



TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI
Fakulta mechatroniky, informatiky
a mezioborových studií ■

Vybrané metody identifikace SISO systémů a jejich aplikace

Diplomová práce

Studijní program: B2612 – Elektrotechnika a informatika
Studijní obor: 3902T005 – Automatické řízení a inženýrská informatika
Autor práce: **Bc. Tomáš Šimůnek**
Vedoucí práce: Ing. Lukáš Hubka, Ph.D.





TECHNICAL UNIVERSITY OF LIBEREC
Faculty of Mechatronics, Informatics
and Interdisciplinary Studies ■

Selected identification methods of SISO systems and their applications

Master thesis

Study programme: B2612 – Electrical Engineering and Informatics
Study branch: 3902T005 – Automatic Control and Applied Computer Science
Author: **Bc. Tomáš Šimůnek**
Supervisor: Ing. Lukáš Hubka, Ph.D.



ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: **Bc. Tomáš Šimůnek**
Osobní číslo: **M14000191**
Studijní program: **N2612 Elektrotechnika a informatika**
Studijní obor: **Automatické řízení a inženýrská informatika**
Název tématu: **Vybrané metody identifikace SISO systémů a jejich aplikace**
Zadávající katedra: **Ústav mechatroniky a technické informatiky**

Z á s a d y p r o v y p r a c o v á n í :

1. Seznamte se s vybranými metodami identifikace systémů. Soustřeďte se na rekurzivní identifikaci, identifikaci s pomocnou proměnnou a sub-space identifikaci. Popište a vysvětlete principy, na kterých jsou metody založeny.
2. Implementujte popisované metody na vhodných (nejlépe reálných) systémech/datech či modelech. Volte lineární i nelineární systémy různých řádů a demonstруйте tak aplikační sféru jednotlivých metod.
3. Diskutujte výhody a nevýhody těchto metod a možnosti reálného využití.

Rozsah grafických prací: dle potřeby dokumentace

Rozsah pracovní zprávy: 40–50 stran

Forma zpracování diplomové práce: tištěná/elektronická

Seznam odborné literatury:

- [1] NOSKIEVIČ, Petr. Modelování a identifikace systémů. Ostrava: Montanex, 1999, iv, ii, 276 s. ISBN 80-722-5030-2.
- [2] SCHOUKENS, J, R PINTELON a Yves ROLAIN. Mastering system identification in 100 exercises. Hoboken, NJ: Wiley, c2012, xviii, 264 p. ISBN 978-047-0936-986.
- [3] OVERSCHEE, Peter van a Bart L MOOR. Subspace identification for linear systems: theory, implementation, applications. Boston: Kluwer Academic Publishers, c1996, xiv, 254 p. ISBN 07-923-9717-7.
- [4] SÖDERSTRÖM, Torsten a Petre STOICA. System identification. 1st publ. New York: Prentice Hall, 1989, xxiv, 612 s. Prentice Hall International series in systems and control engineering. ISBN 01-388-1236

Vedoucí diplomové práce:

Ing. Lukáš Hubka, Ph.D.

Ústav mechatroniky a technické informatiky

Datum zadání diplomové práce: **10. října 2016**

Termín odevzdání diplomové práce: **15. května 2017**

prof. Ing. Zdeněk Plíva, Ph.D.
děkan



Kolář
doc. Ing. Milan Kolář, CSc.
vedoucí ústavu

V Liberci dne 10. října 2016

Prohlášení

Byl(a) jsem seznámen(a) s tím, že na mou diplomovou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. o právu autorském, zejména § 60 – školní dílo.

Beru na vědomí, že Technická univerzita v Liberci (TUL) nezasahuje do mých autorských práv užitím mé diplomové práce pro vnitřní potřebu TUL.

Užiji-li diplomovou práci nebo poskytnu-li licenci k jejímu využití, jsem si vědom(a) povinnosti informovat o této skutečnosti TUL; v tomto případě má TUL právo ode mne požadovat úhradu nákladů, které vynaložila na vytvoření díla, až do jejich skutečné výše.

Diplomovou práci jsem vypracoval(a) samostatně s použitím uvedené literatury a na základě konzultací s vedoucím diplomové práce a konzultantem.

V Liberci dne 27.9.2017

Tomáš Šimůnek

Poděkování

Chtěl bych poděkovat panu doktoru Lukáši Hubkovi za odborné vedení, trpělivost a cenné rady při tvorbě této diplomové práce. Další velký díky patří mé rodině za nikdy nekončící podporu při studiích.

Abstrakt

Diplomová práce se zabývá identifikací dynamických systémů pomocí vybraných rekurzivních metod a metody subspace. Z rekurzivních metod se konkrétně zajímá o metodu nejmenších čtverců, metodu pomocné proměnné a rozšířenou metodu nejmenších čtverců. Cílem této práce je tedy seznámit čtenáře s těmito metodami a vysvětlit principy, na kterých jsou založeny. Metody jsou implementovány v prostředí Matlab a v tomto prostředí také simulovány a porovnávány. K porovnání jsou použity jak reálná, tak modelově vytvořená data, aby bylo možné vyzkoušet různé vlastnosti daných metod. Výsledkem práce je tedy reálné porovnání metod a diskuze nad jejich výhodami a nevýhodami.

Klíčová slova

Identifikace dynamických systémů, rekurzivní metody identifikace, subspace identifikace, metoda pomocné proměnné

Abstract

The diploma thesis deals with identification of dynamic systems using selected recursive methods and subspace identification method. The recursive methods are particularly interested in the least square recursive method, the recursive method of instrumental variables, and the extended least square recursive method. The aim of this thesis is to familiarize the reader with these methods and to explain the principles on which they are based. The methods are implemented in the Matlab environment and also they are simulated and compared by using Matlab. For comparison, real data and model-generated data are used to test the different properties of the given methods. Real comparison of these methods and their advantages and disadvantages is discussed.

Key Words

Identification of dynamic systems, recursive identification methods, subspace identification method, instrumental variable method

Obsah

Úvod.....	13
1. Identifikace	14
1.1 Základní pojmy.....	14
1.2 Identifikační procedura.....	17
1.3 Struktury lineárních modelů	18
2. Metody identifikace dynamických systémů.....	23
2.1 Dávkové metody identifikace.....	23
2.1.1 Metoda nejmenších čtverců	23
2.1.2 Metoda pomocné proměnné (IV).....	27
2.2 Rekurzivní metody identifikace dynamických systémů.....	29
2.3 Rekurzivní metoda nejmenších čtverců.....	30
2.3.1 Exponenciální zapomínání.....	33
2.4 Rekurzivní metoda pomocné proměnné.....	34
2.5 Rozšířená rekurzivní metoda nejmenších čtverců.....	35
2.6 Metody subspace identifikace	36
2.6.1 SVD rozklad.....	36
2.6.2 RQ dekompozice.....	37
2.6.3 Hankelova matice.....	37
2.6.4 Moore-Penroseova pseudo-inverze.....	38
2.6.5 Popis metody.....	38
3. Porovnání metod identifikace	42
3.1 Kritérium kvality modelu	42
3.2 Porovnání na uměle vytvořených datech.....	42
3.2.1 Metoda nejmenších čtverců a metoda instrumentální proměnné.....	43
3.2.2 Metoda subspace	48
3.2.3 Porovnání rekurzivních metod na stejné sadě dat.....	51
3.2.4 Porovnání rekurzivních dat na kmitavém systému	54
3.2.5 Metoda subspace na kmitavém systému	58
3.3 Výsledky porovnání.....	60

3.4	Identifikace na reálných datech	61
3.4.1	Tepelná soustava – fén	61
3.4.2	Stejnoseměrný motor	65
3.4.3	Sestava – motor a robotická ruka	67
3.4.4	Sestava dvou nádrží	70
Závěr		73

Seznam zkratek

SISO	Single Input Single Output
MIMO	Multi Input Multi Output
ARX	AutoRegressive with eXogenous input
ARMAX	AutoRegressive Moving Average with eXogenous input
BJ	Box-Jenkins Model
OE	Output Error Model
SVD	Single Value Decomposition
IV	Instrumental Variable
RIV	Recursive Instrumental Variable
RMNČ	Rekurzivní metoda nejmenších čtverců
MNČ	Metoda nejmenších čtverců
NČ	Nejmenší čtverce

Seznam obrázků

Obrázek 1: Diagram identifikační procedury dle [2].....	17
Obrázek 2: Obecný lineární model	19
Obrázek 3: Model systému typu ARX.....	20
Obrázek 4: Model typu ARMAX	21
Obrázek 5: Model typu OE	21
Obrázek 6: Model typu BJ	22
Obrázek 7: Uvažovaný model ARX s poruchovou veličinou V.....	24
Obrázek 8: Schéma získání modelu rekurzivní metodou	29
Obrázek 9: Výřez dat od 30. do 80. sekundy.....	44
Obrázek 10: Kompletní získaná sada dat.....	44
Obrázek 11: Validační data v porovnání s identifikovanými průběhy	45
Obrázek 12: Porovnání validačních a identifikovaných průběhů na modelu ARMAX ..	46
Obrázek 13: Porovnání validačních a identifikovaných průběhů na modelu OE.....	47
Obrázek 14: Porovnání výsledků 2. a 3. řádu metody subspace s validačními daty	48
Obrázek 15: Porovnání validačních a identifikačních průběhů metody subspace na modelu ARMAX.....	49
Obrázek 16: Porovnání zesílení původního systému a identifikovaných modelů	50
Obrázek 17: Porovnání validačních a identifikovaných průběhů na modelu OE.....	51
Obrázek 18: Porovnání výsledků rekurzivních metod na modelu ARX	52
Obrázek 19: Porovnání rekurzivních metod na modelu ARMAX	53
Obrázek 20: Porovnání rekurzivních metod na modelu OE	54
Obrázek 21: Odezva na jednotkový skok původního modelu	55
Obrázek 22: Porovnání výsledků rekurzivních metod na kmitavém modelu ARX	56
Obrázek 23: Porovnání průběhů rekurzivních metod s validačními daty modelu ARMAX.....	57
Obrázek 24: Porovnání validačních a identifikovaných průběhů na modelu OE.....	58
Obrázek 25: Metoda subspace na kmitavém modelu ARMAX	59
Obrázek 26: Porovnání validačních dat a výsledku identifikace na modelu OE.....	60
Obrázek 27: Výřez z dat řádu určený k identifikaci	61
Obrázek 28: Upravený vyřízlý vzorek identifikačních dat.....	62
Obrázek 29: Srovnání výsledků rekurzivních metod a subspace metody	64

Obrázek 30: Identifikační soubor dat.....	65
Obrázek 31: Porovnání výsledků metod - 1. řád	67
Obrázek 32: Data pro identifikaci - robotická ruka	68
Obrázek 33: Porovnání nejlepších výsledků.....	70
Obrázek 34: Kompletní soubor dat.....	71

Úvod

Z důvodu potřeby člověka řídit a regulovat veškeré procesy výroby je také nutná znalost charakteru systému či dokonce jeho matematického modelu. Tato znalost dává možnost správného nastavení řídicího pochodu nebo i třeba samotný systém pozměnit dle potřeby. Právě problematikou hledání matematického modelu se tato diplomová práce zabývá. Cílem je seznámit čtenáře nejprve se způsobem identifikace obecně a pak dále aplikovaně na několika rekurzivních metodách a metodě subspace. Protože je důležitým kritériem přesnost výsledného modelu, práce ukazuje, jakým způsobem lze tuto přesnost kvantifikovat. Právě autentičnost modelu s realitou je důležitá při další práci v oblasti regulace a modelování.

Čtenář je postupně proveden přípravou identifikačního procesu a zpracováním získaných dat. Dále jsou v práci postupně představeny metoda nejmenších čtverců, metoda pomocné proměnné, rozšířená metoda nejmenších čtverců a metoda subspace. Pro názornost jsou popsány matematicky, poté zalgoritimizovány a naprogramovány do prostředí Matlab. Je ukázáno jejich použití na modelovaných datech různých řádů a charakterů a poté i na reálných datech, a to jak lineárních i nelineárních. Práce tedy ukazuje jistý přehled možnosti použití těchto metod a tím radí, kde by se mohly uplatnit a použít.

1. Identifikace

V první kapitole je čtenář seznámen se základními pojmy identifikace dynamických systémů, možnostmi využití a dále s různými pohledy na problematiku identifikace. Je sestavena struktura celého identifikačního procesu a dále budou vysvětleny potřebné kroky k provedení identifikačního algoritmu. Při psaní této kapitoly bylo vycházeno z publikací [1], [2].

1.1 Základní pojmy

Obecně je pojem identifikace chápán jako ztotožnění reálného procesu s jeho modelem. Prakticky jde o hledání zákonitosti či vztahu. Identifikace se vyskytuje v mnoha oborech lidské činnosti a zdaleka ne pouze v těch technických. Důležité je uplatnění například ve finančnictví, biologii, sociálních vědách nebo předpovědi počasí. V tomto případě jde však o identifikaci, která se týká technické oblasti. Zde představuje důležitou podčást regulace. Cílem je získání dostatečně přesného vztahu k popisu chování reálného systému.

Identifikovaným předmětem je *reálný systém*, který vykazuje odezvu, tedy výstupní signál na vstupní buzení. Vstupním buzením může být buď definovaný vstupní signál, či poruchový signál, na který však reálný systém také reaguje. Výsledkem procesu je *model*, kterým se rozumí získaný vztah k popisu chování reálného systému. Tento vztah může být získán buď *analyticky*, nebo *experimentálně*.

Analytická identifikace představuje přístup k sestavení modelu pomocí matematicko-fyzikální analýzy. K popisu touto metodou je nutná znalost vnitřních fyzikálních pochodů a vztahů systému. A právě při dobré znalosti těchto vnitřních pochodů je její výhodou vysoká přesnost konečného modelu. Model by měl navíc platit pro každý pracovní bod, protože může být nelineární. Další velkou výhodou metody je nepotřebnost předchozího spouštění systému. Toho se využije u procesů, kde jsou vysoké náklady na stavbu či samotné měření. Nevýhodou je pak její vyšší komplikovanost, často až nemožnost použití u velice komplexních a složitých systémů. Model vzniklý touto metodou nazýváme *white-box*.

Druhým opačným přístupem je *identifikace experimentální*. Při této metodě je nejprve nutné naměřit data na reálné soustavě, a ta dále pak zpracovávat. Měření nejčastěji probíhá v určité pracovní oblasti, kde se systém chová alespoň částečně lineárně. Výsledkem experimentální identifikace je vztah mezi vstupním buzením a výstupním signálem bez znalosti vnitřního uspořádání a složitosti soustavy. Tento model je pak nazván *black-box*. V historii experimentálních metod vznikla celá řada. S rozvojem počítačové techniky využití metod výrazně narostlo.

V praxi lze také použít koncept částečného popisu matematicko-fyzikální cestou a částečného měření například v místě, kde je právě soustava moc složitá, či není možné ji dostatečně přesně popsat. Tomuto složenému modelu se pak říká *grey-box*.

Jelikož reálné systémy jsou v drtivé většině chápány jako spojité, první experimentální metody s tímto předpokladem také pracovaly a vznikaly *modely spojité*. Avšak s rozvojem počítačové techniky začaly vznikat *diskretizované modely*. Tento přechod umožnil rychlejší výpočet s dostatečnou přesností, a především vyšší stupeň možné automatizace. Ve výsledku pak často vzniká uzavřená smyčka, kdy regulátor je tvořen počítačem, tedy pracuje diskrétně, ale reálný systém je spojitý. Přechody mezi časovou a diskrétní oblastí řeší analogově-digitální a digitálně analogové převodníky.

Podle způsobu zpracování naměřených dat lze dělit ještě na *online* a *offline* metody. *Online* metodami rozumíme postupné zpracování dat, kde se již z několika hodnot zjišťují parametry modelu. Z dalších hodnot se model pouze zpřesňuje či upravuje. Výhodou těchto metod je, že není potřeba mít archivované všechny naměřené hodnoty. *Offline metodami* rozumíme metody, kde je výpočet matematického modelu proveden až po ukončení měření. Pro tyto metody jsou potřeba všechna data měření a model je identifikován dávkově. Níže jsou rozebrány nejprve offline metody a poté odvozeny jejich rekurzivní, tedy online, varianty.

Pomocí experimentálních metod lze identifikovat do takzvaných *parametrických*, či *neparametrických modelů*. *Parametrickými* modely se rozumí model s danou strukturou. Tuto strukturu je potřeba znát dopředu nebo ji vhodně odhadnout, před tím, než začneme samotnou identifikaci (například řád diferenciální rovnice). U *neparametrických* modelů není známa jejich struktura, jsou určeny grafem nebo tabulkou. Neparametrické modely nelze použít přímo pro řízení, avšak dokáží o systému

řícet mnoho informací. Používají se často k verifikaci identifikovaných modelů a jejich vlastností. Příkladem může být frekvenční či přechodová charakteristika.

Vstupní signál do soustavy může být předpokládán jako *deterministický*, tedy přesně definovaný, který je funkcí času (například jednotkový skok, trojúhelníkový signál, sinusový signál aj.), nebo může být vstupní signál *stochastický*, tedy náhodný. U těchto signálů předpokládáme, že každá jejich realizace je jedinečná, neopakovatelná. Měřit u nich můžeme pouze jejich statistické a pravděpodobnostní charakteristiky. Teoreticky je každý deterministický signál pouze speciálním případem stochastického. Prakticky vzato každý deterministický signál vždy přibírá část rušivé/náhodné složky a jde pouze o to, jak velké toto rušení je vůči samotnému užitečnému signálu. A právě dle tohoto kritéria je možné dělit identifikační metody na *deterministické* a *stochastické*.

Deterministické metody pracují se vstupním jasně definovaným signálem, který může být jak periodický, tak i neperiodický. Pro tyto metody povětšinou není potřeba výpočetní techniky. Příklady těchto metod jsou – *aproximace pomocí tečny v inflexním bodě* nebo *metoda profesora Strejce*. Výsledkem deterministických metod je plně deterministický model soustavy.

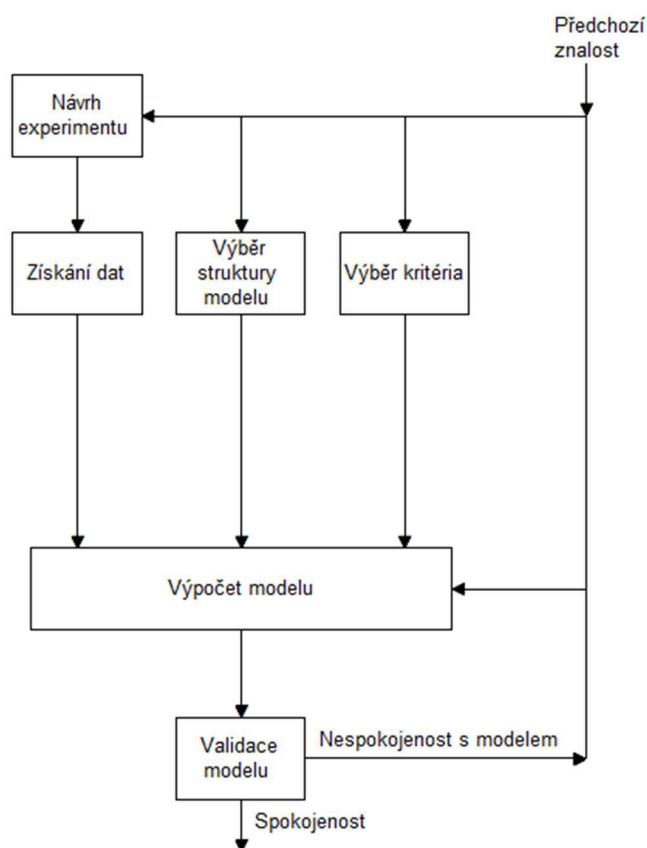
Stochastické metody jsou metodami, které vycházejí z měření na náhodné (v praxi pseudonáhodné) signály. Vyhodnocení probíhá pomocí výpočetní techniky, protože jsou komplikovanější a zdlouhavější než deterministické metody.

Použití získaného modelu může sloužit k předpovědi budoucího chování systému, zjištění chování za různých podmínek (například krajních hodnotách vstupních signálů). Získaný model může například také pomoci při návrhu regulačního pochodu, nastavení optimálních vlastností regulátoru. V neposlední řadě, v případě nákladných opakovaných spouštění systému, může model ušetřit nemalé prostředky při testování.

Je velice důležité nezapomínat, že při jakékoliv identifikaci vždy vzniká chyba oproti reálnému systému. Je tedy získána pouze aproximaci systému, která plně neodpovídá reálnému systému. Výsledný model je tudíž vždy zjednodušením.

1.2 Identifikační procedura

V experimentální identifikaci je třeba sestavit proceduru k získání modelu. Celá identifikační procedura je založená na předchozích informacích, které o systému máme. Příkladem této informace může být například nákladnost realizace experimentu, zda je systém kmitavým, či nekmitavým, rozsah, ve kterém se bude identifikační procedura odehrávat, zda je výstupní signál obecně zašuměný. Na obrázku č. 1 je znázorněn diagram identifikační procedury.



Obrázek 1: Diagram identifikační procedury dle [2]

Kroky identifikační procedury jsou:

- Návrh experimentu – zahrnuje volbu vstupního signálu, který musí být dostatečně bohatý. Dále představuje volbu rozsahu, ve kterém se budou měřené veličiny pohybovat – pracovního bodu. Dále se řeší otázka periody sběru dat, která musí být vhodně volena dle charakteru reálného systému. Protože může být experiment nákladný, musí být přípravě věnována náležitá pozornost.

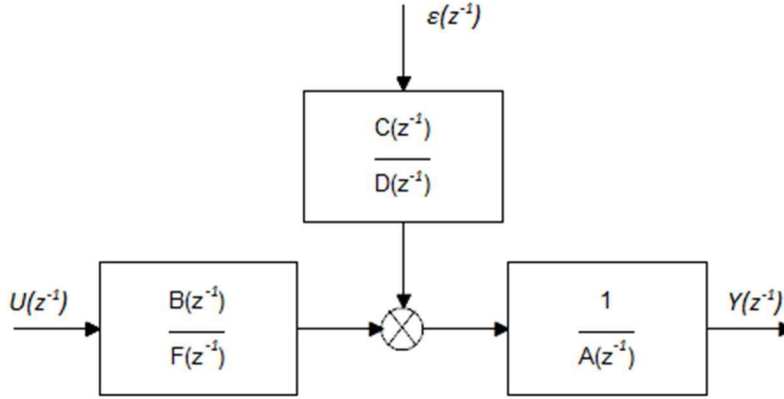
- Získání dat – představuje samotné měření. Je sbírána sada vstupní a odpovídající výstupní veličiny. Data jsou poté potřeba pro identifikaci připravit. Často se vybírá jedna sada dat jako *identikační* a druhá jako *verifikační*.
- Výběr struktury modelu – dle přechodí znalosti charakteru systému volíme strukturu a řád identifikovaného modelu, aby výsledný model mohl co možná nejpřesněji aproximovat reálnou soustavu. Struktura modelu je volena spolu s výběrem kritéria a výběrem metody identifikace. Důležitou otázkou je, zda je výstupní veličina obalena rušivou složkou, respektive do jaké míry vůči užitečné informaci. To je důležitým kritériem pro volbu právě struktury modelu a metody identifikace.
- Výběr kritéria – určuje třídu přesnosti, ve které se budeme pohybovat. Nejčastěji se užívá kvadrát odchylek výstupní veličiny modelu a reálného systému.
- Výpočet modelu – probíhá předem zadaným algoritmem – metodou.
- Validace dat – je konečné porovnání modelu s reálným systémem. Obecně je lepší, když probíhá na jiné sadě dat, než na které byla data identifikována. Pro validaci je možné užít porovnání simulovaných a naměřených charakteristik, a to buď porovnání v grafu či porovnání například *FIT-indexem*, který počítá s rozdíly výstupní veličiny.

1.3 Struktury lineárních modelů

Pro následné využití identifikovaného modelu je důležitým krokem výběr jeho struktury. V této podkapitole je popsáno několik základních typů. Tyto typy se dále rozlišují do tříd podle toho, jak pracují s šumovou částí modelu. Do třídy modelů *chyby rovnice* patří typy *ARX* a *ARMAX*. Do druhé třídy modelů s *chybou na výstupu* patří typy *OE* a *BJ*. Všechny tyto typy vychází z obecného lineárního modelu.

Obecný lineární model:

$$Y_m(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1}) * F(z^{-1})} * U(z^{-1}) + \frac{C(z^{-1})}{A(z^{-1}) * D(z^{-1})} * \varepsilon(z^{-1}) \quad (1)$$



Obrázek 2: Obecný lineární model

U polynomů se předpokládá následující tvar:

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1 * z^{-1} + \dots + a_{n_a} z^{-n_a} \quad (2)$$

$$B(z^{-1}) = b_1 * z^{-1} + b_2 * z^{-2} + \dots + b_{n_b} z^{-n_b}$$

$$C(z^{-1}) = 1 + c_1 * z^{-1} + \dots + c_{n_c} z^{-n_c}$$

$$D(z^{-1}) = 1 + d_1 * z^{-1} + \dots + d_{n_d} z^{-n_d}$$

$$F(z^{-1}) = 1 + f_1 * z^{-1} + \dots + f_{n_f} z^{-n_f}$$

Model je složen z *deterministické části*:

$$G_m(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1}) * F(z^{-1})}, \quad (3)$$

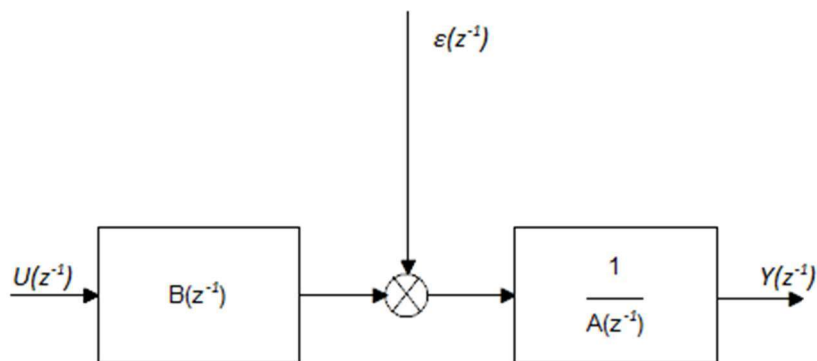
a *poruchové/šumové části*:

$$G_r(z^{-1}) = \frac{C(z^{-1})}{D(z^{-1})}. \quad (4)$$

Z obecného lineárního modelu lze postupně odvodit všechny následující typy modelů položením polynomu rovno jedné.

Model ARX:

$$Y_m(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} * U(z^{-1}) + \frac{1}{A(z^{-1})} * \varepsilon(z^{-1}) \quad (5)$$

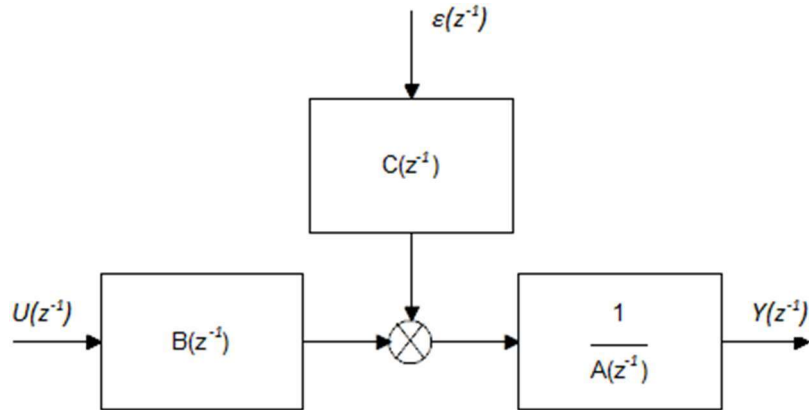


Obrázek 3: Model systému typu ARX

V modelu ARX jsou položeny polynomy $C(z^{-1}) = D(z^{-1}) = F(z^{-1}) = 1$. Tento typ modelu je nejpoužívanějším ze všech právě pro jeho jednoduchost a efektivitu. Používá se nejčastěji v kombinaci s *metodou nejmenších čtverců*. Nevýhodou tohoto modelu je, že poruchy jsou součástí dynamiky modelu, tedy mají stejnou sadu pólů.

Model ARMAX:

$$Y_m(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} * U(z^{-1}) + \frac{C(z^{-1})}{A(z^{-1})} * \varepsilon(z^{-1}) \quad (6)$$

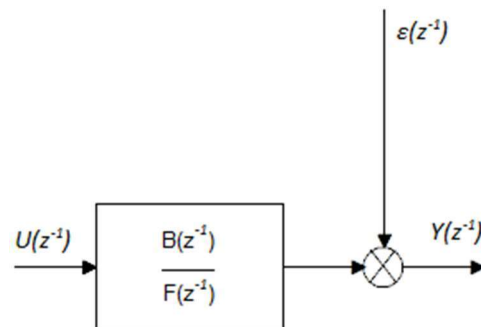


Obrázek 4: Model typu ARMAX

V modelu ARMAX jsou položeny polynomy $D(z^{-1}) = F(z^{-1}) = 1$. Model typu ARMAX má proti modelu typu ARX lepší možnosti popisu poruch a používá se v případech výrazněji zašumených ovlivněných sledovaných veličin.

Model OE:

$$Y_m(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})}{F(z^{-1})} * U(z^{-1}) + \varepsilon(z^{-1}) \quad (7)$$

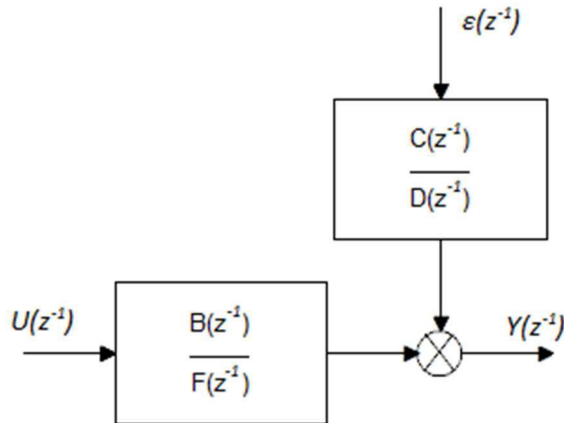


Obrázek 5: Model typu OE

V tomto modelu je uvažováno přímé působení šumu na výstup. Polynomy $A(z^{-1}) = C(z^{-1}) = D(z^{-1}) = 1$. Možnost jeho použití může být opět v případě vyššího zašumění měřeného signálu, kdy již nestačí ARX.

Model BJ:

$$Y_m(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})}{F(z^{-1})} * U(z^{-1}) + \frac{C(z^{-1})}{D(z^{-1})} * \varepsilon(z^{-1}) \quad (8)$$



Obrázek 6: Model typu BJ

V modelu BJ je položen pouze polynom $A(z^{-1}) = 1$. Do jisté míry se podobá modelu ARMAX (dokonce jej lze na tento model přepočítat), avšak předpokládá se působení šumu s jistou dynamikou přímo na výstupní veličinu, tedy nemá dynamiku modelu dle $A(z^{-1})$.

Pokud bude uvažováno dopravní zpoždění systému T_d , které by bylo d -násobkem periody vzorkování T_{vz} , pak je nutné násobit deterministickou část modelu operátorem z^{-d} .

2. Metody identifikace dynamických systémů

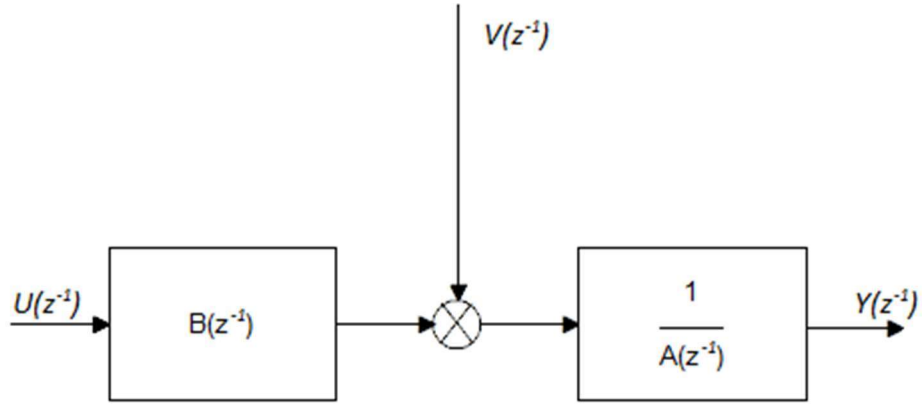
Stochastické experimentální metody identifikace jsou dnes velice běžně užívané právě díky rozmachu počítačové techniky. Využívá se různých numerických metod k aproximaci reálných systémů. Nejprve jsou odvozeny dvě základní metody založené na lineární regresi a dále jejich rekurzivní varianty. V této kapitole bylo vycházeno z publikací [2], [3], [4] a [5] a pak v kapitole subspace metody identifikace z publikací [6] a [7].

2.1 Dávkové metody identifikace

Dávkové metody jsou určeny k jednorázovému zjištění parametrů modelu. Nejprve je nutné získat všechna data měření a teprve po skončení měření začínáme estimovat parametry. Tyto metody se využívají v případě neměnných parametrů modelu a jednorázového nastavení regulátoru.

2.1.1 Metoda nejmenších čtverců

Je uvažován diskretní model ARX (obrázek 7) se vstupním signálem $u(k)$, výstupním signálem $y(k)$, poruchovou veličinou $v(k)$ jejichž Z -obrazy jsou $U(z^{-1})$, $Y(z^{-1})$, $D(z^{-1})$. Model je uvažován bez dopravního zpoždění.



Obrázek 7: Uvažovaný model ARX s poruchovou veličinou V

Model tohoto systému je tedy představován rovnicí:

$$A(z^{-1}) * Y(z^{-1}) = B(z^{-1}) * U(z^{-1}) + V(z^{-1}), \quad (9)$$

Tuto rovnici pak lze zapsat v diferenčním tvaru:

$$y(k) = -\sum_{i=1}^{n_a} a_i * y(k-i) + \sum_{i=1}^{n_b} b_i * u(k-i) + v(k), \quad (10)$$

n_a a n_b představují řád modelu. Její přepis do maticové podoby poté lze vyjádřit jako:

$$y(k) = \boldsymbol{\varphi}^T(k) * \boldsymbol{\theta} + v(k), \quad (11)$$

kde $\boldsymbol{\varphi}^T(k)$ je vektorem dat, jenž obsahuje měřené vstupní a výstupní proměnné a je definován:

$$\boldsymbol{\varphi}^T(k) = [-y(k-1), \dots, -y(k-n_a), u(k-1), \dots, u(k-n_b)],$$

a $\boldsymbol{\theta}$ je vektorem parametrů a je definován:

$$\boldsymbol{\theta} = [a_1, \dots, a_{n_a}, b_1, \dots, b_{n_b}]^T.$$

Ovšem při reálném měření na soustavě se rovnice zapíše:

$$y(k) = -\sum_{i=1}^{n_a} a_i * y(k-i) + \sum_{i=1}^{n_b} b_i * u(k-i) + e(k), \quad (12)$$

$e(k)$ zde představuje chybu modelu namísto poruchové veličiny $v(k)$. Tento přechod je velice důležitým krokem mezi soustavou a odhadem jejího modelu. Dále lze tedy vektorově zapsat rovnici:

$$y(k) = \boldsymbol{\varphi}^T(k) * \hat{\boldsymbol{\theta}} + e(k), \quad (13)$$

kde $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ představuje odhadovaný vektor neznámých parametrů, který je třeba určit. Pokud tuto rovnici č. 13 rozšíříme na tvar o N měření, přepis lze přepsat do podoby:

$$\begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}^T(1) \\ \boldsymbol{\varphi}^T(2) \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varphi}^T(N) \end{bmatrix} * \hat{\boldsymbol{\theta}} + \begin{bmatrix} e(1) \\ e(2) \\ \vdots \\ e(N) \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Maticově tedy:

$$\mathbf{y} = \boldsymbol{\Phi} * \hat{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{e}, \quad (15)$$

kde

$$\mathbf{y} = [y(1), \dots, y(N)]^T,$$

$$\mathbf{e} = [e(1), \dots, e(N)]^T,$$

$$\boldsymbol{\Phi} = [\boldsymbol{\varphi}^T(1), \dots, \boldsymbol{\varphi}^T(N)]^T.$$

Krátká diskuze:

Metoda nejmenších čtverců je vlastně řešení přeúčtené soustavy lineárních rovnic. Pro jednoznačné určení parametrů soustavy je nezbytně nutné, aby počet měření N byl vyšší, než je počet parametrů soustavy. Pokud by tomu tak nebylo, vznikla by lineární soustava o méně rovnicích než neznámých. Dále pokud by nastala situace, kdy by byla chyba modelu nulová, tak je možné problém řešit jako soustavu N rovnic o N neznámých.

Metoda nejmenších čtverců je založena na minimalizaci kvadrátu odchylky modelu od reálného systému. Tedy:

$$J = \mathbf{e}^T * \mathbf{e} \rightarrow \min, \quad (16)$$

a chybový vektor z rovnice 16 je zapsán:

$$\mathbf{e} = \mathbf{y} - \boldsymbol{\phi} * \hat{\boldsymbol{\theta}}, \quad (17)$$

Principem je tedy srovnání derivace kritéria podle odhadu parametrů modelu s nulou.

$$\frac{\partial J}{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}} = \frac{\partial (\mathbf{y} - \boldsymbol{\phi} * \hat{\boldsymbol{\theta}})^T}{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}} * \frac{\partial (\mathbf{y} - \boldsymbol{\phi} * \hat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}}, \quad (18)$$

zde využijeme vztahu:

$$\frac{\partial (\mathbf{a}^T * \mathbf{b})}{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}} = \frac{\partial \mathbf{a}^T}{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}} * \mathbf{b} + \frac{\partial \mathbf{b}^T}{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}} * \mathbf{a}, \quad (19)$$

a tedy po derivaci a srovnání s nulou:

$$\frac{\partial J}{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}} = -2 * \boldsymbol{\phi}^T * (\mathbf{y} - \boldsymbol{\phi} * \hat{\boldsymbol{\theta}}) = 0, \quad (20)$$

řešením je vyjádření vektoru odhadu parametrů $\hat{\boldsymbol{\theta}}$:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(k) = [\boldsymbol{\phi}^T(k) * \boldsymbol{\phi}(k)]^{-1} * \boldsymbol{\phi}^T(k) * \mathbf{y}(k), \quad (21)$$

Tímto jsme je odvozena jednorázovou metodu nejmenších čtverců. Matici $(\boldsymbol{\phi}^T * \boldsymbol{\phi})^{-1}$ nazýváme kovarianční maticí, značí se $\mathbf{K}$. Na matici $\mathbf{K}$ je požadována invertovatelnost, tedy aby byla regulární.

Výsledný odhad parametrů je *nevychýlený (nestranný)*, pokud střední hodnota chyb modelu $E\{\mathbf{e}\} = 0$ a zároveň pokud $\mathbf{e}$ nekoreluje řádky $\boldsymbol{\phi}$.

Vztah lze dále zapsat v ekvivalentním tvaru:

$$\hat{\theta} = [\sum_{k=1}^N \varphi(k) * \varphi^T]^{-1} + [\sum_{k=1}^N \varphi(k) * y(k)], \quad (22)$$

Protože by však tyto sumy mohly narůst do velice vysokých hodnot a v praxi by mohly vzniknout numerické problémy, hodnoty jsou normalizovány dělením N , tedy vztah je udáván jako:

$$\hat{\theta} = \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k) * \varphi^T(k) \right]^{-1} * \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k) * y(k) \right]. \quad (23)$$

2.1.2 Metoda pomocné proměnné (IV)

Pro metodu nejmenších čtverců se předpokládá, že porucha $d(k)$ je představována bílým šumem. V případě, že porucha není bílým šumem a je korelována s datovým vektorem, je vhodné použít jinou metodu hledání parametrů. Metoda pomocné proměnné je modifikací metody nejmenších čtverců, která přímo nemodeluje poruchu.

Je uvažována rovnice lineární regrese (rovnice 15) s odhadem parametrů a stejnou kritériální funkcí (r. 16) jako u metody nejmenších čtverců:

$$y = \phi * \hat{\theta} + e,$$

$$J = e^T * e \rightarrow \min,$$

a výsledkem tedy vztah 21 vypočtený v kapitole 2.1 pro odhad parametrů:

$$\hat{\theta} = (\phi^T * \phi)^{-1} * \phi^T * y,$$

Dále je uvažován reálný systém dokonale aproximovaný modelem ARX:

$$y = \Phi * \theta + v,$$

kde θ jsou reálné parametry systému a porucha v není korelována s vektorem pozorování Φ . Pokud by se nyní chyba odhadu e rovnala nule, tak odhad parametrů $\hat{\theta}$ by se rovnal reálným parametrům θ a jejich rozdíl byl nulový:

$$\hat{\theta} - \theta = \quad (24)$$

$$= [(\phi^T * \phi)^{-1} * \phi^T * y] - [(\phi^T * \phi)^{-1} * (\phi^T * \phi) * \theta] =$$

$$\begin{aligned}
&= (\boldsymbol{\phi}^T * \boldsymbol{\phi})^{-1} * \boldsymbol{\phi}^T * (\mathbf{y} - \boldsymbol{\phi} * \boldsymbol{\theta}) = \\
&= [(\boldsymbol{\phi}^T * \boldsymbol{\phi})^{-1} * \boldsymbol{\phi}^T * \mathbf{v} = 0.
\end{aligned}$$

Ekvivalentně lze zapsat:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta} = \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k) * \varphi^T(k) \right]^{-1} * \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k) * v(k) \right] = 0. \quad (25)$$

Aby rovnice 25 byla rovna nule, je nutné:

$$\begin{aligned}
1. \quad &\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k) * \varphi^T(k) \quad \text{byla invertovatelná,} \\
2. \quad &\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k) * v(k) = 0.
\end{aligned} \quad (26)$$

Toto jsou dvě nutné podmínky ke splnění předpokladu nulového rozdílu odhadnutého vektoru parametrů a vektoru parametrů reálného systému. Pro nevychýlenost odhadu je nutné, aby porucha $v(k)$ nebyla korelovaná s vektorem pozorování $\varphi(k)$. Pro metodu nejmenších čtverců tento předpoklad však splňuje pouze bílý šum.

Myšlenka metody pomocné proměnné je založena na splnění výše zmíněných kritérií a úpravě vektoru pozorování $\varphi(k)$, aby byl nekorelovaný (resp. co nejméně korelovaný) s poruchou $v(k)$. Díky této myšlence se metoda stává prakticky nezávislou na zbarvení šumu. Nový vektor $Z(k)$, který se použije namísto $\varphi(k)$, se pak nazývá pomocnou proměnnou.

Tedy při záměně $\varphi(k)$ za $Z(k)$ je výpočet odhadovaných parametrů roven:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N Z(k) * \varphi^T(k) \right]^{-1} * \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N Z(k) * y(k) \right], \quad (27)$$

Ekvivalentně:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\mathbf{Z}^T * \boldsymbol{\phi})^{-1} * \mathbf{Z}^T * \mathbf{y}. \quad (28)$$

Volba pomocné proměnné $Z(k)$:

1) *Pomocná proměnná nezávislá na modelu*

$$Z(k) = [u(k-1), u(k-2), \dots, u(k-n_a-n_b)]^T,$$

Sestavení této proměnné představuje pouze zpoždění vstupů. Tato volba je v praxi nejběžnější.

2) *Pomocná proměnná závislá na modelu*

$$Z(k) = [-y_{iv}(k-1), \dots, -y_{iv}(k-n_a), u(k-1), \dots, u(k-n_a-n_b)]^T,$$

kde y_{iv} je generován rovnicí:

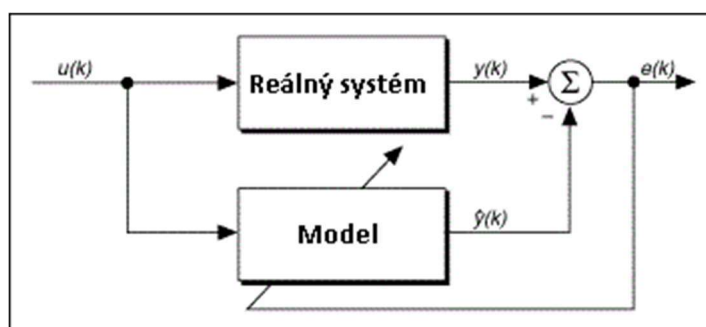
$$y_{iv}(k) = Z(k) * \hat{\theta}(k), \quad (29)$$

Jejíž řešení je možné pomocí lineární regrese. Pomocná proměnná $Z(k)$ je tedy závislá na odhadech minulých hodnot výstupu, proto by měla méně korelovat s poruchou.

2.2 Rekurzivní metody identifikace dynamických systémů

Zatímco jednorázové metody identifikace jsou určeny k získání parametrů dávkově po naměření a jsou tím omezeny na jednodušší systémy, kde se nepočítá se změnou parametrů, rekurzivní metody identifikace se používají k průběžné identifikaci. Toho se využije k postupnému zlepšení odhahu, nebo k odhadu parametrů systému, který se postupně může měnit. Využití těchto metod je například v adaptivním řízení.

Velkou výhodou rekurzivních metod identifikace je jejich paměťová nenáročnost. Základem je využití starých parametrů a nově naměřených dat.



Obrázek 8: Schéma získání modelu rekurzivní metodou

2.3 Rekurzivní metoda nejmenších čtverců

V kapitole (2.1.1) je odvozen vztah 21 pro výpočet parametrů pomocí metody nejmenších čtverců. Tato metoda tedy umožňuje po N měřeních určit parametry modelu v kroku k .

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(k) = [\boldsymbol{\phi}^T(k) * \boldsymbol{\phi}(k)]^{-1} * \boldsymbol{\phi}^T(k) * \mathbf{y}(k),$$

kde $(\boldsymbol{\phi}^T * \boldsymbol{\phi})^{-1}$ se nazývá kovarianční maticí $\mathbf{K}$. Úkolem pro odvození rekurzivního vztahu je nyní určit rekurzivní vztahy v kroku $k + 1$ vektoru parametrů $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ a kovarianční matice $\mathbf{K}$.

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(k + 1) = \mathbf{K}(k + 1) * \boldsymbol{\phi}^T(k + 1) * \mathbf{y}(k + 1), \quad (30)$$

kde se matice $\boldsymbol{\phi}^T(k)$ a vektor $\mathbf{y}(k)$ rozšířily o jeden krok pozorování:

$$\boldsymbol{\phi}(k + 1) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}(k) \\ \boldsymbol{\varphi}^T(k + 1) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{y}(k + 1) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}(k) \\ y(k + 1) \end{bmatrix}.$$

Tedy:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(k + 1) &= \left[\begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}^T(k) & \boldsymbol{\varphi}^T(k + 1) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}(k) \\ \boldsymbol{\varphi}^T(k + 1) \end{bmatrix} \right]^{-1} = \\ &= [\boldsymbol{\phi}^T(k) * \boldsymbol{\phi}(k) + \boldsymbol{\varphi}^T(k + 1) * \boldsymbol{\varphi}(k + 1)]^{-1}. \end{aligned} \quad (31)$$

Rekurzivně, a protože $\boldsymbol{\phi}^T(k) * \boldsymbol{\phi}(k) = \mathbf{K}^{-1}(k)$, lze pak vyjádřit vztah:

$$\mathbf{K}^{-1}(k + 1) = \mathbf{K}^{-1}(k) + \boldsymbol{\varphi}(k + 1) * \boldsymbol{\varphi}^T(k + 1), \quad (32)$$

z toho vyplývá vztah pro $\mathbf{K}^{-1}(k)$:

$$\mathbf{K}^{-1}(k) = \mathbf{K}^{-1}(k + 1) - \boldsymbol{\varphi}(k + 1) * \boldsymbol{\varphi}^T(k + 1). \quad (33)$$

Vektor parametrů ovšem svou dimenzi samozřejmě nemění. $\hat{\boldsymbol{\theta}}(k + 1)$ vyjadřuje nový odhad parametrů.

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{\theta}}(k+1) &= \\
&= \mathbf{K}(k+1) * [\boldsymbol{\phi}(k) \quad \boldsymbol{\varphi}^T(k+1)] * \begin{bmatrix} \mathbf{y}(k) \\ \mathbf{y}(k+1) \end{bmatrix} = \\
&= \mathbf{K}(k+1) * [\boldsymbol{\phi}(k) * \mathbf{y}(k) + \boldsymbol{\varphi}^T(k+1) * \mathbf{y}(k+1)].
\end{aligned} \tag{34}$$

Nyní je dosazeno z nerekurzivního vztahu: $\boldsymbol{\phi}(k) * \mathbf{y}(k) = \mathbf{K}^{-1}(k) * \hat{\boldsymbol{\theta}}(k)$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(k+1) = \mathbf{K}(k+1) * [\mathbf{K}^{-1}(k) * \hat{\boldsymbol{\theta}}(k) + \boldsymbol{\varphi}^T(k+1) * \mathbf{y}(k+1)], \tag{35}$$

ze vztahu 34:

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{\theta}}(k+1) &= \mathbf{K}(k+1) * [(\mathbf{K}^{-1}(k+1) - \boldsymbol{\phi}(k+1) * \boldsymbol{\varphi}^T(k+1)) * \hat{\boldsymbol{\theta}}(k) \\
&\quad + \boldsymbol{\varphi}^T(k+1) * \mathbf{y}(k+1)].
\end{aligned} \tag{36}$$

Po roznásobení a následném vytknutí $\mathbf{K}(k+1) * \boldsymbol{\phi}(k+1)$:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(k+1) = \hat{\boldsymbol{\theta}}(k) + \mathbf{K}(k+1) * \boldsymbol{\phi}(k+1) * [\mathbf{y}(k+1) - \boldsymbol{\varphi}^T(k+1) * \hat{\boldsymbol{\theta}}(k)]. \tag{37}$$

Je tedy získán vztah pro nový odhad parametrů. Tento odhad je dle vztahu závislý na minulém odhadu parametrů, nově naměřených datech a chybě nového odhadu výstupu $\mathbf{e}(k+1)$.

$$\mathbf{e}(k+1) = \mathbf{y}(k+1) - \boldsymbol{\varphi}^T(k+1) * \hat{\boldsymbol{\theta}}(k). \tag{38}$$

Protože ve vztahu pro výpočet $\mathbf{K}(k+1)$ se vyskytuje inverze:

$$\mathbf{K}(k+1) = [\mathbf{K}^{-1}(k) + \boldsymbol{\phi}(k+1) * \boldsymbol{\varphi}^T(k+1)]^{-1}, \tag{39}$$

která je numericky poměrně složitou operací, lze tento vztah přepsat pomocí maticové identity:

$$[\mathbf{A} + \mathbf{B} * \mathbf{C} * \mathbf{D}]^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1} * \mathbf{B} * [\mathbf{C}^{-1} + \mathbf{D} * \mathbf{A}^{-1} * \mathbf{B}]^{-1} * \mathbf{D} * \mathbf{A}^{-1}, \tag{40}$$

kde:

$$\mathbf{A} = \mathbf{K}^{-1}(k),$$

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\varphi}(k + 1),$$

$$\mathbf{C} = 1,$$

$$\mathbf{D} = \boldsymbol{\varphi}^T(k + 1),$$

dosadit do vztahu pro $\mathbf{K}(k + 1)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(k + 1) &= \mathbf{K}(k) - \mathbf{K}(k) * \boldsymbol{\varphi}(k + 1) * [1 + \boldsymbol{\varphi}^T(k + 1) * \mathbf{K}(k) * \boldsymbol{\varphi}(k + 1)]^{-1} \\ &\quad * \boldsymbol{\varphi}^T(k + 1) * \mathbf{K}(k). \end{aligned} \quad (41)$$

Protože výraz: $[1 + \boldsymbol{\varphi}^T(k + 1) * \mathbf{K}(k) * \boldsymbol{\varphi}(k + 1)]^{-1}$ je skalárem, vztah lze zapsat:

$$\mathbf{K}(k + 1) = \mathbf{K}(k) - \frac{\mathbf{K}(k) * \boldsymbol{\varphi}(k + 1) * \boldsymbol{\varphi}^T(k + 1) * \mathbf{K}(k)}{1 + \boldsymbol{\varphi}^T(k + 1) * \mathbf{K}(k) * \boldsymbol{\varphi}(k + 1)}. \quad (42)$$

Rekurzivní metodu formálně tedy lze zapsat pomocí těchto získaných vztahů:

$$\mathbf{e}(k + 1) = y(k + 1) - \boldsymbol{\varphi}^T(k + 1) * \hat{\boldsymbol{\theta}}(k),$$

$$\mathbf{K}(k + 1) = \mathbf{K}(k) - \frac{\mathbf{K}(k) * \boldsymbol{\varphi}(k + 1) * \boldsymbol{\varphi}^T(k + 1) * \mathbf{K}(k)}{1 + \boldsymbol{\varphi}^T(k + 1) * \mathbf{K}(k) * \boldsymbol{\varphi}(k + 1)},$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(k + 1) = \hat{\boldsymbol{\theta}}(k) + \mathbf{K}(k + 1) * \boldsymbol{\varphi}(k + 1) * \mathbf{e}(k + 1).$$

Často se pak zvlášť počítá součin $\mathbf{K}(k + 1) * \boldsymbol{\varphi}(k + 1)$, který představuje korekční (váhový) vektor. Výsledkem je pak váha $\mathbf{W}(k + 1)$, která s přibývajícím krokem k snižuje svou hodnotu. Vztah níže je tedy odvozen z rovnice 43.

$$\mathbf{W}(k + 1) = \frac{\mathbf{K}(k) * \boldsymbol{\varphi}(k + 1)}{1 + \boldsymbol{\varphi}^T(k + 1) * \mathbf{K}(k) * \boldsymbol{\varphi}(k + 1)}. \quad (43)$$

Inicializace rekurzivní metody nejmenších čtverců:

Pro inicializaci rekurzivní metody je nutné zadat počáteční hodnoty pro $\mathbf{K}(0)$ a $\hat{\boldsymbol{\theta}}(0)$, to je možné několika způsoby:

- a) dle předchozí znalosti systému můžeme zvolit „přibližné“ hodnoty,

- b) aplikací nerekurzivního postupu, tedy nejprve data získáme a po vypočtení prvního odhadu parametrů přejdeme na rekurzivní verzi metody,
- c) nastavení matice $\mathbf{K}(0) = \alpha * \mathbf{I}$, kde $\mathbf{I}$ je jednotková matice a α je vysoké číslo, výsledkem je pak fakt, že váhový vektor má velký vliv na odhad nových parametrů. Nezáleží tedy tolik na počátečních hodnotách odhadnutého vektoru $\hat{\boldsymbol{\theta}}(0)$ (volí se $\hat{\boldsymbol{\theta}}(0) = 0$) a metoda se v prvních krocích blíží nerekurzivní verzi.

Algoritmus rekurzivní metody nejmenších čtverců:

- a) inicializace $\mathbf{K}(0)$ a $\hat{\boldsymbol{\theta}}(0)$,
- b) naplnění (získání) hodnot vektoru $\boldsymbol{\varphi}^T(k+1)$

$$\boldsymbol{\varphi}^T(k+1) = [-y(k), \dots, -y(k-n_a+1), u(k), \dots, u(k-n_b+1)],$$
- c) vypočtení chyby predikce $\mathbf{e}(k+1)$:
$$\mathbf{e}(k+1) = y(k+1) - \boldsymbol{\varphi}^T(k+1) * \hat{\boldsymbol{\theta}}(k),$$
- d) vypočtení matice $\mathbf{W}(k+1)$:
$$\mathbf{W}(k+1) = \frac{\mathbf{K}(k) * \boldsymbol{\varphi}(k+1)}{1 + \boldsymbol{\varphi}^T(k+1) * \mathbf{K}(k) * \boldsymbol{\varphi}(k+1)},$$
- e) nalezení nového odhadu parametrů $\hat{\boldsymbol{\theta}}(k+1)$:
$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(k+1) = \hat{\boldsymbol{\theta}}(k) + \mathbf{W}(k+1) * \mathbf{e}(k+1),$$
- f) výpočet matice $\mathbf{K}(k+1)$:

$$\mathbf{K}(k+1) = \mathbf{K}(k) - \frac{\mathbf{K}(k) * \boldsymbol{\varphi}(k+1) * \boldsymbol{\varphi}^T(k+1) * \mathbf{K}(k)}{1 + \boldsymbol{\varphi}^T(k+1) * \mathbf{K}(k) * \boldsymbol{\varphi}(k+1)},$$

po tomto kroku se algoritmus vrací k bodu *b*) a pokračuje v nové smyčce.

2.3.1 Exponenciální zapomínání

Klasický rekurzivní algoritmus metody nejmenších čtverců má ovšem své nevýhody. Metoda prakticky nahlíží pouze do historie velikosti rozměru modelu, tedy nesleduje vývoj a vliv starších měření. Proto se do rekurzivního algoritmu zavádí faktor zapomínání λ . Efekt tohoto faktoru spočívá v postupném zapomínání údajů. Nejvyšší váha je přidělena na poslední měření.

Pro model soustavy druhého řádu by vektory $\boldsymbol{\varphi}^T(k)$ vypadaly:

$$\boldsymbol{\varphi}^T(k) = [-y(k-1), -y(k-2), u(k-1), u(k-2)],$$

$$\lambda * \boldsymbol{\varphi}^T(k+1) = \lambda * [-y(k-2), -y(k-3), u(k-2), u(k-3)],$$

$$\lambda^2 * \boldsymbol{\varphi}^T(k+2) = \lambda^2 * [-y(k-3), -y(k-4), u(k-3), u(k-4)],$$

tedy:

$$\begin{bmatrix} y(k) \\ \lambda * \mathbf{y}(k-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}^T(k) \\ \lambda * \boldsymbol{\phi}(k-1) \end{bmatrix} * \hat{\boldsymbol{\theta}}(k) + \mathbf{e}(k). \quad (44)$$

Po dosazení do původní rovnice řešení lineární regrese:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(k) = [\boldsymbol{\phi}^T(k) * \boldsymbol{\phi}(k)]^{-1} * \boldsymbol{\phi}^T(k) * \mathbf{y}(k),$$

Lze upravit do rekuzivní podoby a kovarianční matice $\mathbf{K}(k)$:

$$\mathbf{K}(k+1) = \frac{1}{\lambda} \left(\mathbf{K}(k) - \frac{\mathbf{K}(k) * \boldsymbol{\phi}(k+1) * \boldsymbol{\phi}^T(k+1) * \mathbf{K}(k)}{\lambda + \boldsymbol{\phi}^T(k+1) * \mathbf{K}(k) * \boldsymbol{\phi}(k+1)} \right). \quad (45)$$

Prakticky se pak algoritmus rekuzivní metody nejmenších čtverců mění pouze v tomto jedinném vztahu.

Vhodnost použití exponenciálního zapomínání je pro pomalu se měnící parametry systému. Hodnota λ se volí $0,97 < \lambda < 1$, kdy hodnota 1 znamená klasický rekuzivní algoritmus a metoda starší data nezapomíná. Při nižších hodnotách se snižuje přesnost metody a vzrůstá citlivost na šum.

2.4 Rekuzivní metoda pomocné proměnné

Stejně jako metodu nejmenších čtverců, lze definovat rekuzivně i metodu pomocných proměnných. Prakticky jde jen o záměnu vektoru $\boldsymbol{\varphi}(k+1)$ za vektor $\mathbf{Z}(k+1)$, který představuje pomocnou proměnnou.

$$\mathbf{e}(k+1) = y(k+1) - \boldsymbol{\varphi}^T(k+1) * \hat{\boldsymbol{\theta}}(k),$$

$$\mathbf{W}(k+1) = \frac{\mathbf{K}(k) * \mathbf{Z}(k+1)}{1 + \boldsymbol{\varphi}^T(k+1) * \mathbf{K}(k) * \mathbf{Z}(k+1)},$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(k+1) = \hat{\boldsymbol{\theta}}(k) + \mathbf{W}(k+1) * \mathbf{e}(k+1),$$

$$\mathbf{K}(k+1) = \mathbf{K}(k) - \frac{\mathbf{K}(k) * \mathbf{Z}(k+1) * \boldsymbol{\varphi}^T(k+1) * \mathbf{K}(k)}{1 + \boldsymbol{\varphi}^T(k+1) * \mathbf{K}(k) * \mathbf{Z}(k+1)}.$$

Protože je rekurzivní metoda pomocných proměnných však v prvních několika iteracích značně nespolehlivá, tak se ke startu používá rekurzivního algoritmus metody nejmenších čtverců.

2.5 Rozšířená rekurzivní metoda nejmenších čtverců

Další metodou metody nejmenších čtverců je její rozšířená varianta. Tato varianta lze použít pro všechny zmíněné typy modelů. Níže je uvedena verze pro model typu ARMAX.

Model typu ARMAX je popsán:

$$A(z^{-1}) * Y(z^{-1}) = B(z^{-1}) * U(z^{-1}) + C(z^{-1}) * V(z^{-1}), \quad (46)$$

Diferenční rovnicí popsán jako:

$$y(k) = -\sum_{i=1}^{n_a} a_i * y(k-i) + \sum_{i=1}^{n_b} b_i * u(k-i) + \sum_{i=1}^{n_c} c_i * v(k-i)$$

Pokud je položen polynom $C(z^{-1}) = 0$, vznikne model typu ARX , u kterého jsou odhadovány pouze polynomy $A(z^{-1})$ a $B(z^{-1})$. A právě rozšířenou metodou je snaha získat odhady polynomu $C(z^{-1})$. Aby bylo možné tyto parametry získat, je nutná znalost hodnot $v(k)$, které však nejsou měřitelné. Proto je nutné je získat výpočtem buď jako chybu predikce $\mathbf{e}_p(k)$, nebo jako skutečnou chybu modelování $\mathbf{e}_m(k)$ (tzv. residuum).

Chyba predikce: $\mathbf{e}_p(k+1) = y(k+1) - \boldsymbol{\varphi}^T(k+1) * \hat{\boldsymbol{\theta}}(k)$ – jako v minulých metodách – rozdíl mezi reálným výstupem systému a jeho vypočteným výstupem pomocí estimovaných parametrů z minulého kroku.

Chyba modelování: $\mathbf{e}_m(k) = y(k) - \boldsymbol{\varphi}^T(k) * \hat{\boldsymbol{\theta}}(k)$ – tedy rozdíl mezi reálným výstupem a vypočteným výstupem pomocí estimovaných parametrů ze stejného kroku.

Vektor parametrů je pro tuto metodu zapsán:

$$\boldsymbol{\theta} = [a_1, \dots, a_{n_a}, b_1, \dots, b_{n_b}, c_1, \dots, c_{n_c}]^T.$$

Vektor dat:

$$\boldsymbol{\varphi}^T(k+1) = [-y(k), \dots, -y(k-n_a+1), u(k), \dots, u(k-n_b+1), \\ e_p(k), \dots, e_p(k-n_e+1)],$$

nebo:

$$\boldsymbol{\varphi}^T(k+1) = [-y(k), \dots, -y(k-n_a+1), u(k), \dots, u(k-n_b+1), \\ e_m(k), \dots, e_m(k-n_c+1)].$$

Algoritmus pro rozšířenou rekurzivní metodu nejmenších čtverců je pak formálně stejný jako pro klasickou metodu nejmenších čtverců, vyjma výše uvedených změn.

2.6 Metody subspace identifikace

Jiným přístupem k získání matematického modelu jsou metody subspace identifikace. Tyto metody pracují ve stavovém prostoru a získávají přímo z dat vstupních a výstupních vektor stavů. Využívají přitom velmi robustních numerických metod, jako je SVD a QR faktorizace. Velkou výhodou těchto metod je stejná složitost při identifikaci systémů s více vstupy a více výstupy (MIMO), jako při identifikaci systémů s jedním výstupem a jedním vstupem (SISO), na které je tato práce zaměřena.

Pro pochopení algoritmu subspace metod je nutné nejdříve vysvětlit některé matematické operace a nástroje, které metoda využívá.

2.6.1 SVD rozklad

SVD faktorizace je rozklad matice na součin tří jiných matic. Vychází z faktu, že každou matici lze rozepsat jako součin dvou unitárních matic a jedné diagonální. Tedy matice $\mathbf{A}$ o rozměru $[l \times m]$ je rozložitelná na součin matic $\mathbf{A} = \mathbf{U} * \boldsymbol{\Sigma} * \mathbf{V}^H$, kde $\mathbf{U}$ a $\mathbf{V}$ jsou matice unitární o rozměrech $[l \times l]$ a $[m \times m]$ a $\boldsymbol{\Sigma}$ je diagonální matice singulárních čísel o rozměru $[l \times m]$. Singulární čísla jsou pak v matici $\boldsymbol{\Sigma}$ seřazena sestupně. V případě, že je matice $\mathbf{A}$ reálná, stávají se z unitárních matic $\mathbf{U}$ a $\mathbf{V}$ matice ortogonální.

Singulární čísla jsou potom definována jako:

$$\sigma_i(\mathbf{A}) = \sqrt{\lambda_i(\mathbf{A}^T * \mathbf{A})} = \sqrt{\lambda_i(\mathbf{A} * \mathbf{A}^T)}, \quad (47)$$

kde λ_i jsou vlastní čísla matice $\mathbf{A} * \mathbf{A}^T$.

Využití může být například k:

- určení hodnoty matice (posouzení blízkosti k singularitě),
- maticové pseudo-inverzi,
- řešení úlohy nejmenších čtverců $\mathbf{Z} * \boldsymbol{\theta} = \mathbf{b}$ i bez potřeby regulární matice $\mathbf{Z}$.

2.6.2 RQ dekompozice

RQ dekompozice rozděluje matici $\begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{Y} \end{pmatrix}$ na součin dolní trojúhelníkové matice $\mathbf{R}$ a matice $\mathbf{Q}$. RQ dekompozice reprezentuje pravoúhlou projekci řádkových vektorů matice $\mathbf{Y}$ na řádkové vektory matice $\mathbf{U}$.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_{21} & \mathbf{R}_{22} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}_2 \end{pmatrix} \quad (48)$$

2.6.3 Hankelova matice

Hankelova matice je matice se stejnými prvky na vedlejších diagonálách. Hankelova matice pak vypadá:

$$H = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_2 & a_3 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_m & \dots & \dots & a_{m+n-1} \end{pmatrix}.$$

Jednotlivé prvky mohou být také vektory či matice, potom jde o blokovou Hankelovu matici.

2.6.4 Moore-Penroseova pseudo-inverze

Moore-Penroseova pseudo-inverze je zobecněná inverze matice a lze ji použít i v případě, když je matice A čtvercová singulární či obdélníková. Obvykle se značí A^+ . Její výpočet pak probíhá pomocí SVD faktorizace.

2.6.5 Popis metody

Diskrétní systém je popsán stavovým popisem jako:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A} * \mathbf{x}(k) + \mathbf{B} * \mathbf{u}(k), \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C} * \mathbf{x}(k) + \mathbf{D} * \mathbf{u}(k), \end{aligned} \quad (49)$$

Kde $\mathbf{x}(k)$ je vektor vnitřních stavů systému, $\mathbf{u}(k)$ je vektor vstupů, $\mathbf{y}(k)$ vektor výstupů. Matice $\mathbf{A}$ je matice systému, $\mathbf{B}$ matice buzení, $\mathbf{C}$ matice výstupu a $\mathbf{D}$ matice převodu.

A protože rovnice stavového popisu musí platit v každém čase, lze odvodit maticovou rovnici:

$$\begin{pmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(i-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{i-1} \end{pmatrix} * \mathbf{x}(0) + \begin{pmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{CB} & \mathbf{D} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{CAB} & \mathbf{CB} & \mathbf{D} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{CA}^{i-2}\mathbf{B} & \mathbf{CA}^{i-3}\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{CB} & \mathbf{D} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} u(0) \\ u(1) \\ u(2) \\ \vdots \\ u(i-1) \end{pmatrix}, \quad (50)$$

rovnice je obecně posunutelná v čase, tím vzniká tzv. datová rovnice:

$$\mathbf{Y}_H = \mathbf{\Gamma}_i * \mathbf{x}(k) + \mathbf{H}_i * \mathbf{U}_H, \quad (51)$$

Kde $\mathbf{Y}_H$ je Hankelova matice výstupních hodnot k , $\mathbf{\Gamma}_i$ je rozšířenou maticí pozorovatelnosti, $\mathbf{H}_i$ se nazývá blokovou Toeplitzovou maticí a $\mathbf{U}_H$ je Hankelova matice vstupních hodnot.

Odvození metody je nejjednodušší nejprve na systému bez vstupů, tedy na autonomním systému. Je snaha najít matici odpovídající rozšířené matici pozorovatelnosti z datové rovnice Γ_i . Pro autonomní systém má tedy datová rovnice tvar:

$$Y_H = \Gamma * X_i, \quad (52)$$

kde $X_i = (x(0) \quad A * x(0) \quad \dots \quad A^{N-1} * x(0))$.

Nyní se použije SVD faktorizace:

$$Y_H = U * \Sigma * V^T = \Gamma_i * T * T^{-1} * X_i, \quad (53)$$

kde T je transformační matice. A protože víme, že:

$$A_T = T^{-1} * A * T,$$

$$B_T = T^{-1} * B,$$

$$C_T = C * T,$$

$$D_T = D,$$

pak lze napsat:

$$U = \Gamma_i * T = \begin{pmatrix} C * T * (CT) \\ C * T * (T^{-1} * A * T) \\ \vdots \\ C * T * (T^{-1} * A * T)^{i-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_T \\ C_T * A_T \\ \vdots \\ C_T * A_T^{i-1} \end{pmatrix}, \quad (54)$$

z čehož lze vyjádřit matice A_T a C_T .

$C_T = U_1$, kde U_1 znamená první řádek matice U ,

$$A_T = U_1^+ * U_2.$$

Pokud ovšem bude uvažován vstup systému, je problém řešení složitější. Tím se zabývá tzv. **MOESP** metoda. Znovu je tedy uvažována datová rovnice:

$$Y_H = \Gamma_i * X_i + H_i * U_H,$$

Při znalosti $\mathbf{H}_i$ by bylo možné použít SVD faktorizaci, a díky ní získat rozšířenou matici pozorovatelnosti $\mathbf{F}_i$. Tuto matici ovšem lze získat pomocí metody nejmenších čtverců. Hledáme tedy minimum rozdílu $\mathbf{Y}_H - \mathbf{H}_i * \mathbf{U}_H$ při závislé $\mathbf{H}_i$.

Řešením je estimované $\hat{\mathbf{H}}_i = \mathbf{Y}_H * \mathbf{U}_H^T * (\mathbf{U}_H * \mathbf{U}_H^T)^{-1}$. Pokud si dále označíme:

$$\mathbf{Y}_H - \mathbf{H}_i * \mathbf{U}_H = \mathbf{Y}_H * \mathbf{\Pi}, \quad (55)$$

kde:

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{I} - \mathbf{U}_H^T * (\mathbf{U}_H * \mathbf{U}_H^T)^{-1} * \mathbf{U}_H.$$

Ze součinu $\mathbf{Y}_H * \mathbf{\Pi}$ lze pomocí SVD faktorizace získat rozšířenou matici pozorovatelnosti, a tedy matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{C}$. Tento výpočet se však neprovádí pro svou velkou výpočetní náročnost, protože se zde vyskytují velké matice a jejich inverze. Pro zjednodušení se použije QR dekompozice (resp. RQ).

$$\begin{pmatrix} \mathbf{U}_H \\ \mathbf{Y}_H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_{21} & \mathbf{R}_{22} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}_2 \end{pmatrix}, \quad (56)$$

odkud se z matice $\mathbf{R}_{22}$ provede SVD rozklad.

$$\mathbf{R}_{22} = \mathbf{U} * \sqrt{\mathbf{\Sigma}} * \sqrt{\mathbf{\Sigma}} * \mathbf{V}^T = \mathbf{F}_i * \mathbf{X}_i, \quad (57)$$

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{U} * \sqrt{\mathbf{\Sigma}}, \quad (58)$$

Nyní můžeme vyjádřit matice $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$.

$$\mathbf{A} = \mathbf{F}_i^+ * \mathbf{F}_i, \quad (59)$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}_1 - \text{tedy první řádek matice } \mathbf{F}_i \quad (60)$$

Získání matic $\mathbf{B}$ a $\mathbf{D}$ je o něco složitější. Nejprve se přenásobí datová rovnice zleva ortogonálním vektorem $\mathbf{F}_i^\perp$ a zprava pseudo-inverzí matice $\mathbf{U}_H$.

$$\mathbf{F}_i * \mathbf{Y}_H * \mathbf{U}_H^+ = \mathbf{F}_i^\perp * \mathbf{F}_i * \mathbf{X}_i * \mathbf{U}_H^+ + \mathbf{F}_i^\perp * \mathbf{H}_i * \mathbf{U}_H * \mathbf{U}_H^+ = \mathbf{F}_i^\perp * \mathbf{H}_i, \quad (61)$$

Po označení:

$$\mathbf{M} = \mathbf{F}_i * \mathbf{Y}_H * \mathbf{U}_H^+,$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{F}_i^\perp.$$

Lze získat rovnici:

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{L} * \begin{pmatrix} \boldsymbol{D} \\ \boldsymbol{B} \end{pmatrix}. \quad (62)$$

3. Porovnání metod identifikace

Ve výše zmíněných kapitolách je uvedeno a odvozeno několik identifikačních metod. Tato část diplomové práce se zaměřuje na porovnání výše zmíněných metod, které byly naprogramovány do prostředí Matlab dle vzorců a postupů, které jsou v práci rozvedeny. Dále budou testovány nejprve na uměle vytvořených a dále na reálně naměřených datech. Nejprve je však nutné si stanovit způsob vyhodnocení a porovnání úspěšnosti či kvality identifikace, tedy verifikovat získaný model.

3.1 Kritérium kvality modelu

V procesu identifikace je velice důležitým krokem verifikace získaného modelu. Aby bylo možné mezi sebou výsledky porovnat, je nutné určit míru úspěchu jednotlivých estimací. K tomu účelu slouží kritéria kvality modelu. My budeme používat takzvaný *FIT index* (dále jen *FIT*).

$$FIT = \left(1 - \frac{\sqrt{\sum_{k=1}^N (y(k) - \hat{y}(k))^2}}{\sqrt{\sum_{k=1}^N (y(k) - \bar{y}(k))^2}} \right) * 100 [\%], \quad (63)$$

Kde $y(k)$ značí reálný naměřený vzorek, $\hat{y}(k)$ představuje modelovaný výstup pomocí estimovaného modelu a $\bar{y}(k)$ označuje průměr hodnot $y(k)$.

Ze vztahu () je patrné, pokud se bude rovnat výstupní hodnota $y(k)$ naměřená hodnotě modelované $\hat{y}(k)$ bude *FIT index* roven 100 %, tedy bude maximální věrohodnost modelu, tudíž v porovnání model, který se bude přibližovat 100 % je nejkvalitnějším. Z definice je dokonce možné dosáhnout negativního výsledku *FIT indexu*, tato hodnota nastane v případě, že estimovaný model hrubě neodpovídá naměřeným hodnotám.

3.2 Porovnání na uměle vytvořených datech

Pro názornost a zajištění jistého stupně volnosti pro potřeby testování jsou data nejprve uměle vytvořena. Bude ukázán způsob pro porovnávání metod identifikace. Nejprve bude provedeno porovnání jednoduché dávkové metody nejmenších čtverců s její variantou

pomocné proměnné. Data budou uměle zarušena a vytvořena postupně pomocí modelů ARX, ARMAX a OE. Z vytvořených dat budou vystřiženy vzorky pro identifikaci a následně pro validaci.

Následně bude postupně porovnána rekuzivní metoda nejmenších čtverců, rekuzivní metoda instrumentální proměnné a rozšířená rekuzivní metoda nejmenších čtverců. U rekuzivních metod se používá k inicializaci postup *c)* z kapitoly 2.3, tedy nastavení kovarianční matice na diagonále velmi vysoké číslo $\alpha = 10^9$ a vektor parametrů je nulový. Tento způsob inicializace je velice univerzální a v případě, že nejsou známy přibližné informace o systému dopředu, tak i nejvýhodnější. U metod založených na instrumentální proměnné je použita pomocná proměnná závislá na modelu, protože v různých situacích a měřeních dávala mnohem lepší výsledky. Pro rozšířenou metodu nejmenších čtverců se k výpočtu parametrů používá chyby modelování.

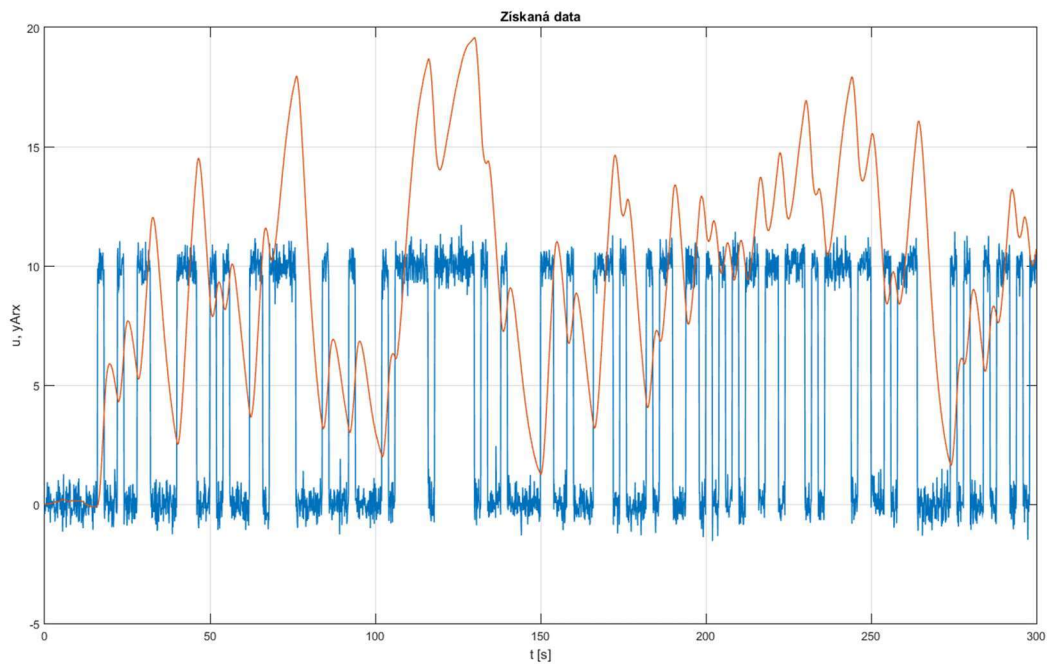
Systém je vždy nejprve vytvořen jako spojitý a dále diskretizován. Jako zdroj vstupního signálu bude použit generátor *PRBS* (*Pseudo Random Binary Signal*), který vykazuje dostatečně bohatý průběh s rozsahem hodnot $u = 0 - 10$. Jako zdroj rušení a poruchy je použit náhodný signál generovaný pomocí funkce *randn* o amplitudě $d = 0 - 2,5$. Délka celkového vzorku je volena *300 sekund* s periodou vzorkování *0,1 s*.

3.2.1 Metoda nejmenších čtverců a metoda instrumentální proměnné

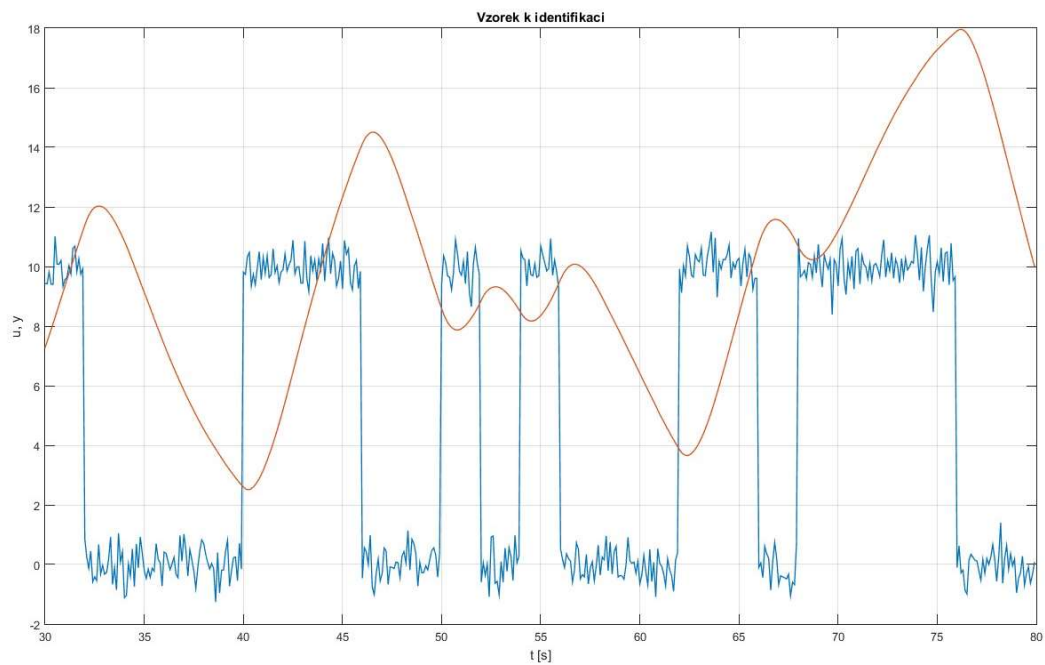
Pro účel testování byla vytvořena sada dat se zarušeným vstupem a vstupující poruchou do modelu *ARX*, kde je porucha filtrována pouze členem $1/A(z^{-1})$. Jako původní systém byl použit systém 2. řádu se sdruženými póly $p_{1,2} = -0,4$ s jednoduchou charakteristikou tvaru s' a zesílením $k=2$.

Na obrázku č. 9 lze vidět uměle získaná data dle výše popsaných parametrů. Modrý průběh představuje vstup do modelu a červený průběh výstup z modelu. Protože jde o vytvořená data, vzorek je již posunut v ose *y* do nuly. Z této sady dat je vystřižen vzorek mezi 30. a 80. sekundou pro účel identifikace (obr. č. 10) a vzorek mezi 100. až 200. sekundou pro účel validace. Amplituda poruchy $d = 1,5$ u modelů *ARX* a *ARMAX*

a pro model OE $d = 0,5$. Pro první dva modely je amplituda vyšší, protože prochází dynamikou systému a tím utlumena.



Obrázek 10: Kompletní získaná sada dat

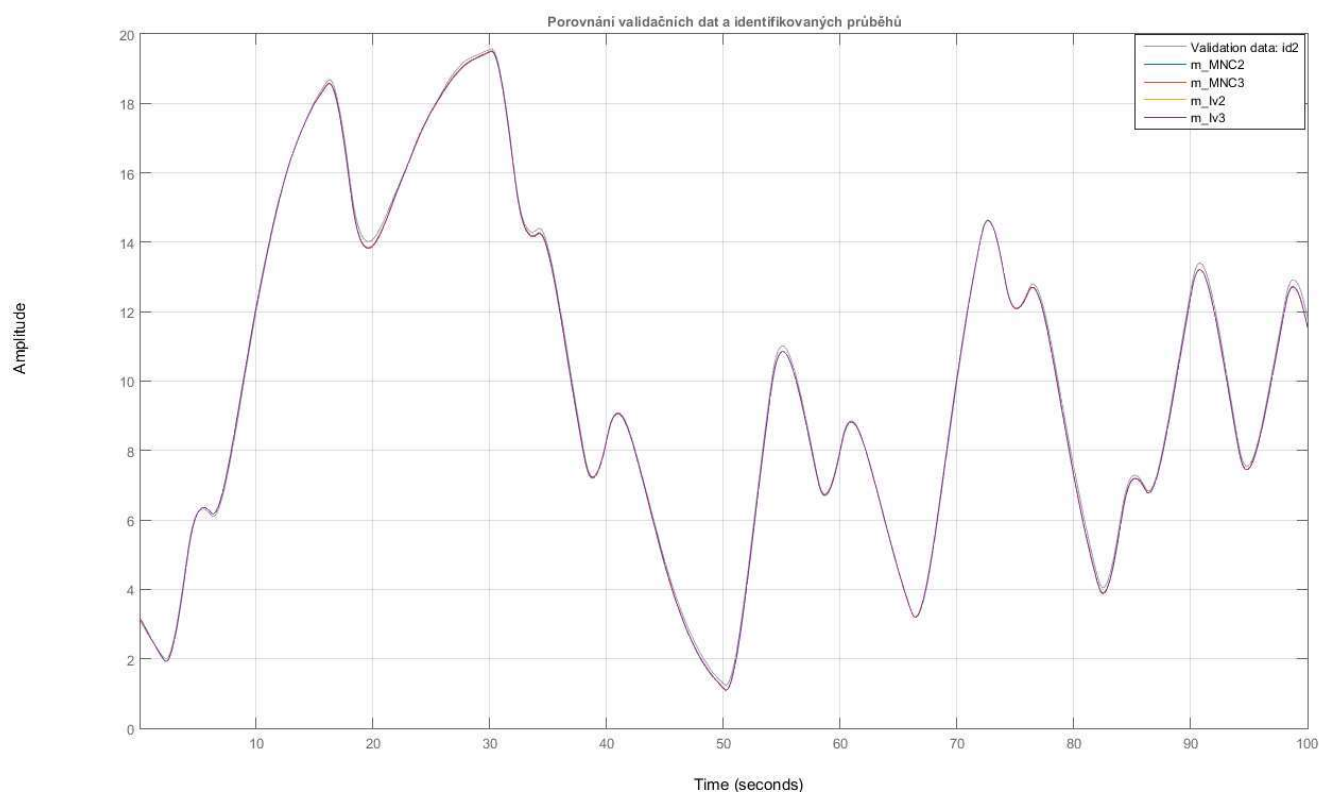


Obrázek 9: Výřez dat od 30. do 80. sekundy

Po této přípravě dat je zvolen 2. a 3. řád modelu. Po samotné identifikaci je provedena její validace, a to pomocí grafu a tabulky hodnot. Níže je dále vidět v tabulce č.1 porovnání výsledků metody nejmenších čtverců a pomocné proměnné. Jméno modelu m_MNC2 intuitivně označuje model druhého řádu získaný metodou nejmenších čtverců atp.

	$A(z^{-1})$	$B(z^{-1})$	FIT [%]
m_MNC2	$1 - 1,922z^{-1} + 0,9231z^{-2}$	$0,001609z^{-1} + 0,001454z^{-2}$	97,47
m_MNC3	$1 - 1,899z^{-1} + 0,88z^{-2} + 0,02059z^{-3}$	$0,001604z^{-1} + 0,001465z^{-2} + 6,861 \times 10^{-5}z^{-3}$	97,5
m_lv2	$1 - 1,921z^{-1} + 0,923z^{-2}$	$0,001608z^{-1} + 0,001453z^{-2}$	97,65
m_lv3	$1 - 1,255z^{-1} - 0,3576z^{-2} + 0,6151z^{-3}$	$0,001581z^{-1} + 0,00252z^{-2} + 0,001006z^{-3}$	97,67
Originál	$1 - 1,922z^{-1} + 0,9231z^{-2}$	$0,001558z^{-1} + 0,001517z^{-2}$	

Tabulka 1: Výsledky 2. a 3. řádu metod nejmenších čtverců a pomocné proměnné na modelu ARX



Obrázek 11: Validační data v porovnání s identifikovanými průběhy

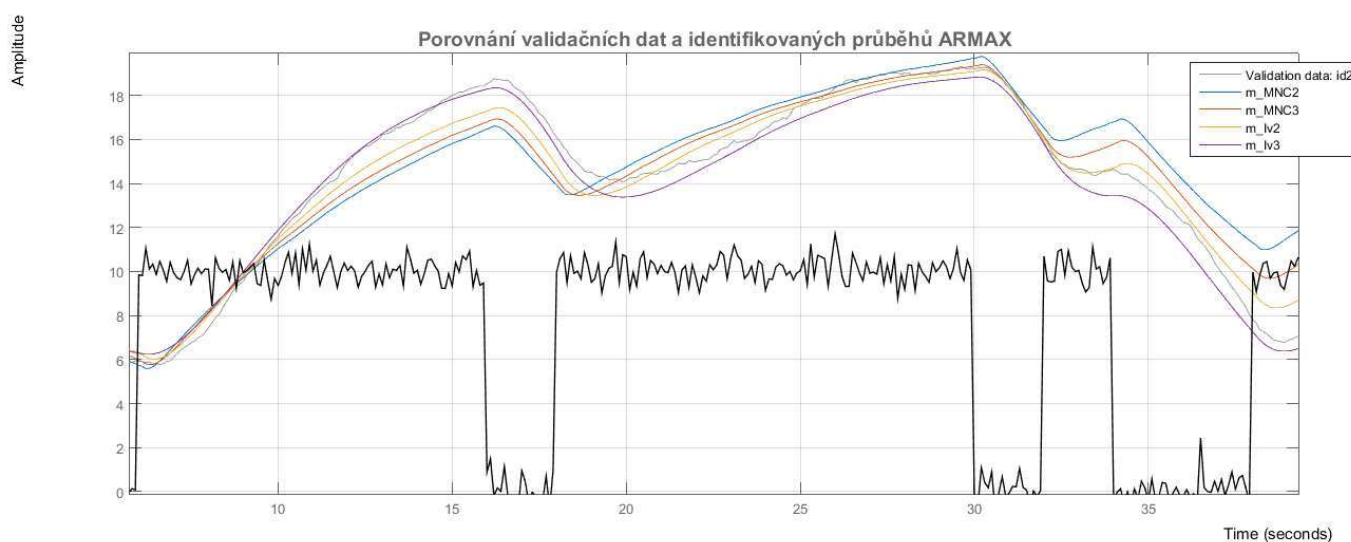
Z výše uvedené tabulky a grafu je zřejmé, že při identifikaci jednoduchého ARX modelu nemá ani jedna z metod problém s nalezením poměrně přesného modelu, protože všechny

modely vykazují shodu větší než 97 %. Dokonce je zde prakticky jedno, jaký řád modelu je použit. U modelu m_MNC3 je u posledního členu zřejmé, že by bylo možné použít minimalizaci řádu modelu. Na výše umístěných průbězích je též dobře vidět jistá omezenost modelu ARX reflektovat poruchy systému.

O něco zajímavější výsledky přináší testování metod na modelu $ARMAX$. Pro tento model byla zvolena jedna nula systému aproximující poruchu systému. V tabulce č. 2 jsou výsledky identifikačního procesu 2. a 3. řádem, jako tomu bylo v předchozím případě.

	$A(z^{-1})$	$B(z^{-1})$	FIT [%]
m_MNC2	$1 - 1,628z^{-1} + 0,6323z^{-2}$	$-0,002777z^{-1} + 0,01184z^{-2}$	64,03
m_MNC3	$1 - 1,351z^{-1} - 0,05965z^{-2} + 0,3612z^{-3}$	$-0,001473z^{-1} + 0,006211z^{-2} + 0,00323z^{-3}$	75,23
m_lv2	$1 - 1,877z^{-1} + 0,8788z^{-2}$	$-0,002749z^{-1} + 0,006703z^{-2}$	85,67
m_lv3	$1 - 1,256z^{-1} - 0,3606z^{-2} + 0,6194z^{-3}$	$0,0007813z^{-1} + 0,00362z^{-2} + 0,0004833z^{-3}$	85,35
Originál	$1 - 1,922z^{-1} + 0,9231z^{-2}$	$0,001558z^{-1} + 0,001517z^{-2}$	

Tabulka 2: Výsledky 2. a 3. řádu metod nejmenších čtverců a pomocné proměnné na modelu $ARMAX$



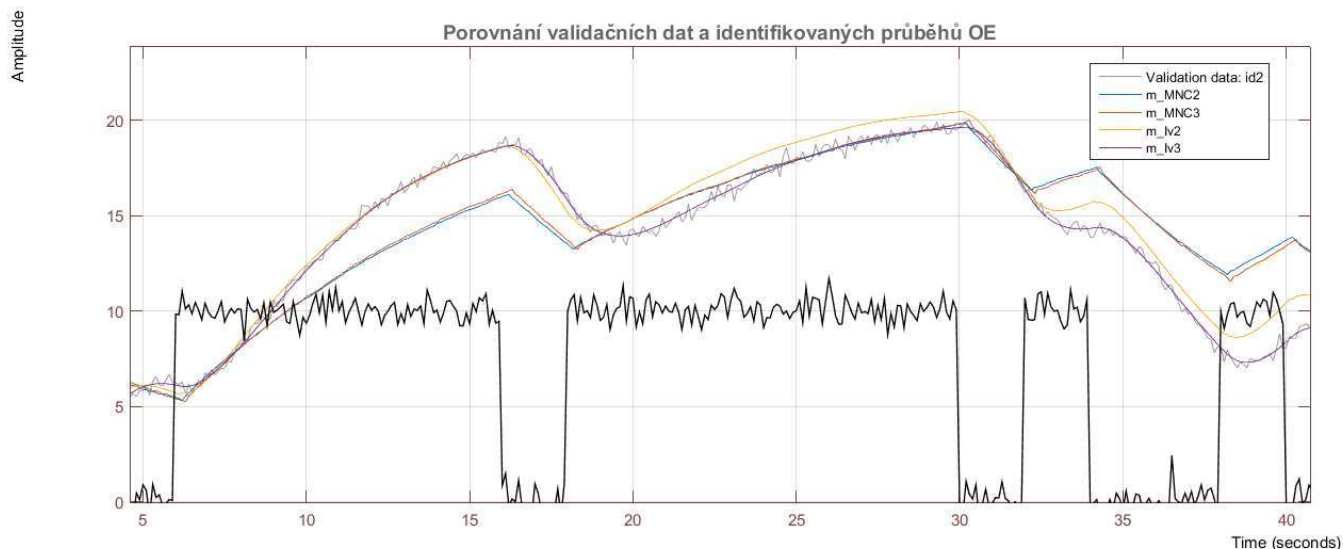
Obrázek 12: Porovnání validačních a identifikovaných průběhů na modelu $ARMAX$

Z grafu č. 12 a tabulky č. 2 lze dobře vyčíst, že metoda nejmenších čtverců v klasické podobě již má potíže s více zarušenými daty – resp. s, v tomto případě, lepší aproximací poruchy. Zajímavé je, že pokud přidáme řád, tak lze tento nedostatek do jisté míry potlačovat. Metoda pomocné proměnné v tomto případě ukazuje svou větší sílu a rezistenci vůči zarušení.

Následujícím testovaným modelem je model *OE*, kde je porucha přidána přímo na výstup systému, a může tak představovat nepřesnosti měřicího členu na výstupu.

	$A(z^{-1})$	$B(z^{-1})$	FIT [%]
m_MNC2	$1 - 0,628z^{-1} - 0,3732z^{-2}$	$-0,001218z^{-1} + 0,03136z^{-2}$	53,65
m_MNC3	$1 - 0,5494z^{-1} - 0,3024z^{-2} - 0,1321z^{-3}$	$-0,004035z^{-1} + 0,003155z^{-2} + 0,04319z^{-3}$	56,41
m_lv2	$1 - 1,8956z^{-1} + 0,8568z^{-2}$	$-0,003129z^{-1} + 0,006836z^{-2}$	82,78
m_lv3	$1 - 1,258z^{-1} - 0,3546z^{-2} + 0,6357z^{-3}$	$0,001487z^{-1} + 0,00284z^{-2} + 0,0009854z^{-3}$	95,01
Originál	$1 - 1,922z^{-1} + 0,9231z^{-2}$	$0,001558z^{-1} + 0,001517z^{-2}$	

Tabulka 3: Výsledky 2. a 3. řádu metod nejmenších čtverců a pomocné proměnné na modelu *OE*



Obrázek 13: Porovnání validačních a identifikovaných průběhů na modelu *OE*

Zde se z grafu 13 a tabulky 3 nejlépe jeví metoda pomocné proměnné, avšak třetího řádu i přesto, že původní signál je řádu druhého. Naopak jednoduché metody nejmenších čtverců výsledky za metodami pomocných proměnných jasně zaostávají.

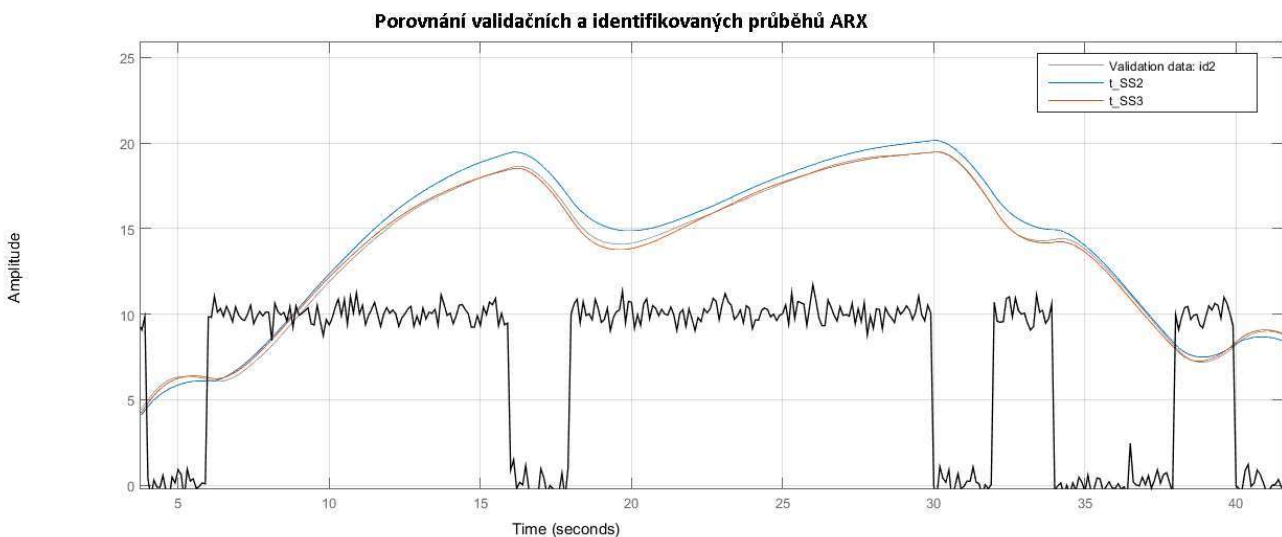
3.2.2 Metoda subspace

Metoda subspace je porovnávána na stejných datech, jako byly předchozí metody. Výpočetně jde o mnohem složitější metodu, která využívá SVD a LQ rozkladu. Při výpočtech vznikají velké matice, které značně ovlivňují rychlost výpočtu. Protože výsledkem subspace identifikace jsou matice **A**, **B**, **C** a **D**, jsou poté převáděny na přenosovou funkci a až poté srovnávány. Ačkoliv subspace metoda identifikace při určitých úpravách umí sama určit a minimalizovat řád systému, v této práci byla naprogramována s přímým zadáním řádu modelu dopředu.

Jako první je provedena identifikace metodou subspace na datech ARX modelu a po vzoru z předchozí kapitoly opět pomocí 2. a 3. řádu. Podle teorie by měla mít metoda problémy se zarušenými signály, pokud výstup a šum nejsou nezávislé.

	$A(z^{-1})$	$B(z^{-1})$	FIT [%]
t_SS2	$1 - 1,943z^{-1} + 0,944z^{-2}$	$0,00636 + 0,004334z^{-1} - 0,002656z^{-2}$	90,1
t_SS3	$1 - 2,922z^{-1} + 2,846z^{-2} - 0,9237z^{-3}$	$-0,00046 + 0,00111z^{-1} - 0,00062z^{-2} - 0,000941z^{-3}$	96,29
Originál	$1 - 1,922z^{-1} + 0,9231z^{-2}$	$0,001558z^{-1} + 0,001517z^{-2}$	

Tabulka 4: Výsledky 2. a 3. řádu metody subspace na modelu ARX



Obrázek 14: Porovnání výsledků 2. a 3. řádu metody subspace s validačními daty

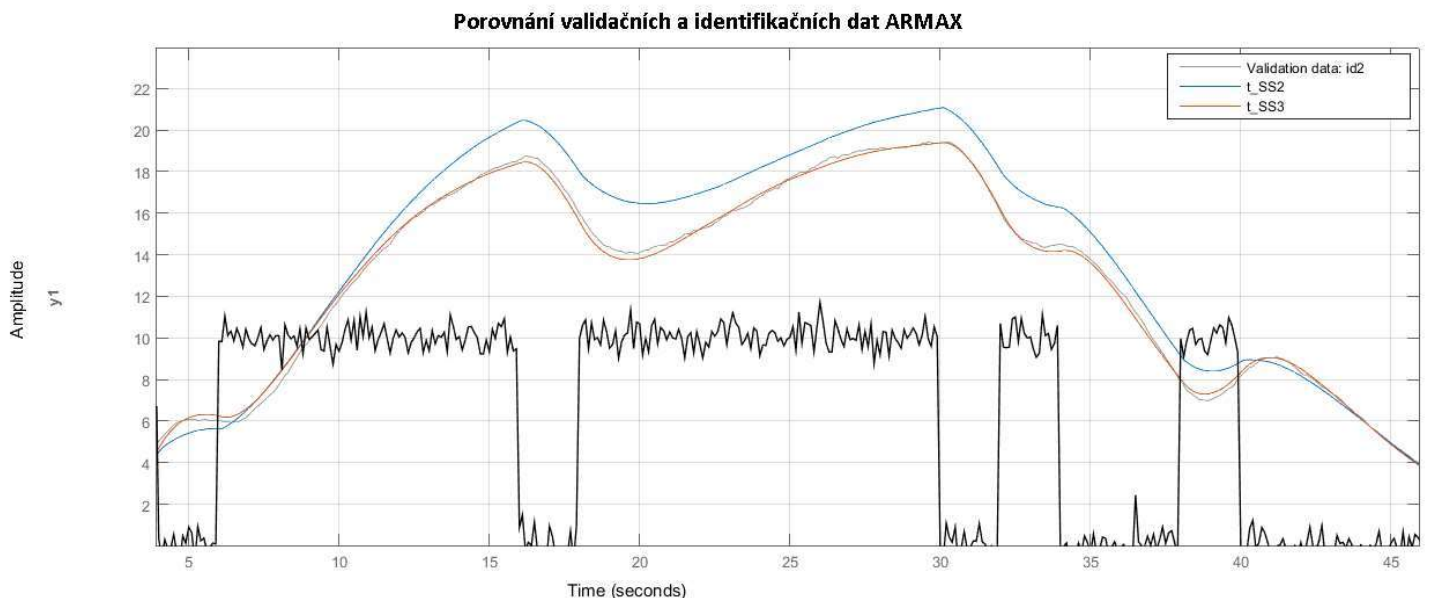
Jak lze vidět z grafu č. a tabulky č., tak metoda slušně aproximuje model ARX. Ovšem ikdyž je model 2. řádu, tak pokud metoda identifikuje také 2. řádem, má menší úspěch,

než když se provede identifikace 3. řádem. To je právě zaviněno zarušením. Tedy metoda je schopná velice dobře aproximovat, ale je nutno si pomoci vyšším řádem. Je nutné si také povšimnout, že se v polynomech $B(z^{-1})$ objevil neryze dynamický člen. To je způsobeno nenulovou maticí D .

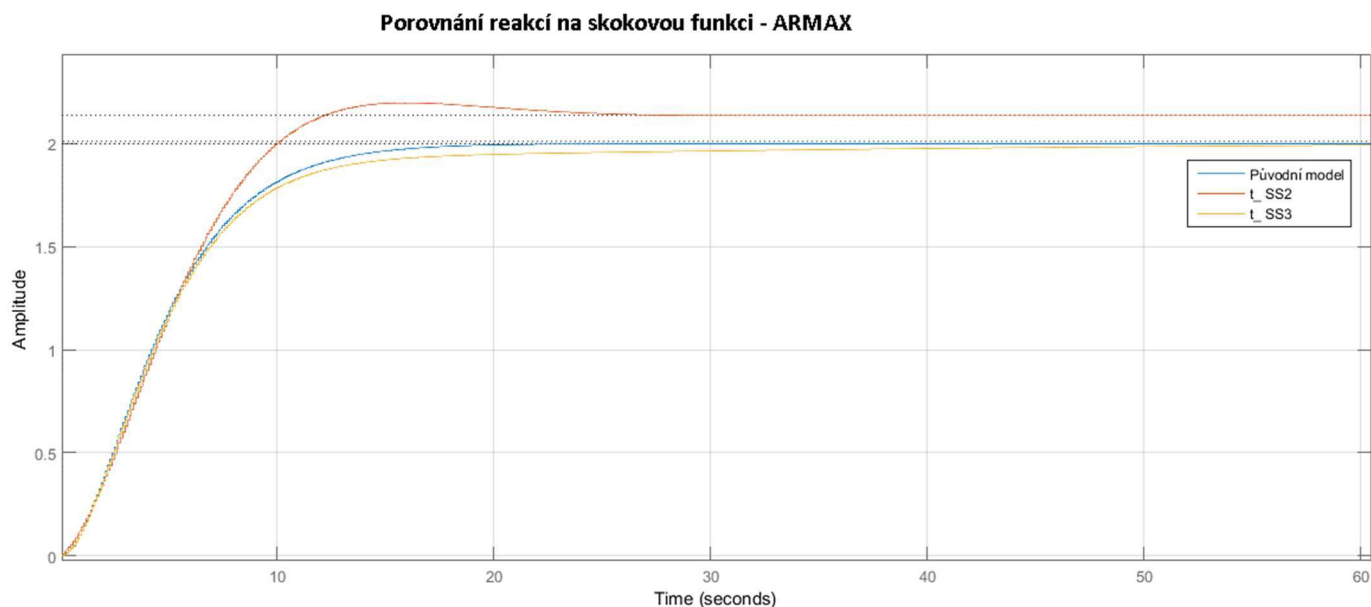
Další srovnání je provedeno na modelu *ARMAX*. Na níže umístěném grafu č. 15 a tabulce č. 5 je zřejmé, že metoda již začala mít problém s přesností při identifikaci 2. řádem. Naopak při identifikaci vyšším řádem opět dokázala svůj nedostatek nahradit. Na obrázku č. je porovnání reakcí modelů na skokovou funci. Identifikovaný model pomocí metody subspace má dokonce jiné znatelně statické zesílení a projevuje se mírný překmit. Třetí řád má zesílení stejné, ale dosáhne ho až poměrně pozdě. I tak je výsledek 94 % velice dobrý. U identifikace 3. řádem, navíc již neryze dynamický člen polynomu $B(z^{-1})$, je nulový.

	$A(z^{-1})$	$B(z^{-1})$	FIT [%]
t_SS2	$1 - 1,957z^{-1} + 0,9575z^{-2}$	$0,000403 + 0,007575z^{-1} - 0,006222z^{-2}$	77,08
t_SS3	$1 - 2,922z^{-1} + 2,846z^{-2} - 0,9237z^{-3}$	$0,0,002054z^{-1} - 0,001436z^{-2} - 0,0006756z^{-3}$	94,97
Originál	$1 - 1,922z^{-1} + 0,9231z^{-2}$	$0,001558z^{-1} + 0,001517z^{-2}$	

Tabulka 5: Výsledky 2. a 3. řádu metody subspace na modelu *ARMAX*



Obrázek 15: Porovnání validačních a identifikačních průběhů metody subspace na modelu *ARMAX*

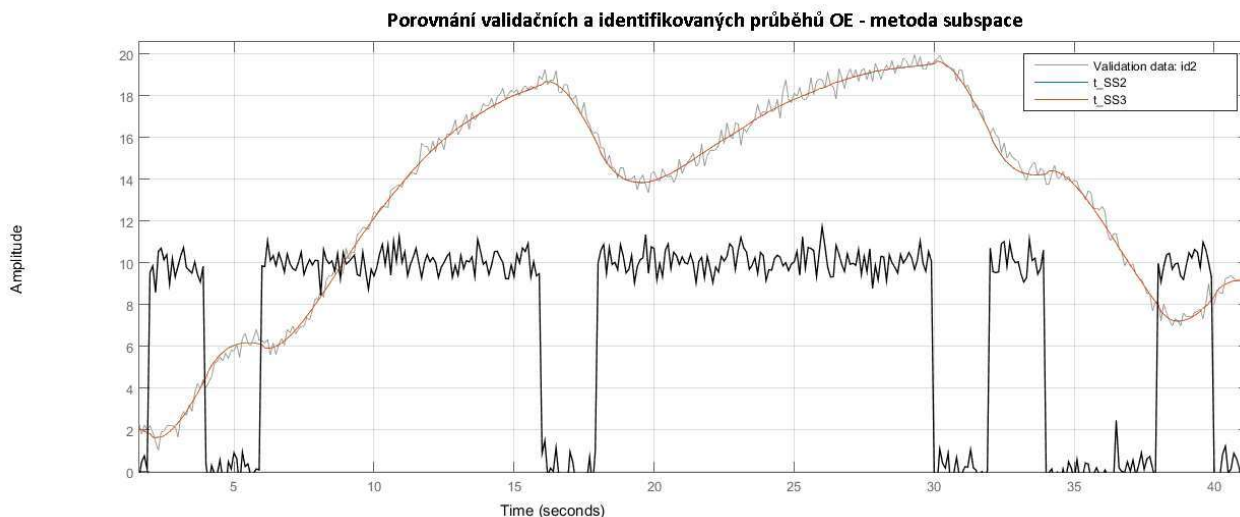


Obrázek 16: Porovnání zesílení původního systému a identifikovaných modelů

Poslední porovnávaným modelem je model *OE*. Níže lze na grafu č. 17 a v tabulce č. 6, že výsledek metody je na tento druh modelu velice dobrý. Opět model vyššího řádu má lepší výsledky, avšak tentokrát naprosto minimální. Důvodem takového výsledku by v tomto případě měl být fakt, že šum je přidán až na výstupu systému, tedy není závislý na jeho průběhu.

	$A(z^{-1})$	$B(z^{-1})$	FIT [%]
t_SS2	$1 - 1,921z^{-1} + 0,923z^{-2}$	$-0,01161 - 0,02584z^{-1} - 0,0118z^{-2}$	97,7
t_SS3	$1 - 1,003z^{-1} - 0,8415z^{-2} + 0,8477z^{-3}$	$-0,01161 + 0,01597z^{-1} - 0,01052z^{-2} - 0,009197z^{-3}$	97,73
Originál	$1 - 1,922z^{-1} + 0,9231z^{-2}$	$0,001558z^{-1} + 0,001517z^{-2}$	

Tabulka 6: Výsledky identifikace metodou subspace na modelu *OE*



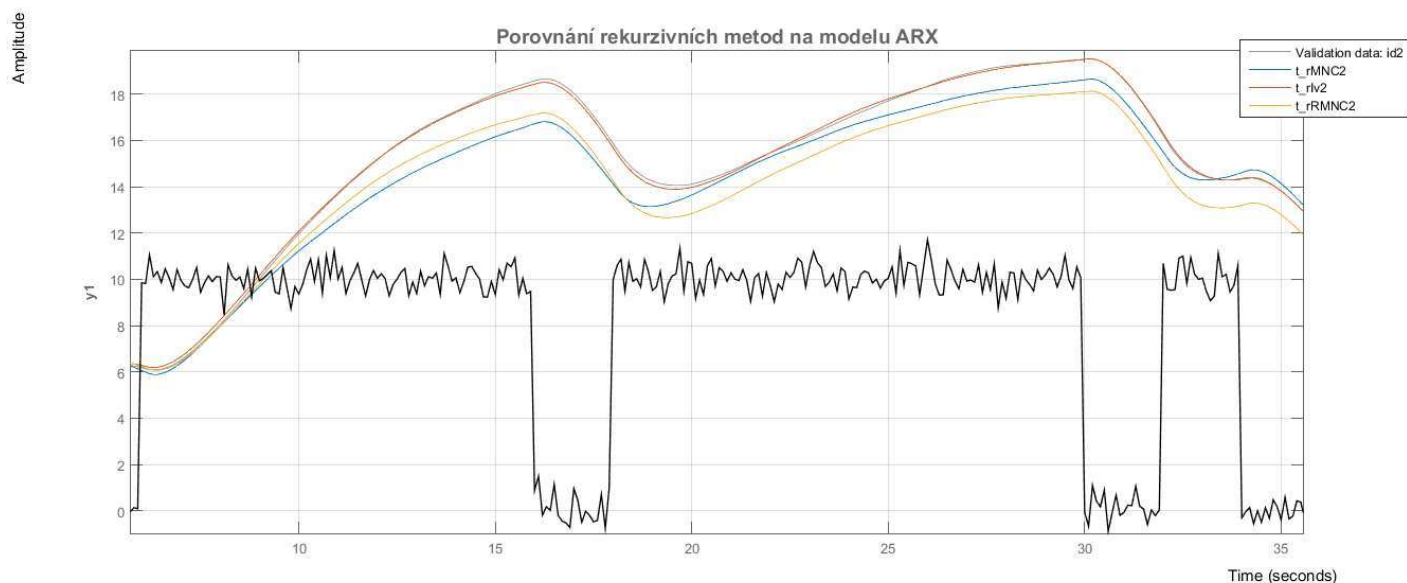
Obrázek 17: Porovnání validačních a identifikovaných průběhů na modelu OE

Metoda subspace celkově dává slušné výsledky, avšak dochází k nim úplně jinou cestou, nežli je tomu u předchozích metod. Z výsledků v této kapitole uvedených, je zatím zřejmé, že metoda bude mít určitě lepší uplatnění při identifikaci systémů, kde bude největším zdrojem rušení měřící člen na výstupu systému. Naopak na poruchy vstupující do systému reaguje o něco hůře. S tím si dokáže o něco lépe poradit, pokud je identifikováno vyšším řádem, popřípadě by bylo nutné použít jinou variantu metody.

3.2.3 Porovnání rekurzivních metod na stejné sadě dat

Ve stejném duchu, jako proběhlo porovnání metod nerekurzivních, proběhne porovnání metod rekurzivních. Budou se porovnávat 3 druhy metod a to: rekurzivní metoda nejmenších čtverců, rekurzivní metoda pomocné proměnné a rozšířená rekurzivní metoda nejmenších čtverců. Porovnání proběhne na stejné sadě dat jako v minulé podkapitole. Tím bude poměrně dobře možné srovnat výsledky metod rekurzivních s dávkovými.

Jako první je provedeno porovnání na modelu *ARX*. Oproti dávkové metodě nejmenších čtverců zde již její rekurzivní metoda poskytuje značně horší výsledky. Naopak metoda pomocné proměnné ve své rekurzivní podobě dává prakticky ty samé výsledky, jako je tomu u její dávkové varianty.



Obrázek 18: Porovnání výsledků rekurzivních metod na modelu ARX

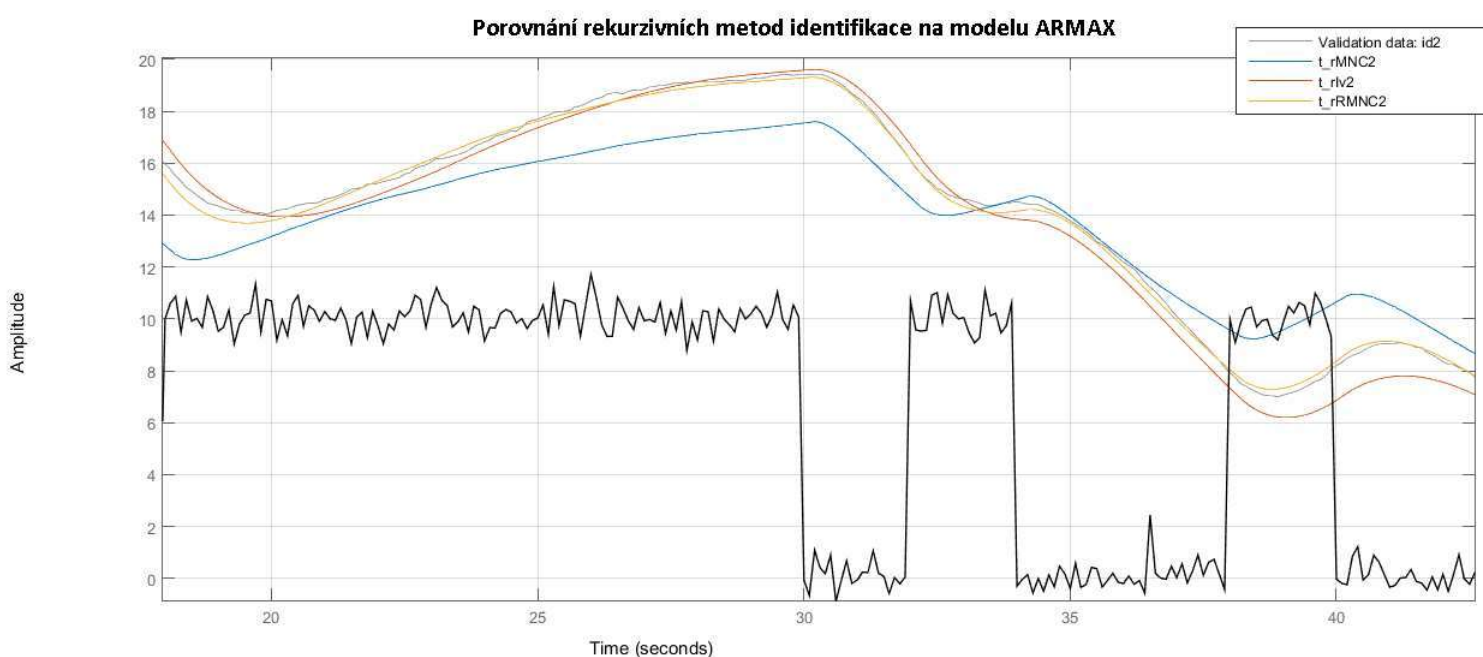
	$A(z^{-1})$	$B(z^{-1})$	FIT [%]
t_rMNC2	$1 - 1,867z^{-1} + 0,8687z^{-2}$	$0,0008184z^{-1} + 0,003165z^{-2}$	81,43
t_rlv2	$1 - 1,908z^{-1} + 0,9094z^{-2}$	$0,0008734z^{-1} + 0,002453z^{-2}$	97,16
t_rRMNC2	$1 - 1,92z^{-1} + 0,9217z^{-2}$	$0,001402z^{-1} + 0,001648z^{-2}$	82,49
Originál	$1 - 1,922z^{-1} + 0,9231z^{-2}$	$0,001558z^{-1} + 0,001517z^{-2}$	

Tabulka 7: Výsledky porovnání rekurzivních metod na modelu ARX

Dalším identifikovaným modelem je model *ARMAX*. Zde má metoda nejmenších čtverců v rekurzivní podobě stejné problémy s aproximací, jako nerekurzivní varianta. Rekurzivní metoda pomocné proměné přináší opět velice podobné výsledky. Nejlepšími výsledky se podle teoretických předpokladů může chlubit rozšířená metoda nejmenších čtverců, která je uzpůsobena k identifikaci právě modelu *ARMAX*.

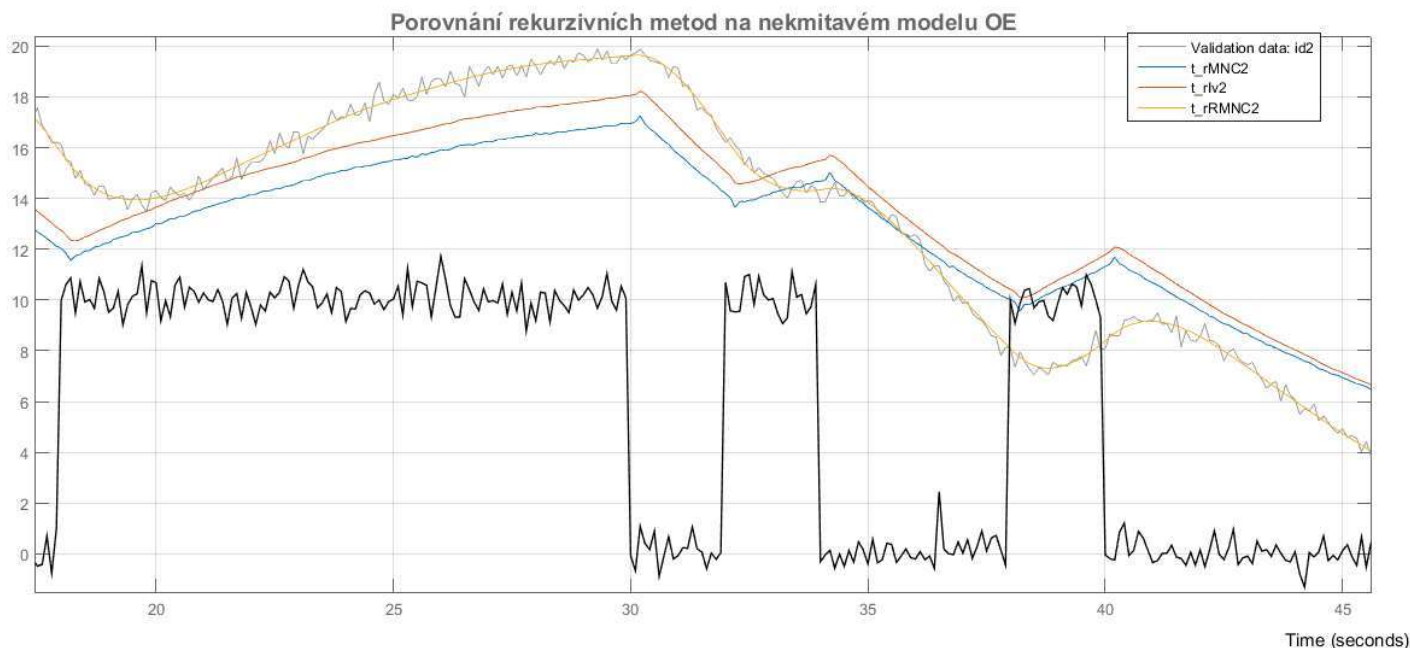
	$A(z^{-1})$	$B(z^{-1})$	FIT [%]
t_rMNC2	$1 - 1,867z^{-1} + 0,8687z^{-2}$	$0,0008184z^{-1} + 0,003165z^{-2}$	65,97
t_rlv2	$1 - 1,945z^{-1} + 0,946z^{-2}$	$-0,0001418z^{-1} + 0,002638z^{-2}$	85,51
t_rRMNC2	$1 - 1,918z^{-1} + 0,9193z^{-2}$	$0,0007987z^{-1} + 0,002316z^{-2}$	94,32
Originál	$1 - 1,922z^{-1} + 0,9231z^{-2}$	$0,001558z^{-1} + 0,001517z^{-2}$	

Tabulka 8: Porovnání výsledků rekurzivních metod na modelu ARMAX



Obrázek 19: Porovnání rekurzivních metod na modelu ARMAX

Jako poslední je model typu *OE*. Pro tento model se již rekurzivní metoda nejmenších čtverců tváří jako prakticky nepoužitelná s výsledky 55 %. Dokonce metoda pomocné proměnné se při identifikaci také ukazuje jako velice slabá, když se dostala jen těsně pod 62 %. Naopak rozšířená metoda nejmenších čtverců si uměla s modelem *OE* velice slušně poradit a jejím výsledkem je fit index 92 %.



Obrázek 20: Porovnání rekurzivních metod na modelu OE

	$A(z^{-1})$	$B(z^{-1})$	FIT [%]
t_rMNC2	$1 - 0,6478z^{-1} - 0,3379z^{-2}$	$- 0,02318z^{-1} + 0,05023z^{-2}$	55,53
t_rlv2	$- 1,3345z^{-1} + 0,3345z^{-2}$	$- 0,01044z^{-1} + 0,02532z^{-2}$	61,92
t_rRMNC2	$1 - 1,921z^{-1} + 0,9226z^{-2}$	$0,001139z^{-1} + 0,001942z^{-2}$	92,01
Originál	$1 - 1,922z^{-1} + 0,9231z^{-2}$	$0,001558z^{-1} + 0,001517z^{-2}$	

Tabulka 9: Porovnání výsledků rekurzivních metod identifikace na modelu OE

3.2.4 Porovnání rekurzivních dat na kmitavém systému

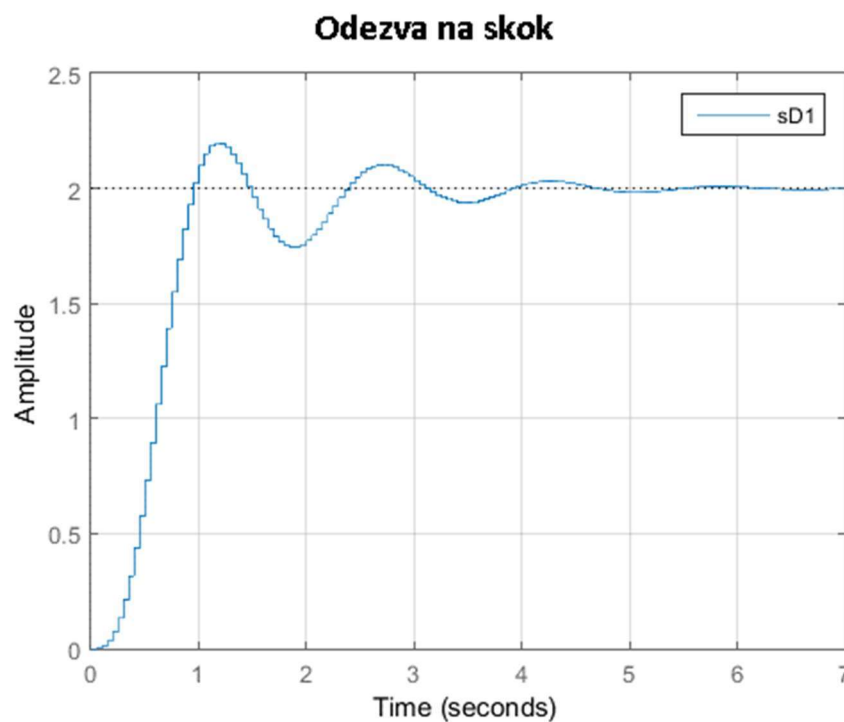
Nyní bude provedeno porovnání rekurzivních metod na kmitavém systému 3. řádu a identifikovány budou pouze 3. řádem. Původní systém bude mít 2 komplexně sdružené póly $p_{1,2} = -1 \pm 4i$ a jeden reálný $p_3 = -5$. Celá sada dat měří opět 300 s a identifikační sada dat je znovu od 30 do 100 sekund a validační od 100. do 200. sekundy. Velikost signálu poruchy vstupující do systému $d = 2,5$ pro modely ARX a ARMAX, pro OE je tomu pouze $d = 0,8$, protože by byl výstupní signál silně zarušený a bylo by pro metody takřka nemožné ho aproximovat.

Původní systém ve spojitém popisu:

$$s1 = \frac{66,56}{s^3 + 3,6 * s^2 + 19,84 * s + 33,28}$$

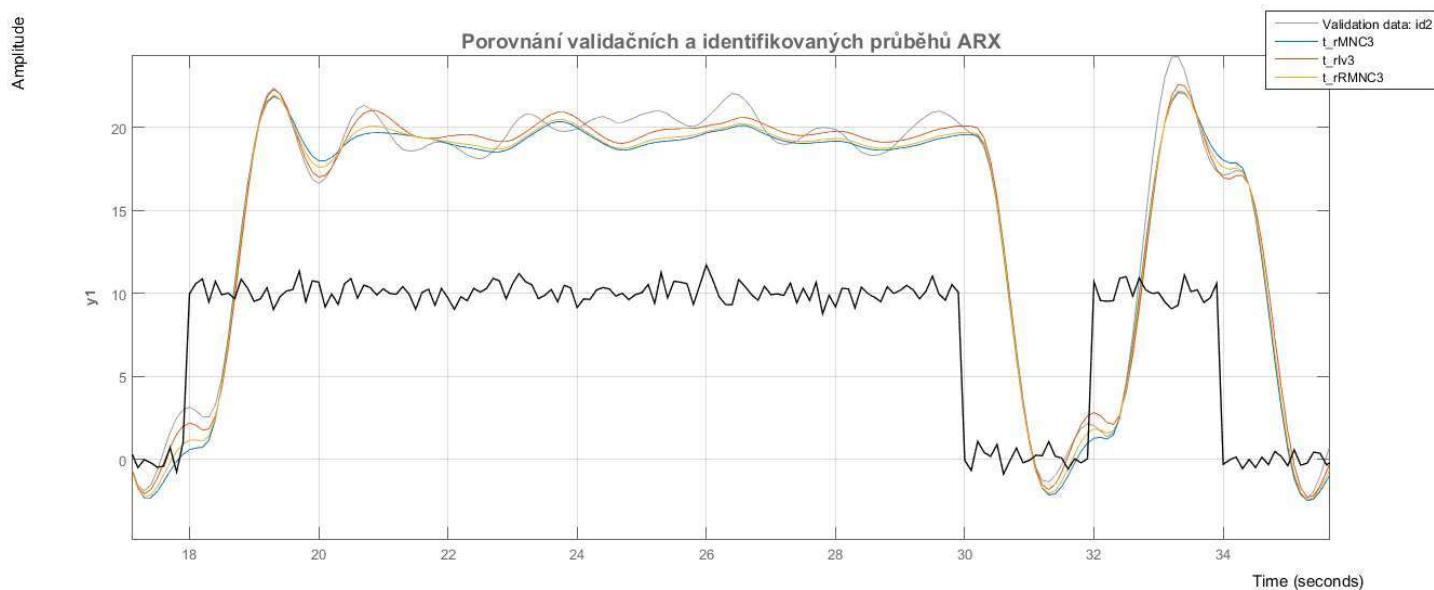
Jeho diskretizovaná podoba tedy má tvar:

$$sD1 = \frac{0,01006 * z^{-1} + 0,03651 * z^{-2} + 0,008405 * z^{-3}}{1 - 2,519 * z^{-1} + 2,244 * z^{-2} - 0,6977 * z^{-3}}$$



Obrázek 21: Odezva na jednotkový skok původního modelu

Reakce systému *sD1* na skokovou funkci je vidět na obrázku č. 21. První proběhlo identifikační měření na modelu *ARX*. Jak lze vidět na obrázku č. 22 a v tabulce č. 10 všechny metody se pohybují okolo 90 %. Nejlépe se daří rekurzivní metodě pomocné proměnné. Tyto výsledky tedy ukazují, že metody celkově nemají problém s kmitavými systémy, avšak jak lze vidět mezi 20. a 30. s, systém je vstupní poruchou poměrně silně zarušen a v tomto bodě pro metody je nemožné jej aproximovat.



Obrázek 22: Porovnání výsledků rekurzivních metod na kmitavém modelu ARX

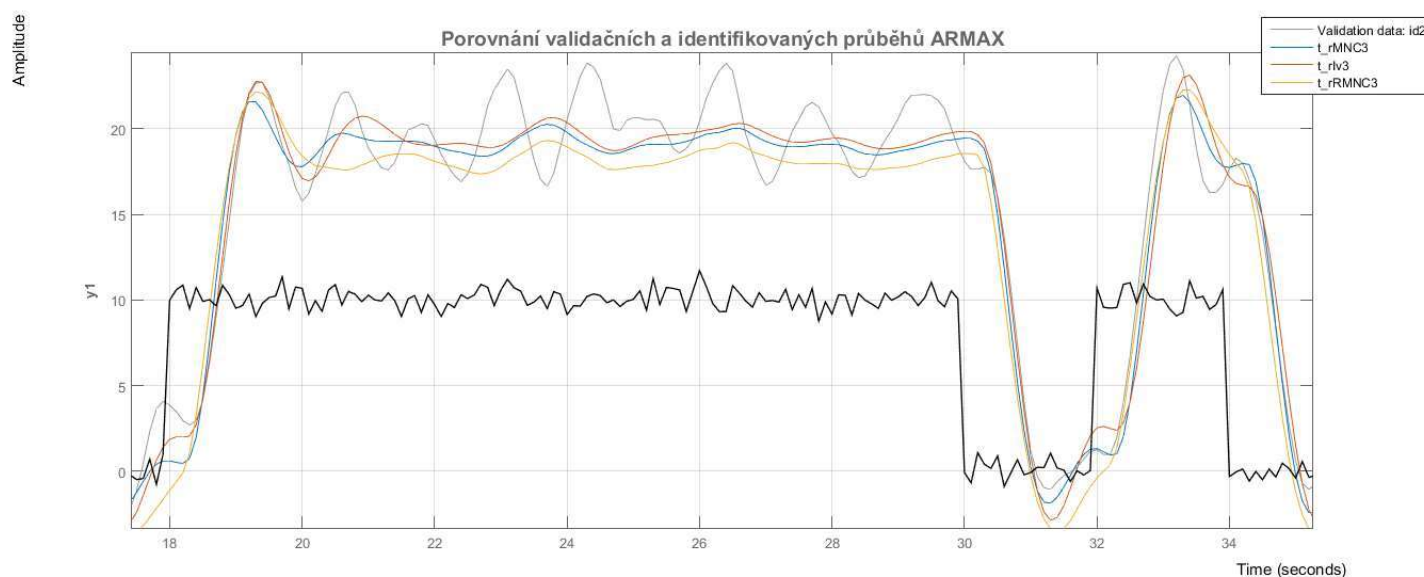
	A (z^{-1})	B(z^{-1})	FIT [%]
t_rMNC3	$1 - 2,363z^{-1} + 1,961z^{-2} - 0,5615z^{-3}$	$0,003379z^{-1} + 0,04052z^{-2} + 0,02418z^{-3}$	88,15
t_rlv3	$1 - 2,519z^{-1} + 2,239z^{-2} - 0,6929z^{-3}$	$0,006388z^{-1} + 0,03759z^{-2} + 0,09125z^{-3}$	91,23
t_rRMNC3	$1 - 2,2431z^{-1} + 2,082z^{-2} - 0,6184z^{-3}$	$0,00556z^{-1} + 0,03716z^{-2} + 0,01882z^{-3}$	89,82
Originál	$1 - 2,519z^{-1} + 2,244z^{-2} - 0,6977z^{-3}$	$0,01006z^{-1} + 0,03651z^{-2} + 0,008405z^{-3}$	

Tabulka 10: Porovnání výsledků rekurzivních metod na kmitavém systému

Dále následuje model *ARMAX*. Níže na obrázku č. 23 a v tabulce č. 11 je možné vidět, že metody již mají větší problém s aproximací. Především jednoduchá metoda nejmenších čtverců již aproximuje pouze s přibližně 73 % FIT indexem. Oproti očekávání rozšířená varianta nejmenších čtverců zvládá aproximaci pouze z 80 % a to i přesto, že tato metoda je postavená na faktu – identifikovat do *ARMAX* modelu, tudíž by dle předpokladů měla dávat nejlepší výsledky. Avšak jak lze v grafu vidět, výstupní signál systému je zarušen takovým způsobem, že místo postupného ustalování kmitů systém kmitá okolo možné ustálené hodnoty. Pravděpodobně by zde pomohla identifikace pomocí vyššího řádu systému.

	$A(z^{-1})$	$B(z^{-1})$	FIT [%]
t_rMNC3	$1 - 1,684z^{-1} + 0,7567z^{-2} + 0,004189z^{-3}$	$0,006238z^{-1} + 0,06255z^{-2} + 0,07025z^{-3}$	73,6
t_rlv3	$1 - 2,488z^{-1} + 2,179z^{-2} - 0,6611z^{-3}$	$0,01414z^{-1} + 0,006193z^{-2} + 0,03814z^{-3}$	80,5
t_rRMNC3	$1 - 2,291z^{-1} + 1,865z^{-2} - 0,5279z^{-3}$	$0,01264z^{-1} + 0,01216z^{-2} + 0,06201z^{-3}$	79,45
Originál	$1 - 2,519z^{-1} + 2,244z^{-2} - 0,6977z^{-3}$	$0,01006z^{-1} + 0,03651z^{-2} + 0,008405z^{-3}$	

Tabulka 11: Porovnání výsledků rekurzivních metod na modelu typu ARMAX

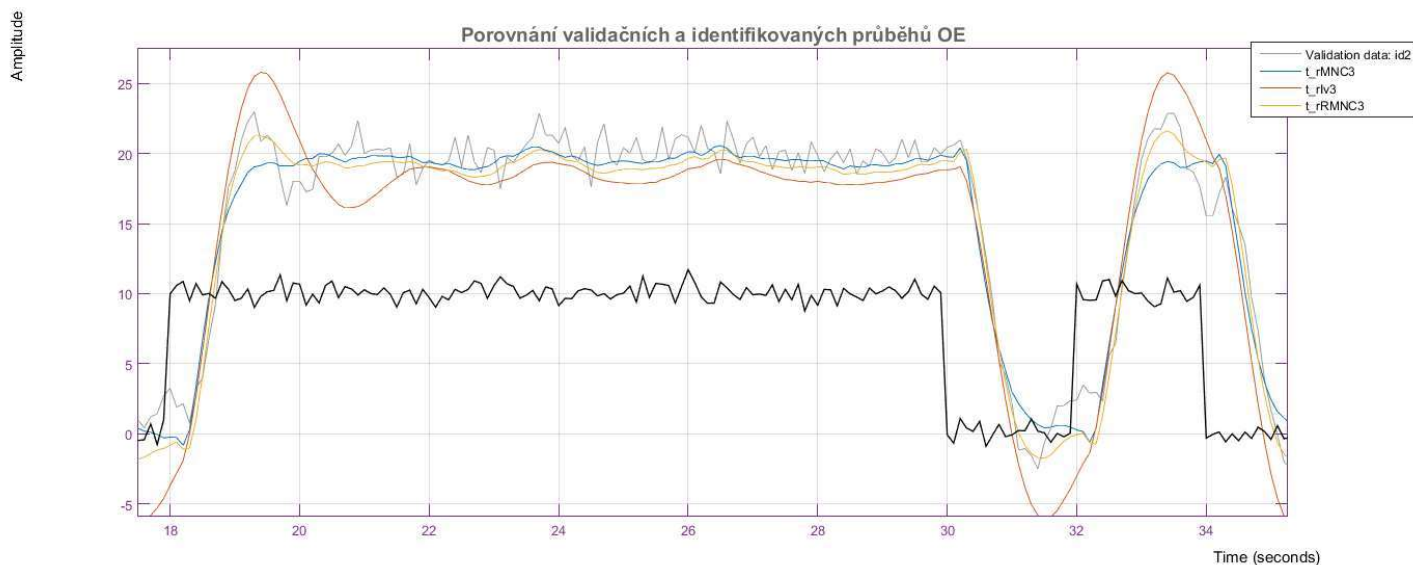


Obrázek 23: Porovnání průběhů rekurzivních metod s validačními daty modelu ARMAX

Jako poslední následuje identifikační proces na modelu *OE*. Výsledky identifikace ukázaly, že nejlépe si vedla rozšířená metoda nejmenších čtverců. Velice dobře si také vedla její jednoduchá varianta a pouze necelých 68 % dosáhla rekurzivní metoda pomocné proměnné.

	$A(z^{-1})$	$B(z^{-1})$	FIT [%]
t_rMNC3	$1 - 0,8787z^{-1} - 0,1974z^{-2} + 0,2397z^{-3}$	$-0,05933z^{-1} + 0,1422z^{-2} + 0,2352z^{-3}$	81,54
t_rlv3	$1 - 1,702z^{-1} + 0,678z^{-2} + 0,08309z^{-3}$	$-0,01631z^{-1} + 0,1262z^{-2} - 0,001351z^{-3}$	67,58
t_rRMNC3	$1 - 1,459z^{-1} + 0,4786z^{-2} + 0,08134z^{-3}$	$-0,06486z^{-1} + 0,07509z^{-2} + 0,1822z^{-3}$	84,11
Originál	$1 - 2,519z^{-1} + 2,244z^{-2} - 0,6977z^{-3}$	$0,01006z^{-1} + 0,03651z^{-2} + 0,008405z^{-3}$	

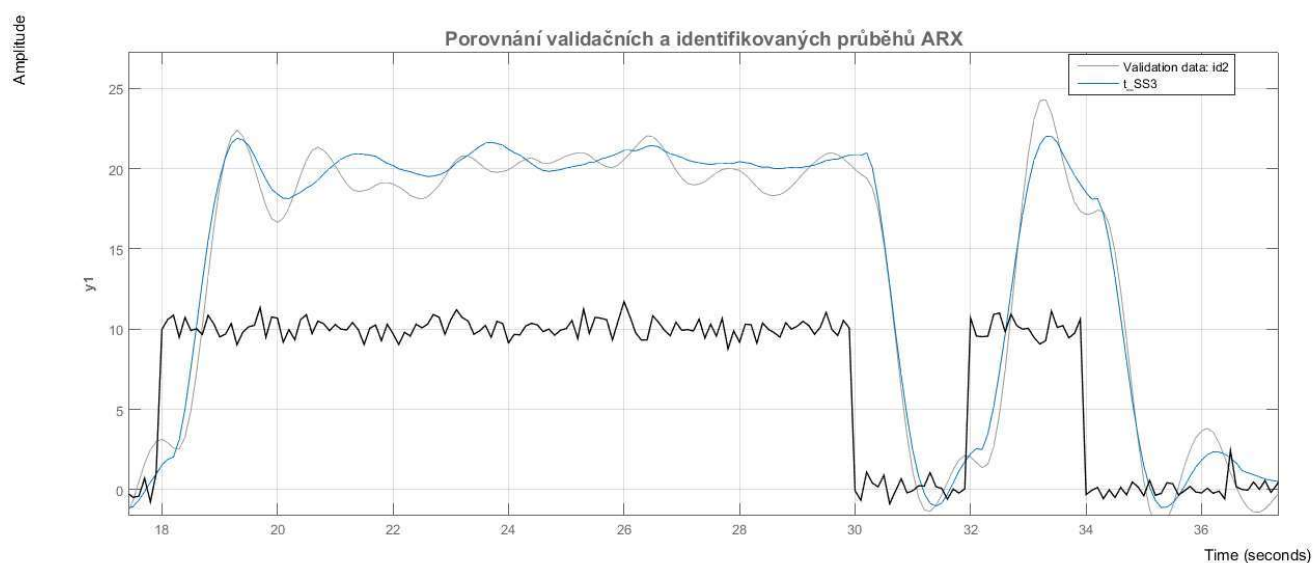
Tabulka 12: Porovnání rekurzivních metod na modelu *OE*



Obrázek 24: Porovnání validačních a identifikovaných průběhů na modelu OE

3.2.5 Metoda subspace na kmitavém systému

Na stejných datech, jako je tomu v minulé kapitole, je provedena identifikace pomocí metody subspace. Důvodem je její ozkoušení na více zarušeném a kmitavém systému. Jako první přichází na řadu identifikace na modelu typu ARX . Níže v tabulce č. 13 je vidět, že opět došlo k vzniku nenulové matice D , tedy opět se objevuje neryze dynamický člen v polynomu $B(z^{-1})$. Metoda celkově poskytuje, podobně jako u nekmitavého systému, horší výsledky nežli výše zmíněné metody.



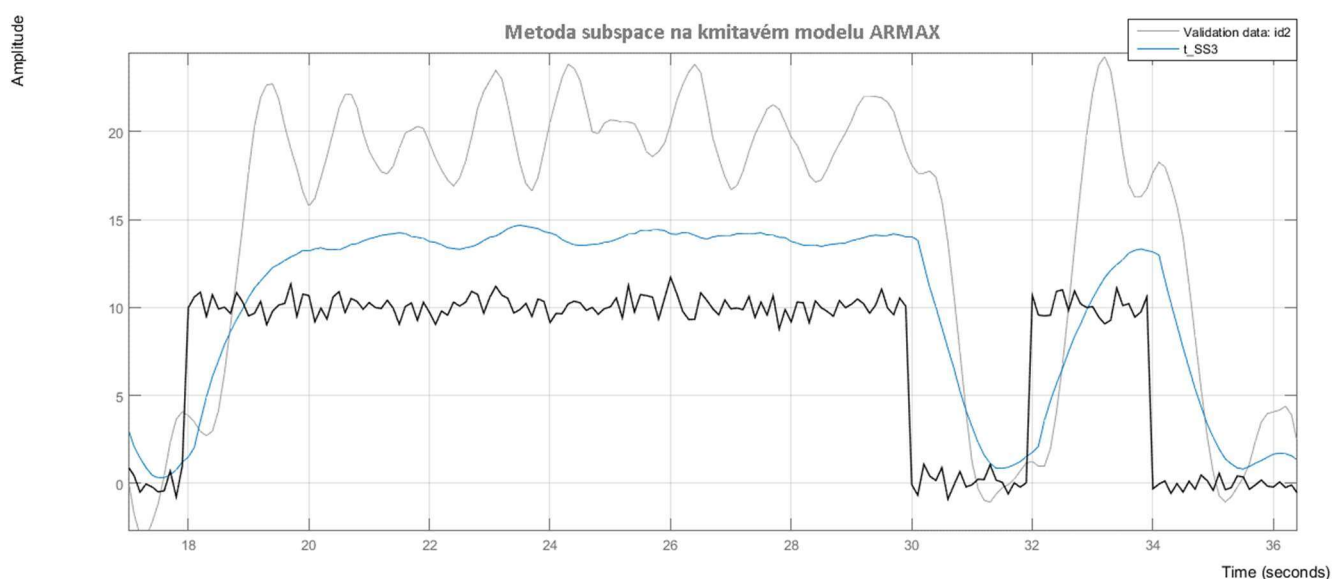
	$A(z^{-1})$	$B(z^{-1})$	FIT [%]
t_SS3	$1 - 2,68z^{-1} + 2,471z^{-2} - 0,7815z^{-3}$	$0,003958 + 0,006389z^{-1} + 0,06655z^{-2} - 0,0595z^{-3}$	80,06
Originál	$1 - 2,519z^{-1} + 2,244z^{-2} - 0,6977z^{-3}$	$0,01006z^{-1} + 0,03651z^{-2} + 0,008405z^{-3}$	

Tabulka 13: Subspace metoda na modelu ARX

Model *ARMAX* je oproti předchozímu modelu pro metodu subspace velice těžko identifikovatelný, což ukazuje výsledek fit indexu pouze necelých 45 %. V grafu č. je jasně vidět, že metoda nedává stejné konstantní zesílení.

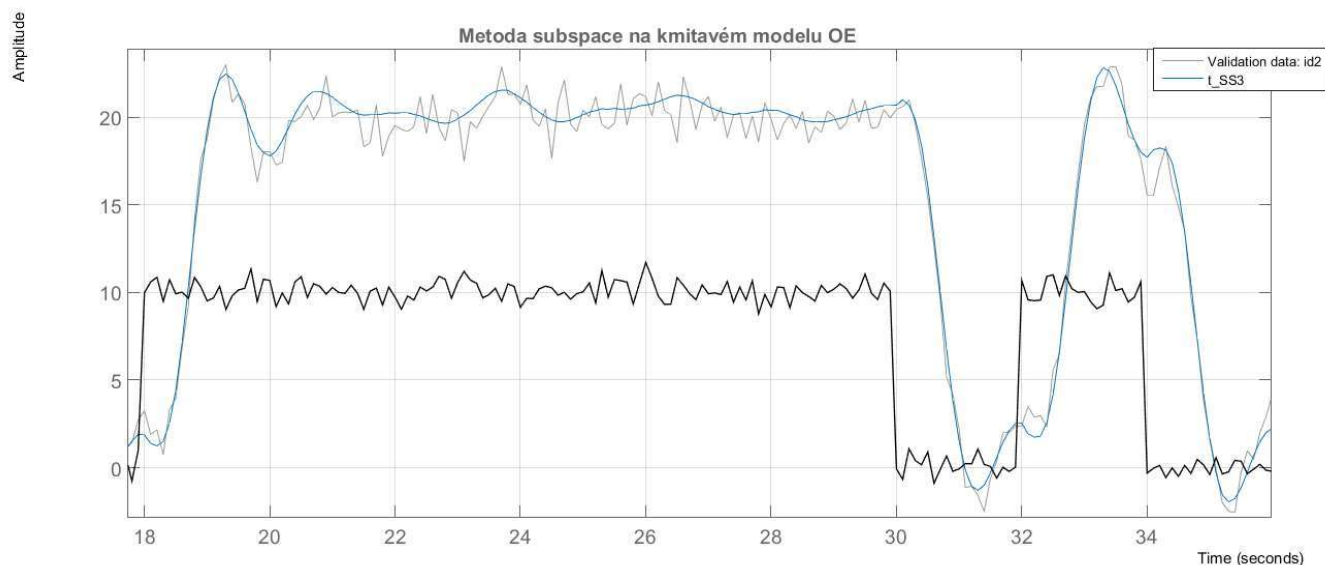
	$A(z^{-1})$	$B(z^{-1})$	FIT [%]
t_SS3	$1 - 2,752z^{-1} + 2,627z^{-2} - 0,8606z^{-3}$	$0,01436 + 0,09119z^{-1} - 0,1993z^{-2} + 0,1133z^{-3}$	44,51
Originál	$1 - 2,519z^{-1} + 2,244z^{-2} - 0,6977z^{-3}$	$0,01006z^{-1} + 0,03651z^{-2} + 0,008405z^{-3}$	

Tabulka 14: Výsledek identifikace modelu ARMAX



Obrázek 25: Metoda subspace na kmitavém modelu ARMAX

Jako poslední je opět model *OE*. Metoda opět dává i na kmitavém a více zarušeném systému velice slušné výsledky na tomto modelu – 91 %. Metoda je tedy dobře použitelná i na zarušených systémech, avšak nesmí tento šum být závislý na systému.



Obrázek 26: Porovnání validačních dat a výsledku identifikace na modelu OE

	A (z^{-1})	B(z^{-1})	FIT [%]
t_SS3	$1 - 2,495z^{-1} + 2,202z^{-2} - 0,6787z^{-3}$	$-0,03106 - 0,1046z^{-1} - 0,0663z^{-2} + 0,05074z^{-3}$	91,01
Originál	$1 - 2,519z^{-1} + 2,244z^{-2} - 0,6977z^{-3}$	$0,01006z^{-1} + 0,03651z^{-2} + 0,008405z^{-3}$	

Tabulka 15: Výsledek identifikace na modelu OE

3.3 Výsledky porovnání

V předchozí podkapitole byly různými způsoby porovnávány dávkové, rekurzivní metody identifikace, a nakonec metoda subspace. Každá z metod ukázala své výhody a nevýhody. Dávkové (jednorázové) metody se ukázaly jako přesnější a stabilnější proti metodám rekurzivním. Rekurzivní metody jsou ale koncipovány spíše k real-time identifikaci a nižší potřebě uchování dat, tedy na úkor malé ztráty přesnosti aproximace je získána tato výhoda.

Výsledky identifikačních procesů byly značně ovlivněny mírou zarušení, kdy se nejvíce odolné projevíly metoda rekurzivní instrumentální proměnné a rozšířená rekurzivní metoda nejmenších čtverců, tedy přesně podle teorie. Zajímavým se ukázalo srovnání těchto metod s metodou subspace. Ta se v této variantě ukázala velice náchylná na rušení vstupující jako porucha do systému. Naopak oproti ostatním metodám dávala

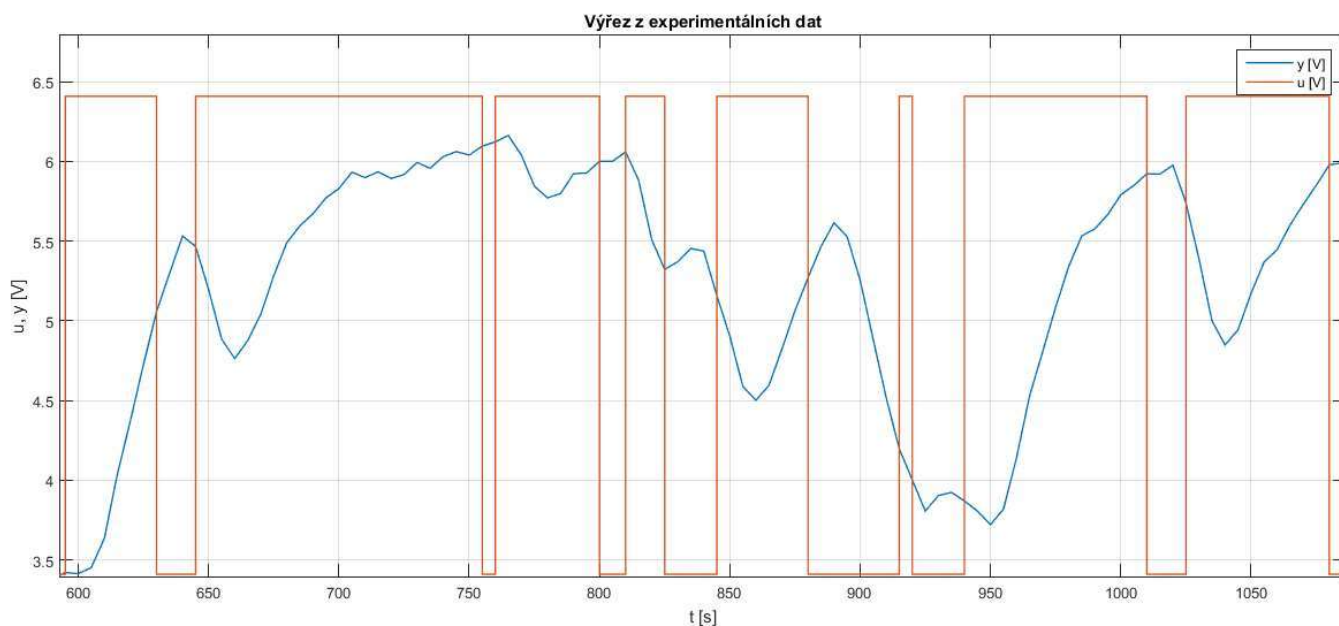
nesrovnatelně lepší výsledky při identifikaci modelu, kde se rušení projevilo pouze na výstupu. Nelze však konstatovat, která metoda je obecně lepší či horší. Vždy záleží na individuální situaci. Například metoda subspace je výpočetně mnohem složitější, tudíž její implementace by byla často zbytečně složitá, především ve variantách, kdy by byla méně náchylná na šum závislý na signálu systému.

3.4 Identifikace na reálných datech

Pro další porovnání identifikačních metod byly získány 3 sady dat. V této podkapitole je provedena jejich identifikace pomocí rekurzivní metody nejmenších čtverců, rekurzivní metody pomocné proměnné, rozšířené rekurzivní metody nejmenších čtverců a metody subspace.

3.4.1 Tepelná soustava – fén

Jako první data pro identifikační proces byla zvolena sada dat z reálného systému fén a termočlánek. Skrz trubici je hnán pomocí větráku vzduch, ten je ohříván sítí z odporových vodičů. Vstupem systému je napětí tohoto topení, výstupem napětí na

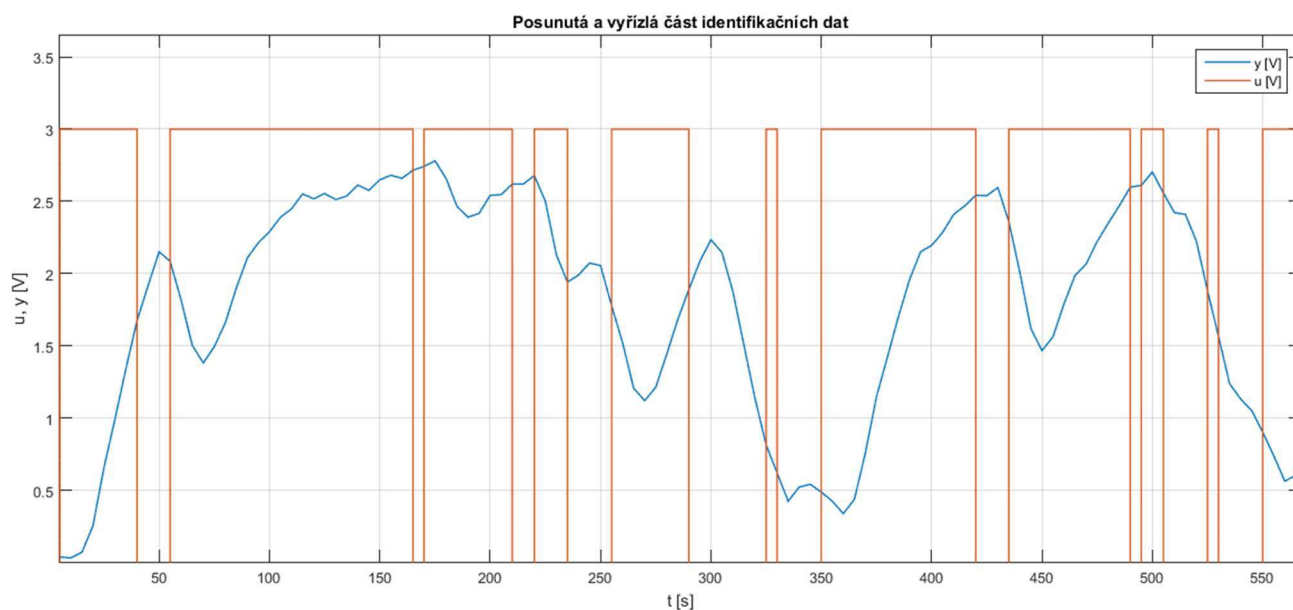


Obrázek 27: Výřez z dat fěnu určený k identifikaci

termočlánek, perioda měření byla 5 sekund. Data jsou měřena již v pracovním bodě systému. Tato data byla získána z [8].

Na obrázku č. 27 je vykreslen malý výřez z dat. Celý soubor dat má 1000 naměřených hodnot, tedy trvá 5000 sekund. Z charakteristiky je patrné, že vstup se mění skokovitě mezi hodnotami 3,4 V a 6,4 V. Ze souboru dat je nutné vybrat nejprve soubor pro identifikaci a ideálně jiný soubor pro validaci. Identifikační soubor dat obecně není dobré brát od začátku měření, kdy se systém zahřívá a může se chovat značně nelineárně. Soubor je vybrán od času $t_{id1} = 585$ s do $t_{id2} = 1585$ s. Validační soubor byl vybrán mezi $t_{val1} = 3030$ s do času $t_{val2} = 4830$ s. Tato data jsou poté posunuta jak v ose x, tak v ose y do nul.

Na obrázku č. je vyobrazena část identifikačních dat. Jak je vidět, data jsou již posunuta do nul.



Obrázek 28: Upravený vyřízlý vzorek identifikačních dat

Identifikační proces proběhne všemi výše zmíněnými metodami, a to od 2. do 5. řádu. Postupně jsou vypsány *FIT indexy* všech metod a různých řádů:

Rekurzivní metoda nejmenších čtverců

Řád	Fit index [%]
2.	62,81
3.	84,72
4.	86,11
5.	86,3

Rekurzivní metoda pomocné proměnné

Řád	Fit index [%]
2.	62,71
3.	84,87
4.	85,25
5.	86,27

Rozšířená rekurzivní MNC

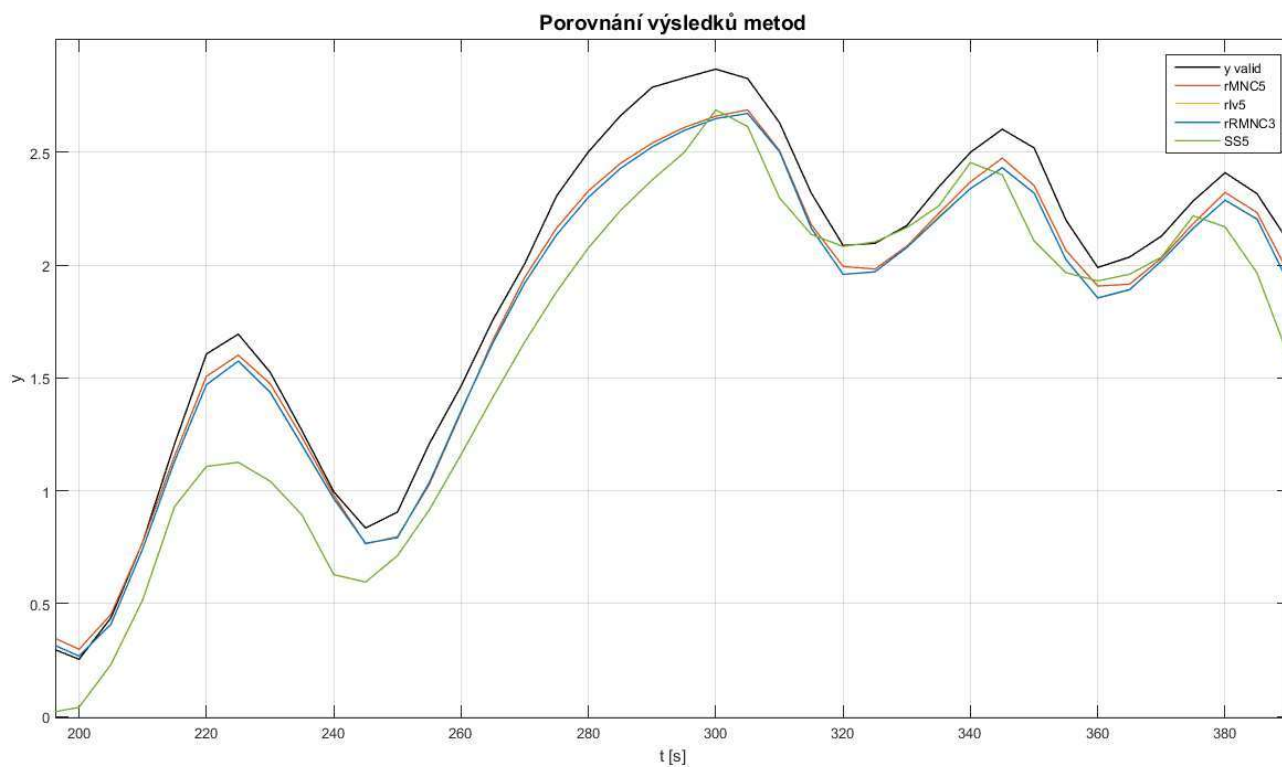
Řád	Fit index [%]
2.	61,61
3.	88,19
4.	86,58
5.	86,02

Metoda subspace

Řád	Fit index [%]
2.	65,92
3.	60,93
4.	55,02
5.	76,75

Tabulka 16: Výsledky FIT indexu pro rekurzivní metody a metodu subspace

Z výše uvedených tabulek je patrné, že nejlepší výsledek dává 3. řád rozšířené rekurzivní metody nejmenších čtverců – 88,19 %. Obecně se všechny výsledky rekurzivních metod dostávají nad 80 %, pokud se nebere v potaz 2. řád. Naopak subspace metoda identifikace je pro tento případ spíše nevhodná. Nejlepší výsledek 76,75 % dává v pátém řádu modelu. Níže jsou porovnány nejlepší výsledky jednotlivých metod v jedné charakteristice.



Obrázek 29: Srovnání výsledků rekursivních metod a subspace metody

Nejlepším modelem je model z rozšířené metody nejmenších čtverců. Ačkoliv se téměř shoduje s modely z metod pomocné proměnné a nejmenších čtverců, má tu výhodu, že dosahuje lepších výsledků v nižším řádu aproximace.

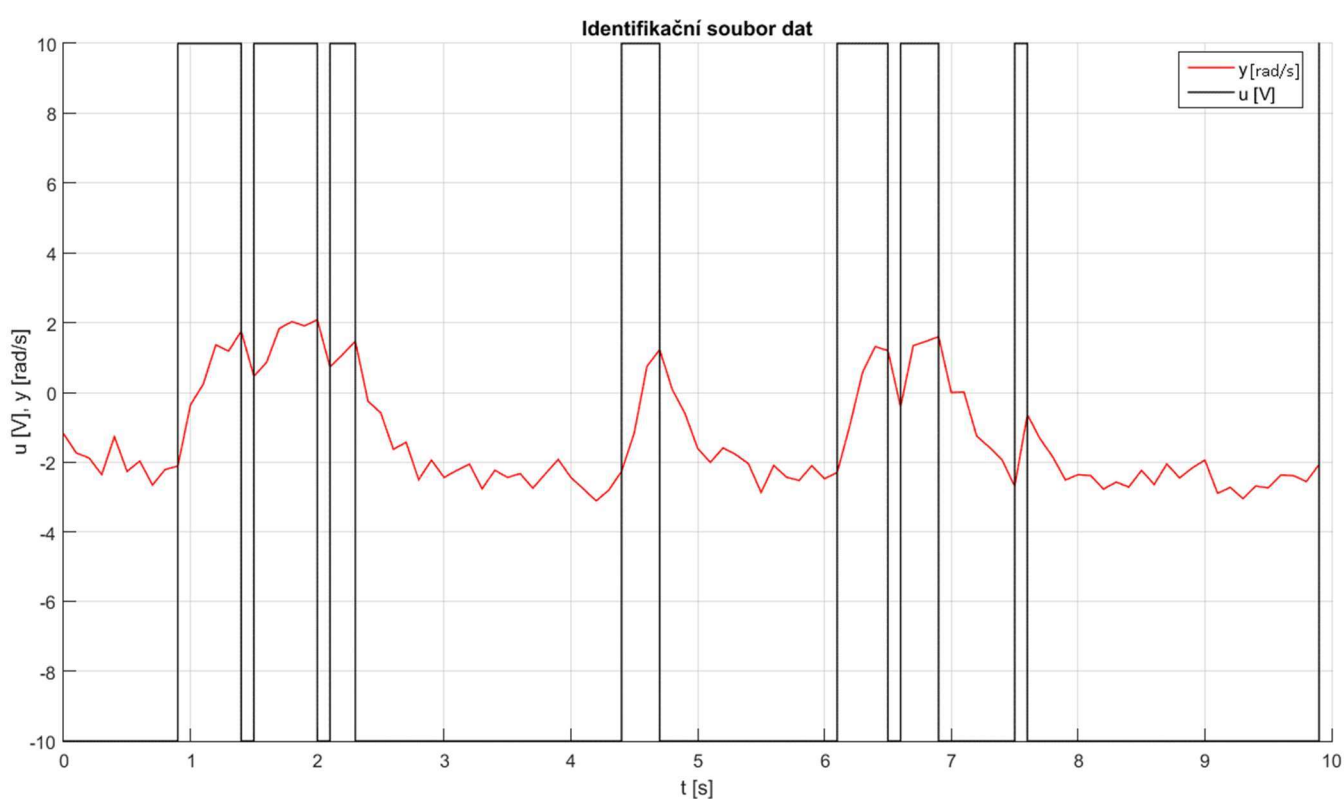
	$A(z^{-1})$	$B(z^{-1})$	FIT [%]
rMNC5	$1 - 0,9315z^{-1} + 0,03922z^{-2} - 0,03146z^{-3} + 0,1354z^{-4} - 0,04373z^{-5}$	$0,0005795z^{-1} + 0,005581z^{-2} + 0,06155z^{-3} + 0,06481z^{-4} + 0,02519z^{-5}$	86,3
rlv5	$1 - 1,482z^{-1} + 0,7475z^{-2} - 0,2139z^{-3} + 0,0674z^{-4} - 0,01386z^{-5}$	$0,001048z^{-1} + 0,004744z^{-2} + 0,05893z^{-3} + 0,03186z^{-4} + 0,001721z^{-5}$	86,27
rRMNC3	$1 - 1,782z^{-1} + 1,112z^{-2} - 0,2589z^{-3}$	$0,000672z^{-1} + 0,00331z^{-2} + 0,0643z^{-3}$	88,19
SS5	$1 - 4,51z^{-1} + 8,155z^{-2} - 7,391z^{-3} + 3,36z^{-4} - 0,6137z^{-5}$	$-0,003295 - 0,01878z^{-1} + 0,169z^{-2} - 0,3593z^{-3} + 0,3044z^{-4} + 0,09207z^{-5}$	76,75

Tabulka 17: Nejlepších výsledky srovnávaných metod

3.4.2 Stejnosměrný motor

Dalším identifikovaným systémem je stejnosměrný motor. Vstupem do motoru je napětí v rozsahu $0-10\text{ V}$, výstupem je úhlová rychlost v rad/s . Perioda vzorkování je $0,1\text{ s}$. Data byla získána z [9]. Celý soubor dat má 400 vzorků, tedy v čase $0-40\text{ s}$. Protože soubor dat již vychází z nulových hodnot, není třeba jej posouvat v ose y , ale pouze v časové ose.

Vzorek pro identifikaci se nachází v čase $t_{id} = 5,6\text{ s}$ do $t_{id} = 15,6\text{ s}$. Validací soubor byl vybrán mezi $t_{val1} = 17,8\text{ s}$ do času $t_{val2} = 27,8\text{ s}$.



Obrázek 30: Identifikační soubor dat

Na tuto soustavu jsou použity metody identifikace v rozsahu 1. až 5. řádu.

Rekurzivní metoda nejmenších čtverců

Řád	Fit index [%]
1.	80,5
2.	81,89
3.	81,89
4.	82,21
5.	82,33

Rekurzivní metoda pomocné proměnné

Řád	Fit index [%]
1.	82,05
2.	82,12
3.	82,13
4.	X
5.	X

Rozšířená rekurzivní metoda MNC

Řád	Fit index [%]
1.	81,91
2.	82,13
3.	82,04
4.	82,39
5.	82,39

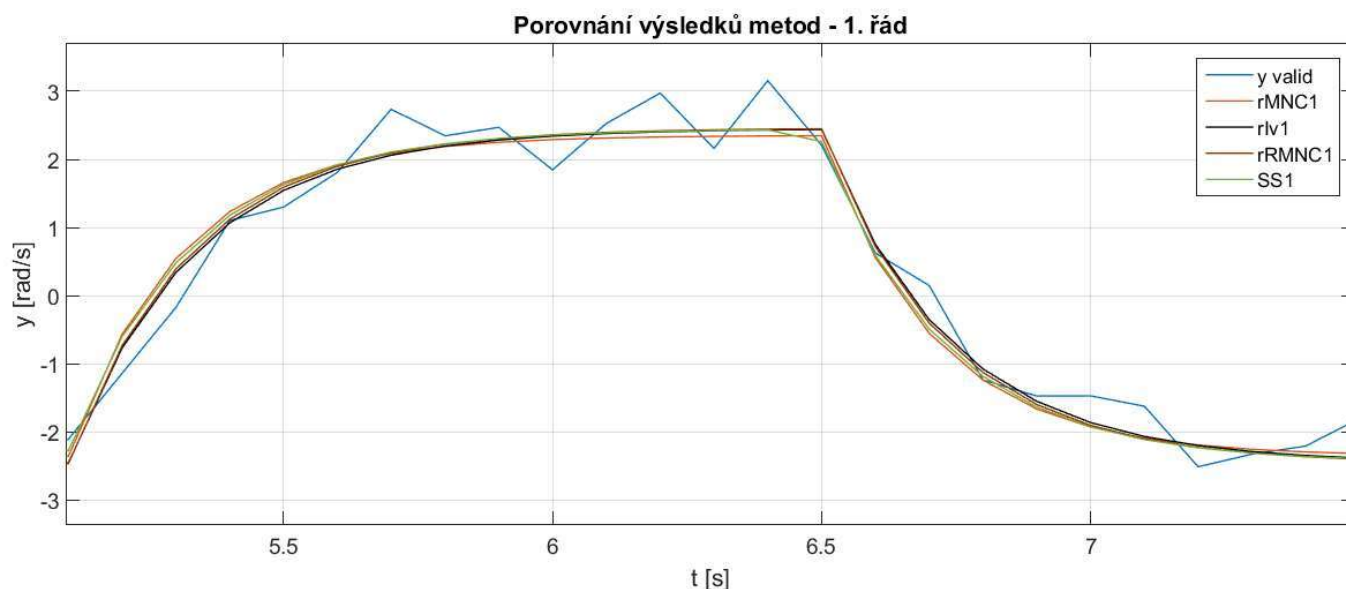
Metoda subspace

Řád	Fit index [%]
1.	81,45
2.	81,48
3.	81,46
4.	81,28
5.	81,34

Tabulka 18: Porovnání metod identifikace pro stejnosměrný motor

Jak se z výsledků *FIT indexu* zdá, systém je dobře aproximovatelný již 1. řádem, jakékoliv další zákřivky jsou způsobeny nejspíš ruchem. Rozdíly mezi 1. a 5. řádem metod jsou minimální, proto by bylo vhodné, pravděpodobně ve všech aplikacích, pracovat právě s 1. řádem. Pouze metoda pomocné proměnné má horší výsledky u 4. řádu a 5. řádu, kdy vůbec vůbec nezkonvergovala. Naopak u právě 1. řádu má výsledek nejlepší ze všech.

Níže je vyobrazeno srovnání všech metod aproximujících 1. řádem. Rozdíly mezi výsledky jsou však takřka nerozeznatelné.



Obrázek 31: Porovnání výsledků metod - 1. řád

	$A(z^{-1})$	$B(z^{-1})$	FIT [%]
rMNC1	$1 - 0,6193z^{-1}$	$0,08964z^{-1}$	80,5
rlv1	$1 - 0,6556 z^{-1}$	$0,08448z^{-1}$	82,05
rRMNC1	$1 - 0,6478z^{-1}$	$0,08671z^{-1}$	81,91
SS1	$1 - 0,6452z^{-1}$	$0,008906 + 0,07804z^{-1}$	81,45

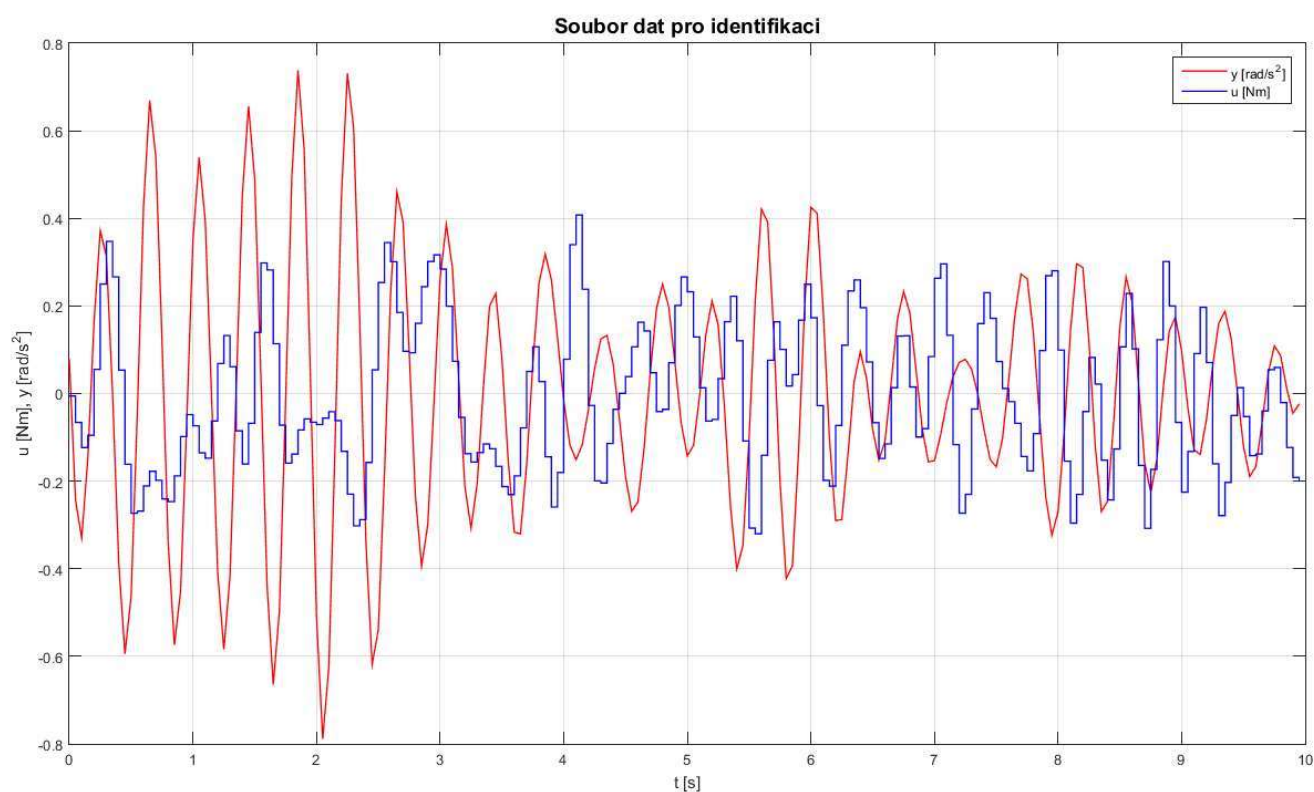
Tabulka 19: Porovnání FIT indexů použitých metod

3.4.3 Sestava – motor a robotická ruka

Další sadou dat pro identifikaci je sestava motoru s robotickou rukou. Zde je hledán matematický vztah mezi reakčním momentem konstrukce, na které je motor upevněn a akcelerací robotické ruky. Tato situace je oproti ostatním jiná, protože nejde o přímý vstup do systému. Avšak to stejně nebrání možnosti získání přenosové funkce. Soubor dat byl získán z [10]

Reakční moment se pohybuje mezi $-0,4 \text{ Nm}$ a $0,4 \text{ Nm}$. Vstupní signál do jisté míry připomíná sinusový signál o různých amplitudách, prakticky jsou však vzorky skokově se měnící hodnoty, které sinusový signál neaproximují. Celý soubor dat je 1024 vzorků a perioda vzorkování je $0,5 \text{ s}$.

Vzorek pro identifikaci se nachází v čase $t_{id1} = 10,5 \text{ s}$ do $t_{id2} = 20,5 \text{ s}$. Validační soubor byl vybrán mezi $t_{val1} = 23 \text{ s}$ do času $t_{val2} = 35 \text{ s}$. Identifikace proběhne 2. až 5. řádem.



Obrázek 32: Data pro identifikaci - robotická ruka

Rekurzivní metoda nejmenších čtverců

Řád	Fit index [%]
2.	20,43
3.	29,59
4.	58,51
5.	59,06

Rekurzivní metoda pomocné proměnné

Řád	Fit index [%]
2.	32,03
3.	38,63
4.	44,19
5.	X

Rozšířená rekurzivní metoda NČ

Řád	Fit index [%]
2.	47,53
3.	59,01
4.	57,73
5.	82,79

Metoda subspace

Řád	Fit index [%]
2.	72,94
3.	74,35
4.	83,57
5.	82,21

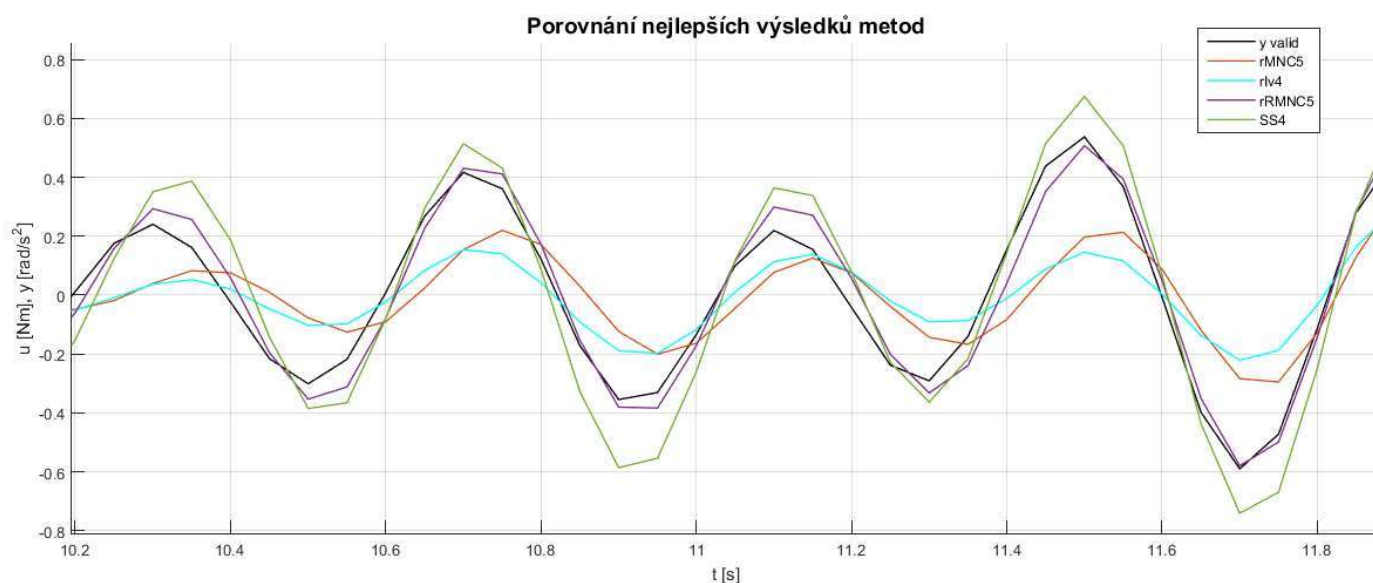
Tabulka 20: Porovnání FIT indexů

	A (z^{-1})	B (z^{-1})	FIT [%]
rMNC5	$1 - 1,671z^{-1} + 1,14z^{-2} + 0,04471z^{-3} - 0,226z^{-4} + 0,00137z^{-5}$	$-0,311z^{-1} + 0,5785z^{-2} - 0,5981z^{-3} + 0,03496z^{-4} - 0,03525z^{-5}$	59,06
rlv4	$1 - 2,961z^{-1} + 3,977z^{-2} - 2,672z^{-3} + 0,7972z^{-4}$	$-0,04108z^{-1} + 0,07575z^{-2} - 0,03215z^{-3} + 0,009153z^{-4}$	44,19
rRMNC5	$1 - 2,355z^{-1} + 1,707z^{-2} + 0,723z^{-3} - 1,744z^{-4} + 0,8014z^{-5}$	$-0,3233z^{-1} + 0,08936z^{-2} - 1,126z^{-3} + 0,8568z^{-4} - 0,3156z^{-5}$	82,79
SS4	$1 - 3,93z^{-1} + 6,77z^{-2} - 6,322z^{-3} + 3,166z^{-4} - 0,6646z^{-5}$	$0,05489 - 0,3464z^{-1} + 0,7383z^{-2} - 0,7z^{-3} + 0,3067z^{-4} + 0,05061z^{-5}$	83,57

Tabulka 21: Porovnání nejlepších výsledků jednotlivých metod

Zde se jak metoda nejmenších čtverců, tak metoda pomocné proměnné již nedokáží uplatit při hledání přesnější aproximace a výsledky jsou opoznání nižší, než metoda subspace a rozšířená metoda nejmenších čtverců. Metoda pomocné proměnné v 5. řádu

identifikačního modelu dokonce nedokáže konvergovat. Nejlepší výsledky podává metoda subspace a to 83,57 % ve 4. řádu modelu.

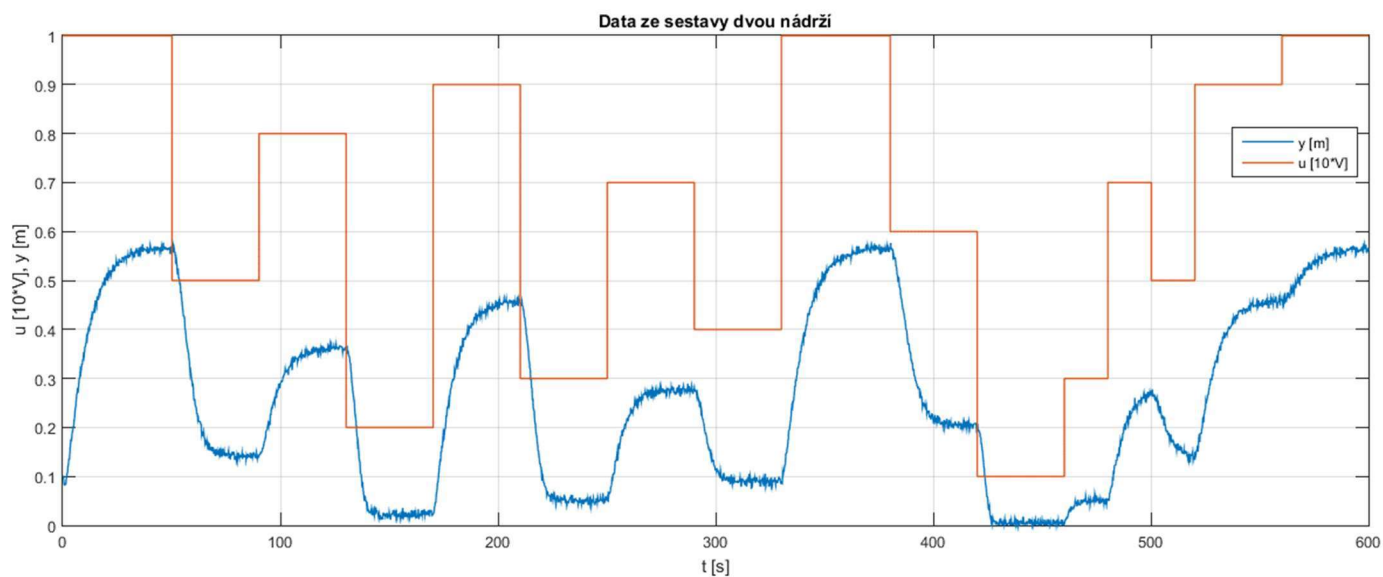


Obrázek 33: Porovnání nejlepších výsledků

3.4.4 Sestava dvou nádrží

Posledním reálným systémem je sestava dvou nádrží nad sebou, kdy do první přitéká voda, ze které odtéká do druhé nádrže a v druhé nádrži je též výpust. Vstupem do systému je napětí řídicí čerpadlo pro přítok do první nádrže. Výstupem je výška hladiny nižší nádrže. Z principu jde o nelineární systém, protože v rovnici pro odtok se objevuje odmocnina. Data byla získána z [11].

Rozsah vstupu je od -10 V do 10 V . Soubor dat není třeba posouvat v ose y , protože začíná od nuly. V čase pro identifikaci a verifikace je třeba sady dat posunout. Níže lze vidět celý soubor dat. Pro jednodušší orientaci v charakteristice je vstupní napětí vyděleno 10. Pro identifikaci použijeme data od $t_{id} = 0\text{ s}$ do $t_{id} = 210\text{ s}$. Validační soubor byl vybrán mezi $t_{val1} = 250\text{ s}$ do času $t_{val2} = 520\text{ s}$. Identifikace proběhne 1. až 5. řádem.



Obrázek 34: Kompletní soubor dat

Rekurzivní metoda nejmenších čtverců

Řád	Fit index [%]
1.	50,32
2.	48,83
3.	48,95
4.	49,21
5.	49,82

Rekurzivní metoda pomocné proměnné

Řád	Fit index [%]
1.	47,95
2.	47,89
3.	47,92
4.	X
5.	50,42

Rozšířená rekurzivní metoda MNC

Řád	Fit index [%]
1.	49,88
2.	50,97
3.	51,33
4.	52,74
5.	53,25

Metoda subspace

Řád	Fit index [%]
1.	-165,8
2.	1,666
3.	-53,71
4.	46,15
5.	-35,6

Tabulka 22: Porovnání výsledků jednotlivých metod

Z výše uvedené tabulky je zřejmé, že ani jedna metoda nedokáže v žádném řádu aproximovat tato data, nejblíže se dokáže dostat těsně nad 50 %. Proto tyto metody nejsou vhodné k identifikaci značně nelineárních systémů.

Závěr

Cílem diplomové práce bylo seznámení autora s rekurzivními metodami identifikace a dále jejich použití na reálných a modelových datech. Seznámení s metodami bylo splněno v kapitole 2, kde autor poskytuje vysvětlení principů, na kterých jsou metody založeny. V praktické části poté autor ve 3. kapitole použil metody ke zjištění matematických modelů dynamických systémů. Nejprve byly metody použity na modelových datech 2. a 3. řádu a následně na reálných datech systémů: fén, stejnosměrný motor, reakční moment robotické ruky a na nelineárním systému dvou nádrží.

Ve 3. kapitole byly porovnávány metody na modelových datech modelů *ARX*, *ARMAX*, *OE*. V tomto porovnání je zajímavé sledovat, jakým způsobem si metody dokázaly poradit s různě vytvořenými daty. Prakticky všechny metody neměly problém s modelem založeným na *ARX* a poskytují velice slušné výsledky jak na kmitavém, tak nekmitavém systému. Nejlépe si v tomto případě vede rekurzivní metoda pomocné proměnné, která je vůči rušení vstupujícího do systému nejvíce odolná a její výsledky jdou nad 90 % *FIT indexu*. Dále slušné výsledky dává metoda subspace, která nemá problém s nekmitavým systémem, avšak musí si pomoci zvýšeným řádem výsledného modelu. V případě použití na kmitavém systému jsou výsledky metody prakticky nepoužitelné. Jakmile byl použit model *ARMAX* na modelový systém, rekurzivní metoda nejmenších čtverců již v tom případě výrazněji ztrácela oproti zbylým dvěma metodám. V případě nekmitavého systému přinesla nejlepší výsledky, přes 90 % *FIT indexu*, rozšířená rekurzivní metoda nejmenších čtverců, která je pro identifikaci *ARMAX* modelů stavěna. Překvapením však bylo, že v případě kmitavého systému byly její výsledky pouze necelých 80 %. O něco lepší výsledky ukázala rekurzivní metoda pomocné proměnné, a to 80,5 %. Jako poslední modelová data byla získána z modelu *OE*, kde je rušení přidáváno až na výstupu modelu. Pro tento případ se ukázala nejvhodnější metoda subspace, která podávala v obou případech výsledky přes 90 % a v případě nekmitavého systému dokonce přes 97 %. Právě na datech z modelu *OE* měla metoda subspace dobré výsledky, protože rušení nebylo závislé na systému. Výsledky těchto měření byly samozřejmě značně ovlivněny mírou zarušení vůči původnímu signálu a dále velikostí faktoru zapomínání u rekurzivních metod, avšak i tyto výsledky mohou dát jistý klíč k možnostem aplikace metod.

Dále byly metody testovány na reálných datech systémů. Na tepelném systému fén (kapitola 3.4.2) se jako nejvhodnější ukázala rozšířená rekurzivní metoda nejmenších čtverců, která v případě 3. řádu modelu dávala výsledek přes 88 %. Ostatní metody poskytly výsledek přes 86 %, ovšem tohoto výsledku dosáhly až v 5. řádu modelu, tudíž výsledný matematický model by byl složitější. Metoda subspace poskytla o 10 % horší výsledek oproti rekurzivním metodám. Na systému stejnosměrného motoru (kapitola 3.4.3), kde je výstupem úhlová rychlost, se nejlepší výsledky všech metod dosáhly přibližně 82 %. V praxi by pak však bohatě postačily výsledky 1. řádů metod pro svou jednoduchost, které se výsledkem dostaly všechny přes 80 %. Pro systém robotické ruky, kde je hledán vztah mezi reakčním momentem upevnění motoru a akcelerací ruky se nejvíce osvědčila metoda subspace, která přinesla výsledek přes 83 %, a to ve 4. řádu modelu. Další dobrý výsledek poskytla i rozšířená rekurzivní metoda nejmenších čtverců, která v 5. řádu modelu přinesla pouze o jedno procento nižší *FIT index*. Ani jedna ze zbylých metod nepřinesla uspokojivější výsledek. Rekursivní metoda nejmenších čtverců podala nejlepší výsledek, necelých 60 %, v 5. řádu modelu. Dále byla identifikována data ze zcela nelineárního systému dvou nádrží. Ani jedna z metod není, dle teorie, v těchto variantách určena k identifikaci nelineárního systému. Nebylo tedy překvapením, že se výsledky *FIT indexu* nedostaly ani u jedné z metod přes 55 %. Nejlepší výsledek podala rozšířená rekurzivní metoda nejmenších čtverců – 53 % u 5. řádu modelu.

V práci je poukázáno na výhody a nevýhody jednotlivých metod, nelze však jednoznačně říci, kterou metodu kdy v praxi použít, vždy záleží na konkrétním případě. Pro svou jednoduchost je často užívána právě základní metoda nejmenších čtverců, která ale neposkytuje nejlepší výsledky ve srovnání s ostatními metodami. Rozhodně by stálo za úvahu použít její rozšířenou variantu, která na implementaci není složitější, avšak poskytuje lepší výsledky, především v případech více zarušených signálů. Metoda subspace má několik variant, které jsou použitelné v různých případech, a to i na nelineární systémy, ale pak její složitost na programovou implementaci značně roste. Velice důležitým kritériem výsledků jsou možnosti zapomínání rekurzivních metod. V práci se pracovalo pouze s exponenciálním zapomínáním, avšak lze použít i jiné možnosti. Právě vliv různých druhů zapomínání a různých nastavení zapomínání na výsledek identifikace by byl jistě zajímavým navázáním na výsledky této práce.

Seznam použitých zdrojů

- [1] NOSKIEVIČ, P. Modelování a identifikace systémů. MONTANEX a.s., 1999, ISBN 80-7225-030-02
- [2] SÖDERSTRÖM, T., STOICA, P.: *System identification*. Prentice-Hall international series in systems and control engineering, Prentice Hall, 1989, ISBN 9780138812362.
- [3] NAVRÁTIL, Petr. *Metody průběžné identifikace pro návrh samočinně se nastavujících regulátorů*. Zlín, 2007. Dizertační práce. Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně Fakulta aplikované informatiky.
- [4] LJUNG, L.: *System Identification: Theory for the User*. Prentice Hall Information And System Sciences Series, Prentice Hall PTR, 1999, ISBN 9780136566953
- [5] JANEČEK, Bedřich. *Nejmenší čtverce*. Liberec, 2015.
- [6] DE COCK, K. BART DE MOOR, K. Subspace identification methods. 2008.
- [7] TRNKA, P. Subspace Identification Methods [online]. 2008. Dostupné z: http://www.trnka.name/download/subspace/oaf_slides2.pdf
- [8] <https://www.mathworks.com/help/ident/examples/two-tank-system-c-mex-file-modeling-of-time-continuous-siso-system.html>
- [9] DC-motor. *MathWorks* [online]. USA: The MathWorks, 2014 [cit. 2017-9-19]. Dostupné z: <https://www.mathworks.com/help/control/examples/dc-motor-control.html>
- [10] STADIUS's Identification Database. *DaISy* [online]. Belgie, 2000 [cit. 2017-9-19]. Dostupné z: ftp://ftp.esat.kuleuven.be/pub/SISTA/data/mechanical/robot_arm.txt
- [11] Two tanks system. *MathWorks* [online]. USA: The Mathworks, 2014 [cit. 2017-9-19]. Dostupné z: <https://www.mathworks.com/help/ident/examples/two-tank-system-c-mex-file-modeling-of-time-continuous-siso-system.html>
- [12] Balátě, J. *Vybrané statě z automatického řízení*. 2. vyd. Brno: Vysoké učení technické v Brně, 1996. 360 s. ISBN 80-214-0793-X.