



TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI

Studentská 2, 461 17 Liberec 1

Fakulta mechatroniky, informatiky a mezioborových studií

Ústav mechatroniky a technické informatiky

Disertační práce

Studium silového působení mezi permanentními magnety

Study of permanent magnets force interaction

Ing. Tomáš Mikolanda

Liberec 2009

TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI

Fakulta mechatroniky, informatiky a mezioborových studií

Studium silového působení mezi permanentními magnety

Study of permanent magnets force interaction

Ing. Tomáš Mikolanda

Studijní program: P 2612 Elektrotechnika a informatika

Studijní obor: 2612V045 Technická kybernetika

Pracoviště: Ústav mechatroniky a technické informatiky
Oddělení elektroniky a elektrotechniky
Fakulta mechatroniky, informatiky a mezioborových studií
Technická univerzita v Liberci
Studentská 2, 461 17, Liberec

Školitel: Prof. Ing. Aleš Richter, CSc.

Citát:

Gutta cavat lapidem non vi sed saepe cadendo // sic homo fit doctus non vi sed saepe studendo.

Kapka hloubí kámen nikoliv silou, ale častým padáním, podobně se člověk stává učeným, ne mocí, ale až po dlouhé době studia.

Tato práce byla vytvořena s podporou projektů Ministerstva průmyslu a obchodu (MPO), Projekt FT-TA3/017 – Výzkum a vývoj mechatronických prvků a systémů pro spřádací stroje a projektu Grantové agentury České republiky, Projekt GAČR 102/08/H081 – Ne-standardní aplikace fyzikálních polí – analogie, modelování, ověřování a simulace.

Poděkování: Na tomto místě bych rád poděkoval vedoucímu dizertační práce panu prof. Ing. Aleši Richterovi, CSc. za odborné vedení a podporu během řešení této práce a po dobu mého studia. Nebýt přísného vyžadování dohodnutých termínů nikdy by tato práce nevznikla. Na druhém místě musím poděkovat panu prof. RNDr. Ing. Miloslavu Koškovi, CSc. za odborné vedení a dohled nad vznikem této práce. Velmi si vážím cenných rad, které mi poskytl a času, jenž věnoval na přečtení a připomínkování této práce. Nelze opomenout ani Ing. Miroslava Nováka Ph.D. a Ing. Jana Václavíka, jimž děkuji za inspirace v praktických měřeních a pomoc s jejich uskutečněním. Rovněž bych rád poděkoval celému kolektivu ze sekce Elektro Ústavu mechatroniky a technické informatiky za to, že svým působením vytvářejí ideální podmínky pro práci, kulturu, ale i zábavu při řešení každodenních úkolů. Rodičům a mým blízkým děkuji za pochopení a trpělivost, kterou se mnou museli v posledních měsících chtě-nechtě mít. Mé poslední slovo patří Ivetce. Ivetko, děkuji, že jsi!

Prohlášení

Byl jsem seznámen s tím, že na mou disertační práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 o právu autorském §60 (školní dílo).

Beru na vědomí, že TUL má právo na uzavření licenční smlouvy o užití mé DP a prohlašuji, že souhlasím s případným užitím mé disertační práce (prodej, zapůjčení, apod.).

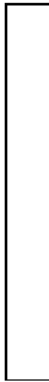
Jsem si vědom toho, že užít své disertační práce či poskytnout licenci k jejímu využití mohu jen se souhlasem TUL, která má právo ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, vynaložených univerzitou na vytvoření díla (až do jejich skutečné výše).

Disertační práci jsem vypracoval samostatně s použitím uvedené literatury a na základě konzultací s vedoucím disertační práce.

V Liberci dne 28. října 2009

Podpis

.....



Anotace / Annotation

CZE

Pro výpočet vzájemného silového působení byl použit model vázaných proudů, který nahrazuje magnetizaci. V experimentální části byla realizována aparatura pro automatizované měření trojrozměrného magnetického pole. Citlivostní analýza, rozbor nejistot a vlastní experiment prokázaly vysokou relativní přesnost měření, kolem 1 %. Mezi praktické výsledky patří ověření dosti vysoké nehomogenity (až 10 %) u jednotlivých vzorků. Při rozšíření modelu o opravu na vázané objemové proudy bylo dosaženo dobré shody modelu s experimentem. Výsledky jsou využitelné v praxi pro modelování odpuzivé síly mezi magnety. Byl zjištěn dobrý souhlas mezi naším modelem a experimentálním průběhem síly. Teoreticky byl ověřen senzor pro měření polohy pohyblivého magnetu a sestaven dynamický model.

Klíčová slova: permanentní, magnet, magnetizace, vázané proudy, numerický, model, magnetické, pole, síla, moment, silové, působení, indukce, demagnetizace

EN

Coupled currents model, which substitutes magnetization was chosen from one of the three possible models for calculation of permanent magnets force interaction. An apparatus for automated measurement of three dimensional magnetic fields was realized in experimental part. Sensitivity and uncertainty analysis and experiment itself approved relatively high measurement accuracy of about 1 %. Quite high nonhomogeneity up to 10 % was verified at individual samples. Volume coupled currents model extension has brought good agreement of model and experiment. Results are useful in engineering practise for modelling of repulsion force between permanent magnets. Good agreement was evaluated between our model and experimental force process. Sensor for measurement of position of moveable magnet was verified in a theoretical way and dynamical model was built as well.

Keywords: permanent, magnet, magnetization, coupled currents, numerical, model, magnetic, field, force, momentum, interaction, induction, demagnetization

Obsah

Anotace / Annotation	ix
Obsah	1
Seznam obrázků	3
Seznam tabulek	9
Seznam symbolů	11
A Úvod	13
B Teorie	17
B.1 Základní rovnice stacionárního magnetického pole	17
B.2 Rovnice pro kvazistacionární magnetické pole	20
B.3 Maxwellovy rovnice v integrálním tvaru	21
B.4 Biot-Savartův zákon	22
B.5 Magnetický dipól	24
B.6 Vázané proudy	25
B.7 Magnetické náboje	27
B.8 Vektorový potenciál	29
B.9 Výběr a porovnání metod řešení	30
B.10 Síly v magnetickém poli	31
C Experiment	37
C.1 Měřicí aparatura	37
C.1.1 Historie	37
C.1.2 Mechanická část	39
C.1.3 Elektrická část	47
C.1.4 Programové vybavení	50
C.1.5 Řízení aparatury a měření magnetických polí	52
C.2 Nejistota měření	54
C.2.1 Nejistota v určení souřadnic	55
C.2.2 Vliv rušení	56
C.2.3 Nejistota měření způsobená vlivem zapojení Hallových sond	70
C.2.4 Nejistota měření způsobená nejistotou převodníku	74
C.2.5 Celková nejistota měření	76

C.3	Kalibrace Hallovovy sondy	77
C.3.1	Model Helmholtzovy cívky	77
C.3.2	Citlivostní analýza	77
D	Modely a výpočty	85
D.1	Modely	85
D.2	Výpočty	87
D.3	Vizualizace výsledků	96
E	Praktické výsledky	105
E.1	Opakovatelnost měření	105
E.2	Homogenita a reprodukovatelnost vzorků	107
E.3	Porovnání s experimentem	114
F	Teoretické výsledky	119
F.1	Odpudivá síla mezi magnety	119
F.1.1	Teorie	119
F.1.2	Experiment	120
F.1.3	Modely a výpočet	121
F.1.4	Výsledky	123
F.1.5	Diskuse a závěr	127
F.2	Snímání vzdálenosti mezi magnety	130
F.3	Dynamický model	138
F.4	Studium demagnetizace permanentních magnetů	142
F.4.1	Analýza úlohy	144
F.4.2	Teorie	144
F.4.3	Výsledky	146
F.4.4	Diskuse a závěr	152
G	Diskuse	153
H	Závěr a zhodnocení	157
	Literatura	159
	Vlastní publikace	163
	Zaznamenané citace	167
	Přílohy	169
P.1	Maxwellovy rovnice	171
P.2	Elektronická schemata	173
P.3	Technické výkresy	177
P.4	Nejistota Hallovovy sondy, vztahy	191

Seznam obrázků

B.1.1	Plošná rotace na rozhraní dvou prostředí.	18
B.1.2	Plošná divergence na rozhraní dvou prostředí.	19
B.3.1	Ampérův zákon, statické vysvětlení.	21
B.3.2	Tok magnetické indukce.	22
B.6.1	Vektory magnetizace a hustota plošného vázaného proudu.	25
B.10.1	Modelová situace pro odvození mechanického momentu proudové smyčky, [4].	33
B.10.2	Zdroje magnetického pole	34
C.1.1	Blokové schéma realizované měřicí aparatury.	39
C.1.2	3D model lineárního posuvu FESTO.	40
C.1.3	Fotografie pracoviště pro měření magnetického pole permanentních mag- netů. HS – Hallova sonda; PM – Permanentní magnet - měřený vzorek; ADC – Měřicí zařízení - analogově-digitální převodník; KM – Krokové motory; PS – Polohovací stůl - lineární posuvy FESTO; RNS – Řídicí a napájecí jednotka (připojena po sériové sběrnici k PC).	42
C.1.4	Detailní fotografie polohovacího stolu. LP – Lineární posuvy FESTO; SKP – Senzory krajních poloh; KM – Krokové motory; AS – Adaptační sada pro spojení dvou lineárních posuvů.	43
C.1.5	Detailní fotografie spojení krokového motoru s lineárním posuvem pomocí pružné spojky. KM – Krokový motor; LP – Lineární posuv FESTO; PS – Pružná spojka.	43
C.1.6	3D model realizované měřicí hlavičky pro uchycení 3D Hallovy sondy ELI- DIS v.č. 3D020 k lineárnímu posuvu FESTO.	45
C.1.7	Detailní fotografie uchycení Hallovy sondy v plastové hlavičce. HS – Hallova sonda; PM – Permanentní magnet - měřený vzorek; MP – Měřicí přípravek pro uchycení vzorků; IR – Informační rastr; LP – Lineární posuv FESTO; MH – Plastová měřicí hlavička.	46
C.1.8	Fotografie elektroinstalace a rozmístění jednotlivých součástí separátní elektrické jednotky aparatury. V – Ventilátor; SZ – Spínané napájecí zdroje; LZ – Lineární napájecí zdroje; RJ – Hlavní řídicí jednotka; RJKM – Řídicí jednotky krokových motorů.	47
C.1.9	Blokové schéma rozvodu napájecího napětí pro jednotlivé funkční bloky zařízení. RJ – Hlavní řídicí jednotka; RJKM – Řídicí jednotky krokových motorů.	48
C.1.10	Zjednodušené blokové schéma hlavní řídicí jednotky.	50

C.1.11	Zjednodušený vývojový diagram funkce řídicí jednotky měřicí aparatury. .	51
C.1.12	Zjednodušený vývojový diagram funkce programu pro měření magnetických polí implementovaného v prostředí MATLAB.	53
C.2.1	Výřez výsledků jednoho měření bílého šumu na Hallově sondě pro z-ovou složku magnetické indukce.	57
C.2.2	Histogram četností naměřených amplitud a předpokládaná hustota pravděpodobnosti normálního rozdělení.	58
C.2.3	Amplitudové spektrum změřeného náhodného signálu.	59
C.2.4	Výsledky měření rušení na Hallově sondě pro z-ovou složku magnetické indukce.	60
C.2.5	Amplitudové spektrum změřeného průběhu magnetické indukce.	61
C.2.6	Amplitudové spektrum pro změřený časový průběh magnetické indukce – detail pro nízké frekvence.	62
C.2.7	Relativní nejistota průměrování pro povolený rozsah frekvencí a pro několik harmonických složek rušivého signálu.	64
C.2.8	Minimální relativní nejistota průměrování pro povolený rozsah frekvencí. .	65
C.2.9	Relativní nejistota průměrování pro povolený rozsah frekvencí pro fázovou konstantu $\varphi = 45^\circ$	65
C.2.10	Závislost potlačení střídavého signálu na počtu průměrovaných period pro nulovou fázovou konstantu.	66
C.2.11	Závislost potlačení střídavého signálu na počtu průměrovaných period pro fázovou konstantu $\varphi = 45^\circ$	67
C.2.12	Závislost potlačení střídavého signálu na počtu průměrovaných period a fázové konstantě. Na vodorovné ose jsou vyneseny násobky jmenovité hodnoty periody síťového napětí, na svislé ose pak velikost potlačení střídavého signálu v závislosti na počtu průměrovaných period. Jednotlivé charakteristiky odpovídají signálu s různou fázovou konstantou, viz legenda grafu. .	68
C.2.13	Závislost potlačení střídavého signálu na fázové konstantě pro $N = 32$. Na vodorovné ose je vynesena fázová konstanta v intervalu $< 0^\circ; 180^\circ >$, na svislé ose pak velikost potlačení střídavého signálu.	68
C.2.14	Závislost potlačení střídavého signálu na počtu period.	69
C.2.15	Závislost velikosti absolutní nejistoty Hallové sondy U_{adc} podle zapojení na obr. P.2.1 na velikosti teplotního rozdílu ΔT za předpokladu $\Delta V_{in} = 0$ V. .	73
C.2.16	Závislost velikosti absolutní nejistoty Hallové sondy U_{adc} podle zapojení na obr. P.2.1 na velikosti změny napájecího napětí ΔV_{in} za předpokladu $\Delta T = 0$ K.	73
C.2.17	Závislost výstupního napětí Hallových sond na magnetické indukci po aplikaci kalibračních koeficientů.	74
C.3.1	Závislost z-ové složky magnetické indukce ve středovém řezu Helmholtzovou cívkou na změně velikosti protékajícího proudu.	79
C.3.2	Detail závislosti z-ové složky magnetické indukce ve středovém řezu Helmholtzovou cívkou na změně velikosti protékajícího proudu.	79
C.3.3	Závislost relativní chyby z-ové složky magnetické indukce ve středovém řezu Helmholtzovou cívkou na změně velikosti protékajícího proudu. . . .	80
C.3.4	Závislost z-ové složky magnetické indukce ve středovém řezu Helmholtzovou cívkou na změně průměru cívky.	80
C.3.5	Detail závislosti z-ové složky magnetické indukce ve středovém řezu Helmholtzovou cívkou na změně průměru cívky.	81
C.3.6	Závislost relativní chyby z-ové složky magnetické indukce ve středovém řezu Helmholtzovou cívkou na změně průměru cívky.	81

C.3.7	Závislost z-ové složky magnetické indukce ve středovém řezu Helmholtzovou cívkou na změně průměru drátu.	82
C.3.8	Detail závislosti z-ové složky magnetické indukce ve středovém řezu Helmholtzovou cívkou na změně průměru drátu.	82
C.3.9	Závislost relativní chyby z-ové složky magnetické indukce ve středovém řezu Helmholtzovou cívkou na změně průměru drátu.	83
C.3.10	Závislost z-ové složky magnetické indukce ve středovém řezu Helmholtzovou cívkou na změně počtu závitů.	83
C.3.11	Detail závislosti z-ové složky magnetické indukce ve středovém řezu Helmholtzovou cívkou na změně počtu závitů.	84
C.3.12	Závislost relativní chyby z-ové složky magnetické indukce ve středovém řezu Helmholtzovou cívkou na změně počtu závitů cívk.	84
D.1.1	Tvar permanentních magnetů, směr a smysl magnetizace a zvolený kartézský souřadný systém.	85
D.1.2	Model vázaných povrchových proudů.	86
D.1.3	Model vázaných povrchových a objemových proudů.	86
D.1.4	Porovnání modelu vázaných proudů a vázaných magnetických nábojů. . .	87
D.2.1	Definice materiálových souřadnic a určení složek povrchového vázaného proudu.	88
D.2.2	Definice oblasti nezávisle proměnné pro výpočet magnetického pole. . . .	89
D.2.3	Vliv počtu integračních vrstev na x-ovou složku magnetické indukce pro maximální počet oblouků (450).	89
D.2.4	Vliv počtu integračních vrstev na z-ovou složku magnetické indukce pro maximální počet oblouků (450).	90
D.2.5	Detail vlivu počtu integračních vrstev na x-ovou složku magnetické indukce pro maximální počet oblouků (450).	90
D.2.6	Detail vlivu počtu integračních vrstev na z-ovou složku magnetické indukce pro maximální počet oblouků (450).	91
D.2.7	Vliv počtu úhlových oblouků jako parametru na x-ovou složku magnetické indukce.	91
D.2.8	Vliv počtu úhlových oblouků jako parametru na z-ovou složku magnetické indukce.	92
D.2.9	Detail vlivu počtu úhlových oblouků jako parametru na x-ovou složku magnetické indukce.	92
D.2.10	Detail vlivu počtu úhlových oblouků jako parametru na z-ovou složku magnetické indukce.	93
D.2.11	Numerická integrace podle oblouků pro „standardní“ a „singulární“ bod. .	93
D.2.12	Vysvětlení vlivu počtu vrstev na výslednou hodnotu magnetické indukce. .	94
D.2.13	Průběh x-ové složky magnetické indukce při zohlednění vlivu integrace sondou pro tři délky sondy jako parametru.	95
D.2.14	Průběh z-ové složky magnetické indukce při zohlednění vlivu integrace sondou pro tři délky sondy jako parametru.	95
D.2.15	Průběh x-ové složky magnetické indukce v situaci, kdy je aktivní plocha sondy ve vzdálenosti 1 mm nad povrchem vzorku.	96
D.2.16	Průběh z-ové složky magnetické indukce v situaci, kdy je aktivní plocha sondy ve vzdálenosti 1 mm nad povrchem vzorku.	97
D.3.1	Magnetické pole v rovině procházející vřecovou osou pro různé vzdálenosti od povrchu magnetu.	97

D.3.2	Úsečky rovnoběžné s povrchem magnetu, pro které se počítá magnetické pole.	98
D.3.3	Úsečky rovnoběžné s osou magnetu, pro které se počítá magnetické pole. .	99
D.3.4	Magnetické pole v rovině procházející válcovou osou pro různé vzdálenosti od této osy.	99
D.3.5	Vektory magnetické indukce v blízkosti vnitřní stěny.	100
D.3.6	Vektory magnetické indukce v blízkosti vnitřní stěny pro méně vhodnou mříž.	100
D.3.7	Vektory magnetické indukce v blízkosti vnitřní stěny, kdy byla mříž zvolena nevhodně.	101
D.3.8	Indukční čáry.	101
D.3.9	Indukční čáry – dlouhá úsečka.	102
D.3.10	Indukční čáry – vhodnější délka úsečky.	102
D.3.11	Indukční čáry – téměř optimální úsečka.	103
E.1.1	Měření reprodukovatelnosti x-ové složky magnetické indukce pro střední řez č.70.	106
E.1.2	Měření opakovatelnosti z-ové složky magnetické indukce pro střední řez č.70.	106
E.1.3	Opakovatelnost měření y-ové složky magnetické indukce pro střední řez č.70.	107
E.1.4	Spočtené odchylky z opakovaných měření pro z-ovou složku magnetické indukce na středním řezu č.70.	108
E.1.5	Spočtené odchylky z opakovaných měření pro x-ovou složku magnetické indukce na středním řezu č.70.	108
E.1.6	Spočtené odchylky z opakovaných měření pro y-ovou složku magnetické indukce na středním řezu č.70.	109
E.2.1	Vyšetření homogenity vzorků, měřicí mřížka a zvolené řezy.	110
E.2.2	Vyšetření homogenity vzorků, měřicí mřížka a zvolená soustředná kružnice.	110
E.2.3	Nehomogenita zvoleného vzorku na základě 12-ti opakovaných měření. . .	111
E.2.4	Vyšetření symetrie magnetického pole pro dopředný a zpětný směr v řezu $\varphi = 30^\circ$	111
E.2.5	Magnetická indukce na zvolené soustředné kružnici pro vybrané vzorky. .	112
E.2.6	Relativní hodnoty výrobních chyb na zvolené soustředné kružnici pro vybrané vzorky.	112
E.2.7	Absolutní hodnoty výrobních chyb na zvolené soustředné kružnici pro vybrané vzorky.	113
E.3.1	Možné odchylky v pohybu měřicí sondy.	114
E.3.2	Porovnání numerického modelu se zahrnutými odchylkami pohybu měřicí sondy s experimentem pro y-ovou složku magnetické indukce B_y	115
E.3.3	Porovnání numerického modelu se zahrnutými odchylkami pohybu měřicí sondy s experimentem pro x-ovou složku magnetické indukce B_x	115
E.3.4	Porovnání modelu povrchových vázaných proudů a experimentu pro z-ovou složku magnetické indukce B_z	116
E.3.5	Nejjednodušší korekce modelu pomocí vázaných objemových proudů. . . .	116
E.3.6	Porovnání modelu s oběma typy vázaných proudů s experimentem pro x-ovou složku magnetické indukce B_x	117
E.3.7	Porovnání modelu s oběma typy vázaných proudů s experimentem pro y-ovou složku magnetické indukce B_y	117
E.3.8	Porovnání modelu s oběma typy vázaných proudů s experimentem pro z-ovou složku magnetické indukce B_z	118
F.1.1	Aproximace všech vyhlazených dat polynomem se zápornými mocninami.	121

F.1.2	Koeficienty aproximujícího polynomu.	121
F.1.3	Vybrané experimentální vzorky a jejich aproximace.	122
F.1.4	Geometrie modelu silového působení.	122
F.1.5	Dvě jednoduché metody pro výpočet silového působení magnetů.	123
F.1.6	Vypočetní náročnost metody silové hustoty.	124
F.1.7	Vypočtený průběh radiální síly oběma metodami.	124
F.1.8	Vypočtený průběh axiální síly oběma metodami v logaritmických souřadnicích.	125
F.1.9	Vypočtený průběh momentu oběma metodami.	125
F.1.10	Porovnání teorie s experimentálními body pro metodu liniových proudů.	126
F.1.11	Porovnání teorie s aproximující experimentální křivkou pro metodu liniových proudů.	126
F.1.12	Relativní odchylky pro metodu liniových proudů.	127
F.1.13	Porovnání teorie s experimentálními body pro metodu silové hustoty.	128
F.1.14	Porovnání teorie s aproximující experimentální křivkou pro metodu silové hustoty.	128
F.1.15	Relativní odchylky pro obě metody.	129
F.1.16	Parazitní silové působení na volný magnet.	129
F.1.17	Vypočtené parazitní a gravitační momenty.	130
F.1.18	Parazitní a gravitační momenty působící na volný magnet na vodorovné tyči.	130
F.2.1	Průběh z-ové složky magnetické indukce podél axiální osy – porovnání s experimentem.	131
F.2.2	Uvažované geometrické uspořádání.	132
F.2.3	Závislost x-ové složky magnetické indukce na poloze pohyblivého magnetu pro několik poloh sondy.	132
F.2.4	Závislost z-ové složky magnetické indukce na poloze pohyblivého magnetu pro několik poloh sondy.	133
F.2.5	Závislost obou složek magnetické indukce na vzdálenosti mezi magnety pro sondu blízko pevného magnetu.	134
F.2.6	Závislost obou složek magnetické indukce na vzdálenosti mezi magnety pro sondu ve střední poloze od pevného magnetu.	134
F.2.7	Závislost obou složek magnetické indukce na vzdálenosti mezi magnety pro sondu v nejvzdálenější poloze od pevného magnetu.	135
F.2.8	Závislost rozdílu složek a složky B_z na vzdálenosti mezi magnety pro sondu blízko pevného magnetu.	136
F.2.9	Závislost rozdílu složek a složky B_z na vzdálenosti mezi magnety pro sondu ve střední poloze od pevného magnetu.	136
F.2.10	Závislost rozdílu složek a složky B_z na vzdálenosti mezi magnety pro sondu v nejvzdálenější poloze od pevného magnetu.	137
F.2.11	Citlivost pro sondu umístěnou blízko pevného magnetu.	137
F.2.12	Citlivost pro sondu umístěnou ve střední poloze vzhledem k pevnému magnetu.	138
F.2.13	Citlivost pro sondu hodně vzdálenou od pevného magnetu.	138
F.3.1	Návrh dynamického experimentu. a) Řez podél axiální osy, b) řez kolmo k axiální ose. (VT – vodící tyč, m – hmotnost, PM – pohyblivý magnet, SM – statický magnet, T – těžiště).	139
F.3.2	Časový průběh svislého pohybu.	141
F.3.3	Průběh svislého pohybu v počáteční fázi.	142
F.3.4	Časový průběh vodorovného pohybu.	143

F.3.5	Průběh vodorovného pohybu v počáteční fázi.	143
F.4.1	Tenká cívka, geometrie a náčrt pro výpočet magnetické indukce.	144
F.4.2	Složka B_z magnetické indukce ve směru kolmém k ose cívky.	147
F.4.3	Složka B_x magnetické indukce ve směru kolmém k ose cívky.	147
F.4.4	Složka B_z magnetické indukce ve směru na ose cívky.	148
F.4.5	Návrh cívky – maximální magnetická indukce.	148
F.4.6	Návrh cívky – magnetická indukce ve směru na ose cívky.	149
F.4.7	Průběh teploty cívky při cyklickém zapínání proudu.	150
F.4.8	Návrh cívky – magnetická indukce ve směru na ose cívky.	151
F.4.9	Průběh proudového pulsu v cívce.	151
P.2.1	Elektrické schéma zapojení 3D Hallovy sondy ELIDIS.	174
P.2.2	Elektrické schéma hlavní řídicí jednotky, viz [39].	175
P.2.3	Elektrické schéma zapojení optických senzorů krajních poloh.	176
P.3.1	Technický výkres základové desky přípravku pro uchycení měřeného vzorku.	178
P.3.2	Technický výkres tyče stojanu přípravku pro uchycení měřeného vzorku.	179
P.3.3	Technický výkres výplně vzorku pro uchycení v měřicím přípravku.	180
P.3.4	Plastová hlavice pro uchycení Hallovy sondy - sestava technických výkresů.	181
P.3.5	Technický výkres součásti #1 plastové hlavice, viz sestava na obr. P.3.4.	182
P.3.6	Technický výkres součásti #2 plastové hlavice, viz sestava na obr. P.3.4.	183
P.3.7	Technický výkres součásti #3 plastové hlavice, viz sestava na obr. P.3.4.	184
P.3.8	Technický výkres součásti #4 plastové hlavice, viz sestava na obr. P.3.4.	185
P.3.9	Technický výkres součásti #5 plastové hlavice, viz sestava na obr. P.3.4.	186
P.3.10	Technický výkres součásti #6 plastové hlavice, viz sestava na obr. P.3.4.	187
P.3.11	Technický výkres součásti #7 plastové hlavice, viz sestava na obr. P.3.4.	188
P.3.12	Technický výkres součásti #8 plastové hlavice, viz sestava na obr. P.3.4.	189
P.3.13	Technický výkres součásti #HCB, kostry pro navinutí kalibrační Helmholtzovy cívky.	190

Seznam tabulek

B.9.1	Porovnání metod řešení.	31
C.1.1	Přesné typové označení použitých lineárních posuvů a jejich základní parametry. Popis významu jednotlivých konfiguračních parametrů lze nalézt v technickém listu výrobce, viz např. [42].	40
C.1.2	Materiálové složení jednotlivých součástí lineárních posuvů, podle specifikace výrobce, viz [42].	41
C.1.3	Technické specifikace lineárních posuvů, viz [41].	41
C.1.4	Základní mechanické a elektrické vlastnosti vybraného krokového motoru Pacific Scientific POWERMAX II P22NRXB.	44
C.1.5	Technické parametry použité pružné spojky HUCO Oldham 25.	44
C.2.1	Tabulka nejistot jednotlivých částí aparatury, které mají vliv na celkovou nejistotu polohy a jejich původ.	56
C.2.2	Tolerance střední hodnoty kmitočtu síťového napětí dle ČSN EN 50160 pro systémy se synchronním připojením k propojenému systému.	63
C.2.3	Závislost potlačení střídavého signálu na počtu period.	69
C.2.4	Závislost doby měření na žádané velikosti útlumu.	70
C.2.5	Kalibrační konstanty trojrozměrné Hallovy sondy ELIDIS.	74
C.2.6	Výtah z tabulky absolutních přesností pro zvolený měřicí rozsah ± 5 V, viz [47].	76
E.1.1	Relativní odchylky opakovaných měření	107
F.2.1	Závislost jednotlivých veličin na poloze sondy.	135
F.3.1	Základní parametry simulací.	141
F.4.1	Základní parametry pro řešenou úlohu oteplování demagnetizační cívky. .	149
F.4.2	Materiálové parametry pro řešenou úlohu oteplování demagnetizační cívky.	150

Seznam symbolů

1. Veličiny elektrické

<i>symbol</i>	<i>popis veličiny</i>	<i>jednotka</i>	<i>jednotka v SI</i>
Q	náboj	C	s A
i, I	proud	A	A
R	elektrický odpor	Ω	$\text{m}^2 \text{kg s}^{-3} \text{A}^{-2}$
G	elektrická vodivost	S	$\text{m}^{-2} \text{kg}^{-1} \text{s}^3 \text{A}^2$
γ	měrná vodivost	S m^{-1}	$\text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^3 \text{A}^2$
$\mathbf{i}$	objemová hustota proudu	A m^{-3}	$\text{m}^{-3} \text{A}$
$\mathbf{j}$	plošná hustota proudu	A m^{-2}	$\text{m}^{-2} \text{A}$
ϱ	objemová hustota náboje	C m^{-3}	$\text{m}^{-3} \text{s A}$
$\mathbf{J}$	měrná hustota prostorového proudu	A m^{-2}	$\text{m}^{-2} \text{A}$
σ	plošná hustota náboje	C m^{-2}	$\text{m}^{-2} \text{s A}$
$\mathbf{K}$	lineární hustota plošného proudu	A m^{-1}	$\text{m}^{-1} \text{A}$
τ	liniová hustota náboje	C m^{-1}	$\text{m}^{-1} \text{s A}$
$\mathbf{E}$	intenzita elektrického pole	V m^{-1}	$\text{m kg s}^{-3} \text{A}^{-1}$
χ	tok intenzity elektrického pole	Vm	$\text{m}^3 \text{kg s}^{-3} \text{A}^{-1}$
φ	skalární potenciál elektrického pole	V	$\text{m}^2 \text{kg s}^{-3} \text{A}^{-1}$
u, U	napětí, rozdíl skalárních potenciálů	V	$\text{m}^2 \text{kg s}^{-3} \text{A}^{-1}$
C	kapacita	F	$\text{m}^{-2} \text{kg}^{-1} \text{s}^4 \text{A}^2$
$\mathbf{p}$	elektrický dipólový moment	Cm	m s A
$\mathbf{P}$	polarizace	C m^{-2}	$\text{m}^{-2} \text{s A}$
$\mathbf{D}$	elektrická indukce	C m^{-2}	$\text{m}^{-2} \text{s A}$
Ψ	indukční elektrický tok	C	s A
ε	permitivita, dielektrická konstanta	F m^{-1}	$\text{m}^{-3} \text{kg}^{-1} \text{s}^3 \text{A}^2$
ε_0	permitivita vakua, dielektrická konstanta	F m^{-1}	$\text{m}^{-3} \text{kg}^{-1} \text{s}^3 \text{A}^2$
ε_r	relativní permitivita, dielektrická konstanta	—	—
κ	elektrická susceptibilita	F m	$\text{m}^{-3} \text{kg}^{-1} \text{s}^3 \text{A}^2$

2. Veličiny magnetické

<i>symbol</i>	<i>popis veličiny</i>	<i>jednotka</i>	<i>jednotka v SI</i>
B	magnetická indukce	T	$\text{kg s}^{-2} \text{A}^{-1}$
Φ	magnetický indukční tok	Wb	$\text{m}^{-2} \text{kg s}^{-2} \text{A}^{-1}$
A	vektorový potenciál	Wb m^{-1}	$\text{m kg s}^{-2} \text{A}^{-1}$
m	magnetický dipólový moment	A m^2	$\text{m}^2 \text{A}$
M	magnetizace	A m^{-1}	$\text{m}^{-1} \text{A}$
H	intenzita magnetického pole	A m^{-1}	$\text{m}^{-1} \text{A}$
i_m	objemový vázaný proud	A m^{-3}	$\text{m}^{-3} \text{A}$
j_m	plošný vázaný proud	A m^{-2}	$\text{m}^{-2} \text{A}$
μ	permeabilita	H m^{-1}	$\text{m kg s}^{-2} \text{A}^{-2}$
μ_0	permeabilita vakua	H m^{-1}	$\text{m kg s}^{-2} \text{A}^{-2}$
μ_r	relativní permeabilita	—	—
χ_m	magnetická susceptibilita	—	—
ϕ_m	magnetický skalární potenciál	A	A
R_m	magnetický odpor (reluktance)	H^{-1}	$\text{m}^{-2} \text{kg}^{-1} \text{s}^2 \text{A}^2$
Λ	magnetická vodivost (permeance)	H	$\text{m}^2 \text{kg s}^{-2} \text{A}^{-2}$
L	vlastní indukčnost	H	$\text{m}^2 \text{kg s}^{-2} \text{A}^{-2}$
M	vzájemná indukčnost	H	$\text{m}^2 \text{kg s}^{-2} \text{A}^{-2}$

3. Veličiny ostatní

<i>symbol</i>	<i>popis veličiny</i>	<i>jednotka</i>	<i>jednotka v SI</i>
f	frekvence	Hz	s^{-1}
ω	úhlová frekvence	rad s^{-1}	s^{-1}
N	Poyntingův vektor	W m^{-2}	kg s^{-3}
P	výkon	W	$\text{m}^2 \text{kg s}^{-3}$
W_e, W_m	energie elektrického a magnetického pole	J	$\text{m}^2 \text{kg s}^{-2}$
w_e, w_m	hustota energie elektrického a magnetického pole	J m^{-3}	$\text{m}^{-1} \text{kg s}^{-2}$
f	hustota síly	N m^{-3}	$\text{m}^{-2} \text{kg s}^{-2}$
dF_c	elementární síla působící na element liniového proudu	N	m kg s^{-2}
dF_s	elementární síla působící na element plošného proudu	N	m kg s^{-2}
dF_v	elementární síla působící na element objemového proudu	N	m kg s^{-2}
dF_{sm}	elementární síla působící na element plošného vázaného proudu	N	m kg s^{-2}
dF_{vm}	elementární síla působící na element objemového vázaného proudu	N	m kg s^{-2}
M_f	vektor mechanického momentu síly	N m	$\text{m}^2 \text{kg s}^{-2}$
γ	úhel pootočení	rad	rad

Úvod

Nápad využít odpudivou a přitažlivou sílu permanentních magnetů v mechanických soustavách spadá do začátků elektrotechniky. Jedny z prvních publikovaných výsledků aplikací permanentních magnetů lze najít např. v databázi IEEE již z konce 19. století, viz např. [1] a [2]. Ve většině elektrotechnických aplikací se však permanentní magnety používají v kombinacích s elektromagnety s měkkými jádry nebo permanentní magnet sám tvoří jádro elektromagnetu. Se samostatným použitím tvrdých permanentních feromagnetických materiálů bez dalšího elektrického buzení v mechanických konstrukcích se setkáváme spíše vyjímecně. Je to dáno především tím, že permanentní magnety neměly potřebnou přitažlivou nebo odpudivou sílu v poměru ke své velikosti. Vývoj a výroba nových materiálů ze vzácných zemin pro permanentní magnety otevírá nové možnosti uplatnění těchto prvků v pasivních mechanických uzlech.

Disertační práce se především zabývá možnostmi, jak využít pasivních magnetických prvků pro akumulaci kinetické energie v mechatronických systémech. Je zaměřena na aplikaci nových materiálů ze vzácných zemin. Ve své si autor dal za cíl připravit teoretický základ podpořený experimenty, který by otvíral cestu k uplatnění moderních permanentních magnetických prvků v nových konstrukcích mechatronických uzlů a systémů.

U permanentních magnetů předpokládáme konstantní vnější magnetické pole, z toho vyplývá, že jejich praktické uplatnění je omezené narozdíl od elektromagnetů, kde vnější pole je říditelné. Silové působení permanentních magnetů na okolí jsme schopni ovlivňovat pouze vzdáleností a konstrukčním uspořádáním, tj. geometrickými rozměry, tvarem a magnetizací. Na druhé straně je však velkou výhodou, že silové působení těchto prvků nevyžaduje žádné buzení a je energeticky nenáročné. To samé platí i v případě použití přídavných posuvných nebo polohovacích jednotek, které se nabízejí jako možnost částečné regulace odpudivé a přitažlivé síly. Určitým omezením je to, že vnější silové pole má poměrně velký rozptyl, a proto nebude možné permanentní magnety použít v aplikacích, ve kterých jsou vysoké nároky na přesně definovanou sílu nebo polohu.

V mnoha konstrukcích strojů se setkáváme s lineárními vratnými pohyby. Například v textilním strojírenství jsou tyto pohyby základem několika technologií. Používají se také při rozvádění příze navíjené na různé typy cívek. Tkalcovská technika se rovněž neobejde bez několika vratných pohybů, jako je například zvedání listů osnovy nebo příraz útkové nitě. V těchto případech se jeví nejsnazší a velmi jednoduchou inovací náhrada pružných mechanických a pneumatických prvků magnety. Položme si tedy otázku. „Je to opravdu tak jednoduché řešení?“

Pokusme si takovéto možné řešení ukázat na příkladu rozvádění doprřadacího stroje. Bezvřetenový doprřadací stroj pracuje s centrální rozvřadecí, několik metrů dlouhou tyčí, která je napojena na klikový vačkový systém v hlavním rámu stroje. Tato rozvřadecí tyč

je mechanicky spojena se všemi jednotkami pro každou stranu stroje samostatně. Stávající mechanické řešení je při vysokých rychlostech dopřádání vystaveno velkým dynamickým účinkům v úvratích. Při dalším zvyšování rychlosti předení bude muset pohon v úvratích překonávat velké výkyvy krouticích momentů na vačce, aby překonal značné setrvačné síly. Standardní řešení je použití pružných elementů, nejčastěji ve formě pryžových bloků. Ty z technického hlediska vytvářejí brzdicí sílu a v zápětí sílu urychlující. Z fyzikálního hlediska jde o akumulaci kinetické energie ve formě energie elastické. Dochází k nahromadění a odevzdání elastické energie.

Inovace spočívá v tom, že se kinetická energie akumuluje ve formě magnetické energie permanentních magnetů s cílem snížit mechanickou sílu, kterou musí poháněcí mechanismus vykonat na překonání úvratě stroje. Díky tomu bude možné ponechat stávající výkon pohonu a přitom dále zvyšovat produkční rychlost stroje. V této práci se autor pokusí stanovit teoretické předpoklady, za kterých je možné využít magnetické akumulace kinetické energie.

K tomu, aby bylo možné počítat silové působení magnetů, je nutné především znát přesný průběh magnetického pole. Magnetické pole je vytvářeno elementárními magnetickými dipóly uvnitř magnetu, jejichž efekt jako celku se popisuje magnetizací. Přesný průběh magnetizace však není znám, proto se musí vytvářet různě přesné modely, které se snaží popsat co nejlépe její průběh. Na základě těchto modelů se pak spočítá magnetické pole.

Poněvadž modely jsou jen přiblížením k realitě je nutný poměrně přesný experiment, který by umožnil kvalifikovaně porovnat výsledky vypočtené se změřenou realitou. Poněvadž se jedná o přesné měření rozsáhlého trojrozměrného magnetického pole, měřicí aparatura musí být plně automatizovaná. Tvoří mechatronický systém, obsahující navzájem provázanou mechanickou, elektronickou a řídicí část. Na základě uspokojivé shody se přijme model magnetizace jako aplikovatelný, jinak je nutné jeho zpřesnění, což může být dosti komplikované.

Teprve po získání spolehlivého modelu je možné přistoupit k výpočtu síly. Pokud na sebe magnety působí jen odpudivou silou, jsou v labilním rovnovážném stavu, z něhož libovolně malým podnětem přecházejí do stavu stabilního, tj. přitáhnou se navzájem k sobě. V praktické realizaci jim v tom brání překážky, které snižují počet stupňů volnosti. To znamená, že kromě vzájemné odpudivé síly magnety budou působit na okolní předměty silami i momenty. Tyto síly je nutné vypočítat a respektovat je při návrhu zařízení. Opět je žádoucí potvrdit výpočty experimentem. Kromě odpudivé síly jsou však další síly a momenty obtížně měřitelné.

Pokud se dosáhne dobrého souhlasu v oblasti silového působení lze modelovat zařízení dynamicky a pro reálné parametry, tj. získat časové průběhy polohy a rychlostí, případně i zrychlení při použití v praxi. Na jejich základě lze pak posoudit, jak se budou magnety chovat ve skutečném stroji. Toto by mělo být konečný cílem této práce.

Magnetická síla je nejjednodušší formou bezkontaktního přenosu síly. Proto se používá v mnoha technických a vědeckých aplikacích od jednoduché bezkontaktní síly přes bezkontaktní přenos momentu až po složité systémy magnetických závěsů, ložisek či levitace.

Poměrně velká pozornost byla věnována bezkontaktnímu přenosu momentů, kde v principu jak hnací, tak hnaný cylindrický systém je složen z dílčích magnetů orientovaných navzájem opačně, pracovně tomu můžeme říkat systém střídavých pólů. Základní přehled o návrhu a realizaci těchto systémů lze získat z literatury, např. [17], [18], [19] a [20]. Vyšší úrovní aplikací jsou pak magnetická ložiska, o nichž pojednává např. literatura [21], [22] a [23].

Základní úlohou ve všech použitých systémech je určení všech složek síly, kterou na sebe působí dva protilehlé magnety a to ve vychýlené poloze. K výpočtům se používá ve velkém rozsahu model magnetických nábojů, který je teoreticky velmi podrobně popsán v literatuře [8]. Dále byl navržen model vázaných proudů, teoreticky popsáný v navazujícím článku [9].

Tyto modely lze jen zřídka aplikovat čistě analyticky, poněvadž geometrie je poměrně složitá. Obvykle je nutné numerické řešení, jehož optimalizace je naznačena zejména v literatuře [8]. Analytické řešení získané pro axiální osu válcových magnetů je popisováno v literatuře [10]. Ještě je nutno připomenout, že v článku [14] je jako jedno z řešení působící síly navržen princip magnetické energie, tj. určení směru, ve kterém klesá. Působící síla je derivací energie podle souřadnic.

Velká pozornost je věnována též přípravě materiálu z nichž se permanentní magnety vyrábějí. Cílem je dosáhnout maximálních užitných vlastností. Některé detaily lze nalézt např. v literatuře [24], [25] a [26].

Praktické vztahy či výpočet pro sílu působící na sousední magnety používají výhradně metodu magnetických nábojů, různé přístupy jsou např. v článcích [14], [15] a [16]. Poněkud jiný přístup je aplikace skalárního a vektorového potenciálu, který je navržen v práci [12]. Samozřejmě jsou i práce řešící tento problém metodou konečných prvků [7], [13]. Z těchto dílčích, ale klíčových výsledků, vztahů a výpočtů pak vychází návrh a analýza složitých systémů složených z mnoha magnetů navzájem různě orientovaných, viz např. práce [17], [18], [19] a [20].

V této práci, na rozdíl od všeobecného přístupu, založeného na neexistujících magnetických nábojích používáme realističtějšího modelu vázaných povrchových a objemových proudů. Ty sice též reálně neexistují, z hlediska silového působení se však chovají naproto stejně jako reálně vtištěné proudy. Jako třetí naprosto odlišný model je pak navrženo řešení silového působení mezi reálně existujícími elementárními magnetickými dipóly, které se však ukazují výpočetně velmi náročné.

Řešení se omezuje na jednoduchý ale prakticky využívaný systém silového působení dvou prstencových permanentních magnetů. Při výpočtu sil a momentů se postupuje tak, že se nejprve vypočte magnetické pole jednoho z nich a to pak působí na vázané proudy, které modelují druhý magnet.

Práce je uvozena teoretickou částí, kapitolou B ve které jsou uvedeny základní vztahy teorie elektromagnetického pole. Důraz je kladen pouze na ty části teorie, které se používají na řešení úloh a modelování permanentních magnetů. Postupně jsou zmíněny všechny metody vhodné pro modelování úloh s permanentními magnety. Na konci kapitoly je proveden výběr a porovnání všech uvedených metod řešení.

V kapitole C popisující experimentální část práce je věnována hlavní pozornost popisu měřicí aparatury, jejímu vývoji a popisu všech dílčích částí; mechanické, elektrické a programové. Požadavek přesného měření si vynutil i pracnou analýzu a vyhodnocení všech možných nejistot. U mechanické části aparatury se jedná o nejistotu v určení polohy, zatímco u elektrické části jde o určení nejistoty měření magnetické indukce. Vzhledem k velikosti rušení je věnována velká pozornost i jeho potlačení průměrováním.

Kapitola D popisuje fyzikální modely použité pro popis permanentních magnetů. Při analýze numerické integrace se sleduje vliv počtu integračních prvků na přesnost výsledků a to zejména v blízkosti singulárních bodů. Zdůrazněn je i vliv integračního efektu Hallovy sondy na výslednou magnetickou indukci v důsledku jejích konečných rozměrů. Ke konci kapitoly jsou popsány možnosti vizualizace magnetického pole a její ovlivnění parametry numerických výpočtů.

Další kapitola E obsahující praktické výsledky se zabývá opakovatelností měření na náhodně vybraném vzorku. Tím se ověřuje přesnost měřicího řetězce a vliv nejistot aparatury na výsledné hodnoty magnetické indukce. Dalším bodem této části je vyšetření homogenity a reprodukovatelnosti jednotlivých vzorků. Homogenitou je míněno ověření konstantního rozložení magnetizace v rámci jednoho vzorku. Reprodukovatelnost odvozená z nehomogenity určuje s jakou odchylkou jsou permanentní magnety zmagnetovány. Jedná se tedy o vyšetření a porovnání jednotlivých vzorků vzájemně mezi sebou. V nejdůležitější části

na konci kapitoly jsou na základě provedených měření porovnány numerické modely s experimentem.

Poslední kapitola F je rozdělena do čtyř samostatných celků. Zabývá se měřením a zpracováním výsledků odpudivé síly mezi magnety. K výsledkům měření jsou připraveny a přiřazeny teoretické modely aproximující naměřené výsledky. Dalším bodem je teoretické řešení snímání vzdálenosti mezi permanentními magnety pomocí vhodně umístěných Hallových sond. Cílem je nalézt takové umístění sond, které by co nejlépe pokryly celou pracovní oblast. Třetí část se zabývá dynamickým modelem. Ten by po praktické realizaci umožnil testovat působení odpudivé síly a ověřil spolehlivost měření vzdáleností mezi magnety. Poslední část se již jen stručněji zabývá studiem demagnetizace permanentních magnetů. Jak vyplývá ze závěrů studia homogennosti a reprodukovatelnosti jednotlivých vzorků, i dva magnety ze stejné série budou mít vždy rozdílnou hodnotu magnetizace, což může vést k tomu, že slabší magnetizace se postupně snižuje. Tento jev lze sledovat jen experimentálně a experiment je v této práci naznačen.

Teorie

Elektromagnetické pole je popsáno Maxwellovými rovnicemi. V obecném nestacionárním případě je tato soustava poměrně složitá a v úplném tvaru je uvedena v příloze P.1. Nejobecnější případ, nestacionární elektromagnetické pole, popisuje buzení a šíření elektromagnetických vln. V mnoha technických situacích se tato soustava zjednodušuje. Pro dynamické děje se často používá jednodušší a lépe řešitelná soustava pro kvazistacionární elektromagnetické pole. Dalším výrazným zjednodušením jsou rovnice pro stav stacionární, které se týkají pouze magnetického pole, a jednodušší jsou rovnice pro stav statický, který se zabývá jen elektrickým polem.

Pro naše účely postačuje vybrat tu část Maxwellových rovnic, která dostatečně věrně popisuje magnetické pole permanentních magnetů. Navíc se nebudeme zabývat hledáním řešení rovnic popisujících magnetické pole v diferenciálním tvaru, ale použijeme integrální tvar těchto rovnic. Avšak i ten bude pouze výchozím, pro výpočty budou použity vztahy, které se z nich dají odvodit.

Tato kapitola může obsahovat jen to, co je již známo. Nicméně byla zařazena zejména s cílem popsat korektně vztahy, z nichž vychází výpočet. Dále by měla posloužit těm zájemcům, kteří by chtěli výsledky uvedené v této práci aktivně využít.

B.1 Základní rovnice stacionárního magnetického pole

Základem teorie silového působení permanentních magnetů nebo elektromagnetů jsou Maxwellovy rovnice pro stacionární magnetické pole. Úplná soustava třinácti Maxwellových rovnic [4] se pak redukuje na tyto rovnice. Především to jsou základní Maxwellovy rovnice¹

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{i}_0, \quad (\text{B.1.1a})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (\text{B.1.1b})$$

Symbolsy v základních Maxwellových rovnicích (B.1.1) mají následující význam: $\mathbf{H}$ je intenzita magnetického pole, $\mathbf{B}$ je indukce magnetického pole a $\mathbf{i}_0$ je objemová hustota volných (vnucených, vtištěných) objemových proudů. Vnucené nebo vtištěné proudy jsou vytvářeny vnějším zdrojem, který získává elektrickou energii z jiného druhu energie. Tato elektrická energie je využita ve formě proudů.

Dále jsou to okrajové podmínky, které obecně popisují změny magnetické veličiny při přechodu do prostředí s jinými vlastnostmi, které se na hraniční ploše mění skokem. Velmi

¹Místo vektorového operátoru ∇ je pro větší názornost a přehlednost textu samého použito slovního vyjádření – zkratk operátorů.

častý případ je přechod *feromagnetikum – vakuum*. Strany plochy, která tvoří rozhraní mezi dvěma prostředími, označíme symboly 1 a 2. Pokud je plocha uzavřená, prostředí 1 je uvnitř, prostředí 2 vně. Definujme jednotkový vektor normály $\mathbf{n}$ k dělicí ploše, který je k této ploše kolmý a směřuje ze strany 1 na stranu 2. V případě uzavřené plochy tedy směřuje ven z plochy. Magnetické veličiny na straně plochy 1 mají index 1, na straně 2 index 2.

Pro normálové a tečné složky intenzit obou polí na rozhraní pak platí po řadě tyto okrajové podmínky:

$$\text{Rot } \mathbf{H} = \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{j}_0, \quad (\text{B.1.2a})$$

$$\text{Div } \mathbf{B} = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0. \quad (\text{B.1.2b})$$

Jejich význam bude podrobněji probrán až v další části této práce.

V Maxwellových rovnicích vystupují materiálové vztahy, které jsou uvedeny v obecném tvaru

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}), \quad (\text{B.1.3})$$

kde $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{H/m}$ je permeabilita vakua a $\mathbf{M}$ je vektor magnetizace, což je materiálový parametr.

V literatuře [4] se dále uvádí rovnice kontinuity pro proudovou hustotu vtištěných proudů

$$\text{div } \mathbf{j}_0 = 0, \quad (\text{B.1.4})$$

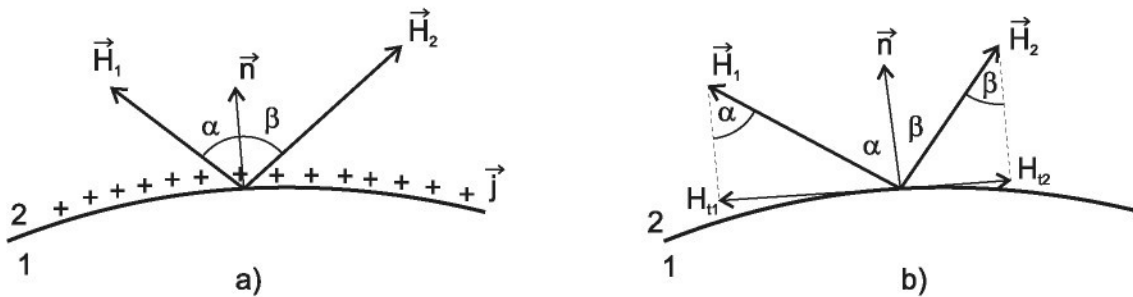
která respektuje zákon zachování pohybujícího se volného náboje.

Principiálně důležitá je však rovnice pro Lorentzovu sílu

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (\text{B.1.5})$$

která popisuje sílu působící na částici s nábojem q pohybující se rychlostí $\mathbf{v}$ v magnetickém poli o indukci $\mathbf{B}$.

Okrajové podmínky (B.1.2) vyžadují podrobnější vysvětlení. Symbolem *Rot* rozumíme plošnou rotaci a symbolem *Div* plošnou divergenci. Význam plošné rotace je patrný ze znázornění na obr. B.1.1a. Na ploše rozhraní teče proud o plošné hustotě $\mathbf{j}$. Na ploše definujeme strany 1 a 2 a zavedeme jednotkový vektor normály $\mathbf{n}$, který směřuje ze strany 1 na stranu 2. Na straně 2 má intenzita magnetického pole hodnotu $\mathbf{H}_2$, zatímco na straně 1 je popsána vektorem $\mathbf{H}_1$. První okrajová podmínka pro plošnou rotaci (B.1.2a) uvádí vztah mezi intenzitami na rozhraní a proudem tekoucím po rozhraní.



Obrázek B.1.1: Plošná rotace na rozhraní dvou prostředí.

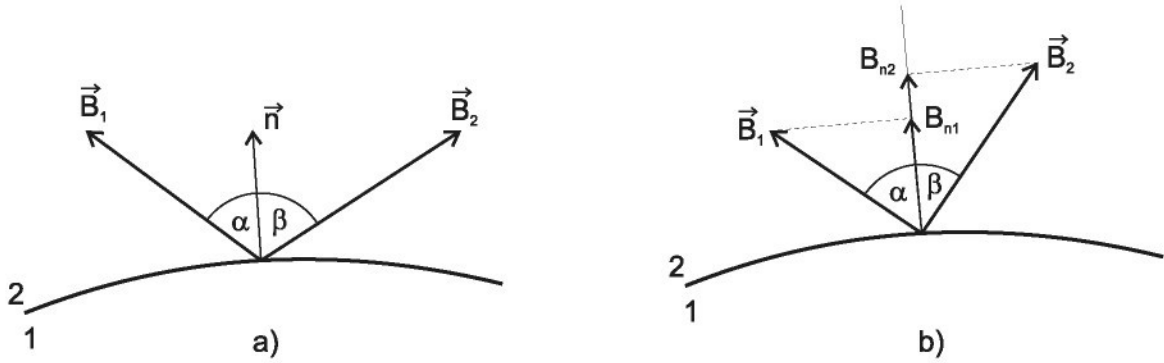
Z vlastností vektorového součinu vyplývá, že intenzita magnetického pole je kolmá k hustotě plošného proudu. Další vlastnost vyplývá z výrazu pro absolutní hodnotu tohoto součinu. Velikost vektorového součinu $\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)$ je podle definice (B.1.2a) a obr. B.1.1b

$$|\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)| = |\mathbf{n} \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{n} \times \mathbf{H}_1| = |H_2 \sin \beta - H_1 \sin \alpha| = |H_{t2} - H_{t1}| = |\mathbf{j}| = j, \quad (\text{B.1.6})$$

kde β je úhel mezi normálou $\mathbf{n}$ a intenzitou $\mathbf{H}_2$, $H_{t2} = H_2 \sin \beta$ je pak složka vektoru $\mathbf{H}_2$ do směru kolmého k normále, tedy průmět do tečné roviny rozhraní v místě normály, tj. tečná složka H_{t2} vektoru $\mathbf{H}_2$. Totéž platí i pro intenzitu $\mathbf{H}_1$, kde $H_{t1} = H_1 \sin \alpha$ je její tečná složka. Okrajová podmínka pro intenzitu magnetického pole má potom při správné orientaci tečných složek jednoduchý tvar

$$H_{t2} - H_{t1} = j. \quad (\text{B.1.7})$$

Význam plošné divergence vyplývá z obr. B.1.2a. Definice plochy a normály je stejná jako v případě plošné rotace. Velikost skalárního součinu $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1)$ je podle obr. B.1.2b



Obrázek B.1.2: Plošná divergence na rozhraní dvou prostředí.

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_2 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_1 = B_2 \cos \beta - B_1 \cos \alpha = B_{n2} - B_{n1} = 0, \quad (\text{B.1.8})$$

kde $B_{n2} = B_2 \cos \beta$ je složka magnetické indukce $\mathbf{B}_2$ do směru normály $\mathbf{n}$ k ploše, tedy normálová složka magnetické indukce $\mathbf{B}_2$. Podobně je $B_{n1} = B_1 \cos \alpha$ normálová složka magnetické indukce $\mathbf{B}_1$.

I druhá okrajová podmínka pro magnetickou indukci se dá vyjádřit v jednoduchém a srozumitelném tvaru

$$B_{n2} - B_{n1} = 0. \quad (\text{B.1.9})$$

Pokud po rozhraní neteče plošný proud, lze okrajové podmínky (B.1.7) a (B.1.9)

$$H_{t1} = H_{t2}, \quad (\text{B.1.10a})$$

$$B_{n1} = B_{n2}, \quad (\text{B.1.10b})$$

vyjádřit slovně. Při průchodu rozhraním se tečné složky intenzity magnetického pole a normálové složky magnetické indukce mění spojitě. U intenzity magnetického pole to platí však jen za podmínky, že na rozhraní netečou volné plošné proudy. To bývá v praxi obvykle splněno.

Z předchozích vztahů je zřejmé, že obecně existují tři zdroje magnetického pole.

1. Podle základních rovnic (B.1.1) je zdrojem magnetického pole proud o objemové proudové hustotě $\mathbf{j}_0$. V souladu s předpokladem stacionárního magnetického pole je to proud vtištěný, tj. vyvolaný např. ideálním zdrojem proudu. Tento proud nelze ovlivnit magnetickým polem a proto způsob, jakým vzniká, není pro teorii důležitý.
2. Podle okrajových podmínek (B.1.2) je dalším zdrojem magnetického pole proud o plošné hustotě $\mathbf{j}_0$, který teče po rozhraní. Může být opět vyvolán ideálním zdrojem proudu a pro teorii není důležitý způsob jeho buzení, poněvadž nijak nesouvisí s magnetickými veličinami.

3. Z materiálových vztahů (B.1.3) pak vyplývá, že třetím zdrojem magnetického pole je magnetizace $\mathbf{M}$. Ta může být buď vtištěná $\mathbf{M} = \mathbf{M}_0$, příkladem je ideální permanentní magnet, nebo může vznikat působením magnetického pole, symbolicky $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{B})$. Ve druhém případě ji musí teorie uvažovat.

B.2 Rovnice pro kvazistacionární magnetické pole

Pro úplnost uvedme, že obecnějším případem jsou rovnice pro kvazistacionární magnetické pole, které uvažují časově proměnné veličiny. Jejich úplná soustava obsahuje základní Maxwellovy rovnice

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{i}_0 + \mathbf{i} , \quad (\text{B.2.1a})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0 , \quad (\text{B.2.1b})$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} , \quad (\text{B.2.1c})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 . \quad (\text{B.2.1d})$$

Oproti stacionárnímu případu přibýly další dva vztahy. Ve shodě s literaturou [4] jsme je uvedli jako druhý a třetí, tj. (B.2.1b) a (B.2.1c).

Kvazistacionární případ uvažuje pouze vliv vodivého prostředí. Vedle časově proměnného magnetického pole existuje i časově proměnné elektrické pole o intenzitě $\mathbf{E}$. V první rovnici (B.2.1a) je kromě vtištěného proudu $\mathbf{i}_0$ ještě časově proměnný proud $\mathbf{i}$ vyvolaný tímto elektrickým polem. Jeho význam je vysvětlen níže. Ve druhé rovnici (B.2.1b) předpokládáme, že nejsou vtištěné objemové elektrické náboje, které by budily elektrické pole. Podle třetí rovnice (B.2.1c) vzniká časově proměnné elektrické pole v důsledku časových změn magnetického pole, což je zákon elektromagnetické indukce. Čtvrtá rovnice (B.2.1d) vyjadřuje fakt, že neexistují magnetické náboje.

Okrajové podmínky mají pro náš kvazistacionární případ tvar

$$\operatorname{Rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}_0 , \quad (\text{B.2.2a})$$

$$\operatorname{Div} \mathbf{B} = 0 , \quad (\text{B.2.2b})$$

$$\operatorname{Rot} \mathbf{E} = 0 , \quad (\text{B.2.2c})$$

$$\operatorname{Div} \mathbf{E} = 0 . \quad (\text{B.2.2d})$$

Tyto podmínky nyní uvažují i elektrické pole, viz poslední dvě rovnice (B.2.2c), (B.2.2d) soustavy (B.2.2). V teorii [4], [5] se dokazuje, že časově proměnné elektromagnetické pole je neovlivní, zůstávají stejné jako v elektrostatice a stacionárním magnetickém poli. Po povrchu rozhraní může tedy téci pouze vtištěný proud. Poněvadž neuvažujeme vtištěné plošné náboje, je plošná divergence elektrického pole nulová, viz rovnice (B.2.2d).

Materiálové vztahy mají nyní tvar ²

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) , \quad (\text{B.2.3a})$$

²Uvažujeme pouze vodivé prostředí.

$$\mathbf{i} = \gamma \mathbf{E} . \quad (\text{B.2.3b})$$

Kromě magnetických vlastností se uvažují i elektrické vlastnosti vodivého prostředí, proto přistupuje jako druhý vztah diferenciální Ohmův zákon. V tomto vztahu je symbolem γ označena elektrická vodivost. Podle druhého vztahu (B.2.3b) indukované elektrické pole vyvolá proud, který pak vystupuje v první rovnici základní soustavy (B.2.1a). Neuvažujeme dielektrické vlastnosti, a proto nezavádíme elektrickou indukci $\mathbf{D}$ ani zde, ani výše v okrajových podmínkách a základních rovnicích.

Rovnice kontinuity

$$\text{div}(\mathbf{i}_0 + \mathbf{i}) = 0 , \quad (\text{B.2.4})$$

obsahuje kromě vtištěného proudu $\mathbf{i}_0$ i proud $\mathbf{i}$ vyvolaný elektrickým polem.

Vztah pro Lorentzovu sílu, viz (B.1.5), se nezměnil, zůstává stejný.

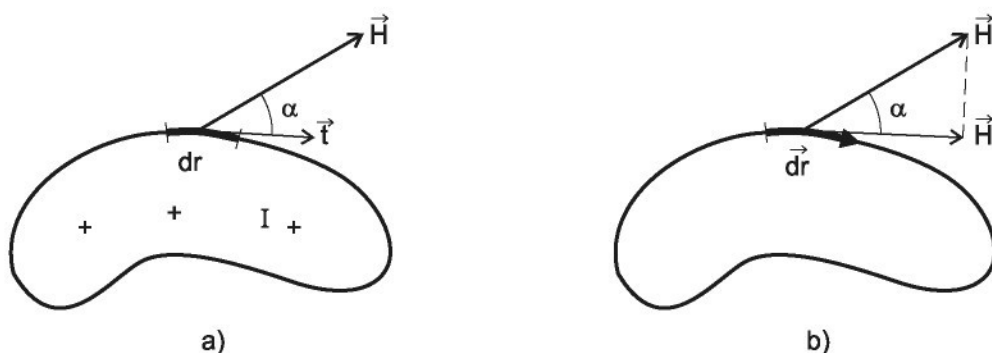
Při výpočtech silového působení v dynamickém případě se časově proměnné elektrické pole projeví pouze okrajově, jednak povrchovým jevem, jednak vířivými proudy. Skinefekt poněkud sníží hodnoty výsledných sil vypočtených pro stacionární případ. Vířivé proudy zvýší energetické ztráty, které vedou ke zvýšení teploty vodivých součástí. Tento případ není dále uvažován.

B.3 Maxwellovy rovnice v integrálním tvaru

Praktický význam má integrální tvar základních Maxwellových rovnic (B.1.1). První z nich (B.1.1a) je znám jako Ampérův zákon

$$\oint_{(K)} \mathbf{H} d\mathbf{r} = I . \quad (\text{B.3.1})$$

Skalární součin $\mathbf{H} d\mathbf{r}$ má v konzervativním (např. gravitačním, nebo elektrostatickém) poli fyzikální význam. Např. $\mathbf{E} d\mathbf{r}$ je elementární práce, kterou elektrostatické pole vykoná při posunutí jednotkového náboje podél elementu $d\mathbf{r}$. Pro jednoduchost budeme u stacionárního magnetického pole mluvit o zobecněné práci. Slovy lze pak Ampérův zákon vyjádřit např. takto: Zobecněná práce vykonaná stacionárním magnetickým polem na uzavřené křivce K je rovna součtu všech proudů I , které protékají plochou, jež má tuto křivku za okraj. Matematicky pak lze říci: Integrál z intenzity magnetického pole $\mathbf{H}$ po uzavřené křivce K je roven součtu všech proudů I , které protékají plochou, jež má tuto křivku za okraj. Schématicky to znázorňuje obr. B.3.1a, kde se pro jednoduchost uvažuje rovinná křivka.



Obrázek B.3.1: Ampérův zákon, statické vysvětlení.

Skalární součin $\mathbf{H} d\mathbf{r}$ v Ampérově zákonu (B.3.1) lze psát různými způsoby, jak vyplývá z definice vektorů na obr. B.3.1b.

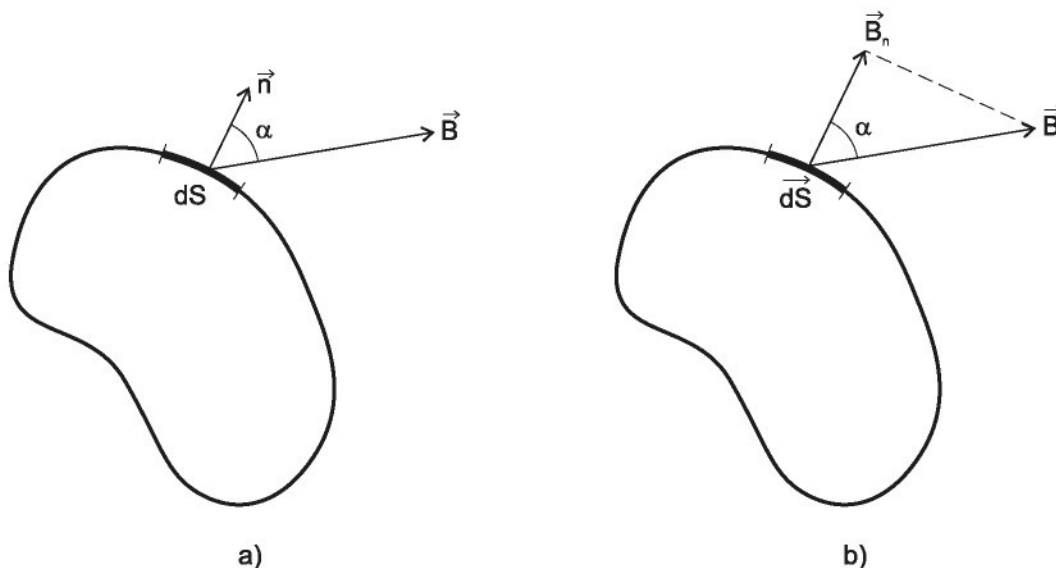
$$\mathbf{H} d\mathbf{r} = H \mathbf{t} d\mathbf{r} = H \cos(\alpha) d\mathbf{r} = H_t d\mathbf{r} , \quad (\text{B.3.2})$$

kde $\mathbf{t}$ je jednotkový tečný vektor k elementu $d\mathbf{r}$ křivky, viz obr. B.3.1a, α je úhel mezi směrem vektoru $\mathbf{H}$ a tečnou $\mathbf{t}$ k elementu $d\mathbf{r}$ a H_t je tečná složka vektoru $\mathbf{H}$ do směru elementu $d\mathbf{r}$. Z těchto vztahů lze vybrat optimální pro dané odvození nebo výpočet.

Integrální tvar druhé z Maxwellových rovnic (B.1.1b) budeme uvádět jako Gaussovu větu na základě analogie s Gaussovou větou z elektrostatiky

$$\oint_{(S)} \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0 . \quad (\text{B.3.3})$$

Fyzikálně to znamená, že tok magnetické indukce $\mathbf{B}$ libovolnou uzavřenou plochou S je nulový, neboli že neexistují magnetické náboje. Význam symbolů by měl ozřejmit obr. B.3.2a, kde je řez zvolenou plochou.



Obrázek B.3.2: Tok magnetické indukce.

Skalární součin $\mathbf{B} d\mathbf{S}$, který má význam toku magnetické indukce $\mathbf{B}$ elementem dS , lze psát různými způsoby, jak vyplývá z obr. B.3.2b:

$$\mathbf{B} d\mathbf{S} = B \mathbf{n} dS = B \cos(\alpha) dS = B_n dS , \quad (\text{B.3.4})$$

kde $\mathbf{n}$ je jednotkový normálový vektor k elementu dS plochy, viz obr. B.3.4a, α je úhel mezi směrem vektoru $\mathbf{B}$ a normálou k elementu dS a B_n je normálová složka vektoru $\mathbf{B}$, tj. do směru normály k elementu dS . Z těchto vztahů lze vybrat optimální pro požadované odvození nebo výpočet.

B.4 Biot-Savartův zákon

Pomocí Ampérova zákona (B.3.1) lze spočítat magnetické pole jen v nejjednodušších případech, např. pole proudu v nekonečně dlouhém kruhovém přímém vodiči. Pro obecný výpočet magnetického pole je nutno použít Biot-Savartův zákon, o němž se v učebnicích [4], [5] dokazuje, že je řešením první Maxwellovy rovnice (B.1.1a).

Dříve než jej uvedeme, popíšeme konvenci pro polohové vektory a souřadnice. Polohové vektory popisují souřadnice dvou typů objektů. Jednak jsou to objekty budící pole, např. elementární dipóly, elementy proudu, elementy magnetizace, elementy objemu apod., dále je to buzené pole, např. magnetická indukce v daném bodě. Polohové vektory a souřadnice budících prvků budou mít index nula a nazveme je *materiálové*, např. vektor $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ popisuje polohu elementu plošného proudu $\mathbf{j} dS$. Polohové vektory bez indexu popisují bod, v němž počítáme veličinu pole. Nazveme je *polní* polohové vektory. Např. magnetickou indukci $\mathbf{B}$ počítáme v bodě o polohovém vektoru $\mathbf{r} = (x, y, z)$. Jednodušeji lze definované vektory popsat takto:

- *Materiálový vektor* – pouze v objemu permanentního magnetu,
- *polní vektor* – prakticky mimo objem permanentního magnetu.

Ve výrazech se obvykle vyskytuje rozdíl polních a materiálových vektorů

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = (x - x_0, y - y_0, z - z_0), \quad (\text{B.4.1})$$

případně vzdálenost mezi elementem budícím pole a bodem, kde se počítá odezva, např. magnetická indukce

$$\Delta r = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}. \quad (\text{B.4.2})$$

Tento přístup vede ke složitějším vztahům, než jsou uváděny obvykle v literatuře [4] a [5]. Má však výhodu v tom, že sníží riziko chyb v numerických výpočtech, poněvadž vše je jasně definováno.

S ohledem na důležitost pro další odvození uvedeme Biot-Savartův zákon ve třech základních tvarech: pro objemové, plošné a liniové proudy. Pro objemové proudy má tvar

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{(V)} \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}_0) \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} dV = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{(V)} \frac{\mathbf{i} \times \Delta \mathbf{r}}{(\Delta r)^3} dV. \quad (\text{B.4.3})$$

Předpokládáme, že v tělese o objemu V tečou proudy o objemové hustotě $\mathbf{i}(\mathbf{r}_0)$. Budící veličina, proudový element $\mathbf{i}(\mathbf{r}_0) dV$ v místě o polohovém materiálovém vektoru $\mathbf{r}_0$ přispívá k magnetické indukci $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ v bodě o polohovém vektoru $\mathbf{r}$ obecně přírůstkem $d\mathbf{B}$. Symbolem μ_0 je označena permeabilita vakua. V posledním výrazu používáme definici (B.4.1) pro rozdíl polohových vektorů a (B.4.2) pro vzdálenost polních a materiálových bodů.

Tečou-li po ploše S plošné proudy o hustotě $\mathbf{j}(\mathbf{r}_0)$, pak je buzené pole $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ v bodě o polohovém vektoru $\mathbf{r}$ dáno výrazem

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{(S)} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}_0) \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} dS = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{(S)} \frac{\mathbf{j} \times \Delta \mathbf{r}}{(\Delta r)^3} dS. \quad (\text{B.4.4})$$

Přitom $\mathbf{r}_0$ je polohový vektor plošného elementu dS . V posledním výrazu jsou opět použity definice (B.4.1) a (B.4.2).

V případě liniového vodiče popsaného křivkou K , kterým teče proud I , je magnetická indukce buzeného pole $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ v bodě o polohovém vektoru $\mathbf{r}$ dána výrazem

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{(K)} \frac{\mathbf{t}_0 \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} dl = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{(K)} \frac{\mathbf{t}_0 \times \Delta \mathbf{r}}{(\Delta r)^3} dl, \quad (\text{B.4.5})$$

kde $\mathbf{t}_0$ je jednotkový tečný vektor k délkovému elementu dl křivky K v místě o polohovém materiálovém vektoru $\mathbf{r}_0$. Orientace jednotkového tečného vektoru $\mathbf{t}_0$ je dána směrem proudu I .

Složky vektorového součinu ve vztazích (B.4.3) až (B.4.5) určují jednotlivé složky magnetické indukce. Např. příspěvky od plošných proudů jsou dány vztahy

$$dB_x(x, y, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{j_y(x_0, y_0, z_0) \cdot (z - z_0) - j_z(x_0, y_0, z_0) \cdot (y - y_0)}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2)^{3/2}} dS, \quad (\text{B.4.6a})$$

$$dB_y(x, y, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{j_z(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0) - j_x(x_0, y_0, z_0) \cdot (z - z_0)}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2)^{3/2}} dS, \quad (\text{B.4.6b})$$

$$dB_z(x, y, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{j_x(x_0, y_0, z_0) \cdot (y - y_0) - j_y(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0)}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2)^{3/2}} dS. \quad (\text{B.4.6c})$$

Souřadnice, resp. indexy se střídají cyklicky, takže výraz pro další složku lze odvodit z předchozího posuvem indexu. Vztahy (B.4.6) jsou základem pro naše numerické výpočty. Obvykle se zjednoduší, poněvadž proudová hustota mívá jen jednu nebo dvě složky. Celková indukce se získá sumací příspěvků (B.4.6).

B.5 Magnetický dipól

Jelikož neexistují magnetické náboje, je nutno vytvářet představy složitějšího bodového zdroje magnetického pole. Nejjednodušší z nich je magnetický dipól. Magnetický dipól je tvořen jednoduchou uzavřenou smyčkou, kterou protéká proud I . Pro jednoduchost předpokládáme rovinnou smyčku. Plocha obklopená smyčkou nechť je S . Tuto plochu orientujeme tak, že jí opět přiřadíme jednotkový normálový vektor $\mathbf{n}$, jehož smysl je dán směrem tekoucího proudu podle pravidla pravotočivého šroubu. Orientovaná plocha je tedy $\mathbf{S} = \mathbf{n} \cdot S$. Základním parametrem magnetického dipólu je magnetický moment definovaný vztahem

$$\mathbf{m}_d = I\mathbf{S}. \quad (\text{B.5.1})$$

Elementární magnetický dipól získáme tak, že všechny rozměry smyčky necháme konvergovat k nule a proud růst nade všechny meze, ovšem takovým způsobem, že magnetický moment (B.5.1) zůstává konečný a nenulový, tj.

$$\mathbf{m} = \lim_{\substack{I \rightarrow \infty \\ S \rightarrow 0}} I\mathbf{S}. \quad (\text{B.5.2})$$

V učebnicích [4], [5] se dokazuje, že magnetická indukce elementárního magnetického dipólu s momentem $\mathbf{m}$ je dána vztahem

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3(\mathbf{m} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^5} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) - \frac{\mathbf{m}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3\mathbf{m} \cdot \Delta\mathbf{r}}{(\Delta r)^5} \Delta\mathbf{r} - \frac{\mathbf{m}}{(\Delta r)^3} \right). \quad (\text{B.5.3})$$

Elementární magnetický dipól se nachází v bodě s materiálovými souřadnicemi $\mathbf{r}_0$ a magnetickou indukcí buzeného pole počítáme v bodě s polním polohovým vektorem $\mathbf{r}$.

Ze vztahu (B.5.3) je zřejmé, že magnetická indukce elementárního magnetického dipólu klesá se třetí mocninou vzdálenosti. To je stejná závislost jako u intenzity elektrického pole elementárního elektrického dipólu. Pro úplnost dodejme, že magnetická indukce nekonečného drátu s kruhovým průřezem klesá vně drátu nepřímo úměrně vzdálenosti od jeho osy. Je-li délka drátu konečná, pak magnetická indukce v dostatečně velké vzdálenosti od drátu klesá se čtvercem této vzdálenosti.

Podle teorie fyziky pevných látek se po vložení tělesa do magnetického pole z každého atomu stává elementární magnetický dipól. Elementárnímu objemu dV , který je však natolik velký, aby obsahoval veliký počet atomů, pak přísluší magnetický dipólový moment $d\mathbf{m}$. Vektor magnetizace

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}_0) = \frac{d\mathbf{m}}{dV}, \quad (\text{B.5.4})$$

udává magnetický dipólový moment jednotkového objemu látky, pokud bude zmagnetována homogenně. Při nehomogenní magnetizaci je nutno vztah (B.5.4) chápat jako limitu. Obecně je magnetizace funkcí polohy v látce, tedy materiálového vektoru.

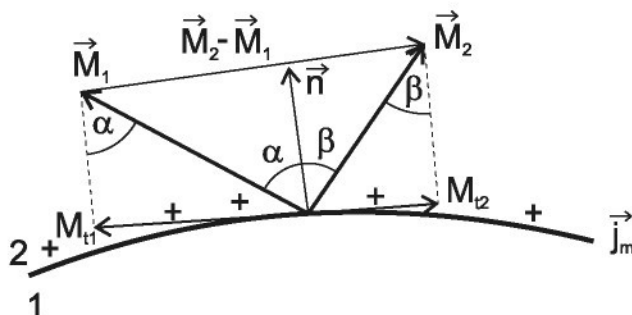
B.6 Vázané proudy

Pro látková prostředí se v teorii elektromagnetického pole dokazuje, že stejného magnetického pole lze dosáhnout, pokud předpokládáme, že v látce tečou fiktivní proudy, jednak v objemu o objemové hustotě $\mathbf{i}_m$, jednak na povrchu o plošné hustotě $\mathbf{j}_m$. Povrchem se rozumí buď rozhraní látky a vakua nebo rozhraní dvou látek, jejichž vlastnosti (magnetizace) se na tomto rozhraní mění skokem. Oba typy vázaných proudů souvisí s magnetizací (B.5.4) pomocí vztahů

$$\mathbf{i}_m = \text{rot}_0 \mathbf{M}(\mathbf{r}_0), \quad (\text{B.6.1a})$$

$$\mathbf{j}_m = \text{Rot } \mathbf{M}(\mathbf{r}_0) = \mathbf{n} \times (\mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1). \quad (\text{B.6.1b})$$

Index *nula* u objemové rotace naznačuje, že se derivuje podle materiálových souřadnic. Vztah mezi magnetizací a povrchovým vázaným proudem se snažíme vysvětlit pomocí obr. B.6.1. Podle vztahu (B.6.1b) povrchový proud teče kolmo ke změně magnetizace na roz-



Obrázek B.6.1: Vektory magnetizace a hustota plošného vázaného proudu.

hraní. Změnou se rozumí rozdíl magnetizací $\mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1$. Pro velikost plošné hustoty vázaného proudu dostaneme ze vztahu (B.6.1b)

$$j_m = |\mathbf{j}_m| = |\mathbf{n} \times (\mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1)| = M_2 \sin \beta - M_1 \sin \alpha = M_{t2} - M_{t1}. \quad (\text{B.6.2})$$

V absolutní hodnotě je hustota vázaného povrchového proudu dána rozdílem tečných složek magnetizace. Tečna se vztahuje k rozhraní ve vyšetřovaném bodě.

Pokud je na straně 2 rozhraní vakuum, je magnetizace vně látky nulová, $\mathbf{M}_2 = 0$. Pro hustotu vázaných proudů pak v tomto případě platí

$$\mathbf{j}_m = \mathbf{n} \times (\mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1) = -\mathbf{n} \times \mathbf{M}_1 = -\mathbf{n} \times \mathbf{M}. \quad (\text{B.6.3})$$

Vázané proudy tečou na rozhraní kolmo k magnetizaci, jejich smysl je však opačný. Pro velikost hustoty vázaného proudu v tomto důležitém případě dostaneme ze vztahu (B.6.3)

$$j_m = |\mathbf{j}_m| = |-\mathbf{n} \times \mathbf{M}| = M \sin \alpha = M_t. \quad (\text{B.6.4})$$

V absolutní hodnotě je hustota vázaného povrchového proudu dána tečnou složkou magnetizace na rozhraní látky a vakua.

Nyní se soustředíme jen na případ, že magnetizace je vyvolána jen vnějším magnetickým polem. Podle typu látky má závislost magnetizace $\mathbf{M}$ na magnetické indukci $\mathbf{B}$ různý tvar. Popíšeme základní, někdy poněkud idealizované případy v pořadí jejich složitosti:

1. Magnetizace $\mathbf{M}_0$ má konstantní hodnotu. Je nezávislá na magnetické indukci, jedná se o látku lineární magneticky tvrdou. Jde o jednoduchý popis permanentních magnetů, nebo o první přiblížení. Matematicky

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_0 . \quad (\text{B.6.5})$$

2. Magnetizace je lineární funkcí indukce, což lze popsat vztahem

$$\mathbf{M} = \alpha \mathbf{B} + \mathbf{M}_0 , \quad (\text{B.6.6})$$

kde α je materiálový parametr a $\mathbf{M}_0$ je magnetizace při nulové indukci. Jedná se o látku magneticky lineární a tvrdou. Tento vztah lze použít pro přesnější popis permanentních magnetů, jedná se o druhé přiblížení.

3. Magnetizace je lineární funkcí indukce bez absolutního členu, což lze popsat vztahem

$$\mathbf{M} = \alpha \mathbf{B} , \quad (\text{B.6.7})$$

kde α je materiálový parametr. Jedná se o látku magneticky lineární a měkkou. Sem patří prakticky všechny slabě magnetické látky, tj. látky diamagnetické a paramagnetické.

4. Speciálním a v praxi častějším případem situace popsané v předchozím bodě je závislost popsaná vztahem

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} , \quad (\text{B.6.8})$$

kde χ_m je magnetická susceptibilita. Porovnáním s materiálovou Maxwellovou rovnicí, viz (B.1.3), dostaneme výraz pro magnetickou indukci v látkách

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0(1 + \chi_m)\mathbf{H}(\mathbf{r}) , \quad (\text{B.6.9})$$

kde veličina $\mu = \mu_0(1 + \chi_m)$ se nazývá permeabilitou látky a veličina $\mu_r = 1 + \chi_m$ její relativní permeabilitou. Pro magnetické pole ve vakuu platí $\chi_m = 0$, pak $\mu_r = 1$ a $\mu = \mu_0$. Tedy

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} . \quad (\text{B.6.10})$$

Je vidět, že oba vektory se liší pouze konstantou. Z toho vyplývá, že zavádění vektoru intenzity je ve vakuu zbytečné. Intenzita magnetického pole se tedy uplatní pouze v látkovém prostředí. Z uvedeného dále vyplývá, že nejvhodnější pro popis volných proudů je magnetická indukce (situace ve vakuu) a pro popis komplexních situací s vázanými proudy je nejvhodnější intenzita magnetického pole (materiálové prostředí).

5. Magnetizace je nelineární funkcí indukce. Jedná se o nelineární látky, u nichž lze závislost magnetizace na indukci popsat explicitním matematickým vztahem, formálně např. takto

$$\mathbf{M} = f(\mathbf{B}) , \quad (\text{B.6.11})$$

kde f je analytická funkce. V praxi se tento popis používá zřídka, poněvadž chování magneticky nelineární látky nevystihuje dostatečně.

6. Závislost magnetizace na indukci vykazuje hysterezi. V tomto případě lze závislost magnetizace na indukci popsat pouze implicitně, formálně např. takto

$$g(\mathbf{M}, \mathbf{B}) = 0 , \quad (\text{B.6.12})$$

kde g je funkce dvou proměnných. Tento popis se používá pro látky feromagnetické. Je to třetí a nejlepší přiblížení pro permanentní magnety. Bohužel, pro funkci g obvykle neexistuje jednoduchý matematický výraz.

B.7 Magnetické náboje

Existuje další formální možnost modelování magnetického pole založená na přísné analogii s elektrostatikou. Pokud neexistují žádné volné proudy, ani objemové, ani plošné, jak je tomu v případě permanentních magnetů, podle první z Maxwellových rovnic (B.1.1a) pro $\mathbf{j}_0 = 0$ platí

$$\text{rot } \mathbf{H} = 0 , \quad (\text{B.7.1})$$

a okrajová podmínka (B.1.2a) má pro $\mathbf{j}_0 = 0$ tvar

$$\text{Rot } \mathbf{H} = 0 . \quad (\text{B.7.2})$$

Na základně formální analogie s elektrostatikou lze zavést skalární magnetický potenciál φ_m vztahem analogickým pro elektrický potenciál

$$\mathbf{H} = -\text{grad } \varphi_m . \quad (\text{B.7.3})$$

Pak je rovnice (B.7.1) splněna identicky.

To umožní vycházet z analogie s elektrostatikou. Elektrostatické pole o intenzitě $\mathbf{E}$ je nevírové a zřídlové, takže pro ně platí tyto základní rovnice

$$\text{div } \mathbf{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0} , \quad (\text{B.7.4a})$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0 \quad (\text{B.7.4b})$$

a okrajové podmínky

$$\text{Div } \mathbf{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} , \quad (\text{B.7.5a})$$

$$\text{Rot } \mathbf{E} = 0 . \quad (\text{B.7.5b})$$

V těchto rovnicích je ϱ objemová hustota elektrického náboje, σ je jeho plošná hustota a ε_0 je permitivita vakua.

Analogicky s těmito rovnicemi z elektrostatiky, porovnáme-li rovnice (B.7.1) a (B.7.2) po řadě s rovnicemi (B.7.4) a (B.7.5), lze zavést objemové a plošné magnetické náboje a to rovnicemi analogickými k rovnicím (B.7.4) a (B.7.5)

$$\text{div } \mathbf{H} = \mu_0 \varrho_{0m} , \quad (\text{B.7.6a})$$

$$\text{Div } \mathbf{H} = \mu_0 \sigma_{0m} , \quad (\text{B.7.6b})$$

kde ϱ_{0m} a σ_{0m} jsou po řadě objemová a plošná hustota volných magnetických nábojů. Zde se dále vychází z jiného, a to fyzikálně opodstatněného, analogie mezi elektrostatickým a (nejen)

stacionárním magnetickým polem, podle níž permitivitě vakua ε_0 odpovídá převrácená permeabilita vakua $\frac{1}{\mu_0}$.

Z těchto rovnic lze odvodit Poissonovu rovnici pro magnetický potenciál. Zde však bude použit integrální přístup. Předpokládá se, že v objemu V se nacházejí volné magnetické náboje s objemovou hustotou ϱ_{0m} a na ploše S jsou volné magnetické náboje s povrchovou hustotou σ_{0m} . Obě hustoty jsou obecně funkcí polohy popsané materiálovým vektorem $\mathbf{r}_0$. Pak, ve formální analogii s elektrostikou, je magnetický skalární potenciál v bodě o polním polohovém vektoru $\mathbf{r}$ dán vztahem

$$\varphi_m(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\varrho_{0m}(\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} dV + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\sigma_{0m}(\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} dS. \quad (\text{B.7.7})$$

Aplikací definice (B.7.3) na magnetický potenciál daný vztahem (B.7.7) lze pro intenzitu magnetického pole odvodit vztahy

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\varrho_{0m}(\mathbf{r}_0)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} dV + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\sigma_{0m}(\mathbf{r}_0)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} dS. \quad (\text{B.7.8})$$

Výše popsaná analogie je formální a nemá fyzikální opodstatnění, poněvadž volné magnetické náboje neexistují. Zavedením magnetické indukce, která má fyzikální význam³, se dostaneme do potíží, viz rovnice (B.1.1b). Podle této rovnice je stacionární magnetické pole nezářidlové. Podle rovnice (B.7.1) je však současně i nevírové. Obě podmínky nelze splnit současně.

V případě permanentních magnetů lze však tuto ryze formální analogii dále rozvíjet. Permanentně zmagnetovaná látka je popsána magnetizací $\mathbf{M}(\mathbf{r}_0)$, což je materiálový parametr. Magnetizace je formálně analogická elektrické polarizaci. Na základě této analogie lze ukázat, že totéž magnetické pole, jaké vytváří magnetizace $\mathbf{M}(\mathbf{r}_0)$ ve zmagnetovaném prostředí o objemu V , vytváří dohromady objemové vázané magnetické náboje umístěné v objemu zmagnetovaného tělesa s objemovou hustotou

$$\varrho_m(\mathbf{r}_0) = -\operatorname{div}_0 \mathbf{M}(\mathbf{r}_0) \quad (\text{B.7.9})$$

a povrchové vázané magnetické náboje nacházející se na povrchu zmagnetovaného prostředí s povrchovou hustotou

$$\sigma_m(\mathbf{r}_0) = -\operatorname{Div}_0 \mathbf{M}(\mathbf{r}_0) = -\mathbf{n} \cdot (\mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{M} = M_n. \quad (\text{B.7.10})$$

V tomto vztahu je symbolem $\mathbf{n}$ označen jednotkový vektor vnější normály k povrchu zmagnetovaného prostředí⁴, $\mathbf{M}_2 = 0$ je magnetizace vně prostředí, která je nulová, a $\mathbf{M}_1 = \mathbf{M}$ je magnetizace na vnitřní straně prostředí, kterou značíme jako $\mathbf{M}$. Symbol M_n je pak normálová složka magnetizace na povrchu, která udává plošnou hustotu magnetického náboje.

Ve vztahu (B.7.9) index nula u objemové divergence upozorňuje na to, že se derivuje podle materiálových souřadnic, které mají index nula. Tentýž význam má u plošné divergence ve vztahu (B.7.10), zde je však prakticky zbytečný, poněvadž následující rozpis vše vysvětluje.

Po dosazení vázaných magnetických nábojů s hustotami definovanými dle vztahů (B.7.9) a (B.7.10) do obecného vztahu (B.7.8) dostaneme

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\operatorname{div}_0 \mathbf{M}(\mathbf{r}_0)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} dV + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{M_n(\mathbf{r}_0)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} dS. \quad (\text{B.7.11})$$

³Popisuje silové působení.

⁴Uvnitř prostředí je strana 1 povrchu, vně pak strana 2.

Je-li znám prostorový průběh magnetizace, lze z tohoto vztahu vypočíst intenzitu magnetického pole. Pokud je magnetizace homogenní, je objemová hustota vázaného magnetického náboje nulová. Zůstane tedy jen integrál přes povrch prostředí. V něm vystupuje hustota vázaného povrchového magnetického náboje ve formě normálové složky M_n vektoru magnetizace. Obvykle je magnetizace kolmá k povrchu, takže platí $M_n = M$ (pro úplnost $M = |\mathbf{M}|$).

Fyzikální význam má však magnetická indukce. Ve vakuu, vně zmagnetovaného prostředí, lze použít vztah

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} . \quad (\text{B.7.12})$$

Uvnitř zmagnetovaného prostředí je situace složitější, zde je však i problém s konvergencí integrálů v (B.7.11), poněvadž dojde k situaci, kdy je $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$, tj. $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| = 0$, proto nebude tomuto případu věnována další pozornost. Vázané povrchové náboje vedou k tomu, že uvnitř permanentního magnetu má intenzita magnetického pole opačný směr než indukce. K témuž závěru vede ale i přesnější teorie [4].

B.8 Vektorový potenciál

Analogicky ke skalárnímu potenciálu v elektrostati se pro stacionární magnetické pole zavádí vektorový potenciál. Vychází z Maxwellovy rovnice (B.1.1b), která vyjadřuje neexistenci magnetických nábojů a má diferenciální tvar

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 . \quad (\text{B.8.1})$$

Poněvadž pro libovolný vektor $\mathbf{X}$ platí identita

$$\text{div rot } \mathbf{X} = 0 , \quad (\text{B.8.2})$$

je rovnice (B.8.1) splněna, položíme-li

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} , \quad (\text{B.8.3})$$

kde nová (matematická) veličina $\mathbf{A}$ se nazývá vektorový magnetický potenciál. Vektorový potenciál $\mathbf{A}$ popisuje magnetické pole stejně jako magnetická indukce $\mathbf{B}$.

Obdobně jako u magnetické indukce jsou zdrojem vektorového potenciálu proudy. Objemové proudy s hustotou $\mathbf{i}$, které se nacházejí v objemu V , a plošné proudy s hustotou $\mathbf{j}$, které tečou po ploše S , budí magnetické pole o vektorovém potenciálu

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{(V)} \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} dV + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{(S)} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} dS . \quad (\text{B.8.4})$$

Magnetickou indukci $\mathbf{B}$, která má fyzikální význam, poněvadž mj. popisuje magnetickou sílu, pak získáme podle vztahu (B.8.3) aplikací vektorové operace *rotace*.

Před aplikací operace *rotace* na vztah (B.8.4) musíme vyjít z identity

$$\text{rot}(f\mathbf{X}) = \text{grad } f \times \mathbf{X} + f \text{rot } \mathbf{X} , \quad (\text{B.8.5})$$

kde f je obecná skalární funkce. V našem případě pro objemové proudy v (B.8.4) platí

$$f(\mathbf{r}) = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = \frac{1}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2)^{\frac{1}{2}}} , \quad \mathbf{X}(\mathbf{r}) = \mathbf{i}(\mathbf{r}_0) . \quad (\text{B.8.6})$$

Po operaci *grad* lze odvodit tyto vztahy

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{x - x_0}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (\text{B.8.7a})$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{y - y_0}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (\text{B.8.7b})$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{z - z_0}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (\text{B.8.7c})$$

Z těchto vztahů plyne

$$\text{grad } f = -\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3}. \quad (\text{B.8.8})$$

Aplikací operace *rotace* na první integrál v (B.8.4) a pomocí vztahů (B.8.5) až (B.8.8) obdržíme výraz

$$\text{rot} \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}_0) \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} + \frac{\text{rot } \mathbf{i}(\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}. \quad (\text{B.8.9})$$

Druhý člen je nulový, poněvadž proudová hustota závisí na materiálových souřadnicích, zatímco operace *rotace* je pro polní souřadnice, viz část B.4. Obdržený výsledek je Biot-Savartův zákon

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{(V)} \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}_0) \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \quad (\text{B.8.10})$$

pro objemové proudy. Totéž lze odvodit pro povrchové proudy. Vztahy (B.8.4) tedy platí.

Vektorový potenciál elementárního dipólu o momentu $\mathbf{m}$, který se nachází v bodě o polohovém vektoru $\mathbf{r}_0$, je dán vztahem, viz [4]

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{m} \times \text{grad}_0 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}. \quad (\text{B.8.11})$$

Index *nula* u operace gradient v posledním výrazu upozorňuje opět na to, že derivace probíhá podle materiálových souřadnic. Mezi derivacemi podle polních a materiálových souřadnic platí pro použitou funkci vztah

$$\text{grad}_0 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = -\text{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}. \quad (\text{B.8.12})$$

Liší se tedy jen znaménkem.

B.9 Výběr a porovnání metod řešení

V předchozích částech byla podána zjednodušená teorie tří základních a fyzikálně zcela odlišných metod, které lze využít pro modelování magnetického pole permanentního magnetu. Tento magnet je materiálově popsán vektorem magnetizace $\mathbf{M}$. Jednotlivé přístupy se pak liší tím, jak tuto magnetizaci modelují, tj. na jaké jiné fyzikální veličiny ji převádějí. Jde o tyto přístupy:

1. Magnetizace je nahrazena magnetickými náboji.
2. Magnetizace se převede na vázané proudy.
3. Magnetizace se uvažuje reálně pomocí magnetických dipólů.

Tabulka B.9.1: Porovnání metod řešení.

Modelovací metoda	Magnetické náboje	Vázané proudy	Magnetické dipóly
Fyzikální realita	Neexistuje	Neexistuje	Existuje
Analogie	Formální, částečná	Přesná a úplná	Realita
Složitost	Malá	Střední	Velká
Teorie a vztahy	Jednoduché	Poněkud složitější	Složité
Výpočet	Rychlý	Dosti rychlý	Pomalý
Využití	Omezené	Všestranné	Rozsáhlé

Každý z těchto přístupů vede v zásadě na totéž magnetické pole, závisí jen na přesnosti, s jakou model respektuje realitu, pokud je ovšem přesně známa. Na druhé straně každý z modelů má své silné a slabé stránky. Základní porovnání modelů je uvedeno v tabulce B.9.1. Magnetické náboje představují nejjednodušší řešení, jejich nevýhodou ale je, že neexistují, a tudíž jsou založeny jen na formální analogii. Mohou být tedy využity jen v omezených případech, zde je to ale jednoduché.

Vázané proudy sice neexistují, ale jsou analogií reálných volných proudů. Proto mohou být použity společně s nimi, tedy prakticky ve všech úlohách. Je to metoda univerzální a jednoduchá, pracuje se jen s proudy, ať volnými či vázanými. Oba typy mají stejné účinky. Její aplikace je ale složitější a výpočet pomalejší v porovnání s modelem magnetických nábojů. Je to důsledek toho, že se používá vektorový součin v porovnání s prostým součinem u magnetických nábojů.

Magnetické dipóly jsou realitou, ale aplikace tohoto modelu je náročná teoreticky i výpočetně. Navíc nelze tento model použít jednoduše tam, kde jsou volné proudy. Je nutno zvláštní metodou počítat pole vyvolané dipóly a pole buzené volnými proudy, což je nepochybně komplikace.

Ačkoliv aplikace magnetických nábojů se jeví jako vhodnější pro permanentní magnety, byla dána přednost poněkud složitější, ale univerzální metodě vázaných proudů. Důvodem je zejména bezproblémové rozšíření modelu na složitější případy.

U zvoleného modelu vázaných proudů lze počítat buď vektorový potenciál nebo magnetickou indukci. I přesto, že výpočet vektorového potenciálu je snadnější a rychlejší, byla dána přednost přímému výpočtu magnetické indukce. V případě vektorového potenciálu se magnetická indukce získá jeho rotací. Pokud se vektorový potenciál získá v analytickém tvaru, nečiní jeho derivace obvykle problém a tento přístup je výhodnější. V případě numerických výpočtů je však nutné provést grafickou derivaci, která je všeobecně zatížena velkou chybou. I když existují metody, jak grafickou derivaci efektivně spočítat, nejlepší je se jí úplně vyhnout.

B.10 Síly v magnetickém poli

Magnetické pole silově působí jak na volné proudy, tak na dipóly. Ve zmagnetované látce však můžeme magnetické dipóly nahradit vázanými plošnými a objemovými proudy, viz vztahy (B.6.1). Tato náhrada umožní počítat silové působení magnetického pole na zmagnetovanou látku jednak pomocí silového působení na dipóly, jednak prostřednictvím silového působení na vázané proudy. Obecně jsou tedy tři skupiny objektů, na které působí magnetické pole:

1. volné proudy,
2. vázané proudy,

3. magnetické dipóly.

Poněvadž volné a vázané proudy mají různé prostorové rozložení, existuje šest navzájem odlišných elementárních objektů, na které působí magnetická síla:

1. element liniového proudu $I d\mathbf{l}$,
2. element volného plošného proudu $\mathbf{j} dS$,
3. element volného prostorového proudu $\mathbf{i} dV$,
4. element plošného vázaného proudu $\mathbf{j}_m dS$,
5. element prostorového vázaného proudu $\mathbf{i}_m dV$,
6. elementární magnetický dipól $d\mathbf{m}$.

Na elementy s proudy volnými i vázanými pak působí elementární síla

$$d\mathbf{F}_c(\mathbf{r}) = I(\mathbf{t} \times \mathbf{B}(\mathbf{r})) d\mathbf{r} , \quad (\text{B.10.1a})$$

$$d\mathbf{F}_s(\mathbf{r}) = (\mathbf{j}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r})) dS , \quad (\text{B.10.1b})$$

$$d\mathbf{F}_v(\mathbf{r}) = (\mathbf{i}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r})) dV , \quad (\text{B.10.1c})$$

$$d\mathbf{F}_{sm}(\mathbf{r}) = (\mathbf{j}_m(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r})) dS , \quad (\text{B.10.2a})$$

$$d\mathbf{F}_{vm}(\mathbf{r}) = (\mathbf{i}_m(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r})) dV . \quad (\text{B.10.2b})$$

Ve všech případech se jedná o modifikovaný vztah pro Lorentzovu sílu. Ta působí pro volné proudy na element liniového proudu $I d\mathbf{r} = I\mathbf{t} d\mathbf{r}$, kde $\mathbf{t}$ je jednotkový vektor tečný k elementu $d\mathbf{r}$, na element plošného proudu $\mathbf{j}(\mathbf{r}) dS$ a na element objemového proudu $\mathbf{i}(\mathbf{r}) dV$, viz vztahy (B.10.1). Pro vázané proudy působí síla postupně na element objemového proudu $\mathbf{i}_m dV$ a na element plošného proudu $\mathbf{j}_m dS$, viz vztahy (B.10.2).

V případě magnetického dipólu je silové působení složitější. Uvažujme pravoúhlou smyčku s krátkými hranami Δl_1 a Δl_2 , kterými protéká proud I , viz obr. B.10.1. Tato smyčka se nachází v homogenním magnetickém poli o indukci $\mathbf{B}$, přičemž kladná normála smyčky $\mathbf{n}$, která je spojena se smyslem proudu ve smyčce podle pravidla pravotočivého šroubu, svírá s indukcí úhel α , viz obr. B.10.1a. Na hrany smyčky působí opačně orientované síly podle vztahu (B.10.1a), tj.

$$\Delta F_1 = I\Delta l_1 \cdot B , \quad (\text{B.10.3a})$$

$$\Delta F_2 = I\Delta l_2 \cdot B . \quad (\text{B.10.3b})$$

Síly ΔF_1 působící na hrany Δl_1 se ruší v důsledku tuhosti smyčky. Naproti tomu síly ΔF_2 na hranách Δl_2 tvoří silovou dvojici, které přísluší moment, viz obr. B.10.1a

$$\Delta M = \Delta F_2 \Delta l_1 \cdot \sin \alpha . \quad (\text{B.10.4})$$

Po dosazení ze vztahu (B.10.3b) do (B.10.4) dostaneme výsledný vztah pro moment

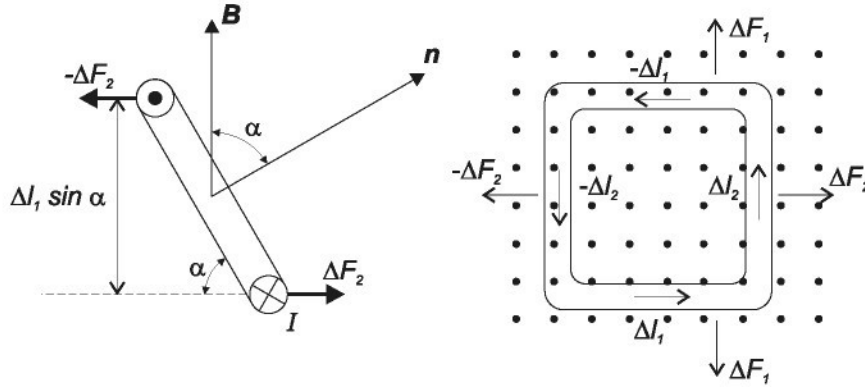
$$\Delta M = I\Delta l_2 \cdot B\Delta l_1 \cdot \sin \alpha = I\Delta l_1 \Delta l_2 \cdot B \sin \alpha = I\Delta S \cdot B \sin \alpha , \quad (\text{B.10.5})$$

kde $\Delta S = \Delta l_1 \Delta l_2$ je plocha vymezená smyčkou.

Necháme-li hrany smyčky konvergovat k nule a proud růst nade všechny meze, pak s přihlédnutím k definici magnetického momentu elementárního dipólu (B.5.2), $d\mathbf{m} = I \mathbf{n} dS = I d\mathbf{S}$, a geometrické definici vektorového součinu dostaneme pro moment silového působení na elementární dipól vztah

$$d\mathbf{M} = I d\mathbf{S} \times \mathbf{B} = d\mathbf{m} \times \mathbf{B} . \quad (\text{B.10.6})$$

Z uvedeného vztahu vyplývá, že magnetické pole o indukci $\mathbf{B}$ se snaží natočit elementární



Obrázek B.10.1: Modelová situace pro odvození mechanického momentu proudové smyčky, [4].

dipól o momentu $d\mathbf{m}$ do svého směru tak, aby moment dipólu a magnetická indukce splývaly.

V obecném případě je magnetické pole nehomogenní. Kromě momentu, který elementárním dipólem pouze otáčí, působí též síla, která se jej snaží posunout. Vztah pro tuto sílu lze nalézt v literatuře, např. [4].

Můžeme tedy shrnout: V homogenním magnetickém poli určeném magnetickou indukcí $\mathbf{B}$ působí na elementární magnetické dipóly o magnetickém momentu $\mathbf{m}$ pouze mechanický moment síly $\mathbf{M}_f$ daný rovnicí

$$\mathbf{M}_f = \mathbf{m} \times \mathbf{B} . \quad (\text{B.10.7})$$

Pokud je magnetické pole nehomogenní, tak na elementární magnetický dipól o magnetickém momentu $\mathbf{m}$ působí rovněž síla $\mathbf{F}$ určená vztahem

$$\mathbf{F} = (\mathbf{m} \text{ grad}) \mathbf{B} . \quad (\text{B.10.8})$$

Tato síla se snaží táhnout dipól do místa, kde je indukce silnější. Pro názornost je poslední vztah rozepsán:

$$F_x = m_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + m_y \frac{\partial B_x}{\partial y} + m_z \frac{\partial B_x}{\partial z} , \quad (\text{B.10.9a})$$

$$F_y = m_x \frac{\partial B_y}{\partial x} + m_y \frac{\partial B_y}{\partial y} + m_z \frac{\partial B_y}{\partial z} , \quad (\text{B.10.9b})$$

$$F_z = m_x \frac{\partial B_z}{\partial x} + m_y \frac{\partial B_z}{\partial y} + m_z \frac{\partial B_z}{\partial z} . \quad (\text{B.10.9c})$$

Tím jsme popsali silové působení magnetického pole na všech šest objektů vyjmenovaných výše. Zatím jsme se nestarali o to, jak je magnetické pole buzeno. Tím se budeme zabývat nyní.

Každý ze šesti objektů vyjmenovaných výše však také magnetické pole vytváří. Pro volné a vázané proudy použijeme Biot-Savartův zákon (B.4.3) a dostaneme těchto pět vztahů.

$$\mathbf{B}_I(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{(c)} \frac{d\mathbf{r}_0 \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^3} , \quad (\text{B.10.10a})$$

$$\mathbf{B}_i(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{(S)} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}_0) \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^3} dS, \quad (\text{B.10.10b})$$

$$\mathbf{B}_j(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{(V)} \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}_0) \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^3} dV, \quad (\text{B.10.10c})$$

$$\mathbf{B}_{jm}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{(S_m)} \frac{\mathbf{j}_m(\mathbf{r}_0) \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^3} dS, \quad (\text{B.10.10d})$$

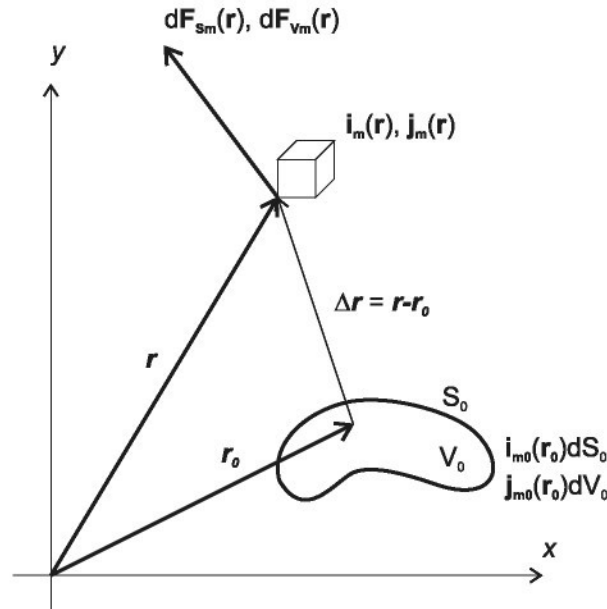
$$\mathbf{B}_{im}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{(V_m)} \frac{\mathbf{i}_m(\mathbf{r}_0) \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^3} dV. \quad (\text{B.10.10e})$$

Význam geometrických symbolů byl vysvětlen dříve v části B.4. Integrace probíhá po řadě podél tenkého vodiče (c) s volným liniovým proudem, po ploše (S) s volnými povrchovými proudy, v objemu (V) s volnými objemovými proudy, po ploše (S_m) s vázanými povrchovými proudy a v objemu (V_m) s vázanými objemovými proudy.

Pro magnetické pole buzené zmagnetovanou látkou o magnetizaci $\mathbf{M}_0$ v objemu V_d platí vztah

$$\mathbf{B}_d(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{(V_d)} \left(\frac{3\mathbf{M}_0 \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^5} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) - \frac{\mathbf{M}_0}{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^3} \right) dV_0, \quad (\text{B.10.11})$$

který vychází ze vztahu (B.5.3) pro elementární dipól o objemu dV_0 , s dipólovým momentem $d\mathbf{m} = \mathbf{M}_0 dV_0$. Tyto vztahy pro magnetickou indukci se nyní mohou dosadit do vztahů



Obrázek B.10.2: Zdroje magnetického pole

(B.10.1), (B.10.2) a (B.10.8) pro elementární sílu. Dostáváme 36 kombinací. Z nich budou uvedeny jen ty, které jsou důležité pro řešení problému.

Elementární síla, kterou působí vázané povrchové proudy o hustotě $\mathbf{j}_{m0}(\mathbf{r}_0)$ tekoucí po ploše označené jako S_0 na proudový element s vázaným povrchovým proudem $\mathbf{j}_m(\mathbf{r})$

v místě o polohovém vektoru $\mathbf{r}$, viz obr. B.10.2, je dána vztahem

$$d\mathbf{F}_{Sm}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}_m(\mathbf{r}) \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{(S_0)} \frac{\mathbf{j}_{m0}(\mathbf{r}_0) \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} dS_0 \right) dS. \quad (\text{B.10.12})$$

Elementární síla, kterou působí vázané povrchové proudy o hustotě $\mathbf{j}_{m0}(\mathbf{r}_0)$ tekoucí na ploše S_0 a vázané objemové proudy o hustotě $\mathbf{i}_{m0}(\mathbf{r}_0)$ proudící v objemu V_0 na proudový element s vázaným povrchovým proudem $\mathbf{j}_m(\mathbf{r}) dS$ a na proudový element s vázaným objemovým proudem $\mathbf{i}_m(\mathbf{r}) dV$, přičemž oba jsou v bodě o polohovém vektoru $\mathbf{r}$, viz obr. B.10.2, je dána po řadě vztahy

$$\begin{aligned} d\mathbf{F}_{Sm}(\mathbf{r}) = & \mathbf{j}_m(\mathbf{r}) \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{(S_0)} \frac{\mathbf{j}_{m0}(\mathbf{r}_0) \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} dS_0 \right) dS + \\ & + \mathbf{j}_m(\mathbf{r}) \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{(V_0)} \frac{\mathbf{i}_{m0}(\mathbf{r}_0) \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} dV_0 \right) dS, \end{aligned} \quad (\text{B.10.13a})$$

$$\begin{aligned} d\mathbf{F}_{Vm}(\mathbf{r}) = & \mathbf{i}_m(\mathbf{r}) \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{(S_0)} \frac{\mathbf{j}_{m0}(\mathbf{r}_0) \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} dS_0 \right) dV + \\ & + \mathbf{i}_m(\mathbf{r}) \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{(V_0)} \frac{\mathbf{i}_{m0}(\mathbf{r}_0) \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} dV_0 \right) dV. \end{aligned} \quad (\text{B.10.13b})$$

Je zřejmé, že úplný výraz pro působící sílu se stává velmi složitým a nepřehledným.

Pro úplnost a zajímavost zde uvádíme úplný výraz pro silové působení dvou elementárních dipólů, který byl odvozen v práci [A8].

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_e = & \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{m}_0 + m_c m_{0c}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^5} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) - \frac{5(\mathbf{m}_0 \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0))(\mathbf{m} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^7} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + \right. \\ & \left. + \frac{3(\mathbf{m} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^5} \mathbf{m}_0 \right) = \\ = & \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{m}_0 + m_c m_{0c}}{(\Delta r)^5} \Delta \mathbf{r} - \frac{5(\mathbf{m} \Delta \mathbf{r})^2}{(\Delta r)^7} \Delta \mathbf{r} + \frac{3(\mathbf{m} \Delta \mathbf{r})}{(\Delta r)^5} \mathbf{m}_0 \right), \end{aligned} \quad (\text{B.10.14})$$

kde

$$m_c = m_x, \quad m_c = m_y, \quad m_c = m_z \quad \text{pro} \quad F_{ex}, \quad F_{ey}, \quad F_{ez}, \quad (\text{B.10.15})$$

a

$$m_{c0} = m_{x0}, \quad m_{c0} = m_{y0}, \quad m_{c0} = m_{z0} \quad \text{pro} \quad F_{ex}, \quad F_{ey}, \quad F_{ez}. \quad (\text{B.10.16})$$

Výslednou sílu, kterou magnetické pole působí na reálné prvky konečných rozměrů, získáme integrací vztahů (B.10.1), (B.10.2) a (B.10.8) po příslušné křivce, ploše nebo objemu. Jako příklad uvedeme sílu působící na zmagnetované těleso s povrchem S , po kterém tečou plošné vázané proudy o hustotě $\mathbf{j}_m(\mathbf{r})$

$$\mathbf{F}_m = \int_{(S)} (\mathbf{j}_m(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r})) dS. \quad (\text{B.10.17})$$

Ostatní vztahy se zapíší analogicky.

Pokud je magnetické pole o indukci $\mathbf{B}$ v posledním vztahu buzeno zmagnetovaným tělesem o povrchu S_0 , kterým tekou vázané povrchové proudy o hustotě $\mathbf{j}_{m0}(\mathbf{r}_0)$, pak se výsledný vztah pro silové působení získá kombinací vztahů (B.10.17) a (B.10.10e), nebo též (B.10.12)

$$\mathbf{F}_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{(S)} \mathbf{j}_m(\mathbf{r}) \times \left(\int_{(S_0)} \frac{\mathbf{j}_{m0}(\mathbf{r}_0) \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} dS_0 \right) dS . \quad (\text{B.10.18})$$

Kromě síly obecně na těleso působí též silový moment. Pro jednoduchost vztahujeme moment síly k počátku souřadné soustavy. Obecně je např. moment elementární magnetické síly působící na element volného objemového proudu dán vztahem

$$d\mathbf{M}_v = \mathbf{r} \times d\mathbf{F}_v = (\mathbf{r} \times \mathbf{i} \times \mathbf{B}) dV = \mathbf{i}(\mathbf{r}\mathbf{B}) dV - \mathbf{B}(\mathbf{r}\mathbf{i}) dV, \quad (\text{B.10.19})$$

kde byla využita identita $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \mathbf{B}(\mathbf{A}\mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A}\mathbf{B})$. Ze vztahů (B.10.1) a (B.10.2) pak plynou tyto vztahy pro elementární momenty

$$d\mathbf{M}_c = I\mathbf{t}(\mathbf{r}\mathbf{B}) dr - I\mathbf{B}(\mathbf{r}\mathbf{t}) dr , \quad (\text{B.10.20a})$$

$$d\mathbf{M}_s = \mathbf{j}(\mathbf{r}\mathbf{B}) dS - \mathbf{B}(\mathbf{r}\mathbf{j}) dS , \quad (\text{B.10.20b})$$

$$d\mathbf{M}_v = \mathbf{i}(\mathbf{r}\mathbf{B}) dV - \mathbf{B}(\mathbf{r}\mathbf{i}) dV , \quad (\text{B.10.20c})$$

$$d\mathbf{M}_{sm} = \mathbf{j}_m(\mathbf{r}\mathbf{B}) dS - \mathbf{B}(\mathbf{r}\mathbf{j}_m) dS , \quad (\text{B.10.20d})$$

$$d\mathbf{M}_{vm} = \mathbf{i}_m(\mathbf{r}\mathbf{B}) dV - \mathbf{B}(\mathbf{r}\mathbf{i}_m) dV . \quad (\text{B.10.20e})$$

Pro moment působící na elementární dipól byl dříve odvozen vztah (B.10.7).

Pokud mechanický moment vztahujeme k bodu o polohovém vektoru $\mathbf{r}_r$, vztah (B.10.19) přejde na vztah

$$d\mathbf{M}_v = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_r) \times d\mathbf{F}_v = ((\mathbf{r} - \mathbf{r}_r) \times \mathbf{i} \times \mathbf{B}) dV . \quad (\text{B.10.21})$$

Tímto bodem může být např. těžiště, pokud je těleso, na které magnetická síla působí, volné. Může to být i jiný bod podle toho jaké má těleso stupně volnosti.

Mechanický moment můžeme vztahovat i k ose. Pro daný element síly je jeho polohový vektor kolmý k této ose a směřuje od ní k elementu síly. V úplně obecném tvaru se tato definice popisuje analytickým vztahem obtížně. Pro konkrétní technické situace se volí vhodná souřadná soustava a vztah pro mechanický moment vůči ose je poměrně jednoduchý.

Výsledný moment je součtem elementárních momentů. Příslušné poměrně složité vztahy lze snadno odvodit. Teoretické odvození, použité v této a předchozích kapitolách je použito pro vlastní výpočty magnetického pole, síly a momentu a výsledky jsou uvedeny v dalších kapitolách.

Experiment

C.1 Měřicí aparatura

Úkol měřit magnetickou indukci prostorových objektů s sebou přinesl i nelehký úkol zkonstruovat přesnou měřicí aparaturu. Jednalo se teoreticky o bodové měření magnetické indukce ve vymezeném prostoru. Rozbor možných řešení tím byl velice omezen, a proto tuto velmi zajímavou a tvůrčí část přípravy experimentu podrobně nerozebíráme. Aparatura musí obsahovat mechanickou část, která zajistí umístění měřícího prvku do daného bodu. K tomu je vhodný lineární posuv. K měření magnetické indukce se použije Hallova sonda, která převádí magnetickou indukci na elektrické napětí. Je to pasivní senzor, musí být napájen předepsaným konstantním proudem.

Realizace aparatury byla poměrně náročná, aparatura byla vyvíjena postupně v několika etapách. V následující kapitole bude nejprve rozebrána historie vývoje měřicí aparatury, kroky a důvody, které vedly k postupným konstrukčním a koncepčním změnám. Poněvadž aparatura je mechatronický systém, následuje popis mechanické a elektronické části. Elektronická část zajišťuje jednak prostorové ovládání sondy, jednak měření magnetické indukce. Proto se další část logicky zabývá programovým vybavením pro plně automatizované měření.

Cílem bylo co nejpřesnější měření prostorového průběhu magnetické indukce, přičemž měřicí systém je poměrně složitý. Proto jsme se v přiměřeném rozsahu zabývali nejistotou měření, a to s cílem, jak efektivně dosáhnout maximální možné přesnosti. Poněvadž častou příčinou nahodilé nejistoty je všudypřítomný a silný šum, soustředili jsme se též na rozbor možností jak tuto nejistotu účinně a jednoduše redukovat.

Všechny prvky, mechanické i elektronické, vykazují určitý rozptyl parametrů. Pro konkrétně vybrané prvky je proto vhodné provést citlivostní analýzu. Touto otázkou jsme se zabývali u Hallovy sondy měřící magnetickou indukci.

C.1.1 Historie

V počátku se vyšlo z dostupných zdrojů pracoviště, mezi které patřily dva lineární posuvy od firmy FESTO, viz obr. C.1.2, o pracovním zdvihu půl metru a jeden metr. V první práci, viz [A30], byla zkontruována první verze mechanického polohovacího stolu z výše zmíněných lineárních posuvů. Ty byly poháněny krokovými motory pomocí řídicích jednotek krokových motorů PKM02 od firmy SOFCON. Napájení celé struktury zajišťoval systém vlastní konstrukce. Zpětnou vazbu od senzorů krajních poloh zajišťovala jednoduchá kombinační logika. Ovládání řídicích jednotek krokových motorků bylo realizováno pomocí paralelního portu, na který byly zasílány pravoúhlé impulsy se střídou 50 % pomocí interního časovače na základní desce osobního počítače staršího data výroby. Komunikace s uživatelem byla řešena

pomocí jednoduché aplikace pod operačním systémem MS-DOS. Projekt, viz [A30], byl nadále soustavně rozšiřován a vylepšován. Dílčí výsledky lze nalézt např. v publikaci [A29].

Dalším krokem ve zlepšování aparatury bylo postupné převedení ovládacího SW pod operační systém MS Windows. Cíle bylo dosaženo paralelně s řešením a částečně i v diplomové práci, viz [A27]. Jedním z výsledků byl univerzální systém pro ovládání měřicích přístrojů. Jeho koncepce a struktura umožnila ovládat a vyčítat data z velkého spektra zařízení, od obyčejných multimetrů s komunikací po TIA/EIA¹ 232 až po špičkové měřicí přístroje komunikující po sběrnici GPIB² (IEEE³ 488.2). Strukturálně se jednalo o vyšší abstraktní jazyk, vrstvu, která nerozlišuje mezi typem zařízení ani rozhraním, přes které je připojeno k řídicímu počítači. Komunikace je řešena několika způsoby, pomocí knihoven VISA⁴ nebo přes API⁵ rozhraní operačního systému. Který z přístupů se nakonec vybere pro připojení k zařízení záleží na jeho typu. Děje se tak automaticky bez vědomí uživatele. Interaktivitu a zasilání dat i mezi přístroji zajišťuje vlastní integrovaný parser, který dokáže zpracovávat numerické výrazy i operace s proměnnými stejným způsobem práce jako např. v prostředí MATLAB. Podrobné informace o této verzi ovládacího SW vhodného pro měřicí aparaturu lze nalézt v [A27] nebo v publikaci [A26].

Ukázalo se, že metrový lineární posuv není pro svou délku dostatečně tuhý v krutu, docházelo k nechtěnému pootočení v z-ové ose, bylo proto pořízeno kratší rameno o pracovním zdvihu 300 mm. Z ramena o zdvihu 500 mm bylo vytvořeno základové pro polohování v jedné ose a kratší použito pro osu druhou. Reléové senzory koncových poloh, které byly použity v předchozích verzích, jsou nahrazeny spolehlivějšími optickými proximitními senzory. Výsledky měření permanentních magnetů pro průmysl s touto verzí aparatury lze nalézt např. v publikaci [A19]. Realizace měřicí aparatury byla podpořena i grantem FRVŠ 1843/2005. Současně byl učiněn pokus o distribuci inteligence na řídicí jednotky krokových motorů. O to se pokusil student v rámci své diplomové práce, viz [39].

Nové jednotky řízení krokových motorů měly nahradit původní od firmy SOFCON při zachování a rozšíření jejich vlastností. Nové jednotky umožňovaly dynamicky měnit jak rychlost, tak zrychlení, a to nezávisle v každé ose zvlášť. S touto verzí aparatury byla provedena první přibližná měření permanentních magnetů pro ověření prvních realizovaných modelů, viz např. [A10]. Nevýhodou byla velmi výrazná komplikovanost firmware řídicích jednotek krokových motorů, který již neumožňoval provádět další, výraznější zásahy do kódu z důvodu nedostatečné kapacity paměti programu procesoru.

Z výše uvedených důvodů bylo ponecháno původní vlastní řešení s jednotkami PKM02 od firmy SOFCON. Současně došlo ke kompletní výměně elektroinstalace napájecího systému. Lineární zdroje byly nahrazeny průmyslovými spínanými zdroji napětí, tato změna vedla k výraznému uspořené místa i hmotnosti konstrukce. Aby bylo možné realizovat vzdálenou komunikaci se systémem jako celkem, byla připravena interní řídicí jednotka. Ta od osobního počítače přejímala ovládací příkazy podle standardu SCPI⁶ a transformovala je do podoby elektrických signálů pro jednotky PKM02, viz další kapitoly. S měřicí aparaturou v poslední konfiguraci byla provedena zásadní měření nezbytná pro tuto práci. Dílčí výsledky lze nalézt v publikacích [A6], [A5], [A4], [A3], [A2] a [A1], řazeno chronologicky.

V následujícím textu bude zvlášť popsána měřicí aparatura, mechanická, elektrická a programová část, a to pro současný konstrukční stav aparatury. Obrázek C.1.1 reflektuje elektro-mechanické blokové schéma aparatury a následující kapitoly se na něj budou postupně odkazovat.

¹Telecommunications Industry Association/Electronics Industries Association

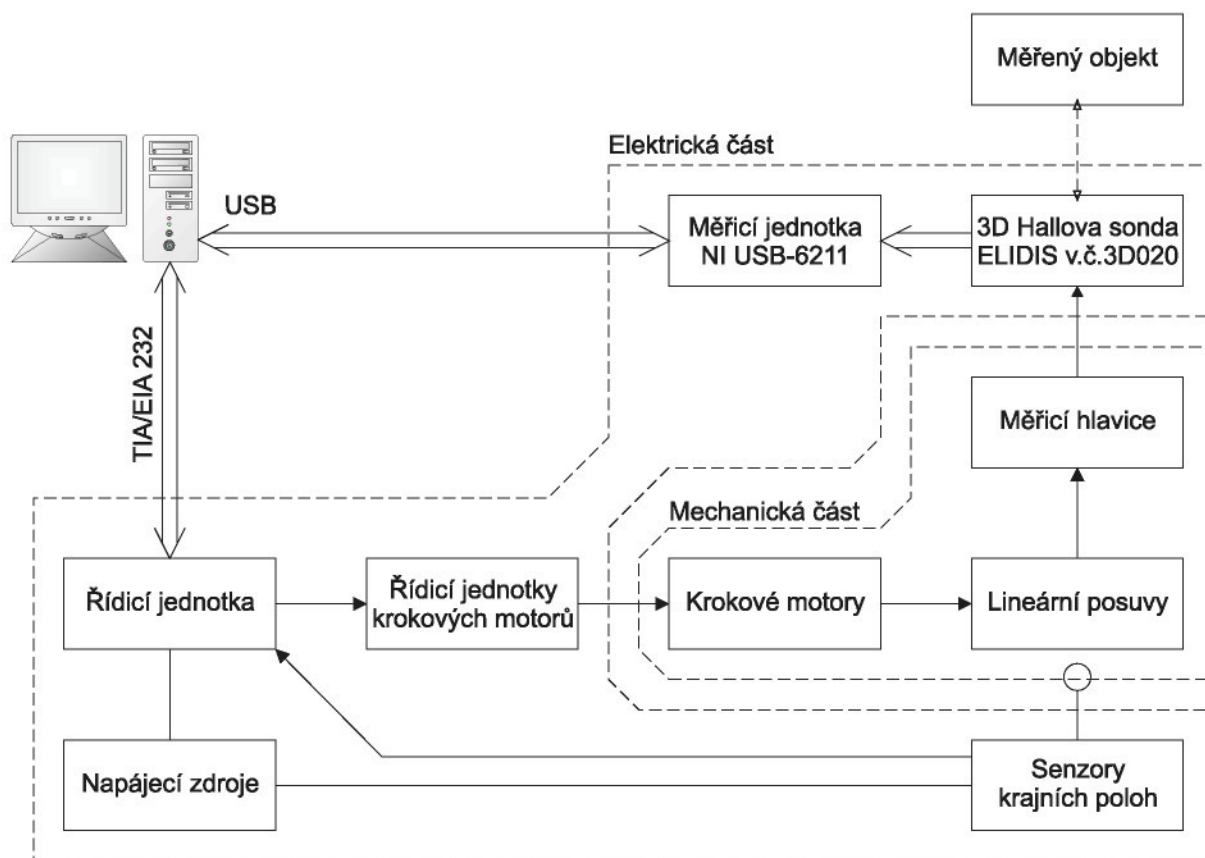
²General Purpose Interface Bus

³Institute of Electrical and Electronics Engineers

⁴Virtual Instrument Software Architecture

⁵Application Programming Interface

⁶Standard Commands for Programmable Instruments



Obrázek C.1.1: Blokové schéma realizované měřicí aparatury.

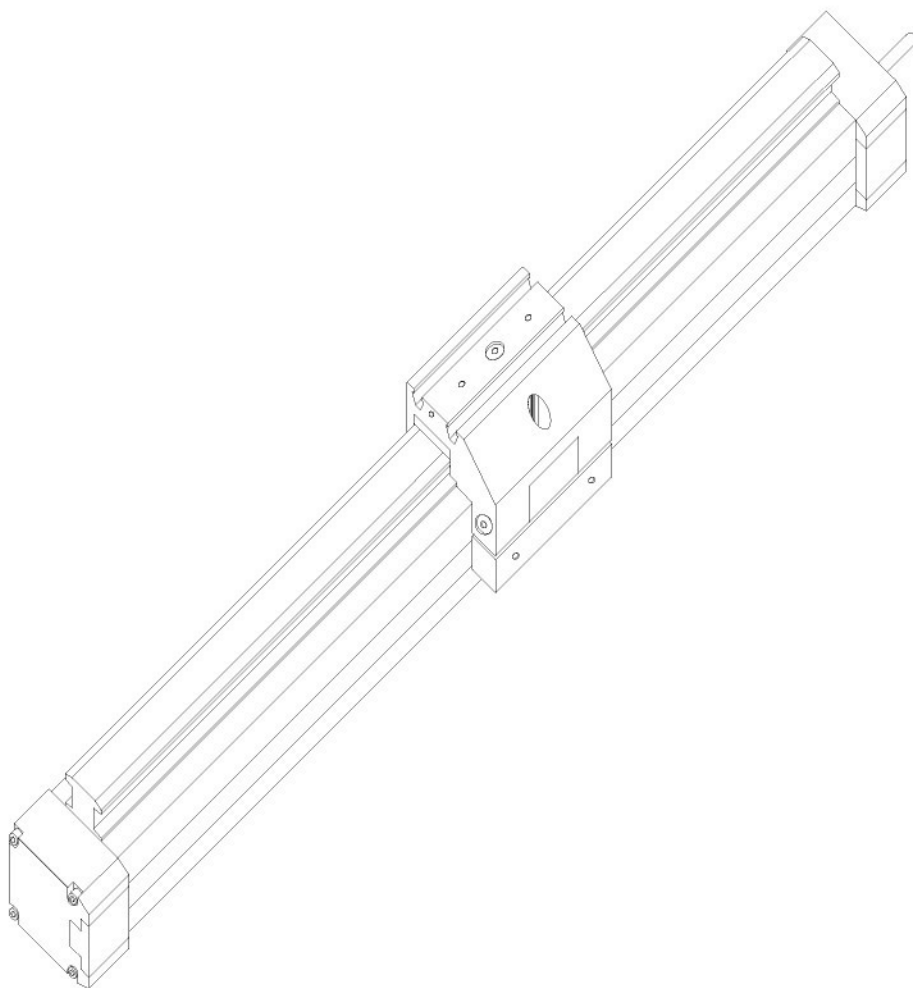
C.1.2 Mechanická část

Mechanická část aparatury je složena z několika konstrukčních samostatných částí:

1. Dvou lineárních posuvů pro 2D posuv,
2. adaptační sady pro kolmé spojení těchto posuvů,
3. krokových motorů k pohonu posuvů,
4. pružné spojky přenášející krouticí moment,
5. plastové hlavice pro uchycení Hallovy sondy na lineární posuv.

Lineární posuvy

Ke konstrukci polohovacího mechanismu byly zvoleny „elektrické“ lineární posuvy od firmy FESTO, viz kap. C.1.1. Posuvy mají externě vyvedenu hřídel pro připojení pohonných jednotek – motorů přes pružnou spojku. Na obr. C.1.2 je zobrazen autorem vytvořený 3D model lineárního posuvu. Přesné typové označení použitých posuvů je uvedeno v tab. C.1.1. Vhodnost lineárních posuvů pro úlohy měření magnetického pole udává tab. C.1.2, kde je uvedeno materiálové složení jednotlivých součástí. Kromě vřetena a krycí pásky jsou všechny součásti z paramagnetického hliníku, viz [42]. Posuvy tak ovlivňují měřené pole pouze nepatrně. Paralelně s konstrukcí aparatury autor provedl i rešerši lineárních posuvů, které byly na trhu k dispozici a byly by pro danou úlohu vhodné. Na základě tohoto průzkumu lze konstatovat, že dominují posuvy specializované pro průmyslovou praxi, které na rozdíl od zvoleného posuvu od firmy FESTO nemají tak vysokou míru opakovatelnosti polohování a v neposlední řadě jsou jako celky konstruovány z odolnějších a tvrdších materiálů, např. z oceli, což je feromagnetikum. Změna konstrukčních materiálů a robustnost posuvů



Obrázek C.1.2: 3D model lineárního posuvu FESTO.

má přímý vliv na základní parametry posuvu, např. maximální rychlost, zrychlení, dovolené zatížení a opakovatelnost měření. Provedený průzkum desítek typů lineárních posuvů s ohledem na kladené požadavky a typ měřené úlohy potvrdil, že posuvy DGE-SP od firmy FESTO jsou pro danou úlohu vhodné a není nutné je nahrazovat.

V tabulce C.1.3 jsou uvedeny technické specifikace posuvů FESTO DGE-SP. Pro úlohu měření magnetického pole, kde je potřeba v každém měřicím bodě zastavit a provést několik tisíc odměrů, viz např. kap. C.2.2, parametry posuvu, viz tab. C.1.3, plně vyhovují. Maximální rychlost 0.5 m/s je více než dostačující, konstanta posuvu je v dobrém poměru s opakovatelnou přesností. Vzhledem ke konstrukci dvourozměrného polohovacího systému patří mezi nejdůležitější parametry maximální zatížení, vertikální i horizontální. Maximální vertikální zatížení představuje maximální hmotnost, kterou lze ještě připevnit k unášечи

Tabulka C.1.1: Přesné typové označení použitých lineárních posuvů a jejich základní parametry. Popis významu jednotlivých konfiguračních parametrů lze nalézt v technickém listu výrobce, viz např. [42].

#	výrobce	typ	pracovní zdvih
1	FESTO	DGE-25-500-SP KG-KF-GK-SV	500 mm
2	FESTO	DGE-25-300-SP KG-KF-GK-SV	300 mm

Tabulka C.1.2: Materiálové složení jednotlivých součástí lineárních posuvů, podle specifikace výrobce, viz [42].

Součást	Materiál
zadní víko	tvárný legovaný hliník, elaxovaný
vřeteno	válcovaná ložisková ocel
unášec	tvárný legovaný hliník, elaxovaný
profil	tvárný legovaný hliník, elaxovaný
krycí páska	ocel, nerezová

Tabulka C.1.3: Technické specifikace lineárních posuvů, viz [41].

Typ / parametr	hodnota
Maximální zatížení – horizontální	25 kg
Maximální zatížení – vertikální	10 kg
Konstanta posuvu	10 mm/otáčku
Max. krouticí moment	0.45 Nm
Max. posuvová síla (teoretická)	250 N
Max. posuvná rychlost	0.5 m/s
Max. dovolené zrychlení	6 m/s ²
Opakovatelná přesnost, podle DIN 230/2	±0.02mm

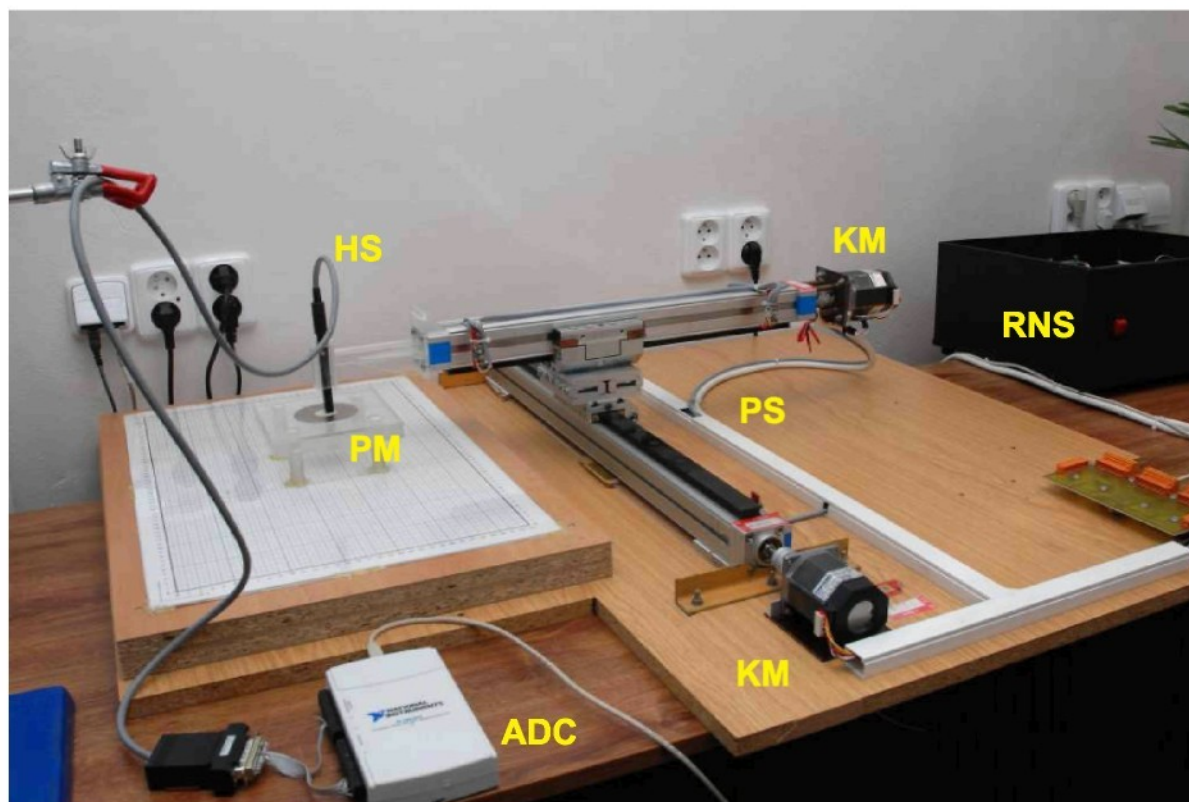
lineárního posuvu, aniž by došlo k poškození vnitřního mechanismu posuvu. Výrobce do maximálního zatížení garantuje i opakovatelnou přesnost. Vertikální zatížení posuvu bylo malé v porovnání s maximální dovolenou hodnotou. Ten samý předpoklad platí i pro maximální horizontální zatížení. Tento údaj je v přímé souvislosti s maximální teoretickou posuvovou silou, viz tab. C.1.3.

Adaptační sada pro kolmé spojení posuvů

Vrchní rameno, viz např. obr. C.1.3 a C.1.4 je ke spodnímu připevněno přes adaptační sadu FESTO HMAV-DL-25-176005, viz [43].

Oba unášec, jak spodního tak vrchního ramene, jsou díky zmíněné adaptační sadě (ramena jsou připevněna unášeci směrem k sobě) namáhány téměř stejnou konstantní vertikální silou. Ten samý předpoklad platí i pro síly horizontální. Rozdíl sil je dán pouze hmotností vrchního unášec a adaptační sady, které jsou v porovnání s hmotností zbytku posuvu zanedbatelné.

Při použití adaptační sady, viz [43], jsou posuvy vzájemně spojeny přes své unášec. Při pohybu horního posuvu se mění jeho těžiště a na dolní posuv tak působí nezanedbatelný krouticí moment. Ten může při delším rameni způsobit výraznou odchylku sondy. V technických parametrech posuvu jsou však udány pouze maximální dovolené krouticí momenty a není uvedena odchylka způsobená právě tímto maximálním krouticím momentem. S cílem snížit vliv momentu na výchylku koncového bodu posuvu byla zvolena poloha horního posuvu tak, aby moment měnil znaménko a krajní hodnoty byly přibližně stejné. Tím je vliv krouticího momentu minimalizován. Praktické experimenty ukázaly, že v tomto uspořádání je celá sestava 2D posuvu dostatečně tuhá a krouticí moment se na poloze sondy prakticky neprojeví.



Obrázek C.1.3: Fotografie pracoviště pro měření magnetického pole permanentních magnetů. HS – Hallova sonda; PM – Permanentní magnet - měřený vzorek; ADC – Měřicí zařízení - analogově-digitální převodník; KM – Krokové motory; PS – Polohovací stůl - lineární posuvy FESTO; RNS – Řídící a napájecí jednotka (připojena po sériové sběrnici k PC).

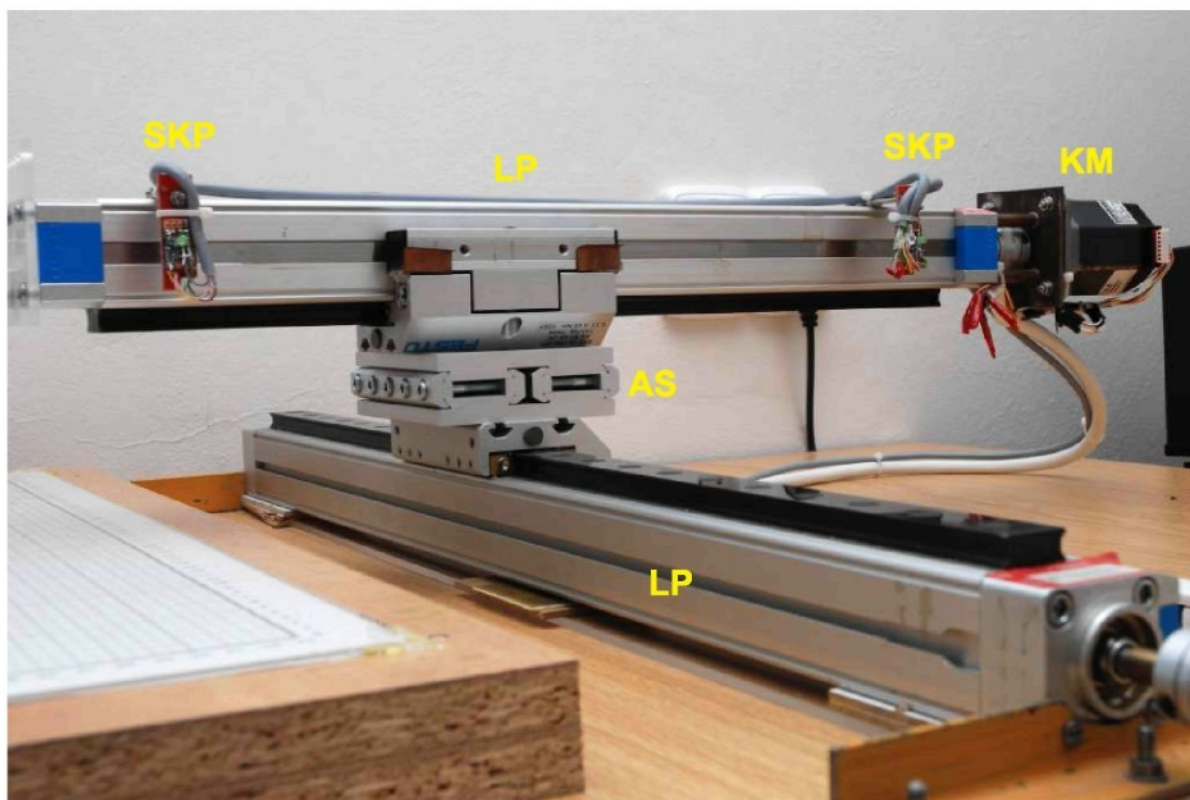
Krokový motor

Na trhu je k dispozici nepřeberné množství krokových motorků, lišících se elektrickými a mechanickými parametry, velikostí, hmotností, cenou atd. Pro naši úlohu nebyla volba krokového motorku kritická, důležité byly zejména relativně malé rozměry, malá hmotnost, jemný krok a dostatečný krouticí moment. Těmto požadavkům vyhovuje např. krokový motor POWERMAX II P22NRXB od firmy Pacific Scientific, viz [44]. Jeho základní technické parametry jsou uvedeny v tab. C.1.4 pro použité *bipolární-sériové* zapojení vinutí motoru. Hybridní krokový motor lze elektricky provozovat v několika režimech. Ty lze rozdělit do dvou skupin. První, která je odvislá od způsobu zapojení jednotlivých vinutí motoru, a to sériově či paralelně a druhá skupina, která je závislá na způsobu napájení krokového motoru, to může být unipolární nebo bipolární. Sériové zapojení vinutí bylo zvoleno na základě technických parametrů motoru, viz [44]. Sériovým zapojením dílčích vinutí na rozdíl od paralelního dojde k nárůstu odporu a impedance vinutí více než čtyřnásobně, a tím ke snížení energetické náročnosti motoru. To se částečně projeví i na velikosti přídržného proudu motoru⁷. Z těchto důvodů se použilo bipolárně sériové zapojení.

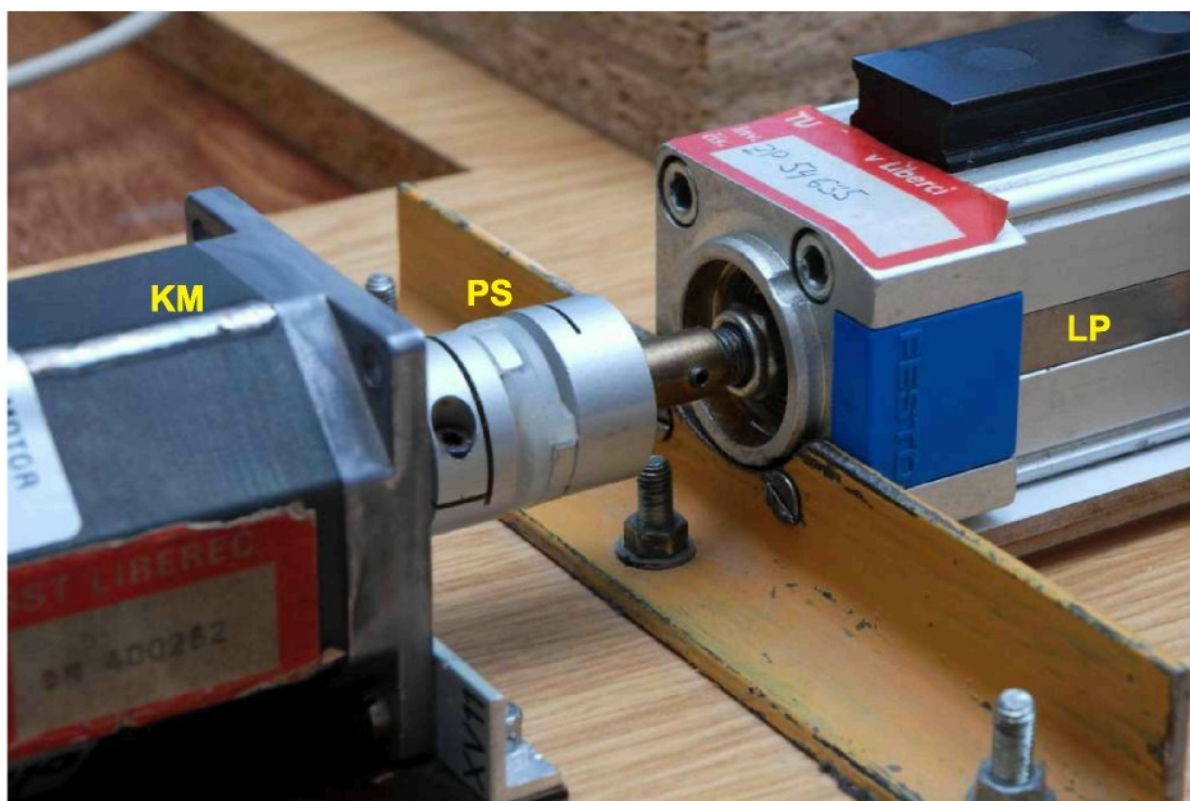
Takové zapojení vinutí s sebou přineslo snížení maximálního zrychlení, rychlosti a momentu motoru. I přesto jsou motory provozovány s dostatečnou výkonovou rezervou pro měřenou úlohu. Nejistotu v určení polohy, kterou způsobuje krokový motor, popisuje kap. C.2.1.

Bipolární řízení krokového motoru je zvoleno z důvodu kompatibility s řídicí jednotkou krokových motorů. Bipolární řízení nemá ve srovnání s unipolárním žádné nevýhody, ušetří

⁷Velikost přídržného proudu je dána částečně celkovou impedancí vinutí motoru (podle zapojení) a dále konfigurací řídicí jednotky krokových motorů SOFCON PKM02, viz [45].



Obrázek C.1.4: Detailní fotografie polohovacího stolu. LP – Lineární posuvy FESTO; SKP – Senzory krajních poloh; KM – Krokové motory; AS – Adaptační sada pro spojení dvou lineárních posuvů.



Obrázek C.1.5: Detailní fotografie spojení krokového motoru s lineárním posuvem pomocí pružné spojky. KM – Krokový motor; LP – Lineární posuv FESTO; PS – Pružná spojka.

Tabulka C.1.4: Základní mechanické a elektrické vlastnosti vybraného krokového motorku Pacific Scientific POWERMAX II P22NRXB.

	SM2321-1400 (P22NRXB)
Statický moment	1.5 Nm
Zbytkový moment	47 mN m
Nejvyšší provozní moment při 500Hz	1.1 Nm
Moment setrvačnosti rotoru	$0.025 \text{ kg m}^2 10^{-3}$
Hmotnost	1.13 kg
Délka L_{max}	78.8 mm
Příruba-standard NEMA 23	$57.1 \times 57.1 \text{ mm}$
Průměr hřídele	6.35 mm
Délka kroku	1.8°
Tolerance kroku	0.06°
Izolační třída NEMA	B (130° C)
Proud	2.3 A
Indukčnost	8.4 mH
Odpor	1.52Ω

však vyvedení středního vodiče vinutí zpět do řídicích jednotek. Umístění obou krokových motorků je na obr. C.1.3. Detail pro unášený posuv je na obr. C.1.4. Přenos krouticího momentu je zřejmý z obr. C.1.5.

Pružná spojka

K přenosu krouticího momentu od krokového motorku k posuvu se používá pružná spojka, poněvadž pak není nutno dbát na přesnou rovnoběžnost os obou prvků. Na pružnou spojku nejsou kladeny žádné zvláštní požadavky. Zvolili jsme pružnou spojku HUCO Oldham 25, jejíž typické parametry jsou v tabulce C.1.5, viz [46].

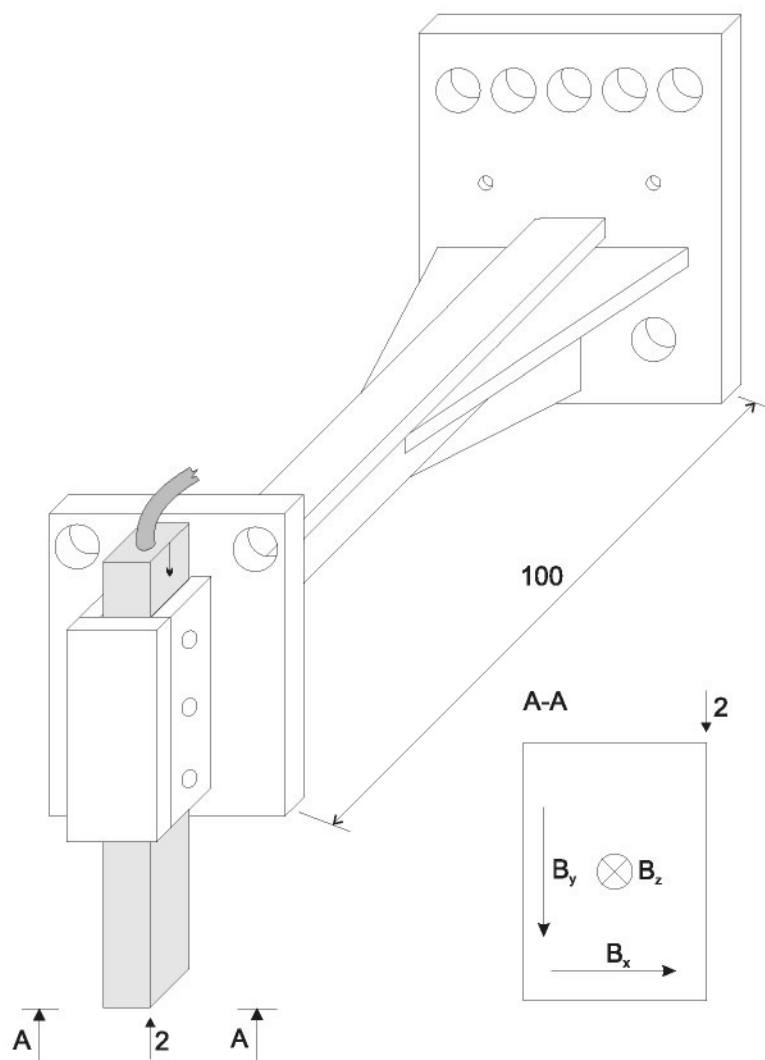
Tabulka C.1.5: Technické parametry použité pružné spojky HUCO Oldham 25.

Max. točivý moment	Max. odchylka			Torzní		Max. statický moment
	Úhlová	Radiální	Axiální	Poměr	Tuhost	
4 Nm	0.5°	0.2 mm	$\pm 0.1 \text{ mm}$	0.28 deg/Nm	205 Nm/rad	13 Nm

Vybraná velikost pružné spojky reflektuje velikost a typ lineárních posuvů, tření unášeče a dimenzované momentové zatížení. Maximální moment, na který byla pružná spojka dimenzována, počítá s budoucím rozšířením automatického polohovacího systému o třetí osu. K té by byla připevněna pouze měřicí sonda, z toho důvodu se do budoucna počítá pouze s miniaturním pohonem a lineárním posuvem, nebude se tedy jednat o stejný typ posuvu, které jsou již v aparatuře použity, viz [42].

Plastová hlavice pro uchycení Hallovy sondy

Hallovu sondu pro 3D měření je vhodné umístit v dostatečné vzdálenosti od feromagnetických materiálů. Proto jsme použili přípravek, který je znázorněn na obr. C.1.6. Zakreslena je orientace sondy a kladné smysly magnetické indukce v jednotlivých směrech, ty vycházejí z dat výrobce, viz [48]. Na obrázku jsou zaneseny montážní i funkční otvory, které nejsou v současné verzi aparatury využity. Vzdálenost mezi stranou sloužící pro uchycení k lineár-

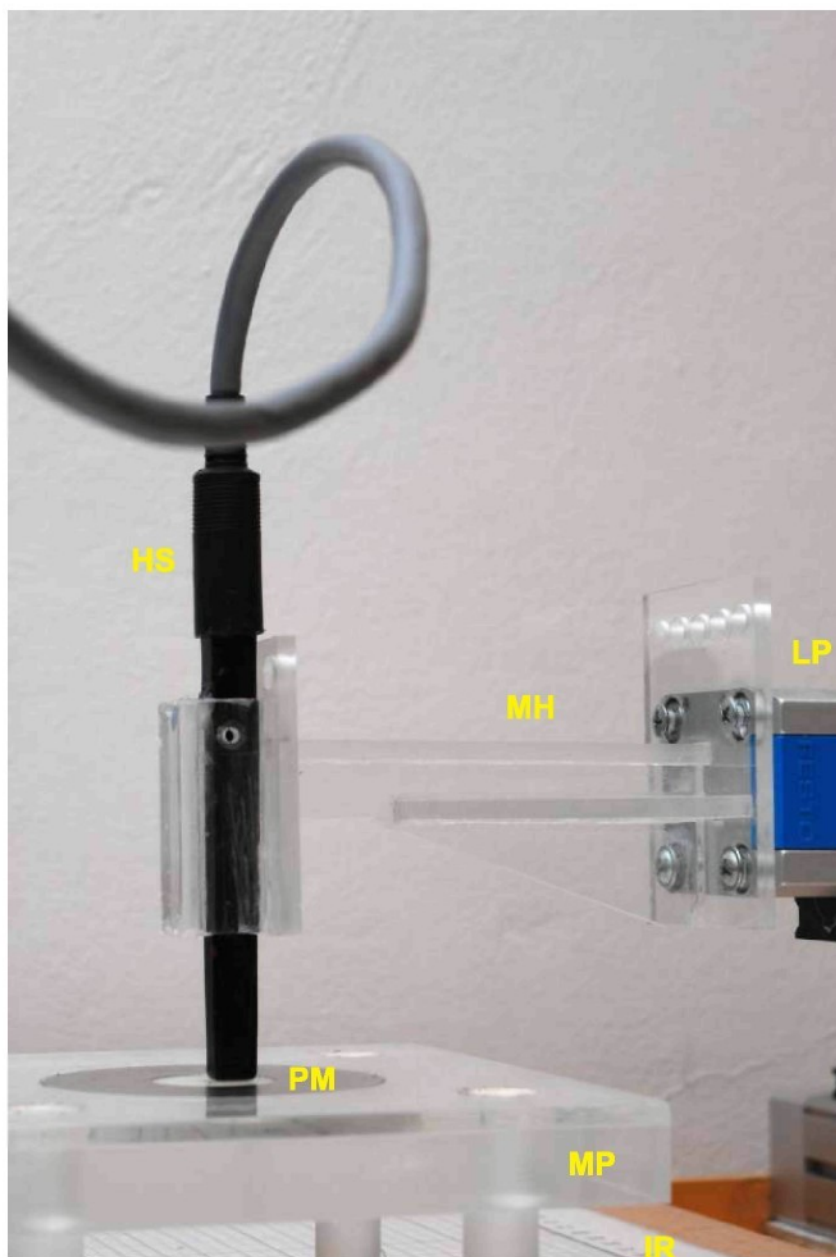


Obrázek C.1.6: 3D model realizované měřicí hlavice pro uchycení 3D Hallovy sondy ELIDIS v.č. 3D020 k lineárnímu posuvu FESTO.

nímu posuvu a stranou, na které je připevněna Hallova sonda, byla určena experimentálně a je dostačující pro potlačení ovlivnění měřeného pole, které můžou vyvolat feromagnetické součásti (vřeteno a krycí páska) lineárního posuvu. Pevnostní parametry plastové hlavice byly odzkoušeny a ověřeny na několika řešených úlohách, viz kap. C.1.1. Ani v jednom případě nebylo zaznamenáno vychýlení měřicí sondy z žádané polohy, a to ani v situacích, kdy se Hallova sonda pohybuje po povrchu měřených vzorků⁸.

Na obr. C.1.3 je celkový pohled na měřicí aparaturu, zatímco na obr. C.1.7 je zobrazen detail plastové hlavice pro uchycení Hallovy sondy. Výkresová dokumentace měřicí hlavice je v příloze, a to na listech 181–189, kde jsou odpovídající obrázky P.3.4–P.3.12.

⁸Zde je dobré zdůraznit, že vzhledem k velké tuhosti polohovací aparatury je nutné zabezpečit i dokonalou vodorovnost uchycení měřeného vzorku.



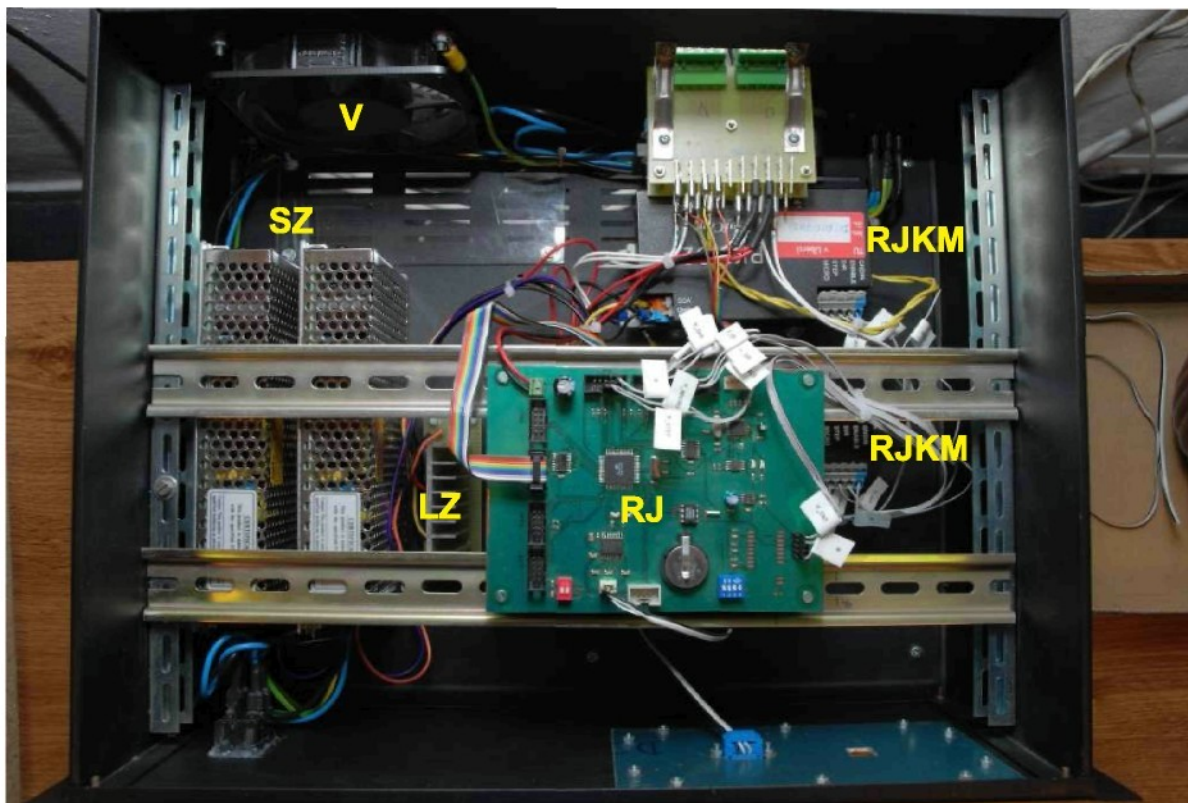
Obrázek C.1.7: Detailní fotografie uchycení Hallovy sondy v plastové hlavici. HS – Hallova sonda; PM – Permanentní magnet - měřený vzorek; MP – Měřicí přípravek pro uchycení vzorků; IR – Informační rastr; LP – Lineární posuv FESTO; MH – Plastová měřicí hlavice.

Měřicí přípravek pro uchycení permanentních magnetů

Měřené vzorky prstencových permanentních magnetů byly po dobu měření fixovány v zkonstruovaném přípravku, viz technické výkresy na obr. P.3.1–P.3.3. Měřicí přípravek je zachycen i na fotografii na obr. C.1.7. Přípravek je složen ze tří typů součástí, základové desky, nosných tyčí a výplně středu prstencového permanentního magnetu. První slouží pro zafixování vzorku a druhý k nastavení potřebné výšky, aby na vzorek dosáhla Hallova sonda upevněná v plastové hlavici. Přípravek je jako celek pevně fixován k masivní podkladové desce. Výkresová dokumentace měřicího přípravku je v příloze, a to na listech 178–180, kde jsou odpovídající obrázky P.3.1–P.3.3.

C.1.3 Elektrická část

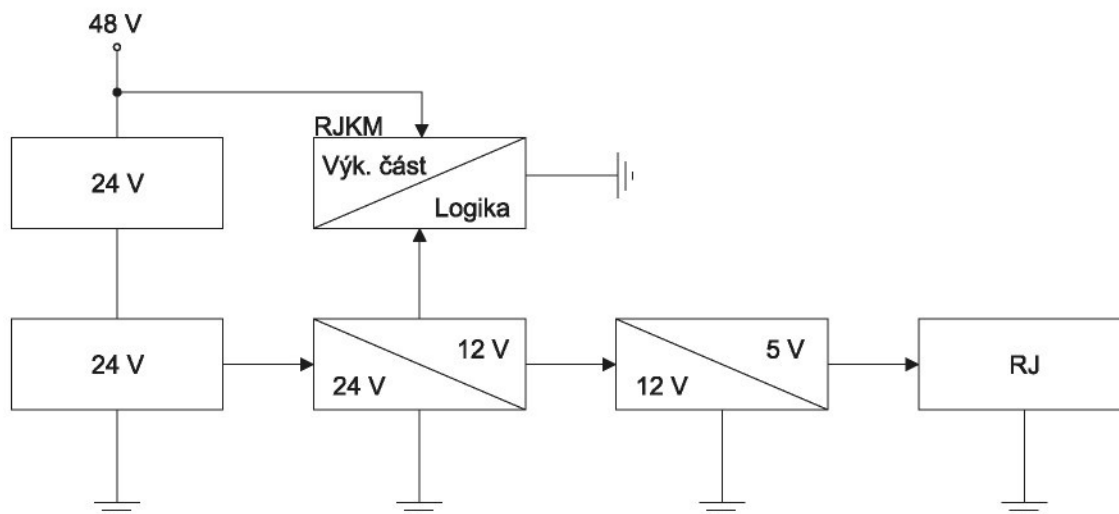
V této kapitole bude stručně popsána elektrická část aparatury pro měření magnetických polí. Jak již bylo uvedeno v kap. C.1.1, je současný stav výsledkem postupného několikaletého vývoje a měl by být po mnoha stránkách optimální pro tuto úlohu. V následujících kapitolách budou uvedeny základní parametry použitých napájecích zdrojů, řídicích jednotek krokových motorů a koncepce hlavní řídicí jednotky.



Obrázek C.1.8: Fotografie elektroinstalace a rozmístění jednotlivých součástí separátní elektrické jednotky aparatury. V – Ventilátor; SZ – Spínané napájecí zdroje; LZ – Lineární napájecí zdroje; RJ – Hlavní řídicí jednotka; RJKM – Řídicí jednotky krokových motorů.

Napájecí zdroje

Napájení celé sestavy zajišťují dva 24 V spínané zdroje, viz [49], které jsou zapojeny do série. Výsledné napětí 48 V napájí výkonovou část ovládacích jednotek krokových motorů. Jedná se o 100 W spínané zdroje s max. proudem 4.5 A a ochranou proti zkratu, přetížení a přepětí, detaily viz [49]. Napětí 24 V z jednoho spínaného zdroje je vstupem pro lineární zdroje napětí. Ty snižují napětí 24 V na potřebných 12 V pro logickou část jednotek krokových motorů a na 5 V pro hlavní řídicí jednotku, viz blokové schéma na obr. C.1.9. Lineární zdroje napětí jsou tvořeny jednoduchými integrovanými obvody 7812 a 7805, viz [50], v základním zapojení s pasivním chlazením. Použití průmyslových zdrojů napětí, např. spínaných, pro potřeby napájení logických částí není nezbytně nutné, neboť by napájení bylo pro danou úlohu zbytečně předimenzováno, nevyplatilo by se. Celá instalace musí být pomocí ventilátoru aktivně chlazena, aby nedocházelo k přehřátí napájecích zdrojů a řídicích jednotek krokových motorů v uzavřeném prostoru, viz např. [45] a [49]. Fotografie napájecí jednotky je na obr. C.1.8.



Obrázek C.1.9: Blokové schéma rozvodu napájecího napětí pro jednotlivé funkční bloky zařízení. RJ – Hlavní řídicí jednotka; RJKM – Řídicí jednotky krokových motorů.

Ovládací jednotky krokových motorů PKM02

Jedná se o jednotky, které slouží k pohonu krokového motoru. Jednotka je modulární a je složena z desky řízení a desky výkonových spínačů. Každý jednotlivý modul má oddělené, samostatné napájení, výkonová napětí 80 V⁹ a logická napětí o hodnotě 12 V. Řídicí vstupy jednotky jsou v logické úrovni TTL. Následuje seznam logických vstupů jednotky se stručnou informací o jejich významu a použití v aktuálním zapojení.

- **ENABLE** – V řešené úloze je jednotka propojkami nastavena tak, aby tento vstup byl ve funkci LOW CURRENT. V okamžiku příchodu hodnoty log.0 na vstup dojde k zastavení pohybu motoru (na výstup již nejsou dál odesílány impulsy, a to bez ohledu na vstup STEP) a amplituda proudu motoru je snížena na hodnotu 1/3 celkového proudu. Tato velikost je odvozena od zatížení a výkonu motoru, viz např. tabulky C.1.3 a C.1.4. Motor stojí a protéká jím pouze tzv. přídržný proud. Všechny mechanické součásti polohovací aparatury tak zůstávají předepnuty a nedochází k nežádoucím posuvům, ať už vlivem obsluhy nebo zapojením.
- **DIR** – Řízení směru otáčení motoru. Je třeba mít na paměti, že směr je ovlivněn i zapojením vinutí krokového motoru.
- **STEP** – S každou změnou logické úrovně na tomto vstupu dojde k provedení jednoho mikrokroku. Funkce jednotky závisí i na logické úrovni vstupu **ENABLE**. Aby byla zajištěna správná činnost motoru, musí být dodržena střída logického signálu 1:1.
- **MICRO** – Tento vstup slouží k ovládání počtu mikrokroků na jeden celokrok. Vzhledem k zapojení, konstrukci a koncepci firmware hlavní řídicí jednotky je tímto vstupem trvale nastaven počet mikrokroků na osm.

Vzhledem k tomu, že tato jednotka zabezpečuje pouze mikrokrokování a nedisponuje žádnou inteligencí (nelze ji tedy provozovat autonomně), jsou její vstupy přivedeny na výstupy hlavní řídicí jednotky. Ta implementuje nezbytnou inteligenci a tvoří tak mezičlánek mezi výkonovou částí aparatury na straně jedné a uživatelem na straně druhé. Podrobné technické informace k jednotce PKM02 lze nalézt v [45].

⁹Velikost napájecího napětí je dána typem osazených filtračních kondenzátorů, zejména jejich maximálním dovoleným napětím.

Senzory krajních poloh

Jako ochrana před možným poškozením vnitřního mechanismu lineárních posuvů vlivem špatného zadání od uživatele slouží senzory krajních poloh. Ty jsou v současné době realizovány na principu optické závory. Na jednotlivých koncích lineárních posuvů jsou připevněny optické senzory s elektronikou a na unášecích posuvů optické zábrany, viz např. obr. C.1.4. Pokud dojde k zasunutí zábrany do prostoru optické brány, řídicí jednotka okamžitě zastaví posuv v dotčené ose. Další příkazy jsou ignorovány vyjma změny polohy do bezpečné, pracovní oblasti lineárního posuvu. Aktuální stav senzorů lze vyčíst pomocí příkazů implementovaných do hlavní řídicí jednotky aparatury.

Elektronické schéma zapojení koncových senzorů je uvedeno na obr. P.2.3 v příloze. Všechny části jsou napájeny napětím 5 V. V pracovní poloze lineárních posuvů je tranzistor otevřen a LED diodou prochází proud. Na výstupu TTL_OUT, viz P.2.3, je napětí rovnající se napětí kolektor-emitor. To je dle výrobce, viz [51], maximálně 0.4 V. Na vzorcích použitých při konstrukci bylo naměřeno napětí kolektor-emitor v sepnutém stavu rovno 0.3 V. Pokud dojde k zasunutí zábrany do prostoru optické brány, dojde k uzavření tranzistoru a přechodem kolektor-emitor již neprochází žádný proud a LED dioda zhasne. Na výstupu TTL_OUT je napětí rovné napájecímu minus úbytek napětí na LED diodě, který činí 1.9 V. Výsledné napětí na výstupu v *rozepnutém* stavu činí 3.1 V. Výstup senzoru je přiveden do hlavní řídicí jednotky, viz elektronické schéma v příloze na obr. P.2.2, na vstup invertoru s funkcí Schmidtova klopného obvodu. Napětí odpovídající oběma pracovním stavům (sonda v pracovní oblasti nebo v krajní poloze) leží v předepsaných mezích pro použití jako logického signálu v úrovni TTL. Na rozdíl od dříve používaných jazýčkových relé, viz kapitola C.1.1, nevykázaly optické senzory po celou dobu používání žádnou chybu funkce.

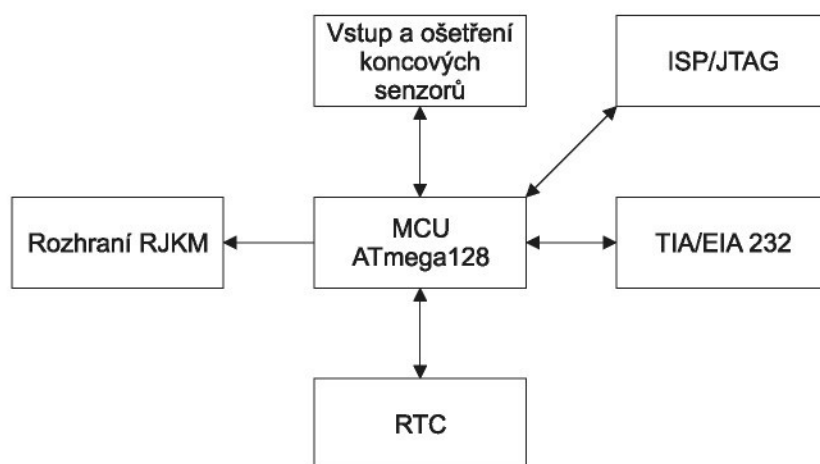
Hlavní řídicí jednotka

Jako hlavní řídicí jednotka aparatury je použito řešení z diplomové práce, viz [39]. Je dobré podotknout, že jednotka byla navržena pro ovládání jiných řídicích jednotek krokových motorů, než těch použitých v této práci. Z toho důvodu bylo potřeba provést v hardware několik modifikací, některé funkční bloky nejsou na druhou stranu využity vůbec. Na obr. C.1.10 je zobrazeno zjednodušené blokové schéma hlavní řídicí jednotky. Na obrázku jsou zakresleny pouze ty funkční bloky, které jsou v současném zapojení využity. Základem je jednočipový mikroprocesor ATMEL ATmega128, ke kterému jsou přímo připojeny všechny dílčí bloky. Mikroprocesor si uchovává pro záznam provedených operací informaci o aktuálním čase, který zabezpečuje blok reálných hodin – RTC. Hodiny se dají v případě potřeby externě kalibrovat. Komunikace s okolím je realizována pomocí sériového kanálu skrze rozhraní TIA/EIA¹⁰ 232, dříve RS232. Změnu firmware mikroprocesoru lze provést po jednom z dostupných rozhraní, a to buď ISP¹¹ nebo JTAG¹², které umožňuje ladit kód i za běhu aplikace. Vstupy koncových snímačů jsou připojeny přes elektronické obvody, které zajišťují funkci Schmidtova klopného obvodu s hysterezí pro potlačení možných zákmitů. Řízení ovládacích jednotek krokových motorů je provedeno pomocí digitálních signálů na paralelní sběrnici–portu mikroprocesoru. Detaily k vlastní funkci řídicí jednotky lze nalézt v kapitole C.1.4. Firmware bylo třeba vzhledem ke změně jednotek krokových motorů kompletně přepracovat, je tedy plně dílem autora této práce.

¹⁰Telecommunications Industry Association/Electronics Industries Association

¹¹In-System Programmable

¹²Joint Test Action Group



Obrázek C.1.10: Zjednodušené blokové schéma hlavní řídicí jednotky.

C.1.4 Programové vybavení

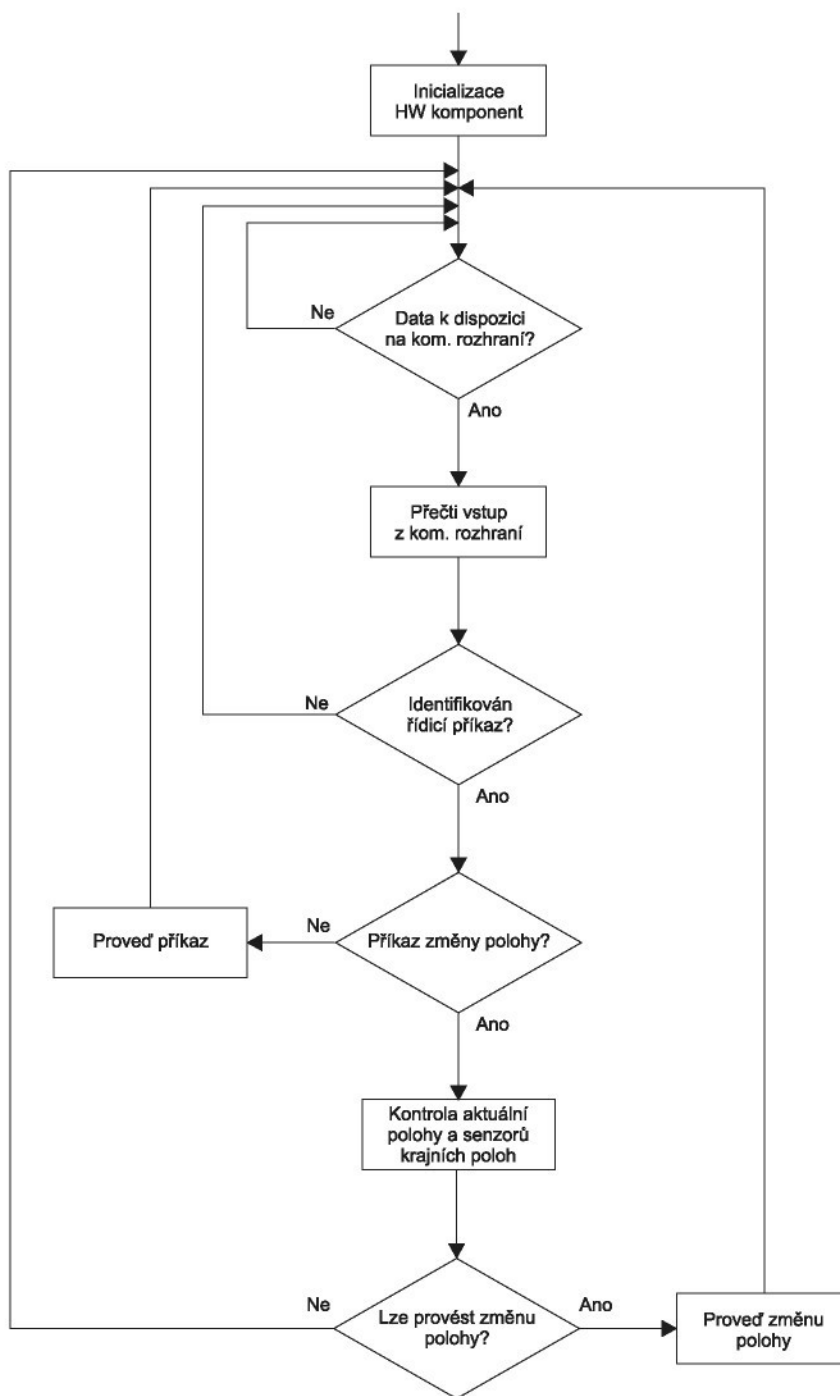
Jak již bylo řečeno v předchozí kapitole, je hlavní řídicí jednotka jedním z výsledků diplomové práce, viz [39]. Navržena byla nicméně pro jiný typ jednotek krokových motorů, z toho důvodu nebyl realizovaný firmware s jednotkami PKM02 kompatibilní. Proto bylo nutné přistoupit k přípravě vlastního firmware, který bude reflektovat aktuální stav měřící aparatury.

Firmware byl napsán ve vývojovém prostředí AVR Studio, viz [52], v programovacím jazyce C, viz [3]. Základní funkci jednotky znázorňuje zjednodušený vývojový diagram, který je uveden na obr. C.1.11. V následujícím textu bude stručně popsána funkce jednotky a uvedeny základní implementované příkazy, které odpovídají aktuální verzi firmware, který je přiložen na doprovodném CD.

Po resetu jednotky dojde k inicializaci všech komponent a externích jednotek mikrokontroléru, viz např. obr. C.1.10. Dojde k nastavení sériového portu, inicializaci čítačů/časovačů a povolení přerušení. V tomto okamžiku dojde k načtení aktuálního stavu koncových senzorů polohy. Jednotka je nyní v klidovém stavu a čeká na nastavení příznaku, že je ve vnitřním bufferu připraven blok dat, který svou strukturou odpovídá formátu řídicího příkazu. Ten má podobu textu složeného z velkých písmen a číslic a je vždy ukončen středníkem. Čtení sériové linky se děje prostřednictvím přerušení, které je vyvoláno s příchodem znaku na port. Pokud dojde k přečtení znaku „;“, je nastaven příznak, že se může provést rozpoznání příkazu. Vzhledem k tomu, že základní база obsahuje pouze 8 příkazů, probíhá rozpoznávání na základě porovnávání neměnných částí příkazů.

Seznam implementovaných příkazů hlavní řídicí jednotky podle standardu SCPI:

- ***RST** – Proveďte reset jednotek krokových motorů, nastaví signál **ENABLE** do úrovně **log.0**.
- ***IDN?** – Odešle identifikační řetězec zařízení na sériový port.
- **POS:X?** – Vrací informaci o aktuální poloze posuvu v absolutních souřadnicích v ose X. Aby tento příkaz vracel správné údaje, je potřeba po každém zapnutí aparatury provést automatickou kalibraci nulové polohy v ose X pomocí příkazu **POS:X:REF**.
- **POS:Y?** – Vrací informaci o aktuální poloze posuvu v absolutních souřadnicích v ose Y. Aby tento příkaz vracel správné údaje, je potřeba po každém zapnutí aparatury provést automatickou kalibraci nulové polohy v ose Y pomocí příkazu **POS:Y:REF**.
- **POS:X:REF** – Kalibruje nulovou polohu v ose X. Ke kalibraci dochází postupným řízeným automatickým posuvem unášече až za krajní polohu, kterou signalizuje senzor.



Obrázek C.1.11: Zjednodušený vývojový diagram funkce řídicí jednotky měřicí aparatury.

Ve smyčce se postupně provede jeden krok krokového motoru (odpovídá $50\ \mu\text{m}$) a vyhodnotí se stav koncového senzoru. V okamžiku, kdy „rozepne“ koncový senzor, jsou provedeny ještě dva kroky. Tato poloha je pak interně nastavena jako nulová, výchozí.

- POS:Y:REF – Kalibruje nulovou polohu v ose Y. Způsob kalibrace je stejný jako v předchozím případě.
- POS:X:REL:[+/-] [POLOHA] : [RYCHLOST] – Způsobí změnu polohy v ose X o hodnotu danou parametrem POLOHA. Rychlost změny polohy je udána parametrem RYCHLOST.
- POS:Y:REL:[+/-] [POLOHA] : [RYCHLOST] – Způsobí změnu polohy v ose Y o hodnotu danou parametrem POLOHA. Rychlost změny polohy je udána parametrem RYCHLOST.

V případě, že příkaz neprojde rozpoznávacím procesem, dojde k vymazání bufferu a návratu

do hlavní smyčky programu. Pokud je však příkaz správně identifikován, dojde k vykonání odpovídajícího programového kódu. Speciální skupinou příkazů jsou příkazy pro změnu polohy. Před započítáním pohybu jsou nejdříve zkontrolovány senzory krajních poloh a jejich stav je porovnán se směrem dalšího pohybu. Pokud dojde ke kolizi, žádný pohyb se nevykoná. Tato kontrola se děje při každé změně logického signálu, který je zaveden do vstupu MICRO řídicí jednotky krokového motoru PKM02. Nikdy tak nemůže dojít k poškození mechanismu posuvů. Poloha se zadává v počtu celokroků a rychlost v počtu celokroků za metr a sekundu na druhou.

Interní čítače/časovače jsou nastaveny na dobu 1 ms a softwarově je dořešena změna rychlosti pohybu, kterou si může pro každý úsek měnit uživatel sám. Rychlost pohybu je přepočítána tak, aby odpovídala počtu kroků za dobu jedné sekundy. Přepočet je jedním z důvodů, proč mají jednotky externím signálem napevno nastaven počet mikrokroků na jeden celokrok.

Implementace řídicích příkazů ve formě textového řetězce, který je složen z velkých písmen abecedy, středníku, dvojtečky a případně znaků plus nebo minus, dovolila ovládat měřicí aparaturu z různých softwarových prostředí, případně realizaci vlastního programu. V následující kapitole bude popsáno vlastní softwarové řešení pro řízení aparatury a měření 3D magnetických polí v prostředí MATLAB.

C.1.5 Řízení aparatury a měření magnetických polí

Návrh softwarového řešení lze rozdělit na dvě samostatné části, na ovládání měřicí aparatury po sériovém rozhraní TIA/EIA¹³ 232 a na komunikaci s analogově-digitálním převodníkem od firmy National Instruments pomocí USB¹⁴ rozhraní. Autorem byla nejdříve vyzkoušena možnost komunikace s oběma zařízeními, rychlost odezvy a správnost funkce ve vlastním návrhovém software, popsaném např. v publikaci [A26]. Autor se dále pokusil vytvořit univerzální grafické rozhraní, nicméně od tohoto řešení nakonec upustil. To bylo z důvodu, že s každou úlohou, kterou si zadala praxe nebo vyžádalo řešení této práce, bylo pokaždé nutno provést výraznější zásahy do kódu aplikace. Tyto změny s sebou přinesly delší časové prodlevy mezi zadáním a řešením-měřením. Z toho důvodu se autor rozhodl po dalších testech přejít k prostředí MATLAB, kde ve spojení s toolboxem na ovládání přístrojů bylo možné velmi rychle a dynamicky přejít k další úloze jednoduchými změnami kódu.

Původní řešení, které sdružovalo veškerý kód v jednom souboru, bylo s verzí MATLAB R2008a, která s sebou přinesla možnost objektově orientovaného programování, kompletně přepracováno. Byla vytvořena samostatná třída C2DTable jako potomek základní třídy `handle`, což znamená, že lze předávat parametry odkazem, nikoliv hodnotou. V následujícím seznamu je uveden výčet implementovaných metod třídy C2DTable a jejich stručný popis.

- `C2DTable` – Konstruktor třídy, provede základní inicializaci vnitřních proměnných.
- `delete` – Destruktor třídy, uzavře aktivní spojení.
- `Connect` – Otevření sériového kanálu, inicializace měřicí aparatury.
- `Disconnect` – Uzavření sériového kanálu.
- `move_x_steps` – Provede posuv v ose X podle zadaných parametrů. Odpovídá příkazu `POS:X:REL:[+/-] [POLOHA] : [RYCHLOST]`.
- `move_y_steps` – Provede posuv v ose Y podle zadaných parametrů. Odpovídá příkazu `POS:Y:REL:[+/-] [POLOHA] : [RYCHLOST]`.

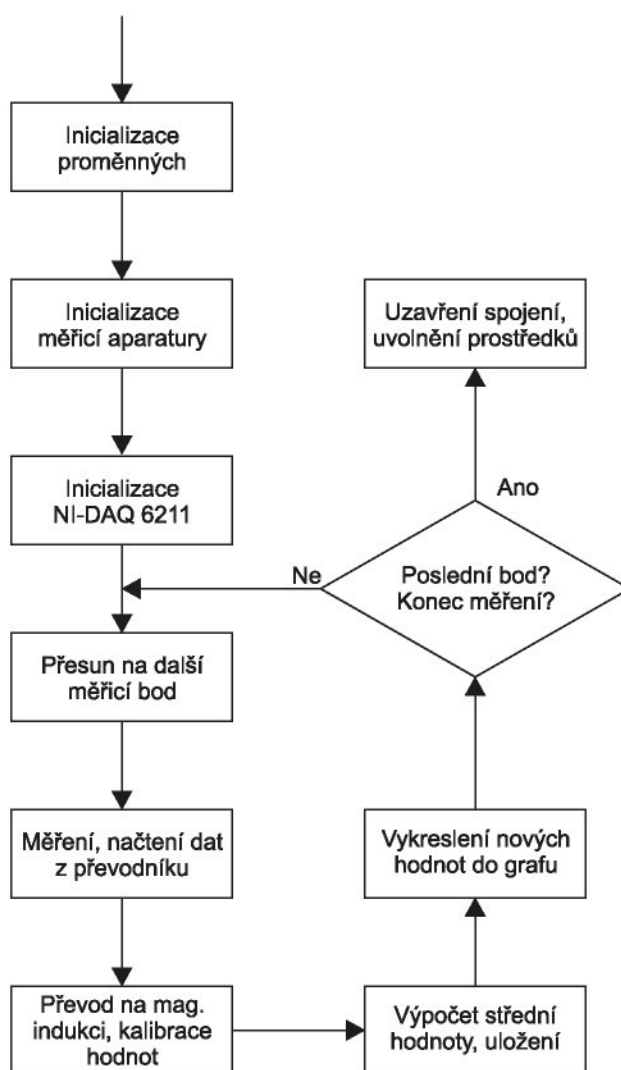
¹³Telecommunications Industry Association/Electronics Industries Association

¹⁴Universal Serial Bus

- `set_home` – Nuluje interní proměnné, nastaví tzv. virtuální počátek souřadné soustavy.
- `go_home_x` – Posuv do virtuálního počátku v ose X.
- `go_home_y` – Posuv do virtuálního počátku v ose Y.
- `go_home` – Posuv do virtuálního počátku.
- `clear_history` – Smaže historii všech dříve vykonaných příkazů pro změnu polohy.
- `revert_history` – Zpětně prochází historii dříve vykonaných příkazů pro změnu polohy, což znamená, že se do virtuálního počátku dospěje po stejné dráze.

Krom výše uvedených metod má třída jeden veřejný parametr nazvaný `bHistory`. V případě, že je nenulový, ukládá si třída informace o vykonaných příkazech změny polohy (vzdálenost a rychlost). Tyto informace mohou sloužit buď pro záznam či technickou zprávu o měření, nebo pro návrat do výchozí polohy (virtuálního počátku) metodou `revert_history` v případě geometricky komplikovaných těles, kdy by mohlo dojít ke srážce měřicí sondy s měřeným předmětem, tj. kdy nevyhovují metody `go_home[_x/y]`. Kompletní zdrojový kód lze nalézt na příloženém CD.

Výše zmíněná třída je použita v hlavním programu, jehož zjednodušený vývojový diagram je uveden na obr. C.1.12. Prvním krokem programu je inicializace interních proměn-



Obrázek C.1.12: Zjednodušený vývojový diagram funkce programu pro měření magnetických polí implementovaného v prostředí MATLAB.

ných. Následuje vytvoření objektu třídy `C2DTable` pro práci s aparaturou, otevření spojení a nastavení virtuálního počátku, nuly. Důležitým a poměrně komplikovaným krokem je korektní inicializace multifunkčního zařízení NI USB-6211, zejména jeho analogově-digitálního převodníku. Nejprve se podle fyzického zapojení musí určit konkrétní využití kanály a dále měřicí rozsah, pro každý kanál zvlášť. Velká pozornost se musí věnovat identickému nastavení rozsahu senzoru, jinak multifunkční zařízení ve spojení s programovým vybavením toolboxu data automaticky přepočítá a „znehodnotí“.

Začátek vlastního měření začne posunutím na první měřicí bod (pokud jím již není aktuální výchozí pozice). Po dosažení pozice je provedeno měření. Počet vzorků, které se odměří v každém bodě roviny, je dán několika parametry, viz matematické analýzy v kapitole C.2.2. Všechny změřené hodnoty jsou následně přepočítány pomocí kalibračních konstant. V dalším kroku je pro každou složku magnetické indukce vypočtena z pole dat střední hodnota, která se uloží do souboru a vykreslí do grafu. Měření pokračuje přesunem do další měřicí pozice, dokud nejsou vyčerpány všechny body. Měření je ukončeno uzavřením spojení s aparaturou a převodníkem, následuje uvolnění prostředků z operační paměti. Zdrojový kód lze nalézt na přiloženém CD.

C.2 Nejistota měření

Jako každé měření je i měření magnetické indukce v rovině zatíženo nejistotami. Nejistoty měření jsou rozděleny do dvou tříd. Definována je *nahodilá* a *systematická* nejistota měření. U nahodilé nejistoty není příčina známa, je způsobena velkým množstvím působících vlivů. Proto nahodilou nejistotu lze redukovat pouze opakovaným měřením veličiny. Na druhou stranu, u systematické nejistoty měření je příčina známa a v principu ji lze vyloučit. V našem případě podle původu a s ohledem na měřicí řetězec jsou nejistoty především v určení souřadnic a v naměřených hodnotách magnetické indukce. Největší systematická nejistota je v určení indukce.

Realizovaná aparatura je vhodnější pro měření stacionárních hodnot magnetické indukce. Magnetická indukce je měřena pomocí Hallových sond, které se chovají jako převodníky magnetické indukce na napětí, viz [B1]. Principiálně však nelze z výstupu sondy odebírat téměř žádný proud, viz [A7]. Z tohoto důvodu musí být napěťový výstup sond nejdříve upraven zesílen nebo přiveden vodiči na vstup analogově-digitálního převodníku, kde je převeden do digitální podoby.

Poněvadž je na vstupu 16 bitový analogově-digitální převodník, je chyba kvantování zanedbatelná. Vstupní odpor převodníku je vysoký, více než $10\text{ G}\Omega$. Maximální napětí na výstupu sondy je necelých 5 V , v přívodních vodičích tedy poteče proud maximálně 0.5 nA . Při odporu přívodních vodičů $1\text{ }\Omega$ tedy dochází k úbytku napětí 0.5 nV , což je zanedbatelné, poněvadž měřitelná změna napětí pro bipolární rozsah $\pm 5\text{ V}$ odpovídá přibližně $150\text{ }\mu\text{V}$. Jedinou nejistotou je tedy analogová nejistota výstupu sondy. Předchozí tvrzení nicméně platí pouze za předpokladu, že neexistuje rušení.

Právě přívodní vodiče napětí Hallových sond do analogově-digitálního převodníku jsou nejvíce zatíženy systematickou nejistotou způsobenou rušením elektromagnetickými poli. Hlavním zdrojem rušení je elektrická rozvodná síť, která způsobuje indukci napětí o síťové frekvenci do přívodních vodičů. Dále se jedná o rušení od napájecích přívodů krokových motorů, které pohybují rameny aparatury. Podstatný vliv má i přítomnost spínaných zdrojů v lokálním uzlu napájecí sítě. V tom případě se jedná o neperiodické složky o relativně vysokých frekvencích v porovnání se síťovou. Nejedná se o harmonické složky síťového rušení.

V následujících kapitolách bude odvozena nejistota v určení souřadnic, závislost nejistoty určení magnetické indukce na počtu navzorkovaných dat a její ovlivnění odchylkou frekvence od jmenovité hodnoty frekvence síťového napětí.

C.2.1 Nejistota v určení souřadnic

K zajištění lineárního pohybu sondy v jednom směru jsou zapotřebí tyto tři součásti: krokový motorek, pružná spojka a lineární posuv. Nejistota v nastavení polohy je tedy určena těmito třemi nejistotami:

1. Nejistota v kroku krokového motorku,
2. nejistota v přenosu nastaveného krouticího úhlu pružnou spojkou,
3. nejistota v nastavení polohy jezdce lineárního posuvu samotným posuvem.

Při rozboru jednotlivých nejistot předpokládáme, že zbývající dvě se neuplatní, tj. toto zařízení se chová jako ideální.

U krokového motorku musíme nejistotu v natočení převést na nejistotu lineární polohy. Typickým údajem krokového motorku je počet kroků n na jednu otáčku. Z něho pak určíme úhel pootočení α připadající na jeden krok podle jednoduchého vztahu

$$\alpha = \frac{360^\circ}{n} . \quad (\text{C.2.1})$$

Převod kruhového pohybu na lineární je popsán parametrem k_p , který udává posun na jednu otáčku. Pak úhlu pootočení γ odpovídá posuv

$$l_p = k_p \gamma . \quad (\text{C.2.2})$$

V našem případě má krokový motor $n = 200$ kroků na otáčku a převod $k_p = 10$ mm/ot. Pak úhel jednoho kroku je podle (C.2.1) $\alpha = 1,8^\circ$ a tomuto kroku odpovídá posun $l_k = 50$ μm podle (C.2.2). Podle údaje výrobce je nejistota kroku $\Delta\alpha = 0,06^\circ$. Nejistota v poloze způsobená krokovým motorkem je tedy podle (C.2.2) $\Delta l_k = 1,7$ μm .

Nejistotu v určení polohy unášече posuvu výrobce udává pomocí opakovatelnosti, specifikované dle normy DIN 230/2, která je podle katalogového listu, viz [41], s nejistotou $\Delta l_p = 20$ μm .

Největším problémem je určení nejistoty způsobené pružnou spojkou. Její měření je velmi obtížné. Pružná spojka je tuhá a spojení s hřídelí nevykazuje žádné vůle. Z katalogového listu výrobce, viz [46], pro použitou pružnou spojkou Huco Oldham 25 je dána konstanta torzní poddajnosti $c_t = 0,28^\circ/\text{Nm}$. Vzhledem k tomu, že výrobce lineárních posuvů, viz [41], neuvádí statický klidový moment na hřídeli, z kterého by šla dále určit nejistota pružné spojky, byla započítána maximální možná hodnota udaná v katalogovém listu, [41]. Maximální dovolený moment na hřídeli, takový, při kterém je zachována očekávaná doba životnosti, je výrobcem určen na $M_{max} = 0,45$ Nm. Z toho lze odvodit odpovídající maximální úhel natočení pro zvolený maximální moment, který činí $0,126^\circ$. Změna polohy způsobená uvedeným úhlem natočení je rovna $\Delta l_s = 3,5$ μm .

Celkovou nejistotu polohy lze určit jako odmocninu součtu čtverců dílčích nejistot, danou vztahem

$$\Delta l = \sqrt{\left(\frac{\Delta l_k}{\Theta_k}\right)^2 + \left(\frac{\Delta l_p}{\Theta_p}\right)^2 + \left(\frac{\Delta l_s}{\Theta_s}\right)^2} , \quad (\text{C.2.3})$$

kde Θ_k , Θ_p a Θ_s jsou parametry, které mají hodnotu podle zvoleného pravděpodobnostního rozložení, viz [36]. Velikost těchto parametrů a tím i typ pravděpodobnostního rozložení byl zvolen s ohledem na míru ovlivnění nejistoty polohy jednotlivými prvky. Mezi ty méně přesné členy byl zařazen lineární posuv a pružná spojka, proto byly zvoleny konstanty $\Theta_p = \Theta_s = \sqrt{3}$, zatímco pro krokový motor byla hodnota parametru určena $\Theta_k = \sqrt{6}$, viz [36]. Po dosazení výše zjištěných nejistot a vyjádření vztahu vyjde hodnota $\Delta l = 12$ μm .

Do výrazu pro standardní kombinovanou nejistotu vstupují i hodnoty nejistoty typu A, viz [36]. K jejich určení by bylo nutné provést několik opakovaných měření a zajistit určení polohy velmi přesným měřidlem. Vzhledem k očekávané velikosti nejistoty to klade značné nároky na kvalitu měřidla, jde o určení polohy na relativně velké vzdálenosti. Z toho důvodu lze považovat spočtenou nejistotu za standardní kombinovanou nejistotu.

Konečné určení polohy se udává s rozšířenou nejistotou, což je kombinovaná nejistota násobená tzv. koeficientem rozšíření k_l . Tento parametr se opět volí podle typu pravděpodobnostního rozložení. Je možné předpokládat, že nejistota bude mít normální rozdělení. Volíme raději rozšířený interval nejistoty, proto $k_l = 3$. Celková rozšířená nejistota v určení polohy aparaturou činí $40 \mu\text{m}$.¹⁵ Nejmenší možná změna polohy aparaturou včetně nejistoty je pak určena vztahem

$$l_{min} = (50 \pm 40) \mu\text{m} . \quad (\text{C.2.4})$$

Nejistota polohy je téměř stejně velká jako jeden krok, posuv se tedy nehodí pro nastavení malých vzdáleností. Relativní nejistota dosahuje desítek procent. S rostoucí délkou posunutí však klesá nepřímo úměrně. Nejistota v určení polohy je tedy z technického hlediska pro tuto úlohu uspokojivá.

Přehledně jsou zdroje nejistot, jejich příčiny a základní parametry uvedeny v tabulce C.2.1.

Tabulka C.2.1: Tabulka nejistot jednotlivých částí aparatury, které mají vliv na celkovou nejistotu polohy a jejich původ.

část	typ nejistoty	hodnota
krokový motor	tolerance kroku	$1.8^\circ \pm 0.1^\circ$
pružná spojka	úhl. deformace	$0.28^\circ/\text{Nm}$
lineární posuvy	opakovatelnost	$\pm 0.02 \text{ mm}$

C.2.2 Vliv rušení

V případě, kdy zdrojem magnetického pole jsou permanentní magnety, je měřená veličina magnetické indukce v každém bodě prostoru časově konstantní – neměnná. Permanentní magnety vytvářejí stacionární magnetické pole.

Magnetická indukce je funkce závislá na prostorových souřadnicích x, y a z . Výslednou hodnotu ovlivňuje indukovaný šum od síťového napětí a další rušení, který je funkcí času. Měřená hodnota je tedy superpozicí skutečné magnetické indukce (závislé pouze na prostorových souřadnicích) a magnetické indukce, která se formálně načítá k výsledku jako důsledek rušení. Celkovou závislost indukce lze popsat zobecněným vztahem

$$\mathbf{B}_v(x, y, z, t) = \mathbf{B}(x, y, z) + \mathbf{B}_i(t) , \quad (\text{C.2.5})$$

kde $\mathbf{B}(x, y, z)$ je měřená magnetická indukce a $\mathbf{B}_i(t)$ odpovídá nepřímo superponované, parazitní hodnotě magnetické indukce. Původ této složky je dvojitý. Jednak je to přímo rušivá, časově proměnná magnetická indukce v místě sondy, jednak je to indukované napětí na vodičích mezi sondou a vstupem analogově-digitálního převodníku. I toto napětí je však vyhodnoceno jako rušivá složka magnetické indukce. Jednoduchými prostředky nelze rozhodnout, jaký je podíl té či oné složky. V každém případě parazitní složka magnetické indukce obsahuje systematickou i nahodilou nejistotou. Nahodilou nejistotou je bílý šum.

¹⁵Zaokrouhlování nejistot a výsledků odpovídá standardům pro nejistoty, uvedených např. v [35]

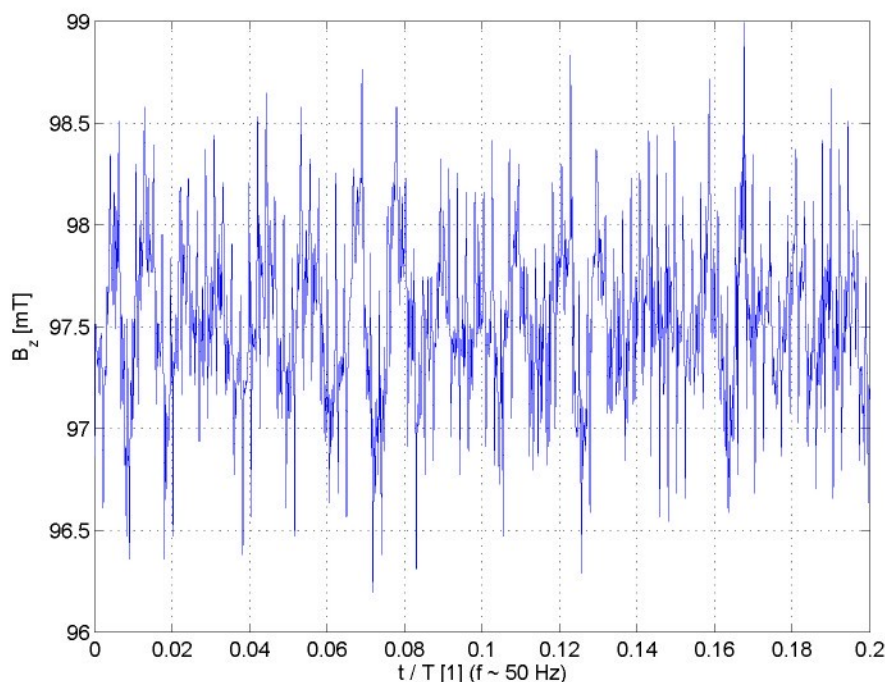
Zdroje systematických nejistot měření lze s ohledem na realizovanou aparaturu rozdělit do několika skupin, v pořadí podle významu a vlivu na měřicí řetězec.

1. Nejistota měření způsobená rušením od elektrické instalace (rozvodné sítě).
2. Nejistota měření způsobená rušením od spínaných zdrojů.
3. Nejistota měření způsobená rušením od elektrických strojů.

První zdroj nejistoty měření se ukázal jako nejpodstatnější, a proto mu bude v následujícím textu věnována největší pozornost. V případě druhých dvou zdrojů nejistot je situace složitější. Rušení od těchto zdrojů má dvojí následky: Přímé ovlivnění měřicího řetězce a nepřímé, neboť dochází k ovlivnění průběhu síťového napětí v místě připojení. Jelikož se poslední dvě nejistoty měření nepřímo vyskytují v první, budou zmíněny jejich důsledky jen velmi stručně a podrobně bude téma rozebráno při popisu první uvedené nejistoty měření.

Nahodilá nejistota – rušení

Nahodilá nejistota napětí je v ideálním případě reprezentována bílým šumem. Jednoduchá definice bílého šumu je ta, že všechny spektrální složky jsou v něm rovnoměrně zastoupeny. Bílý šum je náhodný proces, lze jej vyšetřovat jedine statistickými metodami. Přiměřeně dlouhý časový průběh bílého šumu lze považovat za jednu z jeho realizací. Bílý šum patří mezi ergodické procesy. To znamená, že statistické údaje zjištěné z velkého počtu realizací náhodného procesu jsou stejné jako statistické údaje získané z jedné, časově velmi dlouhé realizace. Této skutečnosti jsme využili pro studium bílého šumu v realizované aparatuře.



Obrázek C.2.1: Výřez výsledků jednoho měření bílého šumu na Hallově sondě pro z-ovou složku magnetické indukce.

Měření bylo provedeno identickým způsobem jako u všech ostatních experimentů. S cílem odstranit všechny zdroje rušení však byl tento experiment mimořádně proveden v prostorné laboratoři, v dostatečné vzdálenosti od rozvodů elektrické energie a dalších zdrojů rušení.¹⁶

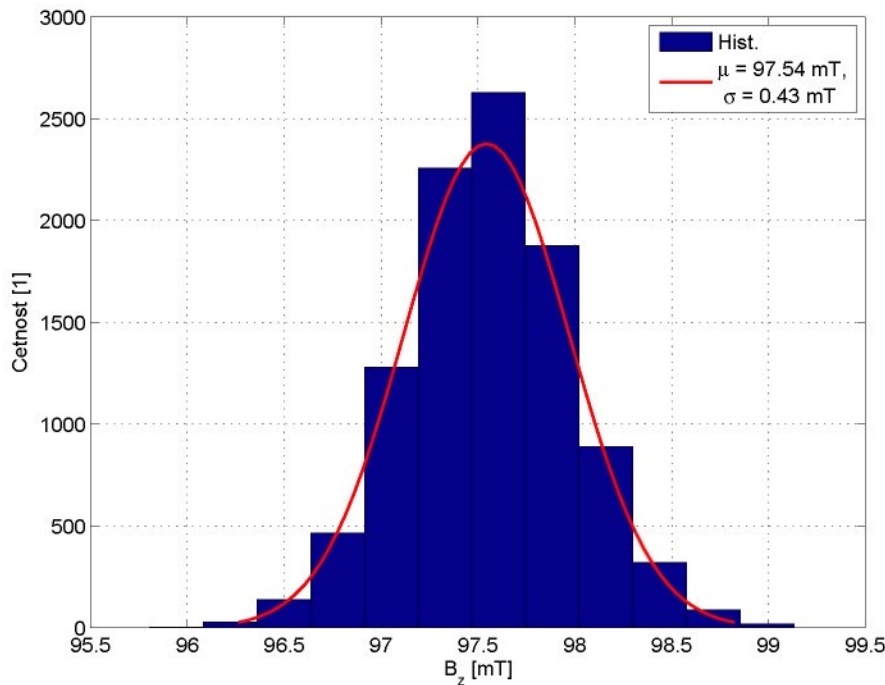
¹⁶Zde je nutno podotknout, že optimální by bylo tento experiment provést v prostředí odstíněném od elektrického i magnetického pole, takové prostředí není bohužel na pracovišti TUL k dispozici.

Rovněž v aparatuře byly vypnuty všechny zdroje rušení, které nebyly pro její funkci nezbytné. S cílem zachovat podmínky standardního experimentu byl pro ověření náhodně vybrán jeden vzorek permanentního magnetu (označení #7N-B).

Polohovací mechanismus s měřicí sondou byl přesunut do centrální polohy, která se nachází uprostřed prstence permanentního magnetu. Pak byl vypnut. Svislá poloha odpovídala vrchnímu povrchu magnetu. V této poloze bylo pomocí analogově-digitálního převodníku, při zachování stejného nastavení všech parametrů, navzorkováno výstupní napětí Hallových sond. Počet vzorků byl zvolen tak, aby odpovídal hodnotě 2^n pro vysoká n , tj. $n > 13$. Vzorkovací frekvence činila $f_{\text{smp}} = 250 \text{ kSa/s}$.

Na obr. C.2.1 je zobrazen výsledek měření ve formě krátkého výřezu z průběhu napětí na Hallově sondě, které odpovídá z-ové složce magnetické indukce. Na vodorovné ose je vynesena čas jako násobek jmenovité hodnoty periody síťového napětí $T = 20 \text{ ms}$. Na svislé ose je vynesena hodnota z-ové složky magnetické indukce. Bílý šum se tedy na obr. C.2.1 superponuje ke stejnosměrné hodnotě magnetické indukce. Před zpracováním dat byla proto od nich odečtena střední hodnota.

U bílého šumu se mění náhodně jak okamžitá amplituda, tak okamžitá frekvence. U amplitudy byly standardními metodami vypočteny základní statistické parametry: střední hodnota a směrodatná odchylka. Z nich byla zjištěna hustota pravděpodobnosti normálního rozdělení. Z výsledků měření, viz obr. C.2.1, byl dále standardním postupem (12 sloupců) sestaven histogram, který je zobrazen na obr. C.2.2. Histogramem je graficky proložen přízpůsobený průběh¹⁷ hustoty pravděpodobnosti normálního rozdělení. Z obr. C.2.2 je patrné, že amplitudy mají normální rozdělení četností.

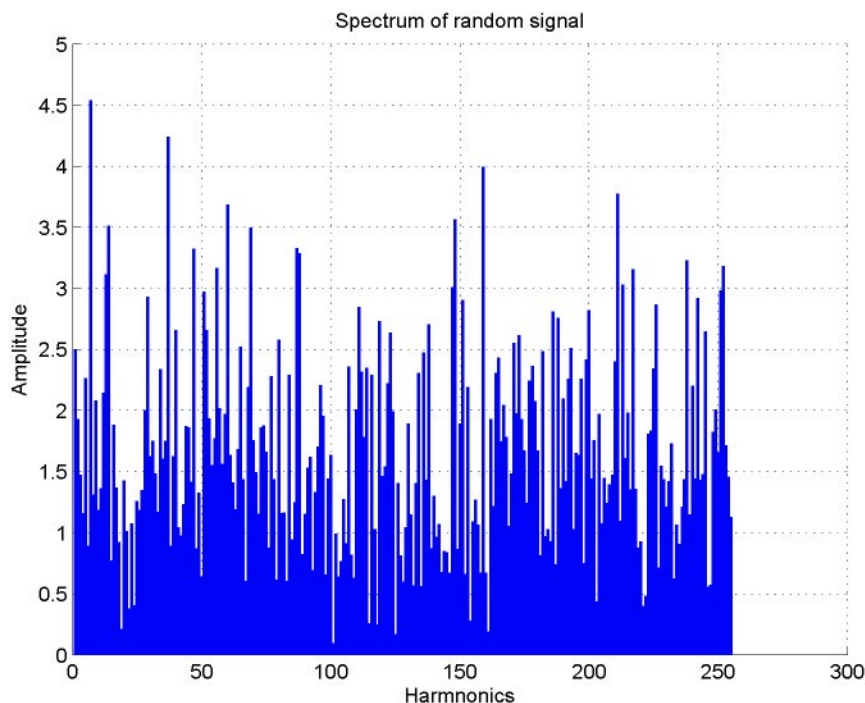


Obrázek C.2.2: Histogram četností naměřených amplitud a předpokládaná hustota pravděpodobnosti normálního rozdělení.

Dalším důležitým krokem v ověřování vlastností bílého šumu, viz obr. C.2.1, je zjištění jeho frekvenčního spektra. Poněvadž data jsou digitální, aplikovali jsme rychlou Fourierovu transformaci (FFT). Z tohoto důvodu byla všechna data změřena či upravena tak, aby

¹⁷Jediné přízpůsobení je v tom, že integrál z takové hustoty pravděpodobnosti je roven počtu vzorků a nikoliv jedné. Alternativní řešení je normovat histogram k jedné.

obsahovala právě 2^n vzorků. Výsledkem FFT je amplitudové a fázové spektrum. I když fázové spektrum je často důležitější než amplitudové, nelze z jeho průběhu obvykle odvozovat nějaké kvalitativní závěry. Proto jsme se omezili na studium amplitudového spektra.



Obrázek C.2.3: Amplitudové spektrum změřeného náhodného signálu.

Na obr. C.2.3 je zobrazeno amplitudové spektrum části vzorku bílého šumu prezentované na obr. C.2.1. Na vodorovné ose je vyneseno číslo harmonické, na svislé amplitudy spektrálních složek. Stejnosečná složka se předpokládá nulová. Rozložení amplitud složek spektra je rovnoměrné, žádná z nich výrazně nepřevládá. To platí i pro aplikaci na mnohem delší časový úsek změřeného signálu.

Spektrální analýza ukázala, že bílý šum existuje. Jeho efekt je však zanedbatelný oproti jiným zdrojům rušení. Ty se nám nepodařilo jednoduchými prostředky odstranit, a proto je s nimi nutno počítat při reálném měření a snažit se jejich vliv redukovat.

Nejistota měření vyvolaná rušením

Využívání nejrůznějších moderních přístrojů, zařízení, spotřebičů apod. se soustřeďuje především na dosažení vysokých užitečných vlastností, úspory energie, hmotnosti, materiálu atd. Za to vše se platí mj. vysokou úroveň rušení. Ta je v současné době natolik nebezpečná, že se zavedl nový obor, elektromagnetická kompatibilita. S různými druhy rušení je tedy nutno počítat při realizaci aparatury a činit opatření, aby se vliv rušení redukoval.

Zdoje rušení můžeme rozdělit do dvou skupin:

1. Vnější zdroje, což je zejména
 - (a) Elektrická rozvodná síť, jejíž síťová frekvence a její harmonické pronikají do aparatury při jejím napájení.
 - (b) Časově proměnné elektromagnetické pole vytvářené elektrickými stroji. Jeho nebezpečí je v tom, že indukuje napětí na vodičích. V důsledku nelinearity magnetických obvodů se indukuje celá řada harmonických.

- (c) Spínané zdroje a další výkonové speciální přístroje, které působí oběma cestami. Na rozdíl od předchozích dvou příčin je rušení od nich ve velmi širokém frekvenčním pásmu.

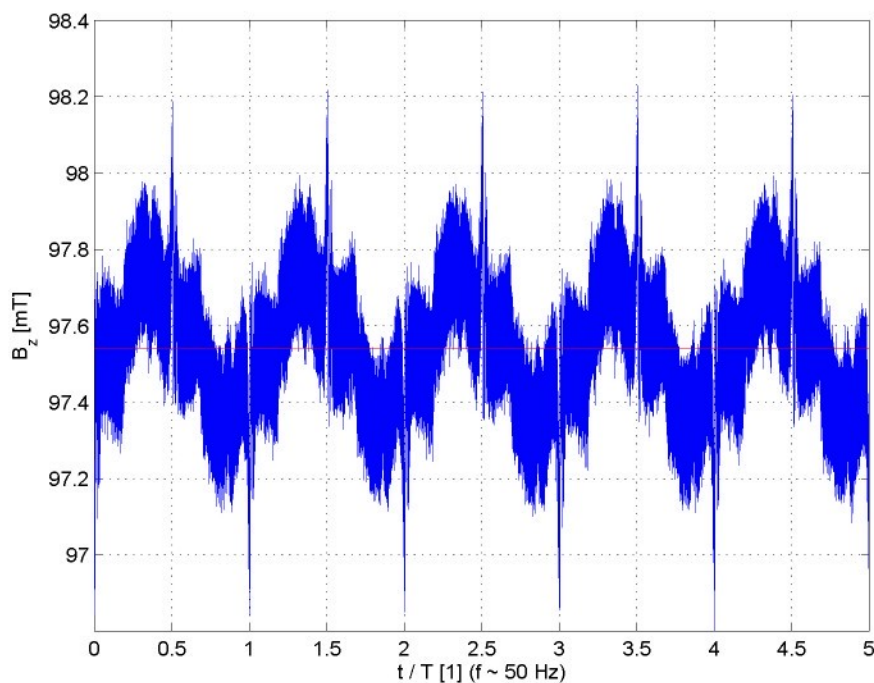
2. Hlavní zdroje rušení v aparatuře pak tvoří

- (a) Elektrické stroje, které jsou zastoupeny dvojicí krokových motorů pro zajištění pohybu polohovacího mechanismu.
- (b) Spínané zdroje, které v aparatuře zajišťují napájení řídicích jednotek krokových motorů a nadřazené řídicí a komunikační jednotky, viz kap. C.1.

Bez ohledu na původ, všechna rušivá napětí se na výstupu aparatury objeví jako rušivé složky magnetické indukce, které zkreslují výsledky měření. Poněvadž cílem je měření magnetické indukce, budeme v dalším mluvit o rušivých složkách magnetické indukce, i když jejich původ je jinde.

Měření vlivu rušení bylo provedeno na témže vybraném vzorku jako pro bílý šum opět v jeho geometrickém středu a na úrovni jeho povrchu. Měření proběhlo v technické laboratoři, kde byla aparatura umístěna po dobu všech experimentů. Typický časový průběh z-ové složky magnetické indukce je na obr. C.2.4. Na vodorovné ose je vynesena čas jako násobek jmenovité hodnoty periody síťového napětí. Na svislé ose je vynesena hodnota z-ové složky magnetické indukce. Červeně je vyznačena vypočtená střední hodnota magnetické indukce.

Bez ohledu na příčinu, rušení má mnohé společné rysy. Na obr. C.2.4 je zobrazen typický vliv síťového rušení tak, jak se promítne do měřené veličiny. Z časového průběhu je patrné, že rušení neobsahuje pouze základní harmonickou složku síťové frekvence (50 Hz) a její případné harmonické, ale jedná se o složitý signál, který obsahuje mnoho příspěvků od různých zdrojů



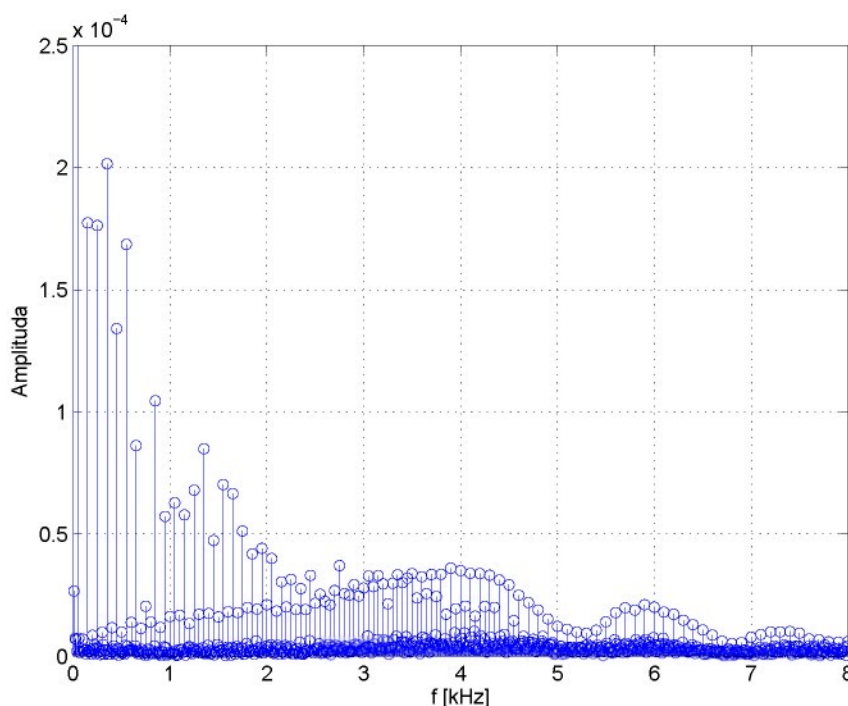
Obrázek C.2.4: Výsledky měření rušení na Hallově sondě pro z-ovou složku magnetické indukce.

zapojených do sítě v okolí místa měření.

Na obr. C.2.5 je proto zobrazeno amplitudové spektrum signálu z obr. C.2.4 v poměrně širokém frekvenčním pásmu. Na vodorovné ose je vynesena frekvence a na svislé ose poměrná amplituda jednotlivých složek spektra. S cílem zobrazit relativní vztah mezi velkým

počtem harmonických byla amplituda základní harmonické upravena tak, aby byla využita celá plocha grafu pro ostatní harmonické. Ve skutečnosti nejvyšší harmonické dosahují maximálně jedné desetiny amplitudy základní frekvence. Totéž platí i pro spektrum na dalším obrázku.

Pro zpětnou rekonstrukci signálu je stejně důležité i fázové spektrum. Poněvadž z jeho průběhu nelze zpravidla odvodit žádné kvalitativní informace, není zde uvedeno.



Obrázek C.2.5: Amplitudové spektrum změřeného průběhu magnetické indukce.

Spektrum je poměrně komplikované, obsahuje velký počet harmonických. To odpovídá složitému časovému průběhu na obr. C.2.4. Pro získání podrobnější představy je na obr. C.2.6 uvedeno spektrum pro nízké frekvence. Vzhledem k nastavenému měřítku, není amplituda základní harmonické viditelná, vybočuje vysoko nad graf. Zřetelné jsou vyšší harmonické síťové frekvence.

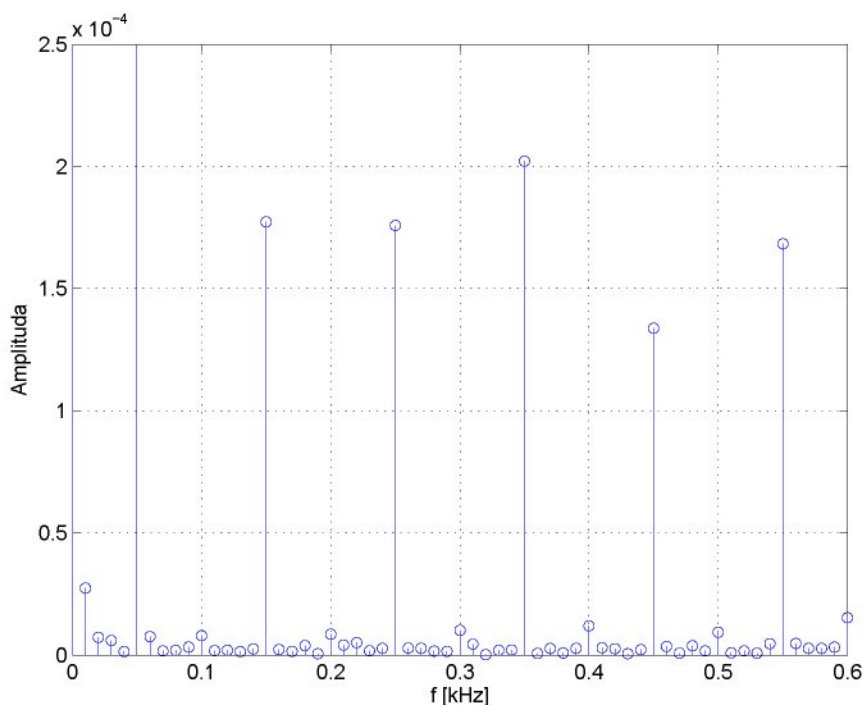
Spektrum bylo vypočteno z celého průběhu signálu, viz obr. C.2.4, který obsahuje právě pět period základní harmonické (50 Hz). Jak vyplývá z definice Fourierovy transformace, je vstupní signál považován právě za jednu periodu zkoumaného průběhu. Z tohoto důvodu obsahuje spektrum i minoritní subharmonické složky, viz obr. C.2.6. Na každý násobek základní harmonické připadá pět subharmonických složek, které udávají stejnoměrnost jednotlivých period vstupního signálu, pro každou harmonickou složku zvlášť.

Tyto harmonické, či subharmonické, jsou o řád nižší než harmonické síťové frekvence. To vede k důležitému závěru, že změřené periody se liší navzájem málo i přes poměrně složitý průběh signálu, viz obr. C.2.4.

V nepřítomnosti magnetu lze ukázat, že stejnosměrná složka rušení je nulová. Přesněji, její hodnota daná nepřesností měření je zanedbatelná vůči hodnotě amplitud harmonických. Tato skutečnost umožní potlačení rušení poměrně jednoduchou metodou, a to průměrováním. To je založeno na vztahu

$$B_s = \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} B(t) dt, \quad (\text{C.2.6})$$

kde $B(t)$ je naměřený časový průběh složek magnetické indukce, t_0 je doba, během níž je



Obrázek C.2.6: Amplitudové spektrum pro změřený časový průběh magnetické indukce – detail pro nízké frekvence.

průměr počítán, a B_s je průměrná hodnota magnetické indukce odvozená z dat. Úkolem je určit dobu průměrování t_0 tak, aby průměrná hodnota magnetické indukce se shodovala se skutečnou hodnotou. V principu existují dva základní způsoby: průměrování během jedné periody ($t_0 = T$) a průměrování během velkého množství period ($t_0 = nT$). V zásadě je první způsob rychlý, nicméně náročný. Druhý způsob je pomalý, ale jednoduchý.

Průměrování během jedné periody

Průměrování během jedné periody lze provádět dvěma způsoby.

1. Odečtením okamžiku počátku a konce periody, např. z podmínky průchodu nulou a kladné směrnice. To je však možné jen u jednoduchého dobře definovaného signálu. S ohledem na složitý průběh rušivého signálu na obr. C.2.4 tento přístup není prakticky možný. Ale i u poměrně jednoduchého signálu to může vést k chybám. Aplikace vyžaduje poměrně složitý algoritmus, a to i vzhledem k možným několikanásobným průchodům nulou během vyšetřované periody.
2. Snímání signálu přesně po dobu jedné periody. To je v principu jednoduché, vyžaduje to však poměrně vysoké rychlosti vzorkování. Navíc musí být dostatečně stabilní vzorkovací frekvence. Oproti předchozímu přístupu tento však předpokládá výrazné omezení — frekvence rušivého signálu musí být konstantní.

S ohledem na možné výstupy obou metod a na jejich náročnost vyšetřujeme pouze druhou metodu.

Rušení je superpozicí harmonických složek indukce, přičemž největší význam má základní harmonická. Proto se v teoretickém odvození bude předpokládat, že rušivá magnetická indukce je harmonická a je popsána obecným vztahem

$$B(t) = B_m \sin(\omega t + \varphi) \quad (\text{C.2.7})$$

kde B_m je amplituda magnetické indukce, $\omega = 2\pi/T$ je úhlová frekvence, T je perioda a φ je fázová konstanta. Pro ideální síťové napětí platí $\omega = 100\pi$ rad/s, $T_0 = 20$ ms. Obvykle se volí $\varphi = 0$ rad, v našem případě však na fázové konstantě záleží.

Po dosazení výrazu v (C.2.7) do (C.2.6) dostaneme vztah pro střední hodnotu napětí za interval t_0 .

$$B_s = \frac{B_m T}{2\pi t_0} \left(\cos(\varphi) - \cos\left(\frac{2\pi t_0}{T} + \varphi\right) \right), \quad (\text{C.2.8})$$

kde t_0 je doba integrace a T je perioda rušivého signálu.

Již jsme upozornili, že druhá metoda je založena na podmínce, že frekvence rušivé magnetické indukce je konstantní. Ve shodě s běžnou praxí budeme předpokládat, že tato rušivá indukce má síťovou frekvenci. Pak se ve vztahu (C.2.6) volí doba integrace rovna periodě ideální sítě, tj. $t_0 = T_0 = 20$ ms. Dále se budeme zabývat případy, kde je perioda rušícího signálu rovna periodě ideální sítě a kdy se od ní liší.

Ideální situace, skutečná frekvence síťového napětí je 50 Hz

Nejdříve předpokládejme ideální situaci, kdy frekvence síťového napětí je přesně 50 Hz a tedy perioda $T = T_0 = 20$ ms. Zvolme vzorkovací frekvenci 250 kSa/s, což odpovídá 5000 vzorkům na periodu síťového napětí při dodržení výše uvedené podmínky. Poněvadž $T = T_0 = t_0$, zjistíme ze vztahu (C.2.8) $B_s = 0$, tedy střední hodnota rušivé indukce za dobu jedné periody je rovna nule.

Reálná situace, skutečná hodnota frekvence se liší od 50 Hz

K této situaci může dojít z několika důvodů: kolísání frekvence sítě, rušivý signál jiného původu apod. Budeme se pro jednoduchost zabývat kolísáním frekvence sítě. Norma ČSN EN 50160¹⁸ definuje jako jmenovitý kmitočet napájecího napětí hodnotu 50 Hz. Za normálních provozních podmínek musí být střední hodnota kmitočtu základní harmonické, měřená v intervalu 10 s u systémů se synchronním připojením k propojenému systému v mezích podle tab. C.2.2.

Tabulka C.2.2: Tolerance střední hodnoty kmitočtu síťového napětí dle ČSN EN 50160 pro systémy se synchronním připojením k propojenému systému.

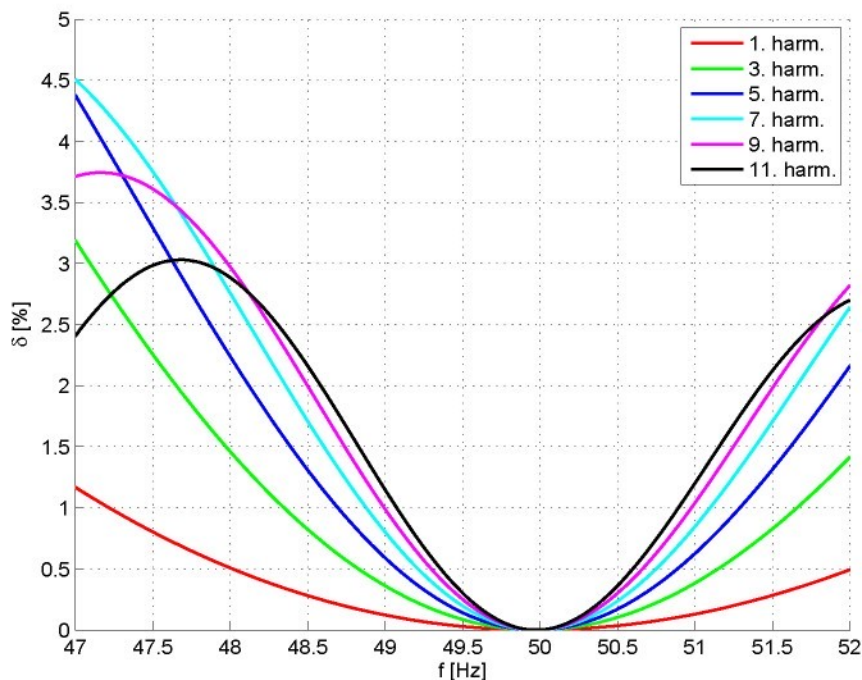
50 Hz ± 1 %	(tj. 49.5 $\div$ 50.5 Hz)	během 99.5 % roku	$\alpha_{min} = 0.99$	$\alpha_{max} = 1.01$
50 Hz + 4 % / - 6 %	(tj. 47.0 $\div$ 52.0 Hz)	po 100 % času	$\alpha_{min} = 0.94$	$\alpha_{max} = 1.04$

Pokud je frekvence odlišná od jmenovité hodnoty, liší se i perioda průměrované indukce, avšak doba průměrování zůstává stejná $t_0 = T_0$. Změnu periody rušivé indukce zahrneme tak, že ve vztahu (C.2.8) nahradíme T za αT_0 . Pro ideální síť je $\alpha = 1$. Po dosazení pro $\alpha = 1$ dostaneme nenulovou střední hodnotu.

Parametr α získáme výpočtem ze vztahu $\alpha = 50/f$. Maximální interval pro parametr α je podle normy uveden v tabulce C.2.2. Po dosazení $T = \alpha T_0$ pro předpokládané změny frekvence do (C.2.8) zjistíme, jaká část rušivé indukce zůstává po průměrování. Na obr. C.2.7 je vynesena závislost relativní hodnoty průměru rušivé indukce pro různé frekvence a pro nulovou fázovou konstantu. Nulová fázová konstanta znamená, že integrace začala při průchodu rušící indukce nulou. Průměruje se pro dobu rovnou přesně 20 ms. Na vodorovné ose je vynesena dovolený interval pro síťovou frekvenci dle ČSN EN 50160. Na svislé ose jsou zobrazeny

¹⁸ČSN EN 50160: Charakteristiky napětí elektrické energie dodávané z veřejné distribuční sítě.

relativní hodnoty rušivé indukce po zprůměrování, které pracovně nazveme relativní nejistoty. V grafu jsou dále vyneseny závislosti relativní nejistoty pro vyšší harmonické složky indukce. Zobrazeny jsou pouze závislosti pro liché harmonické složky, neboť v praxi mají několikanásobně větší amplitudu než sudé složky.

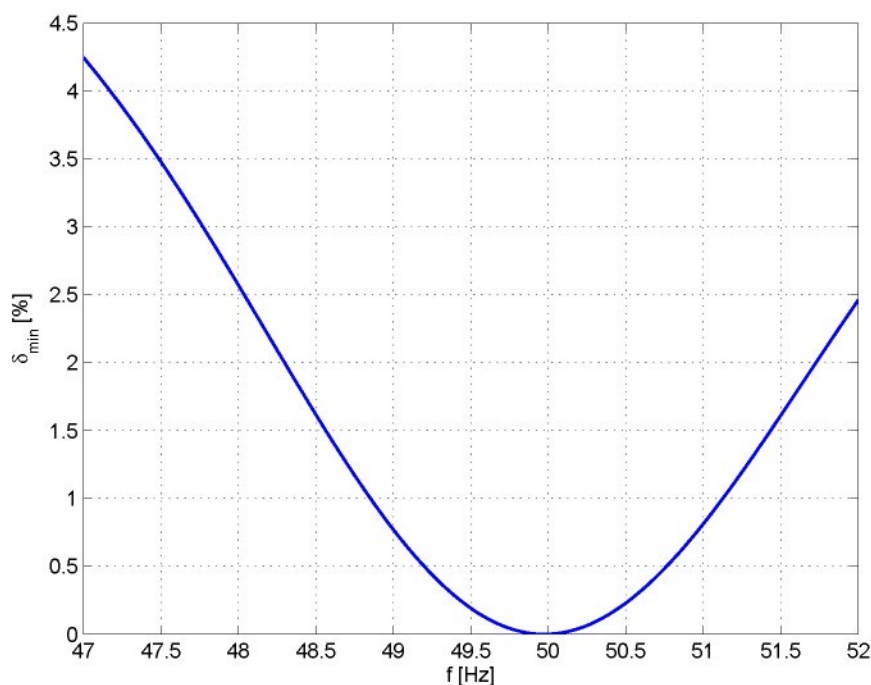


Obrázek C.2.7: Relativní nejistota průměrování pro povolený rozsah frekvencí a pro několik harmonických složek rušivého signálu.

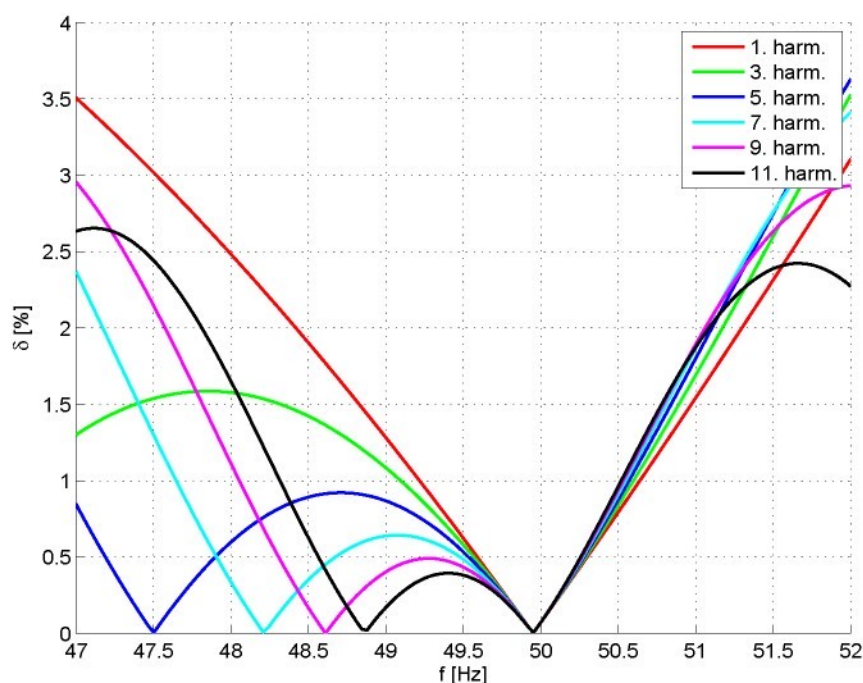
Nejmenší relativní nejistotu podle obr. C.2.7 je pro základní frekvenci, která má ale nejvyšší amplitudu. Ostatní harmonické vykazují až 4x větší relativní nejistotu, avšak jejich amplitudy jsou minimálně 10x menší. Proto je na obr. C.2.8 součet všech relativních nejistot s ohledem na amplitudy harmonických. Závislost byla vypočtena z charakteristik na obr. C.2.7 a z poměrných velikostí amplitud odpovídajících harmonických složek, viz obr. C.2.6. Započítány jsou pouze liché harmonické složky, mají vůči sudým výrazně větší amplitudy, a z hlediska rušení a kvality elektrické energie i podstatně větší význam. Výsledkem je charakteristika, která udává nejmenší možnou relativní nejistotu způsobenou změnou frekvence rušení. Vliv nezapočítaných sudých harmonických složek je minimální a na charakteristice by nebyl znatelný. Vliv změny frekvence je tedy dle provedených výpočtů pro nejhorší a málo pravděpodobnou situaci, $f = 47$ Hz, necelých 4.5 %.

Vliv kolísání frekvence sítě je tedy zanedbatelný. Stejným způsobem by se počítala relativní nejistota při průměrování rušivého signálu i více odlišné frekvence. Zde by byla relativní nejistota vyšší. Poněvadž jsme takové rušivé signály nezjistili, touto otázkou jsme se dále podrobně nezabývali.

Pro úplnost uvádíme na obr. C.2.9 relativní nejistoty průměru pro nenulovou fázovou konstantu $\varphi = 45^\circ$. To znamená, že průměrování začalo při dosti velké kladné hodnotě rušivého signálu. Průběhy se dosti liší od případu nulové fázové konstanty na obr. C.2.7, zejména pro první harmonickou. Celková relativní nejistota se poněkud zvýší, ale nikoliv podstatně. Obdobně lze vyšetřovat i další hodnoty fázové konstanty.



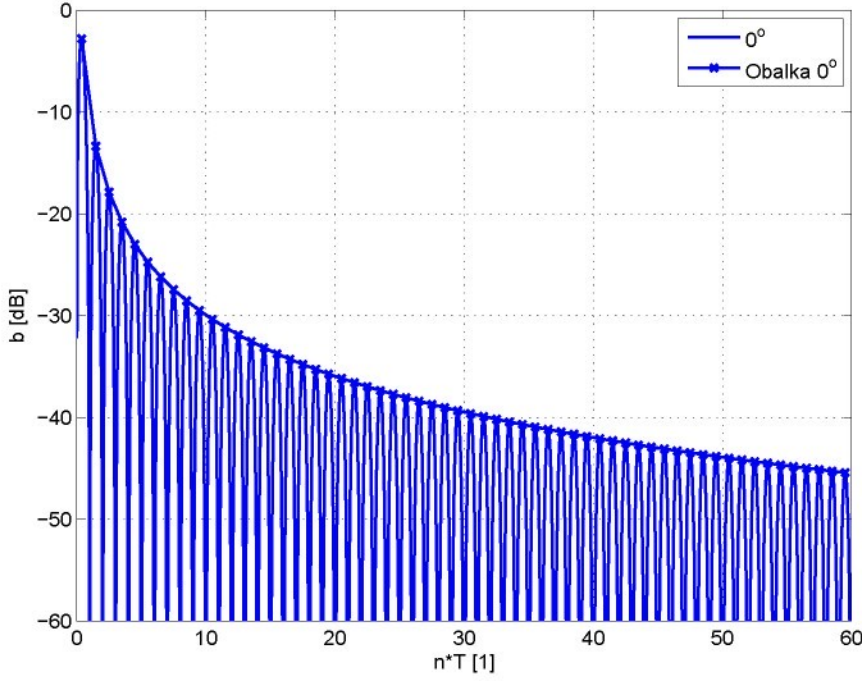
Obrázek C.2.8: Minimální relativní nejistota průměrování pro povolený rozsah frekvencí.



Obrázek C.2.9: Relativní nejistota průměrování pro povolený rozsah frekvencí pro fázovou konstantu $\varphi = 45^\circ$.

Průměrování během velkého počtu period

Potlačení vlivů způsobených změnou frekvence lze docílit průměrováním přes více period signálu. V tomto případě sledujeme závislost střední indukce B_s ve vztahu (C.2.8) na době průměrování t_0 , která se může měnit od nuly do velkého počtu period T ideálního síťového napětí. Průměrování je jednou z možností vysokofrekvenčního filtrování, proto budeme tuto závislost vynášet ve formě útlumové charakteristiky. Průběh této charakteristiky pro nulovou fázovou konstantu je na obr. C.2.10. Z charakteristiky na obr. C.2.10 je jasné patrné, že pro



Obrázek C.2.10: Závislost potlačení střídavého signálu na počtu průměrovaných period pro nulovou fázovou konstantu.

hodnoty přesně odpovídající celonásobkům periody by bylo potlačení střídavého signálu nekonečné. Útlum pro ostatní hodnoty je popsán střídavou funkcí s klesající amplitudou. Z praktického hlediska nás zajímá pouze nejhorší možná situace. Úloha se dále formuluje na nalezení všech lokálních extrémů funkce na dílčích intervalech $< (n - 1)T; nT)$, neboť se vždy jedná o tlumenou periodickou funkci s periodou rovnou periodě střídavého signálu, viz (C.2.8).

Extrémy funkce (C.2.8), kde t_0 je nyní obecná doba, nalezneme z derivace, kterou položíme rovnu nule.

$$\frac{dB_s}{dt_0} = 0. \quad (\text{C.2.9})$$

Následující vztah je derivací funkce střední hodnoty (C.2.8)

$$\frac{dB_s}{dt_0} = \frac{B_m \left[T \cos \left(\frac{2\pi t_0}{T} + \varphi \right) + 2\pi t_0 \sin \left(\frac{2\pi t_0}{T} + \varphi \right) - T \cos \varphi \right]}{2\pi t_0^2}. \quad (\text{C.2.10})$$

Položíme-li výraz v (C.2.10) roven nule, dostaneme vztah, díky kterému lze najít takové hodnoty t_0 , kde funkce prochází nulou. V těchto bodech se nachází extrémy funkce (C.2.8). Ze vztahu (C.2.10) plyne, že tyto body jsou řešením transcendentní rovnice

$$T \cos \left(\frac{2\pi t_0}{T} + \varphi \right) + 2\pi t_0 \sin \left(\frac{2\pi t_0}{T} + \varphi \right) - T \cos(\varphi) = 0. \quad (\text{C.2.11})$$

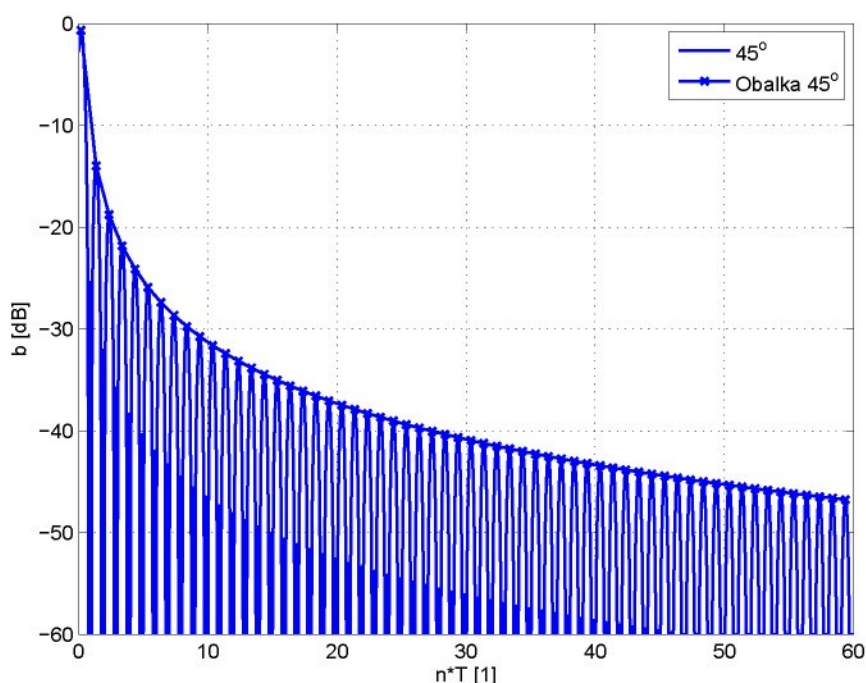
Body, v nichž útlum síťového šumu nabývá maxima, lze nalézt jen numerickým řešením rovnice (C.2.11). Numerické výpočty ukazují, že pro nulovou fázovou konstantu, $\varphi = 0$, se na každém dílčím intervalu nachází právě jedno lokální maximum. Spojením všech nalezených lokálních extrémů funkce dostaneme charakteristiku pro nejhorší možnou situaci, tj. takovou situaci, kdy je střední hodnota počítána na přibližném intervalu

$$\left\langle 0; \left(n - \frac{1}{2} \right) T \right\rangle, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{C.2.12})$$

Na obr. C.2.10 takovému případu odpovídá charakteristika vzniklá spojením všech nalezených extrémů v jednotlivých intervalech.

Fyzikálně je to pochopitelné. Průměrování se ukončí právě v okamžiku, kdy rušivý signál nabývá maxima. Jedná se tedy o skutečně nejhorší případ.

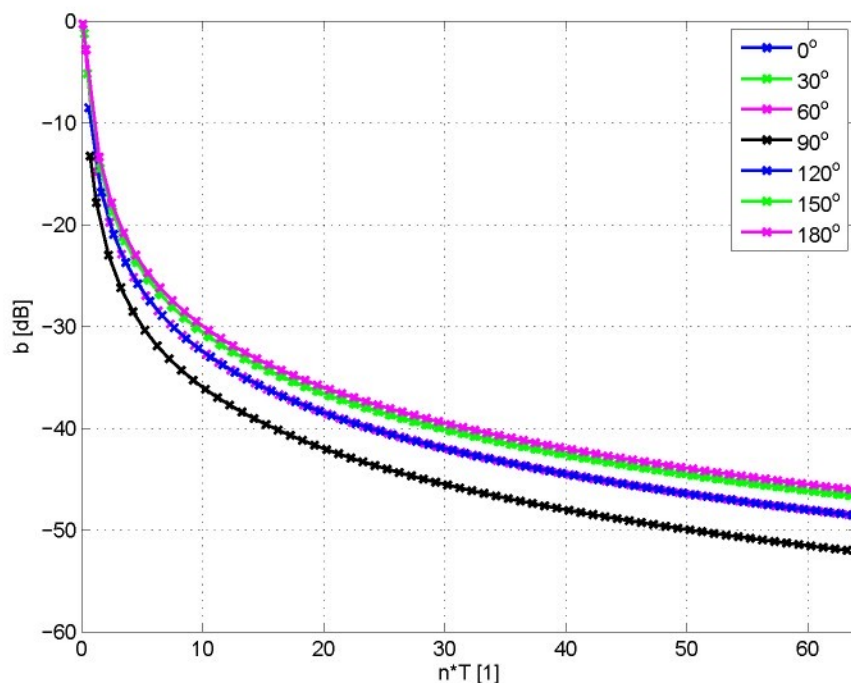
V případech, kdy nelze zaručit začátek měření v okamžiku průchodu signálu nulou, pro $\varphi = 0$, je důležité provést úpravu algoritmu, aby nedocházelo k logaritmování záporných hodnot. Logaritmus se základem deset není v reálném funkčním oboru pro záporná čísla definován. Proto jsou všechny hodnoty uvažovány v absolutní hodnotě. Charakteristika na obr. C.2.11, v tomto případě pro $\varphi = 45^\circ$, vykazuje dvě lokální maxima za dobu jedné periody. Opět je nutno uvažovat nejhorší možnou situaci. Z nalezených lokálních maxim vybereme ta větší, z kterých je následně zkonstruována obálka funkce.



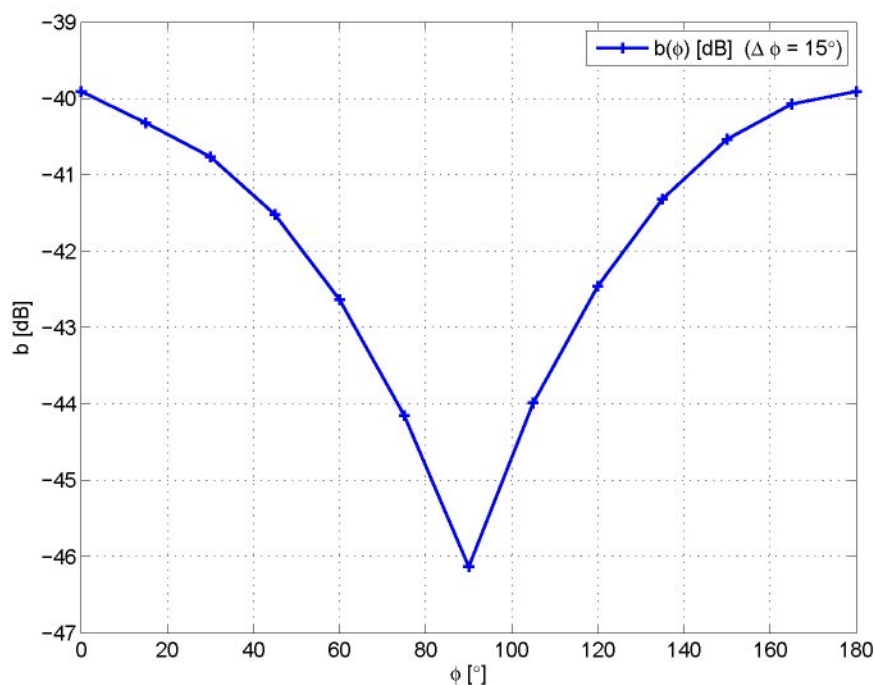
Obrázek C.2.11: Závislost potlačení střídavého signálu na počtu průměrovaných period pro fázovou konstantu $\varphi = 45^\circ$.

Na základě provedených výpočtů pro různé fázové konstanty se ukazuje, že největšího potlačení střídavého signálu se dosáhne pro $\varphi = 90^\circ$. Na obr. C.2.12 jsou zobrazeny obálky funkcí pro různé hodnoty fázové konstanty. Na první pohled je patrné, že nejhorší výsledky odpovídají hodnotám úhlů $n \cdot 2\pi$. Pro dosažení největšího útlumu by bylo zapotřebí průměrovat funkci s fázovou konstantou o hodnotě $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Fyzikálně je to snadno vysvětlitelné. Průměrování začíná od maximální hodnoty. Naopak nulová fázová konstanta znamená, že průměrování začíná od nulové hodnoty.

Z obrázku C.2.13 je patrná závislost útlumu na fázové konstantě. Charakteristika odpovídá závislosti útlumu na fázové konstantě pro $N = 32$ period. Tato závislost je téměř symetrická vůči hodnotě $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Nepatrný rozdíl od symetrie je způsoben mechanismem průměrování. Např. je určitý, i když malý, rozdíl v tom, zda průměrování začíná při fázové konstantě 30° , nebo 150° , ačkoliv jsou okamžité hodnoty v obou případech stejné. Praktický závěr je v tom, že sledování vlivu počáteční fáze je otázka dosti akademická. Počátek vzorkování je náhodný, takže počáteční fáze či fázová konstanta může nabývat všech hodnot. Nelze tedy říci, jaké úrovně potlačení se dosáhne. Je tedy rozumné uvažovat nejhorší případ.



Obrázek C.2.12: Závislost potlačení střídavého signálu na počtu průměrovaných period a fázové konstantě. Na vodorovné ose jsou vyneseny násobky jmenovité hodnoty periody síťového napětí, na svislé ose pak velikost potlačení střídavého signálu v závislosti na počtu průměrovaných period. Jednotlivé charakteristiky odpovídají signálu s různou fázovou konstantou, viz legenda grafu.

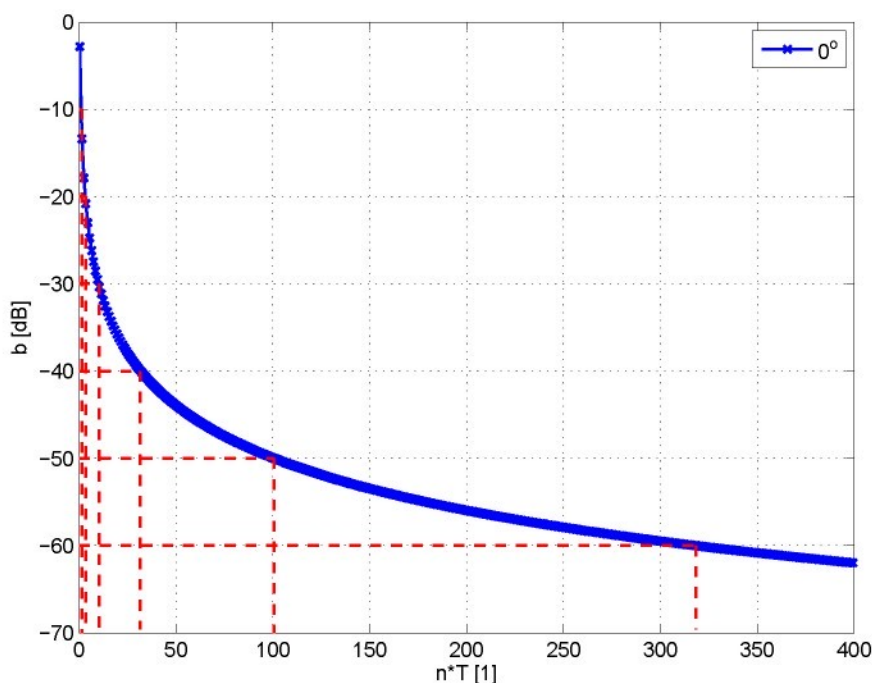


Obrázek C.2.13: Závislost potlačení střídavého signálu na fázové konstantě pro $N = 32$. Na vodorovné ose je vynesena fázová konstanta v intervalu $< 0^\circ; 180^\circ >$, na svislé ose pak velikost potlačení střídavého signálu.

Nalezení optimálního množství průměrovaných period signálu

Jak již bylo řečeno v předcházející kapitole, dokonalého potlačení střídavého signálu je možno dosáhnout průměrováním přesně po dobu jedné periody. To však předpokládá přesnou zna-

lost frekvence základní harmonické složky napětí, jejíž určení/změření není zcela triviální. Velmi dobré hodnoty potlačení střídavého signálu lze dosáhnout i jiným způsobem, který není tolik náročný na režii měřicího procesu¹⁹. Jedná se o průměrování většího množství period signálu, který je ovlivněn síťovým rušením. Za tohoto předpokladu by bylo dosaženo absolutního potlačení střídavé složky při průměrování nekonečného množství period. To však nelze v technické praxi splnit, a proto je nutné nalézt kompromis mezi velikostí útlumu a dobou průměrování signálu, tedy počtem period.



Obrázek C.2.14: Závislost potlačení střídavého signálu na počtu period.

Z provedených výpočtů, které jsou reprezentovány obr. C.2.14, byla získána data, která jsou uvedena v tab. C.2.3. Data vychází z charakteristiky pro fázovou konstantu $\varphi = 0^\circ$, což je nejhorší případ. Pro potlačení šumu na 1 %, tj. 40 dB, je nezbytné průměrovat po dobu 32 period, tj. asi 0.6 s na jedno měření.

Tabulka C.2.3: Závislost potlačení střídavého signálu na počtu period.

Útlum [dB]	Počet period [1]	Celónásobek periody [1]	Doba vzorkování [s]
-10	1,12	2	0.04
-20	3,21	4	0.08
-30	10,07	11	0.22
-40	31,83	32	0.64
-50	100,66	101	2.02
-60	318,31	319	6.38

Všechny výše uvedené postupy a principy potlačení nejistoty způsobené vlivem změny frekvence lze použít v mnoha případech bez ohledu na typ procesu, kde by došlo k ovlivnění velikosti nejistoty měřené hodnoty. Z grafické charakteristiky uvedené na obr. C.2.14 je na první pohled patrná vzájemná závislost mezi oběma veličinami, počtem period – n ,

¹⁹Platí pro stacionární nebo kvazistacionární děje.

a velikostí útlumu – b . Postupnou identifikací a statistickou analýzou vypočtených dat byl pro uvedenou závislost nalezen analytický vztah. Jako nejvhodnější se pro uvedenou charakteristiku jevila aproximace logaritmickou regresí. Jelikož mezi logaritmem o desítkovém základu a o přirozeném základu existuje přímý převodní vztah, byla dána přednost desítkovému logaritmu. Ten má přímou praktickou návaznost na oblast řešení. Tato závislost má tvar

$$b = a_0 + a_1 \log N = -9.362 - 20.28 \cdot \log N, \quad (\text{C.2.13})$$

kde b je velikost útlumu a N je počet průměrovaných period měřeného signálu, a_0, a_1 jsou hledané konstanty regresní rovnice. Typické hodnoty jsou uvedeny v tab. C.2.3.

Ze vztahu (C.2.13) lze analogicky najít i opačnou závislost, kde útlum je nezávislou veličinou a počet period veličinou závislou. Tuto závislost popisuje vztah

$$N = 10^{\left(\frac{b - a_0}{a_1}\right)} = \left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{a_0}{a_1}} 10^{\left(\frac{b}{a_1}\right)} = \left(\frac{1}{10}\right)^{\left(\frac{-9.36}{-20.2}\right)} 10^{\left(\frac{b}{-20.2}\right)}. \quad (\text{C.2.14})$$

Z analytického vztahu (C.2.13) vyplývá, že závislost mezi veličinami je logaritmická. Vlastní měření lze provést buď dostatečně rychle, ale s malým útlumem, pomalu a s velkou hodnotou útlumu, nebo nalézt vhodný kompromis. V této práci, kde byla věnována hlavní pozornost po geometrické stránce specifickým, prstencovým permanentním magnetům, bylo nutné volit kompromisní řešení. Měření probíhalo na ploše 140x140 mm. V každém bodě byly změřeny všechny tři složky magnetické indukce (x , y a z), každá na samostatném kanálu analogově-digitálního převodníku. Vynásobíme-li počet měřicích bodů v ploše časem vzorkování, dostaneme přibližnou dobu měření jednoho řezu vzorku. Další detaily viz kap. C.1. Doba měření popisují hodnoty uvedené v tab. C.2.4. První sloupec představuje hodnoty

Tabulka C.2.4: Závislost doby měření na žádané velikosti útlumu.

Útlum [dB]	Doba vzorkování [s]	Doba měření vzorku [s]	Doba měření vzorku [hod]
-10	0.04	784	0.218
-20	0.08	1 570	0.436
-30	0.22	4 310	1.190
-40	0.64	12 500	3.480
-50	2.02	39 600	11.000
-60	6.38	125 000	34.700

požadovaného útlumu, druhý sloupec dobu vzorkování měřené hodnoty v jednom měřicím bodě. Poslední dva sloupce vyjadřují celkovou dobu potřebnou na změření celého řezu vzorku na uvedené ploše 140x140 mm za předpokladu hustoty měřicí sítě 1x1 mm. Pro vlastní měření byla použita varianta pro hodnotu útlumu rovnu -40 dB. V této tabulce je započítána pouze doba nutná na odečtení předepsaného počtu vzorků signálu. K ní je ještě nutno přičíst ještě dobu na přesun do nové polohy. Krátké doby se pak mohou výrazně prodloužit. U delších se doba přesunu projeví málo. Rovněž není započtena doba na zpracování naměřených dat, která se prodlužuje s počtem vzorků. Hodnoty jsou tedy jen orientační.

C.2.3 Nejistota měření způsobená vlivem zapojení Hallových sond

Klíčovým bodem měření je vedle přesného nastavení polohy spolehlivé určení Hallova napětí. Proto se touto kritickou částí aparatury budeme zabývat podrobněji. Výpočet nejistoty

měření způsobené elektronickým zapojením Hallovy sondy uvedeném v příloze na obr. P.2.1 vychází z analýzy nejistot způsobených jednotlivými elektronickými součástmi. Celková nejistota je ovlivněna několika klíčovými parametry.

Hallovo napětí závisí v obecném případě na citlivosti sondy K_{H0} , měřeném magnetickém poli B a příčném proudu Hallovy sondou I podle vztahu

$$U_h = K_{H0}BI . \quad (\text{C.2.15})$$

V reálné situaci je však závislost složitější. Je potřeba vzít v úvahu další, parazitní parametry, které výrazně komplikují výpočet nejistoty. Vychází se z údajů sondy, které výrobce zveřejní v technickém listu, viz [53]. Podle něj je dále nutné uvažovat teplotní součinitel Hallovy sondy α_{KH} , teplotní rozdíl ΔT a offset Hallovy sondy B_{ofs} . Poněvadž je změna způsobená těmito vlivy malá, použijeme pouze lineární závislosti pro započtení těchto vlivů. Použijeme tedy vztah

$$U_h = K_{H0}(1 + \alpha_{KH}\Delta T)(B \pm B_{ofs})I . \quad (\text{C.2.16})$$

Ve vztahu (C.2.16) vystupuje příčný proud Hallovy sondou, který je nutno vyjádřit. Konstantní hodnotu příčného proudu zajišťuje zapojení s obvodem napěťové reference REF192, viz [54], v konfiguraci jako přesného zdroje konstantního proudu. Z tohoto zapojení, viz [54], plyne pro velikost proudu vztah

$$I = \frac{U_{out}}{R_0} , \quad (\text{C.2.17})$$

kde U_{out} je výstupní napětí obvodu napěťové reference a R_0 je hodnota odporu rezistoru. Podle technického listu, viz [54], ovlivňují velikost proudu podstatným způsobem i další veličiny, a to velikost změny napájecího napětí ΔV_{in} a teplotní rozdíl ΔT . Opět jejich vliv popíšeme lineární závislostí a tak získáme vztah

$$I = \frac{U_{out}(1 + \alpha_N\Delta T)(1 + \alpha_{Vin}\Delta V_{in})}{R_0(1 + \alpha_R\Delta T)} , \quad (\text{C.2.18})$$

kde α_N je maximální hodnota teplotního koeficientu obvodu, α_{Vin} je citlivost na změnu napájecího napětí a α_R je teplotní koeficient rezistoru.

V ideálním případě by skutečné zesílení obvodu A_d bylo rovno teoretickému zesílení A_{d0} podle vztahu

$$A_d = A_{d0} . \quad (\text{C.2.19})$$

Skutečné zesílení A_d obvodu je po započítání teplotního vlivu a nelinearity dáno vztahem

$$A_d = A_{d0}(1 + \Delta A_d)(1 + \alpha_{Ad}\Delta T) , \quad (\text{C.2.20})$$

kde ΔA_d je nejistota zesílení, α_{Ad} je teplotní koeficient a ΔT je teplotní rozdíl.

Výstupní napětí Hallovy sondy, které vstupuje do analogově-digitálního převodníku, je následně dáno vztahem

$$U_{adc} = U_h A_d + \left(V_{osi} + \frac{V_{oso}}{A_d} \right) + I_b R_{Hout} , \quad (\text{C.2.21})$$

kde U_h je Hallovo napětí, viz vztah (C.2.16), A_d je skutečné zesílení, viz (C.2.20), V_{osi} je vstupní offset obvodu, V_{oso} je výstupní offset obvodu, I_b je vstupní klidový proud obvodu a R_{Hout} je maximální hodnota vstupního odporu Hallovy sondy.

Postupným dosazením vztahu (C.2.18) do (C.2.16) a (C.2.16) a (C.2.20) do (C.2.21) dostaneme výsledný vztah pro hodnotu napětí, které vstupuje do analogově-digitálního převodníku. Tento výraz je velmi rozsáhlý, a je proto uveden v příloze P.4 ve vztahu (P.4.1).

Lze říci, že na nejistotě změřeného Hallova napětí se zásadním způsobem podílejí změna teploty ΔT , změna napájecího napětí ΔV_{in} a velikost vstupního klidového proudu obvodu I_B . Absolutní nejistotu způsobenou zapojením Hallové sondy lze získat výpočtem totálního diferenciálu výrazu (P.4.1) podle vztahu

$$\Delta U_{adc} = \left| \frac{\partial U_{adc}}{\partial \Delta T} \right| \Delta T + \left| \frac{\partial U_{adc}}{\partial \Delta V_{in}} \right| \Delta V_{in} + \left| \frac{\partial U_{adc}}{\partial I_B} \right| I_B . \quad (C.2.22)$$

Jednotlivé parciální derivace výrazu (C.2.22) jsou uvedeny v příloze, a to (P.4.2), (P.4.3) a (P.4.4). Uvedené výrazy byly přepsány do formy skriptu pro prostředí MATLAB, který je součástí přiloženého CD.

V základních vztazích pro výpočet nejistoty, (C.2.16) až (C.2.21), vystupuje z hlediska provozu Hallové sondy několik důležitých parametrů. Jedná se o změnu teploty ΔT a maximální velikost změny napájecího napětí ΔV_{in} . Ve výrazu (C.2.22) pro totální diferenciál ještě vystupuje vstupní klidový proud obvodu. Velikost tohoto proudu je ale velmi malá, desítky nanoampér, a vystupuje pouze v jediném členu totálního diferenciálu, viz vztahy (P.4.2) až (P.4.4). Jeho případná změna směrem k nižším hodnotám se tak na celkové absolutní nejistotě téměř neprojeví. K vyšším hodnotám se velikost proudu již posunout nemůže, neboť se podle technického listu výrobce, viz [55], jedná o hodnotu maximální.

Zajímavé je provést citlivostní analýzu změny absolutní nejistoty výstupního napětí Hallové sondy v závislosti na dvou výše zmíněných parametrech, ΔT a ΔV_{in} . Všechna měření byla bezpečně provedena v teplotním rozsahu $\Delta T = 20$ K. Maximální změna napájecího napětí obvodu Hallové sondy je dle technických specifikací výrobce multifunkční jednotky NI USB-6211, viz [47], rovna hodnotě $\Delta V_{in} = 0.6$ V.

Pro tyto parametry je velikost absolutní nejistoty Hallové sondy v zapojení podle schématu na obr. P.2.1 rovna

$$\Delta U_H = 5.6 \text{ mV} . \quad (C.2.23)$$

Velmi důležitá je závislost změny absolutní nejistoty na velikosti teplotního rozdílu, při kterém je provedeno měření. Tato závislost je uvedena na obr. C.2.15, zatímco na obr. C.2.16 je uvedena závislost na změně velikosti napájecího napětí.

Je zde dobré též upozornit, že při výpočtu absolutní nejistoty jsou uvažovány veličiny, které jsou vztaženy k referenční hodnotě magnetické indukce, která v tomto případě činí 100 mT. Absolutní nejistota tak platí přesně pouze pro tento údaj. Obecně nelze absolutní nejistotu vyjádřit, neboť výrobce Hallových sond nezveřejňuje dostatek nutných, relevantních údajů. Jak je vidět z obr. C.2.15 a obr. C.2.16, největší vliv na velikosti absolutní nejistoty má teplota, konkrétně rozdíl maximální a minimální uvažované provozní teploty.

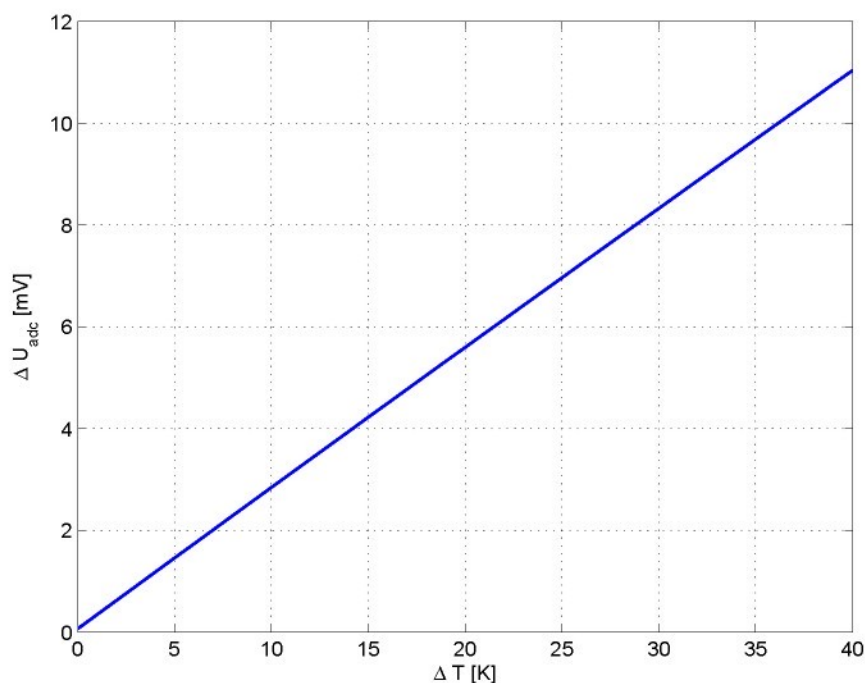
Spočtená absolutní nejistota měření, viz (C.2.23), platí pro každou z Hallových sond trojrozměrné jednotky, viz [48], což je dáno shodným zpracováním elektrického signálu pro každou Hallovu sondu.

Vyjádření relativní nejistoty měření je odlišné. Protože trojrozměrná Hallova sonda ve skutečnosti obsahuje tři samostatné Hallové sondy, musí se kalibrovat každá zvlášť. Ke kalibraci dochází pomocí Helmholtzovy cívky a přesného měřidla magnetické indukce od firmy OMEGA, viz kapitola C.3. Z provedeného měření byly odvozeny kalibrační konstanty, které jsou uvedeny v tab. C.2.5.

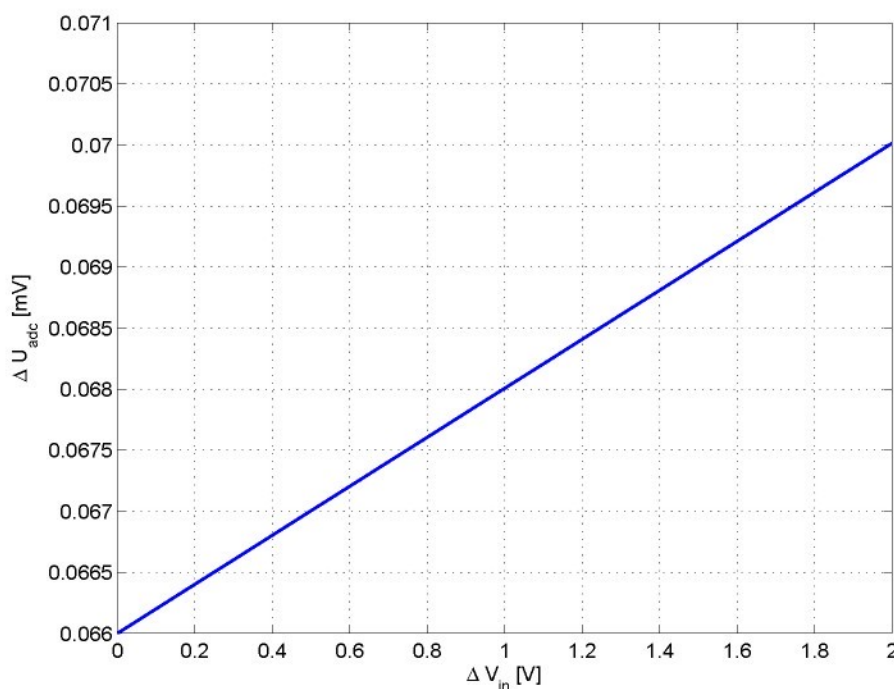
Skutečná hodnota magnetické indukce byla vypočtena pomocí kalibračních konstant, viz tab. C.2.5, na základě vztahu

$$B = B_{gain}(U_{adc} - B_{offset}) , \quad (C.2.24)$$

kde U_{adc} je výstupní napětí Hallové sondy, které vstupuje do analogově-digitálního převodníku, B_{gain} je zesílení–multiplikativní část a B_{offset} je offset–aditivní část.



Obrázek C.2.15: Závislost velikosti absolutní nejistoty Hallové sondy U_{adc} podle zapojení na obr. P.2.1 na velikosti teplotního rozdílu ΔT za předpokladu $\Delta V_{in} = 0$ V.



Obrázek C.2.16: Závislost velikosti absolutní nejistoty Hallové sondy U_{adc} podle zapojení na obr. P.2.1 na velikosti změny napájecího napětí ΔV_{in} za předpokladu $\Delta T = 0$ K.

Teoretický měřicí rozsah Hallových sond je v konfiguraci dle elektronického schématu na obr. P.2.1 rovno

$$B_{MR} = \pm 360 \text{ mT} .$$

Relativní nejistotu je nutné vyjádřit opět vzhledem k referenční hodnotě magnetické indukce rovné 100 mT. Jednotlivé Hallové sondy jsou odlišné a mají tak i rozdílné kalibrační konstanty. Proto bude i relativní nejistota různá pro každou sondu. Relativní nejistoty napětí

Tabulka C.2.5: Kalibrační konstanty trojrozměrné Hallové sondy ELIDIS.

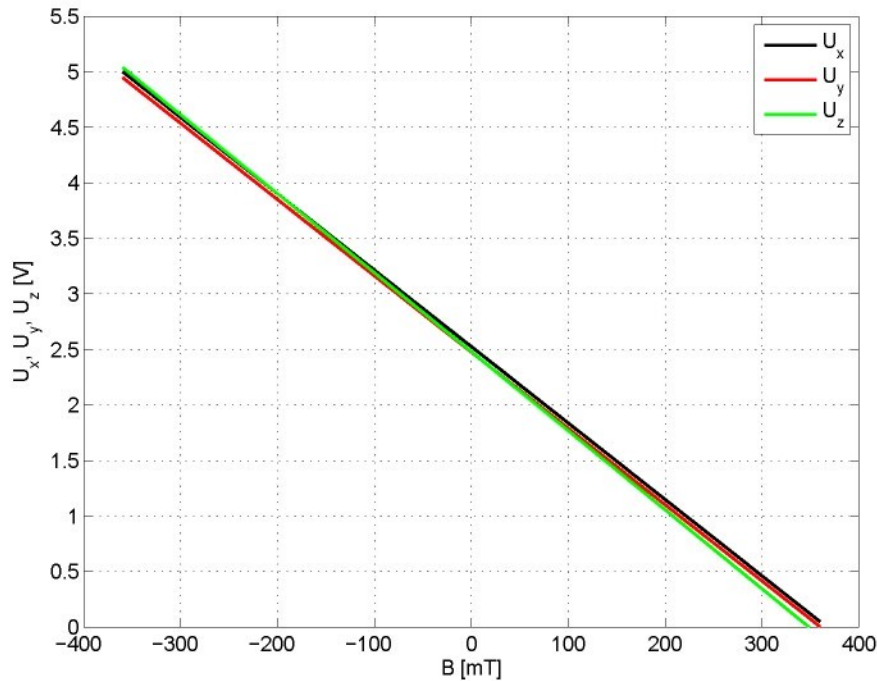
Složka	Offset B_{offset}	Zesílení B_{gain}
B_x	2.525	-145.39
B_y	2.476	-145.60
B_z	2.479	-140.61

odpovídající měřeným složkám magnetické indukce jsou rovny

$$\delta U_x = 0.81 \% \quad \delta U_y = 0.81 \% \quad \delta U_z = 0.78 \% , \quad (\text{C.2.25})$$

což odpovídá δB_x , δB_y a δB_z .

Na obr. C.2.17 je znázorněna lineární závislost výstupního napětí Hallových sond na magnetické indukci podle nalezených kalibračních konstant, viz tab. C.2.5.

**Obrázek C.2.17:** Závislost výstupního napětí Hallových sond na magnetické indukci po aplikaci kalibračních koeficientů.

C.2.4 Nejistota měření způsobená nejistotou převodníku

Výstupní napětí Hallových sond bylo přivedeno na analogové vstupy multifunkční jednotky NI DAQ 6211. Vstupní AD převodník je 16-bitový s maximální souhrnnou²⁰ rychlostí vzorkování rovnou 250 kS/s. Všechna měření v této práci byla provedena na měřicím rozsahu ± 5 V. Výpočet absolutní nejistoty převodu na uvedeném rozsahu je předepsán výrobcem

²⁰Jednotka obsahuje pouze jeden fyzický AD převodník, který má multiplexované vstupy. Maximální rychlosti vzorkování lze dosáhnout pouze v případě zapojení právě jednoho vstupu, diferenciálního nebo nesymetrického.

a je nutné jej dodržet, details lze nalézt v [47]. Aby nedošlo k chybné interpretaci některých pojmů, které v postupném výpočtu výrobce zavádí, jsou v rovnicích ponechány výrazy v původním slovním vyjádření bez nahrazení zástupnými symboly.

Absolutní nejistota je dána výrazem:

$$\text{AbsoluteAccuracy} = \text{Reading} \cdot (\text{GainError}) + \text{Range} \cdot (\text{OffsetError}) + \text{NoiseUncertainty}$$

kde AbsoluteAccuracy je absolutní nejistota, Reading je změřená hodnota²¹, GainError je nejistota zesílení, Range je velikost měřicího rozsahu, OffsetError je nejistota offsetu a NoiseUncertainty je tzv. šumová nejistota.

Nejistota zesílení (GainError) je výrobcem pak určena jako závislost

$$\begin{aligned} \text{GainError} = & \text{ResidualAIGainError} + \text{GainTempco} \cdot (\text{TempChangeFromLastInternalCal}) \\ & + \text{ReferenceTempco} \cdot (\text{TempchangeFromLastExternalCal}) \end{aligned}$$

kde $\text{ResidualAIGainError}$ je dodatečná nejistota zesílení, GainTempco je teplotní koeficient zisku, $\text{TempChangeFromLastInternalCal}$ je změna teploty od poslední interní kalibrace, ReferenceTempco je teplotní koeficient a $\text{TempChangeFromLastExternalCal}$ je změna teploty od poslední externí kalibrace měřicího přístroje.

Nejistota offsetu (OffsetError) je výrobcem vyjádřena závislostí

$$\begin{aligned} \text{OffsetError} = & \text{ResidualAIOffsetError} \\ & + \text{OffsetTempco} \cdot (\text{TempChangeFromLastInternalCal}) + \text{INL_Error} \end{aligned}$$

kde $\text{ResidualAIOffsetError}$ je dodatečná nejistota offsetu, OffsetTempco je teplotní koeficient offsetu, $\text{TempChangeFromLastInternalCal}$ je změna teploty od poslední interní kalibrace měřicího přístroje a INL_Error je integrální nelinearita, viz [47].

Jako poslední je uveden vztah pro šumovou nejistotu, která je dána vztahem

$$\text{NoiseUncertainty} = \frac{\text{RandomNoise} \cdot \text{CoverageFactor}}{\sqrt{\text{number_of_readings}}}$$

kde RandomNoise je velikost vnitřního šumu, CoverageFactor je konstanta krytí a $\text{number_of_readings}$ odpovídá počtu změřených hodnot, viz [47].

Všechny hodnoty použité na výpočet absolutní nejistoty jsou vyčteny z tabulky absolutních přesností, viz [47]. Následuje výpis použitých konstant z uvedeného zdroje pro použitý měřicí rozsah ± 5 V. Postupným zpětným dosazením do vztahů z tabulky C.2.6 dostaneme popořadě hodnoty pro šumovou nejistotu

$$\text{NoiseUncertainty} = 3.91 \mu\text{V} ,$$

dále pro nejistotu zesílení

$$\text{GainError} = 142 \text{ ppm} ,$$

$$\text{OffsetError} = 132 \text{ ppm} ,$$

$$\text{AbsoluteAccuracy} = 5 \text{ V} \cdot 142 \text{ ppm} + 5 \text{ V} \cdot 132 \text{ ppm} + 35.4 \mu\text{V} = 1.4 \text{ mV} .$$

Absolutní nejistotu analogově-digitálního převodníku, výrobcem značenou jako AbsoluteAccuracy , označíme pro snadnější orientaci symbolem ΔU_{adc} . Absolutní nejistota pak bude mít tvar

$$\Delta U_{adc} = 1.4 \text{ mV} . \quad (\text{C.2.26})$$

Z výše vypočtené absolutní nejistoty získáme podobným postupem jako v případě polohovací aparatury nejistotu měření. Nejprve je potřeba ale započítat i vliv měřicí sondy, viz [48], na celkovou nejistotu. Absolutní nejistota Hallovy sondy a její výpočet je uveden v kapitole C.2.3.

²¹V našem případě se dosazuje maximální hodnota rozsahu.

Tabulka C.2.6: Výťah z tabulky absolutních přesností pro zvolený měřicí rozsah ± 5 V, viz [47].

Proměnná	Hodnota	Jednotka
ResidualAIGainError	85	ppm of Reading
Gain Tempco	7.3	ppm / °C
ReferenceTempco	5	
ResidualAIOffsetError	20	ppm of Range
OffsetTempco	36	ppm of Range / °C
INL_Error	76	ppm of Range
RandomNoise	118	μV_{rms}

Absolutní nejistota platí na plném rozsahu analogových vstupů za následujících podmínek měření:

TempChangeFromLastExternalCal	10	°C
TempChangeFromLastInternalCal	1	°C
CoverageFactor	3	
number_of_readings	8192	

C.2.5 Celková nejistota měření

Nejistota měření je určena dvěma parametry, a to absolutní nejistotou analogově-digitálního převodníku na použitém měřicím rozsahu, viz kap. C.2.4, a absolutní nejistotou Hallovy sondy v použitém elektronickém zapojení, viz kap. C.2.3. Celkovou nejistotu v tomto případě lze určit jako odmocninu součtu čtverců dílčích nejistot danou vztahem

$$\Delta U = \sqrt{\left(\frac{\Delta U_H}{\Theta_H}\right)^2 + \left(\frac{\Delta U_{adc}}{\Theta_{adc}}\right)^2}, \quad (\text{C.2.27})$$

kde Θ_H, Θ_{adc} jsou parametry, které mají hodnotu podle zvoleného pravděpodobnostního rozložení, viz [36]. Velikost těchto parametrů a tím i typ pravděpodobnostního rozložení byl zvolen s ohledem na míru ovlivnění nejistoty jednotlivými částmi měřicího řetězce. Méně přesnou součástí řetězce je v našem případě samotný obvod Hallovy sondy s přidruženou elektronikou, proto se volí parametr $\Theta_H = \sqrt{3}$. Na druhou stranu je použitý analogově-digitální převodník, viz [47], považován jako zařízení přesnější, a proto byla zvolena konstanta $\Theta_{adc} = \sqrt{6}$, viz [36].

Po dosazení zjištěných absolutních nejistot do vzorce pro celkovou nejistotu vyjde hodnota

$$\Delta U = 3.3 \text{ mV}. \quad (\text{C.2.28})$$

Konečné hodnota se udává s tzv. rozšířenou hodnotou nejistoty, což je kombinovaná hodnota nejistoty násobená tzv. koeficientem rozšíření k_u . Tento parametr se opět volí podle typu pravděpodobnostního rozložení. Volíme raději rozšířený interval nejistoty, proto $k_u = 3$. Celková rozšířená nejistota v určení napětí měřicím řetězcem činí²²

$$\Delta U_r = 10 \text{ mV} \quad (\text{C.2.29})$$

pro zvolené měřicí rozsahy.

²²Zaokrouhlování nejistot a výsledků odpovídá standardům pro nejistoty, uvedeným např. v [35].

C.3 Kalibrace Hallový sondy

Pro kalibraci sond magnetického pole se nejčastěji používá čtyř možných zdrojů pole, viz např. [29]. Jsou to uzavřená kruhová smyčka, Helmholtzova cívka o kruhovém průřezu, uzavřená čtvercová smyčka a Helmholtzova cívka se čtvercovým průřezem. Podle literatury [29] stanovuje standard ANSI/IEEE pro kalibraci uzavřenou smyčku čtvercového průřezu. Krom této varianty je navíc za přijatelný zdroj přesného pole považována Helmholtzova cívka kruhového průřezu o „přiměřené“ velikosti. Podle [27] až [32] je Helmholtzova cívka zdrojem magnetického pole, které je v oblasti blízké středu cívky velmi homogenní. Toho se dá využít pro kalibraci Hallových sond. Na cívku se připojí zdroj konstantního proudu a následně se změří magnetické pole nejdříve přesným, kalibrovaným přístrojem OMEGA HHG-23, viz [40], jehož hodnota je považována za referenční a dále nekalibrovanými sondami, viz [48]. Na základě získaných výsledků se spočtou kalibrační konstanty, viz kap. C.2.3.

C.3.1 Model Helmholtzovy cívky

Ke kalibraci Hallový sondy jsme použili Helmholtzovu cívku, která se dá poměrně snadno realizovat s minimálními náklady. Byla navržena tak, aby při proudu 1 A vzniklo v měřené oblasti přibližně homogenní magnetické pole o indukci 1 mT. Geometrie konstrukce cívky je na obr. P.3.13 v příloze. Cívka byla zkonstruována tak, aby se přípravek s trojrozměrnou Hallovou sondou dal snadno vložit do oblasti s homogenním magnetickým polem.

Pomocí Biot-Savara zákona byl spočten průběh magnetické indukce uvnitř cívky. Program byl v podstatě tentýž jako při výpočtu pro povrchové vázané proudy, nebo pro návrh demagnetizující vzduchové cívky, které budou popsány později. Prostorově nehomogenní proud v závitech je nahrazen povrchovým proudem s konstantní hustotou. Vrstva, po níž teče, prochází středy závitů.

Průběh magnetické indukce pole byl graficky zobrazen jak ve směrech rovnoběžných s osou cívky tak ve směrech k ní kolmých. Z grafů vyplynulo, že při běžně pečlivém umístění sondy relativní nejistota v hodnotě měřené indukce nepřekročí 0.5 %. Kalibrace je tedy poměrně přesná.

Poznamenejme ještě, že nejistota v umístění sondy patří mezi nahodilé nejistoty, poněvadž výsledná poloha cívky závisí na mnoha dílčích vlivech. Tuto nejistotu lze snížit jediné několikanásobným opakování kalibrace. Takto jsme také postupovali.

C.3.2 Citlivostní analýza

Vedle nahodilé nejistoty způsobené nepřesným umístěním sondy v cílce existují systematické nejistoty vyvolané nepřesnou realizací cívky nebo měření. Mezi tyto nejistoty patří:

1. Nejistota v nastaveném proudu,
2. nejistota průměru cívky,
3. nejistota v průměru drátu,
4. nejistota v počtu závitů.

Tyto nejistoty jsme sledovali pomocí programu pro výpočet magnetické indukce. Postupovali jsme tak, že jsme volili malé změny jednoho z parametrů, zatímco ostatní dva zůstaly na předepsaných hodnotách. Graficky jsme vynášeli parametrické křivky pro průběh magnetické indukce podél válcové osy (osy Z) cívky.

Na obr. C.3.1 je zobrazen průběh magnetické indukce podél dlouhého úseku válcové osy. Detaily pro střední část jsou uvedeny na obr. C.3.2. Uprostřed cívky je magnetická indukce

asi $97.5 \mu\text{T}$ pro předepsaný proud 1 A. Magnetické pole ve směru osy Z je dosti homogenní, změna polohy sondy v ose Z o 1 mm způsobí zanedbatelnou chybu.

Změna proudu o 1 % způsobí stejnou relativní změnu magnetické indukce, což nakonec vyplývá z úměrnosti mezi magnetickou indukcí a budícím proudem. Potvrzuje to i relativní nejistota hodnoty magnetické indukce ve střední části cívky na obr. C.3.3. Přesné nastavení budícího proudu je tedy důležité.

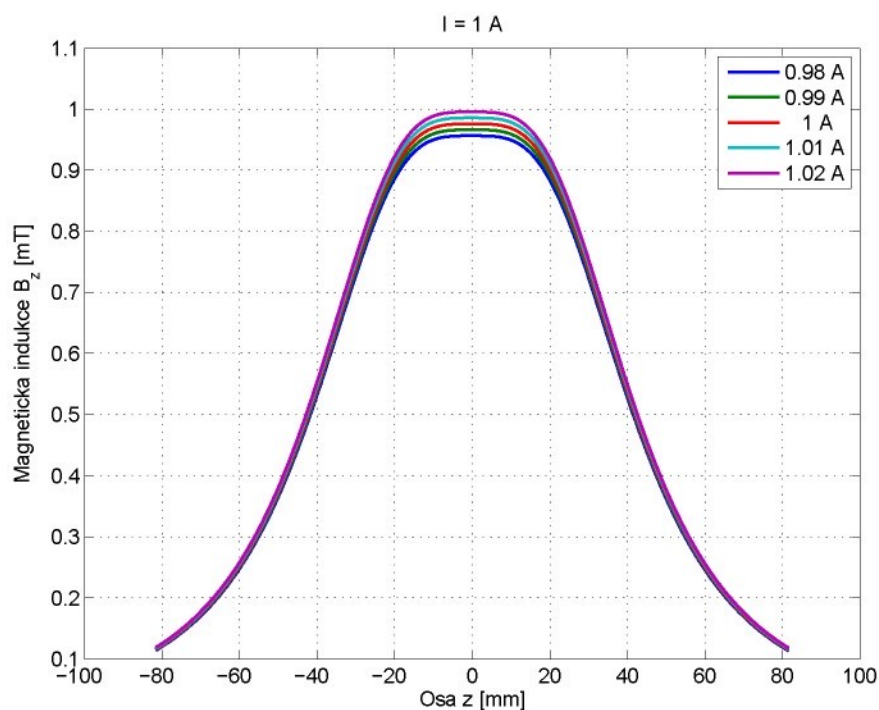
Stejným způsobem byla sledována nejistota způsobená odchylkou v průměru cívky. Na obr. C.3.4 je průběh magnetické indukce v dlouhém úseku podél osy cívky. Parametrem je průměr cívky. Na obr. C.3.5 je detail pro střední část cívky, do níž se vkládá sonda ke kalibraci. Konečně na obr. C.3.6 je relativní nejistota vybuzečné magnetické indukce. Mezi změnou průměru a relativní nejistotou je přibližně lineární závislost s konstantou blízkou jedné. Relativní změna magnetické indukce vyvolaná změnou průměru je tedy přibližně stejná jako relativní hodnota změny průměru. Je tedy důležité zachovat přesnou hodnotu průměru.

Vliv změny průměru drátu v poměrně velkých mezích je na obr. C.3.7 pro velký úsek na ose Z. Na obr. C.3.8 je detail a na obr. C.3.9 je relativní nejistota vyvolaná změnou průměru drátu. Její průběh je poměrně složitý, ale uprostřed cívky je její vliv malý, prakticky zanedbatelný.

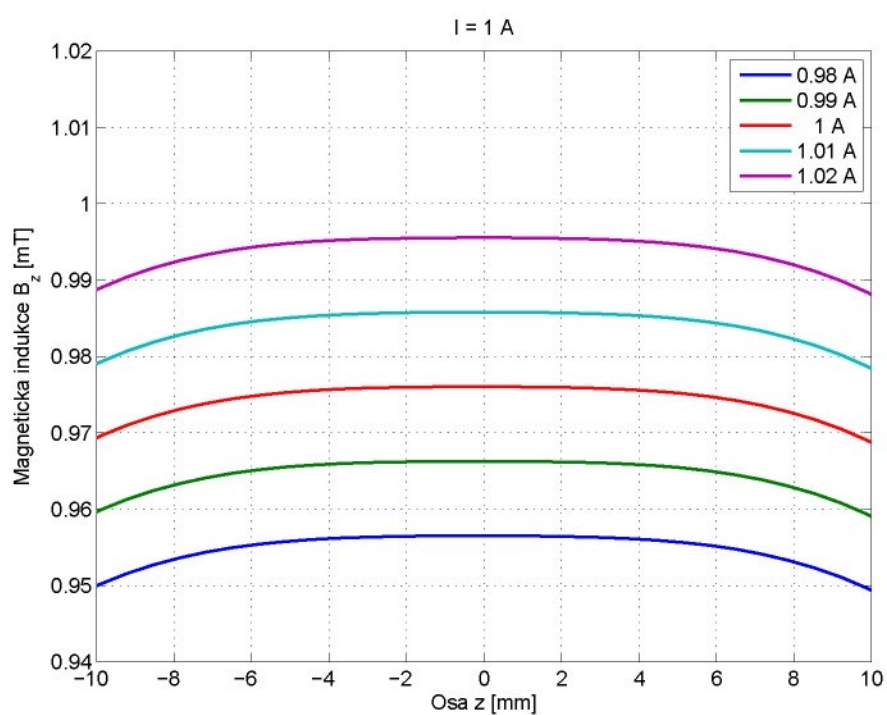
Tento případ však bylo možné zahrnout do předchozího. Model předpokládá, že proud teče jako povrchový se stejnou plošnou hustotou. Vrstva, po níž teče, je uprostřed drátu. K poloměru cívky se tedy připočte poloměr drátu a to je poloměr válce, po němž teče náhradní povrchový proud. Na druhé straně je průměr drátu důležitým parametrem návrhu, mj. z důvodů oteplování.

Vliv změny počtu závitů je na obr. C.3.10 pro dlouhý úsek na ose cívky. I na tomto obrázku je vidět velký vliv počtu závitů na průběh magnetické indukce podél osy cívky. Detail na obr. C.3.11 to jen zdůrazňuje. Z obr. C.3.12 je zřejmé, že přidání, či vynechání jednoho závitu způsobí změnu magnetické indukce o 2.5 %. Počet závitů je tedy nutné dodržet.

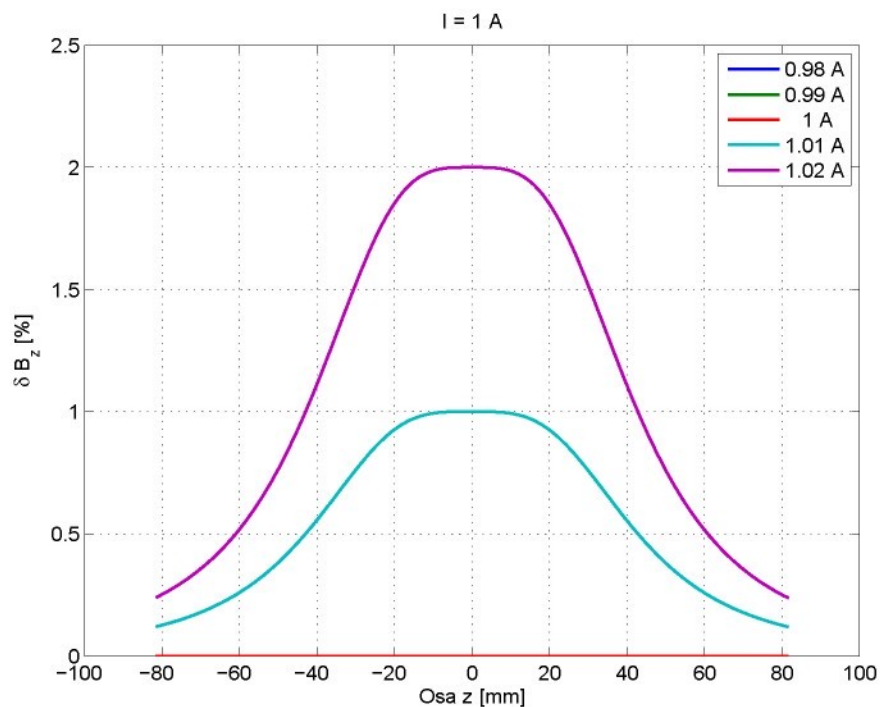
Závěrem lze říci, že návrh Helmholtzovy cívky je poměrně snadný. Realizace se zdá také jednoduchá. Ve skutečnosti závisí na přesném dodržení předepsaných parametrů, jinak se magnetická indukce uprostřed cívky může lišit od předpokládané indukce i o několik procent. Citlivostní analýza by tedy měla být součástí návrhu cívky.



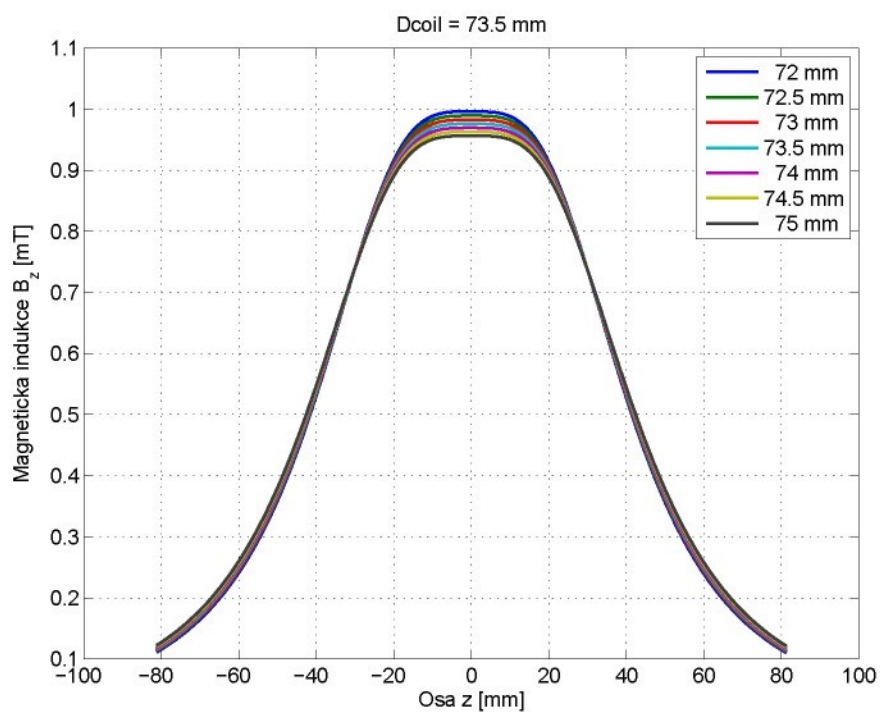
Obrázek C.3.1: Závislost z-ové složky magnetické indukce ve středovém řezu Helmholtzovou cívkou na změně velikosti protékajícího proudu.



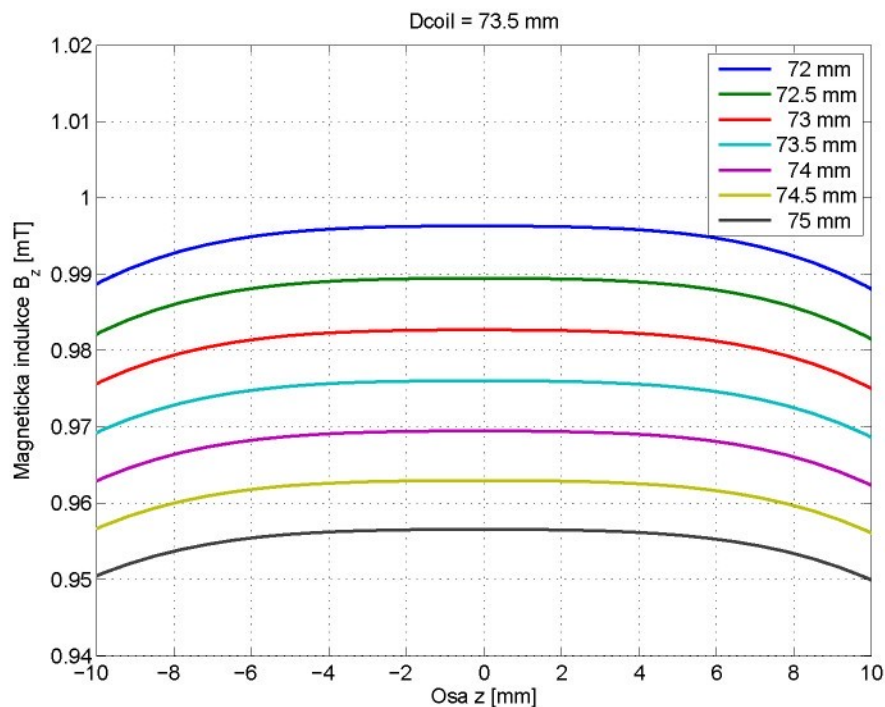
Obrázek C.3.2: Detail závislosti z-ové složky magnetické indukce ve středovém řezu Helmholtzovou cívkou na změně velikosti protékajícího proudu.



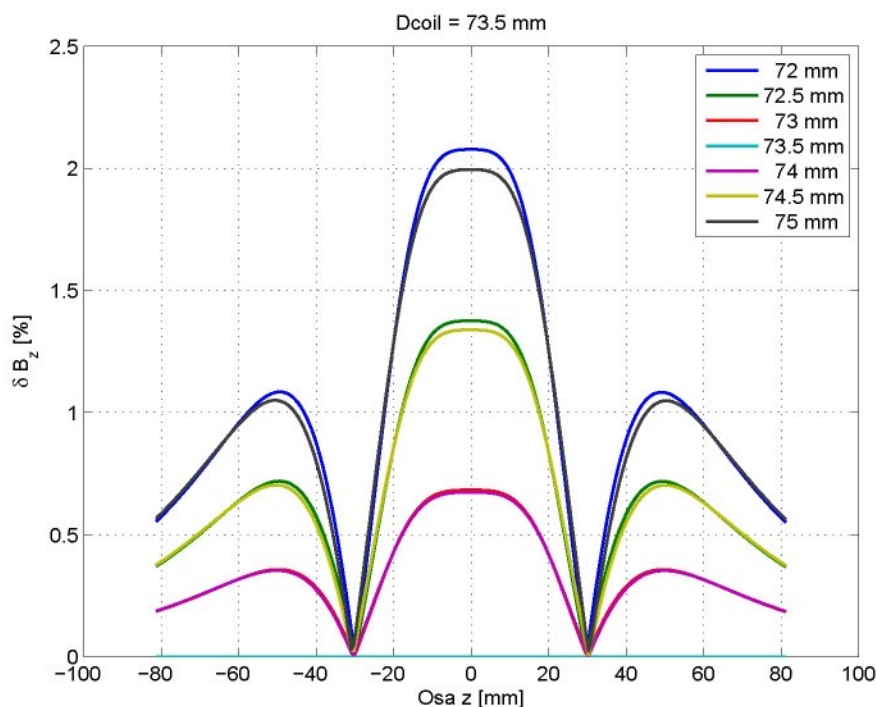
Obrázek C.3.3: Závislost relativní chyby z-ové složky magnetické indukce ve středovém řezu Helmholtzovou cívkou na změně velikosti protékajícího proudu.



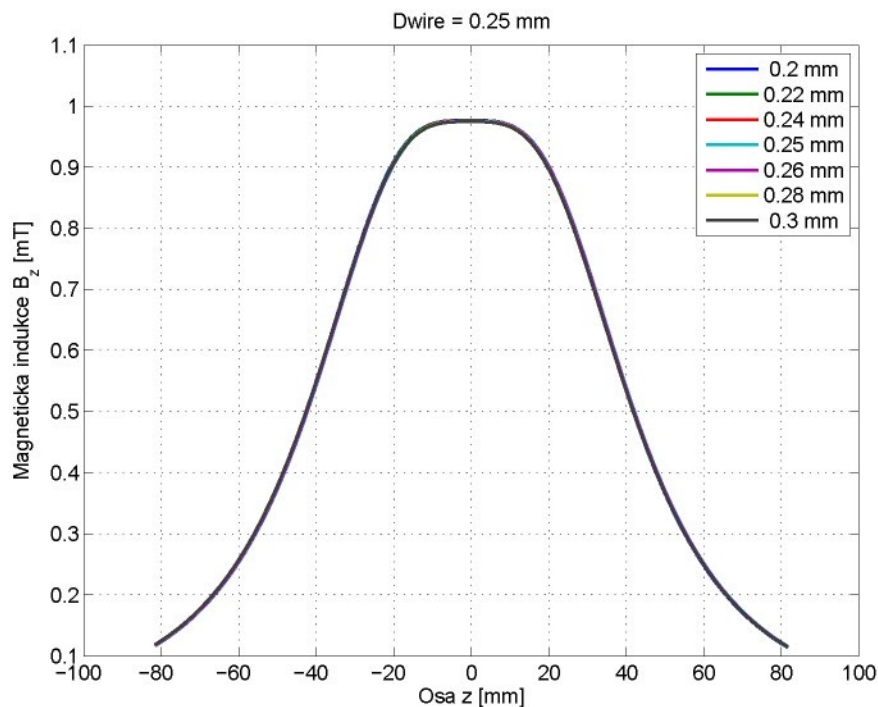
Obrázek C.3.4: Závislost z-ové složky magnetické indukce ve středovém řezu Helmholtzovou cívkou na změně průměru cívk.



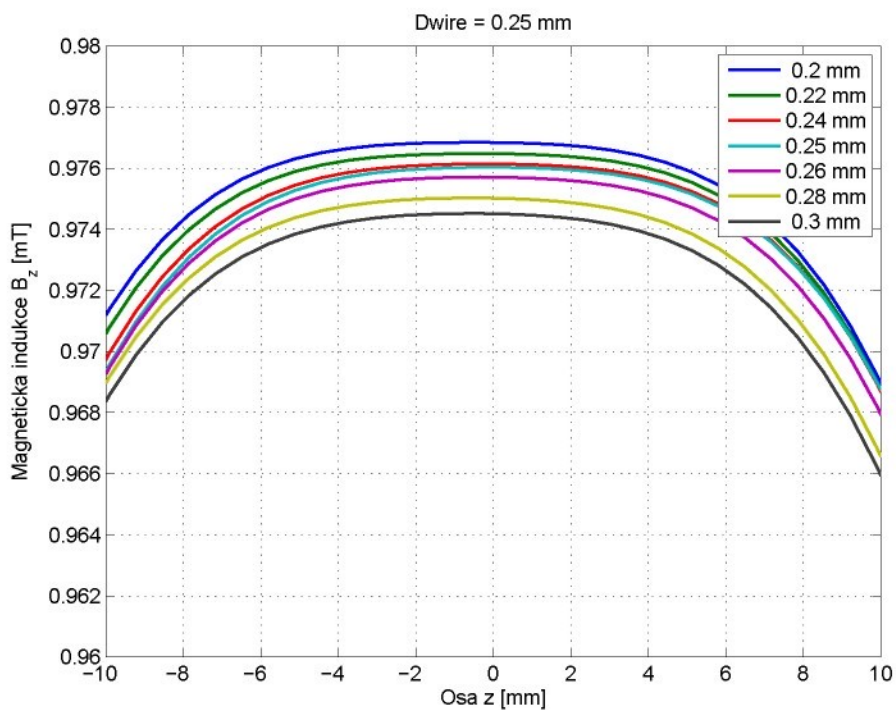
Obrázek C.3.5: Detail závislosti z-ové složky magnetické indukce ve středovém řezu Helmholtzovou cívkou na změně průměru cívk.



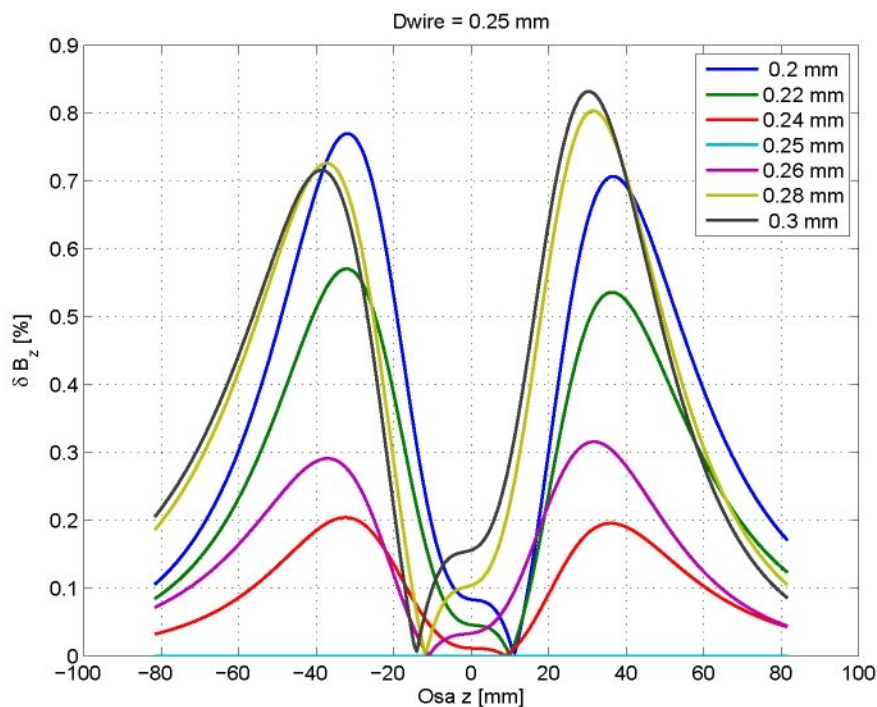
Obrázek C.3.6: Závislost relativní chyby z-ové složky magnetické indukce ve středovém řezu Helmholtzovou cívkou na změně průměru cívk.



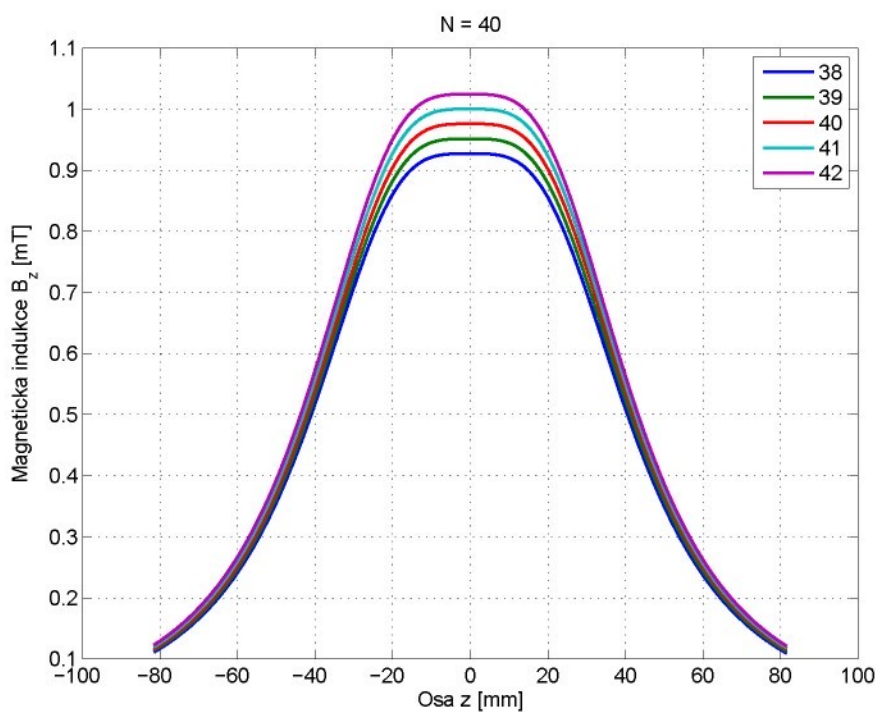
Obrázek C.3.7: Závislost z-ové složky magnetické indukce ve středovém řezu Helmholtzovou cívkou na změně průměru drátu.



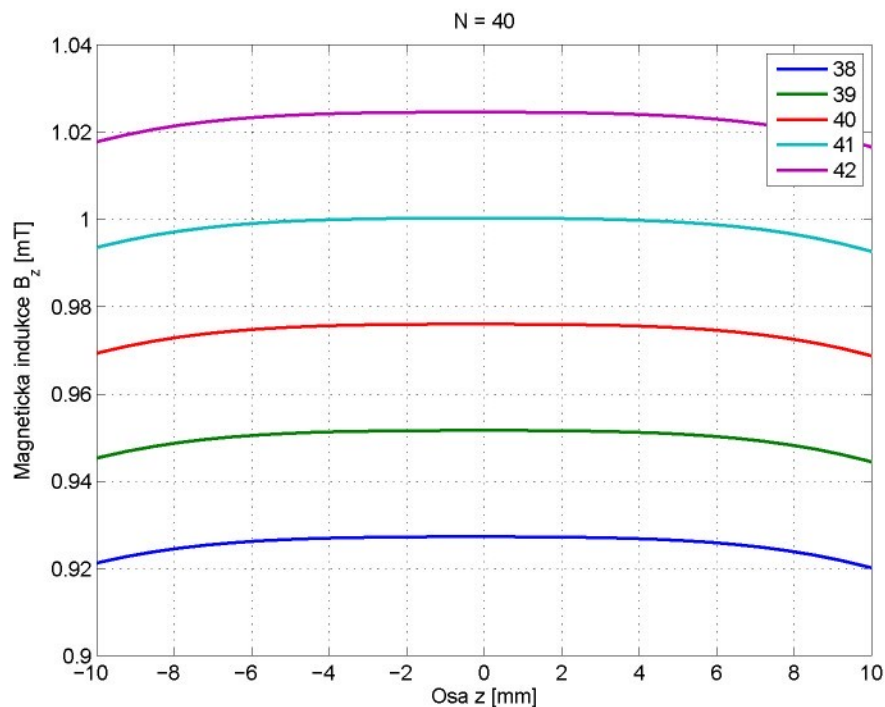
Obrázek C.3.8: Detail závislosti z-ové složky magnetické indukce ve středovém řezu Helmholtzovou cívkou na změně průměru drátu.



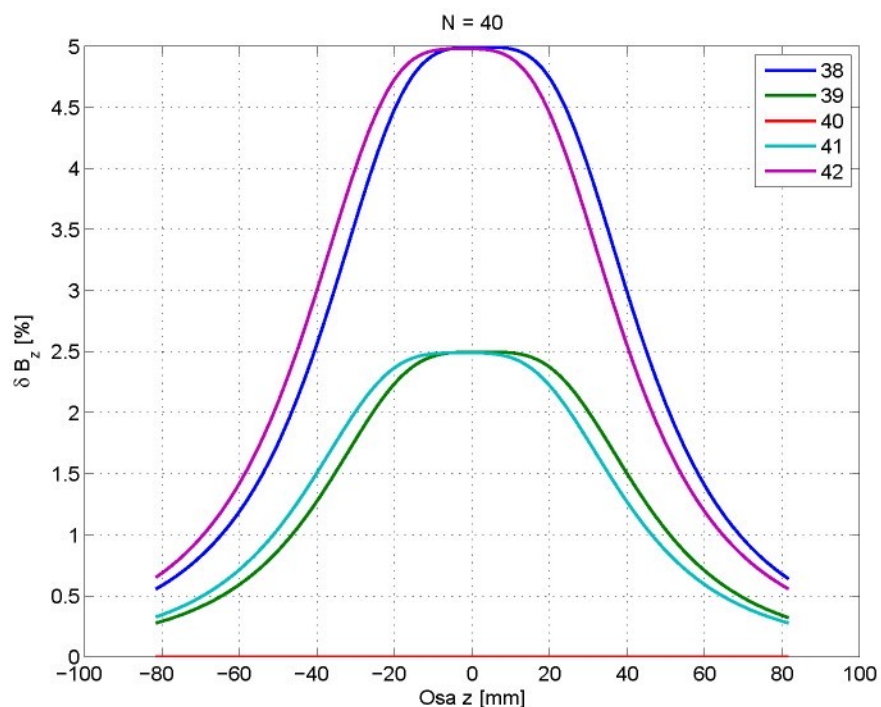
Obrázek C.3.9: Závislost relativní chyby z-ové složky magnetické indukce ve středovém řezu Helmholtzovou cívkou na změně průměru drátu.



Obrázek C.3.10: Závislost z-ové složky magnetické indukce ve středovém řezu Helmholtzovou cívkou na změně počtu závitů.



Obrázek C.3.11: Detail závislosti z-ové složky magnetické indukce ve středovém řezu Helmholtzovou cívkou na změně počtu závitů.



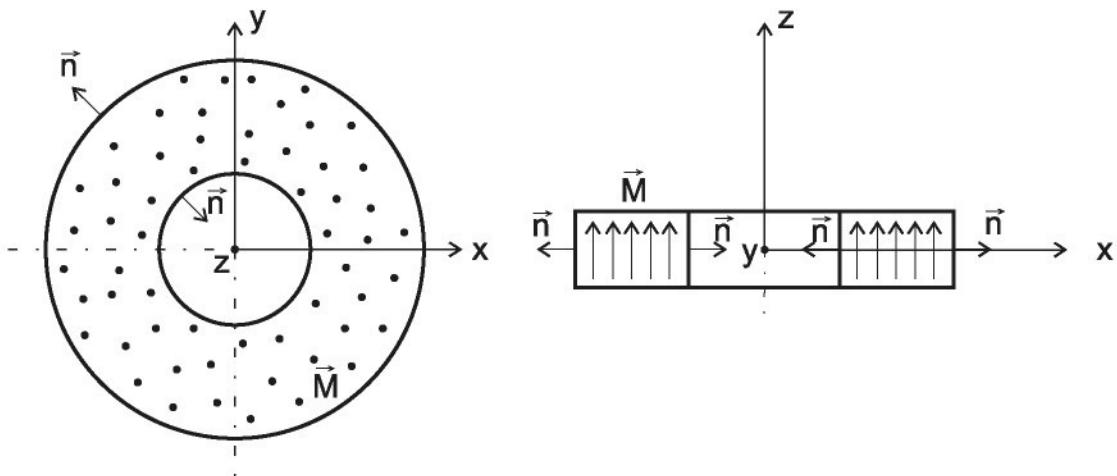
Obrázek C.3.12: Závislost relativní chyby z-ové složky magnetické indukce ve středovém řezu Helmholtzovou cívkou na změně počtu závitů cívk.

Modely a výpočty

Nejjednodušší modely prstencového permanentního magnetu vycházejí z náhradních vázaných proudů, zejména povrchových. Na nich jsou potom založeny numerické výpočty. V této části nastíníme základní použité modely. Pro nejjednodušší model povrchových vázaných proudů pak bude algoritmus pro numerické výpočty popsán. Poněvadž numerické výpočty mají omezenou přesnost, bude zmíněn i tento problém a otázky přesnosti numerických výpočtů budou ilustrovány na příkladech. Výsledky numerických výpočtů se zviditelňují grafickými metodami, kterých počítačová grafika, ale i čistě výpočetní systémy jako MATLAB, nabízejí nepřeberné množství. Proto v závěru této části budou zmíněny metody vizualizace magnetického pole, které se považují za nejvhodnější.

D.1 Modely

Permanentní magnet má tvar úzkého prstence s vnitřním průměrem 25 mm, vnějším průměrem 70 mm a výškou 4 mm. Schematický tvar je znázorněn např. na obr. D.1.1. Magnetická



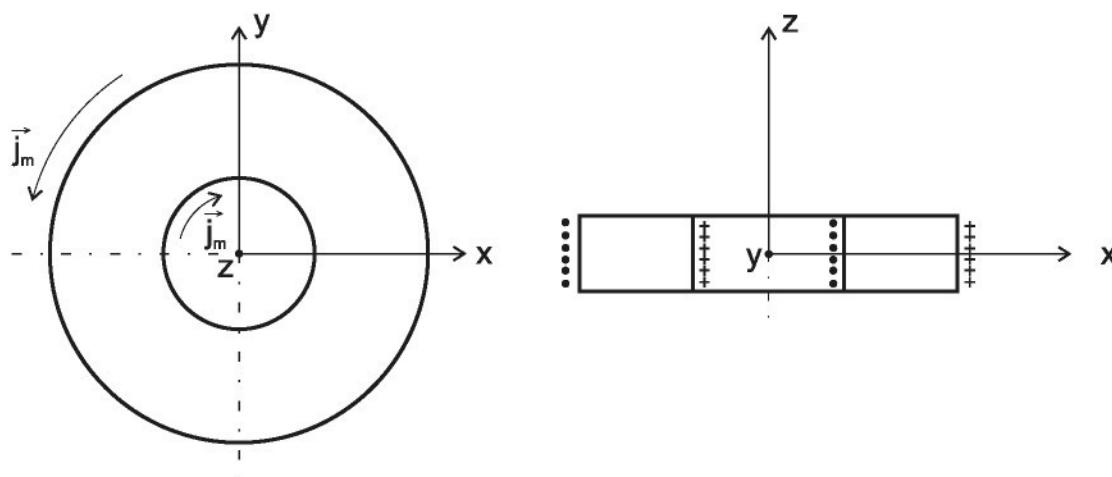
Obrázek D.1.1: Tvar permanentních magnetů, směr a smysl magnetizace a zvolený kartézský souřadný systém.

indukce uvnitř magnetu je udána hodnotou 1.2 T, a to podle technického listu výrobce. Jedná se o jediný známý materiálový parametr. Magnetizaci lze následně spočítat na základě vztahu (B.6.10), který ve skalární podobě vede na hodnotu

$$M_z = \frac{B_z}{\mu_0} \doteq 9.55 \cdot 10^5 \frac{\text{A}}{\text{m}} . \quad (\text{D.1.1})$$

Nejjednodušší model předpokládá homogenní magnetizaci, viz obr. D.1.1. Podle vztahu (B.6.1a) neexistují žádné vázané objemové proudy z důvodu neměnné magnetizace ve zkoumaném objemu. Směr vektoru magnetizace je podél z -ové osy, viz obr. D.1.1.

Jelikož jak na vrchní, tak na spodní ploše magnetu je normálový vektor rovnoběžný s vektorem magnetizace, netečou uvedenými plochami žádné vázané plošné proudy, viz vztah (B.6.3). Rovnoměrně rozložené povrchové vázané proudy tekou pouze po vnitřních a vnějších vertikálních stěnách prstence, viz obr. D.1.2. Poněvadž je povrchový vázaný proud



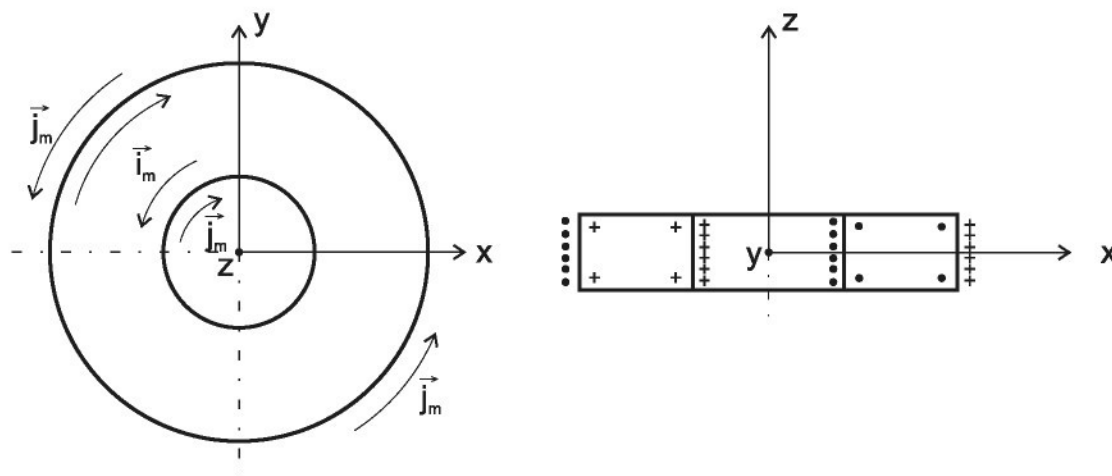
Obrázek D.1.2: Model vázaných povrchových proudů

na těchto plochách kolmý k vnější normále, bude jeho hustota podle vztahu (B.6.3)

$$j_m = M = 10^6 \text{ A/m} , \quad (\text{D.1.2})$$

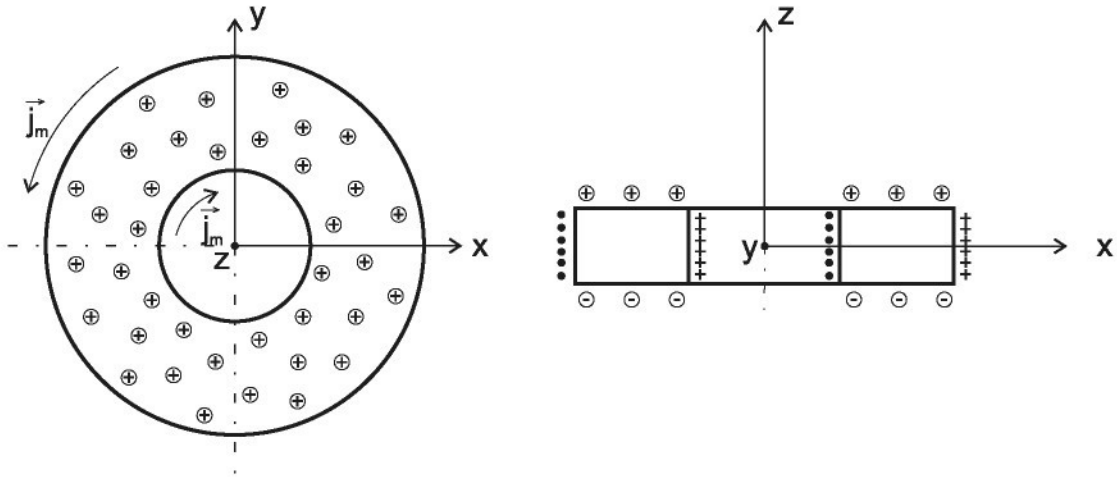
kde bylo použito zaokrouhleného výsledku ze vztahu (D.1.1). Poněvadž výška permanentního magnetu je 4 mm, teče po jeho svislé vnitřní a vnější stěně poměrně vysoký vázaný proud kolem 4 kA.

Použití homogenní magnetizace je pouze přibližná aproximace prvního stupně. Magnetizace je ve skutečnosti nehomogenní přinejmenším v oblastech okolo hran magnetu. Jelikož je skutečná distribuce magnetizace neznámá, bylo nehomogenosti dosaženo pomocí objemových vázaných proudů. Detaily budou podrobně rozebrány v kapitole E. Oba zmíněné vázané proudy jsou znázorněny na obr. D.1.3.



Obrázek D.1.3: Model vázaných povrchových a objemových proudů.

Pro úplnost je na obr. D.1.4 porovnán model vázaných povrchových proudů a vázaných povrchových magnetických nábojů. Povrchové proudy jsou značeny šipkami, křížky a tečkami jako dříve, pro magnetické náboje se používá jejich znaménko v kroužku. Hlavní rozdíl je v tom, že magnetické náboje jsou na jiných plochách než vázané proudy.



Obrázek D.1.4: Porovnání modelu vázaných proudů a vázaných magnetických nábojů.

D.2 Výpočty

Výpočty byly prováděny numerickou integrací, která pro povrchové proudy vychází ze vztahů (B.4.4), prakticky však z jejich tvaru (B.4.6) rozepsaného pro všechny složky indukce a všechny souřadnice. Poněvadž se jedná o numerickou integraci po dvou válcových plochách, budou v numerické integraci vystupovat přírůstky Δz_0 podél osy Z a přírůstky $\Delta \varphi_0$ azimutálního úhlu, které určují polohy elementu v rovině $z = konst$. Materiálové kartézské souřadnice vystupující ve vztazích (B.4.6) jsou pak dány vztahy, viz též obr. D.2.1a

$$x_0 = r_i \cos \varphi_{0n}, \quad y_0 = r_i \sin \varphi_{0n}, \quad z_0 = z_{0m} \quad ; \quad i = 1, 2, \quad (D.2.1)$$

kde dosazované hodnoty jsou

$$\varphi_{0n} = \frac{\Delta \varphi_0}{2} + (n-1)\Delta \varphi_0, \quad n = 1, 2, \dots, N_{\varphi_0}, \quad \Delta \varphi_0 = \frac{2\pi}{N_{\varphi_0}}, \quad (D.2.2)$$

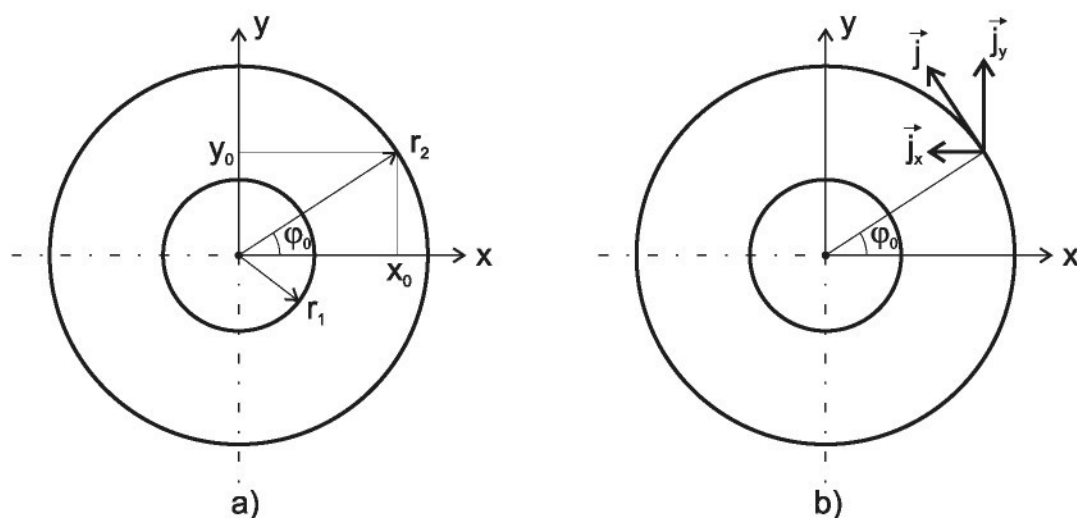
$$z_{0m} = -\frac{h}{2} + \frac{\Delta z_0}{2} + (m-1)\Delta z_0, \quad m = 1, 2, \dots, N_{z_0}, \quad \Delta z_0 = \frac{h}{N_{z_0}}, \quad (D.2.3)$$

kde h je výška magnetu. Pro složky povrchové proudové hustoty pak platí vztahy, viz též obr. D.2.1b,

$$j_x = -j \sin \varphi_0 \quad j_y = j \cos \varphi_0 \quad j_{z0} = 0. \quad (D.2.4)$$

Přesnost numerické integrace závisí na počtu dílků N_{z_0} , na které se rozdělí výška h prstence, a na počtu úhlových oblouků N_{φ_0} , které se volí stejně pro vnitřní a vnější kružnici. K výpočtu magnetické indukce ve zvoleném bodě (x, y, z) je zapotřebí dvou do sebe vnořených cyklů, které však proběhnou dvakrát, jednou pro vnitřní a jednou pro vnější poloměr.

V obecném případě, kdy požadujeme výpočet magnetické indukce v trojrozměrné oblasti, bude zapotřebí pěti cyklů. Pole je válcově symetrické, stačí je tedy počítat v rovinách rovnoběžných s válcovou osou nebo k ní kolmých, takže se počet vnořených cyklů redukuje na čtyři.



Obrázek D.2.1: Definice materiálových souřadnic a určení složek povrchového vázaného proudu.

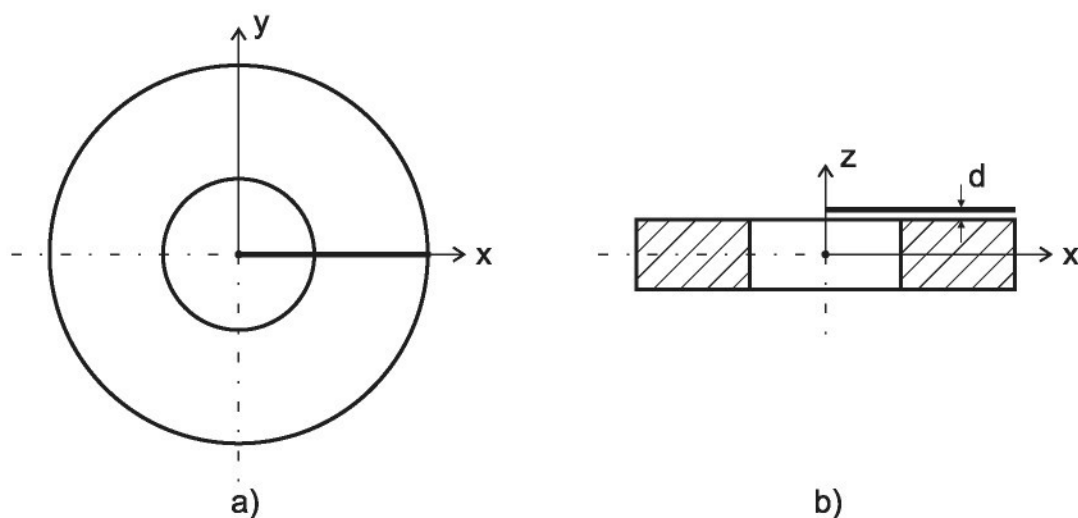
Všechny skripty byly připraveny v systému MATLAB, který je určen právě pro technické výpočty tohoto typu. Vycházejí ze vztahů (B.4.4) a dosazují se do nich hodnoty podle vztahů (D.2.1) až (D.2.4). Základním ověřením správnosti algoritmu byly fyzikální důvody. Při volbě kartézské soustavy souřadnic, podle obr. D.2.2 (osa X má směr poloměru, osa Z je osou válce) je zřejmé, že z důvodu válcové symetrie bude složka magnetické indukce kolmé k poloměru a válcové ose, tj. složka B_y , nulová. Ve výpočtech vycházela hodnota řádově 10^{-15} mT, což je zaokrouhlovací chyba. Dále vypočtené hodnoty v rovině procházející osou Z musí být symetrické vzhledem k této ose a grafy v rovině k ní kolmé musí být symetrické vzhledem k ose Y. To bylo splněno s mnohem vyšší přesností než je technická. Tato skutečnost znamená dvojnásobné zrychlení výpočtu, stačí vypočíst pole v jedné polorovině a zbytek se získá zrcadlením, pokud je to vůbec nutné.

Prvním krokem při praktickém testování skriptů byla volba integračního kroku. Uvažovali jsme dvojnásobně se zvyšující počet vrstev, tj. 1, 2, 4, 8 a 16 vrstev. Pro počet úhlových oblouků jsme volili tyto lineárně zvyšující se hodnoty: 180, 270, 360 a 450.

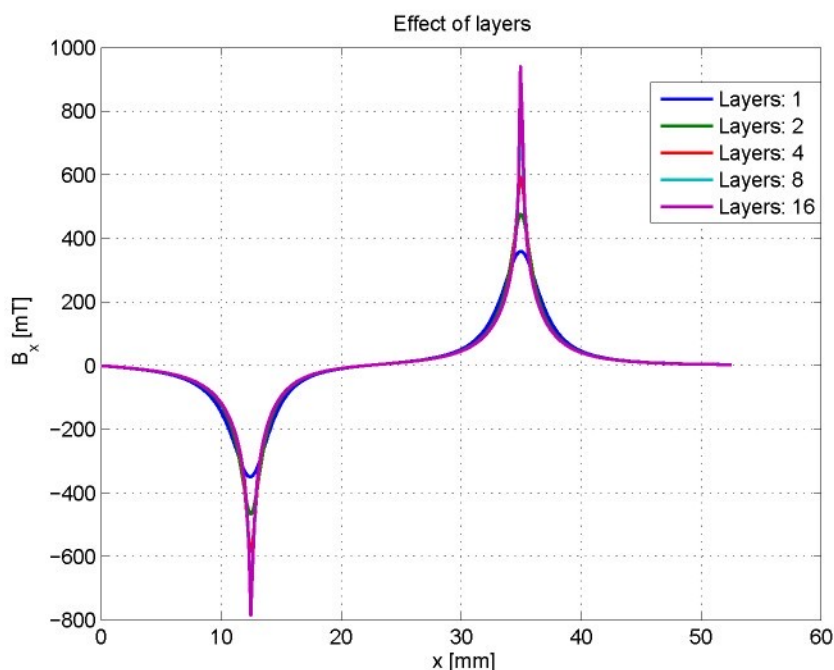
Vliv počtu integračních vrstev při maximálním počtu oblouků 450 je na obr. D.2.3 pro x-ovou složku a na obr. D.2.4 pro z-ovou složku magnetické indukce. Pole bylo vypočítáno v rovině kolmé k válcové ose a na polopřímce procházející středem prstence. Tato rovina se nachází nad vrchní rovinou prstence ve vzdálenosti rovné 1 % poloviční výšky, tj. $20 \mu\text{m}$. Pro lepší názornost je oblast nezávisle proměnné vyznačena na obr. D.2.2b. Vliv počtu vrstev se projeví jen v širším okolí obou hran vzorku. Zde je však velmi výrazný. S růstem počtu vrstev se vypočtená hodnota výrazně zvyšuje. V těsné blízkosti vzorku nabývá magnetická indukce v okolí hran poměrně vysoké hodnoty.

Pro získání přesnější představy byl výpočet zúžen na těsné okolí vnější hrany. Výsledky jsou na obr. D.2.5 pro x-ovou složku a na obr. D.2.6 pro z-ovou složku. Detail potvrzuje, že v těsné blízkosti vzorku a v okolí jeho hran je volba počtu vrstev kritická.

Obdobně byl vyšetřován vliv počtu oblouků použitých při numerické integraci. Byl zvolen maximální počet vrstev, tj. 16 vrstev. Ostatní podmínky výpočtu se nezměnily. Pole se opět počítalo v rovině kolmé k válcové ose a na polopřímce začínající ve středu prstence. Tato rovina se nacházela nad vrchní rovinou prstence ve vzdálenosti rovné 1 % poloviční výšky, tj. $20 \mu\text{m}$, viz obr. D.2.2b. Průběh x-ové a z-ové složky magnetické indukce pro různý počet úhlových oblouků jako parametr je po řadě na obr. D.2.7 a na obr. D.2.8. Vliv počtu úhlových oblouků se projeví jen ve velmi blízkém okolí hrany vzorku. Detaily pro toto okolí jsou na obr. D.2.9 pro x-ovou složku a na obr. D.2.10 pro z-ovou složku magnetické indukce.



Obrázek D.2.2: Definice oblasti nezávisle proměnné pro výpočet magnetického pole.

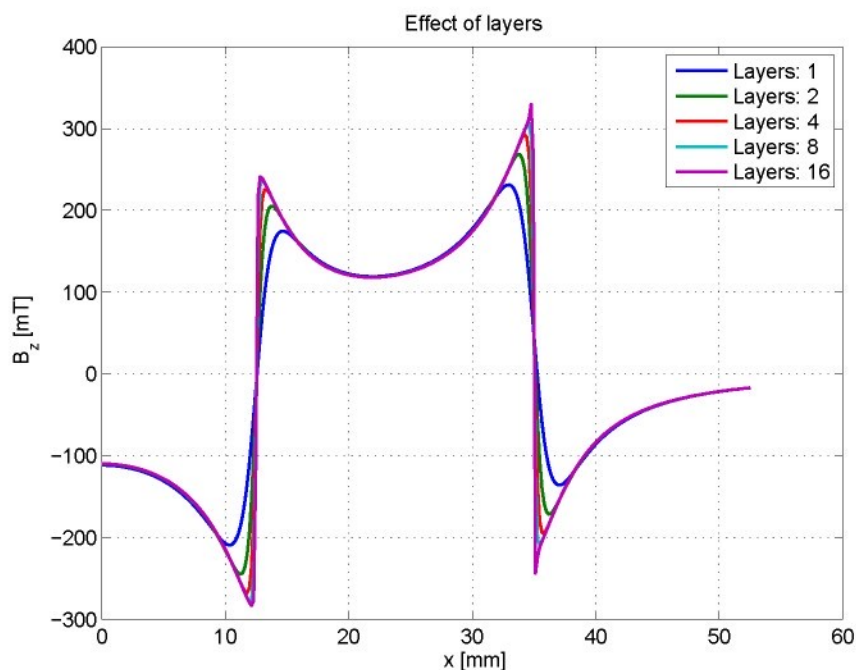


Obrázek D.2.3: Vliv počtu integračních vrstev na x -ovou složku magnetické indukce pro maximální počet oblouků (450).

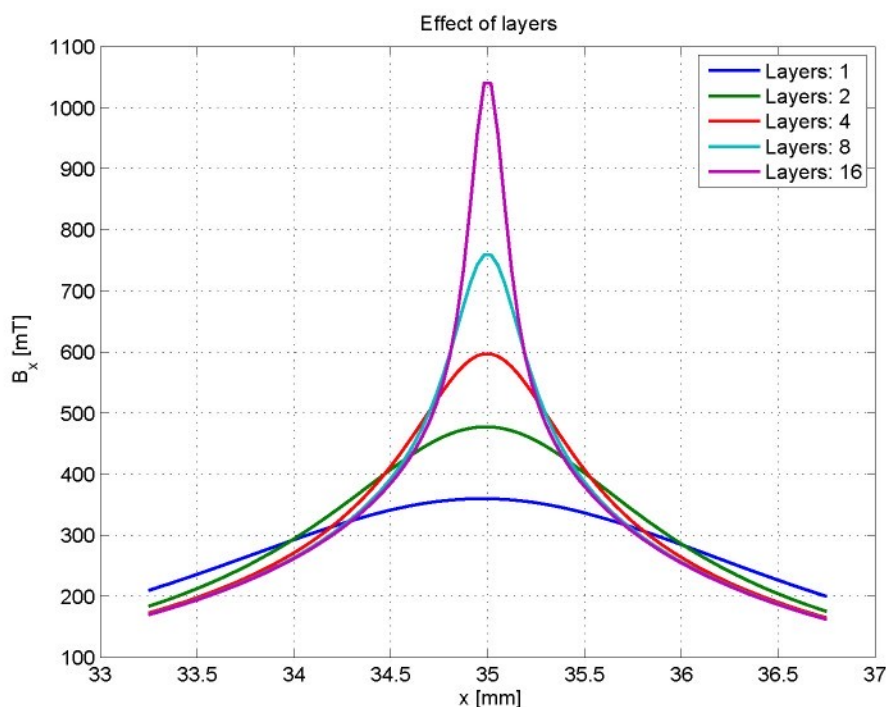
Vliv počtu oblouků na hodnotu magnetické indukce v těsném okolí hrany je výrazný. Na rozdíl od vlivu vrstev však rostoucí počet oblouků vede ke snižování vypočtené hodnoty magnetické indukce.

Vysvětlení problémů s numerickou integrací v okolí hran vzorku je jednoduché. V integrovaném vztahu je ve jmenovateli vzdálenost mezi bodem, v němž pole počítáme, a bodem, z něhož se pole budí. První bod je označen jako polní, druhý je nazván materiálovým. Je-li polní bod blízko vnitřní nebo vnější svislé stěny, je tato vzdálenost malá pro blízké materiálové body. Příspěvek těchto bodů bude dominovat v celkovém součtu. Příspěvek vzdálených materiálových bodů bude naproti tomu zanedbatelný. Výsledek tedy závisí na malém počtu bodů, a proto je nepřesný.

Názorně je to zřejmé z obr. D.2.11. Při výpočtu z -ové složky magnetické indukce v blízkosti středu magnetu všechny elementy na téže kružnici přispívají přibližně stejně. Je-li ale



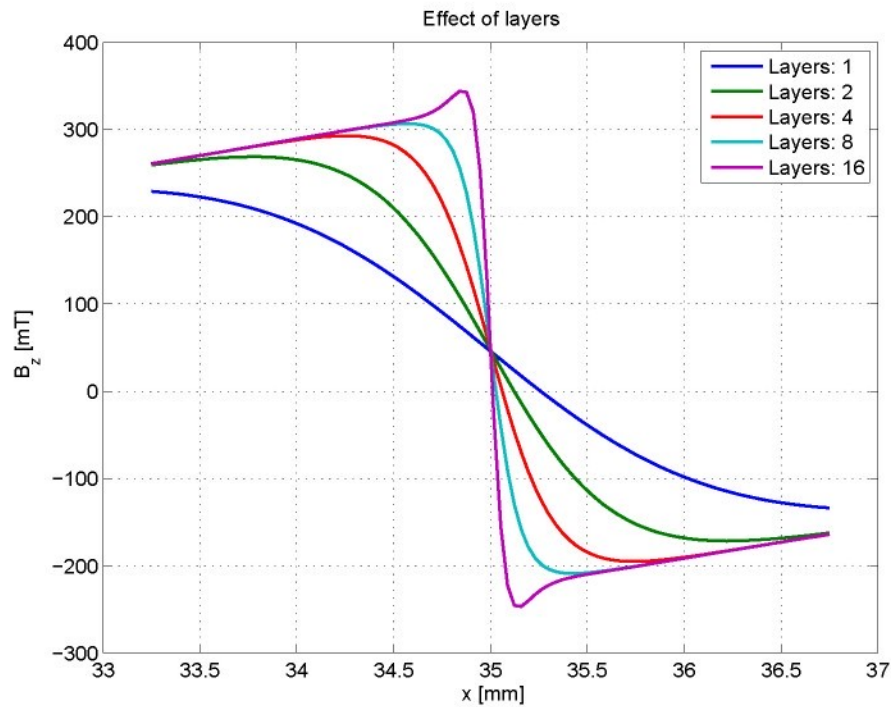
Obrázek D.2.4: Vliv počtu integračních vrstev na z-ovou složku magnetické indukce pro maximální počet oblouků (450).



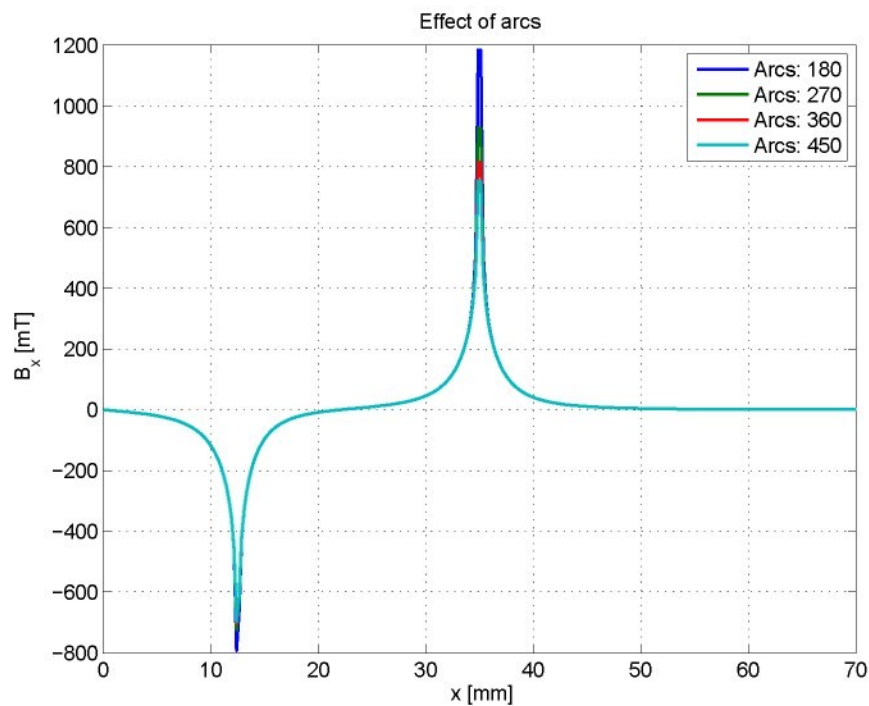
Obrázek D.2.5: Detail vlivu počtu integračních vrstev na x-ovou složku magnetické indukce pro maximální počet oblouků (450).

bod blízko některého elementu, na obr. D.2.11 je blízko vnější válcové plochy, příspěvky od sousedních materiálových bodů jsou vysoké, příspěvky od bodů na opačné straně a většiny ostatních zanedbatelné.

K zpřesňování výpočtu je nutno výrazně zvyšovat počet integračních kroků. Toto řešení ale vede k výraznému prodloužení výpočtu. Ideální přístup je použít nerovnoměrné rozložení materiálových bodů. V okolí polního bodu je husté, daleko od něho zase řídké. To je však



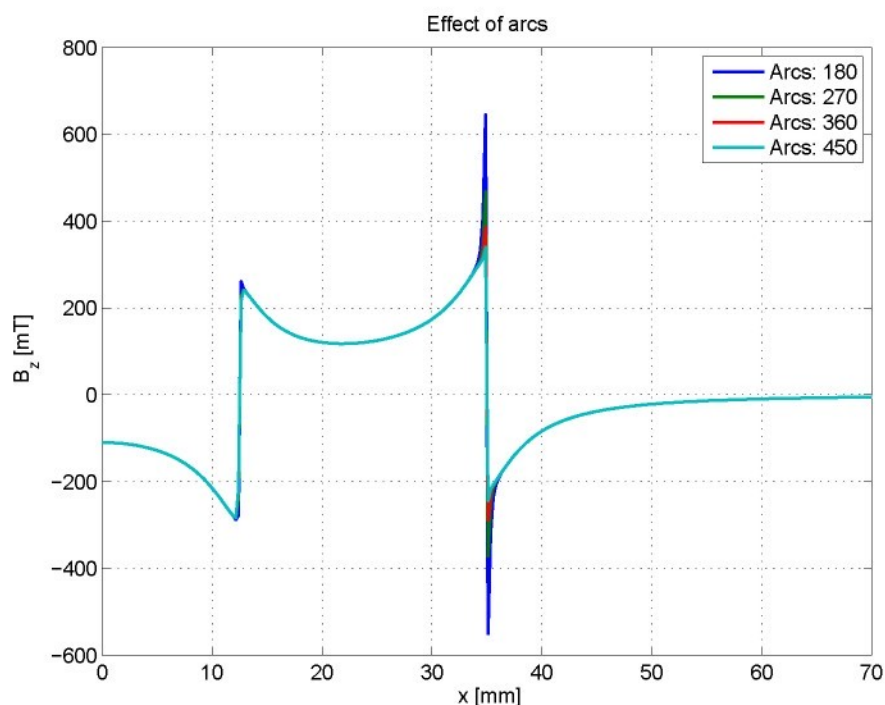
Obrázek D.2.6: Detail vlivu počtu integračních vrstev na z-ovou složku magnetické indukce pro maximální počet oblouků (450).



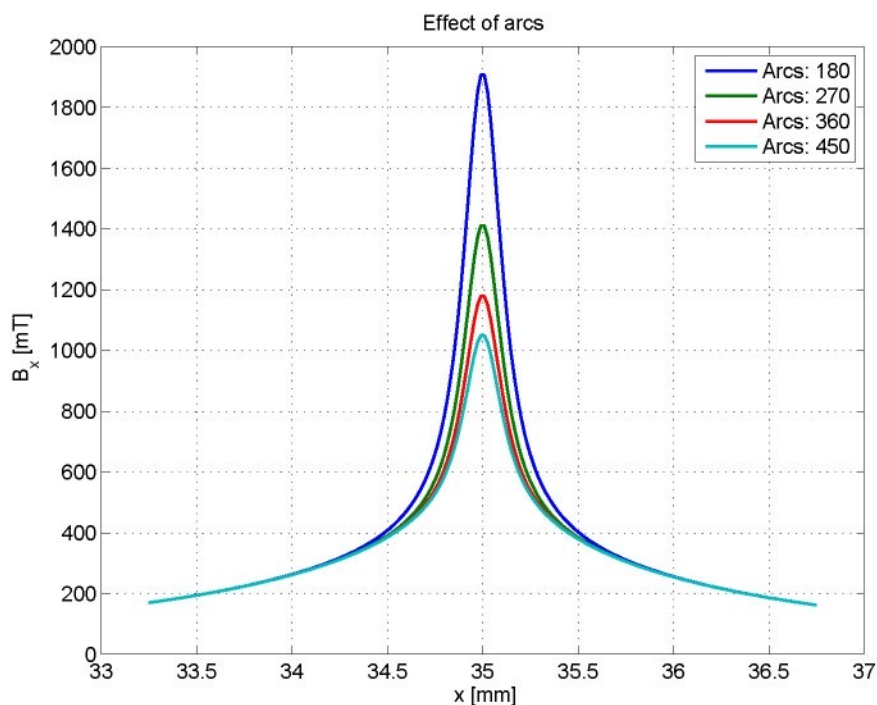
Obrázek D.2.7: Vliv počtu úhlových oblouků jako parametru na x-ovou složku magnetické indukce.

velmi komplikované z hlediska algoritmizace.

Lze vysvětlit i to, že s růstem počtu vrstev se indukce na obr. D.2.5 zvyšuje, a to podle obr. D.2.12a. Vlevo je součet příspěvků od tří vrstev. Pokud počet vrstev zdvojnásobíme, každý starý element se rozdělí na dva nové. Novými elementy teče poloviční proud. Jeden z nových elementů je v menší vzdálenosti a druhý ve větší vzdálenosti od bodu v němž

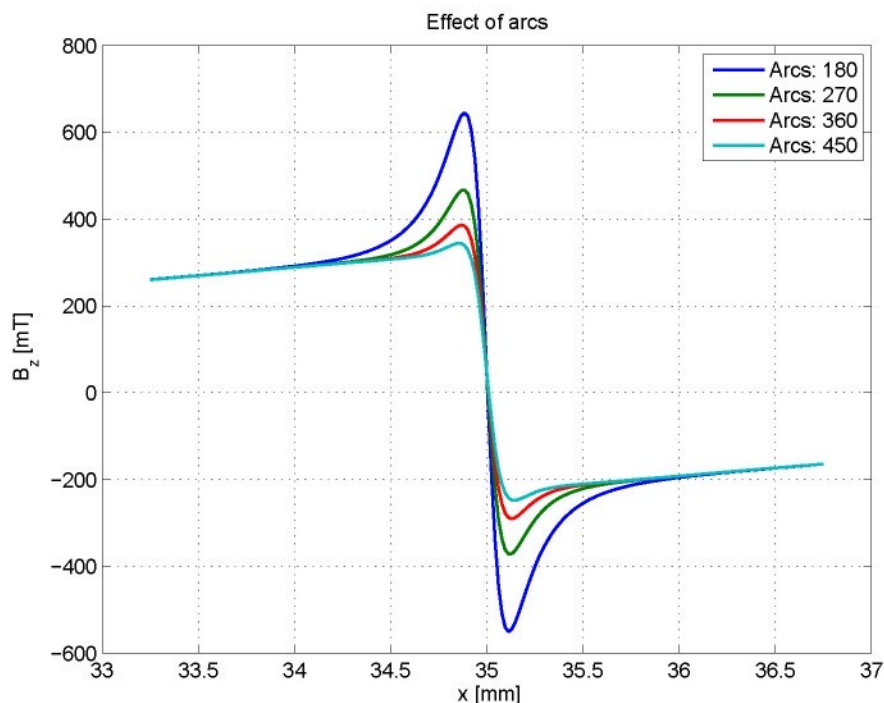


Obrázek D.2.8: Vliv počtu úhlových oblouků jako parametru na z-ovou složku magnetické indukce.

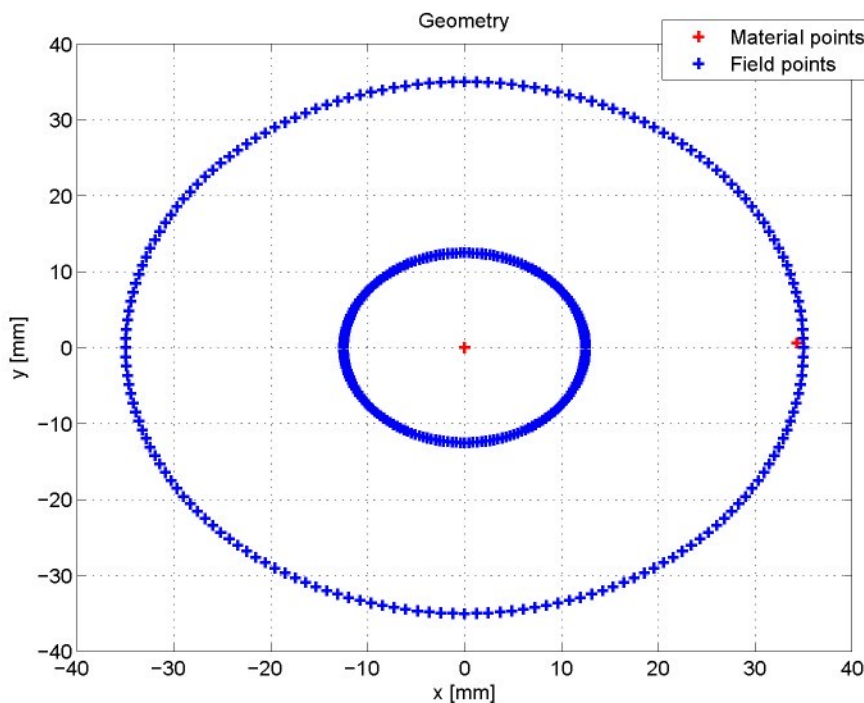


Obrázek D.2.9: Detail vlivu počtu úhlových oblouků jako parametru na x-ovou složku magnetické indukce.

indukci počítáme. Příspěvek od vzdálenějšího proudového elementu bude nižší než poloviční, ale příspěvek od bližšího elementu bude podstatně vyšší než poloviční. V celkovém součtu nová dvojice dává vyšší příspěvek. Podle obr. D.2.12a vpravo se magnetická indukce zvýší. Vliv růstu počtu vrstev může být opravdu značný pro velmi blízký polní bod, což obr. D.2.5 potvrzuje.

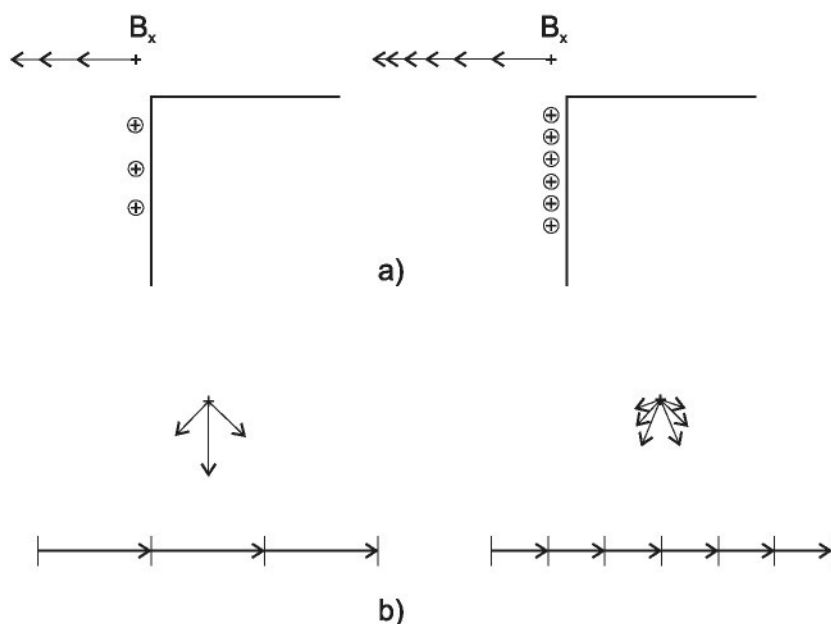


Obrázek D.2.10: Detail vlivu počtu úhlových oblouků jako parametru na z-ovou složku magnetické indukce.



Obrázek D.2.11: Numerická integrace podle oblouků pro „standardní“ a „singulární“ bod.

Růst počtu oblouků naopak x-ovou složku magnetické indukce snižuje podle obr. D.2.9. Vysvětlení je nyní složitější podle obr. D.2.12b. Oblouky pro jednoduchost nahrazujeme úsečkami, což je pro blízký polní bod možné. Příspěvek k magnetické indukci od jednotlivých oblouků směřuje k jejich středu, viz obr. D.2.12b vlevo. X-ová složka je pak průmětem do normály k úsečce. Pokud počet oblouků zdvojnásobíme, příspěvek od každého bude



Obrázek D.2.12: Vysvětlení vlivu počtu vrstev na výslednou hodnotu magnetické indukce.

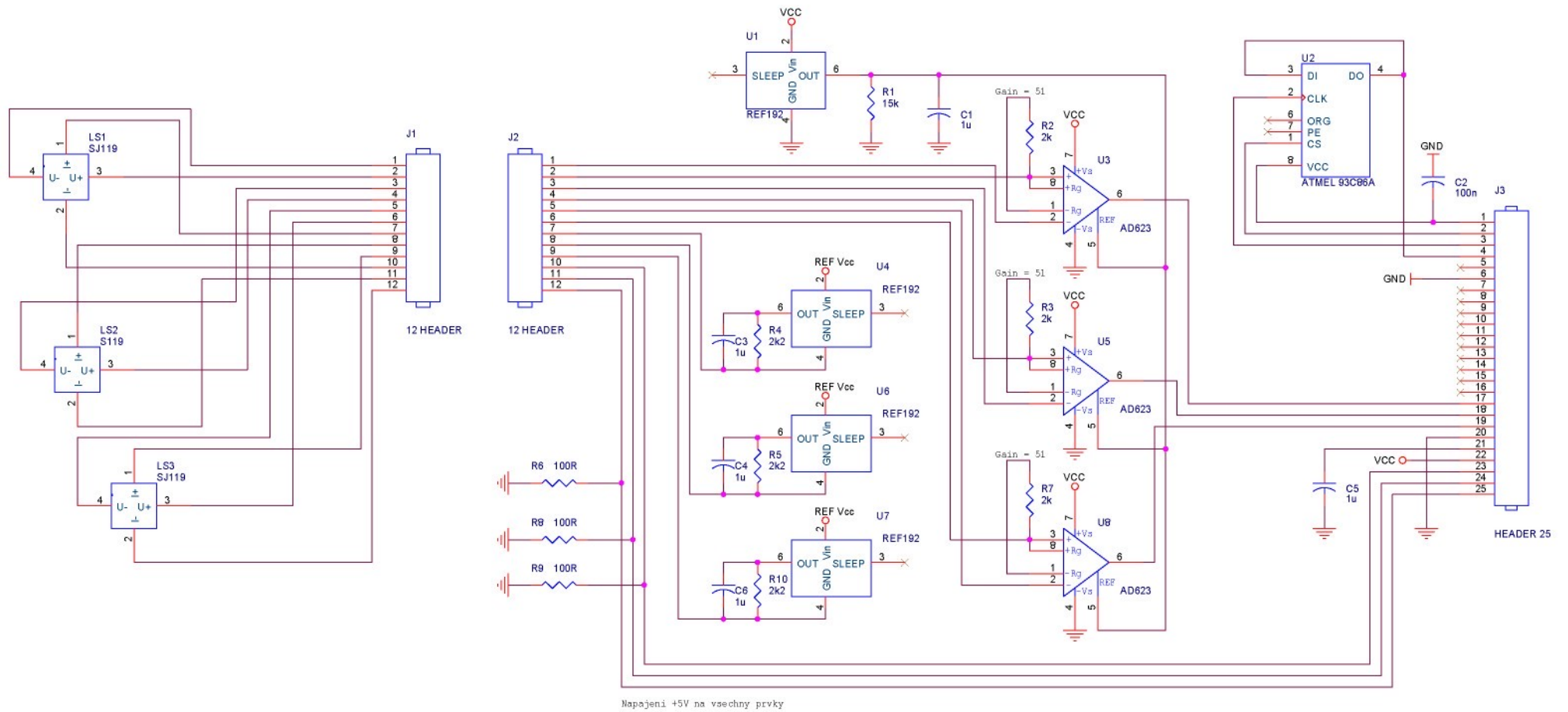
v průměru poloviční. Zvětší se ale úhel mezi tímto příspěvkem a normálou, viz obr. D.2.12b vpravo, tedy složka indukce do směru normály bude nižší, než při polovičním počtu bodů. Celkově se zvyšováním počtu oblouků x-ová složka magnetické indukce klesá. Tento efekt je výrazný v případě, že polní bod je blízko proudovým elementům.

Dalším problémem je případ, kdy materiálový a polní bod splývají nebo jsou velmi blízko sebe. Zde je nejlepším řešením tento příspěvek vynechat. Algoritmicky je to jednoduché.

Z těchto výsledků uvedených zde pro nejméně příznivý případ a mnoha dalších zde neuvedených lze učinit závěr. S výjimkou těsného okolí hran vzorků spolehlivě stačí k dostatečně přesné numerické integraci 10 vrstev a 160 úhlových oblouků. Ty byly také voleny ve všech dalších výpočtech.

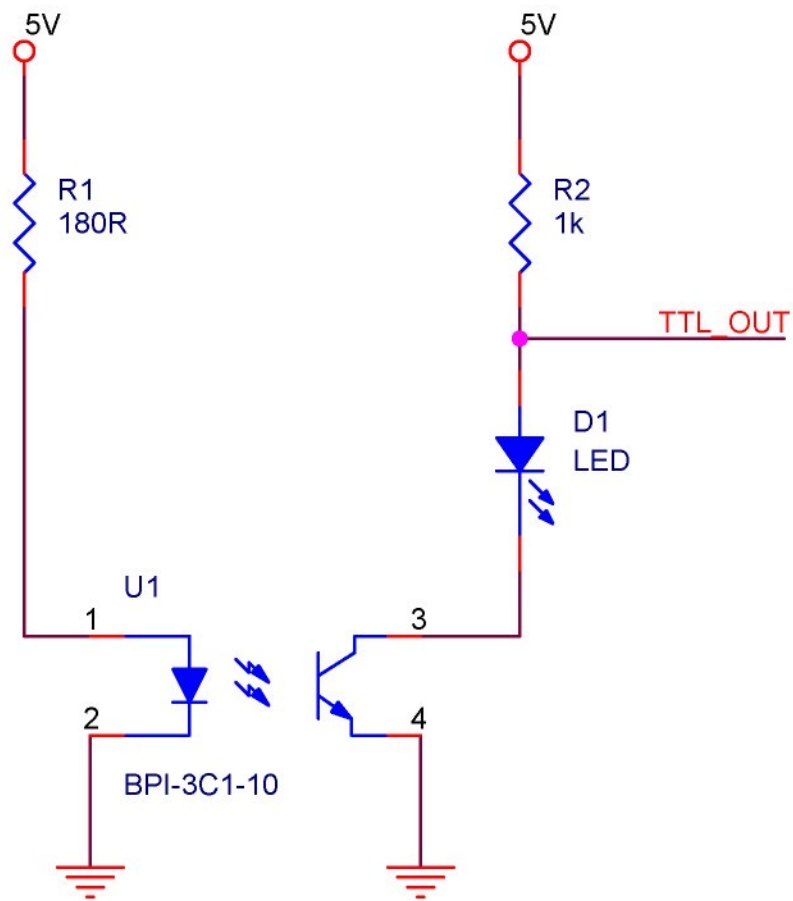
Podmínkou správnosti a aplikovatelnosti každého modelu je jeho experimentální ověření. Přitom je potřeba vzít v úvahu podmínky experimentu. Prvním omezením jsou konečné rozměry sondy. Neměří se tedy bodová hodnota magnetické indukce, ale průměrná hodnota na aktivním objemu sondy. Simulaci integračního účinku sondy jsme poněkud zjednodušili tím, že jsme neuvažovali objemové, ale jen liniové integrační účinky ve směru, ve kterém magnetickou indukci počítáme. Průběh obou složek magnetické indukce pro simulaci integrace sondou a pro tři délky sondy jako parametr jsou po řadě na obr. D.2.13 a na obr. D.2.14. Pro srovnání ve formě bodů jsou uvedeny výsledky pro fiktivní bodovou sondu. I když jsou výsledky jen kvalitativní, přesto je z nich zřejmé, že jediným účinkem sondy je vyhlazení ostrých změn v okolí hran vzorků. Toto vyhlazení je výrazné zejména pro realistickou délku sondy 1 mm. Bohužel se nepodařilo z technické dokumentace zjistit rozměry aktivního objemu sondy. Nicméně tato simulace ukazuje, že ani v nepříznivém případě blízkého okolí hrany vzorku není nutno neúměrně zvyšovat počet integračních elementů.

Dalším omezením je to, že v případě trojrozměrného měření magnetického pole se aktivní plochy tří dílčích sond nenacházejí v témže bodě, ale jsou vzájemně prostorově posunuty. Měří se tedy magnetická indukce v jiném bodě, než je dolní okraj 3D sondy, viz [48]. Obrázky D.2.15 a D.2.16 ukazují situaci, kdy jsou aktivní plochy sondy pro x-ovou a z-ovou složku magnetické indukce ve výšce 1 mm nad povrchem vzorku. Pak ke spolehlivé shodě s experimentem stačí 10 vrstev. Tyto dva obrázky pro polopřímku vzdálenou 1 mm od povrchu magnetu můžeme po řadě porovnat s odpovídajícími obrázky D.2.5 a D.2.6, které jsou pro těsnou blízkost s povrchem magnetu – 20 μm . Rozsah na ose X , tj. pro nezávisle

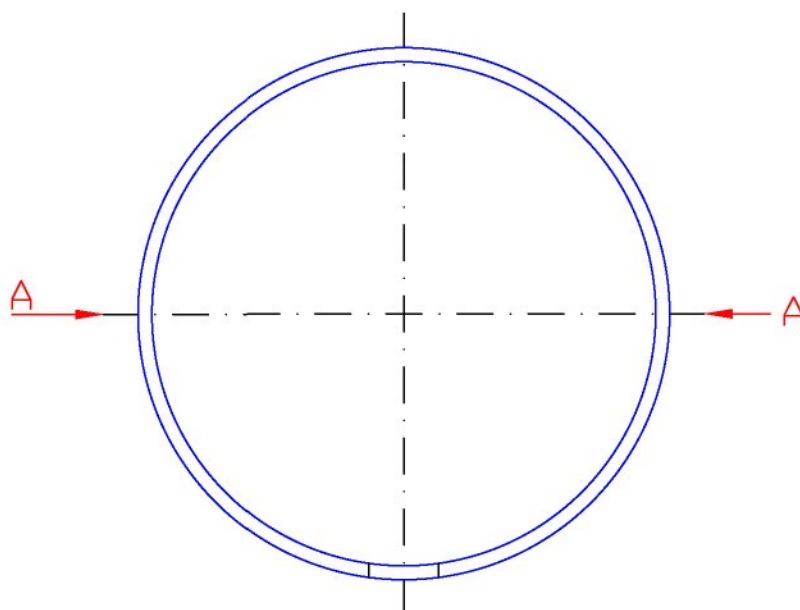
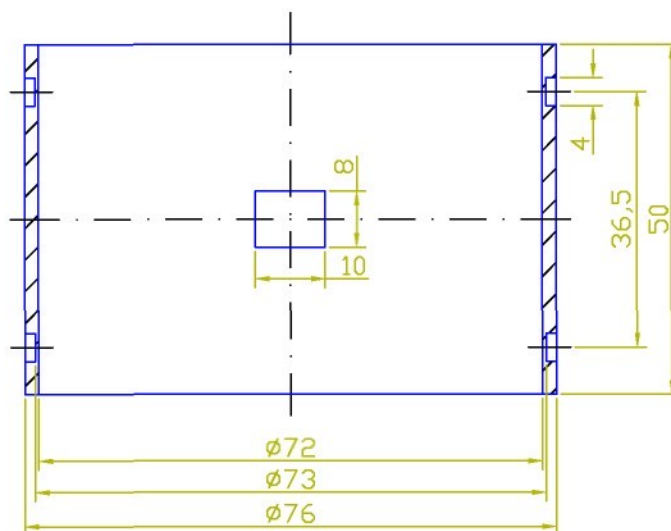


Napajeni +5V na všechny prvky

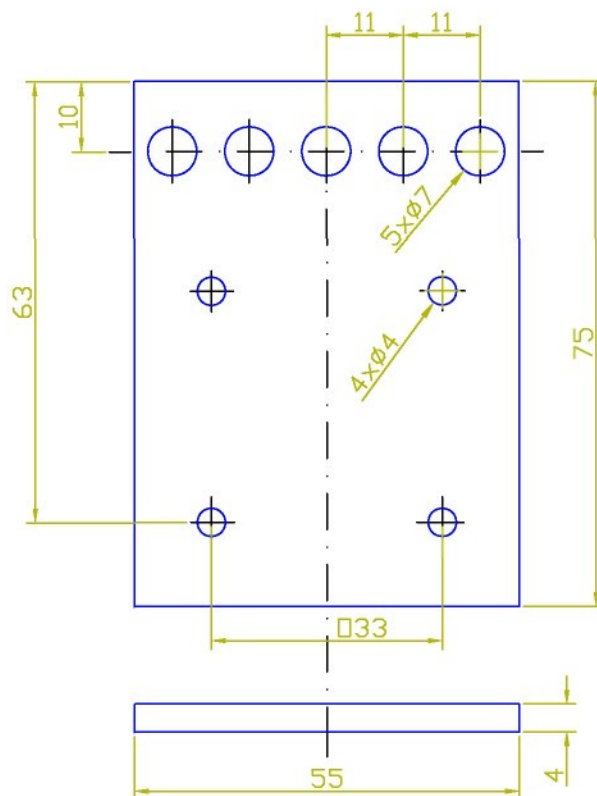
Title		
Zapojeni sondy		
Size	Document Number	Rev
B	ELIDIS 3D hall sensor	1
Date:	Sunday, August 23, 2009	Sheet 1 of 1



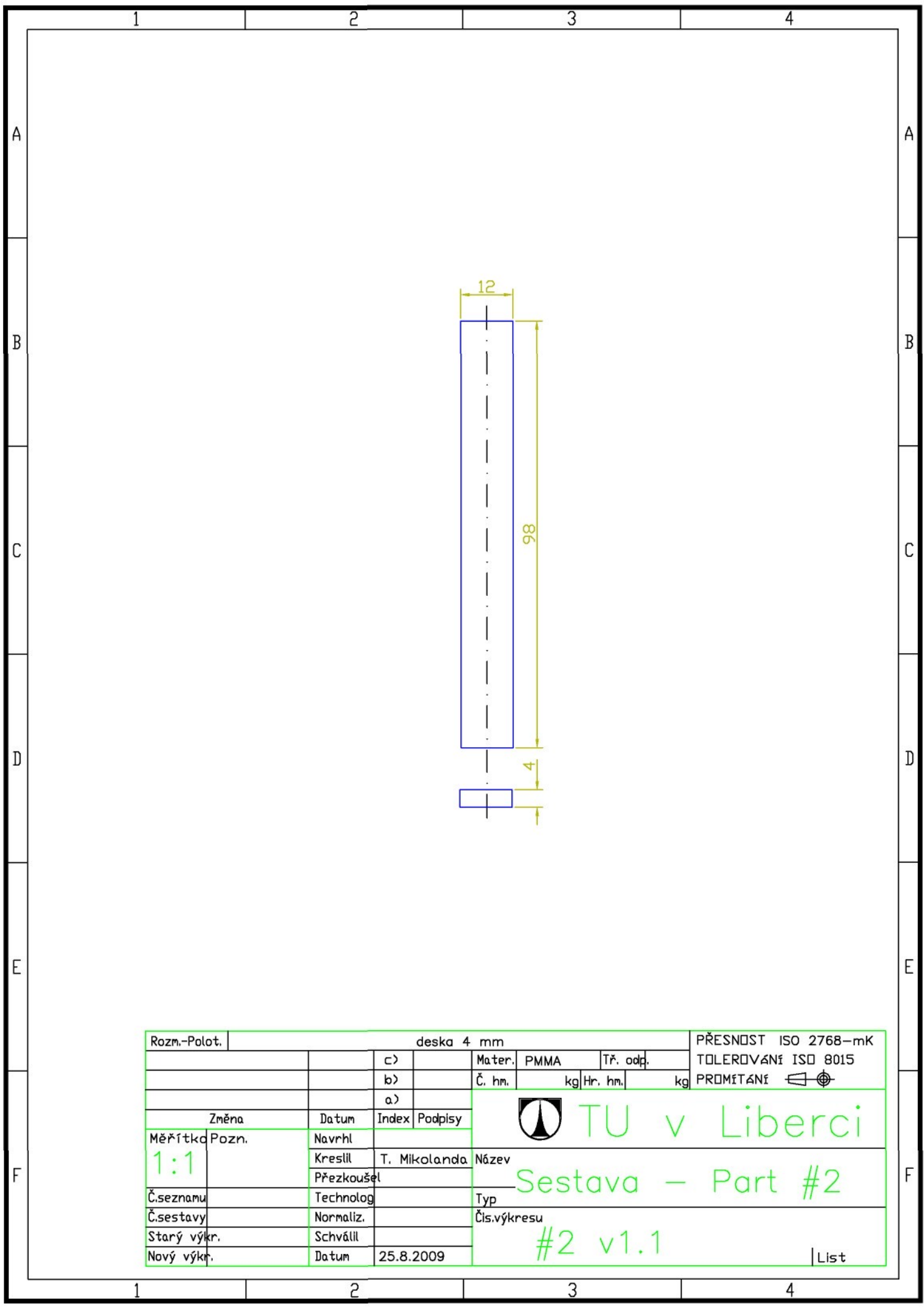
Title			
Senzory krajnich poloh			
Size	Document Number		Rev
Custom	(c) Tomas Mikolanda		1.0
Date:	Monday, September 14, 2009		Sheet 1 of 1



Rozn.-Polot.		trubka $\varnothing 75$ mm, délka 50 mm				PŘESNOST ISO 2768-mk	
		c)		Mater.	PVC	Tř. odp.	TOLEROVÁNÍ ISO 8015
		b)		Č. hm.	kg	Hr. hm.	PROMĚTÁNÍ 
		a)					
Změna	Datum	Index	Podpisy	 TU v Liberci			
Měřítko	Pozn.	Navrhl					
1:1		Kreslil	T. Mikolanda	Part #HCB			
Č.seznamu		Přezkoušel					
Č.sestavy		Technolog		#HCB v1.1			
Starý výkr.		Normaliz.					
Nový výkr.		Schválil		List			
		Datum	25.8.2009				

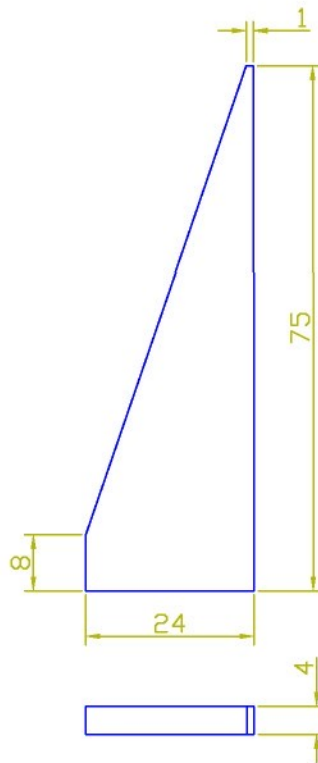


Rozm.-Polot.		deska 4 mm				PŘESNOST ISO 2768-mk	
		c)		Mater.	PMMA	Tř. odp.	TOLEROVÁNÍ ISO 8015
		b)		Č. hm.	kg	Hr. hm.	PROMÍTÁNÍ
		a)					
Změna		Datum	Index	Podpisy	TU v Liberci		
Měřítko	Pozn.	Navrhl					
1:1		Kreslil	T. Mikolanda	Název	Sestava – Part #1		
Č.seznamu		Přezkoušel		Typ			
Č.sestavy		Technolog		Čís.výkresu	#1 v1.1		
Starý výkr.		Normaliz.					
Nový výkr.		Schválil			List		
		Datum	25.8.2009				

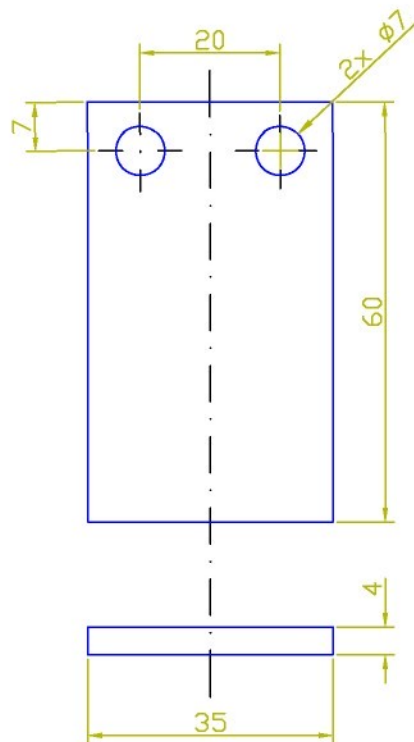


Rozm.-Polot.		deska 4 mm						PŘESNOST ISO 2768—mK						
			c)		Mater.	PMMA		Tř. odp.		TOLEROVÁNÍ ISO 8015				
			b)		Č. hm.	kg		Hr. hm.	kg		PROMÍTÁNÍ 			
			a)		 TU v Liberci									
Změna		Datum	Index	Podpisy										
Měřítko	Pozn.	Navrhl			Název Sestava – Part #2									
1:1		Kreslil	T. Mikolanda											
		Přezkoušel			Typ Čís.výkresu #2 v1.1									
Č.seznamu		Technolog												
Č.sestavy		Normaliz.			List									
Starý výkr.		Schválil												
Nový výkr.		Datum	25.8.2009											





Rozm.-Polot.		deska 4 mm						PŘESNOST ISO 2768-mk	
		c)		Mater.	PMMA	Tř. odp.		TOLEROVÁNÍ ISO 8015	
		b)		Č. hm.	kg	Hr. hm.	kg	PROMÍTÁNÍ 	
		a)		 TU v Liberci					
Změna		Datum	Index						
Měřítko	Pozn.	Navrhl			Sestava – Part #4				
1:1		Kreslil	T. Mikolanda						
		Přezkoušel			#4 v1.1				
Č.seznamu		Technolog							
Č.sestavy		Normaliz.			Typ				
Starý výkr.		Schválil			Čís.výkresu				
Nový výkr.		Datum	25.8.2009						
								List	



Rozm.-Polot.		deska 4 mm					PŘESNOST ISO 2768-mk		
			c>	Mater.	PMMA	Tř. odp.		TOLEROVÁNÍ ISO 8015	
			b>	Č. hm.	kg	Hr. hm.	kg	PROMÍTÁNÍ 	
			a>	 TU v Liberci					
Změna		Datum	Index						
Měřítka	Pozn.	Navrhl	Kreslil		T. Mikolanda	Název		Sestava – Part #5	
1:1			Přezkoušel			Typ			
Č.seznamu		Technolog				Čís.výkresu		#5 v1.1	
Č.sestavy		Normaliz.							
Starý výkr.		Schválil							
Nový výkr.		Datum	25.8.2009		List				

1 2 3 4

A

A

B

B

C

C

D

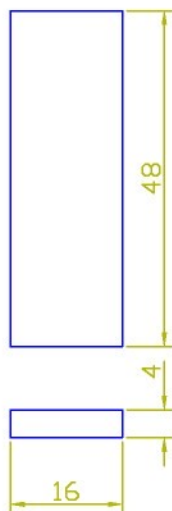
D

E

E

F

F



Rozn.-Polot.		deska 4 mm					PŘESNOST ISO 2768-mK		
			c>	Mater.	PMMA	Tř. odp.		TOLEROVÁNÍ ISO 8015	
			b>	Č. hm.	kg	Hr. hm.	kg	PROMÍTÁNÍ 	
			a>	 TU v Liberci					
Změna		Datum	Index						
Měřítka	Pozn.	Navrhl	T. Mikolanda			Sestava – Part #6			
1:1		Kreslil							
Č.seznamu		Technolog				#6 v1.1			
Č.sestavy		Normaliz.							
Starý výkr.		Schválil				List			
Nový výkr.		Datum	25.8.2009						

1 2 3 4

1 2 3 4

A

A

B

B

C

C

D

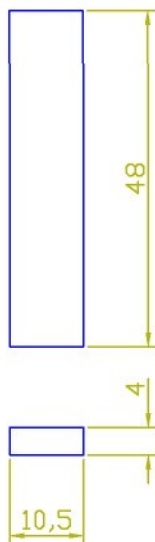
D

E

E

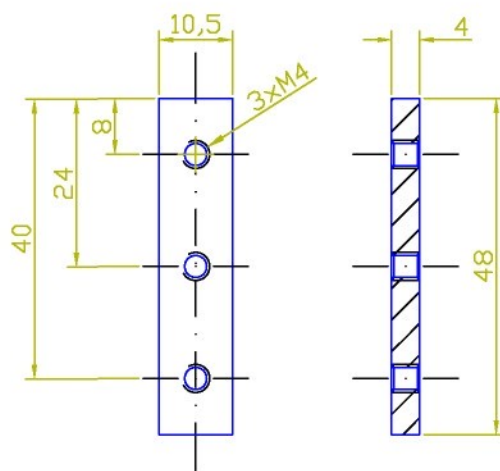
F

F

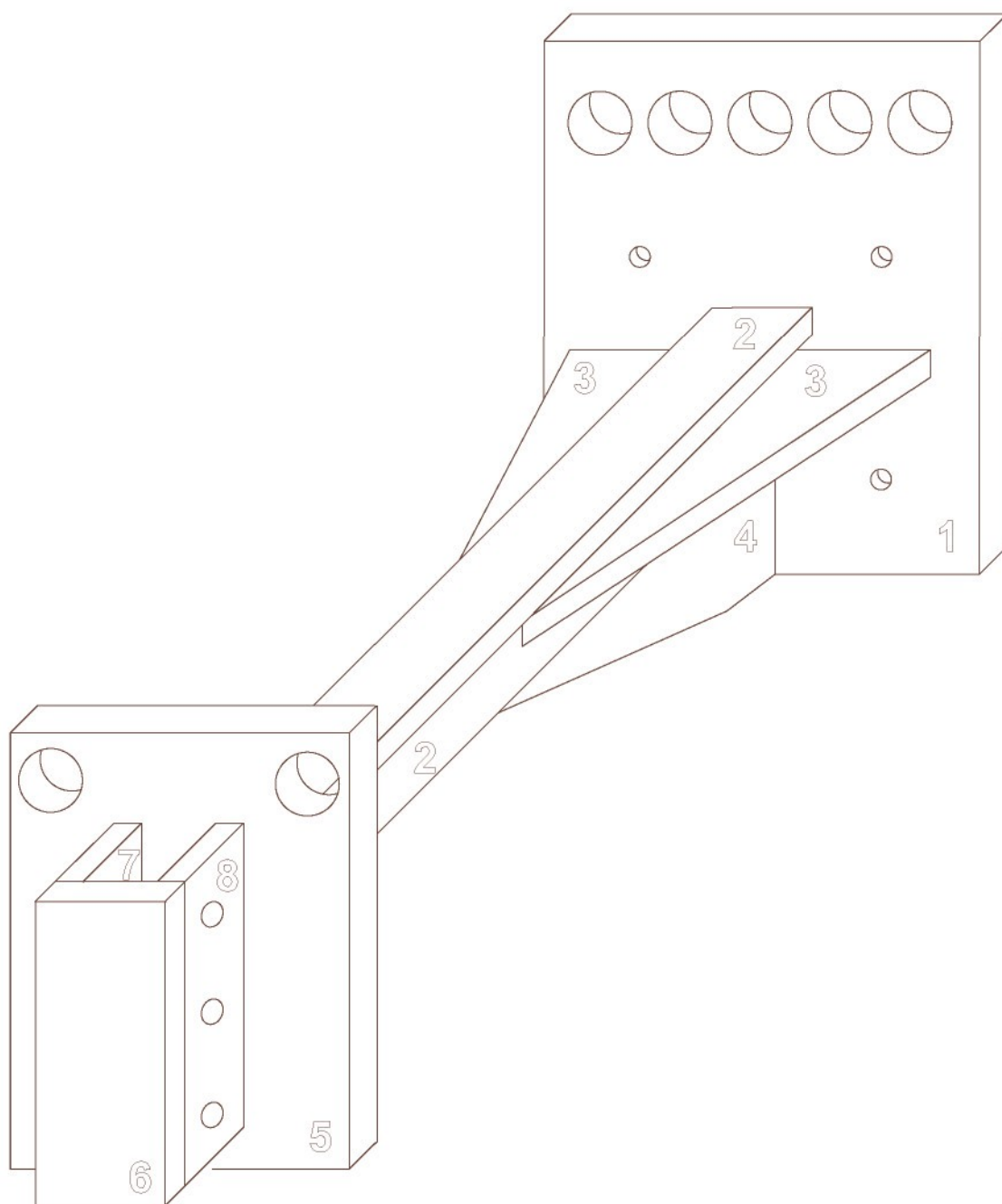


Rozm.-Polot.		deska 4 mm					PŘESNOST ISO 2768-mK		
			c>	Mater.	PMMA	Tř. odp.		TOLEROVÁNÍ ISO 8015	
			b>	Č. hm.	kg	Hr. hm.	kg	PROMÍTÁNÍ 	
			a>	 TU v Liberci					
Změna		Datum	Index						
Měřítka	Pozn.	Navrhl	T. Mikolanda			Sestava – Part #7			
1:1		Kreslil							
		Přezkoušel	#7 v1.1						
Č.seznamu		Technolog							
Č.sestavy		Normaliz.	List						
Starý výkr.		Schválil							
Nový výkr.		Datum	25.8.2009						

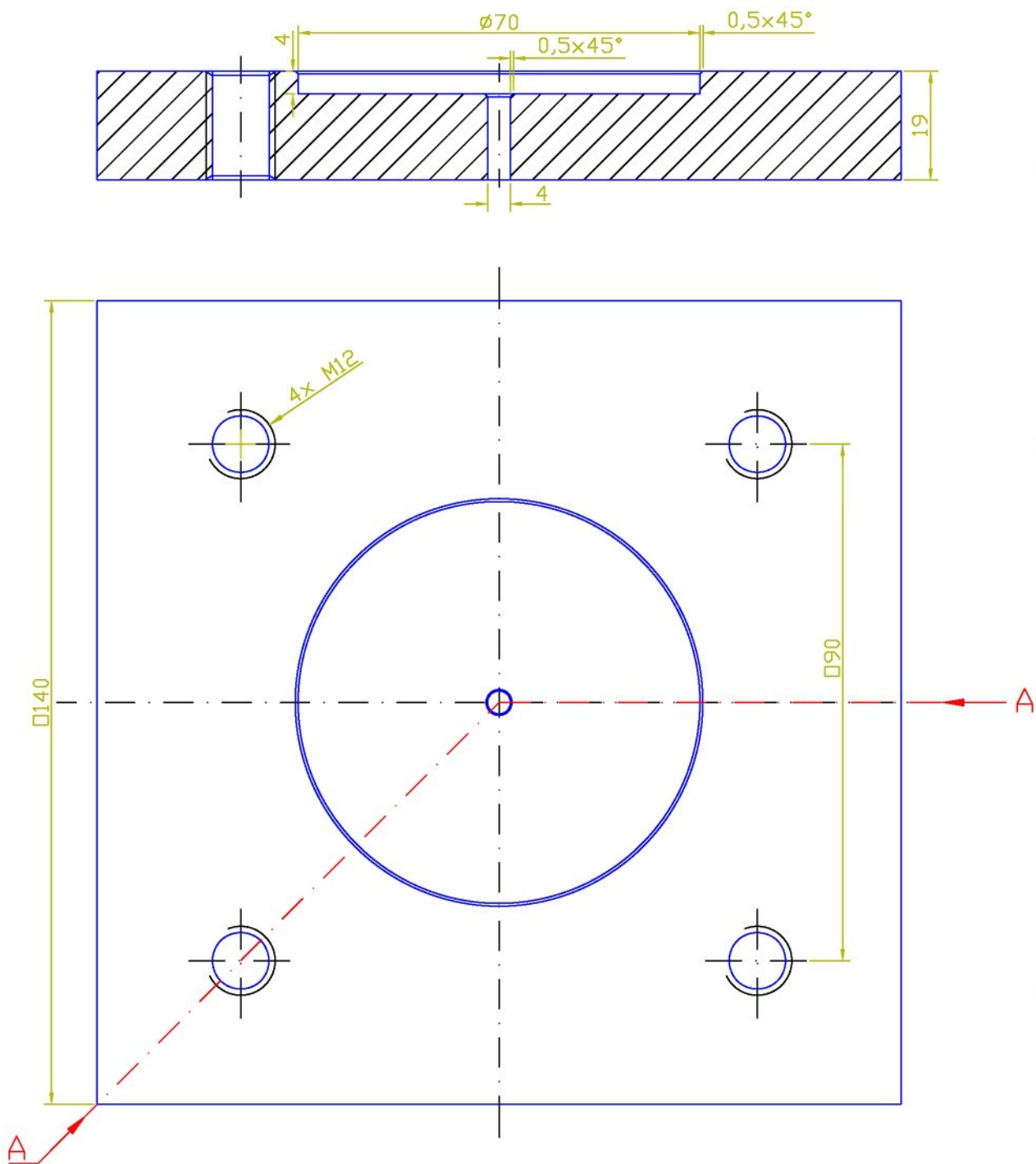
1 2 3 4



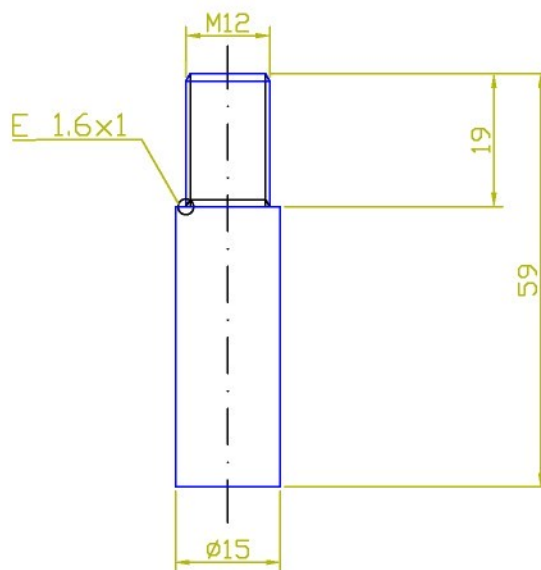
Rozn.-Polot.		deska 4 mm					PŘESNOST ISO 2768-mK			
			c>	Mater.	PMMA	Tř. odp.		TOLEROVÁNÍ ISO 8015		
			b>	Č. hm.	kg	Hr. hm.	kg	PROMÍTÁNÍ 		
			a>	 TU v Liberci						
Změna		Datum	Index							
Měřítka	Pozn.	Navrhl	Sestava – Part #8							
1:1		Kreslil								T. Mikolanda
		Přezkoušel	#8 v1.1							
Č.seznamu		Technolog								Typ
Č.sestavy		Normaliz.	Čís.výkresu							
Starý výkr.		Schválil								
Nový výkr.		Datum	25.8.2009	List						



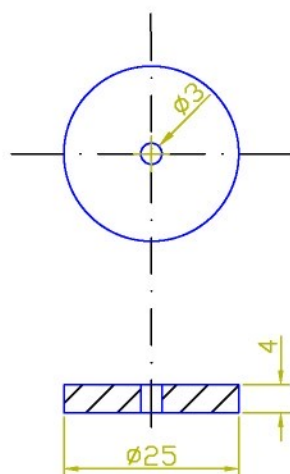
Rozn.-Polot.		deska 4 mm						PŘESNOST ISO 2768-mK						
			c)		Mater.	PMMA	Tř. odp.	TOLEROVÁNÍ ISO 8015						
			b)		Č. hm.	kg	Hr. hm.	kg	PROMĚTÁNÍ 					
			a)		 TU v Liberci Sestava									
Změna		Datum	Index	Podpisy										
Měřítka	Pozn.	Navrhl												Název
1:1		Kreslil	T. Mikolanda											
		Přezkoušel												
Č.seznamu		Technolog			Typ									
Č.sestavy		Normaliz.			Čís.výkresu									
Starý výkr.		Schválil												
Nový výkr.		Datum	25.8.2009											
					List									



Rozm.-Polot.						Mater.		PMMA	Tř. odp.	PŘESNOST ISO 2768-mk						
		c>				Č. hm.		kg	Hr. hm.	kg	TOLEROVÁNÍ ISO 8015					
		b>								PROMÍTÁNÍ 						
		a>														
Změna		Datum	Index	Podpisy		 TU v Liberci										
Měřítka	Pozn.	Navrhl			Part 1											
1:1		Kreslil	T. Mikolanda													
		Přezkoušel														
Č.seznamu		Technolog			Název		#1 v1.1									
Č.sestavy		Normaliz.			Typ											
Starý výkr.		Schválil			Čís.výkresu											
Nový výkr.		Datum	25.8.2009													
						List										



Rozm.-Polot.		tyč Ø15				PŘESNOST ISO 2768-mk				
		c)		Mater.	PMMA	Tř. odp.		TOLEROVÁNÍ ISO 8015		
		b)		Č. hm.	kg	Hr. hm.	kg	PROMÍTÁNÍ		
		a)		TU v Liberci Part 2 #2 v1.1						
Změna		Datum	Index							Podpisy
Měřítka	Pozn.	Navrhl								
1:1		Kreslil	T. Mikolanda							Název
		Přezkoušel			Part 2 #2 v1.1					
Č.seznamu		Technolog		Typ						
Č.sestavy		Normaliz.		Čís.výkresu						
Starý výkr.		Schválil								
Nový výkr.		Datum	25.8.2009		List					



Rozm.-Polot.		tyč Ø25				PŘESNOST ISO 2768-mK			
		c)		Mater.	PA6	Tř. odp.		TOLEROVÁNÍ ISO 8015	
		b)		Č. hm.	kg	Hr. hm.	kg	PROMÍTÁNÍ 	
		a)		 TU v Liberci					
Změna		Datum	Index						Podpisy
Měřítko	Pozn.	Navrhl		Part 3					
1:1		Kreslil	T. Mikolanda						Název
		Přezkoušel		#3 v1.1					
Č.seznamu		Technolog							Typ
Č.sestavy		Normaliz.							Čís.výkresu
Starý výkr.		Schválil		List					
Nový výkr.		Datum	25.8.2009						

