

DIPLOMOVÝ ÚKOL

pro O skara N a g y

odbor strojírenská technologie

Protože jste splnil..... požadavky učebního plánu, zadává Vám vedoucí katedry ve smyslu směrnic ministerstva školství o státních závěrečných zkouškách tento diplomový úkol:

Název tématu: Teoreticky řešte rozložení napětí v tavenině při vstřikování termoplastů do dutiny formy

Pokyny pro vypracování:

1. Zhodnoťte rozdíly a chování mezi newtonskými a neneutonskými kapalinami.
2. Popište postup vyplňování dutiny formy taveninou plastické hmoty při uvažování formy ve tvaru tyče kruhového nebo obdélníkového průřezu s umístěním vtoku na konci tyče a formy ve tvaru kotouče vstřikovaného centrálním vtokem.
3. Pro uvedené případy řešte rozdělení napětí v tavenině ve všech hlavních směrech během vyplňování dutiny.
4. Navrhněte experimentální způsoby pro studování rozdělení napětí.

Autorské právo na řídící předání MŠK pro státní závěrečné zkoušky č. j. 51 727/62-III/2 ze dne 13. července 1962 - Věstník MŠK XVIII, sešit 24 ze dne 31. 8. 1962 § 19 autorizace zákona č. 115/53 Sb.

VYSOKÁ ŠKOLA STROJNÍ A TEXTILNÍ
Ústřední knihovna
LIBEREC 405 68 TSKÁ 5

✓ 381/1969

Rozsah grafických laboratorních prací:

Rozsah průvodní zprávy: 50 - 70 stran

Seznam odborné literatury:

1. BARTĚŇEV, G.M.: Zakonoměrnosti i mechanizm vjazkovo tečenija linějnych polimerov, "Plastičeskije massy", 1964, č. 12+ 20-26.
2. BAUFER, W.: Der Formfüllvorgang beim Spritzguss von Thermoplasten. "Kunststoffe", 53, 1963:220-217.
3. EULITZ, W.: Gesetzmässigkeiten beim Spritzguss von Thermoplasten. "Plastverarbeiten", 10, 1956: 377-382.
4. HOFFMANN, O.- SACHS, G.: Introduction of the Theory of Plasticity for Engineers - ruský překlad, Moskva 1957.
5. PEŠINA, A.: Základy teorie plasticity, skripta, SNTL, Praha 1965

Vedoucí diplomové práce:

Ing. Josef Krebs CSc

Konzultanti:

Ing. Alena Kadeřábková

Datum zahájení diplomové práce:

16.10.1968

Datum odevzdání diplomové práce:

10.7.1969



Mik
Doc. Ing. Miroslav Kořínek CSc
vedoucí katedry

Höschl
Prof. Ing. Cyril Höschl
děkan

VŠST Liberec	Řešení napjatosti při vstřikování termoplastů	Katedra MT
Fakulta strojní		DP - ST/ 745 / 69-2

ŘEŠENÍ NAPJATOSTI V TAVENINĚ PLASTICKÉ HMOTY
PŘI VSTŘIKOVÁNÍ TERMOPLASTŮ

Diplomní práce

Vypracoval O.Nagy

Liberec, 10.7.1969

O. Nagy

VŠST Liberec	Řešení napjatosti při	Katedra MT
Fakulta strojní	vstřikování termoplastů	DP - ST/ 745 / 69-3

<u>O B S A H</u>	List
Zařazení diplomní práce	1
Titulní list	2
Obsah	3
1. SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ	5
2. ROZDÍLY V CHOVÁNÍ MEZI NEWTONSKÝMI KAPALINAMI A TAVENINAMI PLASTICKÝCH HMOT	7
2.1. Základní pojmy	7
2.2. Rozbor vztahu $\frac{d\epsilon}{dt} = f(\tau)$ pro izotermický vstřikovací proces	9
2.3. Poznámka k některým novým výzkumům	11
3. VYPLŇOVÁNÍ DUTINY FORMY TAVENINOU PLASTICKÉ HMOTY	12
3.1. Vlnová modelová představa	12
3.2. Stručný rozbor procesu plnění dutiny formy taveninou plastické hmoty	12
3.3. Zadané případy	14
4. ŘEŠENÍ NAPJATOSTI V TAVENINĚ PLASTICKÉ HMOTY PŘI VSTŘIKOVÁNÍ TERMOPLASTŮ	16
4.1. Úvodní poznámka ke zvolenému postupu	16
4.2. Řešení napjatosti v tavenině plastické hmoty při vstřikování plochého kruhového kotouče centrálním vtokem	16
4.2.1. Zjednodušující předpoklady pro řešení	16
4.2.2. Rozbor napjatosti v obecném místě tekoucí taveniny	17
4.2.3. Odvození zákona pro sdružená tečná napětí ...	18
4.2.4. Odvození obecných vztahů pro tečná napětí ...	19
4.2.5. Odvození diferenciálních rovnic rovnováhy ...	20
4.2.6. Řešení diferenciálních rovnic rovnováhy	23
4.2.6.1. Vyšetření tečného napětí τ_{xy}	24
4.2.6.2. Vyšetření vztahu mezi σ_y a σ_r	26
4.2.6.3. Řešení diferenciálních rovnic rovnováhy pro napětí σ_r pomocí metody variační konstanty	28
4.2.6.4. Výpočet normálního napětí σ_y	29
4.2.6.5. Výpočet normálního napětí σ_y	30
4.3. Řešení napjatosti v tavenině plastické hmoty při vstřikování tyčinky kruhového průřezu ...	31

VŠST Liberec	Řešení napjatosti při vstříkávání termoplastů	Katedra MT
Fakulta strojní		DP-ST / 745 / 69-4
4.3.1. Předpoklady řešení 31		
4.3.2. Rozbor napjatosti v obecném místě tekoucí ta- veniny 32		
4.3.3. Odvození diferenciálních rovnice rotační 32		
4.3.4. Řešení diferenciálních rovnice rotační 33		
4.3.4.1. Výpočet tečného napětí τ_{xy} 33		
4.3.4.2. Výpočet normálního napětí σ_y 34		
4.3.4.3. Určení normálních napětí σ_y a σ_r 35		
4.4. Řešení napjatosti v tavenině plastické hmoty při vstříkávání ploché typě obdélníkového průřezu 36		
4.4.1. Předpoklady pro řešení 36		
4.4.2. Rozbor napjatosti v obecném místě tekoucí ta- veniny 37		
4.4.3. Odvození diferenciálních rovnice rotační 37		
4.4.4. Odvození tečného napětí τ_{zx} 38		
4.4.5. Odvození vztahu pro normální napětí σ_x 39		
4.4.6. Odvození normálních napětí σ_y a σ_z 40		
4.5. Seznam konstant použitých při výpočtu 41		
5. OBECNÝ POSTUP ŘEŠENÍ NAPJATOSTI V TAVENINĚ PLASTICKÉ HMOTY PŘI VSTŘIKOVÁNÍ TERMOPLASTŮ 42		
5.1. Zjednodušená metoda s použitím parabolického rychlostního profilu 42		
5.2. Metoda vycházející z derivace mocninového zá- konu 43		
6. MOŽNOSTI EXPERIMENTÁLNÍHO STUDIA NAPJATOSTI V TAVENINĚ VSTŘIKOVANÉ PLASTICKÉ HMOTY 45		
6.1. Stručný rozbor problému 45		
6.2. Napřímá fotoelastická metoda 45		
6.3. Přímá fotoelastická metoda 45		
7. ZÁVĚREČNÉ ZHODNOCENÍ ZSKANÝCH VÝSLEDKŮ A DOPORUČENÍ DALŠÍ POSTUP 47		
8. SEZNAM OBRÁZKŮ 48		
9. SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY 50		

1. SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ

Symbol	Význam	Dimenze
C	rychlost proudění tekutiny	L^{-1}
C_f	rychlost pohybu šelaf pružiny	L^{-1}
C_r, C_g, C_y, C_x, C_z	rychlosti ve směrech souřadnic	L^{-1}
C_{max}	maximální rychlost	L^{-1}
$\bar{C}$	střední rychlost	L^{-1}
τ	časový	T^{-1}
τ_{mez}	mezní časový	T^{-1}
τ_r, τ_g, τ_y	časové	T^{-1}
$\tau_{rx}, \dots, \tau_{rz}$	časové	T^{-1}
τ_m	maximální časový	T^{-1}
τ_{yr}	střední časové	T^{-1}
x, y, z	odlehlost	
η	koeficient dynamické viskozity	L^{-2}
p	tlak	
p_{mez}	mezní tlak	
T	teplota	θ
M	moment	
η_{ed}	efektivní viskozita	L^{-2}
n	exponent u rovnice	
Φ	generalizovaná funkce	L^{-1}
σ_0	normální tahový	L^{-2}
p_0	vrtákový tlak	L^{-2}
h	tloušťka pláště	
r	poloměr	
$\dot{r}$	rychlost	L^{-1}
α, β, γ	úhly	θ
t	čas	
$S_1 \div S_n$	plachty	L^2
$C, C_1 \div C_9, K$	konstanty	
p	parametr paraboly	
ρ	hmotnost	L^{-3}

1. SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ

Symbol	Význam	Rozměr
C	rychlost proudění tekutiny	$m \cdot s^{-1}$
C_f	rychlost pohybu čelní fronty taveniny	$m \cdot s^{-1}$
C_x, C_y, C_z	rychlosti ve směrech souřadných os	$m \cdot s^{-1}$
C_{max}	maximální rychlost	$m \cdot s^{-1}$
$\bar{C}$	střední rychlost	$m \cdot s^{-1}$
τ	tečné napětí	$N \cdot m^{-2}$
τ_{mez}	mezí smykové napětí	$N \cdot m^{-2}$
τ_x, τ_y, τ_z	tečná napětí	$N \cdot m^{-2}$
$\tau_{xy}, \dots, \tau_{xz}$	sdrúžená tečná napětí	$N \cdot m^{-2}$
τ_m	maximální smykové napětí	$N \cdot m^{-2}$
$\bar{\tau}_y$	střední tečné napětí	$N \cdot m^{-2}$
x, y, z	odlehlost	m
η	součinitel dynamické viskozity	$N \cdot s \cdot m^{-2}$
P	síla	N
P_{mez}	mezí síla	N
T	teplota	$^{\circ}K$
M	molekulová hmota	-
η_{zd}	zdánlivá viskozita	$N \cdot s \cdot m^{-2}$
n	exponent u mocninného zákona	-
Φ	generalizovaná fluidita	$N^{-1} \cdot s^{-1} \cdot m^2$
σ_0	normální tahové napětí	$N \cdot m^{-2}$
p_0	vstřikovací tlak	$N \cdot m^{-2}$
h	tloušťka plochého výstřiku	m
r	poloměr	m
$\dot{\gamma}$	smyková rychlost	s^{-1}
α, β, φ	úhly	$rad, ^{\circ}$
t	čas	s
$S_1 \div S_4$	plochy	m^2
$C, C_1 \div C_9, K$	konstanty	-
p	parametr paraboly	m
ρ	měrná hmota	$kg \cdot m^{-3}$

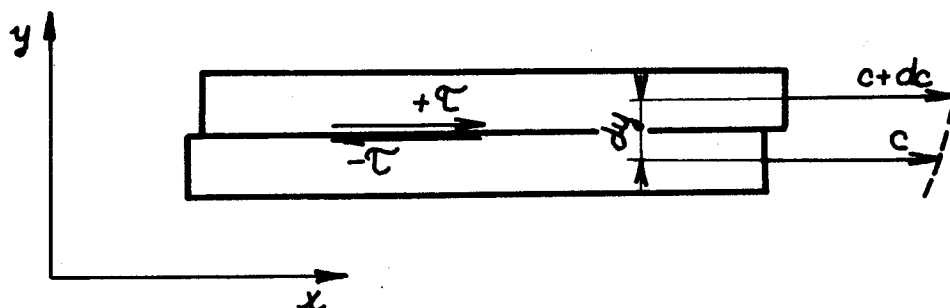
VŠST Liberec	Řešení napjatosti při vstřikování termoplastů	Katedra MT
Fakulta strojní		DP-ST/745/69-6
$\bar{M}$ vteřinová průtočná hmota kg . s⁻¹ r_0 poloměr vteku m R poloměr dutiny formy m S plocha m² V vteřinový průtočný objem m³ . s⁻¹ b šířka dutiny formy m		

2. ROZDÍLY V CHOVÁNÍ MEZI NEWTONSKÝMI KAPALINAMI A TAVENINAMI PLASTICKÝCH HMOT

2.1. Základní pojmy

Vyjděme z obecné definice tekutiny, tak jak ji podává klasická hydrodynamika (9). Podle ní je tekutina hmotné těleso, jehož jednotlivé částice se vůči sobě velmi snadno pohybují, takže může téci, t.j. měnit svůj tvar za působení nepatrných sil. Čím jsou změny tvaru tekutiny pomalejší, tím jsou působící síly menší. Při proudění nízkomolekulárních vazkých kapalin vzniká tření mezi sousedními vrstvami kapaliny, které se pohybují různou rychlostí; nazývá se vnitřní tření. Síly vnitřního tření mají směr tečný k povrchu vrstvy a působí tak, že zpomalují pohyb rychlejších vrstev a zrychlují pohyb pomalejších vrstev. Vlivem uvedeného jevu vzniká mezi sousedními vrstvami kapaliny tečné napětí τ které podle Newtonovy hypotézy je úměrné gradientu rychlosti $\frac{dc}{dy}$

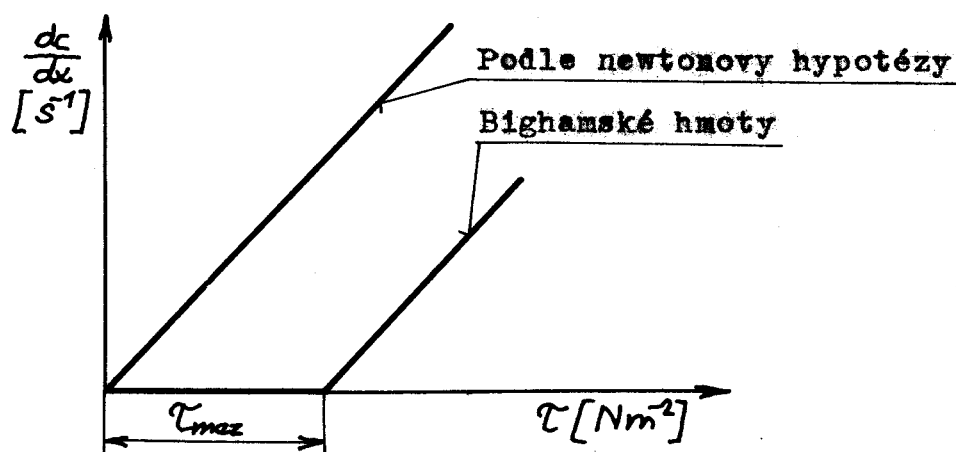
$$\tau = \eta \frac{dc}{dy} \quad (2.1.)$$



Obr. 1

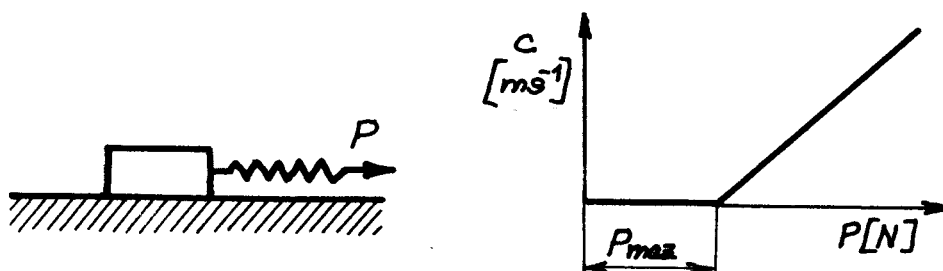
Konstantou úměrnosti ve vztahu (2.1.) je tzv. dynamická viskozita η , která má rozměr $[N \cdot s \cdot m^{-2}]$ při uvažování napětí τ v $[N \cdot m^{-2}]$, rychlosti c v $[m \cdot s^{-1}]$ a odlehlosti y v $[m]$.

Plastické hmoty jsou materiály, jejichž podstatnou složku tvoří vysokomolekulární organické sloučeniny uhlíku. Taveniny plastických hmot bývají často v literatuře označovány jako nenewtonské tekutiny (5), protože jejich reologické vlastnosti jsou odlišné od reologických vlastností nízkomolekulárních tekutin, které se řídí Newtonovým zákonem. Jako příklad nenewtonského chování lze užít třeba tzv. Bighamské hmoty, jejichž závislost $\tau = \tau(\frac{dc}{dx})$ je na obr.2.



Obr. 2

Zde τ_{max} představuje jakési mezní smykové napětí po jehož překročení teprve dojde k tečení látky. Podobné vlastnosti vykazuje mechanický model vytvořený spojením Saint - Venantova tělesa s pružinou / podle obr.3 /.



Obr. 3

Důvodem zvláštního chování tavenin plastických hmot je proměnný koeficient dynamické viskozity. Je závislý na teplotě taveniny T , velikosti působícího smykového

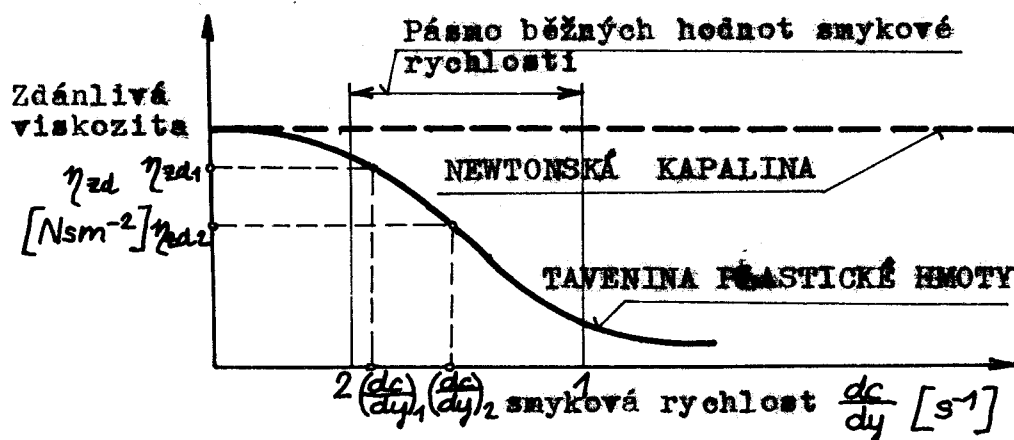
napětí τ a na molekulové hmotě M .

$$\eta = \eta_0 \cdot \eta_1(T) \cdot \eta_2(\tau) \cdot \eta_3(M) \quad (2.2)$$

Jednotlivé dílčí vztahy jsou podrobně zpracovány v literatuře (2) a nebude je zde rozepisovat. Jedná se o obecné exponenciální závislosti.

2.2. Rozbor vztahu $\frac{dc}{dy} = f(\tau)$ pro izotermický vstřikovací proces

Při uvažování izotermického režimu vstřikování bude ve vztahu (2.2) $\eta_1(T) = \text{konst}$ a pro danou plastickou hmotu bude $\eta_3(M) = \text{konst}$. Pak závisí viskozita taveniny plastických hmot pouze na smykové rychlosti $\frac{dc}{dy}$ a Newtonovu hypotézu lze psát vždy jen pro danou smykovou rychlost, jak je zřejmé z obr.4



Obr. 4

Zřejmě platí: $\tau_1 = \eta_{zd1} \left(\frac{dc}{dy} \right)_1$, $\tau_2 = \eta_{zd2} \left(\frac{dc}{dy} \right)_2$.

Obecně tedy: $\tau_i = \eta_{zd,i} \left(\frac{dc}{dy} \right)_i$.

Jde o to najít jednoznačnou závislost $\frac{dc}{dy} = f(\tau)$

V literatuře je možno nalézt různé vztahy (1), (2), (3), (5)

Pro svůj poměrně jednoduchý tvar je však nejpoužívanější tento:

$$\frac{dc}{dy} = \frac{1}{\eta} \cdot \tau^m$$

uváděný pod názvem mocninový zákon. Jedná se o jakousi obdobu Newtonova zákona získanou na základě empirických zkušeností.

$$\tau^n = \eta \frac{dc}{dy} = \frac{1}{\Phi} \frac{dc}{dy}, \quad (2.3)$$

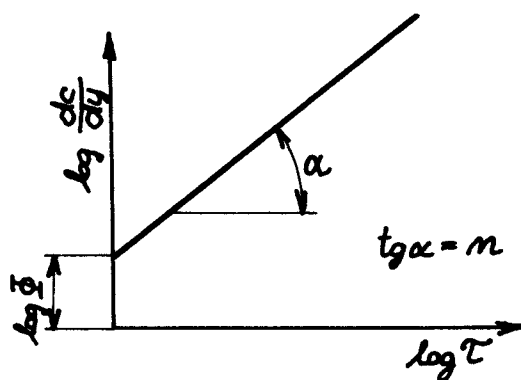
kde Φ je označována jako generalizovaná fluidita.

Ze vztahu (2.3) je zřejmé, že k charakterisování reologických vlastností taveniny plastické hmoty při isothermickém procesu je nutno znát hodnoty koeficientu n a fluidity Φ . Velikost n je konstantou daného materiálu a nezávisí na teplotě / na rozdíl od Φ /. Hodnoty obou konstant lze poměrně spolehlivě určit měřením na vytlačovacím plastoměru.

Logaritmováním mocninového zákona (2.3) lze získat tuto přímkovou závislost:

$$\log \frac{dc}{dy} = n \log \tau + \log \Phi$$

Její grafické znázornění je na obr.5. Ze zkušeností



Obr.5

je známo (5), že mocninový

zákon je spolehlivý pouze

pro střední hodnoty smy-

kové rychlosti $\frac{dc}{dy}$. Při

hodně nízké a hodně vysoké

smykové rychlosti je zá-

vislost $\frac{dc}{dy} = f(\tau)$ jiná. Na

obrázku 6 leží oblast plat-

nosti mocninového zákona

mezi body 1 a 2. Poměrně

spolehlivě je možno popsat

chování tavenin plastických hmot v celém rozsahu smy-

kových rychlostí pomocí vztahu $\tau = \tau(\frac{dc}{dy})$, který odvedli

pánové Eyring a Powell. Při velmi malé a velmi vyso-

ké smykové rychlosti získáme tak obdobu Newtonova zá-

kona, což odpovídá praktickým zkušenostem vyjádřeným

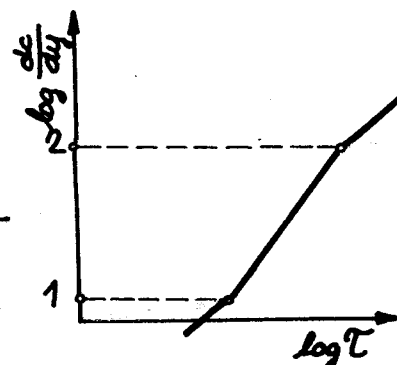
v obr.4. Zmíněný vztah se však nepoužívá pro obtížné

stanovení některých konstant, proto ho zde ani neuvedu.

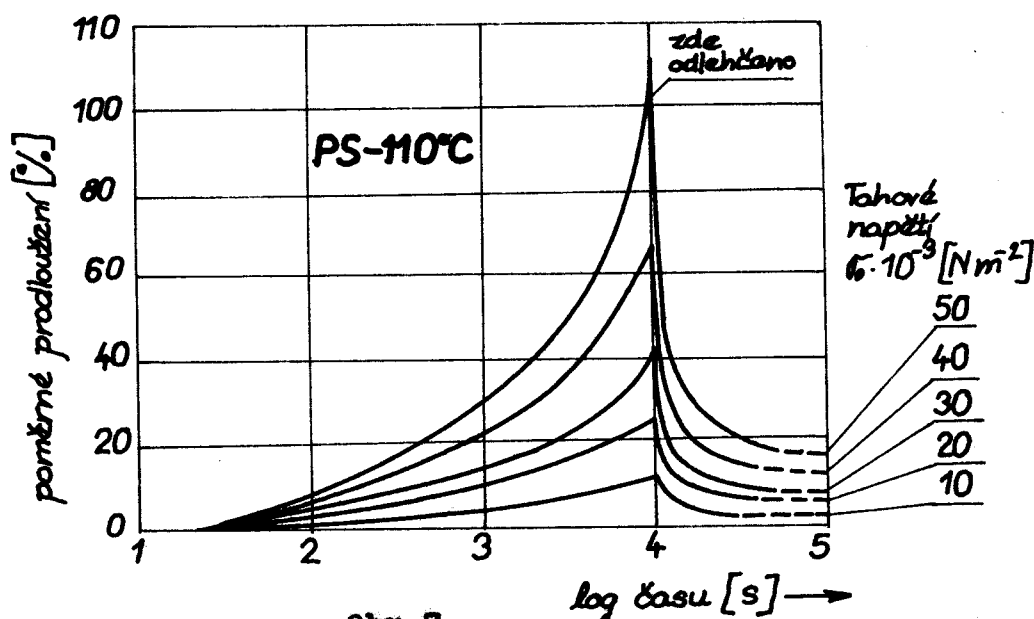
K řešení, která budou odvozena v této práci, bude použito mocninového zákona.

2.3 Poznámka k některým novým výzkumům

V závěru této kapitoly se všimneme některých nových poznatků o taveninách plastických hmot. Podle práce (5) je možno taveniny plastických hmot považovat za elastické tekutiny, pro jejichž napětí a deformace platí obdobné vztahy jako pro tuhé plastické hmoty. Z reologického hlediska tedy půjde o viskoelastické tekutiny, jejichž chování je možno popsat třeba analogií s Maxwellovým nebo Kelvinovým modelem. Pro uvedení této teorie mluví například výsledky měření autorů Karana a Bellingera (5) které jsou zobrazeny na obr. 7.



Obr. 6



Obr. 7

Polystarenová tavenina o teplotě 110°C / tedy vyšší, než teplota zesklínění / byla zatěžována tahovým napětím σ_0 o různé velikosti.

VŠST Liberec	Řešení napjatosti při vstřikování termoplastů	Katedra MT
Fakulta strojní		DA-ST/745/69-12

Obrázek 7 představuje časový průběh poměrného prodloužení při zatížení a po odlehčení. Čím větší je hodnota napětí σ_0 , tím zřetelnější je odpružení.

Vstřikovací teplota Polystyrenu není 110°C ; je asi dvakrát vyšší. Dá se tedy předpokládat, že s rostoucí teplotou bude se pružná složka deformace zmenšovat a převládnou plastické děje.

V této práci budou pružné vlastnosti taveniny zanedbány, proto nebude uvedený případ podrobněji rozebírat.

3. VYPLŇOVÁNÍ DUTINY FORMY TAVENINOU PLASTICKÉ HMOTY

3.1. Vlnová modelová představa

K popsání dějů při plnění dutiny formy taveninou plastické hmoty je možno vytvořit modelovou představu opírající se o teorii šíření vln (6). Podle ní se materiál od ústí vtoku šíří v podobě kulové vlny, která tvoří obálku jednotlivých vlnoploch dílčích, s centry v jednotlivých bodech vtoku.

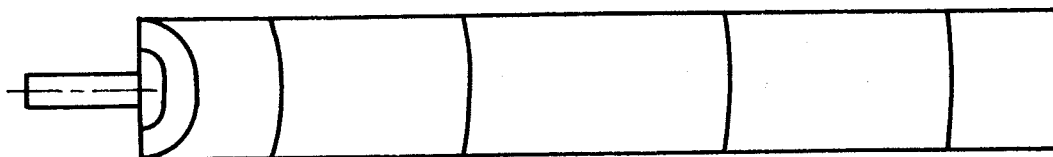
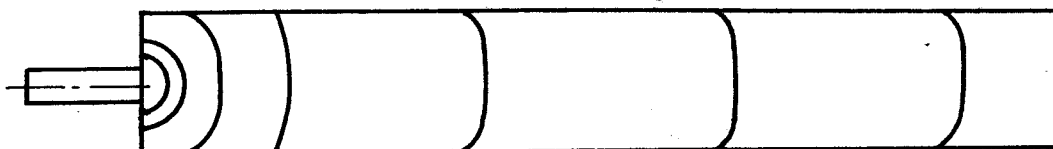
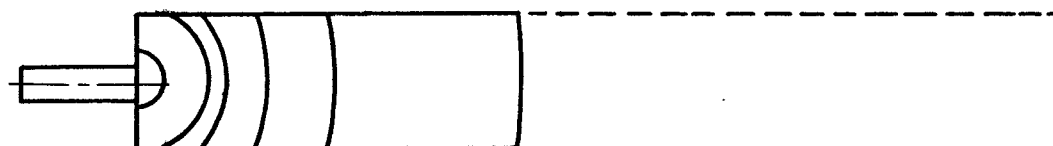
Lze-li zanedbat tloušťku výstřiku oprotu jeho šířce, případ se mění na dvojrozměrný. Pak kružnice opsaná ze středu vtoku vytvoří čelo proudící taveniny.

U skutečných případů je tvar vlnoploch zkreslován vlivem tření taveniny o stěnu formy. V práci (6) byly porovnány výsledky experimentů s teoretickou představou. Bylo například zjištěno, že vezmu-li dvě tyče o tloušťkách 0,021 m a 0,004 m, pak u tenčí tyče se skutečné vlnoplochy s teoretickými shodují více ve větší vzdálenosti od vtoku, u tlustší je shoda poblíž vtoku / jak je zřejmé z obr. 8 /.

3.2. Stručný rozbor procesu plnění dutiny formy taveninou plastické hmoty

Důležitými charakteristikami vstřikovacího procesu jsou vstřikovací tlak p_0 a rychlost pohybu čelní fronty taveniny q_0 .

Teoretický případ

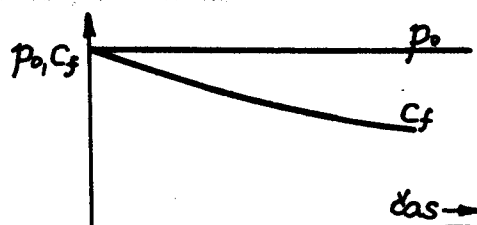
Tyč o tl. $4 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ Tyč o tl. $1 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ 

Obr. 8

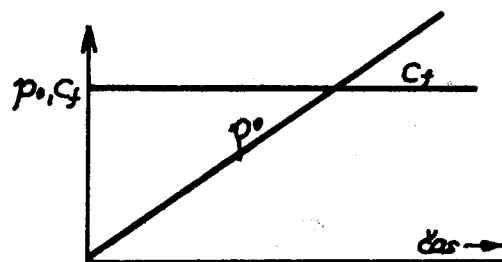
Podle charakteru jejich průběhu je možno zjistit, zda je tok plastické hmoty uvnitř dutiny formy ovlivněn formou nebo strojem.

Tzv. tok ovlivněný formou představuje vstřikovací režim, při němž je maximální hodnoty tlaku dosaženo dříve, než je forma zcela zaplněna. Další plnění pak pokračuje za konstantního tlaku. Vlivem růstu odporů v dutině formy bude rychlost pohybu čelní fronty taveniny klesat.

Tzv. tok ovlivněný strojem představuje vstřikovací režim, při němž vstřikovací tlak nedosáhne maxima před zaplněním formy. Tlak tedy stoupá a rychlost pohybu čelní fronty taveniny zůstává konstantní (kolem hodnoty $0,5 \text{ m.s}^{-1}$). V praxi je obvykle snaha po dosažení tohoto druhého režimu.



Tok určený formou



Tok určený strojem

Obr. 9

VŠST Liberec	Řešení napjatosti při vstřikování termoplastů	Katedra MT
Fakulta strojní		DP-ST/745/69-14

Děje probíhající při vstřikovacím procesu jsou velice složité a závisejí na mnoha různých okolnostech. Především dochází ke sdílení tepla mezi proudící taveninou a chladnou stěnou formy jejíž teplota je hluboko pod teplotou taveniny. Stykem s formou stuhne okamžitě na jejím povrchu tenká vrstvička hmoty, která pak působí izolačně při pohybu další taveniny a způsobuje známý fakt, že jakost povrchu formy nemá podstatný vliv na pohyb materiálu ve formě. Tloušťka stuhlé vrstvičky je závislá jednak na rychlosti jejího růstu, jednak na čase, po který musela růst. V místě vyústění vtoku do formy je čas růstu největší, ale rychlost růstu nejmenší, protože zde je neustále do formy dodáván nový tekutý materiál. Naproti tomu na čelní frontě taveniny je čas růstu nulový, ale rychlost růstu největší.

Při tlakovém lití kovů tuhne materiál od nejvzdálenějšího místa formy směrem k ústí vtoku. Při vstřikování termoplastů je tomu právě naopak, vlivem neusměrněného tuhnutí.

Kromě uvedeného vstřikovacího tlaku a rychlosti pohybu čelní fronty taveniny hrají značnou úlohu při vstřikovacím procesu i vstřikovací teplota materiálu, teplota formy, průřez vstřikovacího kanálku a další (1). Nebudu je zde podrobně rozebírat.

3.3. Zadané případy

Při vstřikování plochého kruhového kotevce centrálním vtokem rozlévá se tavenina z místa vtoku rovnoměrně na všechny strany a výsledná vlnoplocha je dána kružnicí opsanou ze středu vtoku. Potvrzují to výsledky experimentů s nedostříknutými výrobky v práci (6). Z hydrodynamického hlediska by šlo při potenciálním proudění o tzv. pramen. Při předpokladu nestlačitelné tekutiny a stálé průtočné hmoty $\bar{M}$ by rychlost pohybu taveniny pro rostoucí odlehlost r klesala podle rovnice hyperboly.

VŠST Liberec	Řešení napjatosti při vstřikování termoplastů	Katedra MT
Fakulta strojní		DP - ST/745/69-15

Při vstřikování tyčinky kruhového průřezu, jejíž průměr je značně menší než její délka, lze zanedbat zakřivení čelní fronty tečení způsobené vlnovým charakterem proudění. Při konstantním vteřinovém průtočném množství Q se rychlostní profil po délce formy nemění.

U ploché tyče mohou nastat dva případy. První, složitější, vzniká při plnění formy malým kruhovým vtokem, umístěným na kratší boční straně výstřiku. Zde se zřetelně projeví vlnový charakter proudění (6) a je nutno brát na to ohled při výpočtu napjatostí.

Jednodušší případ nastává při plnění formy podélným bočním zářezem. Vzniká tak vlastně paralelní proudění a lze formu uvažovat v podobě dvou rovnoběžných, nekonečně velkých rovin.

Podrobný rozbor každého vyšetřovaného případu je uveden ve vlastním výpočtu napjatostí.

Výpočet bude omezen pouze na tu část vstřikovacího procesu, po kterou je čelní fronta taveniny v pohybu.

4. ŘEŠENÍ NAPJATOSTI V TAVENINĚ PLASTICKÉ HMOTY PŘI VSTŘIKOVÁNÍ TERMOPLASTŮ

4.1. Úvodní poznámka ke zvolenému postupu

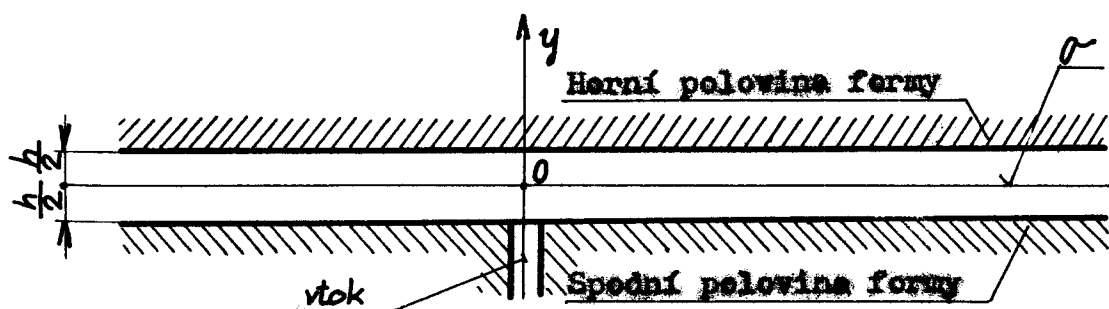
V tomto oddíle bude odvozena napjatost v proudící tavenině plastické hmoty pro tři základní tvary výstřiků. Zvolme k tomu účelů metodu, při níž budeme postupovat od obecnějšího ke speciálnějšímu a jednoduššímu. Tento postup bude zřejmě exaktnější, než opačný případ, kdy bychom postupovali od jednoduchého ke složitějšímu. Jednoduchý případ často svádí k tomu, že jednoduché závislosti na něm vypočítané se snažíme aplikovat na obecnější případ, aniž si uvědomíme rozdíl v obecnosti obou vztahů. Z těchto důvodů odvodíme nejprve napjatost u dutiny formy ve tvaru kruhového kotouče s centrálním vtokem.

4.2. Řešení napjatosti v tavenině plastické hmoty při vstřikování plochého kruhového kotouče centrálním vtokem

4.2.1. Zjednodušující předpoklady pro řešení

Ve zcela obecném případě jsou děje při plnění vstřikovací formy velice složité. Proto pro následující případ zavedme tyto předpoklady:

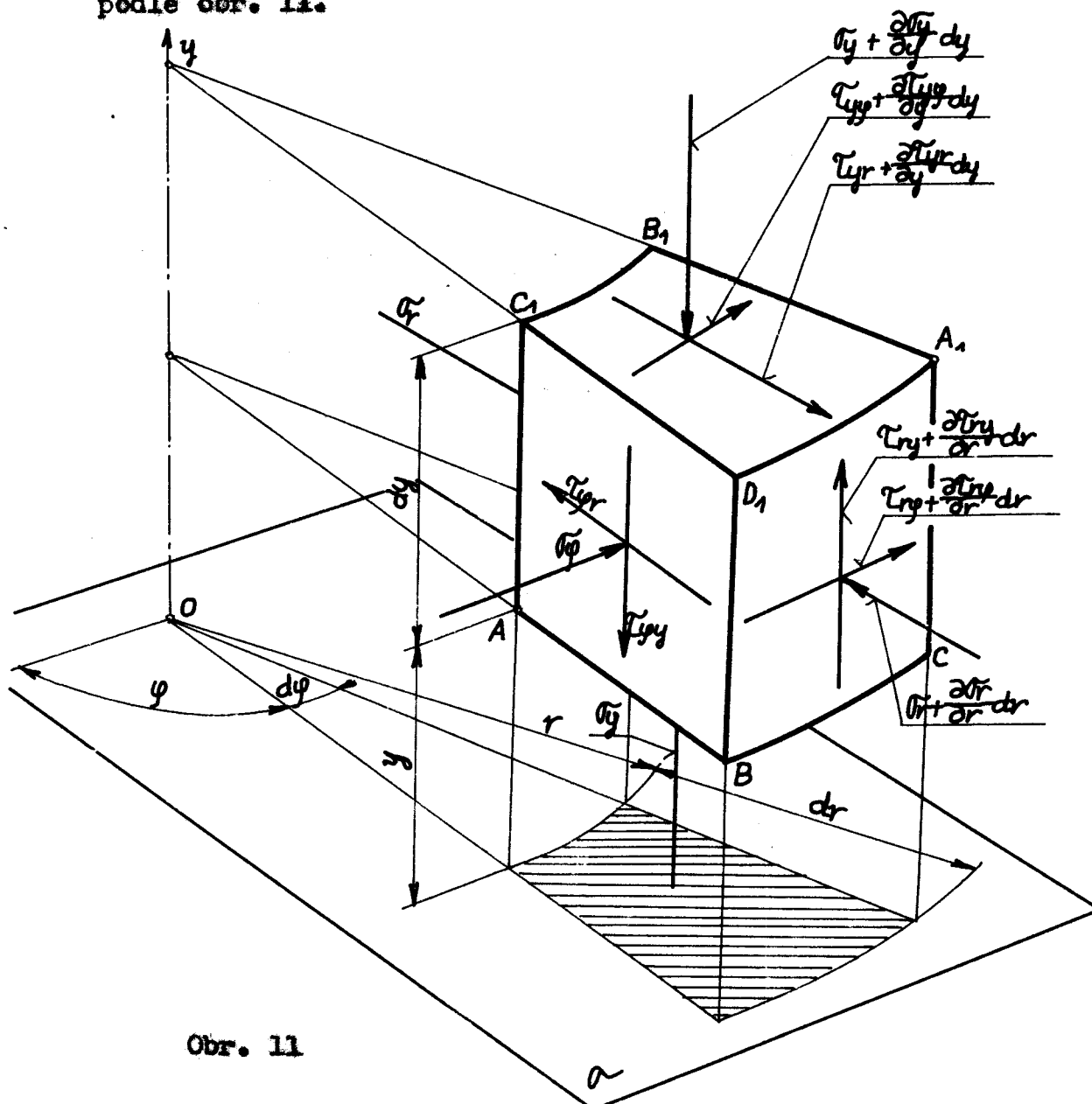
1. Proudění je isotermické, stacionární a laminární
2. Vstřikovaná tavenina plastické hmoty je homogenní, nepružná a nestlačitelná tekutina.
3. Setrvačné a gravitační síly zanedbáme.
4. Při výpočtu smykového napětí uvažujeme po celé délce tečení plně vyvinutý parabolický rychlostní profil.
5. Napjatost je souměrná podle osy y (osa vtoku) a roviny σ , která je kolmá k ose y a leží uprostřed dutiny formy (jak je zřejmé z obr.10)



Obr. 10

4.2.2. Rozbor napjatosti v obecném místě tekoucí taveniny

Vytkneme v dutině formy obecný element taveniny podle obr. 11.



Obr. 11

Stav napjatosti v bodě A (r, φ, y) lze určit pomocí napětí, jež působí ve třech elementárních ploškách přilehlých k bodu A. Jsou to jednak normální napětí $\sigma_r, \sigma_y, \sigma_\varphi$, jednak tečná napětí, která označme

v ploše A D B₁C₁

v ploše A B D₁C₁

v ploše A B C D

τ_r se složkami τ_{ry}, τ_{ry}

τ_y se složkami τ_{yr}, τ_{yr}

τ_φ se složkami $\tau_{r\varphi}, \tau_{r\varphi}$

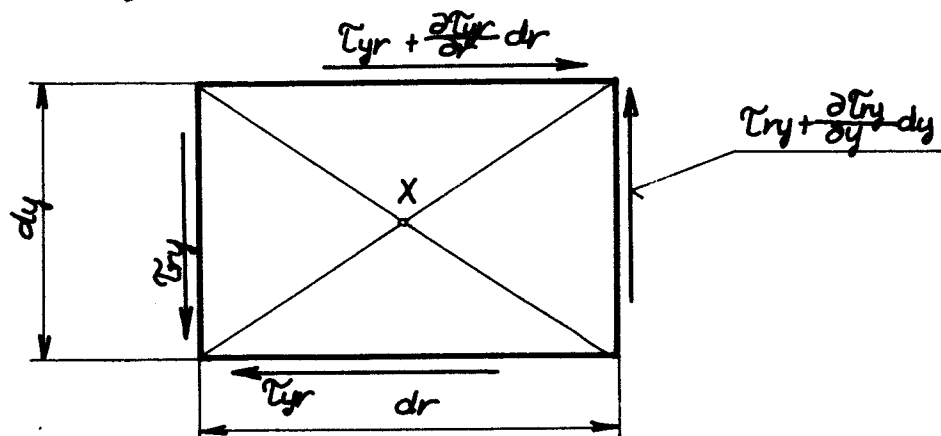
Indexy u tečných napětí jsou voleny tak, že první index značí směr normály plošného elementu, na nějž napětí působí, druhý index značí směr tečného napětí.

Stav napjatosti bodu A₁ ($r+dr, y+dy, \varphi+d\varphi$) představují složky normálních i tečných napětí bodu A zvětšené o příslušné diferenciální přírůstky ve směrech souřadných os.

4.2.3. Odvození zákona pro sdružená tečná napětí

Dokažme, že šest složek tečného napětí se dá zredukovat na tři. V této a následující úvaze použijeme zjednodušení, podle něhož obecný element z obr. 11 nahradíme hranolkem o stranách dy, dr, rdy .

Vyjádřeme nyní za použití obr. 12 podmínku rovnováhy otáčení hranolku podle osy, která prochází středem X kolmo k ploše $dr \cdot dy$.



Obr. 12

Pak podle obr. 12 :

$$(2\tau_{ry} + \frac{\partial \tau_{ry}}{\partial y} \cdot dy) r dy \cdot dy \frac{dr}{2} -$$

$$- (2\tau_{yr} + \frac{\partial \tau_{yr}}{\partial r} \cdot dr) r dy \cdot dr \frac{dy}{2} = 0$$

Zanedbáme-li druhé členy v závorkách jako nekonečně malé veličiny vyššího řádu, je

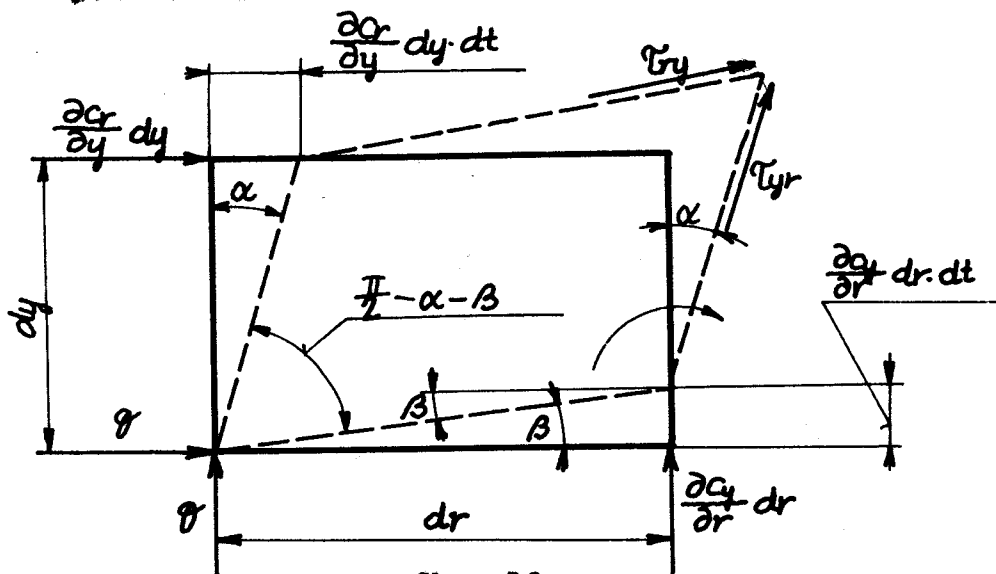
$$\tau_{ry} = \tau_{yr} \quad \text{a obdobně} \quad \tau_{ry} = \tau_{yr}, \tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad (4.1)$$

4.2.4. Odvození obecných vztahů pro tečná napětí

Podle mocninového zákona

$$\tau^n = \eta \frac{dc}{dy} = \eta \cdot \dot{\gamma}, \quad (4.2)$$

kde $\dot{\gamma}$ je relativní úhlová rychlost natočení původně pravouhlých stěn elementárního hranolku zatíženého smykovým napětím τ . V obecném případě dojde v důsledku nestejných obvodových rychlostí ke zborcení hranolku, jak je zjednodušeně zakresleno na obr. 13.



Obr. 13

Původně pravý úhel se změnil o velikost součtu $(\alpha + \beta)$. Příslušná úhlová rychlost natočení je tedy

$$\dot{\gamma} = \frac{\alpha + \beta}{dt}.$$

Zavedeme-li pro malé úhly $\sin \alpha = \alpha$ a $\sin \beta = \beta$, pak

$$\alpha = \frac{\frac{\partial c_r}{\partial y} \cdot dy \cdot dt}{dy} = \frac{\partial c_r}{\partial y} dt,$$

$$\beta = \frac{\frac{\partial c_y}{\partial r} \cdot dr \cdot dt}{dr} = \frac{\partial c_y}{\partial r} \cdot dt$$

Tedy úhlová rychlost

$$\dot{\gamma} = \frac{\partial c_r}{\partial y} + \frac{\partial c_y}{\partial r}$$

a příslušné tečné napětí

$$\tau_{ry} = \tau_{yr} = \eta^{\frac{1}{n}} \left(\frac{\partial c_r}{\partial y} + \frac{\partial c_y}{\partial r} \right)^{\frac{1}{n}}$$

Uvažujeme-li stejným způsobem zkosení ostatních stěn hranolku, dostaneme analogické vztahy:

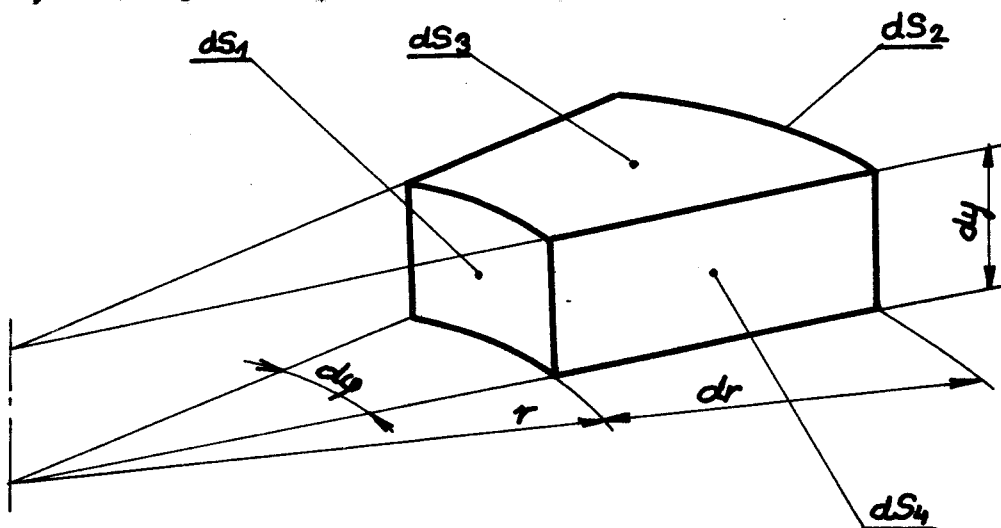
$$\tau_{ry} = \tau_{yr} = \eta^{\frac{1}{n}} \left(\frac{\partial c_r}{\partial y} + \frac{\partial c_y}{\partial r} \right)^{\frac{1}{n}},$$

$$\tau_{yy} = \tau_{yy} = \eta^{\frac{1}{n}} \left(\frac{\partial c_y}{\partial y} + \frac{\partial c_y}{\partial y} \right)^{\frac{1}{n}}$$

(4.3)

4.2.5. Odvození diferenciálních rovnic rovnováhy

Spočtíme nejprve velikosti elementárních plošek, na něž působí jednotlivá napětí.



Obr. 14

Z obr.14 je zřejmé, že

$$dS_1 = r dy dy,$$

$$dS_4 = dr dy,$$

$$dS_2 = (r+dr) dy dy = r dy dy + dr dy dy,$$

$$dS_3 = \frac{d\varphi^\circ \cdot \pi}{360} [(r+dr)^2 - r^2] = \frac{d\varphi^\circ}{2} [(r+dr)^2 - r^2] =$$

$$= \frac{d\varphi}{2} (r^2 + 2rdr + dr^2 - r^2).$$

Zanedbáme-li dr^2 jako nekonečně malou veličinu vyššího řádu, pak

$$dS_3 = r dr dy.$$

Z kinematického rozboru úlohy vyplývá, že v uvažovaném případě rychlost C_r na určitém poloměru r je pouze funkcí proměnné y , což zapíšeme ve tvaru $C_r / r = \text{konst} = C_r(y)$

Rychlosti v dalších dvou směrech jsou rovný nule

$$C_y = C_z = 0.$$

Pak tečná napětí podle (4.3) budou

$$\left. \begin{aligned} \tau_{ry} = \tau_{yr} &= \eta^{\frac{1}{n}} \left(\frac{\partial C_r}{\partial y} \right)^{\frac{1}{n}}, \\ \tau_{ry} = \tau_{yr} = \tau_{yy} = \tau_{yy} &= 0. \end{aligned} \right\} (4.4)$$

S použitím těchto výsledků napíšeme nyní podmínky rovnováhy sil do radiálního směru a do směru osy y . Podle předpokladů řešení zanedbáme objemové síly / setrvačné a tíhové /.

Rovnováha sil do směru osy y

$$\begin{aligned} & \left(\tau_{ry} + \frac{\partial \tau_{ry}}{\partial r} dr \right) (r dy dy + dr dy dy) - \\ & - \tau_{ry} \cdot r \cdot dy \cdot dy - \left(\tau_{yy} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} dy \right) r dy dr + \\ & + \tau_{yy} r dy dr = 0. \end{aligned}$$

Po rozepsání

$$\begin{aligned} \tau_{ry} r dy dy + \frac{\partial \tau_{ry}}{\partial r} dr r dy dy + \tau_{ry} dr dy dy + \\ + \frac{\partial \tau_{ry}}{\partial r} dr dy dy - \tau_{ry} r dy dy - \sigma_y r dy dr + \\ + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy r dy dr + \sigma_y r dy dy = 0. \end{aligned}$$

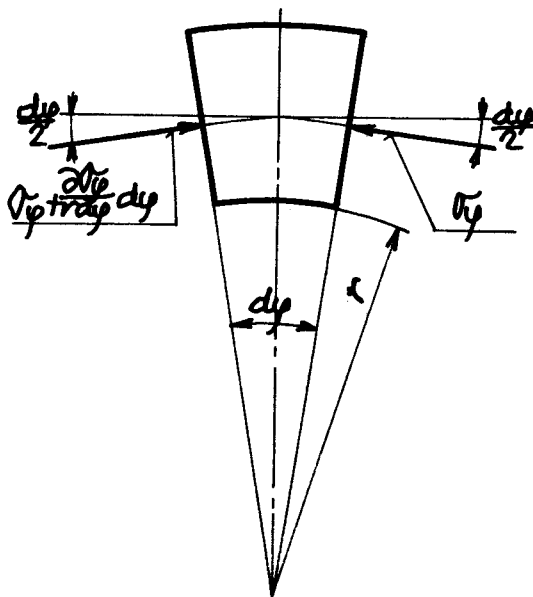
Vydělme obě strany rovnice součinem $dr \cdot dy \cdot dy$

$$\frac{\partial \tau_{ry}}{\partial r} \cdot r + \tau_{ry} + \frac{\partial \tau_{ry}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \cdot r = 0.$$

Výsledná diferenciální rovnice rovnováhy do směru osy y bude tedy

$$\tau_{ry} + \frac{\partial \tau_{ry}}{\partial r}(1+r) + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \cdot r = 0. \quad (4.5)$$

Předpoklad o osově souměrnosti úlohy potvrzuje rovnováha do tečného směru / získaná z obr.15 /



$$\frac{\partial \sigma_y}{r \partial \phi} dy = 0, \quad (4.6)$$

protože

$$\begin{aligned} \left(\sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{r \partial \phi} dy \right) dr dy \frac{1}{\cos \frac{\phi}{2}} - \\ - \sigma_y dr dy \frac{1}{\cos \frac{\phi}{2}} = 0 \end{aligned}$$

Obr.15

Protože diferenciální přírůstek napětí je roven nule, je σ_y na daném poloměru a při dané odlehlosti y konstantní.

Rovnováha sil do radiálního směru

Napišme podmínku rovnováhy sil do radiálního směru při uvažování $\sigma_y = \text{konst}$ na dané kružnici a při použití pravidla pro malé úhly $\sin \frac{dy}{2} = \frac{dy}{2}$

$$\begin{aligned} & (\tau_{yr} + \frac{\partial \tau_{yr}}{\partial y} dy - \tau_{yr}) r \cdot dr dy - \\ & - (\sigma_r + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} dr) (r dy dy + dr dy dy) + \\ & + \sigma_r r dy dy + 2 \tau_y dr dy \frac{dy}{2} = 0. \end{aligned}$$

Po úpravě:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \tau_{yr}}{\partial y} r dy dr dy - \sigma_r \cdot dr dy dy - \\ & - \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} dr \cdot r dy dy - \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} dr dy dy + \\ & + \tau_y dr dy dy = 0. \end{aligned}$$

Vydělme obě strany rovnice součinem $dr \cdot dy \cdot dy$

$$\frac{\partial \tau_{yr}}{\partial y} r - \sigma_r - \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} r - \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \tau_y = 0.$$

Výsledná diferenciální rovnice rovnováhy do radiálního směru bude

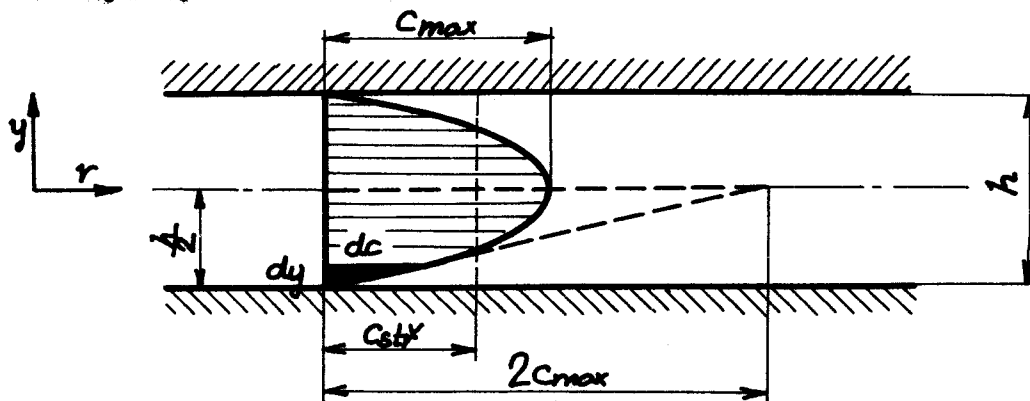
$$\tau_y - \sigma_r - \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} (1+r) + \frac{\partial \tau_{yr}}{\partial y} \cdot r = 0. \quad (4.7)$$

4.2.6. Řešení diferenciálních rovnic rovnováhy

Uvedeným rozбором napjatosti jsme získali pouze dvě rovnice pro čtyři neznámé. Rozdělení napětí je tedy staticky neurčitě a k výpočtu je třeba odvodit další dva vztahy. Jedním bude závislost tečného napětí τ_{yr} na velikosti proměnných y a r , druhým vzájemný vztah mezi σ_y a σ_r .

4.2.6.1. Vyšetření tečného napětí

Zde využijeme předpokladu laminárního proudění s parabolickým rychlostním profilem po celé dráze toku taveniny.



Mocninový zákon je znám ve tvaru

$$\tau^n = \eta \frac{dc}{dy} \quad \text{Odtud } \tau = \left(\eta \frac{dc}{dy} \right)^{\frac{1}{n}}$$

Střední rychlost proudění taveniny

$$\bar{c} = \frac{\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} c(y) dy}{h} \quad (4.8)$$

Plocha vlastního rychlostního profilu je dána plochou parabolické úseče $\frac{h}{2}$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} c(y) dy = \frac{2}{3} c_{max} \cdot h$$

Pak je střední rychlost pohybu taveniny v radiálním směru

$$\bar{c} = \frac{2}{3} c_{max} \quad (4.9)$$

Odtud maximální rychlost

$$c_{max} = \frac{3}{2} \bar{c}$$

Střední průtočnou rychlost $\bar{c}$ lze vyjádřit pomocí vteřinového průtočného objemu V a příslušné průtočné plochy

$$\bar{c} = \frac{V}{2\pi h} \cdot \frac{1}{r}$$

Zavedeme-li průtočnou vteřinovou hmotu $\bar{M} = V \cdot \rho$, pak střední rychlost

$$\bar{c} = \frac{\bar{M}}{2\pi h \cdot \rho} \cdot \frac{1}{r} \quad (4.10)$$

a maximální rychlost $C_{max} = \frac{3}{2} \bar{c} - \frac{3\bar{M}}{4\pi h p} \cdot \frac{1}{r}$ (4.11)

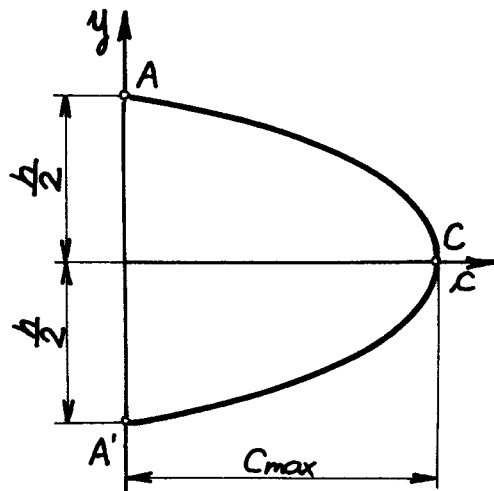
Analytický výpočet tečného napětí pomocí vytknutého elementu vede ke složitým vztahům. V odvození se totiž pracuje s derivací $\frac{d\tau}{dy}$ jejíž tvar daný mocninovým zákonem znemožňuje další řešení.

$$\tau = \eta \left(\frac{\partial c}{\partial y} \right)^{\frac{1}{n}} \text{ odtud } \frac{\partial \tau}{\partial y} = \eta^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{n} \left(\frac{\partial c}{\partial y} \right)^{\frac{1-n}{n}} \cdot \frac{\partial^2 c}{\partial y^2}. \quad (4.12)$$

Podrobný rozbor je v oddíle 5.2

Zvolme pro výpočet τ_{yr} metodu, při které vezmeme za základ předpoklad parabolického rychlostního profilu.

Rovnice rychlostní paraboly v souřadnicích c, y podle obr. 17 bude



Obr. 17

$$y^2 = -2p(c - C_{max}),$$

$$y^2 = -2pc + 2pC_{max},$$

$$C = C_{max} - \frac{y^2}{2p}. \quad (4.13)$$

Dvojnásobnou velikost parametru paraboly $2p$ vypočteme z okrajových podmínek při dosazení za C_{max} .

Pro bod A zřejmě platí: $C=0, y=\frac{h}{2}$

Tedy
$$0 = C_{max} - \frac{h^2}{4 \cdot 2p}.$$

Za C_{max} mohu dosadit ze (4.11)

$$\frac{3\bar{M}}{4\pi h p} \cdot \frac{1}{r} = \frac{h^2}{4 \cdot 2p}.$$

Odtud

$$2p = \frac{\pi h^3 p}{3\bar{M}} \cdot r$$

a rychlost $c = c(y, r)$

$$c = \frac{3\bar{M}}{4\pi h p} \cdot \frac{1}{r} - y^2 \cdot \frac{3\bar{M}}{\pi h^3 p} \cdot \frac{1}{r} \quad (4.14)$$

Protože se rychlost s rostoucím poloměrem zmenšuje, bude $\frac{\partial c}{\partial y}$ záporné. Abychom destali τ_{yr} v absolutních hodnotách, zavádí se do mocninového zákona záporné znaménko.

$$\text{Tedy } \tau_{yr} = - \left(\eta \frac{\partial c}{\partial y} \right)^{\frac{1}{n}} = \left(\eta \cdot 2y \frac{3\bar{M}}{\pi h^3 \rho} \cdot \frac{1}{r} \right) = \\ = \left(\frac{6\eta\bar{M}}{\pi h^3 \rho} \right)^{\frac{1}{n}} \cdot y^{\frac{1}{n}} \cdot r^{-\frac{1}{n}},$$

$$\tau_{yr} = C_1 \cdot y^{\frac{1}{n}} \cdot r^{-\frac{1}{n}} = C_1 \sqrt[n]{\frac{y}{r}}. \quad (4.15)$$

K výpočtu $\bar{\sigma}_r = \bar{\sigma}_r(r)$ je třeba znát hodnotu maximálního smykového napětí τ_m . Největší rychlostní spád je u stěny formy, tedy τ_m bude τ_{yr} pro $y = \frac{h}{2}$

$$\tau_m = C_1 \left(\frac{h}{2} \right)^{\frac{1}{n}} r^{-\frac{1}{n}} = \left(\frac{3\eta\bar{M}}{\pi h^2 \rho} \right)^{\frac{1}{n}} \cdot r^{-\frac{1}{n}},$$

$$\tau_m = C_2 \cdot r^{-\frac{1}{n}} \quad (4.16)$$

Pro kontrolu je možno τ_m spočítat ještě tímto způsobem: Je známo, že subtangenta paraboly je vrcholem půlena, tedy podle obrázku 16 je zřejmé

$$\left(\frac{\partial c}{\partial y} \right)_{\max} = \frac{2 C_{\max}}{\frac{h}{2}};$$

dosadíme za $C_{\max}$ ze (4.11) a vyjádříme τ_m z mocninového zákona

$$\tau_m = \left(\frac{3\eta\bar{M}}{\pi h^2 \rho} \right)^{\frac{1}{n}} \cdot r^{-\frac{1}{n}}, \quad \text{což souhlasí s výsledkem (4.16)}$$

4.2.6.2. Vyšetření vazby mezi $\bar{\sigma}_y$ a $\bar{\sigma}_r$

Kvůli usnadnění dalšího výpočtu a vzhledem k tomu, že tloušťka výstřiku h je obvykle malá, zavedme místo závislosti $\bar{\sigma}_r = \bar{\sigma}_r(r, y)$ střední napětí $\bar{\sigma}_r$, které je pouze funkcí poloměru r : $\bar{\sigma}_r = \bar{\sigma}_r(r)$

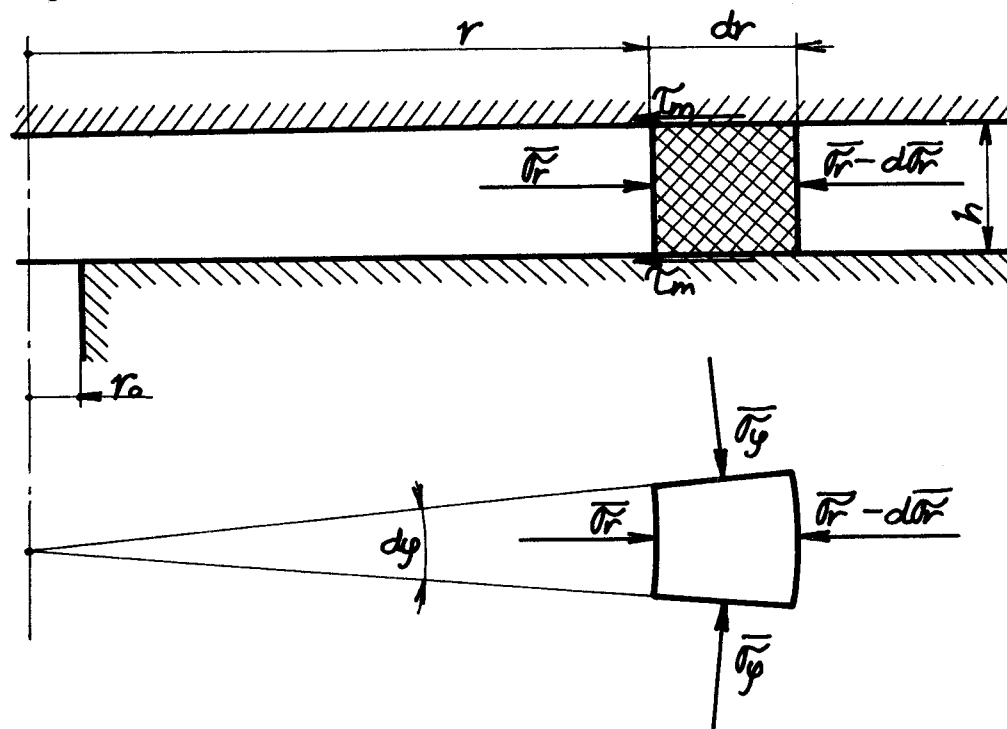
Pro daný poloměr r bude:

$$\bar{\sigma}_r = \frac{\int_0^{\frac{h}{2}} \sigma_r dy}{\frac{h}{2}} = \frac{2}{h} \int_0^{\frac{h}{2}} \sigma_r dy. \quad (4.17)$$

$$\text{Z podobných důvodů zavedme i } \bar{\sigma}_y = \frac{2}{h} \int_0^{\frac{h}{2}} \sigma_y dy \quad (4.18)$$

Vytkneme nyní (podle obr. 18) na poloměru r element taveniny o výšce h a napíšeme podmínku rovnováhy působících sil v radiálním směru.

Uvažujeme rdy přibližně rovno $(r+dr)dy$. Pak síla od radiálního napětí musí být v rovnováze se silami způsobenými maximálním smykovým napětím τ_m a napětím $\bar{\sigma}_y$. Protože předpokládáme, že hodnota $\bar{\sigma}_r$ klesá s rostoucím poloměrem, diferenciální přírůstek napětí $\bar{\sigma}_r$ na poloměru $r + dr$ bude mít záporné znaménko.



Obr. 18

Při použití pravidla pro malé úhly $\sin \frac{dy}{2} = \frac{dy}{2}$ bude rovnováha v radiálním směru dána rovnicí

$$-d\bar{\sigma}_r h \cdot r dy - 2\tau_m \cdot r dy dr + 2\bar{\sigma}_y h \cdot dr \cdot \frac{dy}{2} = 0.$$

Vydělme obě strany rovnice součinem $h \cdot r \cdot dr \cdot dy$

$$-\frac{d\bar{\sigma}_r}{dr} - \frac{2}{h}\tau_m + \frac{2}{r}\bar{\sigma}_y = 0. \quad (4.19)$$

Odtud je možno vyjádřit

$$\bar{\sigma}_y = \frac{d\bar{\sigma}_r}{dr} \frac{r}{2} + \frac{r}{h}\tau_m \quad (4.20)$$

Protože počítáme se středním napětím $\bar{\sigma}_r$, které je pouze fci poloměru, parciální derivace $\frac{\partial \bar{\sigma}_r}{\partial r}$ se změní v normální derivaci $\frac{d\bar{\sigma}_r}{dr}$. Protože $\bar{\sigma}_r$ je pouze funkcí poloměru, musíme dále v diferenciální rovnici rovnováhy (4.7)

obecné tečné napětí $\bar{\tau}_{yr}$, které je i funkcí y nahradit středním tečným napětím $\bar{\tau}_{yr}$, které je pouze funkcí poloměru. Pak ovšem $\frac{\partial \bar{\tau}_{yr}}{\partial y} = 0$

a poslední člen v dif. rovnici rovnováhy (4.7) odpadá.

4.2.6.3. Řešení diferenciální rovnice rovnováhy pro $\bar{\sigma}_r$ pomocí metody variace konstanty

Po dosazení všech uvedených předpokladů do rovnice (4.7) dostaneme

$$\bar{\sigma}_y - \bar{\sigma}_r - \frac{d\bar{\sigma}_r}{dr}(1+r) = 0. \quad (4.21)$$

Dosaďme nyní za $\bar{\sigma}_y$ ze (4.20)

$$\frac{d\bar{\sigma}_r}{dr} \frac{r}{2} + \frac{r}{h} \tau_m - \bar{\sigma}_r - \frac{d\bar{\sigma}_r}{dr}(1+r) = 0.$$

Po úpravě a vynásobení obou stran rovnice (-1) dostaneme nehomogenní lineární diferenciální rovnici pro $\bar{\sigma}_r$

$$\frac{d\bar{\sigma}_r}{dr} \left(\frac{r+2}{2} \right) + \bar{\sigma}_r = \frac{r}{h} \tau_m. \quad (4.22)$$

Dosaďme za $\tau_m = C_2 \cdot r^{\frac{n-1}{n}}$ a dělme obě strany rovnice výrazem $\frac{r+2}{2}$

$$\frac{d\bar{\sigma}_r}{dr} + \frac{2}{r+2} \bar{\sigma}_r = \frac{2C_2}{h} \cdot \frac{r^{\frac{n-1}{n}}}{(r+2)}. \quad (4.23)$$

Řešení této diferenciální rovnice je možno provést metodou variace konstanty.

Zkrácená rovnice

$$\frac{d\bar{\sigma}_r}{dr} + \frac{2\bar{\sigma}_r}{r+2} = 0.$$

Separací proměnných dostaneme

$$\frac{d\bar{\sigma}_r}{\bar{\sigma}_r} = -\frac{2 dr}{r+2}.$$

Při integrování pravé strany rovnice využijme skutečnosti, že v čitateli je derivace jmenovatele.

Zřejmě platí $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C$.

Tedy $-2 \int \frac{dr}{r+2} = -2 \ln |r+2| + C$.

Integrační konstantu můžeme napsat ve tvaru $\ln C$. Potom

$$\ln |\bar{\sigma}_r| = -2 \ln |r+2| + \ln C,$$

$$\bar{\sigma}_r = C(r+2)^{-2}.$$

Nahradíme nyní obecnou konstantu C pomocí $z = z(r)$
a dosadíme za $\bar{\sigma}_r$ do rovnice (4.23)

$$\bar{\sigma}_r = z(r+2)^{-2}, \quad (4.24)$$

$$z'(r+2)^{-2} - 2z(r+2)^{-3} + 2z(r+2)^{-3} = \frac{2C_2}{h} \cdot \frac{r^{\frac{n-1}{n}}}{(r+2)}.$$

Odtud

$$z' = \frac{dz}{dr} = \frac{2C_2}{h} (r+2) \cdot r^{\frac{n-1}{n}} = C_5 \left(r^{\frac{2n-1}{n}} + 2r^{\frac{n-1}{n}} \right).$$

Po integraci

$$z = C_5 \left(\frac{n}{3n-1} r^{\frac{3n-1}{n}} + \frac{2n}{2n-1} r^{\frac{2n-1}{n}} \right) + C_4. \quad (4.25)$$

Tedy podle (4.24) bude

$$\bar{\sigma}_r = \frac{C_5 \left(\frac{n}{3n-1} r^{\frac{3n-1}{n}} + \frac{2n}{2n-1} r^{\frac{2n-1}{n}} \right) + C_4}{(r+2)^2}, \quad (4.26)$$

$$\text{kde } C_5 = \frac{2C_2}{h} = \frac{2}{h} \left(\frac{3p \cdot M}{\pi h^2 \rho} \right)^{\frac{1}{n}}. \quad (4.27)$$

Integrační konstantu C_4 lze vyjádřit z této okrajové podmínky: pro $r = r_0$ je $\bar{\sigma}_r = p_0$ / kde p_0 je vstřikovací tlak v místě vtoku /

Pak

$$C_4 = p_0(r_0+2)^2 - C_5 \left(\frac{n}{3n-1} r_0^{\frac{3n-1}{n}} + \frac{2n}{2n-1} \cdot r_0^{\frac{2n-1}{n}} \right). \quad (4.28)$$

Při použití bodových vtoků / kde $r_0 < 1 \text{ mm}$ / lze velikost poloměru vtoku zanedbat.

Pak

$$C_4 \approx 4p_0. \quad (4.29)$$

4.2.6.4. Výpočet normálního napětí $\bar{\sigma}_y$

Normální napětí $\bar{\sigma}_y$ lze vypočítat z upravené diferenciální rovnice rovnováhy (4.21).

$$\bar{\sigma}_y = \bar{\sigma}_r + \frac{d\bar{\sigma}_r}{dr}(1+r) \quad (4.30)$$

Podle (4.26) lze psát

$$\bar{\sigma}_r = \frac{C_5 \left(\frac{n}{3n-1} \cdot r^{\frac{3n-1}{n}} + \frac{2n}{2n-1} r^{\frac{2n-1}{n}} \right) + C_4}{r^2 + 4r + 4}.$$

Pak $\frac{d\bar{\sigma}_r}{dr} =$

$$= \frac{C_5 \left(r^{\frac{2m-1}{m}} + r^{\frac{m-1}{m}} \right) (r+2)^2 - \left(C_5 \frac{m}{3m-1} r^{\frac{3m-1}{m}} + C_5 \frac{2m}{2m-1} r^{\frac{3m-1}{m}} + C_4 \right) (2r+4)}{(r+2)^4},$$

$$\frac{d\bar{\sigma}_r}{dr} (1+r) = \frac{C_5 \left(r^{\frac{2m-1}{m}} + r^{\frac{m-1}{m}} \right) (r+1)}{(r+2)^2} - \frac{\bar{\sigma}_r (r+2)^2 (2r+4) (r+1)}{(r+2)^4} =$$

$$= C_5 r^{\frac{m-1}{m}} \left(\frac{r+1}{r+2} \right)^2 - \bar{\sigma}_r \cdot \frac{2r^2+6r+4}{(r+2)^2}.$$

Teď při známých hodnotách $\bar{\sigma}_r$ bude

$$\bar{\sigma}_y = \bar{\sigma}_r \left(1 - \frac{2r^2+6r+4}{(r+2)^2} \right) + C_5 r^{\frac{m-1}{m}} \left(\frac{r+1}{r+2} \right)^2, \quad (4.31)$$

kde $C_5 = \frac{2C_2}{h} = \frac{2}{h} \left(\frac{3\eta \bar{M}}{\pi h^2 g_0} \right)^{\frac{1}{m}}. \quad (4.32)$

4.2.6.5. Výpočet normálního napětí $\bar{\sigma}_y$

Normální napětí $\bar{\sigma}_y$ je možno vypočítat z diferenciální rovnice rovnováhy (4.5) po dosazení za τ_{ry} a $\frac{\partial \tau_{ry}}{\partial r}$

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_y}{\partial y} = -\frac{\tau_{ry}}{r} + \frac{\partial \tau_{ry}}{\partial r} \cdot \frac{1+r}{r}, \quad (4.33)$$

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_y}{\partial y} = -C_1 y^{\frac{1}{m}} \cdot r^{-\frac{m+1}{m}} - C_1 y^{\frac{1}{m}} \cdot r^{-\frac{m+1}{m}} \cdot \frac{(1+r)}{m \cdot r},$$

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_y}{\partial y} = -C_1 y^{\frac{1}{m}} \cdot r^{-\frac{m+1}{m}} \left(1 + \frac{1+r}{m \cdot r} \right).$$

Po integraci dostaneme

$$\bar{\sigma}_y = -\frac{m \cdot C_1}{m+1} y^{\frac{m+1}{m}} \cdot r^{-\frac{m+1}{m}} \left(1 + \frac{1+r}{m \cdot r} \right) + C_6. \quad (4.34)$$

Pro určení konstanty C_6 provedme následující obecnou úvahu. Z podmínky $\tau_{yr} = 0$ získáme rovnici roviny a přímky, podél kterých se tavenina plastické hmoty chová jako ideální, s rovnoměrným tlakem pro všechny směry, neboť zde chybějí tečná napětí. Ze vztahu pro tečné napětí

$$(\tau_{yr} = C_1 y^{\frac{1}{m}} \cdot r^{-\frac{1}{m}} = 0)$$

vyplývá rovnice roviny $\sigma : z = 0$ a rovnice osy $y : r = 0$

Pak pro všechny body roviny σ o souřadnicích (y, r, θ) platí při napjatosti souměrné podle osy y

$$\sigma_r(r, y=\bar{y}) = \sigma_y(r, y=\bar{y}) = \sigma_\varphi(r, y=\bar{y}) \quad (4.35)$$

a pro všechny body osy y o souřadnicích $(y, \bar{r}, \bar{\theta})$ platí

$$\sigma_r(r=\bar{r}, y) = \sigma_y(r=\bar{r}, y) = \sigma_\varphi(r=\bar{r}, y). \quad (4.36)$$

Pro náš případ použijeme vztahu (4.36)

Pak z rovnice (4.26) dostaneme při zanedbání velikosti poloměru vtoku

$$\bar{\sigma}_r(r=\bar{r}) = \frac{C_4}{4} = p_0. \quad (4.37)$$

Stejný výsledek obdržíme i z rovnice (4.31) pro σ_y

$$\bar{\sigma}_y(r=\bar{r}) = \bar{\sigma}_r(r=\bar{r}) - \frac{C_4}{4} = p_0 \quad (4.38)$$

Podle (4.36)

$$\sigma_y(r=\bar{r}) = C_6 = \frac{C_4}{4} = p_0 \quad (4.39)$$

a normální napětí ve směru osy y při zanedbání velikosti poloměru vtoku

$$\sigma_y = p_0 - \frac{n C_1}{n+1} y^{\frac{n+1}{n}} \cdot r^{-\frac{n+1}{n}} \left(1 + \frac{1+r}{n \cdot r}\right). \quad (4.40)$$

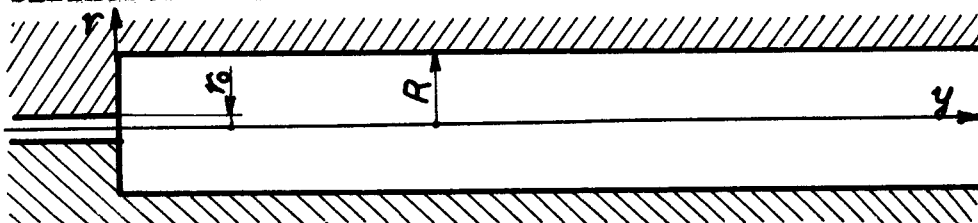
Jestliže velikost poloměru vtoku nezanedbáme, pak dosadíme do vztahu (4.39) za C_4 ze (4.28).

4.3. Řešení napjatosti v tavenině plastické hmoty při vstřikování tyčinky kruhového průřezu

4.3.1. Předpoklady řešení

1. Proudění je isotermické, stacionární a laminární.
2. Vstřikovaná tavenina polymeru je homogenní, nepružná a nestlačitelná tekutina.
3. Setrvačné a gravitační síly zanedbáme
4. Při výpočtu smykového napětí uvažujeme po celé délce tečení plně vyvinutý parabolický rychlostní profil.
5. Napjatost je souměrná podle osy vtoku y .
6. Zanedbáme zakřivení fronty tečení, které vznikne jako důsledek vlnové podstaty proudění.

7. Nebudeme se blíže zabývat oblastí v bezprostřední blízkosti vtoku.



Obr.19

7.3.2. Rozbor napjatosti v obecném místě tekoucí taveniny

Případ vstřikování tyčinky kruhového průřezu je možno řešit analogicky s předešlým případem. Proto byl zachován i původní souřadný systém a označení jednotlivých napětí. Platí tedy i zde dříve odvozené vztahy pro sdužené tečné napětí.

$$\left. \begin{aligned} \tau_{ry} = \tau_{yr} &= \eta^{\frac{1}{n}} \left(\frac{\partial c_r}{\partial y} + \frac{\partial c_y}{\partial r} \right)^{\frac{1}{n}}, \\ \tau_{ry} = \tau_{yr} &= \eta^{\frac{1}{n}} \left(\frac{\partial c_r}{\partial y} + \frac{\partial c_y}{\partial r} \right)^{\frac{1}{n}}, \\ \tau_{yy} = \tau_{yy} &= \eta^{\frac{1}{n}} \left(\frac{\partial c_y}{\partial y} + \frac{\partial c_y}{\partial y} \right)^{\frac{1}{n}}. \end{aligned} \right\} (4.41)$$

Stejně budou i velikosti elementárních plošek podle obr.14.

$$dS_1 = r dy dy,$$

$$dS_2 = r dy dy + dr dy dy,$$

$$dS_3 = r dr dy,$$

$$dS_4 = dr dy.$$

4.3.3. Odvození diferenciálních rovnic rovnováhy

Protože proudění předpokládáme stacionární, teče časově neproměnné, a průřez kruhové tyčinky je po celé její délce stejný platí pro střední rychlost při daném průřezu

$$S = \pi R^2 \quad) \quad (4.42)$$

$$\text{že } \bar{c} = \frac{\int_0^R c_y dr}{2R} = \frac{V}{\pi R^2} = \frac{\bar{M}}{\pi R^2 \rho} \quad (4.43)$$

$$\text{Rychlosti } c_y = c_r = v. \quad (4.44)$$

Potom tečná napětí podle (4.41) budou

$$\left. \begin{aligned} \tau_{ry} - \tau_{ry} &= \eta \frac{1}{r} \left(\frac{dc}{dy} \right)^{\frac{1}{n}}, \\ \tau_{ry} = \tau_{yr} = \tau_{yy} = \tau_{yy} &= 0. \end{aligned} \right\} (4.45)$$

což je opět výsledek shodný s předchozím případem. Pro-
to dříve odvozené diferenciální rovnice rovnováhy budou
platit i pro tento případ. Bude tedy:
diferenciální rovnice rovnováhy do směru osy y

$$\tau_{ry} + \frac{\partial \tau_{ry}}{\partial r} (1+r) + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \cdot r = 0. \quad (4.46)$$

a diferenciální rovnice rovnováhy do radiálního směru

$$\sigma_y - \sigma_r - \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} (1+r) + \frac{\partial \tau_{ry}}{\partial y} \cdot r = 0. \quad (4.47)$$

4.3.4 Řešení diferenciálních rovnic rovnováhy

Protože máme pouze dvě rovnice pro čtyři neznámé,
musíme najít další dva vztahy, podobně jako v případě
plochého kruhového kotouče.

Nejprve odvoďme závislost τ_{ry} analogicky s pře-
dešlým případem.

4.3.4.1. Výpočet tečného napětí τ_{ry}

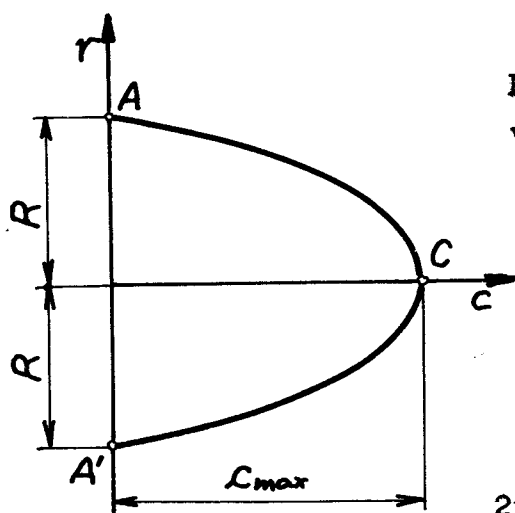
Podle (4.9) a obr. 16 je střední rychlost prou-
dění taveniny

$$\bar{c} = \frac{2}{3} c_{max} \quad (4.48)$$

Dosaďme za $\bar{c}$ ze (4.43) a vyjádřeme maximální rychlost

$$c_{max} = \frac{3}{2} \bar{c} = \frac{3\bar{M}}{2\pi R^2 \rho} \quad (4.49)$$

Ze stejného důvodu, jako v předešlém případě / totiž
složitosti derivace $\frac{\partial \tau_{ry}}{\partial r}$ / použijeme i zde metodu,
při níž rovnicí rychlostní paraboly spočteme pomocí
dvou bodů, jimiž prochází.



Obr.20

Rovnice paraboly (podle obr.20)
v souřadnicích c, r je obecně

$$r^2 = -2p(c - c_{\max}),$$

$$r^2 = -2pc + 2pc_{\max},$$

$$c = c_{\max} - \frac{r^2}{2p}. \quad (4.50)$$

$2p$ zjistíme z okrajové podmínky,
při dosazení za $c_{\max}$. Pro bod A
platí: $c = 0, r = R$

$$0 = c_{\max} - \frac{R^2}{2p}.$$

dosadíme za $c_{\max}$ ze (4.49)

$$\frac{3\bar{M}}{2\pi R^2 \cdot p} = \frac{R^2}{2p};$$

odtud $2p = \frac{2\pi R^4 \cdot p}{3\bar{M}}$

a rychlost c ve směru osy y

$$c = \frac{3\bar{M}}{2\pi R^2 \cdot p} - r^2 \cdot \frac{3\bar{M}}{2\pi R^4 \cdot p}. \quad (4.51)$$

Protože se rychlost s rostoucím poloměrem zmenšuje, bude
 $\frac{\partial c}{\partial r}$ záporné. Abychom dostali τ_{yr} v absolutních hodnotách,
zavedeme i zde do mocninového zákona záporné znaménko.

Pak

$$\tau_{yr} = -\left(\eta \frac{dc}{dr}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{3\bar{M}\eta}{\pi R^4 \cdot p}\right)^{\frac{1}{n}} \cdot r^{\frac{1}{n}},$$

$$\tau_{yr} = C_7 \cdot r^{\frac{1}{n}}. \quad (4.52)$$

Maximální tečné napětí při stěně formy ($r = R$)

$$\tau_m = C_7 \cdot R^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{3\bar{M} \cdot \eta}{\pi R^3 \cdot p}\right)^{\frac{1}{n}}. \quad (4.53)$$

4.3.4.2. Výpočet normálního napětí σ_y

Normální napětí σ_y je možno vypočítat z diferen-
ciální rovnice rovnováhy (4.46) po dosazení za τ_{yr} a $\frac{d\tau_{yr}}{dr}$

$$\frac{\partial \tau_y}{\partial y} = - \frac{\tau_y}{r} - \frac{d\tau_y}{dr} \frac{1+r}{r}, \quad (4.54)$$

$$\frac{\partial \tau_y}{\partial y} = - C_7 r^{\frac{1-m}{m}} - \frac{C_7}{m} r^{\frac{1-m}{m}} \frac{1+r}{r}.$$

Po integraci

$$\tau_y = -y C_7 r^{\frac{1-m}{m}} \left(1 + \frac{1+r}{m \cdot r} \right) + C_8. \quad (4.55)$$

Integrační konstantu C_8 určíme z okrajové podmínky:

pro $y = 0$ a $r = 0$ je $\tau_y = p_0$, kde p_0 je vstřikovací tlak v ústí vtoku.

Tedy $C_8 = p_0$.

$$\text{a } \tau_y = p_0 - y \cdot C_7 r^{\frac{1-m}{m}} \left(1 + \frac{1+r}{m \cdot r} \right), \quad (4.56)$$

$$\text{kde } C_7 = \left(\frac{3M\eta}{\pi R^4 p_0} \right)^{\frac{1}{m}} \quad (4.57)$$

Z rovnice (4.56) je zřejmé, že pro dané r klesá τ_y podle rovnice přímky.

4.3.4.3. Určení normálních napětí σ_y a σ_r

Dif. rovnice rovnováhy do radiálního směru představuje vazbu mezi těmito normálními napětími. V obecném případě, když $\tau_{yr} = \tau_{yr}(r, y)$

$$\sigma_y - \sigma_r - \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} (1+r) + \frac{\partial \tau_{yr}}{\partial y} \cdot r = 0. \quad (4.58)$$

Přijmeme-li často zaváděný předpoklad (5), (3), že

$$\sigma_r = \sigma_y \quad (4.59)$$

$$\text{pak } \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} (1+r) = \frac{\partial \tau_{yr}}{\partial y} \cdot r$$

$$\text{a } \sigma_r - \sigma_y = \int \frac{\partial \tau_{yr}}{\partial y} \cdot \frac{r}{1+r} dr + f(y). \quad (4.60)$$

Funkci $f(y)$ lze určit z následující úvahy:

Z podmínky $\tau_{yr} = 0$ vyplne rovnice osy y : $r = 0$, podél které se tavenina chová jako ideální, tedy s rovnoměrným tlakem pro všechny směry, neboť zde chybějí tečná napětí. Pak pro všechny body této čáry o souřadnicích $(y, r=0)$ platí

$$\sigma_r(r=0) = \sigma_y(r=0) = \sigma_p(r=0). \quad (4.61)$$

Tato úvaha platí zcela obecně pro dutiny formy ve tvaru libovolného rotačního tělesa, kde $\tau_{yr} = \tau_{yr}(r, y)$.

V našem případě uvažujeme tyčinku s neproměnným

průřezem, tedy při stacionárním proudění také s nepreměnným rychlostním profilem. Zde τ_{yr} je pouze funkcí poloměru r a nezávisí na y .

$$\tau_{yr} = \tau_{yr}(r), \quad \frac{\partial \tau_{yr}}{\partial y} = 0. \quad (4.62)$$

Pak při zavedení předpokladu (4.59) s přihlédnutím ke (4.62) zredukuje se diferenciální rovnice rovnováhy do radiálního směru na

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = 0. \quad (4.63)$$

Po integraci

$$\sigma_r = \sigma_y = K. \quad (4.64)$$

Konstanta K z rovnice (4.64) odpovídá funkci $f(y)$ v obecném vztahu (4.60).

Spočteme ji z podmínky (4.61). Podle (4.56) je

$$\sigma_y(r = r) = p = K.$$

Tedy při vstřikování tyčinky kruhového průřezu za uvedených předpokladů budou normální napětí

$$\sigma_r = \sigma_y = p. \quad (4.65)$$

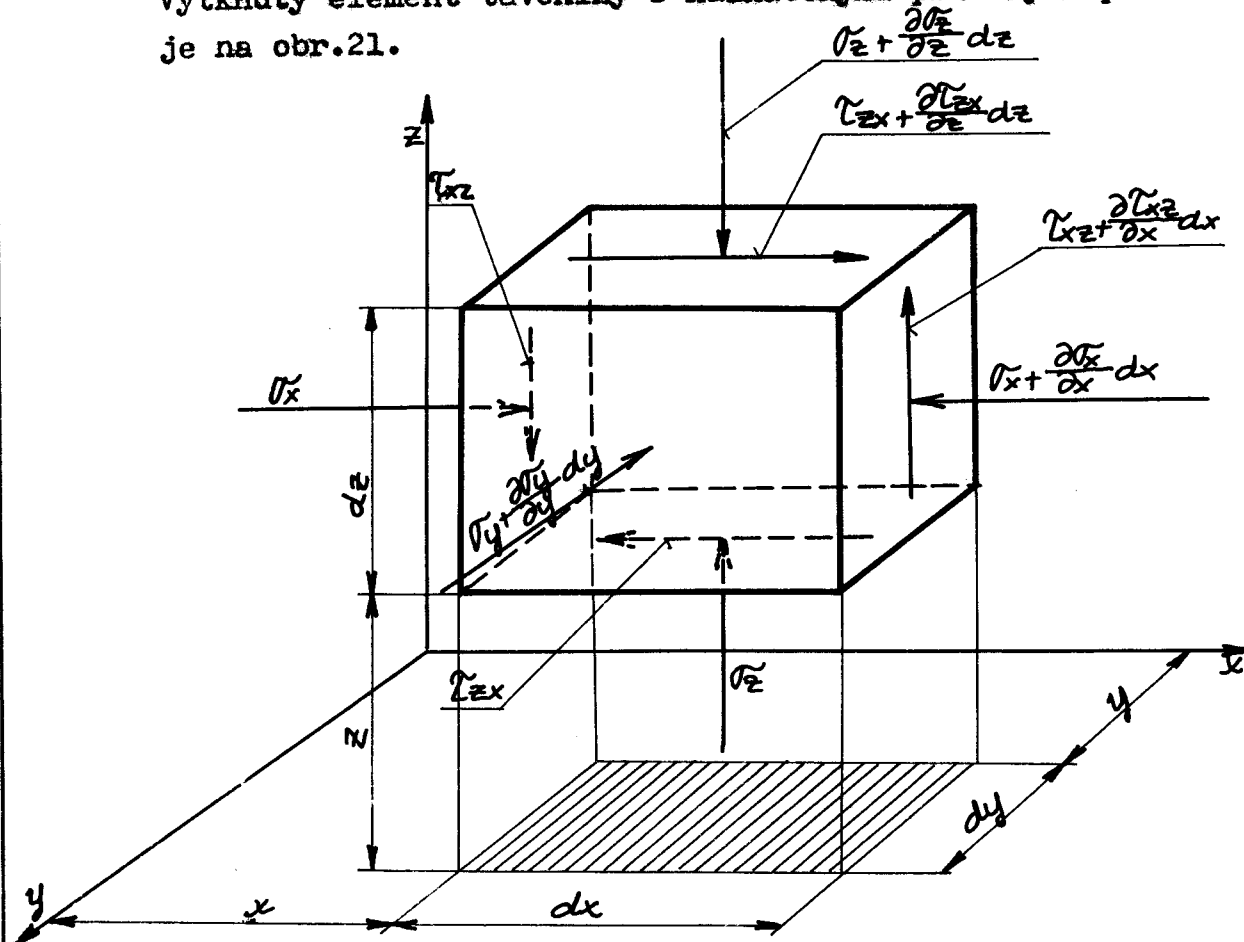
4.4. Řešení napjatosti v tavenině plastické hmoty při vstřikování ploché tyče obdélníkového průřezu

4.4.1. Předpoklady pro řešení

1. Proudění je izotermické, stacionární a laminární.
 2. Vstřikovaná tavenina plastické hmoty je homogenní, nepružná a nestlačitelná tekutina.
 3. Setrvačné a gravitační síly zanedbáme
 4. Při výpočtu smykového napětí uvažujeme po celé délce tečení plně vyvinutý parabolický rychlostní profil.
 5. Šířka výstřiku je podstatně větší, než jeho tloušťka.
- Rozeberme případ paralelního proudu mezi dvěma nekonečně velikými rovnoběžnými rovinami. Odpovídá to skutečnému případu, kdy je dutina formy ve tvaru ploché tyče plněna pomocí podélného zářezu.

4.4.2 Rozbor napjatosti v obecném místě tekoucí taveniny

Vytknutý element taveniny s naznačenými průběhy napětí je na obr.21.



Obr.21

Předpokládáme stacionární proudění, tedy $\frac{\partial c}{\partial t} = 0$

I v tomto případě platí obecné vztahy odvozené pro sdružená tečná napětí.

Rychlosti $c_y = c_z = 0$, $c_x = c(z)$.

Tečná napětí

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \eta^{\frac{1}{n}} \left(\frac{\partial c}{\partial z} \right)^{\frac{1}{n}} = \eta^{\frac{1}{n}} \left(\frac{dc}{dz} \right)^{\frac{1}{n}}, \quad (4.66)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau_{yz} = \tau_{zy} = 0.$$

4.4.3. Odvození diferenciálních rovnic rovnováhy

S použitím (4.66) napíšeme podmínky rovnováhy sil

do směrů souřadných os

Rovnováha působících sil do směru osy x

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \cdot dx dy dz - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz dx dy = 0.$$

Vydělíme-li obě strany rovnice součinem $dx \cdot dy \cdot dz$, dostaneme diferenciální rovnici rovnováhy ve směru pohybu taveniny:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}. \quad (4.67)$$

Z rovnováhy sil do směru osy y vyplývá

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0. \quad (4.68)$$

Diferenciální rovnice rovnováhy ve směru osy z

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x}. \quad (4.69)$$

4.4.4. Odvození tečného napětí τ_{zx}

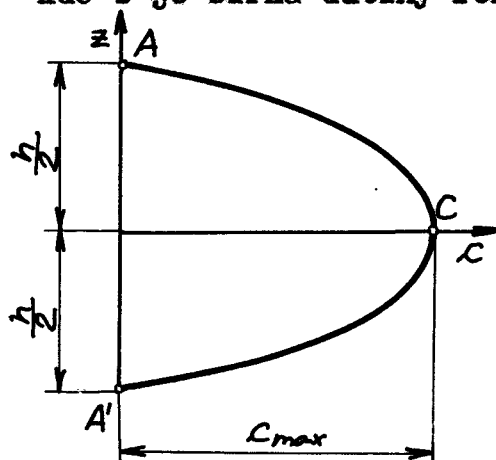
Analogicky s předešlými případy je možno vyjádřit střední rychlost pohybu taveniny

$$\bar{c} = \frac{2}{3} c_{max} - \frac{2}{h} \int_0^{\frac{h}{2}} c \cdot dr = \frac{V}{b \cdot h} = \frac{M}{b \cdot h \cdot \rho} \quad (4.70)$$

a maximální rychlost pohybu taveniny

$$c_{max} = \frac{3}{2} \bar{c} = \frac{3M}{2bh\rho}. \quad (4.71)$$

kde b je šířka dutiny formy a h její výška.



Obr. 22

Rovnice rychlostní paraboly podle obr. 22 v souřadnicích c, z je obecně

$$z^2 = -2p(c - c_{max}),$$

$$z^2 = -2pc + 2pc_{max},$$

$$c = c_{max} - \frac{z^2}{2p}. \quad (4.72)$$

Hodnotu $2p$ zjistíme z okrajové podmínky při dosazení za c_{max}

Pro bod A platí : $C = 0$, $z = \frac{h}{2}$

$$\gamma = C_{\max} - \frac{h^2}{42p}.$$

Dosaďme nyní za $C_{\max}$ ze (4.71)

$$\frac{3\bar{M}}{2bh\rho} = \frac{h^2}{42p}.$$

Odtud

$$2p = \frac{2bh^3\rho}{12\bar{M}} = \frac{bh^3\rho}{6\bar{M}}.$$

a rychlost c ve směru osy x

$$c = \frac{3\bar{M}}{2bh\rho} - z^2 \frac{6\bar{M}}{bh^3\rho}. \quad (4.73)$$

Tečné napětí

$$\tau_{zx} = \left(\eta \frac{dc}{dz} \right)^{\frac{1}{n}} = - \left(\frac{12\bar{M}\eta}{bh^3\rho} \right)^{\frac{1}{n}} \cdot z^{\frac{1}{n}},$$

$$\tau_{zx} = -C_9 \cdot z^{\frac{1}{n}}. \quad (4.74)$$

Maximální smykové napětí

$$\tau_m = -C_9 \left(\frac{h}{2} \right)^{\frac{1}{n}} = - \left(\frac{6\bar{M}\eta}{bh^3\rho} \right)^{\frac{1}{n}}. \quad (4.75)$$

4.4.5 Odvození vztahu pro normální napětí σ_x

Řešme diferenciální rovnici rovnováhy (4.67)
za použití (4.73):

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = - \frac{C_9}{n} \cdot z^{\frac{1-n}{n}}; \quad (4.76)$$

po integraci

$$\sigma_x = - \frac{C_9}{n} \cdot z^{\frac{1-n}{n}} x + C. \quad (4.77)$$

Integrační konstantu C určíme z okrajové podmínky:

pro $z = 0$ a $x = 0$ je $\sigma_x = p_0$, kde p_0 je vstřikovací tlak
v místě vtoku.

$$\text{Pak } C = p_0$$

a normální napětí ve směru osy x

$$\sigma_x = p_0 - \frac{C_9}{n} \cdot z^{\frac{1-n}{n}} \cdot x. \quad (4.78)$$

VŠST Liberec	Řešení napjatostě při vstřikování termoplastů	Katedra MT
Fakulta strojní		DP-ST/745/69-40

Ze vztahu (4.78) je zřejmé, že pro dané z klesá σ_x s odlehlostí x podle rovnice přímky.

4.4.6. Odvození normálních napětí σ_y a σ_z

Výpočet dalších dvou normálních napětí σ_y a σ_z provedeme za předpokladu, že

$$\sigma_y = \sigma_z \quad (4.79)$$

Z podmínky $\tau_{yz} = 0$ vypočteme rovnici roviny σ : $z = 0$, podél které se tavenina chová jako ideální tekutina, tedy s rovnoměrným tlakem pro všechny směry, neboť zde chybějí tečná napětí. Pro všechny body roviny σ o souřadnicích $x, y, z = 0$ platí:

$$\sigma_x(z=0) = \sigma_y(z=0) = \sigma_z(z=0) \quad (4.80)$$

a podle (4.77)

$$\sigma_x(z=0) = p_0 \quad (4.81)$$

Z diferenciální rovnice rovnováhy (4.68) vyplývá, že napětí σ_y není funkcí proměnné y . Z diferenciální rovnice rovnováhy (4.69) zase vyplývá, že napětí σ_z není funkcí proměnné z . Za předpokladu (4.79) tedy platí, že σ_y a σ_z jsou po celém průřezu formy konstantní, tedy tu hodnotu, kterou mají při $z=0$, mají i ve všech ostatních místech. Pak tedy podle (4.80) a (4.81) lze psát:

$$\sigma_y = \sigma_z = p_0 \quad (4.82)$$

4.5. Seznam konstant použitých při výpočtu

$$C_1 = \left(\frac{6 \eta \bar{M}}{\pi h^3 \rho} \right)^{\frac{1}{n}}$$

$$C_2 = C_1 \left(\frac{h}{2} \right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{3 \eta \bar{M}}{\pi h^2 \rho} \right)^{\frac{1}{n}}$$

$$C_3 = C_1 \frac{2n}{(n+1)h} \left(\frac{h}{2} \right)^{\frac{n+1}{n}}$$

$$C_4 = p_0 (r_0 + 2)^2 - C_5 \left(\frac{n}{3n-1} r_0^{\frac{n-1}{n}} + \frac{2n}{n-1} r_0^{\frac{2n-1}{n}} \right) \doteq 4 p_0$$

$$C_5 = \frac{2C_2}{h}$$

$$C_6 = \frac{C_4}{4} \doteq p_0$$

$$C_7 = \left(\frac{3 \eta \bar{M}}{\pi R^4 \rho} \right)^{\frac{1}{n}}$$

$$C_8 = p_0$$

$$C_9 = \left(\frac{12 \eta \bar{M}}{b h^3 \rho} \right)^{\frac{1}{n}}$$

VŠST Liberec	Řešení napjatosti při vstřikování termoplastů	Katedra MT
Fakulta strojní		DP-ST/745/69-42
5. <u>OBECNÝ POSTUP ŘEŠENÍ NAPJATOSTI V TAVENINĚ PLASTICKÉ HMOTY PŘI VSTŘIKOVÁNÍ TERMOPLASTŮ</u> 5.1. <u>Zjednodušená metoda s použitím parabolického rychlostního profilu</u> Rozepišme si metodu použitou v této práci na jednotlivé body. - Ujasníme si , o jaký případ jde z hlediska geometrického tvaru formy. Složené tvary rozdělíme na jednoduché úseky, které pak řešíme samostatně s tím, že řešení následujícího úseku vždy vychází z výsledků předešlého. - Stanovíme všechny zjednodušující předpoklady pro řešení, které se týkají hlavně: - charakteru proudění v dutině formy - vlastností vstřikované taveniny polymeru - zanedbání objemových sil - zavedení parabolického rychlostního profilu - rozboru souměrnosti případu - zanedbání složitých dějů v místech náhlé změny průřezu - rozboru případu z hlediska vlnové modelové představy - Vhodně zvolíme souřadný systém a na vytknutém elementu taveniny znázorníme všechna napětí normální a tečná pro obecný případ volného proudění. - Kinematickým rozбором případu získáme složky rychlostí ve směrech souřadných os, pomocí nichž pak vypočteme normální napětí za použití zákona pro sdružená tečná napětí. - Napišeme podmínky rovnováhy působících sil do směrů souřadných os a vhodnými úpravami z nich získáme diferenciální rovnice rovnováhy. - Samostatně vyřešíme průběh tečných napětí při použití předpokladu parabolického rychlostního profilu . Při tom je postup následující: - pomocí rovnice kontinuity a vzorce pro výpočet plochy parabolické úseče stanovíme maximální rychlost C_{max}.		

- b) dvěma body : A ($c = 0$, $y = y_{\max}$)
C ($C_{\max}$, $y = 0$)

proložíme obecnou rovnici paraboly

- c) derivaci vztahu pro rychlost z b) použijeme v mocninovém zákoně k výpočtu tečného napětí

7. Vztah pro tečné napětí dosadíme do diferenciálních rovnic rovnováhy.

8. Provedeme řešení diferenciálních rovnic rovnováhy
K tomu je možno použít

- a) podmínky rovnosti dvou normálních napětí ve směrech kolmých k hlavnímu pohybu
- b) podmínky rovnosti všech normálních napětí podél ploch nebo křivek získaných z podmínky $\tau = 0$
- c) podmínky rovnováhy pro nějaký speciální element taveniny (například u kruhového kotouče jsme stanovili podmínku rovnováhy pro element o výšce h rovné tloušťce stěny)

9. V případě potřeby provedeme vyčíslení vztahů a jejich grafické zobrazení. Protože se zde nejedná o aproximační metodu, je možno pro získání křivky vypočítat samostatně hodnotu několika bodů a jimi pak proložit graf.

5.2. Metoda vycházející z derivace mocninového zákona

Je to vlastně jediná správná exaktní metoda ke zjišťování napěťových závislostí. V této práci nebyla použita proto, že výpočet podle ní by byl příliš obtížný pro exponenciální tvar mocninového zákona.

Pro případ, že by někdo pokračoval v práci na tomto problému, provedu zde rozbor uvedené metody na příkladu ploché tyče s proměnnou tloušťkou.

Dosadíme do diferenciální rovnice rovnováhy (4.67)
za τ_x z mocninového zákona:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \frac{\eta}{n} \left(\frac{\partial c}{\partial z} \right)^{\frac{1-n}{n}} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial z^2} \quad (5.1)$$

předpokládejme, že řešením této rovnice byla získána závislost $c = c(x, z, \frac{\partial \phi}{\partial x})$. K určení $\frac{\partial \sqrt{\lambda}}{\partial x}$ použijeme ještě podmínky kontinuity.

Vteřinová průtočná hmota

$$M = \bar{c} \cdot b h(x) \rho = b \cdot \rho \int_0^{h(x)} c(x, y, \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}) dz; \quad (5.2)$$

odkud lze vyjádřit derivaci $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}$, z níž separací proměnných a integrací dostaneme: $\sigma_x = \sigma_x(x, z)$. (5.3)

Integrační konstantu je možno zjistit z okrajové podmínky $\sigma_x(x=0, z=0) = p_0$.

Dosadíme-li nyní za $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}$ do vztahu pro rychlost, získáme závislost $c = c(x, z)$, (5.4)

pomocí níž vypočteme průběh tečných napětí

$$\tau_{zx} = \eta^{\frac{1}{n}} \left(\frac{\partial c(x, z)}{\partial z} \right). \quad (5.5)$$

Z podmínky $\tau_{zx}(x, z(x))$ zjistíme čáry, podél kterých tečná napětí vymizí: $z_0 = z_0(x)$. (5.6)

Nyní budeme přibližně předpokládat, že se kapalina podél těchto křivek chová jako ideální, s rovnoměrným tlakem pro všechny směry, neboť zde chybějí tečná napětí.

Bude tedy pro všechny body $(x, z(x))$ platit:

$$\sigma_x(x, z(x)) = \sigma_y(x, z(x)) = \sigma_z(x, z(x)). \quad (5.7)$$

Za předpokladu, že napětí $\sigma_y = \sigma_z$, (5.8)

bude

$$\sigma_z - \sigma_y = \int \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} dz + f(x). \quad (5.9)$$

Funkcí $f(x)$ lze určit z podmínky

$$\sigma_x(x, z(x)) = \sigma_z(x, z(x)). \quad (5.10)$$

6. MOŽNOSTI EXPERIMENTÁLNÍHO STUDIA NAPJATOSTI V TAVENINĚ VSTŘIKOVANÉ PLASTICKÉ HMOTY

6.1. Stručný rozbor problému

Protože při vstřikování plastických hmot jde o procesy v uzavřené formě, je možno měřit pouze normální napětí, která jsou kolmá ke stěně formy. K tomuto účelu jsou konstruována speciální tlaková čidla, která jsou schopna ve spojení s oscilografem poměrně spolehlivě zjistit i časový průběh normálních napětí. Ovšem jediná metoda, která je schopna dát přehled o stavu napjatosti v celém uvažovaném objemu je metoda fotoelasticimetrická. O vhodnosti použití této metody svědčí fakt, že termoplasty používané při vstřikování jsou většinou v nebarveném stavu průhledné.

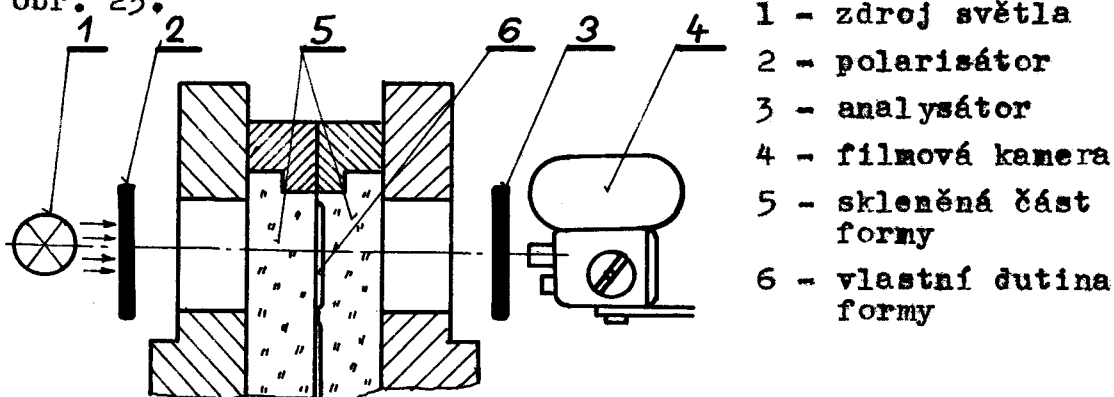
6.2. Nepřímá fotoelasticimetrická metoda

Zřejmě nejvhodnější bude metoda zmrazovací, pomocí níž se řeší prostorové případy v nauce o pružnosti a pevnosti. Jestliže totiž vstřikovací proces vhodným způsobem přerušíme a necháme vychladnout a ztuhnout taveninu v níž působí napětí, pak i tuhý výrobek podrží tu napjatost, jakou měla tavenina. Je ovšem nutno uvážit, do jaké míry se tu uplatní relaxační jevy.

6.3. Přímá fotoelasticimetrická metoda

Princip této metody je zřejmý ze schematu na

obr. 23.



Obr. 23

VŠST Liberec	Řešení napjatosti při vstřikování termoplastů	Katedra MT
Fakulta strojní		DP-ST/745/69-46

Jde tu vlastně o přímé, kontinuální pozorování procesu plnění dutiny formy. Z filmového záznamu je možno získat přehled o průběhu isoklin v pohledu kolmém na největší plochu výstřiku.

Před zavedením této metody bude nutné předem vyzkoušet, jestli se u dané plastické hmoty projeví dočasný dvojlom od zatížení i v tekutém stavu. Dá se to zjistit velice jednoduše následujícím způsobem.

Kádinku nebo zkumavku s granulovanou plastickou hmotou nahříváme tak dlouho, až granule roztají a tavenina dosáhne potřebné vstřikovací teploty. Pak plastickou hmotu zatížíme třeba tím způsobem, že do taveniny ponoříme skleněnou tyčinku. V polarisátoru pak zjistíme, jestli v tavenině vznikají isokliny.

Pro přímou fotoelasticimetrickou metodu by bylo nutné zkonstruovat speciální formu se skleněnými vložkami v nichž by byla vypracována vlastní dutina formy. Konstrukce zkušební formy by byla závislá hlavně na použitém vstřikovacím lisu a tedy na možnosti přístupu k průhledovým otvorům.

Je tu pochopitelně mnoho dalších zajímavých problémů konstrukčního rázu a problémů vhodné volby materiálu, kterými se nebudeme zabývat.

7. ZÁVĚREČNÉ ZHODNOCENÍ ZÍSKANÝCH VÝSLEDKŮ A DOPORUČENÍ DALŠÍ POSTUP

V této práci byla řešena napjatost v tavenině vstřikované plastické hmoty pro isothermický proces. Získaný obecný postup se dá při použití stejných zjednodušujících předpokladů snadno aplikovat i na další obecnější případy (myslí se hlavně výstřiky s proměnnou tloušťkou stěny).

Práce měla charakter čistě teoretický. Bylo by vhodné pokračovat v řešení daného tématu a ověřit pokusně teoreticky získané vztahy pomocí experimentů. Z toho důvodu byly navrženy některé metody, pomocí nichž by se dala studovat napjatost uvnitř formovací dutiny.

Bylo by jistě zajímavé srovnání tohoto řešení s výsledky získanými pomocí jiných metod za použití jiných předpokladů - tedy například při uvažování neisothermického proudění uvnitř dutiny formy (4) nebo při uvažování elasticity taveniny (5).

VŠST Liberec	Řešení napjatosti při vstřikování termoplastů	Katedra MT
Fakulta strojní		DP -ST/745/69-48

8. SEZNAM OBRÁZKŮ

Obr.č.:	Název	List č.:
1	Vznik tečného napětí v proudící tekutině	7
2	Vzájemná závislost smykové rychlosti a tečného napětí pro newtonské a Bighamské hmoty	8
3	Mechanický model pro demonstraci reologických vlastností Bighamských hmot	8
4	Závislost zdánlivé viskozity na smykové rychlosti.	9
5	Grafické zobrazení mocninového zákona v logaritmických souřadnicích	10
6	Vzájemná závislost smykové rychlosti a tečného napětí v logaritmických souřadnicích	11
7	Časový průběh poměrného prodloužení taveniny polystyrenu o teplotě 110°C při působení různě velkých tahových napětí	11
8	Porevnání teoretického tvaru čelní fronty s výsledky získanými experimentálně na plochých tyčích o tloušťkách $4 \cdot 10^{-3}$ m a $1 \cdot 10^{-3}$ m	13
9	Tok určený formou a tok určený strojem	13
10	Schema dutiny formy	17
11	Rozbor napjatosti pro vytknutý element taveniny ..	17
12	Pomocný obrázek pro odvození zákona sdružených tečných napětí	18
13	Předpokládaná deformace elementárního hranolku ...	19
14	Označení elementárních plošek	20
15	Směr působení normálního napětí σ_y	22
16	Parabolický rychlostní profil pro laminární proud	24

VŠST Liberec	Řešení napjatosti při vstřikování termoplastů	Katedra MT
Fakulta strojní		DP-ST/745/69-49
Obr.č.:	Název	list č.:
17	Rychlostní parabola	25
18	Napjatost pro element taveniny o výšce h	27
19	Schema dutiny formy s označením smeru souřadných os	32
20	Rychlostní parabola	34
21	Rozbor napjatosti pro vytknutý element taveniny ..	37
22	Rychlostní parabola	38
23	Schema navržené přímé fotoelasticimetrické metody.	45

VŠST Liberec	Řešení napjatosti při vstříkovaní termoplastů	Katedra MT
Fakulta strojní		DP -ST/745/69-50
9. <u>SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY</u> (1) Kalinčev, E.L. - Levin, A.N. : Osnovnyje procesy protěkájuščije v letěvoj formě (PLASTIČESKIE MASSY 1962, č.3) (2) Bartěněv, G.M. : Zakonoměrnosti i mechanizm vjaz-ko-vo těčenia lineárnych polymerov (PLASTIČESKIE MASSY 1964, č.22) (3) Vinogradov, G.V. - Prozorovskaja, N.V. : Reologičnyje svojstva bločnovo polystyrola (PLASTIČESKIE MASSY 1966 , č.2) (4) Kazankov, I.V. - Basev, N.I. : Rasčet formujemosti pri neizotermálnom těčenií amorfnovo polymera v litěvoj formě (MECHANIKA POLYMEROV 1968, č.1) (5) Meißner, J. : Die Kunststoffschmelze als elastische Flüssigkeit (SONDERDRUCK AUS DER ZEITSCHRIFT KUNSTSTOFFE) (6) Bauer, W. : Der Formfüllvorgang beim Spritzguß von Thermoplasten (KUNSTSTOFFE 1963 , č.4) (7) Höschl, C. - Mevald, J. : PRUŽNOST A PEVNOST PRO TEXTILNÍ INŽENÝRY (VŠST 1966) (8) Höschl, C. : PRUŽNOST A PEVNOST II (SNTL 1964) (9) Smetana, J. : Hydraulika (NČSAV 1957) (10) Brůha, O. : ÚVOD DO NAUKY O PROUDĚNÍ A TEPLĚ (SNTL 1963) (11) Plávka, I. : ZÁKLADY PRŮDENIA (SNTL 1966) (12) Szabó, I. : MECHANIKA TUHÝCH TĚLES A KAPALIN (SNTL 1967)		

Vysoká škola: strojní a textilní

Katedra: technologie a slévárenství

Fakulta: strojní

Školní rok: 1968/1969

DIPLOMOVÝ ÚKOL

pro Zdeňka H y k š e

odbor strojírenská technologie

Protože jste splnil..... požadavky učebního plánu, zadává Vám vedoucí katedry ve smyslu směrnic ministerstva školství o státních závěrečných zkouškách tento diplomový úkol:

Název tématu: Studium podmínek modelování tepelných dějů při
tuhnutí jednoduchých odlitků v keramických
skořepinových formách

Pokyny pro vypracování:

- 1) Sledujte stávající způsoby modelování podmínek tuhnutí odlitků v pískových formách a metody analogového výpočtu.
- 2) Proveďte rozbor základních podmínek podobnosti pro sledování těchto dějů a vytkněte jejich fyzikální význam.
- 3) Experimentálně a početně stanovte závislost hodnot tepelné akumulace formy b_F při teplotách tuhnutí několika různých slitin v jednoduché zasypané keramické formě a sledujte též vliv předehrátí formy, příp. předehrátí slitiny.
- 4) Pokuste se o zobecnění naměřených výsledků a případnou technologickou aplikaci na stávající výrobní způsob.
- 5) Pokuste se o návrh technologicky výhodného způsobu modelování poměrů při tuhnutí odlitků v keramických formách s případným návrhem na vhodný způsob analogového výpočtu.

Autorské právo se řídí směrnicemi MŠK pro státní závěrečné zkoušky č. j. 51 727/62-III/2 ze dne 13. července 1962 - Věstník MŠK XVIII, sešit 24 ze dne 31. 8. 1962 a 19 autorského zákona č. 115/53 Sb.

VYSOKÁ ŠKOLA STROJNÍ A TEXTILNÍ
Centrální knihovna
LIBEREC 1, STUDENTSKÁ 5

V 39/1969