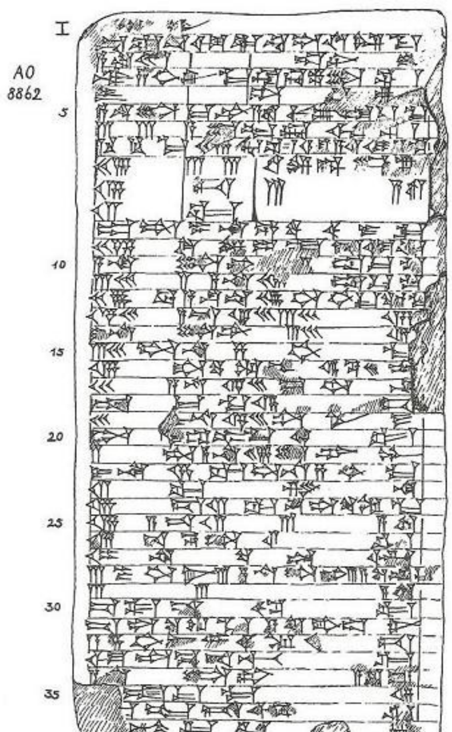
1.2.4 Kvadratická rovnice typu $x^2 + px = q$

Text z tabulky AO 8862 (viz obr. 4) je uveden v knize Matematika ve starověku [5]. Slovní úloha zní takto[7]:

Délka, šířka. Délku a šířku jsem vynásobil a vznikla plocha. Dále to, oč je délka větší než šířka, jsem vynásobil součtem délky a šířky. K tomu přidal jsem plochu. Obdržel jsem (1, 13, 20). Dále jsem sečetl délku a šířku. Dostal jsem (1, 40).

(1, 40)		*(1, 13, 20)*	*součet*
	(1, 0)	*délka*	
(40) šířka		*(40, 0)*	*plocha.*

Ty svým způsobem: (1, 40) , součet délky a šířky, vynásob (1, 40). (2, 46, 40). Od (2, 46, 40) odejmi (1, 13, 20), plocha. Zde jsi určil (1, 33, 20). Polovinu součtu (1, 40) odlom. (50) krát (50) je (41, 40). K (1, 33, 20) přidej. (2, 15, 0) má kořen (1, 30). (1, 40) minus co dá (1, 30)? To je (10). (10) přidej k (50). (1, 0) je délka. (10) odejmi od (50). (40) je šířka …



Obrázek 4: Přepis tabulky AO 8862, podle J. Bečváře

7 Viz [2], str. 277.

Nastává zde otázka, jak převádět starobabylonská čísla do nám známých „arabských číslic“. Uvedu zde dvě čísla, na kterých si ukážeme princip přepisu čísel:

číslo (1, 13, 20) $4400=1\cdot 60^2+13\cdot 60+20$,

číslo (1, 57, 46, 40) $424\,000=1\cdot 60^3+57\cdot 60^2+46\cdot 60+40$.

Teď je nám jasné, že se jedná o šedesátkovou poziční soustavu. Musíme ještě zmínit, že nulu začali používat ve druhém tisíciletí př. n. l. Ale až ve čtvrtém století př. n. l. došlo ke kodifikaci zápisu čísel. Již nenastal problém rozpoznat například číslo (8, 30) od (8, 30, 0) nebo od (8, 0, 30). Před kodifikací (přidání nuly) se číslo přizpůsobilo počítanému příkladu. Číslo (8, 30) se předtím dalo chápat jako:

1. (8, 30) $510=8\cdot 60+30$,
2. (8, 30, 0) $30600=8\cdot 60^2+30\cdot 60$,
3. (8, 0, 30) $28830=8\cdot 60^2+30$ aj.

Náš příklad již máme uveden s nulami, tudíž nenastane problém s převodem do desítkové soustavy a řešíme:

Zapíšeme soustavou rovnic $x\cdot y+(x+y)\cdot(x-y)=4400$, (1)

$x+y=100$. (2)

Vezmeme *b = (1, 13, 20)* a *a = (1, 40)*. Při řešení nejspíše byla provedena substituce a tím byla zavedena nová neznámá *z*: $2z=x-y$. Nyní umocníme rovnice $x+y=a$, $x-y=2z$, které od sebe odečteme a dostaneme: $4xy=a^2-4z^2$, získanou rovnici vydělíme čtyřmi: $xy=\left(\frac{a}{2}\right)^2-z^2$. Po dosazení do rovnice (1) získáme $\left(\frac{a}{2}\right)^2-z^2+2az=b$. Tuto rovnost upravíme pomocí druhé mocniny lineárního dvojčlenu do tvaru $-(z-a)^2+a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2=b$.

Z posledního zápisu vyjádříme $z=a\pm\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}$. Takto by vypadal vzorec dnes, ale v Mezopotámii musíme zavrhnout znaménko +, protože by poté vyšlo záporné *y*. Vrátíme substituci $x=2z+y$, kde $y=a-x$.

$$x_1=\frac{a}{2}+\left[a-\sqrt{\frac{a^2}{2}+a^2-b}\right],\qquad x_2=\frac{a}{2}-\left[a-\sqrt{\frac{a^2}{2}+a^2-b}\right].$$

V Mezopotámii nebylo úlohy, která by uváděla dvě řešení kvadratické rovnice. Nemůžeme ani říci, proč tomu tak bylo. Zároveň nemůžeme vědět, jestli matematici druhé řešení znali a pouze ho nenapsali.

1.2.5 Kvadratická rovnice typu $ax^2 + bx = c$

Tyto rovnice nacházíme na tabulce označované BM 13901. Jedná se o 24 příkladů, ne však všechny se dochovaly. Jen některé z nich vedou na kvadratické rovnice, které se dají rozdělit do tří skupin[8]:

1. Kvadratická rovnice s jednou neznámou

   př.: $x^2-\frac{1}{3}\cdot x^2+\frac{1}{3}\cdot x=\frac{1}{3},\quad 11\mathrm{x}^2+7\cdot x=6\frac{1}{4}.$

2. Soustava dvou rovnic o dvou neznámých

   př.: $x^2+y^2=28\frac{1}{4},\quad x-y=\frac{1}{7}\cdot y.$

3. Soustava tří rovnic o třech neznámých (nebo soustava čtyř rovnic o čtyř neznámých)

   př.: $x^2+y^2+z^2=612\frac{3}{4},\quad y=\frac{1}{7}\cdot x,\quad z=\frac{1}{7}\cdot y.$

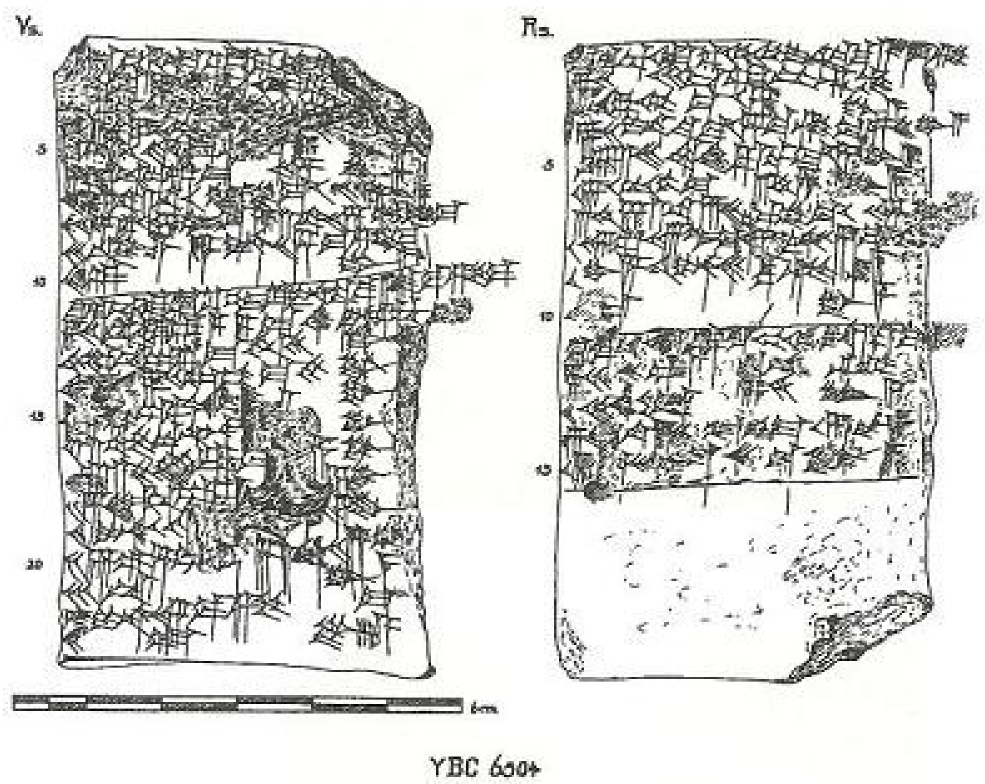
Na starobabylonské tabulce YBC 6504 (viz obr. 5)se dochovaly čtyři příklady[9]:

1. $x\cdot y-(x-y)^2=500,\quad x-y=10.$
2. $x\cdot y-(x-y)^2=500,\quad x+y=50.$
3. $x\cdot y-(x-y)^2=500,\quad x=30.$
4. $x\cdot y-(x-y)^2=500,\quad y=20.$

Všechny uvedené příklady mají stejná řešení ($x = 30$, $y = 20$).

8 Viz [2], str. 281.

9 Viz [2], str. 283 – 284.



Obrázek 5: Přepis tabulky YBC 6504, podle J. Bečváře

Uvedli jsme jen některé typy příkladů a tabulek, na kterých jsou zapsány příklady vedoucí na kvadratické rovnice. Dalšími destičkami jsou například VAT 7528, YBC 4695, YBC 4714 aj.

1.3 Další vývoj matematiky

Jak vypadala matematika asi 2 tisíce let před naším letopočtem v Egyptě a Mezopotámii jsme si popsali v předchozí části. Z uvedených příkladů je jasné, že jak egyptští, tak mezopotámští matematici uměli skvěle počítat a řešit složité slovní úlohy. V Babylonských klínopisech z doby 195 před n. l. již matematici znali algoritmus, který dnes odpovídá vzorci pro kořeny kvadratické rovnice. Šedesátková poziční soustava je vytlačována počátkem 2. tisíciletí desítkovou nepoziční soustavou, současně se zánikem klínového písma.

Čtvrté století před naším letopočtem přináší revoluční změnu matematiky, která se stává vědou. Tento zlom nastal díky Euklidovským základům, jedná se o učebnice matematiky ve 13ti kapitolách. Kolem roku nula se vytváří a zažívají pojmy aritmetika a geometrie jako samostatně rozvíjející se obory. Z těchto dob neexistují záznamy o matematických důkazech.

Chápání *čtverce* (x^2) pouze jako geometrického termínu vedlo v Řecku ke stagnaci až do doby 3. stol. n. l. V této době vzniklo dílo Diofanta z Alexandrie s názvem Aritmetika. Traktát má 13 dílů, ale do dnešní doby se dochovalo pouze šest. V knize je uvedeno na 130 numerických problémů, u většiny z nich se setkáváme s lineární nebo kvadratickou rovnicí. Diofantos byl první, kdo používal algebraické symboly. Například psal v rovnicích speciální znaky pro označení mocniny (dynamis = čtverec). Jako jeden z prvních zavedl proměnou do rovnic a zavedl pro ni značku (arithmos). Ani on si ale neuvědomoval, že kvadratická rovnice může mít dvě řešení, kladná hodnota řešení dávala smysl pro problémy reálného života. Nepočítal ani s nulou. Diofantovo dílo nebylo v Evropě známo do konce 15. století. V tomto století se místo slovního popisu algebraických operací zavádí znaky.

Dne 31. 3. 1596 se narodil René Descartes (zemřel 11. 2. 1650), francouzský filozof a matematik. Descartes se zabýval zejména číselnou prezentací různých geometrických útvarů. Díky těmto zájmům dal vzniknout kartézské soustavě souřadnic (osy soustavy jsou navzájem kolmé a protínají se v jednom bodě: počátku), dodnes nejpoužívanější soustava souřadnic. S Pierrem de Fermatem vynalezli analytickou geometrii (aplikace algebraických metod v geometrii). Koncem 16. století se objevují znaky pro mocniny, odmocniny a závorky. V této době se vznikají symboly pro aritmetické operace a čísla. Stále jsou odmítána záporná čísla a zejména záporné hodnoty kořenů (kvadratických) rovnic. V 16. století je poprvé vyřešena kvadratická rovnice v obecném tvaru, objevuje se vzorec pro výpočet kořenů kvadratické rovnice.

U starořeckých matematiků se setkáváme s myšlenkou závislosti různých veličin. Na přelomu 17. a 18. se matematika vyvíjí dále i do jiných oborů. V 17. století se rychle rozvíjí přírodní vědy, přibývá potřeba nabyté vědomosti matematicky zpracovat, začínají se používat písmena jako označení daných veličin. Při spolupráci G. W. Leibnize a I. Newtona se v jejich práci objevuje poprvé termín funkce. Přesto definice funkce byla sepsána až J. Bernoullim roku 1967. Dlouhé roky byla funkce brána jako pouhý vzorec, až J. Fourier a P. Dirichlet uvedli chápání funkce jako závislost mezi danými veličinami. Dále se v tomto období rozvíjí diferenciální a integrální počet.

V první polovině 19. století se matematika člení na další disciplíny. Matematici se zaměřují na axiomatickou aritmetiku, axiomatickou geometrii a na teorii množin. Na začátku 20. století je algebra na stejné úrovni, jak ji známe dnes.

2 Teoretická část

V této kapitolce se budeme věnovat teorii kvadratické funkce, kvadratické rovnice a nerovnice. Rozebereme jak má správně vypadat kvadratická rovnice, jak můžeme znázornit kvadratickou funkci a také jaké máme metody řešení kvadratických rovnic a nerovnic.

2.1 Kvadratická funkce

Kvadratickou funkcí nazveme každou funkci ve tvaru:

$$f: y = a x^2 + b x + c,\ D(f) = \mathbb{R}\ \text{, kde } a, b, c \in \mathbb{R};\ a \neq 0.$$

V každé funkci je *y* závislá proměnná a *x* nezávislá proměnná. Definičním oborem jsou reálná čísla – pokud však není uvedeno jinak. Obor hodnot *H(f)* se odvíjí od koeficientů *a, b* a *c*. Grafem funkce je parabola. Osa paraboly je vždy rovnoběžná s osou *y*. Pro $b, c = 0$ je vrchol paraboly v počátku soustavy souřadnic. Pro $a > 0$ je pro $x < 0$ funkce klesající a pro $x > 0$ je rostoucí. Tato funkce je zdola omezená (není omezená shora). Opačně platí, že pro $a < 0$ je funkce rostoucí pro $x < 0$ a klesající pro $x > 0$. Kvadratická funkce, pro kterou platí $a < 0$, je omezená shora a není omezená zdola. Pokud budeme předpokládat, že koeficienty *b, c* jsou pořád stejné, pak parabola, kde $|a| > 1$ je užší než pro $|a| = 1$ a naopak. Na určení souřadnic vrcholu nám pomůžou vzorce pro $[x_0, y_0]$:

$$x_0 = -\frac{b}{2a}, \qquad y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Na určení souřadnic vrcholu se také používá „doplnění na čtverec“:

$$y = ax^2 + b.x + c,$$

$$y = a(x^2 + \frac{b}{a}x) + c,$$

$$y = a\left[(x + \frac{b}{2a})^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c,$$

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + c,$$

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a}.$$

$$V = \left[\frac{-b}{2a}; \frac{4ac - b^2}{4a}\right].$$

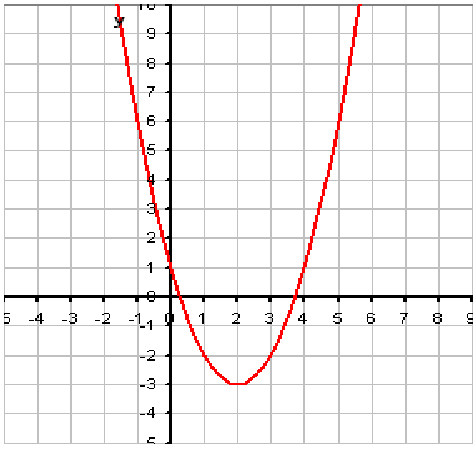
Uveďme si tento výpočet na konkrétním příkladu:

$$y = x^2 - 4.x + 1; \quad D(f) = \mathbb{R}$$

$$y = x^2 - 4.x + 4 - 4 + 1,$$

$$y = (x-2)^2 - 3,$$

$$V = [2; -3].$$



Obrázek 6: Graf kvadratické funkce konkrétního příkladu: doplnění na čtverec, Microsoft Excel, vlastní animace

2.1.1 Průběh funkce

Jak graf kvadratické funkce bude vypadat, již víme, ale k bližšímu určení paraboly můžeme využít extrémů funkce. Umíme určit definiční obor i obor hodnot, průsečíky s osami a „otevřenost/uzavřenost" paraboly v závislosti na koeficientu *a*.

Dále se u kvadratické funkce určují limity v nevlastních bodech, nulový bod první derivace, lokální extrémy, intervaly monotónnosti a konkávnost nebo konvexnost.

● Limity v nevlastních bodech:

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, pro $a > 0$,

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, pro $a > 0$.

Pokud funkce bude mít koeficient *a* záporný, obě limity budou rovny -∞.

● Nulový bod první derivace:

př.: $f(x): y = 2x^2 + 4x + 3$, pak $f'(x) = 4x + 4$. Odtud určíme, kdy se funkce bude rovnat nule, zjistíme nulový bod: $x = -1$.

● Lokální extrém u kvadratické funkce určuje vrchol paraboly. Pokud máme funkci, kde $a > 0$, pak má funkce lokální minimum ve vrcholu. Pokud má funkce $a < 0$, pak vrchol představuje lokální maximum.

● Monotónnost se určuje za pomoci nulového bodu první derivace, který osu x rozdělí na dva intervaly. U paraboly stačí určit hodnotu koeficientu a, který určí monotónnost. Pokud $a < 0$, pak $I_1=(-\infty; x_0)$ je rostoucí a $I_2=(x_0; +\infty)$ klesající. Pro $a > 0$ je tomu naopak.

● K určení konvexnosti nebo konkávnosti dané funkce opět využijeme hodnoty kvadratického koeficientu. Pokud $a > 0$, pak je parabola konvexní. Pro $a < 0$, je graf kvadratické funkce konkávní.

2.2 Kvadratická rovnice s reálnými koeficienty

Obecný tvar kvadratické rovnice je dán vztahem:

$$a.x^2+b.x+c=0 \quad , \qquad \text{kde} \quad a,b,c \in \mathbb{R}; \quad a \neq 0.$$

$a.x^2$ - kvadratický člen

$b.x$ - lineární člen

c - absolutní člen

a - koeficient kvadratického členu

b - koeficient lineárního členu

2.2.1 Kvadratická rovnice v obecném tvaru

Tento typ rovnice řešíme pomocí diskriminantu D, který si zde odvodíme:

Kvadratickou rovnici doplníme na čtverec (obdobné jako u kvadratické funkce):

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0,$$

Budeme chtít využít vzorec $A^2-B^2=(A-B)(A+B)$, proto upravíme rovnici na tvar:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)-\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2=0,$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)=0.$$

Řešení nastane právě tehdy, když se alespoň jedna závorka bude rovnat nule:

$$x_1 = \frac{-b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

$$x_2 = \frac{-b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Diskriminant je výraz, který se nachází pod odmocninou:

$$D = b^2 - 4ac.$$

● Je-li $D > 0$, má kvadratická rovnice právě dva různé reálné kořeny, které určíme ze vztahu, který jsme si právě odvodili:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2\mathrm{a}}.$$

● Je-li $D = 0$, má kvadratická rovnice právě jeden dvojnásobný kořen, který dostaneme ze vztahu:

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2\mathrm{a}}.$$

● Je-li $D < 0$, má rovnice řešení pouze v množině komplexních čísel. Pak D

rozepíšeme jako součin kladného čísla $(|D|)$ a čísla i^2:

$\sqrt{D} = \sqrt{|D|\, i^2} = \pm i\, \sqrt{|D|}$ a kořeny rovnice jsou čísla:

$x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{|D|}}{2\mathrm{a}}$. Jsou to čísla komplexně združená.

2.2.2 Speciální případy kvadratické rovnice

● Ryze kvadratická rovnice

$a\,.\,x^2 + c = 0,$ kde $a, c \in \mathbb{R};\ a \neq 0.$

Z rovnice ekvivalentními úpravami dostaneme $x^2 = -\frac{c}{a}$, odmocníme a dostaneme

$|x| = \sqrt{-\frac{c}{a}}$, za předpokladu že $\frac{c}{a} \leq 0$ jsou kořeny rovnice:

$$x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}, \quad x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

● Kvadratické rovnice bez absolutního členu

$$a^2 . x + b . x = 0 \quad , \qquad \text{kde} \quad a, b \in \mathbb{R}; \quad a \neq 0.$$

Pro řešení kvadratické rovnice bez absolutního členu využijeme vytýkání:

$$x . (a . x + b) = 0,$$

$$x = 0 \quad \vee \quad a . x + b = 0 \qquad \text{tzn.} \quad x = -\frac{b}{a} \quad .$$

Pozn.: Jak u ryze kvadratické rovnice, tak u rovnice bez absolutního členu, lze použít vzorec pro diskriminant. Způsob řešení přes vzorec pro diskriminant však není nejrychlejší a nejefektivnější, proto se používá výhradně u základního typu rovnice.

Také rovnici v normovaném tvaru můžeme považovat za speciální případ kvadratické rovnice. Jedná se o tvar rovnice, kdy se kvadratický koeficient rovná jedné. Dostaneme ji z obecného tvaru rovnice vydělením konstantou *a*. Její obecný zápis je ve tvaru:

$$x^2 + p . x + q = 0 \quad , \qquad \text{kde} \quad p = \frac{b}{a} \quad \text{a} \quad q = \frac{c}{a} \quad .$$

Pro vztah mezi kořeny rovnice a koeficienty kvadratické rovnice se používají tzv. Viètovy vzorce (podle François Vièta):

$$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 . x_2 = q; \quad x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}, \quad x_1 . x_2 = \frac{c}{a}.$$

Kde x_1, x_2 jsou kořeny zadané kvadratické rovnice.

2.3 Kvadratické rovnice s komplexními koeficienty

Tvar kvadratické rovnice s komplexními koeficienty je dán vztahem $ax^2 + bx + c = 0$, kde *a*, *b*, *c* jsou komplexní čísla, $a \neq 0$. Pokud rovnici upravíme do tvaru[10] $(2ax + b)^2 - (b^2 - 4ac) = 0$ (obě strany vynásobím číslem *a*, levou stranu upravíme na druhou mocninu lineárního dvojčlenu a vynásobíme čtyřmi), můžeme označit $y = 2ax + b$, $D = b^2 - 4ac$, pro $D \neq 0$. Z rovnice

10 Viz [3], str. 85.

dostaneme $y^2 - D = 0$. Vyjádření čísla D v goniometrickém tvaru $|D|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$. Kořeny y_k rovnice, určíme vztahem $y_k = \sqrt{|D|}\cdot\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{2} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{2}\right)$, $k = 0, 1$.

To jsou čísla $y_0 = \sqrt{|D|}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}\right)$, $y_1 = -\sqrt{|D|}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}\right)$.

Dosadíme-li y_0, y_1 do vztahu $y = 2ax + b$ a vyjádříme-li x: $x = \frac{-b+y}{2a}$ dostaneme x_1 (dosazením y_0) a x_2 (dosazením $y1$):

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{|D|}\left(\cos\frac{1}{2}\alpha + i\sin\frac{1}{2}\alpha\right)}{2a}.$$

Tento vzorec platí i pro kvadratickou rovnici s reálnými koeficienty.[11]

2.4 Kvadratické nerovnice

Obecný tvar kvadratické nerovnice je určen vztahem:

$$a\,x^2 + b\,x + c > 0, \quad \text{resp.} \quad ax^2 + bx + c < 0, \quad \text{kde} \quad a, b, c \in \mathbb{R};\quad a \neq 0.$$

Kvadratická nerovnici může mít tvar:

$$a\,x^2 + b\,x + c \geqslant 0, \quad \text{resp.} \quad ax^2 + bx + c \leqslant 0 \quad \text{kde} \quad a, b, c \in \mathbb{R};\quad a \neq 0.$$

Kvadratická nerovnice má obdobné označení členů jako kvadratické rovnice, proto pro ni také platí, že:

$a.x^2$ - kvadratický člen

$b.x$ - lineární člen

a - koeficient kvadratického členu

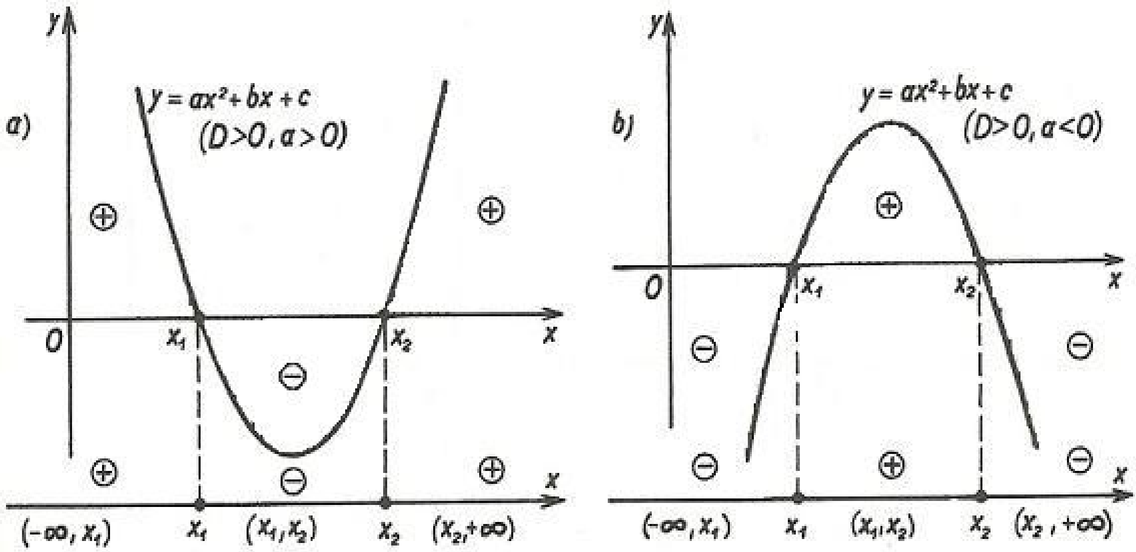
b - koeficient lineárního členu

c - absolutní člen

11 Důkaz viz [3], str. 87.

2.4.1 Řešení kvadratické nerovnice pro $D > 0$

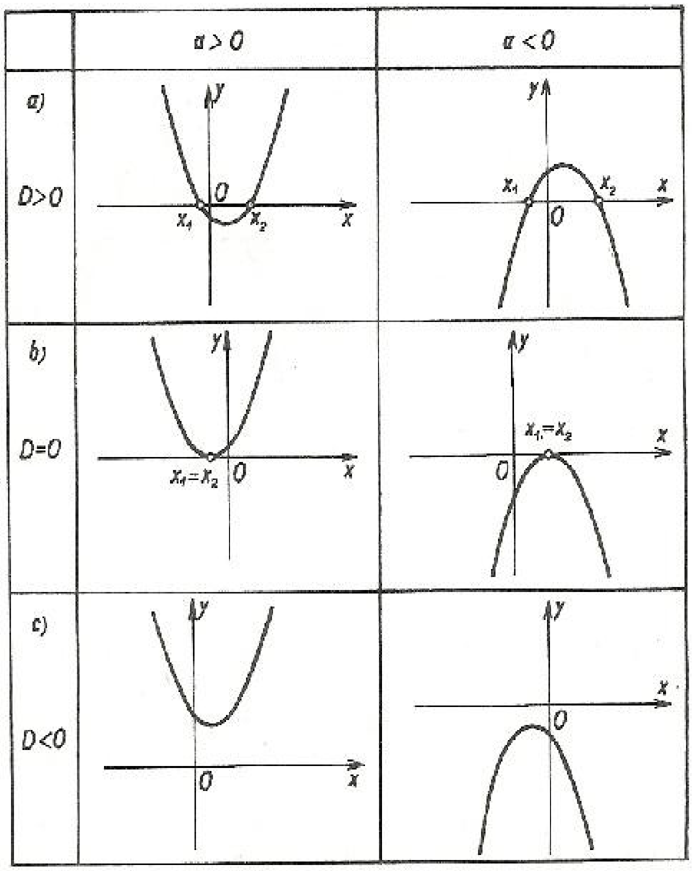
Pokud $D > 0$, pak kvadratická rovnice má dva různé kořeny x_1, x_2. Kvadratický trojčlen $a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ lze rozložit na součin $a \cdot (x - x_1).(x - x_2)$. Po vydělení obou stran dané nerovnice číslem *a* má levá strana tvar $(x - x_1).(x - x_2)$. Obecně platí, že při násobení/dělení kvadratické nerovnice záporným číslem se mění znaménko nerovnice na opačné. Nyní stačí užít větu o znaménku součinu dvou reálných čísel. Nechť $x_1 < x_2$. Graf (parabola) kvadratické funkce $f : y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ protíná osu *x* ve dvou různých bodech a rozdělí osu *x* na tři intervaly $I_1 = (-\infty; x_1)$, $I_2 = (x_{1,} x_2)$, $I_3 = (x_{2,} + \infty)$. Znaménka v jednotlivých sousedních intervalech jsou opačná. Stačí zjistit hodnotu kvadratického trojčlenu v jakémkoliv bodě v jednom intervalu a odtud pak vyplynou znaménka v ostatních dvou intervalech. Pro úplnost se zaměříme na znaménko nerovnosti a určíme, který z intervalů je daným výsledkem. Situaci popisující tento postup znázorníme na obrázku 7. Přehledné zobrazení závislosti diskriminantu a koeficientu *a* nalezneme na obrázku 8 (ke kapitole 2.3.1 obrázek 8a).



Obrázek 7: Metoda nulových bodů – intervaly, podle J. Poláka

2.4.2 Řešení kvadratické nerovnice pro $D = 0$

Pokud $D = 0$, pak kvadratická rovnice má jeden dvojnásobný kořen $x_{1,2}$. Pro kvadratickou rovnici platí $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$. Pokud $a > 0$, pak $a(x - x_1)^2 \geqslant 0$. Je-li $a < 0$, je $a(x - x_1)^2 \leqslant 0$. Rovnost nule nastává pouze v případě, že $x = x_1$. V grafu tak nastává situace, kdy parabola dána předpisem $f : y = ax^2 + bx + c$ se dotýká osy *x* pouze v jednom bodě a všechny ostatní body jsou buď nad nebo pod osou *x*. Na obrázku 8b najdeme znázornění grafu paraboly pro *D=0*, pro *a > 0* a *a < 0.*



Obrázek 8: Graf kvadratické funkce v závislosti na velikosti D, podle J. Poláka

2.3.3 Řešení kvadratické nerovnice pro *D < 0*

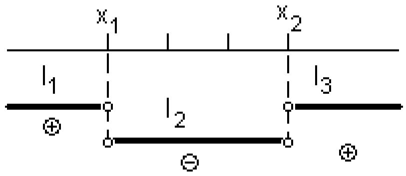
Případ, kdy *D < 0*, znázorňuje případ na obrázku 8c. Kvadratická rovnice, která má záporný diskriminant, nemá žádný reálný kořen. Parabola takovéto funkce je pak celá pod osou *x* (pro *a < 0*) nebo nad osou *x* (pro *a > 0*). K určení řešení kvadratické nerovnice postačí určit znaménko kvadratického trojčlenu v kterémkoliv bodě *x*.

K výpočtu řešení kvadratické nerovnice, kdy *D < 0* lze také použít „doplnění na čtverec“. Kvadratickou nerovnici upravíme na normovaný tvar vydělením obou stran nerovnice koeficientem *a*. Diskriminant této normované rovnice $x^2+px+q=0$ má tvar p^2-4q. Doplněním kvadratického trojčlenu x^2+px+q na čtverec dostáváme:

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{2}\right)^2+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{D}{4}.$$

Je-li $p^2 - 4q < 0$, pak pro každé $x \in \mathbb{R}$ je $x^2 + px + q > 0$. Tato kvadratická nerovnice má nekonečně mnoho řešení.

Určit řešení můžeme ze znaménkové diskuze (znaménkové analýzy, podle O. Odvárko) kořenových činitelů a kvadratického trojčlenu v jednotlivých intervalech I_1, I_2, I_3. Zakreslíme si osu x a na ní kořeny x_1, x_2. Následně zapíšeme do tabulky 1 podle obrázku 9. Pozn.: $x_1 < x_2$.



Obrázek 9: znaménková analýza, vlastní ilustrace

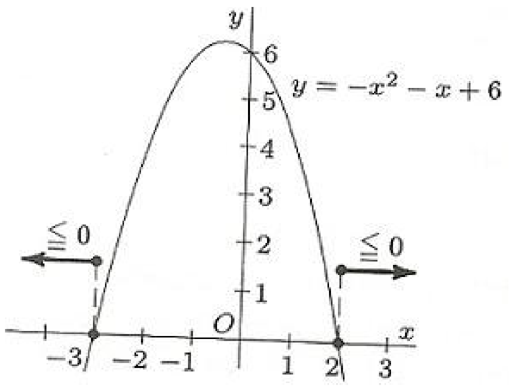
Tabulka 1: znaménková diskuze

x	$(-\infty; x_1)$	$(x_1; x_2)$	$(x_2; +\infty)$
$x - x_1$	-	+	+
$x - x_2$	-	-	+
$(x - x_1)(x - x_2)$	+	-	+

Uveďme si dva názorné příklady výpočtu kvadratické nerovnice.

- Máme kvadratickou nerovnici $2x^2 + 5 \leqslant 3x^2 + x - 1, x \in \mathbb{R}$. Anulovaný tvar této nerovnice $-x^2 - x + 6 \leqslant 0$, předpokládáme analogickou rovnici $-x^2 - x + 6 = 0$ a řešíme ji. Pomocí diskriminantu $D = 25$ dostaneme dva reálné kořeny $x_1 = -3$, $x_2 = 2$. Koeficient u x^2 je záporný, a proto bude funkce omezená shora. Řešením zadané kvadratické nerovnice $2x^2 + 5 \leqslant 3x^2 + x - 1$ jsou všechna

$$x \in (-\infty, -3\rangle \cup \langle 2, +\infty).$$



Obrázek 10: Grafické řešení nerovnice, podle O. Odvárka

- Nerovnice $(x^2 - 4x + 3) \geqslant 0$ lze upravit do tvaru $(x-1)(x-3) \geqslant 0$. Osa x se rozdělí na čtyři intervaly: $I_1 = \langle -\infty; 1\rangle$, $I_2 = \langle 1; 3\rangle$ $I_3 = \langle 3; +\infty\rangle$. Pro $x < 1$ mají všechny dvojčleny zápornou hodnotu (viz tabulka2). Jelikož se při každém projití kořene mění znaménko, tak v intervalu I_1 bude výsledná diskuze znamének kladná, pro I_2 záporná a pro I_3 kladná. Množinou pravdivosti nebo-li množinou všech řešení uvedené nerovnice je $P = \langle -\infty; 1\rangle \cup \langle 3; +\infty\rangle$.

Tabulka 2: Diskuze znamének z příkladu

x	I_1	I_2	I_3
$x - 1$	-	+	+
$x - 3$	-	-	+
$(x - 1)(x - 3)$	+	-	+

3 Výskyt kvadratické závislosti ve fyzice

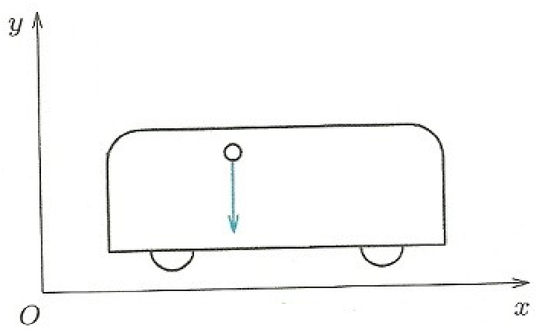
S kvadratickou závislostí ve fyzikálních vzorcích se můžeme setkat velice často. V této kapitole se seznámíme se základními situacemi, které se dají popsat fyzikálním vzorcem, kde se vyskytuje kvadrát.

3.1 Mechanika

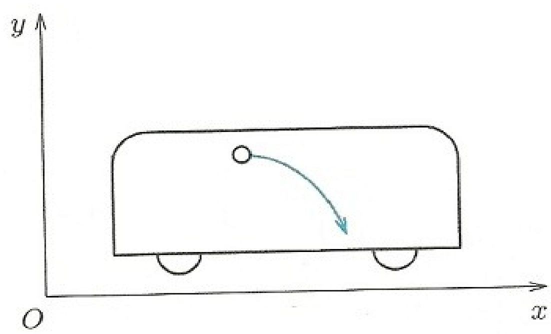
Mechanika je nejstarším oborem fyziky. Zkoumá zákonitosti nejjednoduššího pohybu těles, přemístěním. Základní dělení mechaniky je na kinematiku a dynamiku. Kinematika popisuje pohyb těles. Dynamika zkoumá proč pohyb nastává, jeho příčinu. Jiným dělením je například na mechaniku tekutin a mechaniku tuhých těles.

3.1.1 Volný pád kuličky v jedoucím vlaku

Představme si situaci, kdy sedíte v jedoucím vlaku a necháte padat volným pádem duhovou kuličku. Z fyzikálního hlediska je kulička hmotným bodem, který koná trajektorii. Trajektorie je souhrn všech poloh, kterými hmotný bod prochází při svém pohybu. Pohyby rozdělíme podle tvaru trajektorie na přímočaré a křivočaré. Tvar takové trajektorie je ovlivněn volbou vztažné soustavy. V našem případě můžeme uvážit dvě vztažné soustavy. Jedna je pevně spojená s vagónem a druhá představuje povrch Země, vůči, které se vlak pohybuje. Při uvažování první vztažné soustavy se vlastně nic zvláštního neděje. Kulička pouze spadne volným pádem. Tuto situaci popisuje obrázek 11. Pro nás důležitý je pohyb vzhledem k Zemi. Padající kulička opíše část paraboly, obrázek 12.



Obrázek 11: Volný pád kuličky, podle E. Svobody



Obrázek 12: Pohyb vagónu vzhledem k Zemi, podle E. Svobody

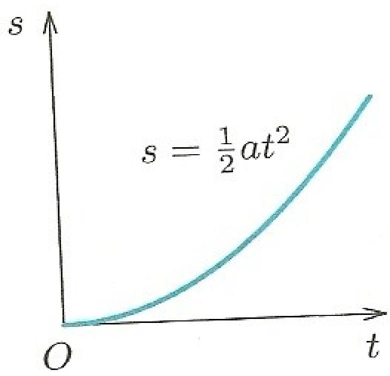
Dráha hmotného bodu volného pádu je popsána vztahem:

$s=\frac{1}{2}g t^2$, kde g je tíhové zrychlení, které je rovno přibližné hodnotě: *9,809980 m/s²*. Z tohoto vzorce je patrné, že grafem dráhy (závislá na čase) padající kupičky je část paraboly. Vrchol paraboly je v bodě, kde kuličku pustíme.

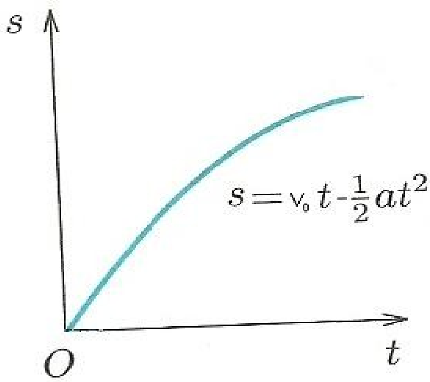
3.1.2 Dráha rovnoměrně se zrychlujícího auta

Poučka, s kterou jsme se setkali všichni již na základní škole: „Dráha rovnoměrně zrychleného pohybu při nulové počáteční rychlosti je přímo úměrná druhé mocnině času.“[12], nám říká, že se zde také setkáváme s kvadratickou rovnicí:

$$s=\frac{1}{2}a t^2.$$



Obrázek 13: Závislost dráhy na čase, zrychlení, podle E. Svobody



Obrázek 14: Závislost dráhy na čase, zpomalení, vlastní ilustrace, podle E. Svobody

Grafem závislosti dráhy na čase je opět část paraboly (obr. 13).

Typickým příkladem ze života je rozjíždějící se auto. V čase *0* [*s*] má nulovou dráhu – nic neujelo. V čase se *t* [*s*] bude jeho dráha rovna jedné polovině kvadrátu času násobeného velikostí zrychlení.

V životě se setkáváme každý den i se situací, kdy dané auto musíme zastavit. Jedná se o tentýž pohyb, jen musíme uvažovat zápornou velikost zrychlení a počáteční rychlost v_0.

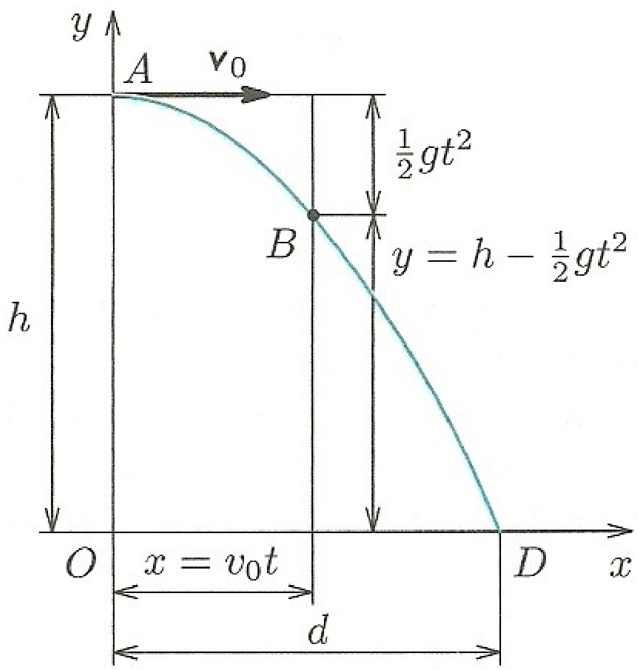
$$s=v_0 t-\frac{1}{2}a t^2$$

12 Viz [10], str. 44.

3.1.3 Vodorovný vrh kamenem a šikmý vrh míčem

● Stojíme-li v druhém patře domu, můžeme vyhodit kamínek ven z okna. Letí-li kamínek z počátku rovnoběžně s zemským povrchem jedná se o vodorovný vrh. Trajektorií padajícího kamene bude část paraboly, obr. 15. Vodorovný vrh vzniká složením pohybu přímočarého a volného pádu.

My stojíme v době *A*, kamínek dopadne do bodu *D* a projde při tom bodem *B*. Na začátku mu udělíme rychlost v_0. V bodě *B* máme uvedeny základní vztahy, které již známe, pro uraženou dráhu kamene ve směru osy *x* a *y*.



Obrázek 15: Vodorovný vrh, podle E. Svobody

h … výška

d … vzdálenost od paty domu

souřadnice bodu *B*:

$$x_B = v_0 t\,,\ y_B = h - \frac{1}{2} g t^2$$

V bodě *D*: $y_D = h - \frac{1}{2} g t_D^2 = 0$, odtud $t_D = \sqrt{2\frac{h}{g}}$. Vzdálenost *D* od paty domu se nazývá také délka vrhu. Po dosazení t_D do vztahu pro x_D dostaneme *d*:

$$x_D = v_0 t_D \ \rightarrow\ d = v_0 \sqrt{2\frac{h}{g}}.$$

Z tohoto vztahu vidíme, že délka vrhu závisí na udělené počáteční rychlosti a výšce.

● Když jsme na zahradě a házíme si míčem se sourozencem nebo kamarádem, vykonáváme šikmý vrh. Míč letí po zakřivené dráze (obr. 16). Míči udělíme počáteční rychlost v_0, tato rychlost má směr šikmo vzhůru. Úhlu, který svírá země se směrem vrhu, se říká elevační a značí

se α. V bodě C je míček v nejvyšším možném bodě, jedná se o vrchol paraboly. Souřadnice bodu B jsou:
$$x_B = v_0 t \cos\alpha\,,\ y_B = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2\,.$$

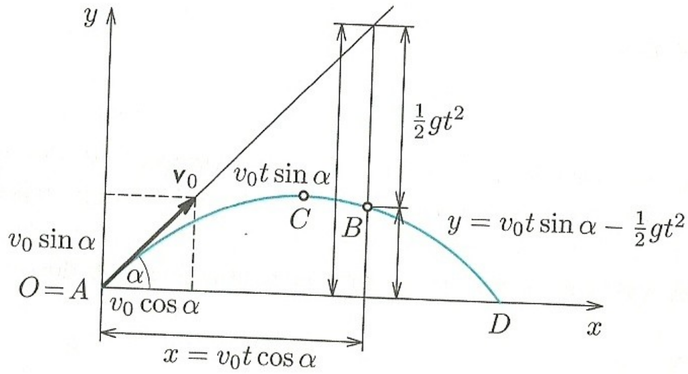
V bodě D jsou souřadnice $x_D = d\,,\ y_D = 0\,.$ Pro osu y platí, že $y = 0$. Vyjádříme-li y_D v souřadnicích a položíme rovnu nule, získáme čas t_D:

$$y_D = 0 = v_0 t_D \sin\alpha - \frac{1}{2} g t_D^2 \ \rightarrow\ t_D = \frac{2 v_0 \sin\alpha}{g}\,.$$

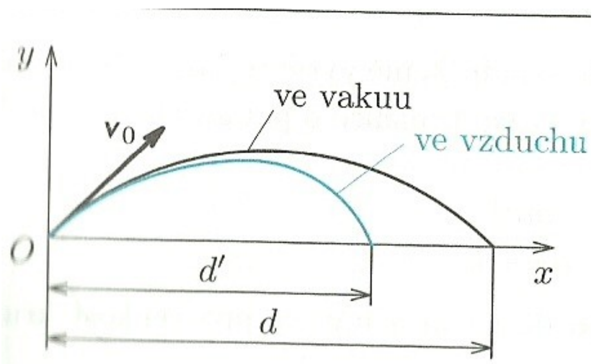
Nyní získanou hodnotu času dopadu dosadíme do x_D:

$$x_D = d = v_0 t_D \cos\alpha = \frac{2 v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}\,.$$

Tím jsme získali hodnotu pro délku vrhu, která závisí na druhé mocnině velikosti v_0 a na elevačním úhlu α. Délka vrhu je nejdelší pokud je elevační úhel roven 45°. Toto vše ale uvažujeme při zanedbání veškerých vlivů, například odporu vzduchu. Obrázek 17 ukazuje rozdíl šikmého vrhu ve vakuu a ve vzduchu. Ve vzduchu se parabola deformuje působením odporové síly na tzv. balistickou křivku, při které je největší vzdálenost dopadu při elevačním úhlu 42°.



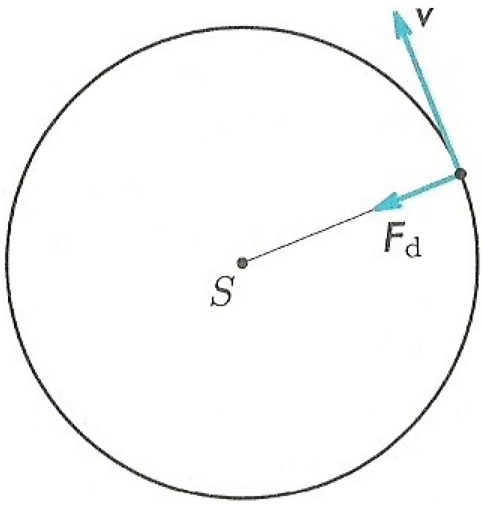
Obrázek 16: Šikmý vrh, podle E. Svobody



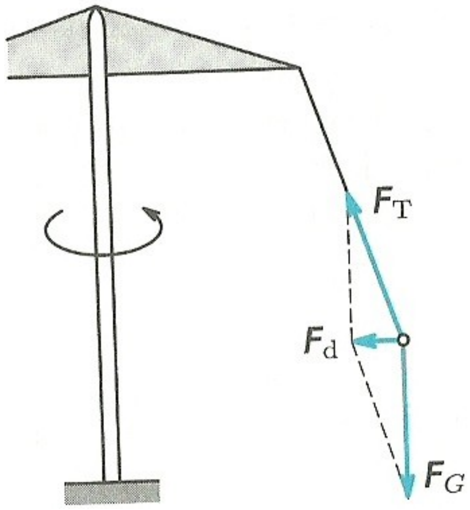
Obrázek 17: Šikmý vrh ve vzduchu a vakuu, podle E. Svobody

3.1.4 Dostředivá síla na řetízkovém kolotoči

Představme si situaci, kdy sedíme na řetězovém kolotoči. V tu chvíli ale zajisté nepřemýšlíme, jaké síly na nás působí. V této části se dozvíme, že na nás na řetězovém kolotoči působí dostředivá síla. Dostředivá síla F_d je výslednicí všech sil, které na těleso působí. V našem případě se jedná o výslednici tíhové síly F_G a tahové síly řetězu F_T. Dostředivá síla je přímo úměrná dostředivému zrychlení a má i jeho směr. Na obrázku 19 vidíme dostředivou sílu F_d, která vždy směřuje k ose otáčení (do středu kružnice). Obrázek 18 představuje kolotoč z boku a je zde znázorněn rozklad dostředivé síly.



Obrázek 19: Pohled na kolotoč z vrchu, podle E. Svobody



Obrázek 18: Pohled na kolotoč z profilu, podle E. Svobody

Dostředivá síla se vypočte pomocí vztahu:

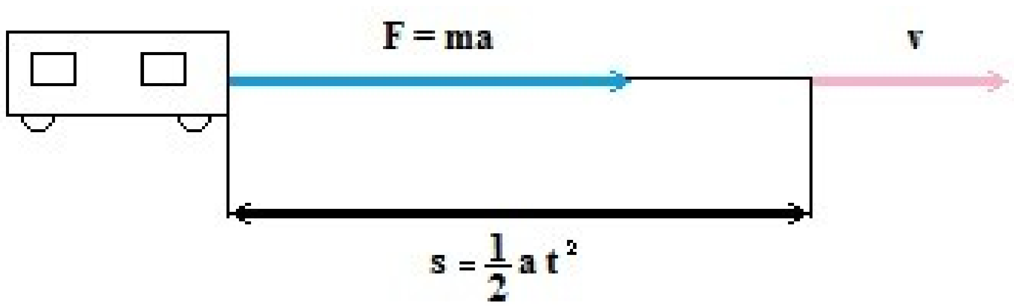
$$F_d = m a_d .$$

Pokud vezmu $a_d = \frac{v^2}{r} = \omega^2 \cdot r$, pak mohu psát:

$$F_d = m \frac{v^2}{r} = m \omega^2 r .$$

3.1.5 Kinetická energie pohybujícího se vlaku

Kinetickou energii získávají tělesa, která se vzhledem k dané vztažné soustavě pohybují. Budeme uvažovat pohybující se vlak (těleso) vůči Zemi (vztažná soustava). K uvedení vlaku do pohybu potřebujeme vykonat práci. Na začátku situace je vlak v klidu vzhledem k zvolené vztažné soustavě a má hmotnost *m*. Aby se vlak začal pohybovat, udělíme mu konstantní sílu *F*. Vlak se bude podle druhého Newtonova pohybového zákona $F = m a$ pohybovat stálým zrychlením *a*. Po určité době urazí vagón dráhu $s = \frac{1}{2} a t^2$ a bude mít rychlost $v = a t$.



Obrázek 20: Dráha vlaku v čase t, k odvození E_K, vlastní ilustrace

Vykonaná práce při uvedení vlaku do pohybu je rovna $W = F s$. Odtud:

$$W = m a \cdot \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} m (a t)^2 = \frac{1}{2} m v^2 .$$

Práce vykonaná je mírou změny kinetické energie, neboli $W = \Delta E_k$. Jestliže byl vlak původně v klidu můžeme říci, že práce *W* je přímo rovna kinetické energii E_k. Kinetická energie je dána vztahem *[J]*:

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 .$$

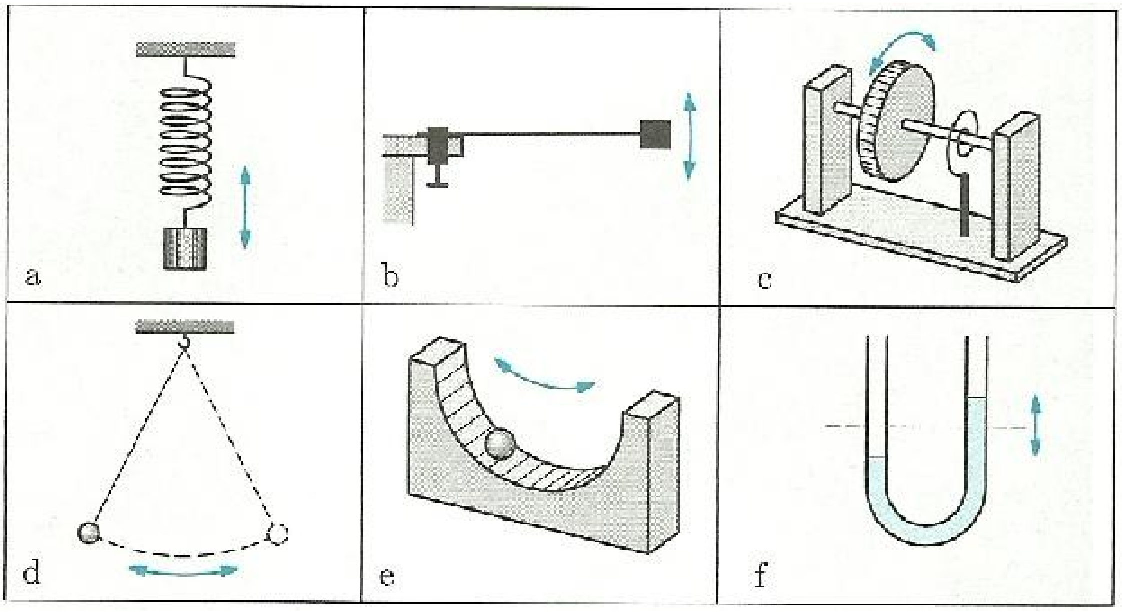
S kinetickou energií se dále můžeme setkat například při hraní kulečníku. Zde uvádíme koule z klidu do pohybu tágem. Máme však soustavu hmotných bodů – více koulí, proto musíme určovat celkovou kinetickou energii soustavy. Celková kinetická energie je rovna součtu jednotlivých kinetických energií.

3.2 Mechanické kmitání

Nejčastěji se s kmitáním setkáme u tzv. mechanických oscilátorů, což jsou zařízení, která mohou volně kmitat. Příklady takovýchto zařízení ukazuje obrázek 21. Jednou ze základních veličin popisující harmonický pohyb je zrychlení. Představme si kuličku umístěnou na provázku a zavěšenou na držáku. Rychlost *v* bude nejvyšší v rovnovážné poloze. Naopak v krajních bodech je rychlost v nulová a mění se její směr. Vektor zrychlení a_0 pohybu kuličky (po části kružnice) směřuje do středu S. Pro zrychlení a je dán vztah[13]:

$$a = -\omega^2 y .$$

Veličina ω se nazývá úhlová frekvence a je dána vztahem: $\omega = 2\frac{\pi}{T} = 2\pi f$.



Obrázek 21: Mechanické oscilátory, podle E. Svobody

3.3 Elektřina

Elektřina je souhrn elektrostatických (přitahování a odpuzování elektricky nabitých částic) a elektrodynamických jevů (proud jako časově závislá veličina). Pro elektrickou práci platí vztah:

$$W = U Q .$$

Za čas t se přemístí vodičem částice s nábojem Q, na spotřebiči je napětí U a práce je vykonána silami elektrického pole. Máme-li spotřebič, kterým prochází konstantní proud I a má odpor R, pak můžeme využít vzorců:

$I = \frac{Q}{t}$, elektrický proud

$I = \frac{U}{R}$. Ohmův zákon

13 Odvození vztahu viz [10], str. 198.

Pokud dosadíme do vzorce pro práci:

$$W = U\,I\,t = RI^2 t \quad \text{nebo} \quad W = \frac{U^2}{R} t\,.$$

Odtud je jasně vidět, že práce W je přímo úměrná druhé mocnině napětí U a nepřímo úměrná odporu R. Můžeme nyní odvodit i vztah pro výkon elektrického proudu. Víme, že:

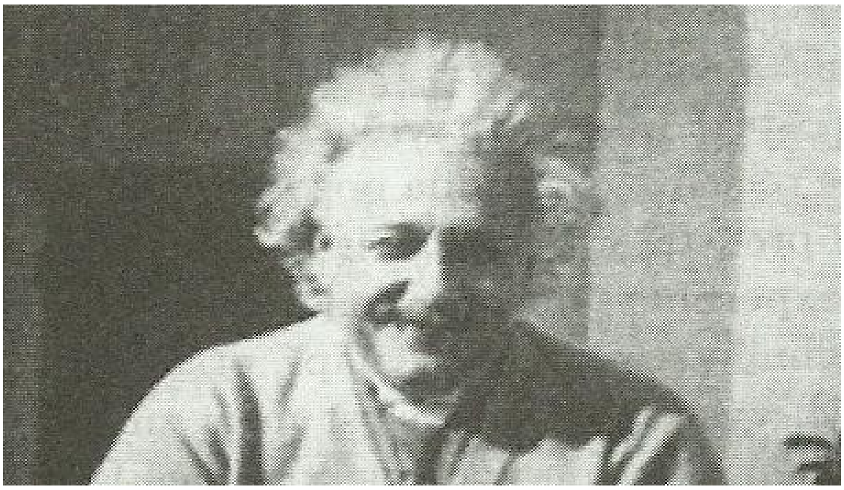
$$P = \frac{W}{t}\,.$$

Za práci W dosadíme vzorec, který jsme si odvodili před chvílí a dostaneme:

$$P = UI = \frac{U^2}{R} \quad \text{nebo} \quad P = R\,I^2.$$

Zde je vidět, že výkon elektrického proudu je přímo úměrný odporu R a kvadrátu elektrického proudu I.

3.4 Speciální teorie relativity



Obrázek 22: A. Einstein, podle E. Svobody

Speciální teorie relativity je jedním z novějších oborů fyziky, které začaly vznikat koncem 19. století. Speciální teorie relativity změnila představu o prostoru a čase (kontrakce délek a dilatace času). Hlavním představitelem speciální teorie relativity byl A. Einstein (1879–1955), obr. 22. A. Einstein vyslovil dva základní principy: princip konstantní světelné velikost rychlosti a spec. princip relativnosti o rovnocennosti všech inerciálních systémů. A. Einstein dále dokázal, že při změně celkové energie tělesa se změní také hmotnost tohoto tělesa. Einsteinův vztah mezi energií E a hmotností m je:

$E = mc^2$,   kde c je rychlost světla.

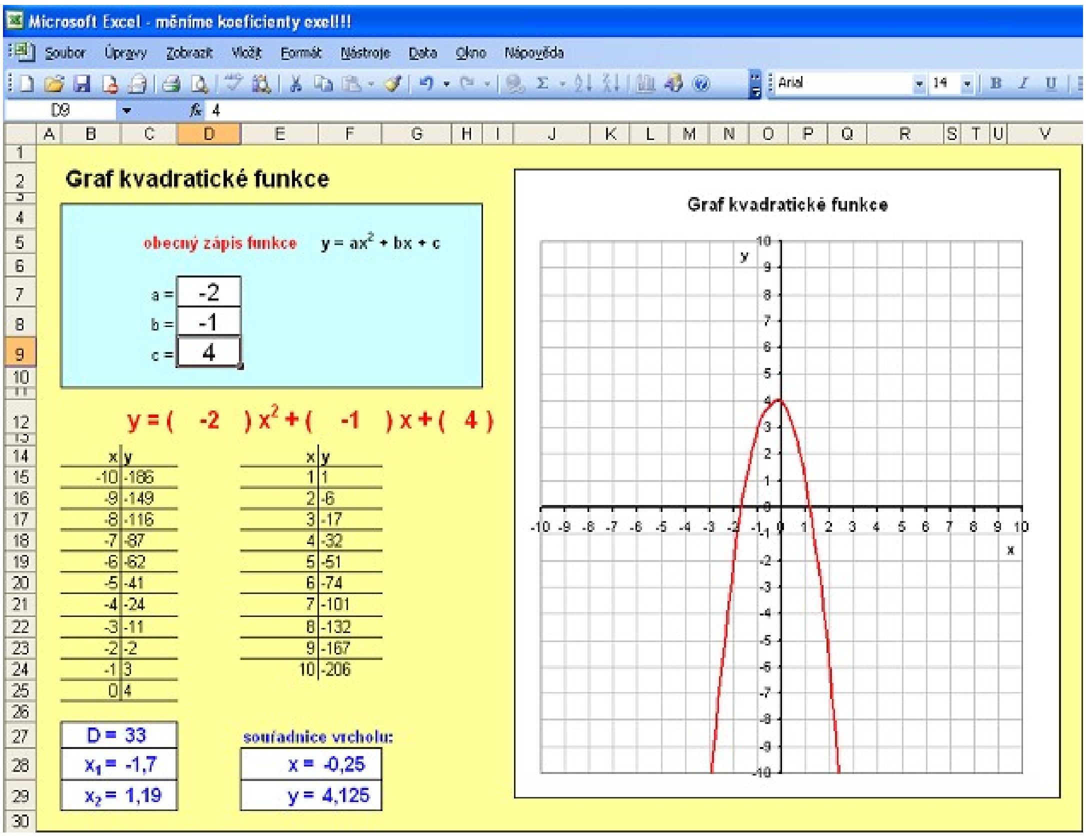
Tento vztah byl posléze ověřen v jaderné fyzice. Vztah vystihuje kvadratickou závislost, ale velikost rychlost světla ve vakuu je považována za konstantní, tudíž se zde nejedná o druhou mocninu neznámé veličiny. Přesto se tímto vztahem může rychlost světla alespoň ověřit.

4 PC-aplikace

V této kapitolce se seznámíme s různými softwary a aplikacemi, které mají nějakou souvislost s kvadratickou funkcí, kvadratickou rovnicí nebo nerovnicí. Toto téma jsem si do práce chtěla dát, jelikož mám velice blízko k práci s počítači. Díky mé druhé kombinaci stále setkávám s různými softwary. Ve fyzice velice často využíváme různé programy pro výpočty nebo vykreslení. Seznámíme se zde s těmi známějšími programy, které nám přiblíží kvadratickou funkci a její graf.

4.1 Microsoft Excel

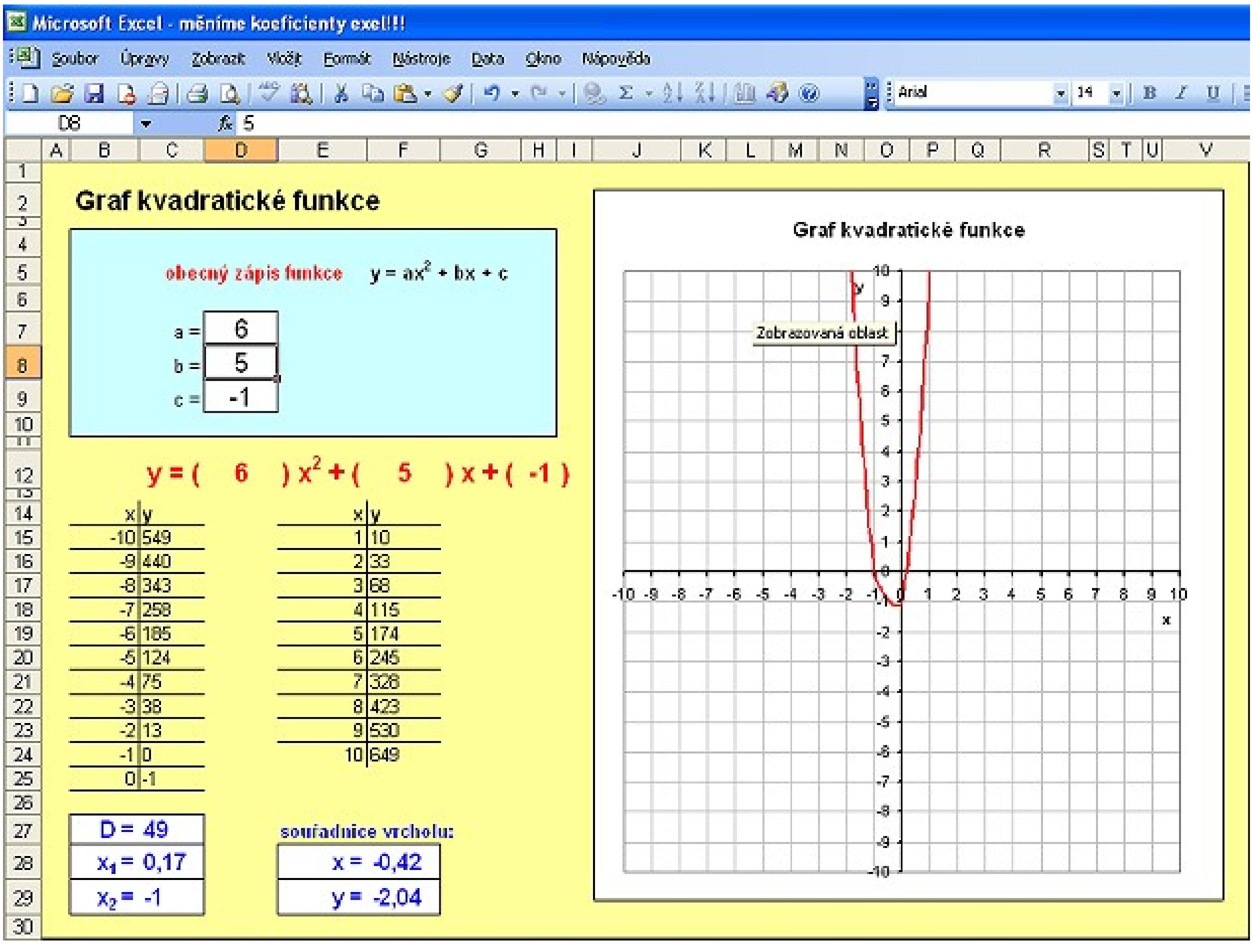
Microsoft Excel je považován za jeden z nejznámějších programů, je součástí placeného balíčku Microsoft Office (nebo v dnešní době hodně používaným balíčkem OpenOffice, kde Excel je nahrazen Calcem). V Exelu můžeme zpracovat vlastní funkce v graf. Já jsem ale využila již předem naprogramovaný exel. V tomto naprogramovaném Excelu můžeme měnit koeficienty *a*, *b*, *c*. Na obrázku 23 jsou zvoleny koeficienty: $a=-2$, $b=-1$, $c=4$.



Obrázek 23: Excel, vlastní animace

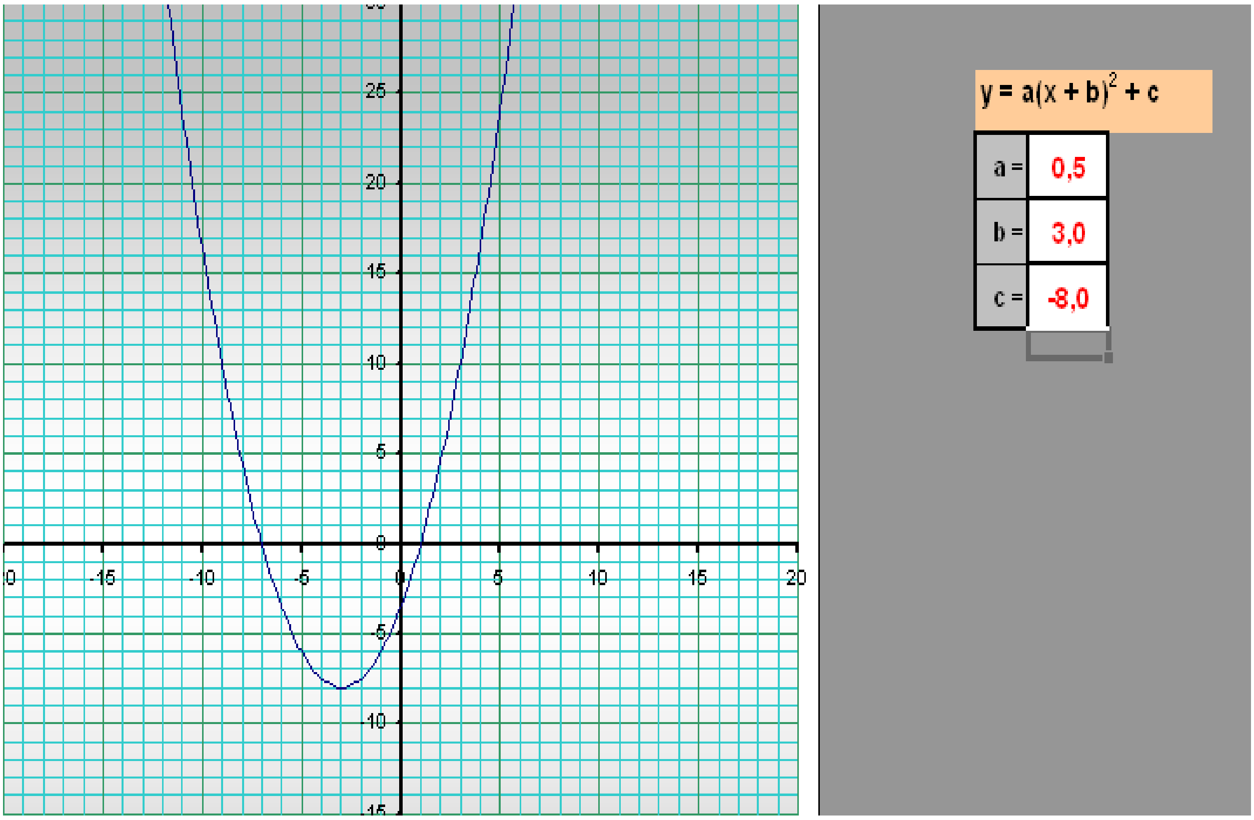
Z Exelu se hned dovíme, jaké jsou kořeny zadané funkce, souřadnice vrcholu, hodnota diskriminantu a jak vypadá graf. Pouze při *D* < *0* nám Microsoft Excel neudá hodnoty kořenů, přesto vykreslí graf. Pěkně připravený program, který je velice přehledný a vygeneruje také „tabulku“, která udává hodnoty *y* v bodech $x=\{-10,-9,-8,\ldots,8,9,10\}$.

Jediné, co tomuto programu vytkneme, je, že při určité kombinaci koeficientů se graf paraboly lehce zkřiví (obr. 24) a vykreslení není pěkné. Zvolené koeficienty: $a=6$, $b=5$, $c=-1$.



Obrázek 24: Excel, vlastní animace

Druhé naprogramování v Microsoft Excel je vykreslování grafu kvadratické funkce, která je ve tvaru $f: y=a\cdot(x+b)^2+c$. Zde můžeme měnit pouze koeficienty *a, b, c*, ale uvědomujme si, že se nejedná o standardní zadání kvadratické funkce. Změna koeficientů nám velice usnadní znázornění následné změny grafu kvadratické funkce (obr. 25). V Microsoft Excel vidíme, jak se posouvá graf při změně koeficientu *b, c* a při změně *a* se mění tvar paraboly.



Obrázek 25: Excel, vlastní animace

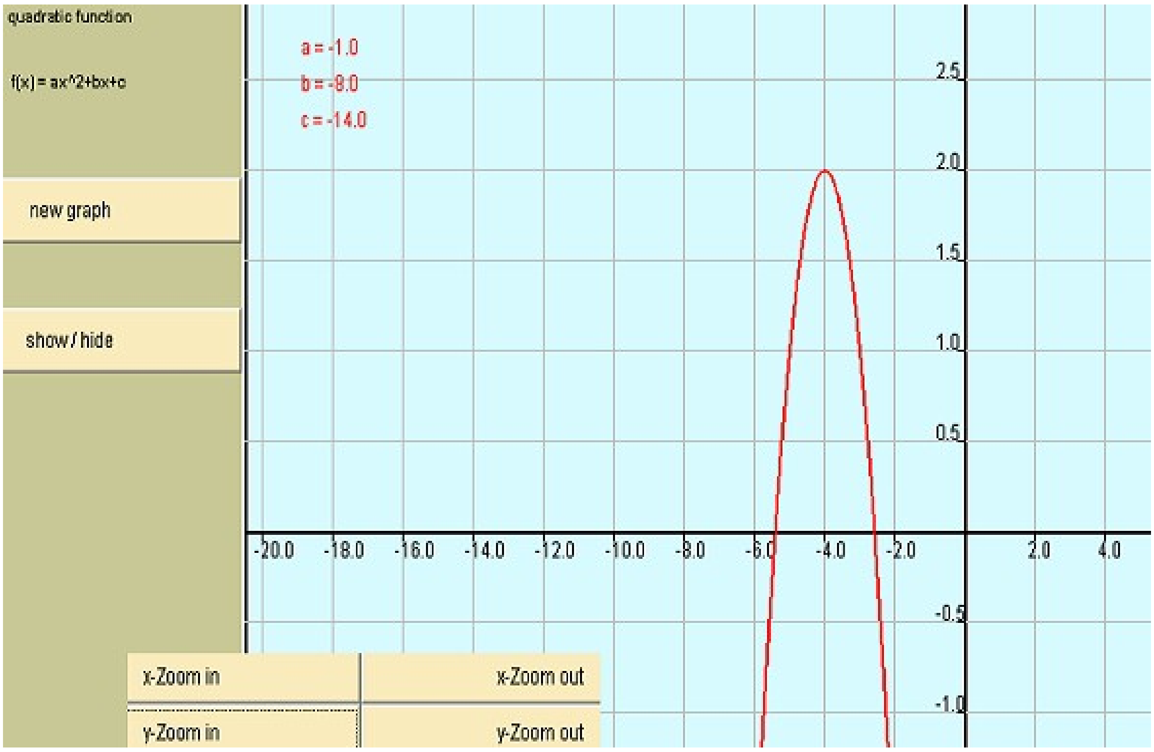
4.2 Webové aplikace

Webová aplikace je službou webového serveru přes počítačovou síť internet. Webové aplikace jsou oblíbené kvůli tomu, že si software nemusíme instalovat do počítače. Na internetu se dá vyhledat spousta aplikací, které nám umožní vykreslení grafu kvadratické funkce. U všech se prakticky vždy dají změnit všechny koeficienty a aplikace nám vykreslí graf kvadratické funkce. Vybrali jsme jen webové stránky, které mají něco navíc, nebo jim naopak něco chybí.

Nejprve si ukážeme aplikaci z webové stránky:

http://www.analyzemath.com/quadraticg/quadraticg.htm

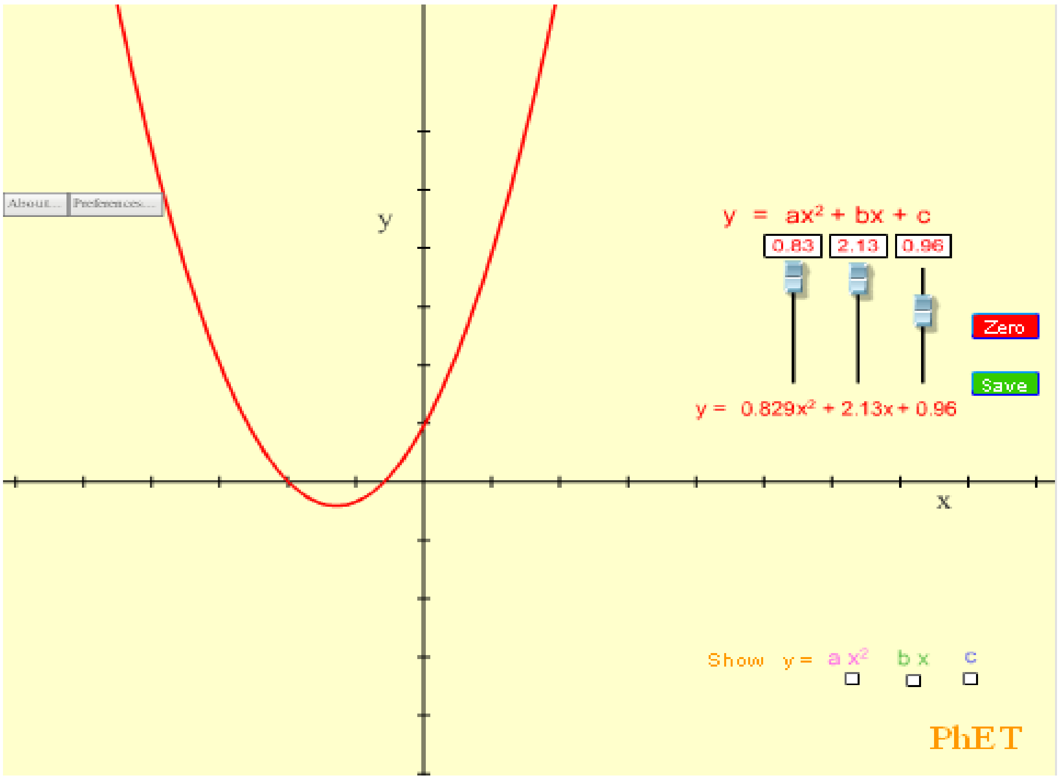
Jedná se o anglický web, který ale má spoustu nedostatků. Aplikace jen náhodně vykresluje grafy. V programu se nic nedá měnit. Jediné co můžeme měnit jsou měřítka jednotlivých os. Při odchodu z prohlížeče si dejme pozor na nefunkční „křížek“. Z aplikace se dostaneme pouze tlačítkem na „*click here to close window*“. Jeden náhodný graf kvadratické funkce, znázorněný touto webovou aplikací, je znázorněný na obrázku 26.



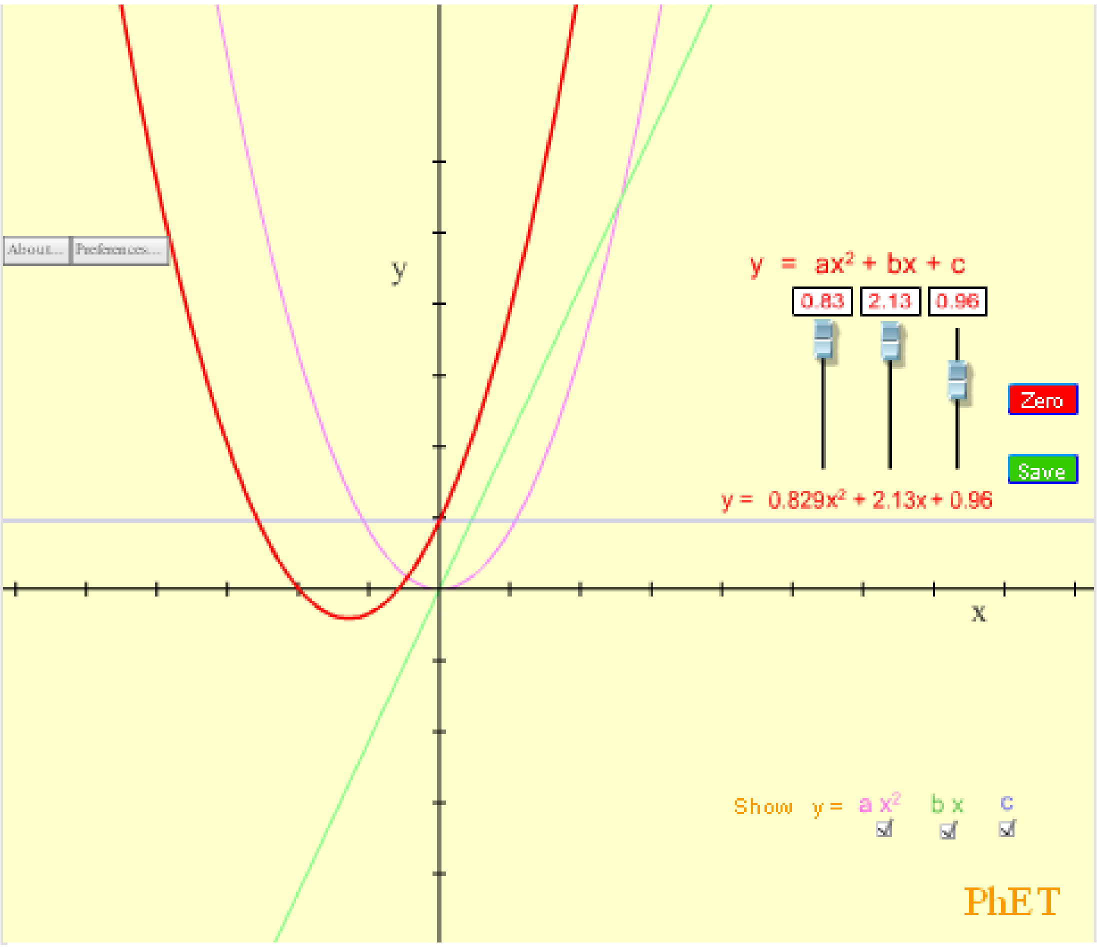
Obrázek 26: webová aplikace, vlastní animace

Druhou aplikaci, kterou si zde přiblížíme, najdeme na stránce:

http://www.vichr.qsh.cz/default.aspx?pg=741ec374-2332-4226-83c0-49f3f5f83e83



Obrázek 27: webová aplikace, vlastní animace



Obrázek 28: 4.2c

V této aplikaci se mohou měnit koeficienty v určitém rozsahu. Hodnota kvadratického koeficientu je mezi *(-5,04; 5,05)*, hodnota lineárního koeficientu je *(–6,31; 6,31)* a absolutní člen nabývá hodnot *(-4; 4)*. Na obrázku 27 je vidět graf funkce $f(x): y = 0{,}829\, x^2 + 2{,}13\, x + 0.96$. Zápis funkce se nám ukáže. Hodnoty se dají uložit, v dalším kroku se graf uchová, ale uchování platí pouze pro jeden graf – pokud chceme uložit další, nebo pokračocat automaticky se vymaže. Důležité je, že si můžeme zaškrtnou vykreslení jednotlivých členů kvadratické funkce (viz obr. 28), jedná se o fialovou, zelenou a modrou křivku. Pokud zaškrtneme jen jednu, tak uvidíme, jak by vypadal graf, který má zbylé koeficienty nulové.

Závěr

Práce měla za úkol shrnout téma týkající se kvadratické závislosti. Dozvídáme se, kdy se matematici setkali s kvadratickou rovnicí poprvé a jaký byl její další vývoj. Zabývala jsem se historií v zemích, které byly matematicky vyspělé. Zjistila jsem, že výpočty vedoucí k řešení kvadratické rovnice byly velice podobné těm dnešním. Zaujalo mě, že nepřipouštěli záporný kvadratický kořen.

Práce popisuje teoretickou podstatu kvadratické funkce, kvadratické rovnice a nerovnice. Byla zde provedena řešení kvadratické rovnice a rozebráno sestrojení grafu kvadratické funkce a jeho využití při řešení kvadratických nerovnic.

Poukázala jsem na reálné využití matematiky ve fyzice. Právě kvadratická rovnice je ve fyzice velice často používána a bez znalosti řešení bychom se daleko nedostali. Fyzikální vzorce s kvadratickou závislostí můžeme používat při procvičení kvadratické funkce, kvadratické rovnice a nerovnice. Ukazuji zde základní fyzikální vzorce, které popisují fyzikální jevy. Chtěla jsem zdůraznit, že kvadratická závislost je důležitá při popisu pohybu těles. Tyto závislosti jsou pro lepší pochopení uvedeny na příkladech z běžného života.

Ve fyzice se dále velice často využívají i počítače, pro sestrojení různých grafů funkcí. Proto jsem na závěr práce popsala některé PC-aplikace a webové aplikace, které jsou něčím přínosné a kterým bychom se měli raději vyhýbat.

Literatura a použité zdroje

[1] Bečvář, Jindřich. *Úvod do algebry.* 1. vydání. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1984.

[2] Bečvář, Jindřich. - Bečvářová, Martina. - Vymezalová, Hana. *Matematika ve starověku – Egypt a Mezopotámie*. Praha: Prometheus, spol s r. o., 2003. ISBN 80-7196-255-4.

[3] Calda, Emil. *Matematika pro gymnázia – Komplexní čísla.* 3. vydání. Praha: Prometheus, spol. s r. o., 2007. ISBN 978-80-7196-187-1.

[4] Folta, Jaroslav. - Nový, Luboš. *Dějiny přírodních věd v datech.* 1. vydání. Praha: Mladá fronta, 1979. ISBN 23-078-79.

[5] Janurová, Eva. - Janura, Miroslav. *Matematika na dlani.* 1. vydání. Olomouc: Rubico, 2002. ISBN 80-85839-73-3.

[6] Kubát, Josef. - Hrubý, Dag. - Pilgr, Josef. *Sbírka úloh z matematiky pro střední školy - Maturitní minimum.* 1. vydání. Praha: Prometheus, 1996. ISBN 80-7196-030-6.

[7] Liebl, Pert. *Rovnice a nerovnice – Pro I. Ročník tříd gymnázií se zaměřením na matematiku.* 3. vydání. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1989. ISBN 80-04-24145-X.

[8] Odvárko, Oldřich. *Matematika pro gymnázia – Funkce.* 3. upravené vydání. Praha: Prometheus, spol. s r. o., 2000. ISBN 80-7196-164-7.

[9] Odvárko, Oldřich. *Sbírka úloh z matematiky pro gymnázia – Funkce.* Dotisk 2. vydání. Praha: Prometheus, spol s r.o., 2008. ISBN 978-80-7196-305-9.

[10] Svoboda, Emanuel. Et al. *Přehled středoškolské fyziky.* Dotisk 4., upraveného vydání. Praha: Prometheus, spol. s r.o., 2008. ISBN 978-80-7196-307-3.

[11] FILIPES15. *Kvadratická funkce* [online]. [cit. 2011-12-14]. Články. Dostupné z WWW: <http://www.filipes15.estranky.cz/slanky/kvadraticka-funkce.html>.

[12] CHARVÁT, Jura; HOUF, Jaroslav; BOČEK, Leo. *Seminární práce z matematiky: Rovnice a nerovnice* [online]. 2009 [cit. 2011-06-23]. Historické poznatky. Dostupné z WWW: <http://absolventi.gymcheb.cz/2010/ivmask/historiep.html>.

[13] KOKEŠ, Jaroslav. *Instalace matematických trenažérů* [online]. 2001 [cit. 2011-04-16]. Programovací prostředí. Dostupné z WWW: <http://kokeja.unas.cz/insttren.htm>.

[14] VLACHOVÁ, Magda. *Techmania: Edutorium* [online]. 2008 [cit. 2011-06-23]. Diofantos z Alexandrie. Dostupné z WWW: <http://www.techmania.cz/edutorium/art_vedci.php?key=161>.

[15] *Matematické funkce: Funkce* [online]. 2008 [cit. 2011-06-23]. Julka. Dostupné z WWW: <http://matematickefunkce.ic.cz/index.htm>.

[16] *Quadratic Functions* [online]. 2007-11-27 [cit. 2011-04-16]. General Form. Dostupné z WWW: <http://www.analyzemath.com/quadraticg/quadraticg.htm>.

[17] *Vítám Vás na stránkách FYZIKY* [online]. 2008 [cit. 2011-04-16]. Aplety. Dostupné z: <http://www.vichr.qsh.cz/default.aspx?pg=741ec374-2332-4226-83c0-49f3f5f83e83>.

[18] *Výzkumný ústav pedagogický* [online]. 1996 [cit. 2011-04-16]. Vzdělávací program Základní škola. Dostupné z WWW: <http://old.vuppraha.cz/clanek/85>. ISBN 80–7168–595-X.

[19] *Wikipedie* [online]. 2009, 21.6.2011 [cit. 2011-06-23]. René Descartes. Dostupné z WWW: <http://cs.wikipedia.org/wiki/Ren%C3%A9_Descartes>.

Seznam příloh

Školské vzdělávací softwary

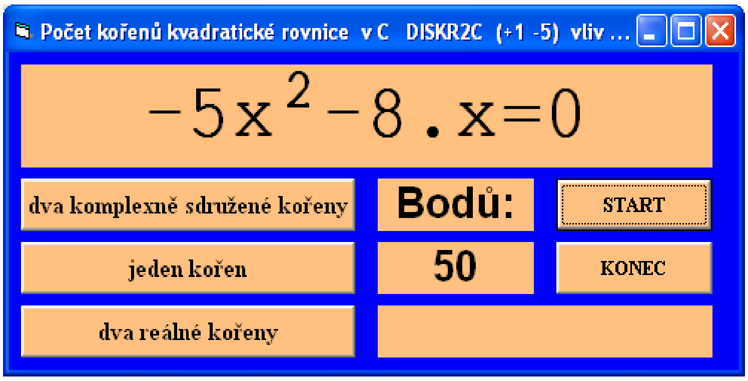
Příloha

Školské vzdělávací softwary

Prakticky každá škola má zakoupený nějaký výukový program. Nejedná se vždy o matematické softwary. S jedním takový softwarem se seznámíme nyní. Jedná se o výukové CD, které se používá na Gymnáziu Rumburk. Zdejší učitel Mgr, Jaroslav Kokeš sám pro žáky vytvořil výukové programy, které se zaměřují na procvičení probírané látky. Programy, které obsahuje CD se nainstalovalo na školní počítače a zde si žáci školy mohly procvičovat své nabyté vědomosti.

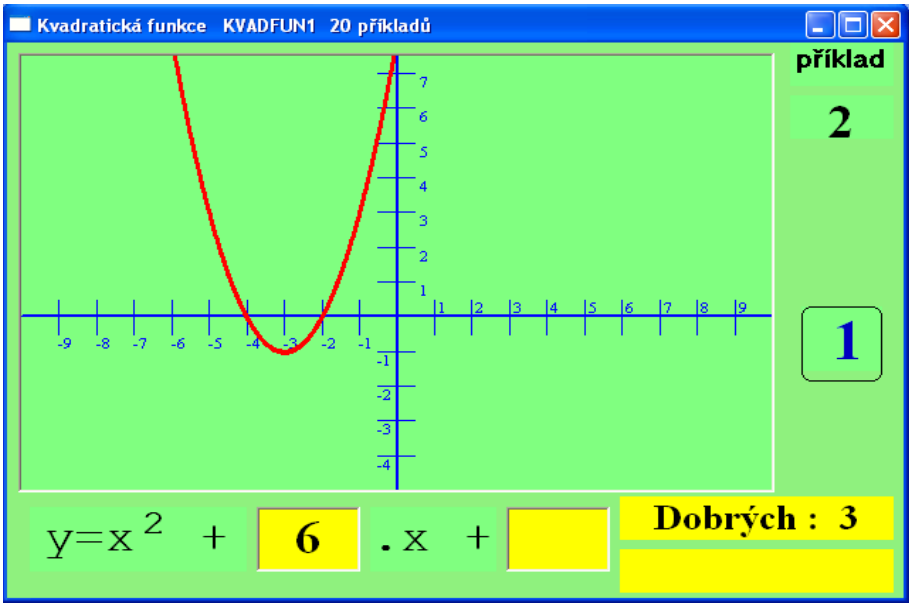
Z CD, které obsahuje programy na procvičení celého učiva matematiky na čtyřletém gymnáziu, se podíváme pouze programy, které obsahují cvičení týkající se kvadratických rovnic, nerovnic a funkcí. Program po jeho absolvování zhodnotí rychlost, správnost a vyhodnotí procvičení známkou. Program chce předem několikrát vyzkoušet, aby požadovaná známka byla nízká.

Uvedeme si zde několik obrázků, které se dotýkají našeho tématu.

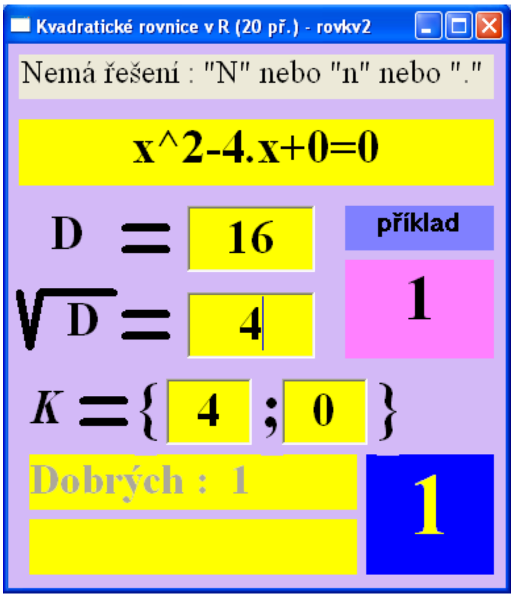


Obrázek 29: určení počtu kořenů, vlastní animace

Obrázek 30: určení koeficientů podle zadání, vlastní animace



Obrázek 31: určení koeficientů z grafu, vlastní animace



Obrázek 32: určení diskriminantu a kořenů, vlastní animace