Technická univerzita v Liberci

PEDAGOGICKÁ FAKULTA

Katedra: matematiky a didaktiky matematiky

Obor: matematika - anglický jazyk

STRATEGIE ŘEŠENÍ ÚLOH VYBRANÝCH PARTIÍ V 7. TŘÍDĚ ZŠ

Diplomová práce 98 - PF - KMD - 008

Autor:

Ondřej Bažant

Podpis: Ondřej Baž

Adresa: U věže 413/5, 460 01 LIBEREC 2

Vedoucí práce: RNDr. Daniela Bittnerová, CSc.

Počet

Stran	Obrázků	Tabulek	Příloh
36	10	10	11

V Liberci dne 30. 3. 1998

Technická univerzita v Liberci
FAKULTA PEDAGOGICKÁ
461 17 LIBEREC 1, Hálkova 6 Telefon: 5227 111 Fax: 5227 332

Katedra: matematiky a didaktiky matematiky

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

(závěrečného projektu)

diplomant: Ondřej BAŽANT

adresa: Hermannova 72/2, 460 01 LIBEREC 1

obor: matematika - anglický jazyk

Název: STRATEGIE ŘEŠENÍ ÚLOH VYBRANÝCH PARTIÍ V 7. TŘÍDĚ ZŠ

Vedoucí práce: RNDr. Daniela Bittnerová, CSc.

Termín odevzdání: květen 1997

Pozn.: Podmínky pro zadání práce jsou k nahlédnutí na katedrách. Katedry rovněž specifikují zadání: východiska, cíle, předpoklady, metody zpracování, základní literaturu (zpravidla na rub tohoto formuláře). Zásady pro zpracování DP jsou k dispozici ve dvou verzích (stručné, resp. metodické pokyny) v UKN TU, na katedrách a na Děkanátě Fakulty pedagogické.

V Liberci dne 29.10.1996

.... Doc. RNDr. Jaroslav Vild
vedoucí katedry *děkan*

Převzal (diplomant):

Datum: Podpis:

Prohlášení o původnosti práce:

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně a že jsem uvedl veškerou použitou literaturu.

Liberec, 30. 3. 1998

Ondřej Bažant

Poděkování:

Děkuji všem, kteří mi pomáhali při práci a povzbuzovali mě při jejím dokončení. Poděkovat chci především vedoucí práce RNDr. D. Bittnerové za trpělivost, s jakou mně poskytovala cenné rady, své sestře Janě za technickou pomoc a své ženě Ivetě a dceři Kristýně za motivaci a morální podporu.

Prohlášení k využívání výsledků DP:

Jsem si vědom těchto skutečností:

a) Diplomová práce je majetkem školy,
b) s diplomovou prací nelze bez svolení školy disponovat,
c) diplomová práce může být zapůjčena či objednána (kopie) za účelem využití jejího obsahu.

Beru na vědomí, že po pěti letech si mohu diplomovou práci vyžádat v Univerzitní knihovně TU v Liberci, kde bude uložena.

Ondřej Bažant
Adresa: U věže 413/5, 460 01 LIBEREC 2
Podpis:

STRATEGIE ŘEŠENÍ ÚLOH VYBRANÝCH PARTIÍ V 7.TŘÍDĚ ZŠ

Resumé

Práce se zabývá žákovskými strategiemi při řešení kombinatorických úloh v 7. třídě ZŠ. Pro žáky to jsou problémové úlohy, protože kombinatorika není náplní učebních osnov ZŠ. Zkoumá se tedy, jaký volí žáci postup při řešení takových úloh a jak jsou při něm úspěšní. Dále se hodnotí četnost použití jednotlivých strategií a jejich úspěšnost ve čtyřech různých úlohách. Zjištěné výsledky jsou zachyceny celkem v devíti tabulkách a grafech. Zvlášť jsou vyhodnoceny jednotlivé úlohy, po nichž následuje celkový přehled řešení úloh. Přiložen je seznam literatury vztahující se ke kombinatorice. V příloze jsou ukázky žákovských prací.

Summary

STRATEGY

This work deals with pupils' strategies of solving combinatoric tasks in the 7th grade on primary schools. Those tasks are for pupils problematic ones because they are not taught in primary schools. Which strategy pupils choose when solving such tasks and how successful they are is investigated. What else is examined is frequency of every single strategy and its success in four different tasks. The known results are shown in nine charts and graphs. The tasks themselves are assessed first then the overall survey of solving task follows. A list of consulted literature dealing with combinatorics is added. In the appendicitis there are examples of pupils' works.

Resümee

Diese Studie umfasst die schülermässige Strategie, wie die kombinatorischen Übungsstücke durch die Schüler von 7-ten Klassen der Grundshule auflösen werden. Das bedeutet für die Schüler ein Problem, da die Kombinatorik keine Grundschulethema ist. Man untersucht also, was für eine Metode die Schüler wählen, um solche Übungsstücke aufzulösen und erfolgreich werden. Ferner bewertet man eizeln die Strategie - Häufigkeit und den Erfolg bei der Auflösung von vier verschiedenartigen Übungsstücke. Die festgelegten Angaben wurden in zehn Tabellen und Diagramme eingetragen. Separat wurden einzelne Übungsstückedaten verarbeitet und es folgt Totalübersicht von der Übungslösungen. Beigelegte Liste der Literatur, die auf die Kombinatorik bezüglich ist. Die Schülerarbeiten als Vorbild gelten – siehe Beilage.

OBSAH:

I. Cíl a předmět práce

A. Kombinatorika na základní škole

Cílem práce je prozkoumat v omezeném rozsahu strategie řešení kombinatorických úloh žáky na základní škole. Výuka kombinatoriky není obsažena v osnovách základní školy, ale žáci se s ní mohou přesto setkat. Úlohy tohoto typu jsou například ve sbírkách úloh (označeny jako obtížnější), součást matematických olympiád, pythagoriád nebo se objevují jako zajímavé úlohy na konci hodiny ve volném čase nebo v suplovaných hodinách.

Obecně lze tedy říci, že i když se žáci postup řešení těchto úloh neučí, občas je počítají a jsou většinou schopni dosáhnout nějakého výsledku, ať už logickým postupem nebo intuitivním chápáním problému. Je tedy jen na nich, jak se s nimi vypořádají a jaký postup zvolí. Pro nás může být zajímavé zkoumat, jaké postupy řešení jsou nejčastější a jak jsou při nich žáci úspěšní.

Ve své práci jsem se zaměřil na tuto záležitost na úrovni sedmých tříd ZŠ, kde by měli být žáci schopni řešit už i složitější problémové úlohy. Předpokládal jsem použití různých metod řešení kombinatorických úloh, převládat by mělo používání názorných řešení, tj. vykreslování a vypisování kombinací a variací.

B. Kombinatorika – teorie

Předmětem kombinatoriky je řazení prvků do množin různými způsoby. Nezáleží přitom na povaze věcí, jež jsou prvky množiny, ale jen na počtu prvků množiny a na jejich rozlišení, čehož se dosahuje pomocí označení.

Slovník spisovné češtiny pro školu a veřejnost, který vydalo nakladatelství Academia r. 1978, vysvětluje kombinatoriku jako matematický obor zabývající se uspořádáním daných prvků do skupin podle jistých pravidel.

Na školské úrovni se skutečně dá říci, že se kombinatorika zabývá studiem různých výběrů (posloupností, skupin či sestav), jejichž členy jsou prvky dané (zpravidla konečné) množiny.

B. 1. Kombinace

Teoreticky má pro nás samozřejmě největší význam obecné určení počtu všech kombinací k-té třídy z n prvků.

Definice: Nechť M je n prvková množina a k, n ($k \leq n$) jsou nezáporná celá čísla. Potom k-prvkové podmnožiny množiny M nazýváme **kombinace *k*-té třídy z *n* prvků** (množiny M). Jejich počet budeme označovat jako $\mathbf{C}_k(\boldsymbol{n})$.

Nyní znázorníme postup, jakým zjistíme počet všech těchto kombinací $C_k(n)$.

1) Vytvoříme všechny možné kombinace třídy (k-1) z n prvků (k = n); jejich počet je $C_{k-1}(n)$.
2) Dále ke každé takové kombinaci přidáme postupně každý z $n - (k - 1) = n - k + 1$ prvků, které kombinace neobsahuje (vždy jen jeden).
3) Získáme tak všechny možné kombinace k-té třídy, jejich počet je $C_k(n)$ a každou tuto kombinaci vezmeme k–krát.

   Příklad tvoření kombinací k-té třídy podle výše uvedeného vzoru:

   ke kombinaci 2 3 ... (k - 1) k přidáme číslo 1,

   ke kombinaci 1 3 ... (k - 1) k přidáme číslo 2,

   ke kombinaci 1 2 4 ... (k - 1) k přidáme číslo 3,

   .

   .

   .

   ke kombinaci 1 2 4 ... (k - 1) přidáme číslo k.

4) Z 3) vyplývá, že z každé kombinace třídy (k – 1), jichž je celkem $C_{k-1}(n) = \binom{n}{k-1}$, dostaneme $n - k + 1$ nových kombinací k – té třídy, jejichž celkový počet je k.

   Proto tedy platí : $k \cdot \binom{n}{k} = (n - k + 1) \cdot \binom{n}{k-1}$

5) Při opakovaném použití této rovnice dostáváme vztah:

$$k\binom{n}{k-1} = (n-k+1)\,.\binom{n}{k-1}$$

$$(k-1)\,.\binom{n}{k-1} = (n-k+2)\,.\binom{n}{k-2}$$

$$(k-2)\,.\binom{n}{k-2} = (n-k+3)\,.\binom{n}{k-3}$$

$$\vdots$$

$$2\quad\binom{n}{2} = (n-1)\,.\binom{n}{1}$$

$$1\quad\binom{n}{1} = n\quad\binom{n}{0}$$

Vynásobíme zvlášť všechny levé a zvlášť všechny pravé strany mezi sebou a jako výsledek se objeví:

$$1\,.\,2\,.\,\ldots\,.k\,.\binom{n}{1}.\binom{n}{2}.\,\ldots\,.\binom{n}{k} = n\,.(n-1)\,.\,\ldots\,.(n-k+1)\,.\binom{n}{0}.\binom{n}{1}.\,\ldots\,.\binom{n}{k-1}$$

Celou tuto rovnici vykrátíme čísly $\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{k-1}$ a nový vztah se objeví ve tvaru:

$$\binom{n}{k} = \frac{n.(n-1).....(n-k+1)}{1.2.....k}$$

Další úpravy (např. použití symbolu pro faktoriál, rozšíření pravé strany) výraz zjednoduší:

$$\frac{n.(n-1).....(n-k+1)}{k!}\,.\,\frac{(n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!\,.\,k!}$$

Nyní můžeme počet všech kombinací vyjádřit pomocí vztahu:

$$C_k(n) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,.\,k!}\,.$$

Z výše uvedeného o kombinacích vyplývá:

1) Kombinace k-té třídy z n prvků jsou skupiny o k prvcích. Přitom prvky v každé takové skupině musí být různé. Protože je to zřejmě jediný rozdíl, plyne z toho, že pokud se dvě skupiny liší pouze pořadím svých prvků, a nikoliv svým obsahem, jsou stejné.
2) Každá n-prvková množina má pouze jednu n-prvkovou podmnožinu, a to sebe samu.

$$C_n(n) = \binom{n}{n} = 1$$

Protože budeme pro další zápis potřebovat zvláštní symbol, zavedeme ho už nyní: Je dáno přirozené číslo n ($n > 1$) . Symbolem $n!$ (čteme "en faktoriál") označujeme součin všech čísel menších nebo rovných n, tzn. $n! = 1.2.3. \ldots . n$.

Počet všech kombinací označujeme $C_k(n)$.

B. 2. Permutace

V rámci kombinací se konečná množina chápe jako souhrn vůči sobě nijak neuspořádaných prvků. Přesto však často potřebujeme vyšetřovat množiny, jejichž prvky jsou určitým způsobem uspořádány. Někdy je nutné hovořit o uspořádaní prvků v dané skupině. Například uspořádané dvojice čísel [2,3] a [3,2], jestliže je chápeme jako souřadnice bodů v pravoúhlé soustavě souřadnic, reprezentují dva různé body roviny.

Už z dříve uvedeného je zřejmé, že množina M, která má n prvků, má jedinou kombinaci n-té třídy. Můžeme hledat všechna možná taková uspořádání prvků v kombinaci n-té třídy množiny M, tj. všech uspořádaných n-tic. Tyto skupiny se nazývají **permutace** množiny M. Počet permutací z n prvků množiny M označujeme symbolem $P(n)$. Počet všech těchto permutací n prvků z množiny M lze vyjádřit jako

M = { $a_1, a_2, \ldots , a_n$ }, kde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jsou prvky množiny M.

Předpokládáme, že existují všechny permutace k prvků množiny M a jejich počet je $P(k)$. Nechť $a_1, a_2, a_3, \ldots ,a_{k-1}, a_k$ je jedna z nich. Pro utvoření permutace k+1 prvků množiny M budeme prvek s indexem k+1 vkládat na všechna možná místa v této permutaci. Takových míst je k+1, a proto z každé permutace , která má k prvků, vznikne k+1 permutací s k+1 prvky, takže :

$$P(k+1) = (k+1)\ P(k)$$

Při postupném dosazování za k = 1,2, ... , n-1 dostaneme rovnosti:

$$P(2) = 2\ P(1)$$

$$P(3) = 3\ P(2)$$

.

.

.

$$P(n-1) = (n-1)\ P(n-2)$$

$$P(n) = n\ .\ P(n-1)$$

Vynásobením všech levých a všech pravých stran dostaneme vztah :

$$P(2)\ .\ P(3)\ .\ ...\ .\ P(n\text{-}1)\ .\ P(n) = 2\ P(1)\ .\ 3\ P(2)\ .\ ...\ .\ (n\text{-}1)\ P(n\text{-}2)\ .\ n\ .\ P(n\text{-}1)$$

Čísla P(2), P(3), ... , P(n -1) se vykrátí, takže nám vyjde konečný vztah :

$$P(n) = 1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ ...\ .\ (n\text{-}1)\ .\ n = n!$$

(Uspořádanou n-tici prvků chápeme jako synonymum s konečnou posloupností.)

B. 3. Variace

Je dána množina M = {a,b,c,d} a množina N = {a,c,d}, která je podmnožinou množiny M. Je to její tříprvková část. Pak *acd, adc, cda, cad, dac, dca* jsou všechny permutace ze tří prvků této podmnožiny, tzn. všechny skupiny ze tří prvků dané množiny.

V každé skupině jsou tytéž prvky, ale v různém pořadí. Zřejmě nás bude zajímat, kolik takových permutací můžeme vytvořit.

Permutace kombinací třetí třídy množiny M = {a,b,c,d} se nazývají variace třetí třídy množiny M.

Máme dánu množinu M s n prvky (n náleží do oboru celých kladných čísel) a k patří do oboru přirozených čísel. Přitom $k = n$. **Variace *k*-té třídy z *n* prvků** (množiny M) jsou skupiny o k prvcích vybrané z n prvků množiny M tak, že každé dvě skupiny, které se liší jen pořadím prvků, považujeme za různé. Tzn., že variace k-té třídy jsou uspořádané k-tice prvků množiny M.

Počet všech těchto variací k-té třídy z n prvků množiny M budeme označovat symbolem $V_k(n)$. Jaký je počet těchto variací k-té třídy z n prvků množiny M (M = $\{1,2, \ldots , k\}$) ?

Uvažujeme libovolnou kombinaci k-té třídy množiny M. Počet všech možných permutací k prvků kombinace $1,2, \ldots , k$ je $k!$. Jsou to variace vytvořené ze stejných prvků, liší se jen jejich uspořádáním. Zřejmě z každé z $\binom{n}{k}$ kombinací k-té třídy dostaneme $k!$ variací k-té třídy, které ovšem budou různé. Z toho tedy vyplývá, že počet různých variací k-té třídy z n prvků množiny M bude :

$$V_k(n) = \binom{n}{k} . k! = \left(\frac{n!.k!}{(n-k)!.k!}\right) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Pokud $k = n$, je $V_n(n) = n!$, což je vlastně počet permutací z n prvků.

II. Testy

A. Podmínky zadávání

V rámci pedagogické praxe jsem žákům tříd 7.A, 7.B, 7.C ZŠ Husova tř., Liberec, zadal k řešení celkem čtyři různé kombinatorické úlohy formou domácího úkolu, s tím, aby se co nejlépe snažili zachytit svůj postup řešení. Zadávání probíhalo buď během přestávky a přesahovalo až do následující hodiny, nebo přímo na začátku vyučovací hodiny. V každém případě se tak dělo se souhlasem vyučujících a po předchozí domluvě s nimi. Žáci dostali zadání úloh na papírech formátu A4 s texty napsanými na stroji a měli vždy dostatek klidu k případnému zapsání instrukcí nebo kladení dotazů. Přesto, že jsem pokyny vždy aspoň jednou zopakoval a žáci působili soustředěně a tvrdili, že zadání rozumějí, vždy se vyskytly případy, kdy se jako řešení na papíru objevil pouze výsledek. Tyto případy jsem řešil doplňujícími otázkami a poznámkami o postupu řešení.

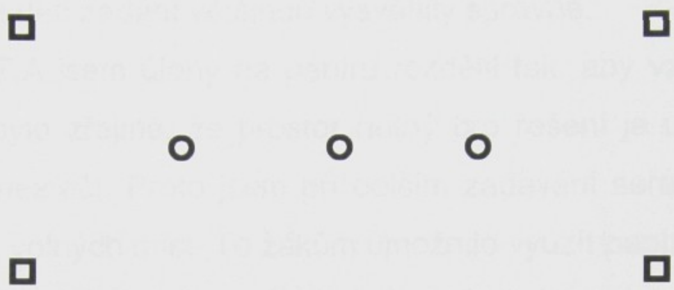
B. Vlastní testy

B.1. Texty úloh

Úloha č. 1: Mnohým lidem se zdá prodej jízdenek na železnici velmi jednoduchý. Nemají ale tušení, s jakým počtem jízdenek se pracuje i na malých stanicích. Cestující musí dostat lístek z každé stanice do kterékoli jiné. Představme si trať s 25 stanicemi. Kolik různých druhů jízdenek potřebuje železnice pro tuto trať?

Úloha č. 2: Máme k dispozici pět látek různých barev. Kolik různých tříbarevných vlajek z nich můžeme sešít, když budeme kousky látek používat jen jako svislé pruhy?

Úloha č. 3: V cihelně jsou tři výrobní střediska a čtyři sklady. Od každého střediska má vést úzkokolejka ke každému skladišti. Máte určit nejmenší počet křižovatek a navrhnout plán.



Úloha č. 4: Kolika způsoby lze proštípnout jízdenku s políčky uspořádanými do čtverce 3x3, pokud budeme vždy proštipovat jen 3 políčka?

1	2	3
4	5	6
7	8	9

B.2. Úprava testů

Zadávání úloh probíhalo ve dvou etapách. V první - třída 7.A - jsem vybral úlohy č. 1 o počtu jízdenek, č. 2 o počtu vlajek a č. 3 o počtu křižovatek v továrně. Tuto poslední jsem pak pro třídy 7.B a 7.C nahradil úlohou o počtu možností proštípnutí jízdenky, protože úloha č. 3 se nezdála být dostatečně přínosná pro můj záměr. Při jejím řešení nebyli žáci nuceni vymýšlet žádné strategie řešení. Myslím si, že nová úloha o kombinaci proštipování je z hlediska zkoumání žákovských metod řešení kombinatorických úloh mnohem cennější.

Dodatečně jsem si uvědomil, že některá zadání nebyla jednoznačná, i když jsem je převzal z výše uvedené literatury. Například v úloze č. 2 nebylo výslovně uvedeno, že lze sestrojovat i "neexistující" vlajky a že žádnou barvu nelze použít dvakrát. Přesto si děti zadání většinou vysvětlily správně.

Pro třídu 7.A jsem úlohy na papíru rozdělil tak, aby vznikl určitý prostor pro řešení. Později bylo zřejmé, že prostor nutný pro řešení je u každého žáka jiný a navíc často ani nestačí. Proto jsem při dalším zadávání seřadil texty úloh za sebe bez vynechávání volných míst. To žákům umožnilo využít papír tak, jak potřebovali, a kromě toho mohli úlohy řešit v jakémkoli pořadí bez psychologického omezení prostorem určeným k zachycení postupu.

C. Výsledky úloh a jejich rozbor

C.1. Úloha č. 1

C. 1. a. Správné řešení

Protože máme 25 stanic, z každé z nich lze zakoupit jízdenky do 24 jiných. To můžeme udělat celkem 25x. Proto počet možných jízdenek získáme tak, že vynásobíme 25x24. Výsledek je 600 možných jízdenek.

C. 1. b. Předpokládaný postup

Od žáků jsem očekával v podstatě dvojí řešení. Jedno bylo pouhé vypisování možných existujících lístků, což bylo jistě časově náročné a pracné, ale ne tak promyšlené jako to druhé, výše uvedené řešení.

C. 1. c. Žákovské strategie a jejich hodnocení

Žáci se většinou dopracovali ke správnému výsledku. Z celkového počtu 34 dětí jich 24 označilo za výsledek 600 jízdenek, což je 70,6% úspěšnost. Zbývající počet 10 žáků (29,4%) zahrnuje i řešení, ve kterých žáci považují jízdenku z A do B za tutéž jako z B do A. Zahrnul jsem tato řešení do špatných, přestože považuji za svoji chybu, že jsem dětem předem nevysvětlil, že to jsou dvě různá řešení. Mohu jen poznamenat, že v této podobě je ona úloha vytištěna i ve výše zmíněné publikaci a že jsem se opět dopustil chyby v tom, že jsem spoléhal na odbornost tištěného textu i co se didaktické stránky týká.

Z 24 správných řešení bylo 21 dosaženo čistě od začátku řešení pomocí úvahy, že z každé stanice lze zakoupit jízdenku do 24 jiných. Protože to lze provést v každé stanici, je těchto stanic celkem 25. Z toho dostaneme prostým násobením 24x25 = 600. Příkladem tohoto postupu je řešení žákyně Seifertové ze 7. A. (Viz příloha P1).

Někteří žáci došli k této úvaze postupně tak, že začali vypisováním jednotlivých možností, a pak si uvědomili onu zákonitost. Takto si počínal například žák Baxa a další dva žáci ze třídy 7.C. (Viz příloha P2).

Někteří další z těch, co použili metodu vypisování možností, chybovali v tom, že místo kombinací počítali variace. Tyto děti si buď fyzicky vypisovaly do sloupečku možnosti 1-2...25, 2-3...25, ..., 23-24, 25, 24-25, čímž jim vyšel výsledek 300, anebo se k témuž výsledku dopracovaly tím, že jen na papíře sčítaly počty variací: 24+23+...+2+1=300 (žákyně Žohová). Celkem takto postupovalo pět dětí. (Viz příloha P3).

Při tomto sčítání se lze ovšem dopustit i numerické chyby (žákyně Hiklová - výsledek 210 jízdenek).

U některých žáků lze jen těžko věřit tomu, co uvádějí na papíře a co tvrdili i mně při osobním rozhovoru, totiž, že výsledek neopsali, a že je to jen výsledek jejich práce a naznačeného postupu řešení – např. práce žákyně Mrázkové. (Viz příloha P4).

Objevilo se i řešení 574 jízdenek (24^2), zdůvodněné tím, že prý nelze zakoupit jízdenku ze stanice 1 do stanice 1. Proto $(25-1)_2$ = 576. Tento postup se vyskytl celkem ve dvou pracích. Například práce Patrného z třídy 7.B.

Řešení s výsledkem 576 se objevilo ještě jednou jako výsledek správné úvahy, ovšem s numerickou chybou.

Ve třídě 7.A se objevilo ještě jedno nesprávné řešení s výsledkem 250 druhů jízdenek .

C. 1. d. Srovnání skutečných a předpokládaných postupů a výsledků

Na poměrnou snadnost úlohy lze usuzovat jednak z velkého počtu správných řešení (24 ze 34), ale i z toho, že žáci volili ve většině případů správných řešení podobné strategie (úvaha 1, úvaha 2). To může naznačovat i to, že se tyto strategie nabízejí jako nejzřejmější a tudíž snad i pro žáky nejlehčí. Srovnání jednotlivých strategií co do úspěšnosti při řešení úlohy je shrnuto v následující tabulkách a grafech.

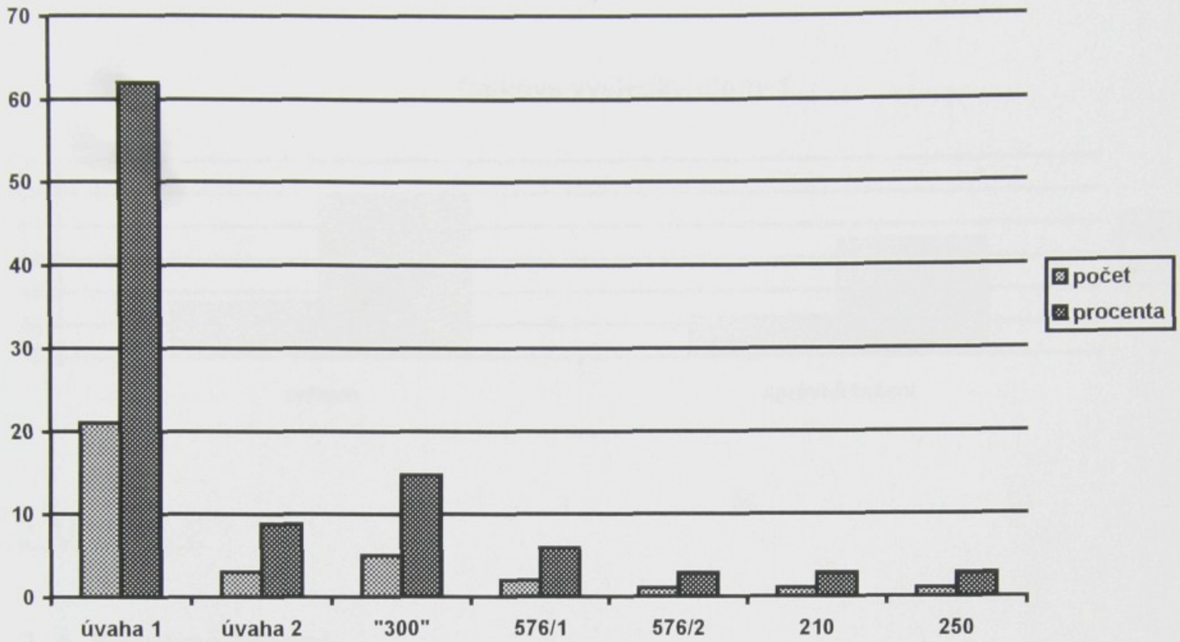
C. 1. e. Úspěšnost jednotlivých strategií v úloze č. 1

Zde (v tabulce a grafu č. 1) se budeme zabývat porovnáváním úspěšnosti jednotlivých strategií jednotlivých v poměru k celkovému počtu řešení.

TABULKA č. 1

	úvaha 1	úvaha 2	300	576/1	576/2	210	250
počet	21	3	5	2	1	1	1
procenta	61,765	8,8235	14,7	5,88	2,94	2,94	2,94

GRAF č. 1



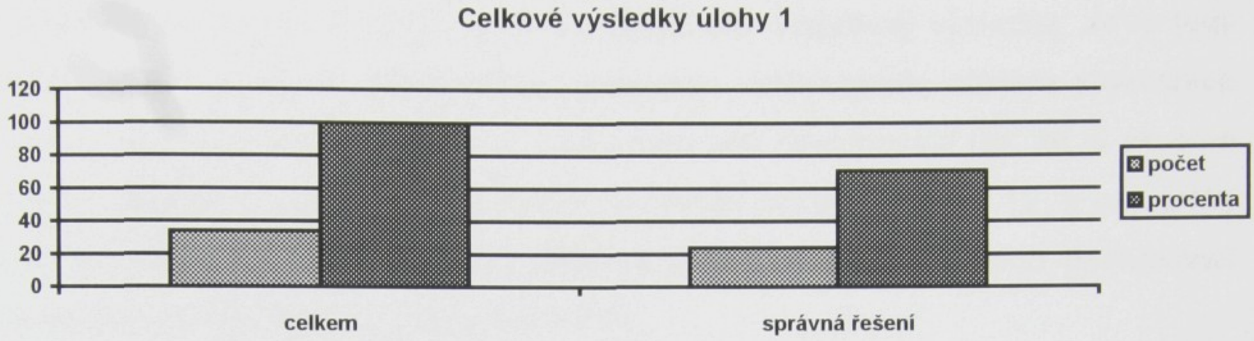
C. 1. f. Úspěšnost žákovských řešení

V následující tabulce a poté i v grafu, který ji znázorňuje, si ukážeme celkovou úspěšnost řešení úlohy č. 1, tj. počet žáků, který řešil tuto úlohu a tu část, která se dostala ke správnému řešení.

TABULKA č. 2

	celkem	správná řešení
počet	34	24
procenta	100	70,6

GRAF č. 2



C. 2. Úloha č. 2

C. 2. a. Správné řešení

Je dáno 5 prvků (barev), ze kterých máme sestavovat trojice. V tomto případě záleží na pořadí, jedná se tedy o variace. Protože nebudeme používat jednu barvu na jedné vlajce dvakrát, použijeme vzorec pro výpočet variací bez opakování

$$V_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Počet barev na vlajce $k = 3$, celkový počet barev $n = 5$. Po dosazení čísel do vzorce dostaneme

$$V_3(5) = \frac{5!}{(5-3)!} = 60.$$

Výsledek je 60 možných (i "neexistujících") vlajek.

C. 2. b. Předpokládaný postup

U této úlohy jsem si nebyl zcela jistý, co mám očekávat, protože úloha je znatelně složitější než ta předešlá. S jistotou jsem čekal jen ono známé vypisování, (případně kreslení).

C. 2. c. Žákovské strategie a jejich hodnocení

Tuto úlohu řešilo opět 34 žáků, z nich 14 (41,2 %) dosáhlo správného výsledku 60 vlajek, ale 20 žáků (58,8 %) vypočítalo nesprávný výsledek. Je to tedy zřejmě pro děti poměrně těžká úloha. I přesto se však objevila některá překvapivá řešení a bylo zajímavé je posuzovat. Velká část dětí postupovala tak, že si zkusmo vypsala všechny možnosti u jedné barvy na prvním místě, vyšlo jim 12, a pak tento počet jen vynásobila pěti a získala celkový počet vlajek - 60. Takto postupovali Hampacher a Kleibl ze 7.A. (Viz příloha P5).

Myslím, že tento postup je překvapivě vyspělý a ukazuje na jisté matematické myšlení oněch žáků.

Další použitou strategií bylo vypisování nebo dokonce vykreslování všech 60 možností (Hiklová, Wachová). (Viz příloha P6).

U některých se i přes názornost této metody objevily chyby, například numerická v práci Kračmarové. (Viz příloha P7).

Několik žáků si opět neuvědomilo rozdíl mezi variací a kombinací (přesto, že tyto pojmy neznají nebo je nepoužívají, měli by je při řešení rozlišovat), a z tohoto důvodu došli k výsledku 30 vlajek, protože výsledek 231 pro ně byl tentýž jako 312. Takto postupovaly například Žohová a Seifertová. (Viz příloha P8).

Zřejmě proto, že byla tato úloha pro žáky opravdu nezvyklá, bylo pro většinu z nich obtížné ji nějak vyřešit. Zřejmě vůbec nevěděli jak postupovat a volili nesmyslné strategie, jako například " 5 . 5 . 3 = 75 ", " 3 . 5 = 15 ", anebo vůbec ani nevěděli jak začít. Objevily se také asi tři případy, kdy žáci korigovali své výsledky podle světového atlasu vlajek jen na existující. (Viz příloha P9).

Tento poslední výsledek považuji čistě za svoji chybu proto, že jsem zadal nejasné instrukce. Tato možnost mě totiž vůbec nenapadla, protože jsem se plně spoléhal na správnost zadání v knize.

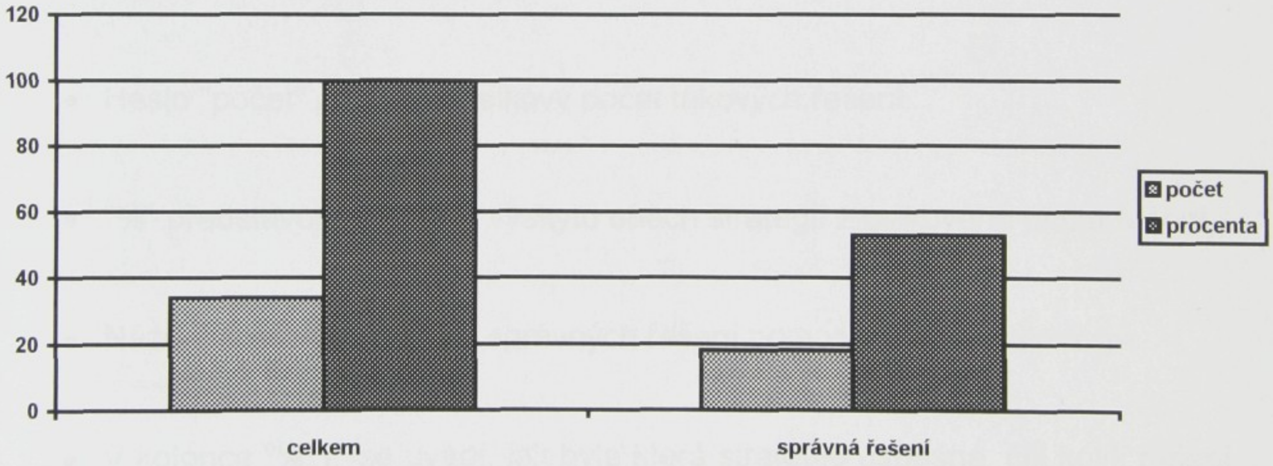
C. 1. d. Úspěšnost řešení v úloze č. 2

Nejdříve si tedy ukážeme celkovou úspěšnost žáků při řešení této úlohy:

TABULKA č. 3 - Úloha č. 2

	celkem	správná řešení
počet	34	18
procenta	100	52,9

GRAF č. 3 - Úloha č. 2



C. 2. e. Hodnocení úspěšnosti použitých postupů

Nyní si v tabulce a grafu č. 5 názorně ukážeme četnost použití jednotlivých strategií v úloze č. 2 a také jejich úspěšnost. Pro vysvětlení bych rád dodal, že:

- Počtu řešení strategie č. 1 představuje postup, při kterém žáci nejdříve spočítali množství vlajek v jedné typické skupině, které pak vynásobili počtem těchto skupin.

- Č. 2 je vykreslování nebo vypisování možností.

- Č. 3 jsou nesmyslná řešení. Z postupu zachyceného na papíru s řešením není vůbec jasné, jak žáci postupovali.

- Č. 4 je mně neznámý postup, který vypadá částečně jako vykreslování a ve kterém se najednou objevilo jako výsledek číslo 60. Možná je to jen opsané. Bohužel jsem už neměl možnost to zjistit.

- Č. 5 představuje počet "nulových" řešení. Žáci vůbec nezačali. Uvádím je jen pro doplnění do celkového počtu.

- Heslo "počet" znamená celkový počet takových řešení.

- "%" představuje procento výskytu oněch strategií z celkového počtu řešení.

- Název "správně" je počet správných řešení pomocí každé ze strategií.

- V kolonce "% 1" se uvádí, jak byla která strategie úspěšná, čili kolik řešení s použitím určité strategie bylo správných.

- Řádek "% 2" říká, jak byla která strategie celkově úspěšná, tedy procento správných řešení vzhledem k celkovému.

TABULKA č. 4 - Strategie v úloze č. 2

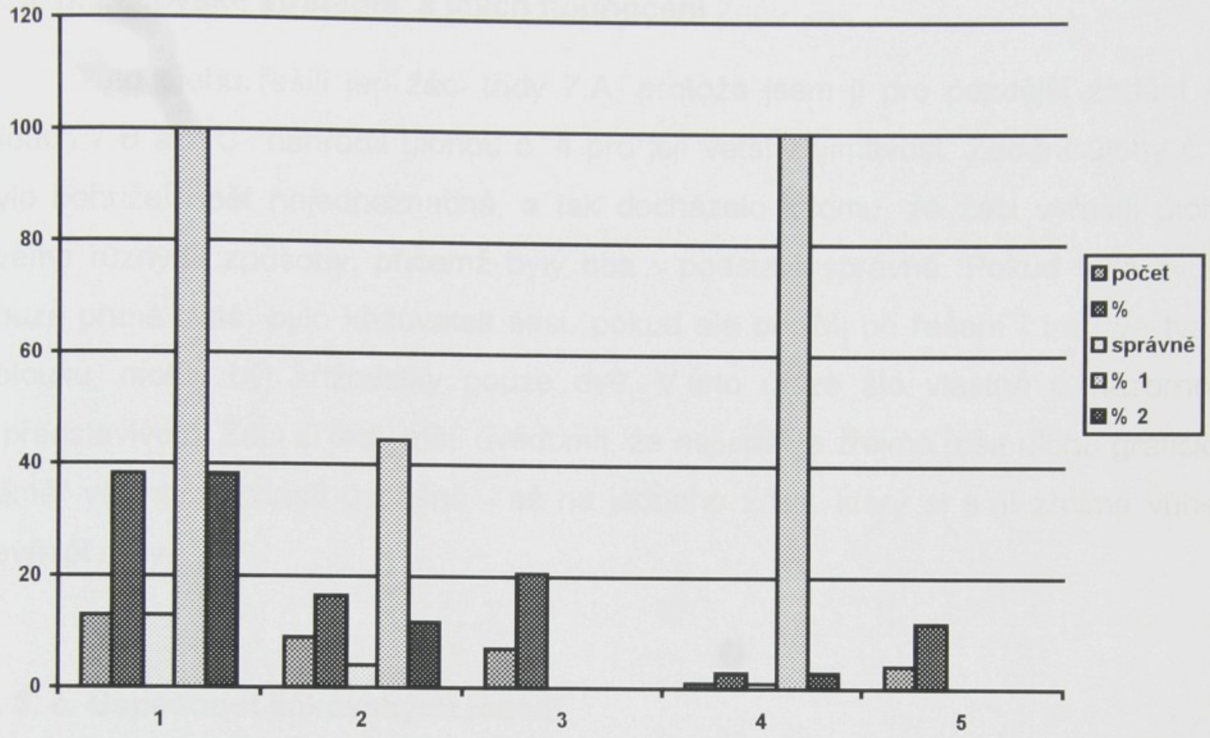
strategie č.	1	2	3	4	5
počet	13	9	7	1	4
%	38,2	26,5	20, 6	2,9	11,8
správně	13	4	0	1	0
% 1	100	44,4	0	100	0
% 2	38,2	11,8	0	2,9	0

C. 2. f. Srovnání skutečných a předpokládaných postupů

Je zřejmé, že nejčastěji používaná a nejúspěšnější byla při řešení strategie č. 1. Je to, myslím, trochu překvapivé, že byla tato strategie použita tolika žáky, spíš bych čekal pouhé vypisování.

Strategie č. 2, jíž je strategie č. 4 vlastně jakýmsi „poddruhem“, je druhá nejpočetnější a vlastně už i jediná další úspěšná. Vysvětlením by mohlo být, že matematicky zdatnější žáci, kteří vymysleli strategii č. 1, jsou lepší i numericky, a proto dokáží svůj postup dotáhnout do cíle spíš. Tento postup je také náročný spíš na přemýšlení před započetím řešení než při samotném řešení, narozdíl od strategie č. 2 - vypisování nebo vykreslování.

GRAF č. 4 - Strategie v úloze č. 2



Z uvedeného je zřejmé,že postup č. 1 (5 x 12) je značně úspěšnější než vykreslování nebo vypisování možností. Může to být proto, že vypisování je nepřehledné a snadno se při něm udělá chyba. Také se lze domnívat, že pokud nějaký žák dokáže přijít na postup „5 x 12", je zřejmě v matematice na vyšší úrovni, a proto neudělá chybu při řešení tak snadno nebo tak často jako ten, kdo řešení vypisuje jedno po druhém.

C. 3. Úloha č. 3

C. 3. a. Předpokládaný postup

Řešení se provádí graficky. Při přímých tratích je počet křižovatek šest, v případě, že se mohou tratě vést obloukem, jsou křižovatky pouze dvě.

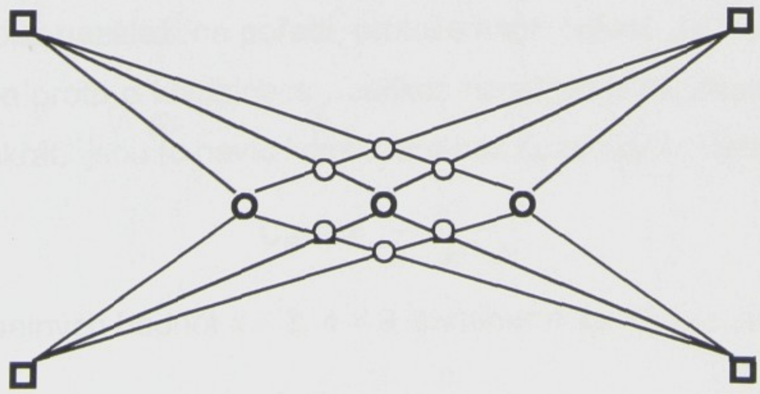
U této úlohy jsem ani nic jiného, než grafické řešení, nečekal.

C. 3. b. Žákovské strategie a jejich hodnocení

Tuto úlohu řešili jen žáci třídy 7.A, protože jsem ji pro pozdější zadání ve třídách 7.B a 7.C nahradil úlohou č. 4 pro její větší zajímavost. Zadání úlohy č. 3 bylo bohužel opět nejednoznačné, a tak docházelo k tomu, že žáci vyřešili úlohu dvěma různými způsoby, přičemž byly oba v podstatě správné. Pokud totiž zvolili pouze přímé tratě, bylo křižovatek šest, pokud ale použili při řešení i tratí ve tvaru oblouku, mohly být křižovatky pouze dvě. V této úloze šlo vlastně o názornost a představivost. Žáci si tedy měli uvědomit, že nejlepší je zřejmě řešit úlohu graficky. Téměř všichni ji zvládli úspěšně - až na jednoho žáka, který si s ní zřejmě vůbec nevěděl rady.

C. 3. c. Úspěšnost žákovských řešení

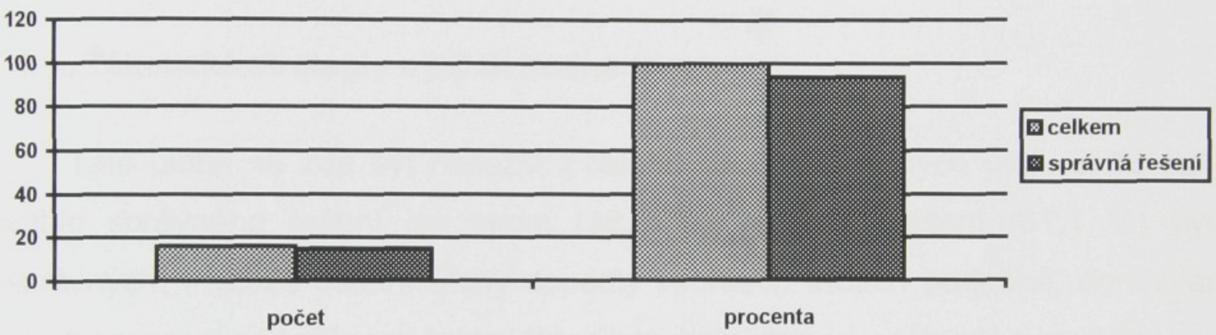
Z celkových 16 řešení bylo dobrých 15 (93,8%), špatné pouze jedno (6,2%). Z toho vyplývá, že to byla pro žáky zcela jednoznačně nejlehčí úloha ze všech čtyř zadaných. (Viz příloha P10).



TABULKA č. 5 - Úspěšnost v úloze č. 3

	celkem	správná řešení
počet	16	15
procenta	100	93,8

GRAF č. 5 - Úspěšnost v úloze č. 3



C. 4. Úloha č. 4

C. 4. a. Správné řešení

V této úloze nezáleží na pořadí, protože např. řešení „147" je totéž jako řešení „174". Jedna se proto o kombinace . Jelikož nemůžeme ze zřejmých důvodů jedno číslo použít dvakrát, jsou to navíc kombinace bez opakování. Vzorec pro výpočet je:

$$C_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!\,.\,k!}\ .$$

Po dosazení číselných hodnot $k = 3$, $n = 9$ dostaneme ze vzorce výraz

$$C_3(9) = \frac{9!}{(9-3)!\,.\,3!}\ .$$

Po výpočtu získáme výsledek 84 kombinací. Jízdenku lze tedy proštípnout 84 způsoby.

C. 4. b. Předpokládaný postup

U této úlohy lze jako možnou strategii celkem logicky očekávat vypisování kombinací, ale při chybném postupu i variací. Další postupy nejsou dost dobře předvídatelné, jako například vykreslování tvarů, které vytvořily proštípnuté otvory v jízdence.

C. 4. c. Žákovské strategie a jejich hodnocení

Tato úloha se zdá být nejtěžší z celého souboru řešených úloh. Z 18 žáků dosáhlo správného řešení jen sedm (38,8 %), jedenáct řešení (61,1 %) bylo nesprávných. Protože ostatní úlohy dopadly ve všech třídách podobně, domnívám se, že by procento úspěšnosti řešení této úlohy bylo stejné i v případě třídy 7.A.

Některé děti si vypisovaly možná řešení jako kombinace tří čísel, což se jeví nejsnadnějším způsobem řešení. Zřejmě tento postup napadne většinu dětí nejdříve, ale často při něm chybují. Často je pro ně řešení „147“ různé od řešení „174“ a počítají tyto kombinace jako dvě řešení.

Jiné děti (bylo jich podstatně méně) zvolily odlišný postup: nakreslily si několik čtvercových sítí 3x3 a do nich postupně zaškrtávaly řešení, jež je zrovna napadla. Vznikaly jim tak v těchto sítích obrazce ve tvaru různě natočených písmen „L“, „V“, „I“, atd. (Viz příloha P11).

Tento postup zcela automaticky sám o sobě vylučuje možnost dvojího počítání jedné kombinace, pokud si ovšem dotyčný pečlivec zachová přehled, která řešení již použil, a která ještě ne. Je bohužel dost obtížné to dodržet, což se i projevilo ve výsledcích. Kromě toho je toto řešení dost těžkopádné, pomalé a pracné. Přes veškerou snahu se v něm děti mohou snadno ztratit, protože pro takový postup se asi jen obtížně bude volit nějaký systém.

Přes tyto nevýhody má zmíněný postup i svou kladnou stránku ve své názornosti a myslím, že stojí za to ukázat dětem obojí.

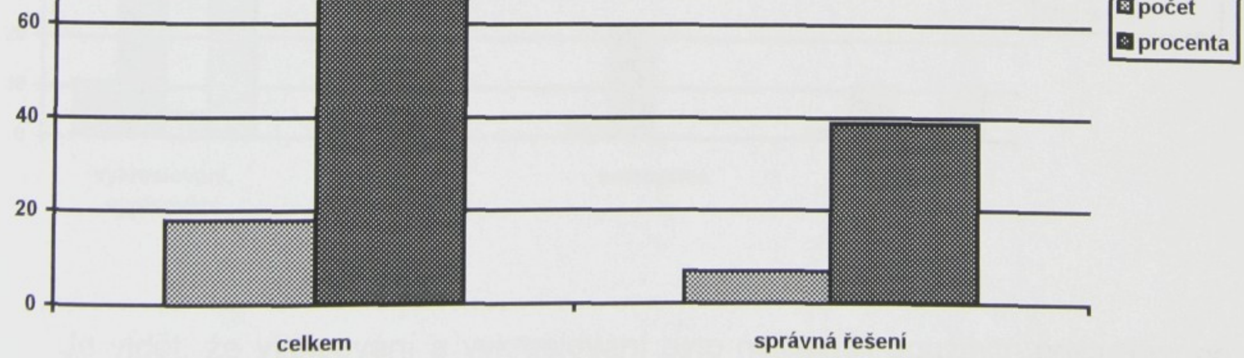
C. 4. D. Úspěšnost žákovských řešení

Podíl správných řešení na jejich celkovém počtu zachycuje následující tabulka a graf.

TABULKA č. 6 - Úloha č. 4

	celkem	správná řešení
počet	18	7
procenta	100	38,8

GRAF č. 6 - Úloha č. 4

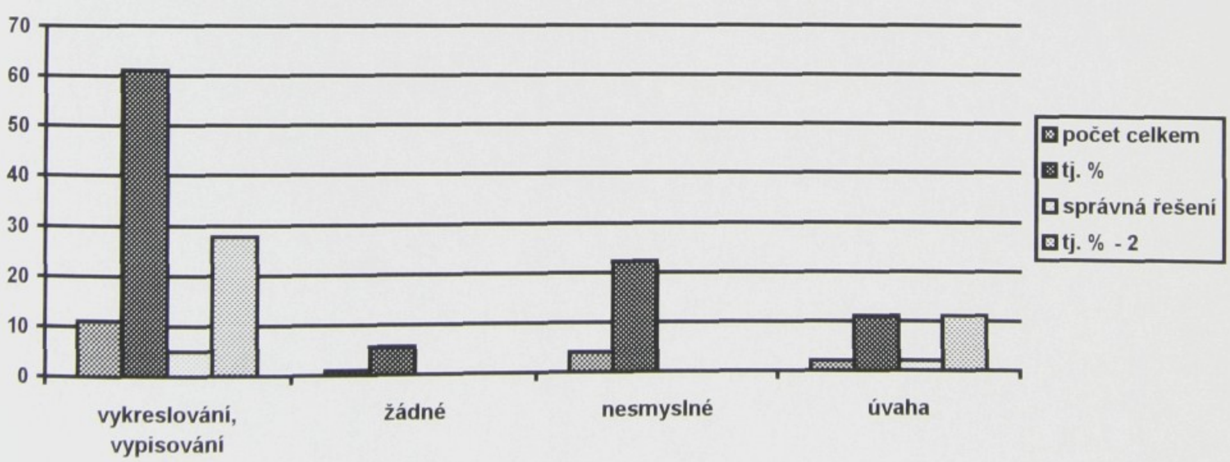


TABULKA č. 7 - Strategie úlohy č. 4

	vykreslování, vypisování	žádné	nesmyslné	úvaha
počet celkem	11	1	4	2
tj. %	61,1	5,6	22,2	11,1
správná řešení	5	0	0	2
tj. % - 2	27,8	0	0	11,1

- **„počet celkem“** je prostý počet řešení daného typu
- **„tj. %“** znamená procentuální zastoupení určitého řešení v jejich celkovém počtu
- **„správná řešení“** opět představují prostý počet těchto řešení
- **„tj. % - 2“** vyjadřuje, kolik procent z celkového počtu řešení bylo správně řešeno příslušnou metodou

GRAF č. 7 - Strategie úlohy č. 4



Je vidět, že vypisování a vykreslování bylo nejčastěji použitým postupem při řešení úlohy. Zřejmě kvůli už dříve zmíněné záměně kombinací a variací nebyla však tato strategie tak úspěšná, jako když se žáci snažili dojít k výsledku úvahou. Možná proto, že tento postup použily děti lepší na matematiku a nedělali při řešení chyby. Obě řešení však byla správná.

III. Shrnutí výsledků

Vzhledem k malému počtu zúčastněných žáků při řešení úloh nelze dost dobře tuto práci vydávat za statisticky platnou, nicméně bych se chtěl pokusit o jisté porovnání zjištěných výsledků. Především bych se chtěl zaměřit na srovnání obtížnosti jednotlivých úloh mezi sebou tak, jak to lze vypozorovat z úspěšnosti žákovských řešení.

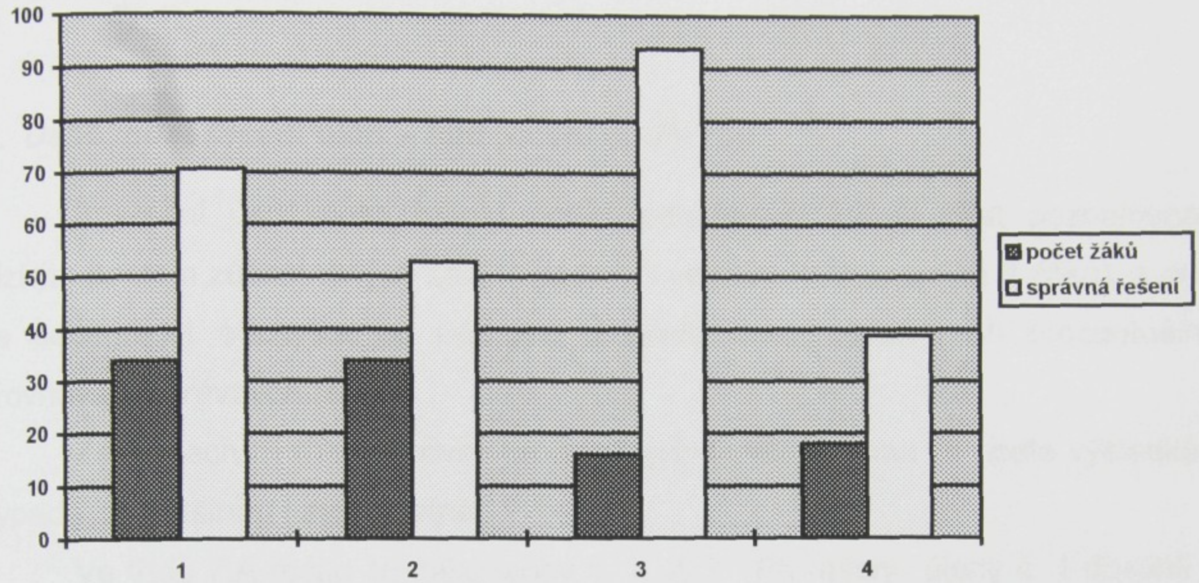
A. Úspěšnost řešení jednotlivých úloh

Při srovnávání je třeba ještě brát v úvahu, že různé třídy řešily do jisté míry různé soubory úloh. Některé byly pro všechny třídy stejné (úlohy č. 1,2), jiné se lišily. Úlohy č. 1, 2 řešili žáci ve všech třech třídách, úloha č. 3 byla zadána jen ve třídě 7.A (16 žáků), úlohu č. 4 řešili žáci ve třídách 7.B a 7.C, to je tedy celkem 18 žáků. Z tohoto důvodu je i procentuální srovnání úspěšnosti řešení jednotlivých úloh trochu zkreslené. Přehled o tom nabízí následující tabulka a graf.

TABULKA č. 8 - Obtížnost úloh

úloha č.	**1**	**2**	**3**	**4**
počet žáků	34	34	16	18
správná řešení	70,6	52,9	93,8	38,8

GRAF č. 8 - Obtížnost úloh



Z hodnocení řešení úlohy je zcela jasně vidět, že úloha č. 4 byla pro žáky nejtěžší, následovala ji úloha č. 2, potom úloha č. 1 a úloha č. 3 byla nejlehčí. To je asi způsobeno obecně tím, že úlohy lze řešit různými, a tedy různě těžkými způsoby, nebereme-li v úvahu srozumitelnost zadání.

V úloze č. 3 „stačí" řešení kreslit, a není třeba vymýšlet žádný postup. Také výsledek není tak abstraktní, jako u ostatních úloh, kde figurují jen čísla. Praktický význam vidím například v tom, že žáci nemuseli vymýšlet zvláštní postup, aby zachytili všechna řešení, protože to bylo dostatečně zřejmé z obrázku.

Tento princip (kreslení) mohl žákům pomoci i při řešení poměrně složité úlohy č. 2, kde si žáci buď vykreslili všechny vlajky, nebo alespoň nějakou typickou skupinu.

Poměrně dobrý výsledek při řešení úlohy č. 1 si vysvětluji jako důsledek toho, že se zde počítají (vypisují) pouze dvojice. Jejich postupným vypisováním přišli alespoň někteří na zákonitost jejich vytváření a došli ke správnému závěru tímto způsobem. Pokud by ovšem museli tvořit například trojice, úloha by se značně zkomplikovala, což se projevilo například v úspěšnosti řešení úlohy č. 4. Kromě tvoření trojic mnohým žákům ztížil situaci problém rozlišení kombinací a variací. Mnozí z nich to nezvládli, z čehož plyne i poměrně nízká úspěšnost řešení této úlohy - viz tabulka a graf č. 6.

B. *Úspěšnost řešení úloh – hodnocení podle tříd*

Srovnání úspěšnosti řešení podle jednotlivých tříd je dost poznamenáno nízkým počtem zúčastněných žáků (například ve třídě 7. B pouhých 8 žáků), a proto se sebemenší odchylka od průměru projevila velmi výrazně při procentuálním srovnávání správných řešení.

Žáci všech tří tříd pracovali na zadaných úlohách doma a podle výsledků to vypadá, že většinou i samostatně.

Ve třídě 7.A řešilo 16 žáků úlohy č. 1, 2, 3. Při řešení úlohy č. 1 dosáhli 12 správných výsledků, což představuje 75 % úspěšnost. V úloze č. 2 dosáhli 7 správných řešení - 43,8 % a v úloze č. 3 dosáhli 15 správných řešení, což je 93,8 %.

Ve třídě 7.B řešilo úlohy 8 žáků. Úlohu č. 1 vyřešili správně 4 žáci (50 %), úlohu č. 2 vyřešili správně 3 žáci, neboli 37,5 % a stejně tak i v úloze č. 4 dosáhli správného řešení 3 žáci, čili opět 37,5 %.

Ve třídě 7.C se řešení zúčastnilo 10 žáků, a to takto: úlohu č. 1 vyřešilo správně 8 žáků (80 %), úlohu č. 2 šest žáků (60 %) a úlohu č. 4 vyřešili správně 4 žáci, což je 40 %.

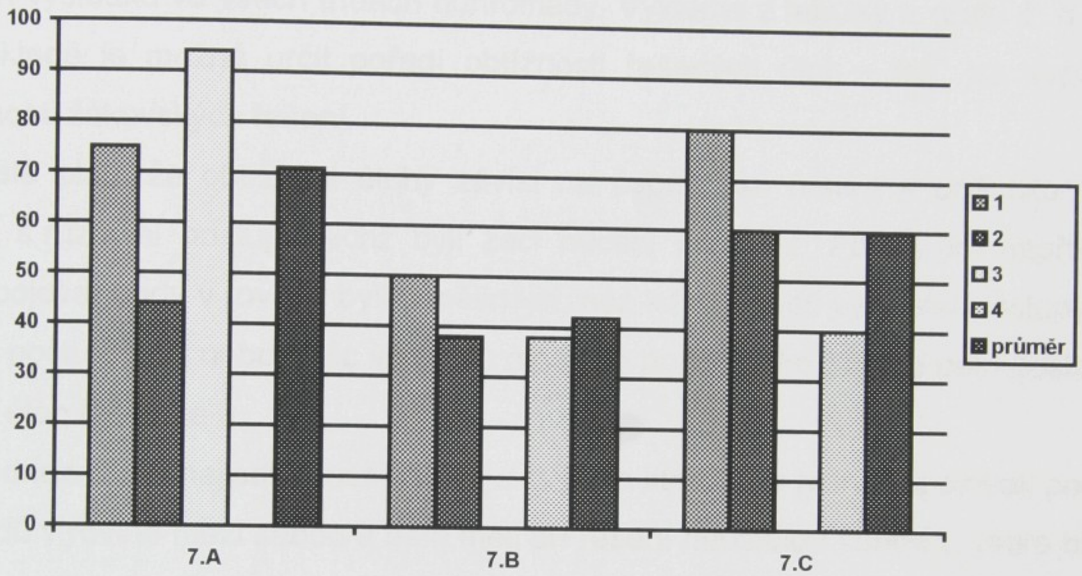
Výsledky srovnání úspěšnosti řešení všech úloh v jednotlivých třídách jsem shrnul do následující tabulky.

TABULKA č. 9 - Srovnání tříd

úloha číslo	**1**	**2**	**3**	**4**	**průměr**
třída					
7. A	75	44	94	neřešeno	71
7. B	50	38	neřešeno	38	42
7. C	80	60	neřešeno	40	60

Rozdíly v úspěšnosti jednotlivých tříd při řešení úloh lépe vyniknou na následujícím grafu.

GRAF č. 9 - Srovnání tříd



Jak je vidět, kromě dvou případů (úlohy č. 1 - nižší úspěšnost třídy 7.B a úlohy č. 2 - výrazně lepší výsledek třídy 7.C) se od sebe procenta správných řešení příliš neliší.

Pomineme-li různou úroveň matematického nadání nebo myšlení, mohou být větší rozdíly v těchto dvou případech kromě jiného způsobeny také tím, že ve třídě 7.B řešilo úlohy pouhých osm žáků. Je tedy zřejmé, že zvláště v takovém případě už výše uvedené,že se každé chybné řešení výrazně promítne do procentuálního vyjádření.

Dalším možným důvodem je, že ve třídě 7.A vyučuje matematiku někdo jiný než ve třídách 7.B, C.

IV. Srovnání konečných výsledků a předpokladů

Přes nízký počet zúčastněných žáků lze získané výsledky využít k nějakému závěru.

Pro konečné posuzování využijeme především údajů z tabulek a grafů č. 7, 8, ve kterých se porovnává úspěšnost řešení úloh jak všeobecně, tak i s přihlédnutím k výsledkům v jednotlivých třídách. Důležitější ale pro nás asi bude porovnání obecných výsledků ve všech třídách dohromady. Vyjdeme z tabulky a grafu č. 8. Na jejich základě je možné určit pořadí obtížnosti řešených úloh - tak, jak vyplývá z úspěšnosti žákovských řešení.

Jistě platí, že obtížnost úlohy závisí na úspěšnosti řešení a obě tyto věci souvisejí s různými postupy, jichž byli žáci nuceni používat. Pokud jim například stačilo spojovat body v rovině, byli úspěšnější, než když museli vymýšlet postupy na určování počtu dvojic nebo trojic v nějaké množině prvků. Jako příklad nám poslouží srovnání úloh číslo 2 a 3.

Jednoznačně nejjednodušší je úloha č. 3, ve které žáci jednak spojovali pouze sedm bodů v rovině mezi sebou a dále měli při řešení neustálou kontrolu, které body již spojili a které ještě spojit zbývá. Kromě toho, v této úloze pracovali s malými čísly: dvojice ze sedmi prvků.

Druhou nejlehčí úlohou byla úloha č. 1 - o počtu jízdenek. Zde se již sice pracuje s větším počtem prvků (25), ale stále se vytvářejí pouze dvojice, což není příliš složité na to, abychom si udrželi přehled, která spojení již byla vytvořena. Žáci si mohli také pomoci grafickým řešením. U této úlohy je možné využít ho buď výlučně nebo spolu s početním řešením, jak to i někteří udělali. Pospojovali jednu stanici s ostatními, uvědomili si podle obrázku, že takových situací je dalších 23 a prostým násobením 25 . 24 dostali správný výsledek 600 lístků.

Podobný postup využili někteří žáci také u úlohy č. 2, která byla podle hodnocení zachyceného v tabulce č. 7 druhou nejobtížnější. Tuto úlohu lze řešit podobně, tedy spočítat možnosti u jedné typické skupiny a pak je vynásobit počtem těchto skupin. Velká část žáků tak skutečně postupovala. Na druhé straně se pracuje již s trojicemi, což řešení značně ztěžuje. Proto zřejmě správného výsledku dosáhla menší část žáků, než v úloze č. 1. Kromě toho je počet kombinací dost vysoký, takže při vykreslování nebo vypisování může díky nepřehlednosti snadno vzniknout chyba.

Úloha č. 4 byla jistě pro žáky nejtěžší, jak to i ukazuje tabulka a graf č. 6. Je to čistě teoretická úloha, objevují se v ní pouze čísla, žádné vlajky ani plánek továrny. Co se týká použitých strategií řešení, z tabulky a grafu č. 7 vyplývá, že nejčastěji použitou, ale ne nejúspěšnější strategií bylo vypisování. Tento výsledek se dost podobá hodnocení všech úloh.

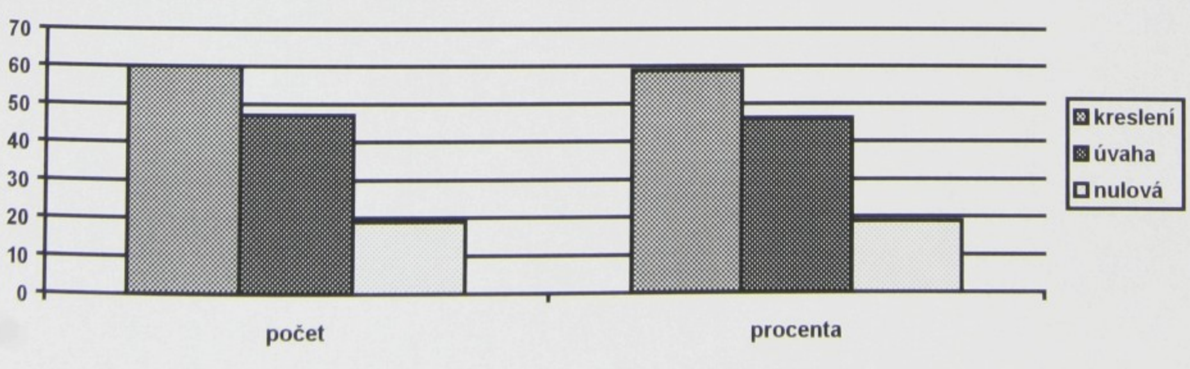
Celkově nejčastěji používali žáci pro řešení postupy jako vypisování nebo vykreslování (alespoň částečně). Objevilo se v 58,8 % řešení. Srovnání - viz tabulka, graf č. 10.

TABULKA č. 10 - Výskyt různých postupů při řešení úloh

typ postupu	kreslení	úvaha	nulová
počet	60	47	19
procenta	58,8	46,1	18,7

- Pojem „nulová" řešení znamená špatná nebo žádná řešení.
- Dále je zřejmé, že součet procent přesahuje 100. Je to proto, že tyto postupy se často prolínaly a kombinovaly, takže v jedné úloze mohly být použity oba dva.

GRAF č. 10



Lepší žáci ho používají jako pomocný krok, ze kterého odvozují další řešení. Někdy však byli při řešení úspěšnější pomocí nějaké úvahy - viz úloha č. 1 a 2, kde žáci dosáhli nejvíce správných výsledků pomocí úvahy (tab., graf č. 1). V ostatních úlohách převládá zmíněné vypisování. V úloze č. 2 dokonce tyto dvě strategie (kreslení a úvaha) splývají a kombinují se v jeden postup. V úloze č. 3 je kreslení dokonce jediným použitým postupem, a tudíž je také nejúspěšnějším.

Práce potvrdila mé předpoklady co se týká četnosti a úspěšnosti použití metody vypisování a vykreslování, ale poněkud mne překvapila úspěšnost žáků při řešení těchto úloh. Správných řešení bylo 62,8 % případů, což je celkem příznivé číslo vzhledem k tomu, že se jedná o problémové úlohy.

V. Seznam použité literatury:

Sedláček, J. : Faktoriály a kombinační čísla - svazek 10. Praha, MF 1964.

Sedláček, J. : Faktoriály a kombinační čísla - svazek 56. Praha, MF 1985.

Trenčianský, I. a kol.: Matematika III - pro studijní obory, část druhá. Praha, SPN 1982.

Fuchs, E. : Kombinatorika a teorie grafů. Praha, SPN 1986.

Vrba, A. : Kombinatorika - pro druhý ročník gymnázií se zaměřením na matematiku. Praha, SPN 1986.

Niepel, Ľ. : Kombinatorika a teória grafov II. Bratislava, UK 1991.

Bartoš - Znám - Známová: Kombinatorika - štúdijný text pre učiteľov matematiky v 6. - 9. ročníku základnej deväťročnej školy. Bratislava, SPN 1974.

Koman, M. - Vyšín, J. : Malý výlet do moderní matematiky. Praha, MF 1972.

Vild, J. : Metodické pokyny k diplomovým a závěrečným pracím na Pedagogické fakultě TUL. Liberec, TU 1995.

Novoveský, Š. - Križalkovič, K. - Lečko, I.: 777 matematických zábav a her. Praha, SPN 1971.

Kowal, S.: Matematika pro volné chvíle (zábavou k vědě). [Překlad: RNDr. Jiří Jarník, CSc.] Polytechnická knižnice, Praha 1986.

Seiferťová ?

1. Mnohým lidem se zdá prodej jízdenek na železnici velmi jednoduchý. Nemají tušení, s jakým počtem jízdenek se pracuje i na malých stanic Cestující musí dostat lístek z každé stanice do kterékoli jiné. Představme si trať s 25 stanicemi. Kolik různých druhů jízdenek potřebuje železnice protuto trať?

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25

1. stan.	24
2. -"-	24
3. -"-	24
4. -"-	24
5. -"-	24
6. -"-	24
7. -"-	24
8. -"-	24
9. -"-	24
10. -"-	24
11. -"-	24
12. -"-	24
13. -"-	24
14. -"-	24
15. -"-	24
16. -"-	24
17. -"-	24
18. -"-	24
19. -"-	24
20. -"-	24
21. -"-	24
22. -"-	24
23. -"-	24
24. -"-	24
25. -"-	24

$24 \cdot 25 = \underline{\underline{600}}$

Pro tuto trať potřebuje železnice 600 různých druhů jízdenek.

7.A

1. Mnohým lidem se zdá prodej jízdenek na železnici velmi jednoduchý. Nemají tušení, s jakým počtem jízdenek se pracuje i na malých stanicích. Cestující musí dostat lístek z každé stanice do kterékoli jiné. Představme si trať s 25 stanicemi. Kolik různých druhů jízdenek potřebuje železnice pro tuto trať?

složitý postup:

1-2	2-1	3-1	4-1	5-1	6-1	7-1	8-1	9-1	10-1	11-1	12-1	13-1	14-1	15-1
1-3	2-3	3-2	4-2	5-2										
1-4	2-4	3-4	4-3	5-3										
1-5	2-5	3-5	4-5	5-4										
1-6	2-6	3-6	4-6	5-6										
1-7	2-7	3-7	4-7	5-7										
1-8	2-8	3-8	4-8	5-8										
1-9	2-9	3-9	4-9											
1-10	2-10													
1-11	2-11													
1-12	2-12													
1-13														
1-14														
1-15														
1-16														
1-17														
1-18														
1-19														
1-20														
1-21														
1-22														
1-23														
1-24														
1-25														

jednoduchý postup:

$$\begin{array}{r} 24 \\ \cdot\, 25 \\ \hline 120 \\ 48 \\ \hline 600 \end{array}$$

600 jízdenek.

ŽOHOVÁ 7.A

1. Mnohým lidem se zdá prodej jízdenek na železnici velmi jednoduchý. Nemají tušení, s jakým počtem jízdenek se pracuje i na malých stanic Cestující musí dostat lístek z každé stanice do kterékoli jiné. Představme si trať s 25 stanicemi. Kolik různých druhů jízdenek potřebuje železnice protuto trať?

300 jízdenek

24 + 23 + 22 + 21 + 20 +
+ 19 + 18 + 17 + 16 + 15 +
+ 14 + 13 + 12 + 11 + 10
+ 9 + 8 + 7 + 6 + 5
+ 4 + 3 + 2 + 1 = 300

+ 300 ...
= 600

7.A Mrožk

1. Mnohým lidem se zdá prodej jízdenek na železnici velmi jednoduchý. Nemají tušení, s jakým počtem jízdenek se pracuje i na malých stanic
Cestující musí dostat lístek z každé stanice do kterékoli jiné.
Představme si trať s 25 stanicemi. Kolik různých druhů jízdenek potř
buje železnice protuto trať?

~~$25 \cdot 24 \cdot 25 = 600$~~ $25 \cdot 24 = 600$

~~mezi 25 st – 24 možností~~

$25 \cdot 24 = 600$
$24 \cdot 23 = 552$
$23 \cdot 22 = 506$
$22 \cdot 21 = 462$
$21 \times 20 = 420$
$20 \cdot 19 = 380$
$19 \cdot 18 = 342$
$18 \cdot 17 = 306$
$17 \cdot 16 = 272$
$16 \cdot 15 = 240$
$15 \cdot 14 = 210$
$14 \cdot 13 = 182$
$13 \cdot 12 = 156$
$12 \cdot 11 = 132$
$11 \cdot 10 = 110$
$10 \cdot 9 = 90$
$9 \cdot 8 = 71$
$8 \cdot 7 = 63$

$7 \cdot 6 = 42$
$6 \cdot 5 = 30$
$5 \cdot 4 = 20$
$4 \cdot 3 = 12$
$3 \cdot 2 = 6$
$2 \cdot 1 = 2$
~~$1 \cdot 1 = 1$~~

558

600 různých druhů

Hampacher F. H

2. Máme k dispozici pět látek různých barev. Kolik různých tříbarevných vlajek z nich můžeme sešít, když budeme kousky látek používat jen jako svislé pruhy?

1 2 3 4 5

1 2 3   1 5 3

1 3 2   1 5 2

1 3 4   1 2 5

1 4 3

1 4 5

1 5 4

1 2 4

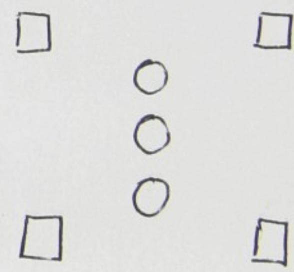
1 4 2

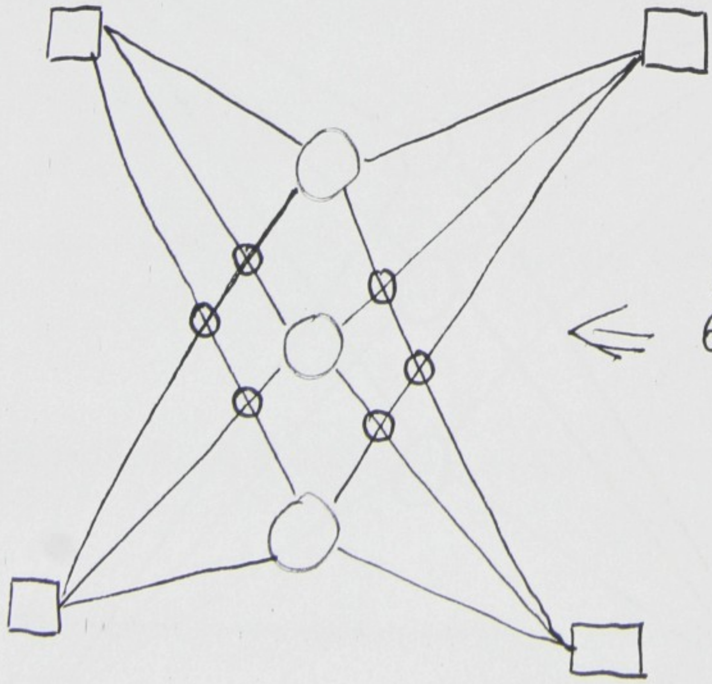
1 3 5

$$12 \cdot 5 = 60$$ vlajek

nev

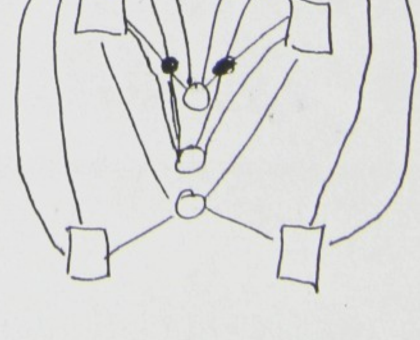
3. V cihelně jsou tři výrobní střediska a 4tyři sklady. Od každého středis má vést úzkokolejka ke každému skladišti. Máte určit nejmenší počet křiž tek a navrhnout plán.





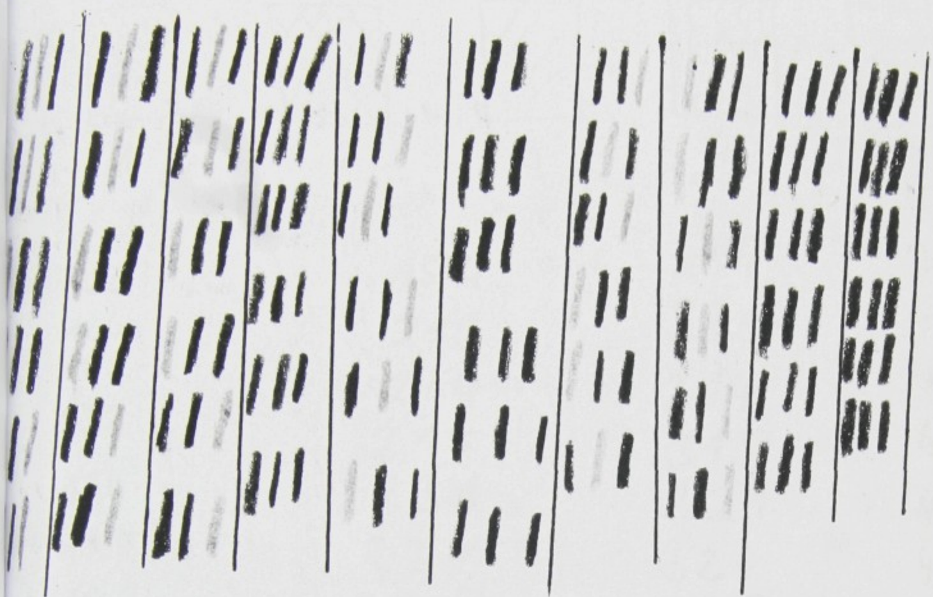
⇐ 6 křižovatek

2 křižovatky ⇓



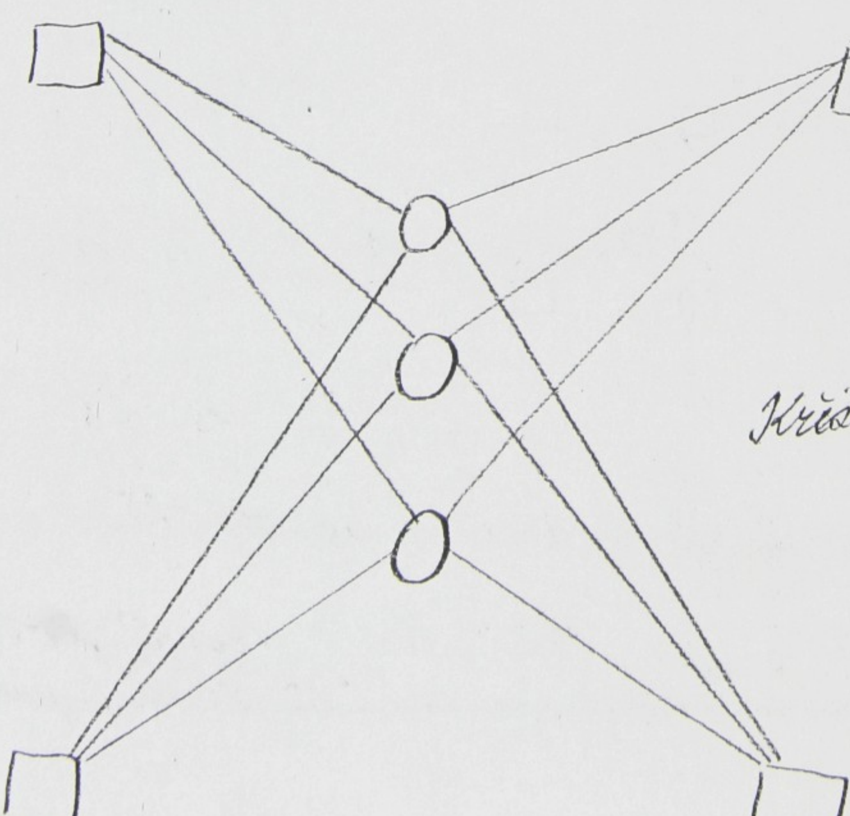
HIRCOVÁ 9.

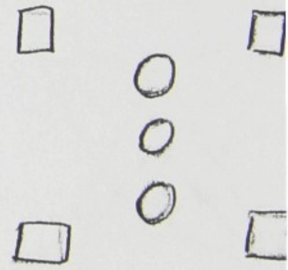
2. Máme k dispozici pět látek různých barev. Kolik různých tříbarevných vlajek z nich můžeme sešít, když budeme kousky látek používat jen jako svislé pruhy?



Můžeme sešít 60 různých tříbarevných vlajek

3. V cihelně jsou tři výrobní střediska a 4tyři sklady. Od každého střediska má vést úzkokolejka ke každému skladišti. Máte určit nejmenší počet křižovatek a navrhnout plán.



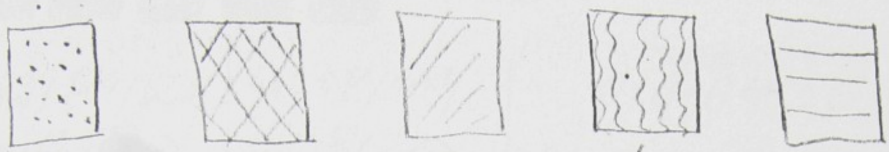


Křižovatek bude 6.

Ale i [illegible]

=> 2

2. Máme k dispozici pět látek různých barev. Kolik různých tříbarevných vlajek z nich můžeme sešít, když budeme kousky látek používat jen jako svislé pruhy?

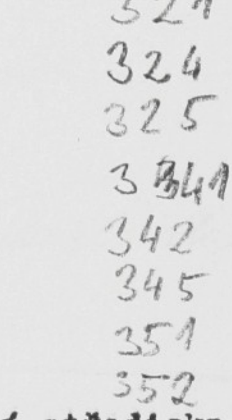


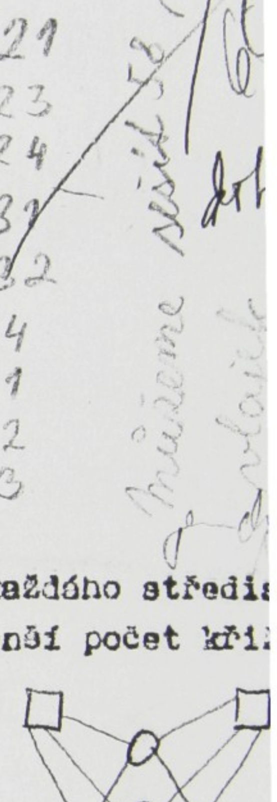
123	154	254	354	513
124	213	312	412	514
125	214	314	413	521
132	215	315	415	523
134	231	321	421	524
135	234	324	423	531
142	235	325	425	532
143	241	341	451	534
145	243	342	452	541
152	245	345	453	542
153	251	351	512	543
	253	352		

Můžeme ušít 58 různých tříbarevných vlajek

60

3. V cihelně jsou tři výrobní střediska a 4tyři sklady. Od každého středis má vést úzkokolejka ke každému skladišti. Máte určit nejmenší počet kři tek a navrhnout plán.





2

Seifertová 7

2. **Máme k dispozici pět látek různých barev. Kolik různých tříbarevných vlajek z nich můžeme sešít, když budeme kousky látek používat jen jako svislé pruhy?**

= látky

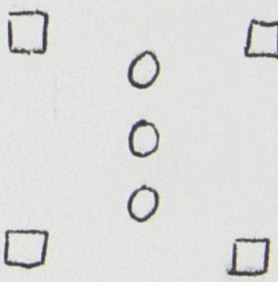
1,2,3; 1,2,4; 1,2,5; 1,3,4; 1,3,5; 1,4,5 — 6	4,5,1; 4,5,2; 4,5,3; 4,1,2; 4,1,3; 4,2,3; — 6
2,3,4; 2,3,5; 2,3,1; 2,4,5; 2,4,1; 2,5,1 — 6	5,1,2; 5,1,3; 5,1,4; 5,2,3; 5,2,4; 5,3,4 — 6
3,4,5; 3,4,1; 3,4,2; 3,5,1; 3,5,2; 3,1,2; — 6	

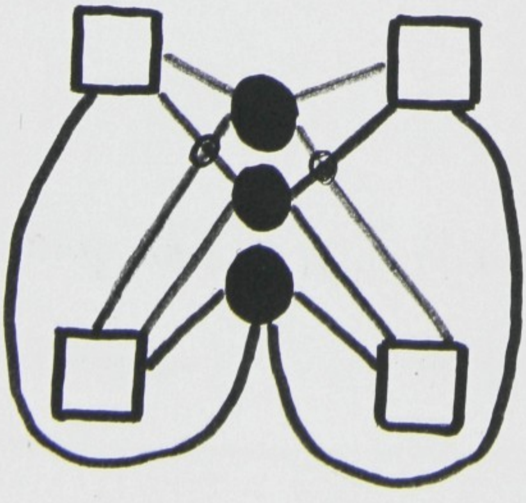
$6+6+6+6+6=\underline{\underline{30}}$

60

Můžeme ušít až 30 tříbarevných vlajek.

3. **V cihelně jsou tři výrobní střediska a 4 čtyři sklady. Od každého střediska má vést úzkokolejka ke každému skladišti. Máte určit nejmenší počet křižovatek a navrhnout plán.**





Nejmenší počet křižovatek je 2.

Netuší ale, s kolika jízdenkami se pracuje na každé stanici. Cest[illegible] musí dostat lístek z každé stanice do kterékoli jiné. Představme [illegible] trať s 25 stanicemi. Kolik různých druhů jízdenek potřebuje želez[illegible] pro tuto trať?

2. Kolika způsoby lze proštípnout jízdenku s políčky 1-9 uspořádanými do čtverce 3x3, pokud budeme vždy proštipovat 3 políčka?

3. Máme k dispozici pět odlišných látek. Kolik různých tříbarevných vlajek z nich můžeme sešít, když budeme kousky látek používat jen jako svislé pruhy?

1. Je potřeba 300 druhů jízdenek, ale tam a zpátky 600 jízdenek.

2. Lze to 165 způsoby.

3. Můžeme ušít 9 různých vlajek „existujících". Lze i d[illegible] neexistují

[vyjasňovat]

Hampacher f.A

2. Máme k dispozici pět látek různých barev. Kolik různých tříbarevných vlajek z nich můžeme sešít, když budeme kousky látek používat jen jako svislé pruhy?

1 2 3 4 5

1 2 3 153

1 3 2 152

1 3 4 125

1 4 3

1 4 5

1 5 4

1 2 4

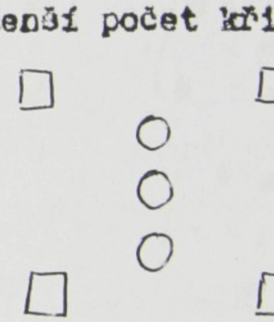
1 4 2

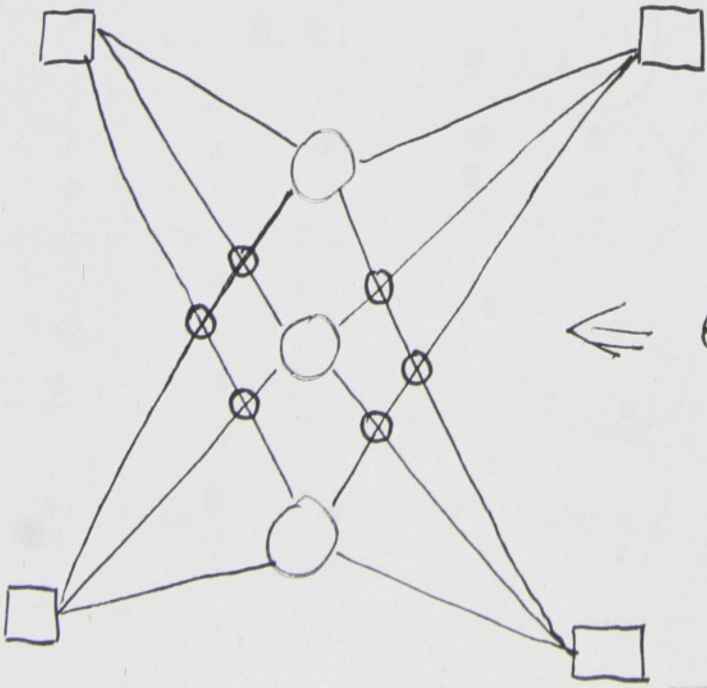
1 3 5

$$\begin{array}{r} 12 \\ \cdot\ 5 \\ \hline 60 \end{array}$$ vlajek

nev

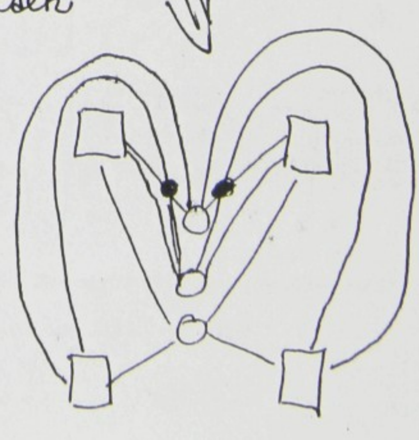
3. V cihelně jsou tři výrobní střediska a 4tyři sklady. Od každého středi má vést úzkokoleka ke každému skladišti. Máte určit nejmenší počet kři tek a navrhnout plán.

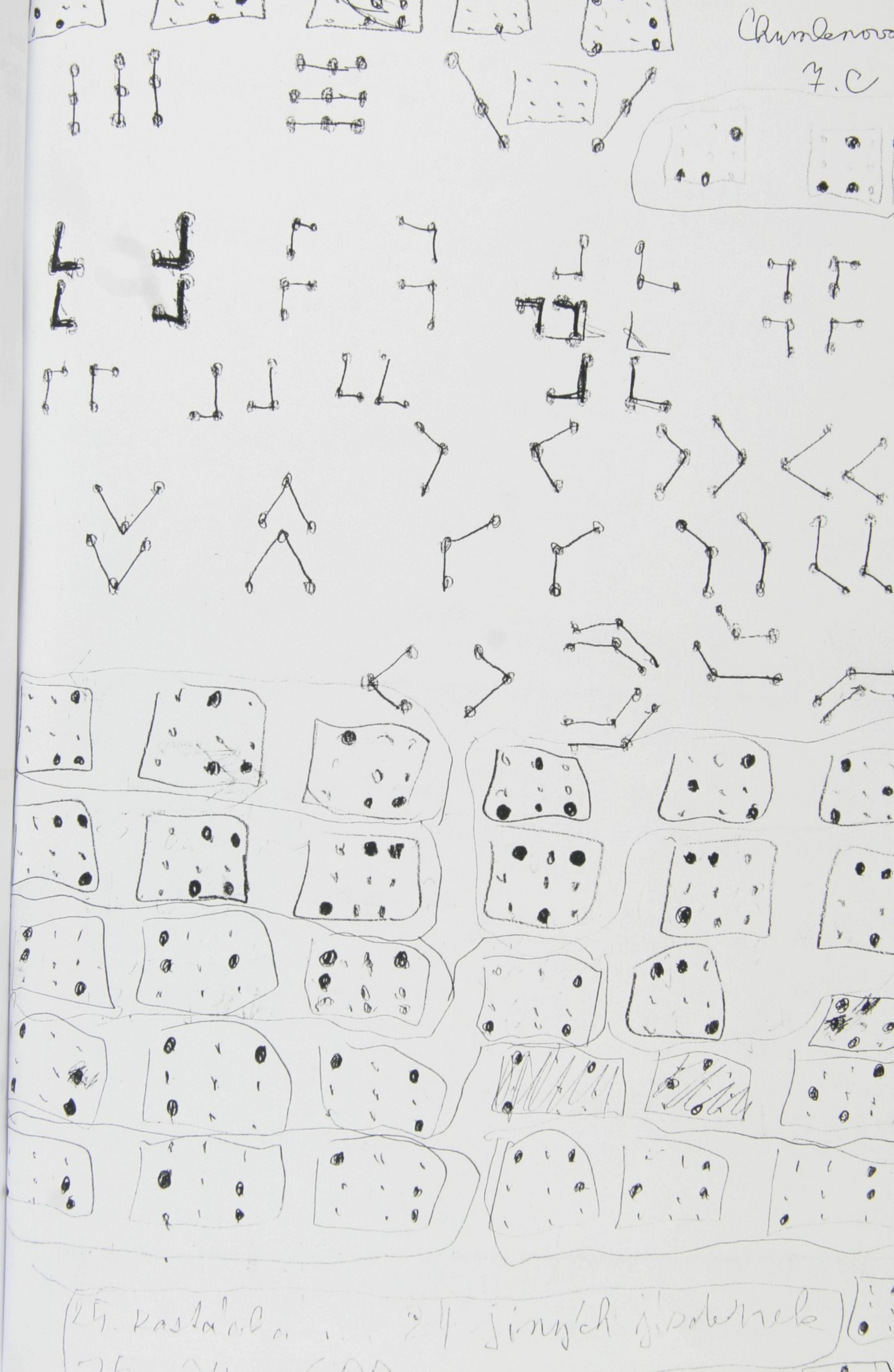




2 křižovatky

6 křižovatek




Chumlenova
7.C
25 kostiček … 24 jiných