Technická univerzita v Liberci

FAKULTA PŘÍRODOVĚDNĚ-HUMANITNÍ A PEDAGOGICKÁ

Katedra: Matematiky a didaktiky matematiky

Studijní program: Denní studium

Studijní obor (kombinace) MA - IF

SHODNÁ ZOBRAZENÍ V ROVINĚ
(konstruktivní úlohy)
PLANE CONGRUENT PROJECTION
(constructive tasks)

Diplomová práce:

Autor:
Jarmila Dittrichová

Podpis: Dittrichová

Adresa:
Husova 485
294 21, Bělá pod Bězdězem

Vedoucí práce: prof. RNDr. Jana Přívratská, CSc. Ph.D.

Konzultant:

Počet

stran	grafů	obrázků	tabulek	pramenů	příloh
144	0	118	0	9	0

V Liberci dne: 21.5.2009

TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI
FAKULTA PŘÍRODOVĚDNĚ-HUMANITNÍ A PEDAGOGICKÁ

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE
(pro magisterský studijní program)

pro (diplomant):	**Jarmila Dittrichová**
adresa:	**Husova 485, 294 21 Bělá pod Bezdězem**
studijní obor (kombinace):	**MA pro 2. st. - IF**
Název DP:	**Shodná zobrazení v rovině (konstruktivní úlohy)**
Název DP v angličtině:	**Plane congruent projection (constructive tasks)**
Vedoucí práce:	**prof. RNDr. Jana Přívratská, CSc. Ph.D.**
Konzultant:	
Termín odevzdání:	**prosinec 2009**

Poznámka: Podmínky pro zadání práce jsou k nahlédnutí na katedrách. Katedry rovněž formulují podrobnosti zadání. Zásady pro zpracování DP jsou k dispozici ve dvou verzích (stručné, resp. metodické pokyny) na katedrách a na Děkanátě Fakulty přírodovědně-humanitní a pedagogické TU v Liberci.

V Liberci dne 27. 5. 2008

děkan

Karel Segeth

vedoucí katedry

Převzal (diplomant): JARMILA DITTRICHOVÁ

Datum: 6. 3. 2009 Podpis: Dittrichová

Název DP:
Shodná zobrazení v rovině (konstruktivní úlohy)
Plane congruent projection (constructive tasks)

Vedoucí:
prof. RNDr. Jana Přívratská, CSc. Ph.D.

Úvod:
Jednou z důležitých součástí učiva na základních a středních školách jsou právě kapitoly zabývající se geometrickými zobrazeními v rovině. Problémem je, že jim není věnován dostatečný prostor. Je to hlavně způsobeno nedostatečným množstvím úloh k samostatné přípravě žáků.

Cíl:
Vytvořit ucelenou sbírku řešených úloh se zaměřením na shodná zobrazení.

Požadavky:
Podrobné seznámení se s vlastnostmi jednotlivých shodných zobrazení.

Literatura:

Brožová N.: Vytváření pojmu shodné zobrazení v jednotlivých ročnících ZŠ. Liberec, 1998, V156/98P (dipl. práce TUL).
Hůlka B.: Grupa shodných zobrazení v rovině. Liberec 1998, V47/98P (dipl. práce TUL).
Vyšín J.: Vybrané statě z elementární geometrie. Praha, SPN, 1959.
Fabiánová H. - Ocmanová B.: *Opakování geometrie*. Liberec, 1996, ISBN 80-7083-204-5. Učebnice pro základní a střední školy.

Prohlášení

Byl(a) jsem seznámen(a) s tím, že na mou diplomovou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. o právu autorském, zejména § 60 – školní dílo.

Beru na vědomí, že Technická univerzita v Liberci (TUL) nezasahuje do mých autorských práv užitím mé diplomové práce pro vnitřní potřebu TUL.

Užiji-li diplomovou práci nebo poskytnu-li licenci k jejímu využití, jsem si vědom povinnosti informovat o této skutečnosti TUL; v tomto případě má TUL právo ode mne požadovat úhradu nákladů, které vynaložila na vytvoření díla, až do jejich skutečné výše.

Diplomovou práci jsem vypracoval(a) samostatně s použitím uvedené literatury a na základě konzultací s vedoucím diplomové práce a konzultantem.

Datum 21. 5. 2009

Podpis Ditlrichová

Poděkování:

Dekuji všem bez nichž bych nikdy svoji diplomovou práci nedokončila. Díky patří paní Mgr. Vlastě Dragounové za inspiraci při tvorbě DP, za zasvěcení do problémů týkajících se shodného zobrazení na ZŠ, za estetické úpravy a hlavně za velkou morální podporu. Dále bych chtěla poděkovat ZŠ Bělá pod Bezdězem za vytvoření skvělých podmínek pro práci s dětmi v programu Cabri Geometry. V neposlední řadě vedoucímu diplomové práce prof. RNDR. Janě Přívratské, CSc. Ph.D. děkuji za velkou trpělivost při vysvětlování problémů týkajících se tvorby DP a za podnětné rady. Díky patří i rodině.

Anotace

Cílem této diplomové práce je sestavit sbírku úloh, která by mohla pomoci při výuce tématu „Shodná zobrazení v rovině" na středních školách. Práce se skládá ze sedmi kapitol: shodná zobrazení, středová souměrnost, osová souměrnost, posunutí, otočení, identita a skládání shodných zobrazení. Na začátku každé kapitoly je definice spolu se stručnou charakteristikou daného zobrazení. Dále následují řešené příklady, u kterých je vždy uvedeno zadání, řešení, náčrtek, popis konstrukce, grafické řešení a diskuse. Příklady jsou řazeny od nejjednodušších po nejtěžší. Byly vybrány z učebnic a sbírek úloh, které jsou používány na středních školách. Příklady jsou voleny tak, aby byly řešitelné v programu Cabri Geometry.

Anotation

The aim of this thesis is to make the collection of the tasks which could help the teachers during their teaching the topic „Plane congruent projection" at the high schools. The work consists of 7 chapters: plane congruent projection, arithmetic symmetry, axial symmetry, displacement, rotation, identity and composing of identical figures. At the beginning of each chapter there is a definition together with the brief characteristic of given pictures. Then following solving tasks show the problems, solution, sketch, structure description, graphical solution and discussion. The tasks are from the easiest ones to the most difficult ones. They had been chosen the way they could been solved in Cabri Geometry programme.

Die Anotation

Das Ziel dieser Diplomarbeit ist eine Aufgabensammlung zusammenzusetzen, die beim Unterricht des Themas „Übereinstimmende Darstellungen in der Ebene" auf den Mittelschulen helfen könnte. Die Arbeit setzt sich aus sieben Kapiteln zusammen: Übereinstimmende Darstellungen in der Ebene, Zentralsymmetrie, Achsensymmetrie, Verschiebung, Drehung, Identität und Zusammensetzung übereinstimmender Darstellungen. Am Anfang jeder Kapitel befindet sich Definition gemeinsam mit kurz gefasster Charakteristik entsprechender Darstellung. Weiter folgen gelöste Beispiele, bei denen immer die Aufgabe, Lösung, Skizze, Beschreibung der Konstruktion, graphische Lösung und Diskussion angeführt ist. Die Beispiele sind von den einfachsten zu den schwierigsten eingeordnet. Sie wurden aus Lehrbüchern und Aufgabensammlungen, die auf den Mittelschulen verwendet werden, ausgewählt. Die Beispiele wurden in Hinsicht auf Lösbarkeit im Programm Cabri Geometry ausgewählt.

Obsah

Úvod

Cílem diplomové práce je sestavit sbírku úloh, která by mohla pomoci při výuce tématu „shodná zobrazení v rovině“ na středních školách. Práce by měla rozšířit znalosti z planimetrie. Text však není učebnice a proto neobsahuje dlouhé teoretické výklady, ale ukazuje, jak řešit úlohy na téma „Shodná zobrazení v rovině“.

Mimo úvod, seznam použitých symbolů a seznam použité literatury je práce členěna do 7 kapitol: shodná zobrazení, středová souměrnost, osová souměrnost, posunutí, identita, otočení a skládání shodných zobrazení.

Na začátku každé kapitoly jsou uvedeny jen nejnutnější pojmy a věty, které uvádějí základní vlastnosti daného zobrazení. Definice a věty jsou přebírány z učebnice „Planimetrie pro gymnázia“ viz seznam použité literatury. Důležité pojmy jsou vždy zvýrazněny tučným písmem a definice jsou dány do rámečku.

Po stručné teorii následují vždy řešené příklady, které se týkají daného zobrazení. U těchto příkladů je uvedeno zadání, řešení, náčrtek, zápis konstrukce, grafické řešení a diskuse. Náčrtek a popis konstrukce se objevují jen u příkladů, u kterých není hned jasné řešení. Pokud má daná úloha víc jak jedno řešení, zobrazuji jej ve více obrázcích. Pro přehlednost ke každému grafickému řešení uvádím i zápis konstrukce.

Příklady jsem volila tak, abych je mohla narýsovat v programu Cabri Geometry, který je používán na většině škol. Funkce tohoto programu jsou zaměřeny na shodná zobrazení v rovině. Jsem si vědoma toho, že popisky objektů by měly být psány kurzívou, která mi ovšem chybí v grafickém řešení. Jako každý jiný program, má Cabri nedostatky. Objekty lze popsat, malými či velkými písmeny, ovšem nelze je napsat potřebnou kurzívou. Dále nelze napsat dolní index, proto u příkladů volím spíše popisky typu X´nebo zvolím jiné písmeno. Např. pokud kružnice protne přímku ve dvou bodech, označím je A, X, místo A, A_1. Také se vyhýbám popiskům s řeckými písmeny. Tento program je jinak velkým přínosem pro školy, neboť rozšiřuje dětem geometrické chápání a dobře se s ním pracuje na interaktivní tabuli.

Seznam použitých symbolů

$A, B, \ldots$	bod $A, B, \ldots$
$a, b, \ldots$	přímka $a, b, \ldots$
$\leftrightarrow AB$	přímka určená body AB
$\rightarrow AB$	polopřímka AB (s počátkem A a vnitřním bodem B)
AB	úsečka AB
$\boldsymbol{AB}$	orientovaná úsečka AB s počátečním bodem A a s koncovým bodem B
$\rightarrow pC$	polorovina pC s hraniční přímkou p a vnitřním bodem C
$\rightarrow ABC$	polorovina ABC s hraniční přímkou AB a vnitřním bodem C
$\angle AVB$	konvexní úhel AVB s vrcholem V a rameny v polopřímkách VA, VB
(a, b)	rovinný pás a, b ohraničený rovnoběžkami a, b
$\Delta\, ABC$	trojúhelník ABC s vrcholy A, B, C
t_a	těžnice vedená vrcholem A trojúhelníku
v_a	výška ke straně a trojúhelníku
r	poloměr kružnice
$k(S; r)$	kružnice k se středem S a poloměrem r
τ_{AB}	Thaletova kružnice s průměrem AB
$A \in p\ (A \notin p)$	bod A leží (neleží) na přímce p
$AB \subset p\ (AB \not\subset p)$	úsečka AB je (není) částí přímky
$A = B\ (A \neq B)$	Bod A je totožný s bode B (různý od bodu B)
$C \in a \cap b$	Bod C leží v průsečíku přímek a, b
$a \perp b$	přímka a je kolmá k přímce b
$AB \cong CD$	úsečka AB je shodná s úsečkou CD
$\lvert AB \rvert$	délka úsečky AB
$\lvert AB \rvert$	délka orientované úsečky AB
$\lvert Ap \rvert$	vzdálenost bodu A od přímky p
$\lvert ab \rvert$	vzdálenost rovnoběžných přímek
$^\circ$	stupeň
$\lvert \angle AVB \rvert$	velikost konvexního úhlu AVB

Z	zobrazení Z
$Z: X \to X'$	bod X' je obrazem bodu X v zobrazení Z
$\boldsymbol{O}(o)$	osová souměrnost s osou o
$\boldsymbol{S}(S)$	středová souměrnost se středem S
$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{AB})$	posunutí určené orientovanou úsečkou AB
$R(S, \varphi)$	otočení se středem S a úhlem otočení φ
$Z_2 \circ Z_1$	zobrazení složené ze zobrazení Z_1 a Z_2 v tomto pořadí

1 Zobrazení v rovině

Zobrazení *Z* v rovině je předpis, který každému bodu X roviny přiřazuje právě jedno X'. Bod X se nazývá **vzor** a bod X **obraz**. Zapisujeme takto Z: $X \rightarrow X'$.

Množinu obrazů všech bodů útvaru U označíme U′ a nazveme **obraz útvaru** U.

Bod X, který se zobrazí sám na sebe, tj. $X' = X$, se nazývá bod samodružný. Pokud U′ = U, pak útvar U se nazývá samodružný útvar zobrazení. Zobrazení, ve kterém je každý bod samodružný, se nazývá **identita**.

1.1 Shodné zobrazení v rovině

Prosté zobrazení $\boldsymbol{Z}$ množiny $\boldsymbol{A}$ se nazývá shodné, právě když pro každé dva body $X, Y \in \boldsymbol{A}$ a jejich obrazy $\boldsymbol{Z}(X) = X'$, $\boldsymbol{Z}(Y) = Y'$ platí $X'Y' \cong XY$.

Vlastnosti shodného zobrazení:

- Obrazem přímky XY je přímka $X'Y'$,
- obrazem rovnoběžných přímek $x \| y$ jsou rovnoběžné přímky $x' \| y'$,
- obrazem polopřímky XY je polopřímka $X'Y'$,
- obrazem opačných polopřímek jsou opačné polopřímky,
- obrazem poloroviny pX je polorovina $p'X'$,
- obrazem opačných polorovin jsou poloroviny opačné,
- obrazem úhlu XVY je úhel $X'V'Y'$ shodný s úhlem XVY,
- orientace úhlů XVY a $X'V'Y'$ je v daném zobrazení buď stejná, nebo opačná pro každý orientovaný úhel a jeho obraz; podle toho dělíme zobrazení na přímé nebo nepřímé,
- obrazem kružnice $k(S; r)$ je kružnice $k'(S; r' = r)$.

Každé shodné zobrazení je prosté.

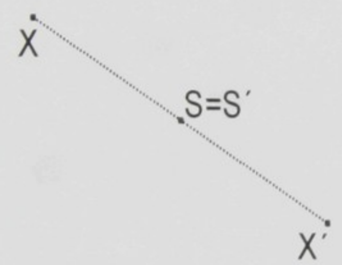
Shodná zobrazení se dělí:

- středová souměrnost,
- osová souměrnost,
- posunutí,
- otočení,
- identita.

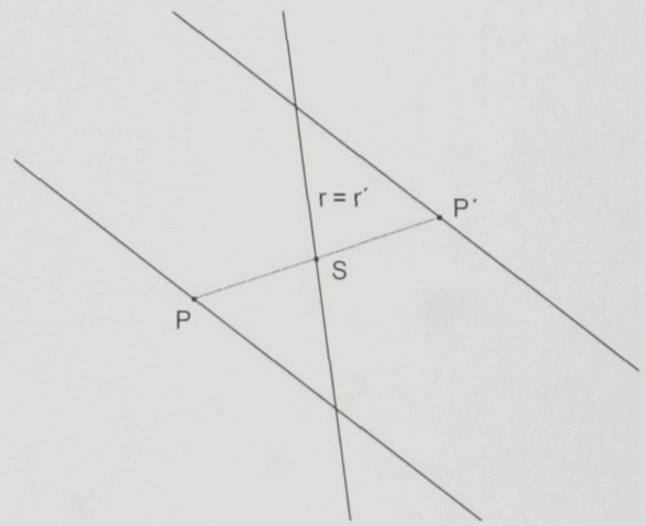
1.2 Středová souměrnost

Je dán v rovině bod S. Středová souměrnost se středem S (obr. 1) je shodné zobrazení $\boldsymbol{S}(S)$, které přiřazuje:

1. Každému bodu $X \neq S$ bod X' tak, že bod S je středem úsečky XX',
2. bodu S bod $S' = S$, tj. bod je samodružný.



Obr. 1



Obr. 2

Bod S se nazývá **střed středové souměrnosti.**

Útvary U, U′, z nichž jeden je obrazem druhého ve středové souměrnosti se středem S, se nazývají útvary souměrně sdružené podle středu S.

Je-li U ≅ U′, pak útvar U′ je středově souměrný podle středu S s útvarem U.

Středovou souměrnost se středem S zapisujeme $\boldsymbol{S}(S)$.

Zobrazení útvaru U (vzoru) do útvaru U′ (obrazu) zapisujeme ve středové souměrnosti $\boldsymbol{S}(S)$: U → U′.

Vlastnosti $\boldsymbol{S}(S)$:

- Středová souměrnost je otočení o úhel 180°,
- všechny přímky, které prochází středem souměrnosti S, jsou slabě samodružné (obr. 2),
- obrazem přímky p, která neprochází středem souměrnosti S, je přímka p' (obr. 2),
- středová souměrnost je **přímá shodnost**.

Středová souměrnost je vhodná pro řešení v Cabri Geometry, proto všechny úlohy volím pro řešení v tomto programu.

Příklad 1

Za pomoci kružidla sestrojte úhel *AVB* o velikosti 30°. Dále sestrojte jeho obraz ve středové souměrnosti se středem *S*. Střed zvolte tak, že

a) je vrcholem,

b) leží mimo úhel *AVB*,

c) $S = A$.

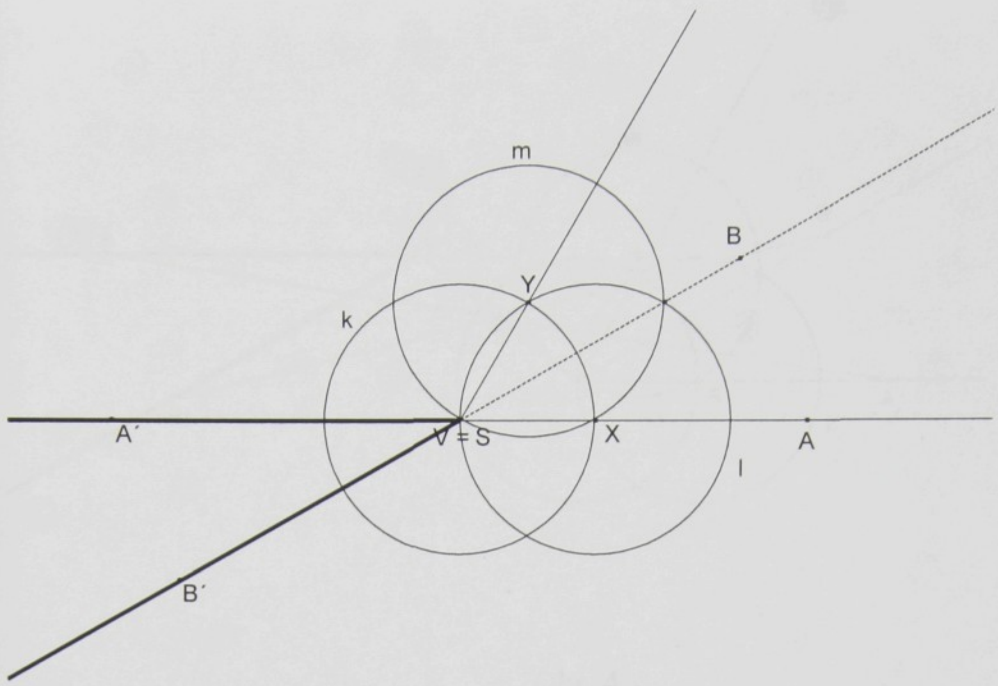
Řešení[1]:

Pomocí kružidla sestrojíme úhel *AVY* o velikosti 60° a to tak, že sestrojíme libovolnou kružnici *k* se středem *V*. Bod $X \in k \cap \rightarrow AV$. Dále sestrojíme kružnici $l(X; r = |XV|)$. Hledaný bod $Y \in l \cap k$. Nyní sestrojíme osu úhlu *AVY* a výsledný úhel *AVB* má velikost 30°, kde bod *B* leží na ose úhlu *AVY*, která je druhým ramenem úhlu *AVB*.

Ad a)

Bod *S* je středem středové souměrnosti, dle zadání $V = S$. Bod A' sestrojíme ve středové souměrnosti se středem *S* tak, že bod *S* je střed AA', tj. $\boldsymbol{S}(S)$: $A \rightarrow A'$. Bod B' sestrojíme obdobně; $\boldsymbol{S}(S)$: $B \rightarrow B'$, kde S je střed úsečky BB'.

[1] Pro tento příklad neuvádím zápis konstrukce, protože si myslím, že to není nutné.



Obr. 3

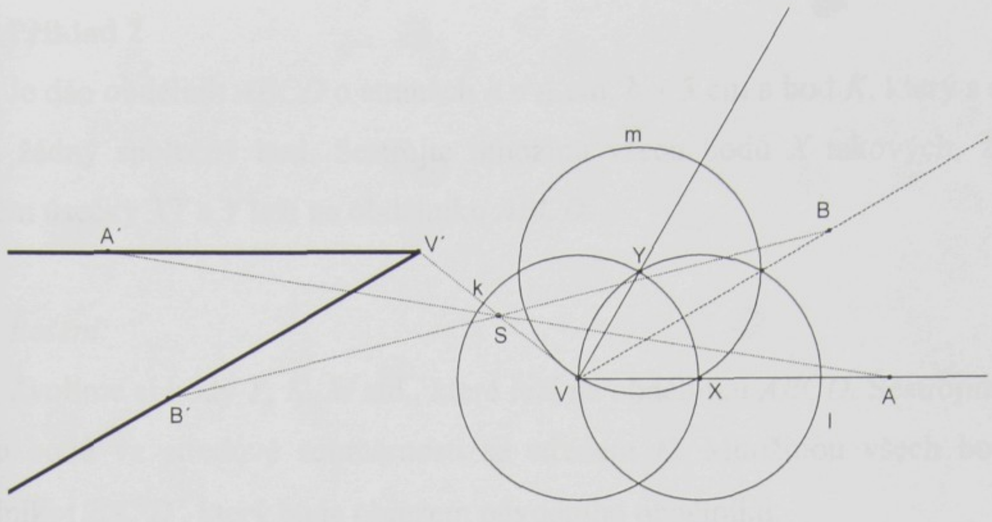
Ad b)

Střed souměrnosti S je mimo daný úhel. Sestrojíme obrazy bodů A, V, B a to tak, že:

A'; $\boldsymbol{S}(S)$: $A \to A'$

B'; $\boldsymbol{S}(S)$: $B \to B'$

C'; $\boldsymbol{S}(S)$: $C \to C'$.



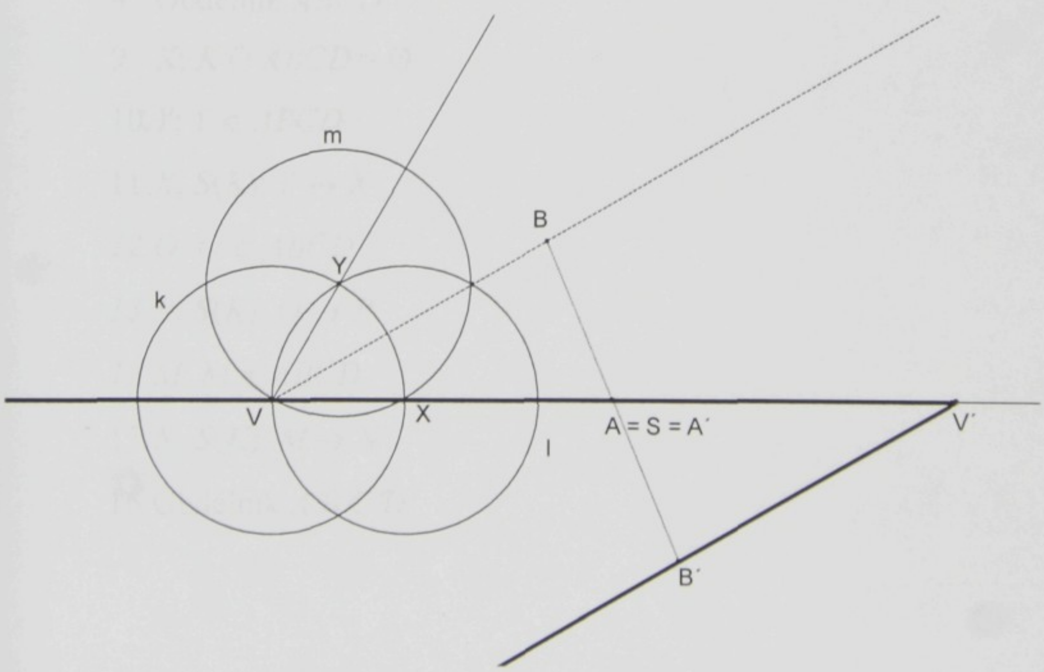
Obr. 4

Ad c)

Tentokrát je bod $A = S$. Bod A bude v tomto případě bodem samodružným. Sestrojíme obrazy bodů B, V tak, že:

B': $\boldsymbol{S}(S)$: $B \to B'$

V'; $\boldsymbol{S}(S)$: $V \to V'$.



Obr. 5

<u>Diskuse:</u>

Každá úloha má jedno řešení, které je zvýrazněno silnější čarou.

Příklad 2

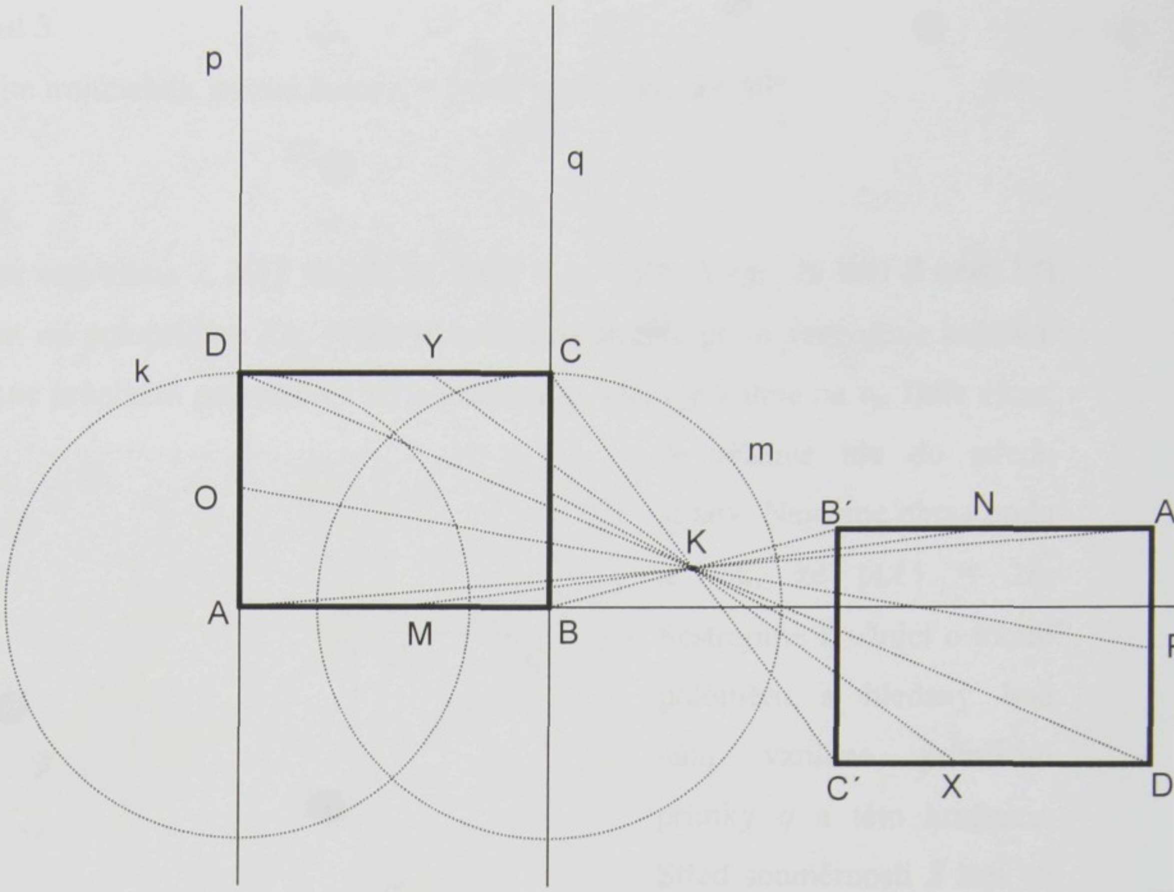
Je dán obdélník $ABCD$ o stranách $a = 4$ cm, $b = 3$ cm a bod K, který s obdélníkem nemá žádný společný bod. Sestrojte množinu všech bodů X takových, že bod K je středem úsečky XY a Y leží na obdélníku $ABCD$.

Řešení:

Zvolíme si body Y, K, M atd., které leží na obdélníku $ABCD$. Sestrojíme obrazy X těchto bodů ve středové souměrnosti se středem K. Množinou všech bodů X bude obdélník $A'B'C'D'$, který bude obrazem původního obdélníku.

Zápis konstrukce:

1. AB; $|AB| = a = 4$ cm
2. p; $p \perp a$; $A \in p$
3. q; $q \perp a$; $B \in q$
4. k; $k(A; r_k = 3$ cm$)$
5. D; $D \in k \cap p$
6. m; $m(B; r_m = 3$ cm$)$
7. C; $C \in m \cap q$
8. Obdélník $ABCD$
9. K; $K \cap ABCD = \emptyset$
10. Y; $Y \in ABCD$
11. X; $\boldsymbol{S}(K)$: $Y \rightarrow X$
12. O; $O \in ABCD$
13. P; $\boldsymbol{S}(K)$: $O \rightarrow P$
14. M; $M \in ABCD$
15. N; $\boldsymbol{S}(K)$: $M \rightarrow N$
16. Obdélník $A'B'C'D'$



Obr. 6

<u>Diskuse:</u>

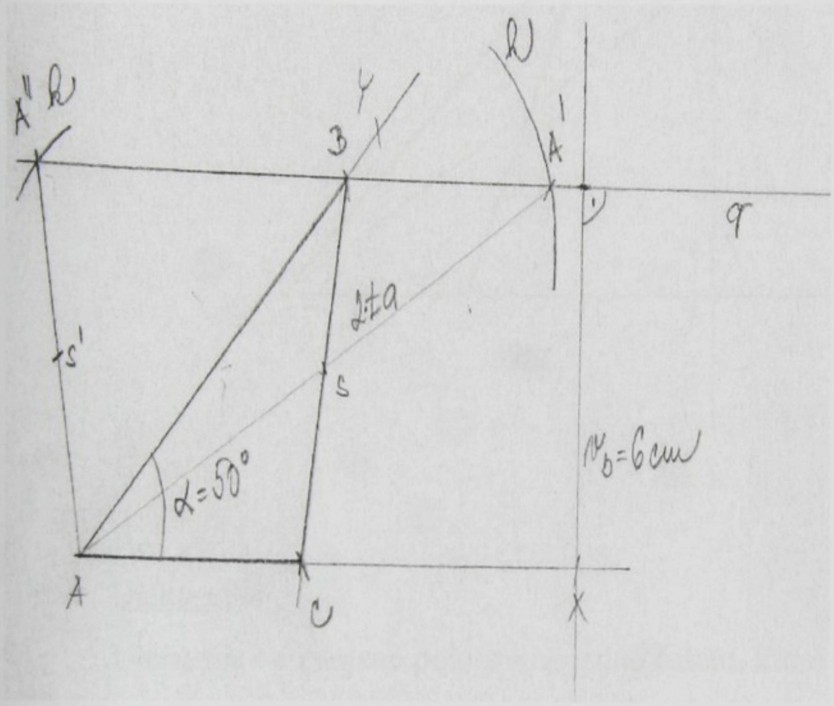
Úloha má ve zvolené polorovině právě jedno řešení a tím je čtverec $A'B'C'D'$.

Příklad 3

Sestrojte trojúhelník, pokud znáte $t_a = 5$ cm, $v_b = 6$ cm, $\alpha = 50°$.

Řešení:

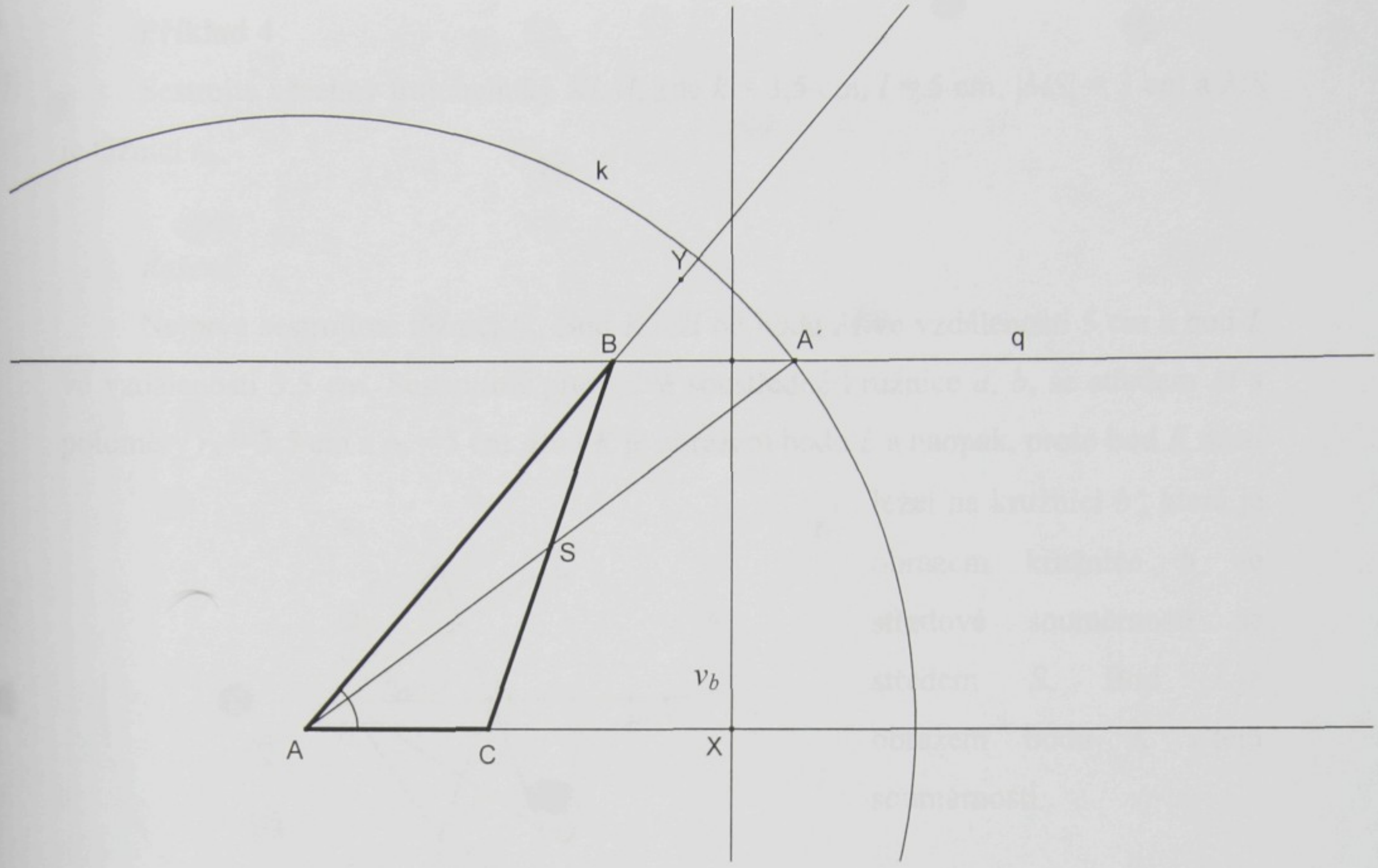
Nejprve sestrojíme $\angle XAY$ tak, že $|\angle XAY| = \alpha = 50°$. Víme, že bod B musí být vzdálen 6 cm od polopřímky XA, výška je kolmá na stranu, proto sestrojíme kolmici. Bod B vznikne průnikem polopřímky AY a přímkou q, která je kolmá na v_b. Dále víme, že těžnice jde do středu strany. Najdeme obraz bodu A tak, že $|AA'| = 2t_a$. Sestrojíme kružnici o tomto poloměru a hledaný bod nám vznikne průnikem přímky q a této kružnice. Střed souměrnosti S leží ve středu úsečky AA'. Bod C je obrazem bodu B ve středové souměrnosti se středem S.



Obr. 7

Zápis konstrukce:

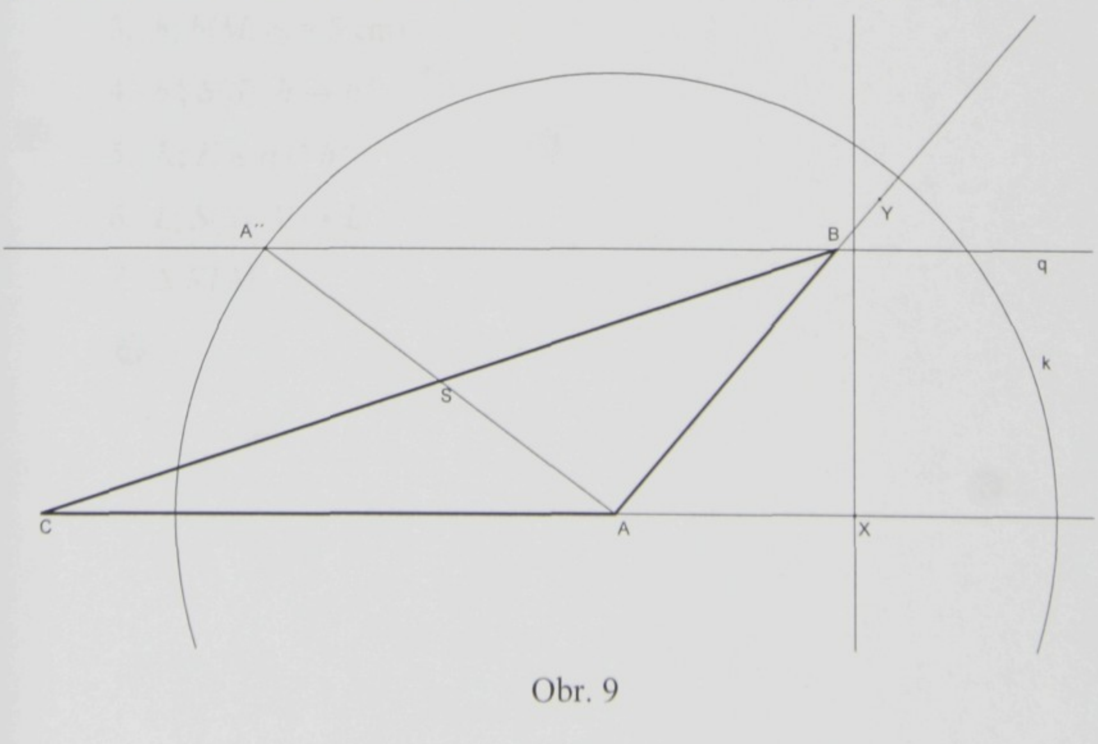
1. $\angle XAY$; $|\angle XAY| = \alpha = 50°$
2. v_b; $v_b \perp \rightarrow AX$; $v_b = 6$ cm
3. q; $q \perp v_b$; $|qX| = 6$ cm;
4. B; $B \in AY \cap q$
5. k; $k(A;\, r = |2t_a|)$
6. A'; $A' \in q \cap k$
7. S; s je střed AA'
8. C; $\boldsymbol{S}(S)$: $B \rightarrow C$
9. $\Delta\, ABC$



Obr. 8

Diskuse:

Úloha má ve zvolené polorovině jedno řešení, které získáme pomocí bodu A'. Bod A'' sice splňuje požadované vlastnosti (je od bodu A vzdálen 10 cm, leží na přímce q), avšak při vrcholu A není úhel o velikosti 50° (obr. 9). Řešením je tedy $\Delta\ ABC$.



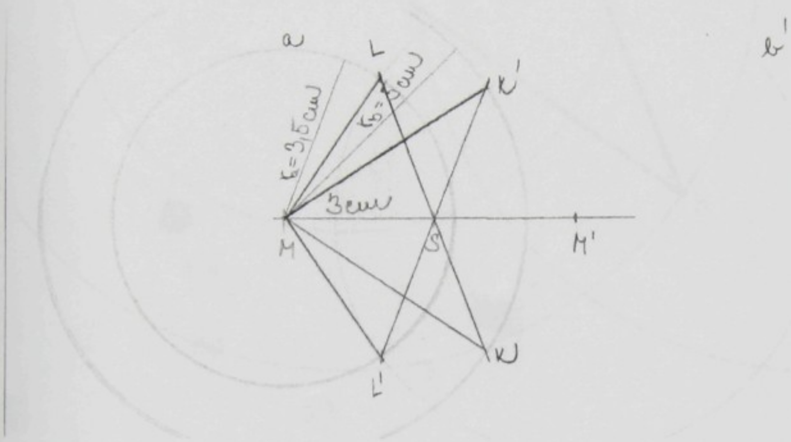
Obr. 9

Příklad 4

Sestrojte všechny trojúhelníky *KLM*, kde $k = 3{,}5$ cm, $l = 5$ cm, $|MS| = 3$ cm a *MS* je těžnicí t_m.

Řešení:

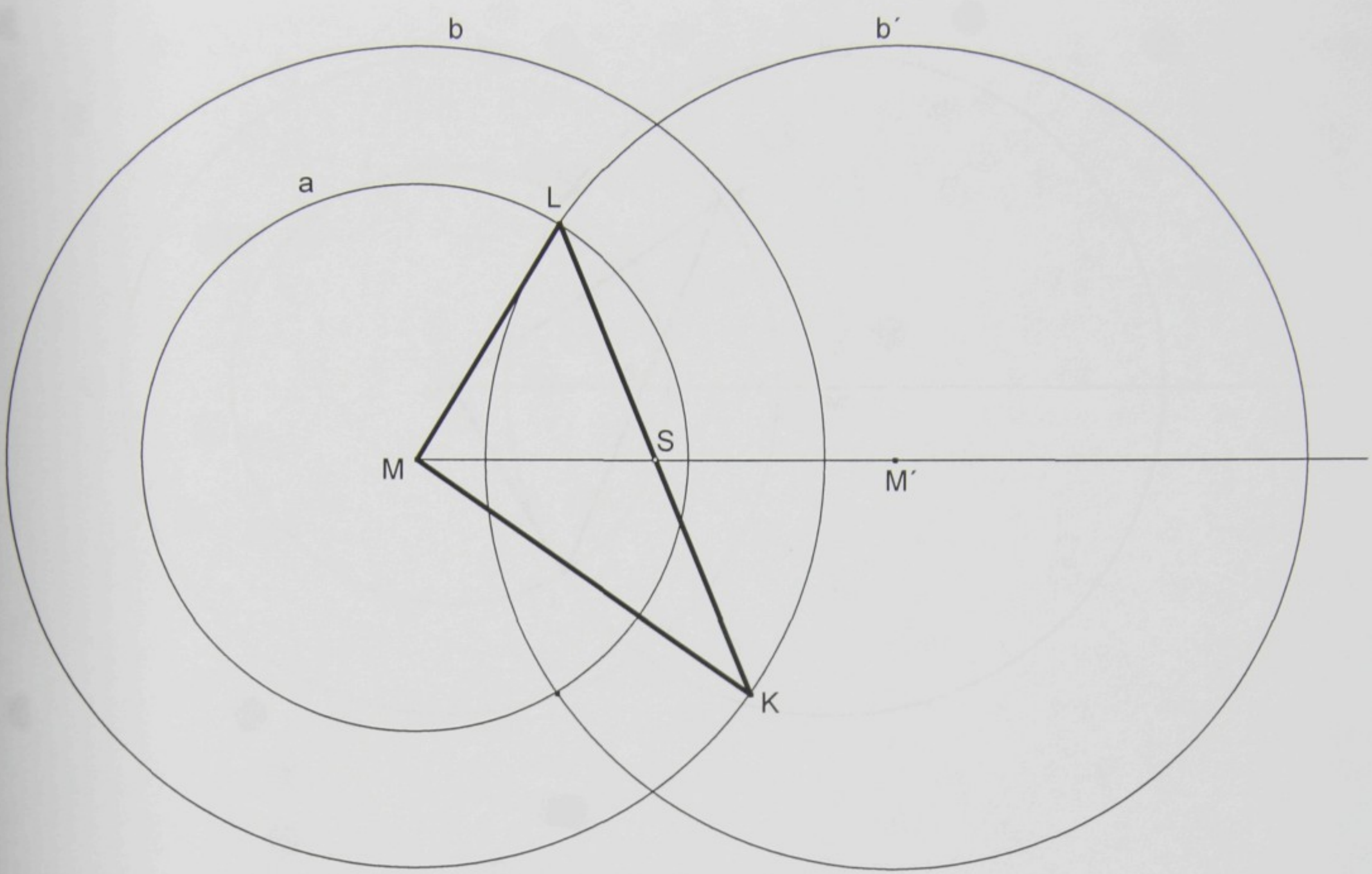
Nejprve sestrojíme těžnici t_m. Bod *K* leží od bodu *M* ve vzdálenosti 5 cm a bod *L* ve vzdálenosti 3,5 cm. Sestrojíme proto dvě soustředné kružnice *a*, *b*, se středem *M* a poloměry $r_a = 3{,}5$ cm a $r_b = 5$ cm. Bod *K* je obrazem bodu *L* a naopak, proto bod *K* musí ležet na kružnici *b'*, která je obrazem kružnice *b* ve středové souměrnosti se středem *S*. Bod *L* je obrazem bodu *K* v této souměrnosti.



Obr. 10

<u>Zápis konstrukce:</u>

1. MS; $|MS| = 3$cm
2. a; $a(M; r_a = 3{,}5$ cm$)$
3. b; $b(M; r_b = 5$ cm$)$
4. b'; $\boldsymbol{S}(S)$: $b \rightarrow b'$
5. K; $K \in a \cap b'$
6. L; $\boldsymbol{S}(S)$: $K \rightarrow L$
7. $\Delta\ KLM$

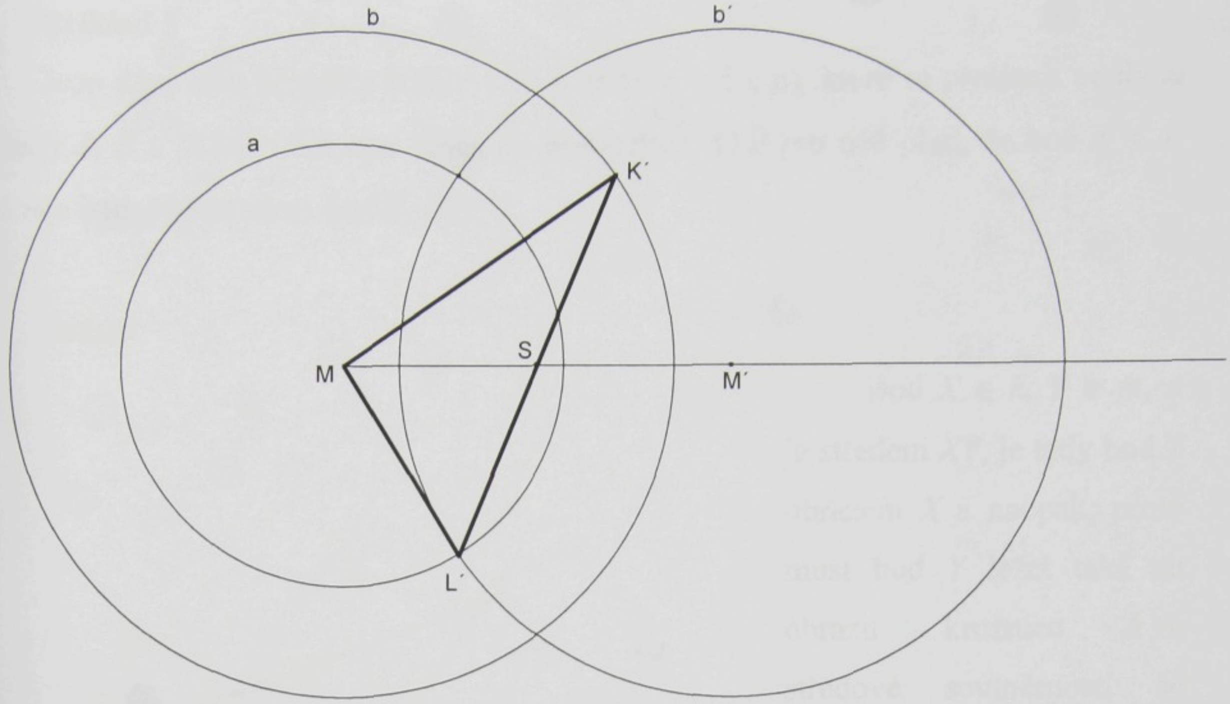


Obr. 11

Druhé řešení:

Zápis konstrukce:

1. MS; $|MS| = 3$ cm
2. a; $a(M; r_a = 3{,}5$ cm$)$
3. b; $b(M; r_b = 5$ cm$)$
4. b'; $\boldsymbol{S}(S)$: $b \to b'$
5. K'; $K' \in a \cap b'$
6. L'; $\boldsymbol{S}(S)$: $K' \to L'$
7. $\Delta\, K'L'M$



Obr. 12

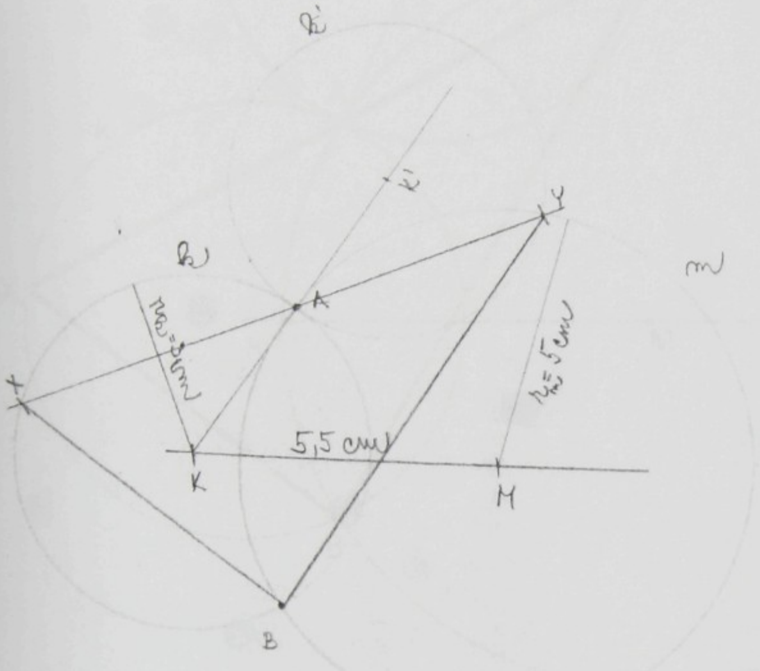
Diskuse:

Kružnice *b'*, která je obrazem kružnice *b*, nám kružnici *a* protne ve dvou bodech *L*, *L'*. Oba body splňují požadované vlastnosti, proto má úloha v dané rovině dvě řešení. Pro přehlednost uvádím řešení ve dvou obrázcích a ke každému uvádím zápis konstrukce. Prvním řešením je trojúhelník *KLM* (obr. 11) a druhým je $\Delta\, K'L'M$ (obr. 12).

Příklad 5

Jsou dány dvě kružnice $k(K; r = 3)$ a $m(M; r = 5$ cm), které se protínají ve dvou bodech A, B a $|KM| = 5{,}5$ cm. Sestrojte trojúhelník XYB pro něž platí, že bod $X \in k$, $Y \in m$ a bod A je středem úsečky XY.

Řešení:

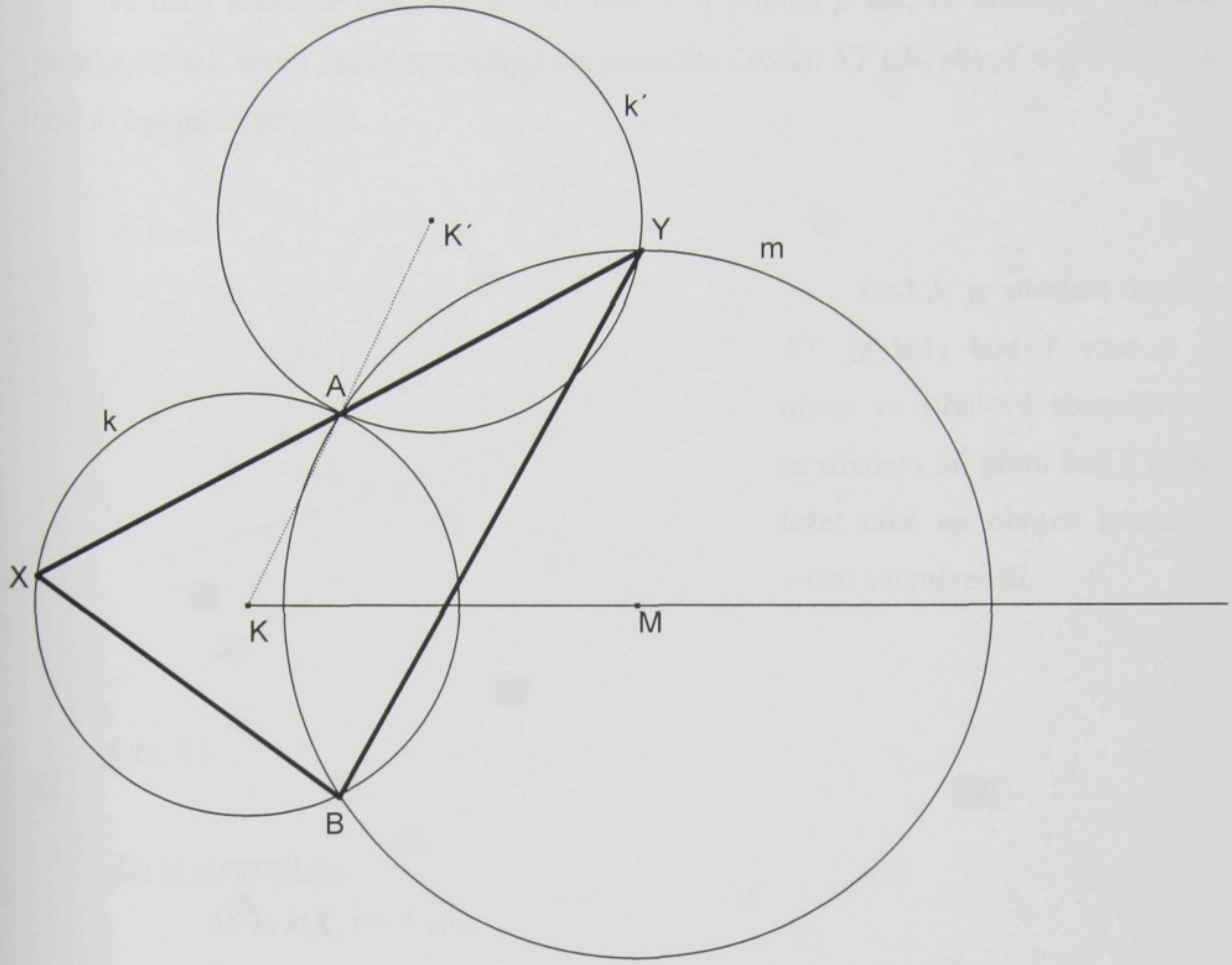


Bod $X \in k$, $Y \in m$, A je středem XY, je tedy bod Y obrazem X a naopak, proto musí bod Y ležet také na obrazu kružnice k ve středové souměrnosti se středem A. Bod X je tedy obrazem Y.

Obr. 13

<u>Zápis konstrukce:</u>

1. KM; $|KM| = 5{,}5$ cm
2. k; $k(K; r = 3$ cm)
3. m; $m(M; r = 5$ cm)
4. A; $A \in k \cap m$
5. B; $B \in k \cap m$
6. k'; $\boldsymbol{S}(A)$: $k \to k'$
7. Y; $Y \in m \cap k'$
8. X; $\boldsymbol{S}(A)$: $Y \to X$
9. $\Delta\, XYB$



Obr. 14

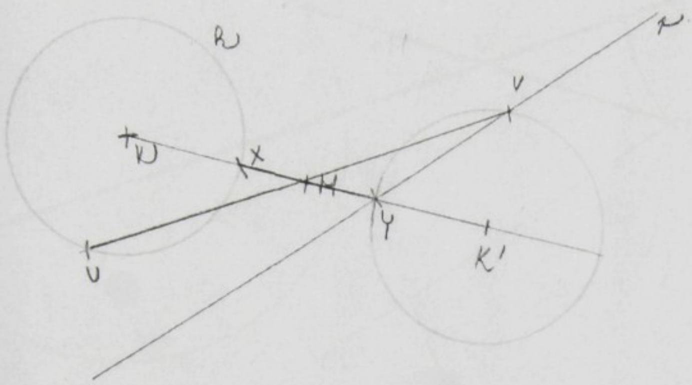
Diskuse:

Úloha má v polorovině jedno řešení a tím je trojúhelník BXY.

Příklad 6

Je dána kružnice $k(K; r = 4\text{ cm})$, bod M a přímka p tak, že kružnice, bod ani přímka nemají spolu žádný společný bod. Sestrojte úsečku XY tak, aby $X \in k$ a $Y \in p$ a bod M byl jejím středem.

Řešení:

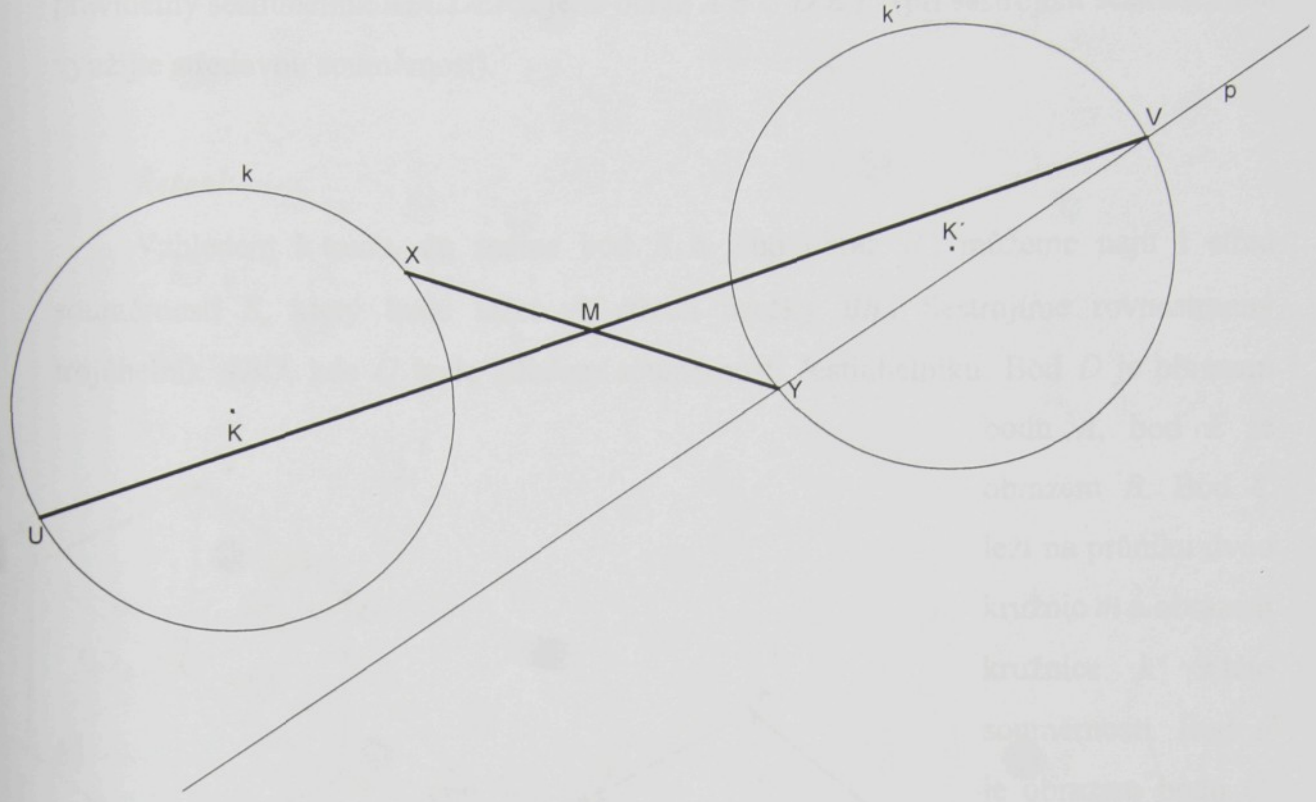


Bod M je středem úsečky XY, je tedy bod Y vzor a X obraz ve středové souměrnosti se středem M, proto bod Y bude ležet také na obrazu kružnice v této souměrnosti.

Obr. 15

<u>Zápis konstrukce:</u>

1. k; $k(K; r = 4\text{ cm})$
2. M, p; $M \cap p \cap k = \emptyset$
3. k'; $\boldsymbol{S}(M)$: $k \to k'$
4. Y; $Y \in p \cap k'$
5. V; $V \in p \cap k'$
6. X; $\boldsymbol{S}(M)$: $Y \to X$
7. U; $\boldsymbol{S}(M)$: $V \to U$
8. Úsečka XY
9. Úsečka UV



Obr. 16

Diskuse:

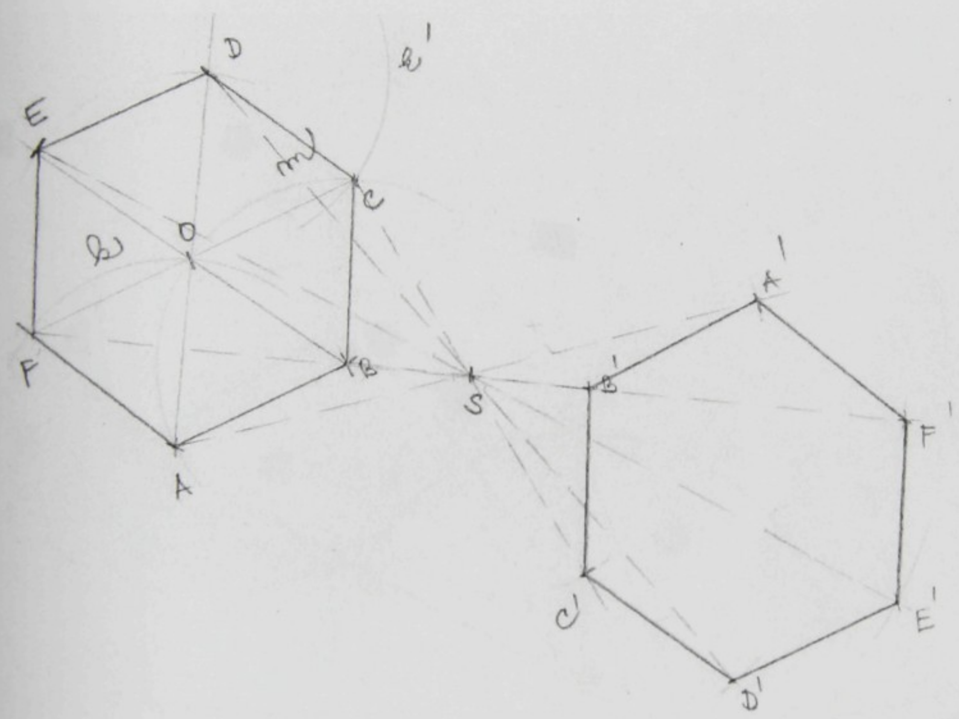
Kružnice *k* nám přímku *p* protnula ve dvou bodech *Y*, *V*. Oba tyto body splňují vlastnosti, proto má úloha v rovině dvě řešení, kterým jsou úsečky *XY*, *UV*.

Příklad 7

Jsou dány body A, B, B'. Ve středové souměrnosti se středem S sestrojte pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$ a jeho obraz $A'B'C'D'E'F'$ (při sestrojení šestiúhelníku využijte středovou souměrnost).

Řešení:

Vzhledem k tomu, že známe bod B a jeho obraz B', můžeme najít i střed souměrnosti S, který bude ležet ve středu úsečky BB'. Sestrojíme rovnostranný trojúhelník ABO, kde O bude středem souměrnosti šestiúhelníku. Bod D je obrazem bodu A, bod E je obrazem B. Bod C leží na průniku dvou kružnic m a obrazem kružnice k' v této souměrnosti. Bod F je obrazem bodu C. Ve středové souměrnosti se středem S sestrojíme obraz šestiúhelníku.



Obr. 17

<u>Zápis konstrukce:</u>

1. A, B, B'
2. S; S je střed BB'
3. k; $k(A; r = |AB|)$
4. m; $m(B; r = |AB|)$
5. O; $O \in k \cap m$
6. D; $\mathbf{S}(O)$: $A \to D$
7. E; $\mathbf{S}(O)$: $B \to E$
8. k'; $\mathbf{S}(O)$: $k \to k'$

9. $C; C \in m \cap k'$

10. F; $\boldsymbol{S}(O)$: $C \to F$

11. Šestiúhelník $ABCDEF$

12. A; $\boldsymbol{S}(S)$: $A \to A'$

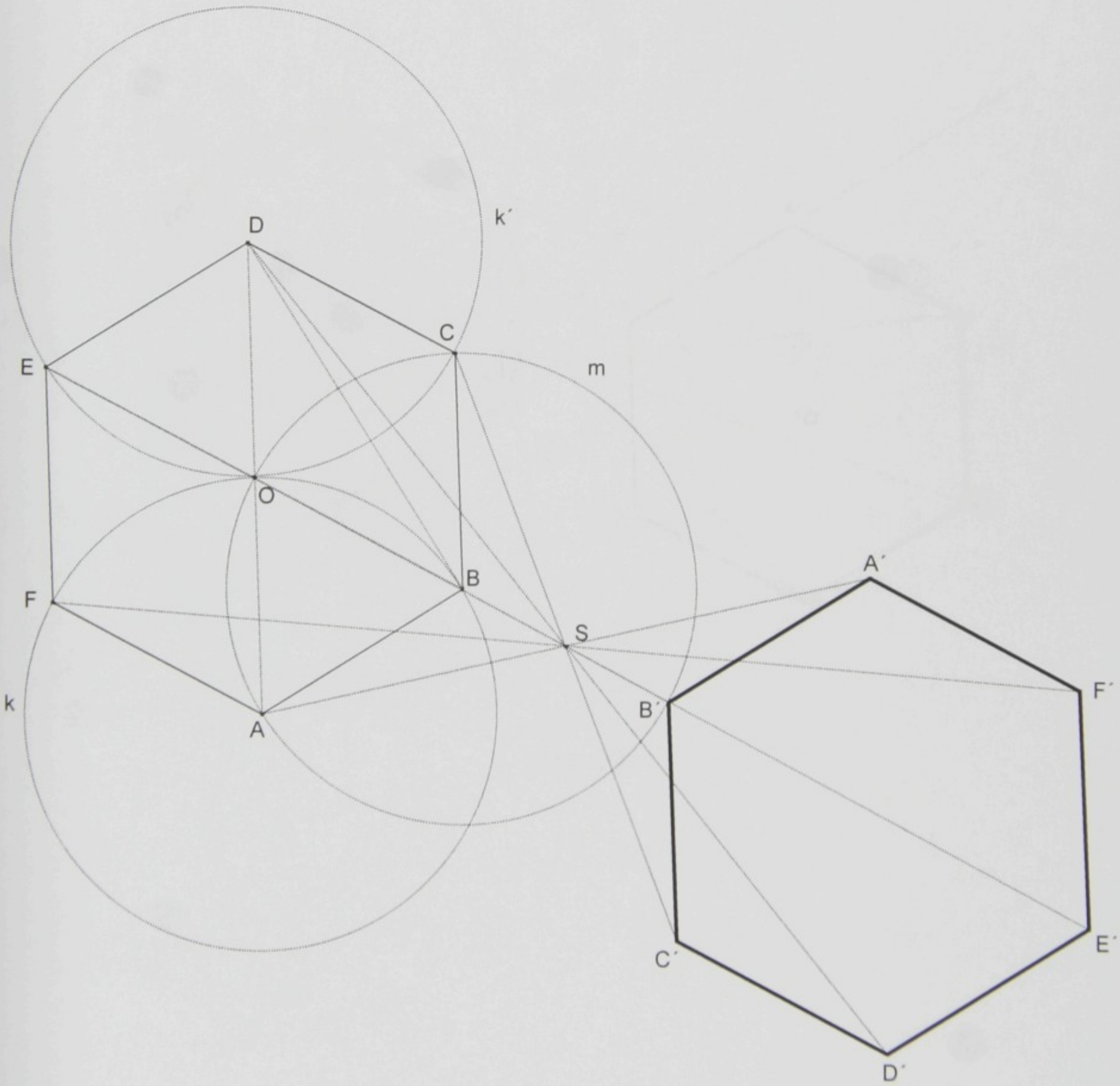
13. C; $\boldsymbol{S}(S)$: $C \to C'$

14. D; $\boldsymbol{S}(S)$: $D \to D'$

15. E; $\boldsymbol{S}(S)$: $E \to E'$

16. F; $\boldsymbol{S}(S)$: $F \to F'$

17. Šestiúhelník $A'B'C'D'E'F'$

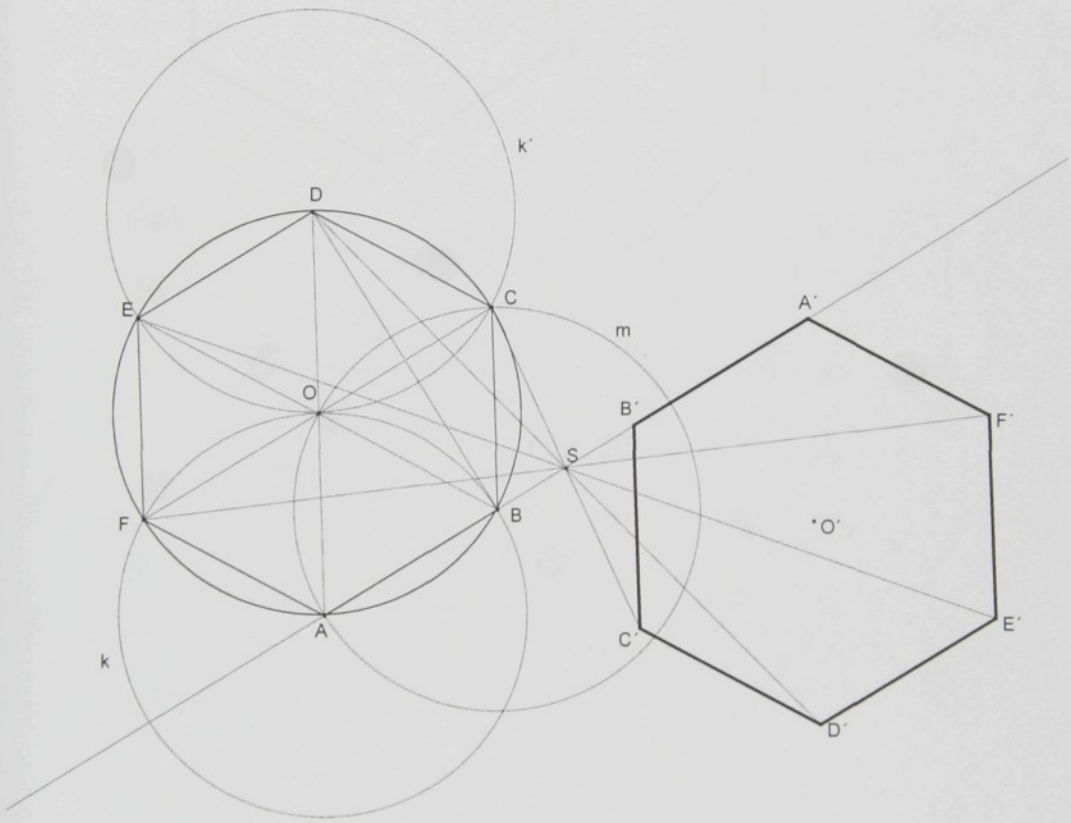


Obr. 18

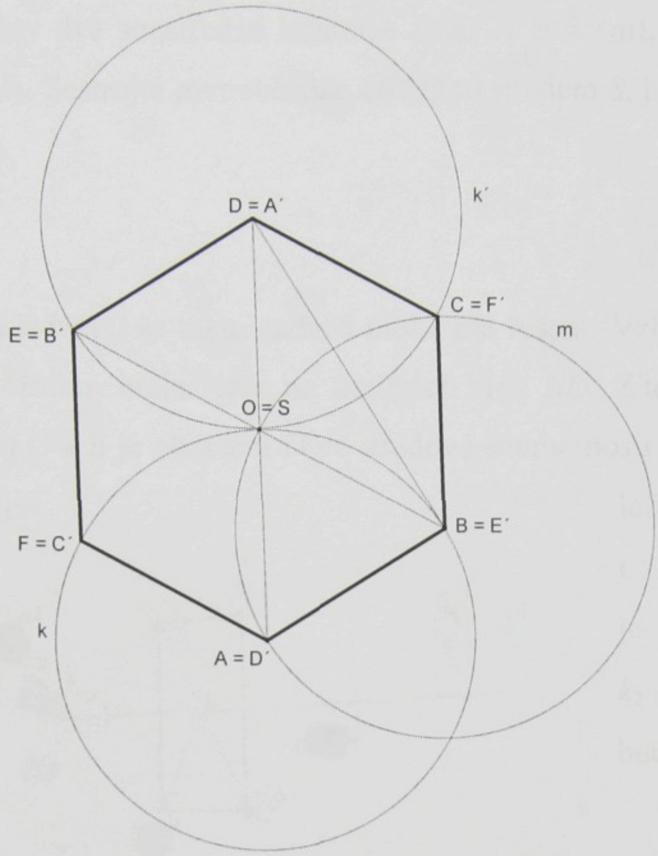
Diskuse:

Úloha má ve zvolené polorovině právě jedno řešení a tím je pravidelný šestiúhelník $A'B'C'D'E'F'$.

Pokud body A, B, B' leží na přímce, potom úloha má jedno řešení (obr. 19). Pokud body A, B, B' neleží na přímce a bod $B' = E$, pak je středem souměrnosti bod O, podle kterého je pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$ souměrný (obr. 20). Výsledkem je tudíž identita.



Obr. 19



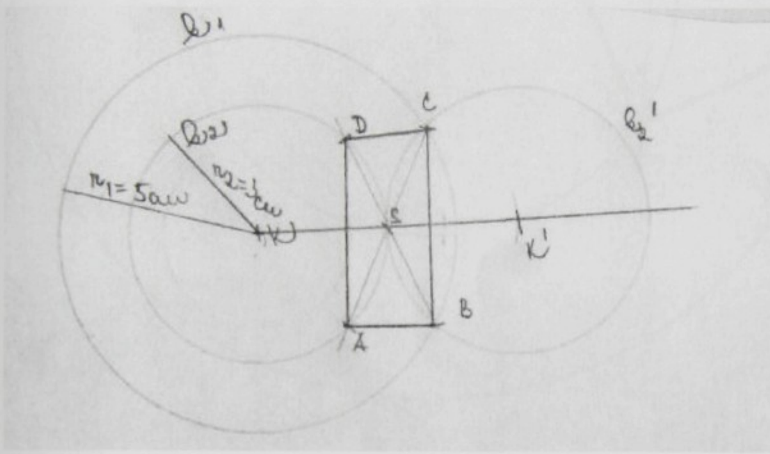
Obr. 20

Příklad 8

Jsou dány dvě soustředné kružnice $k_1(K;\ r_1 = 5\text{ cm})$, $k_2(K;\ r_2 = 3\text{ cm})$ a bod S, který leží na k_2. Sestrojte rovnoběžník $ABCD$ se středem S, jehož vrcholy leží na daných kružnicích.

Řešení:

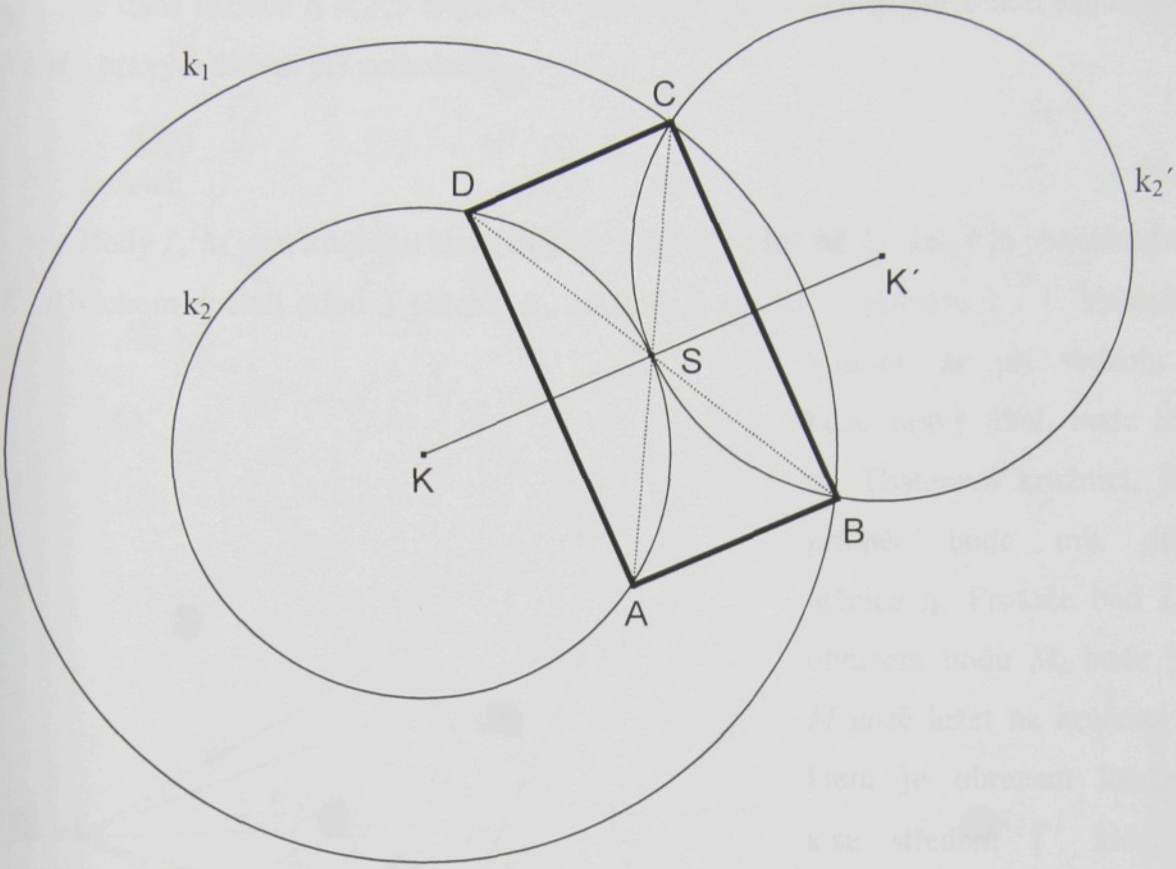
Předpokládáme, že takto zadaná úloha má řešení. Vzhledem k tomu, že bod S je střed rovnoběžníku, bude ležet na úsečkách AC, BD. Z toho vyplývá, že bod A je obrazem bodu C a B je obrazem D ve středové souměrnosti se středem S. Pokud bod A leží na kružnici k_2, musí bod C ležet na kružnici k_2', která je obrazem kružnice k_2 ($C \in k_1 \cap k_2'$). Obdobně to bude platit i pro body B, D.



Obr. 21

<u>Zápis konstrukce:</u>

1. $k_1;\ k_1(K;\ r_1 = 5\text{cm})$
2. $k_2;\ k_2(K;\ r_2 = 3\text{ cm})$
3. $S;\ S \in k_2$
4. $k_2';\ \boldsymbol{S}(S)\colon k_2 \to k_2'$
5. $B;\ B \in k_1 \cap k_2'$
6. $C;\ C \in k_1 \cap k_2'$
7. $A;\ \boldsymbol{S}(S)\colon C \to A$
8. $D;\ \boldsymbol{S}(S)\colon B \to D$
9. Rovnoběžník $ABCD$



Obr. 22

Diskuse:

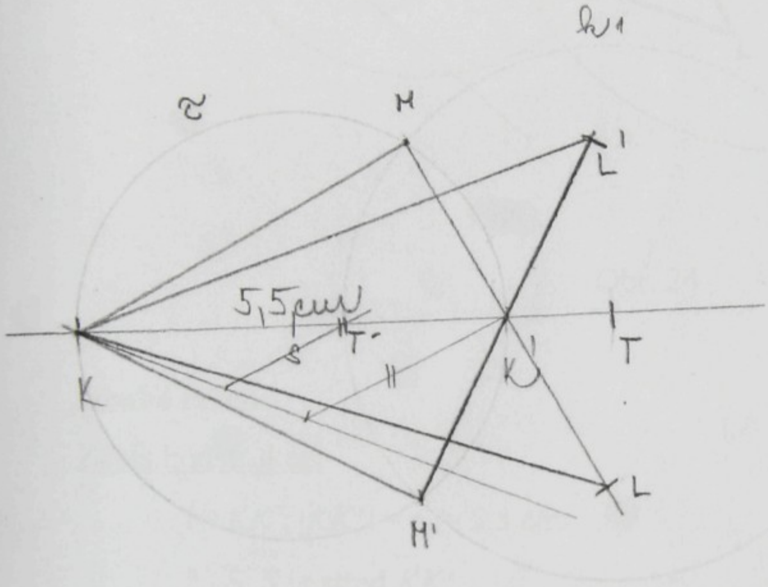
Úloha má v rovině jedno řešení a tím je obdélník *ABCD*.

Příklad 9

Je dána těžnice $t_k = 5{,}5$ cm a $t_l = 7$ cm. Sestrojte všechny pravoúhlé trojúhelníky *KLM* s pravým úhlem při vrcholu *M*.

Řešení:

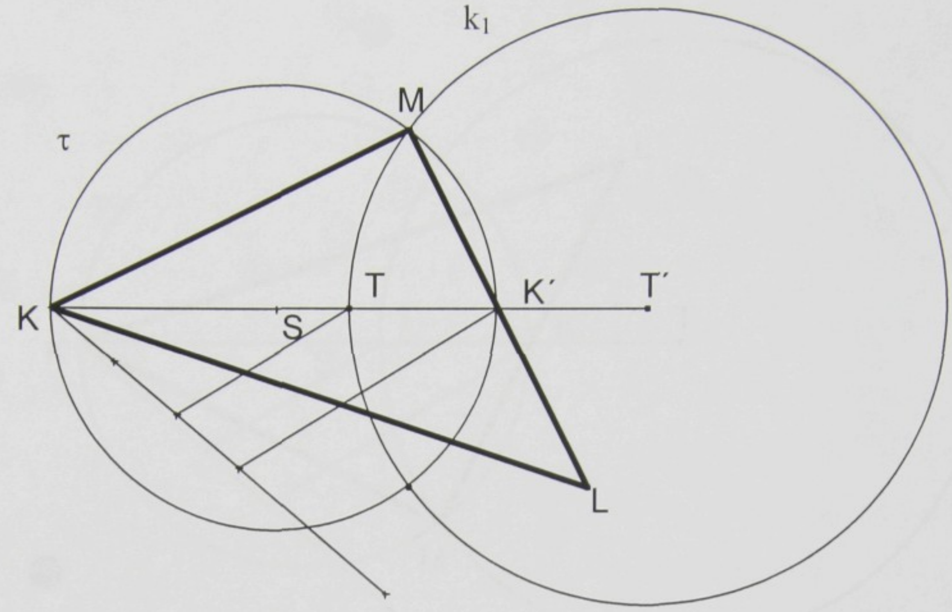
Body *L, M* jsou krajními body úsečky, jejíž střed je bod *K'*, který je obrazem bodu *K*. Abychom dostali střed *T* těžnice t_k, musíme ji rozdělit v poměru 2 : 1. Vzhledem k tomu, že při vrcholu *M* bude pravý úhel, bude ležet na Thaletově kružnici, jejíž průměr bude mít délku těžnice t_k. Protože bod *L* je obrazem bodu *M*, bude bod *M* ještě ležet na kružnici k_1, která je obrazem kružnice *k* se středem *T'*, který je obrazem bodu *T* ve středové souměrnosti *K'*.



Obr. 23

Zápis konstrukce:

1. KK'; $|KK'| = t_k = 5{,}5$ cm
2. S; S je střed KK'
3. $\tau KK'$
4. T; $T \in KK'$, $KT : TK = 2 : 1$
5. T'; $\boldsymbol{S}(K')$: $T \rightarrow T'$
6. k_1; $k_1(T'; r = |2/3t_l|)$
7. M; $M \in \tau \cap k_1$
8. L; $\boldsymbol{S}(K')$: $M \rightarrow L$
9. $\Delta\ KLM$

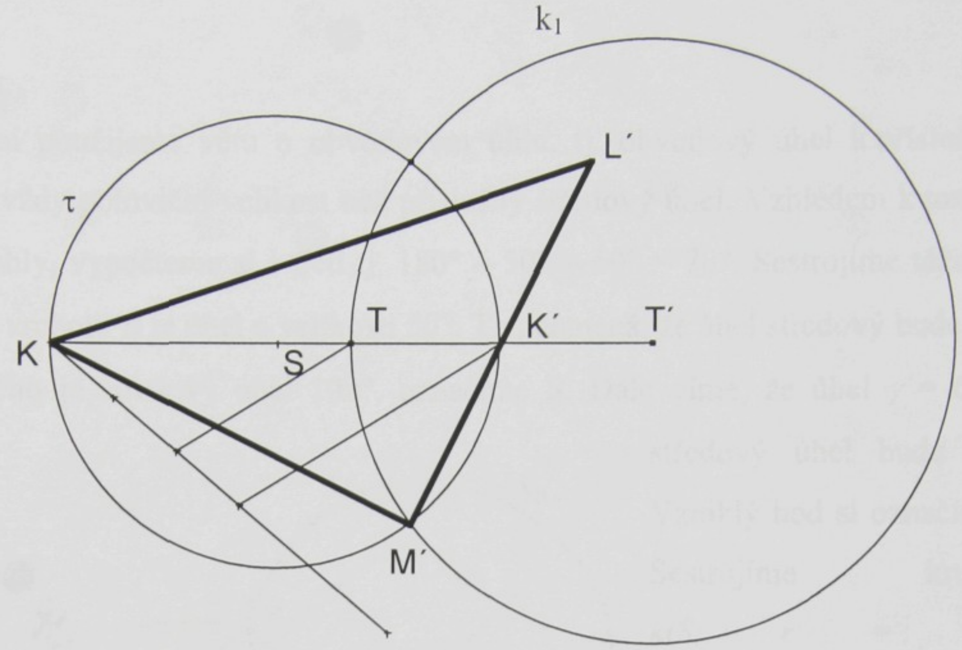


Obr. 24

Druhé řešení:

Zápis konstrukce:

1. KK'; $|KK'| = t_k = 5{,}5$ cm
2. S; S je střed KK'
3. $\tau KK'$
4. T; $T \in KK'$, $KT : TK = 2 : 1$
5. T'; $\boldsymbol{S}(K')$: $T \to T'$
6. k_1; $k_1(T'; r = |2/3t_l|)$
7. M'; $M' \in \tau \cap k_1$
8. L'; $\boldsymbol{S}(K')$: $M' \to L'$
9. $\Delta\, KL'M'$



Obr. 25

Diskuse:

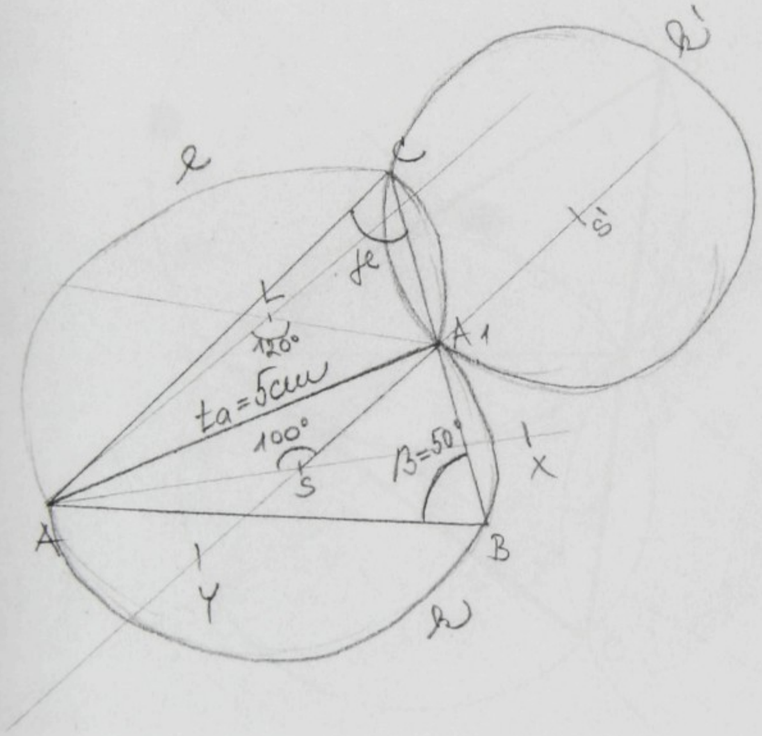
Protože nám kružnice k_1 protnula kružnici τ ve dvou bodech M, M', které splňují požadované vlastnosti, má úloha v rovině dvě řešení, která pro přehlednost uvádím ve dvou obrázcích. První řešení je $\Delta\ KLM$ (obr. 24) druhé řešení je $\Delta\ KL'M'$ (obr. 25).

Příklad 10

Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno $t_a = 5$ cm, $\beta = 50°$, $\gamma = 60°$.

Řešení:

K řešení použijeme větu o obvodovém úhlu, tj. obvodový úhel k příslušnému oblouku má vždy poloviční velikost než příslušný středový úhel. Vzhledem k tomu, že známe dva úhly, vypočteme si i třetí tj. 180° – 50° – 60° = 70°. Sestrojíme těžnici t_a. Víme, že při vrcholu B je úhel o velikosti 50°. To znamená, že úhel středový bude 100°. Bod, u kterého je středový úhel 100°, označíme S. Dále víme, že úhel $\gamma = 60°$ tj. středový úhel bude 120°. Vzniklý bod si označíme L. Sestrojíme kružnice $k(S;\ r = |SA|)$, $l(L;\ r = |LA|)$. Bod C náleží průniku kružnice l a obrazu k′ kružnice k ve středové souměrnosti se středem A_1, který je krajním bodem těžnice t_a. Bod B je obrazem bodu C ve středové souměrnosti se středem A_1.



Obr. 26

<u>Zápis konstrukce:</u>

1. AA_1; $|AA_1| = t_a = 5$ cm
2. $\angle A_1AX$; $|\angle A_1AX| = 40°$
3. $\angle AA_1Y$; $|\angle AA_1Y| = 40°$
4. S; $S \in \rightarrow AX \cap \rightarrow A_1Y$
5. K; $k(S;\ r_k = |SA|)$
6. $\angle AA_1V$; $|\angle AA_1V| = 30°$
7. $\angle A_1AZ$; $|\angle A_1AZ| = 30°$
8. L; $L \in \rightarrow A_1V \cap \rightarrow AZ$

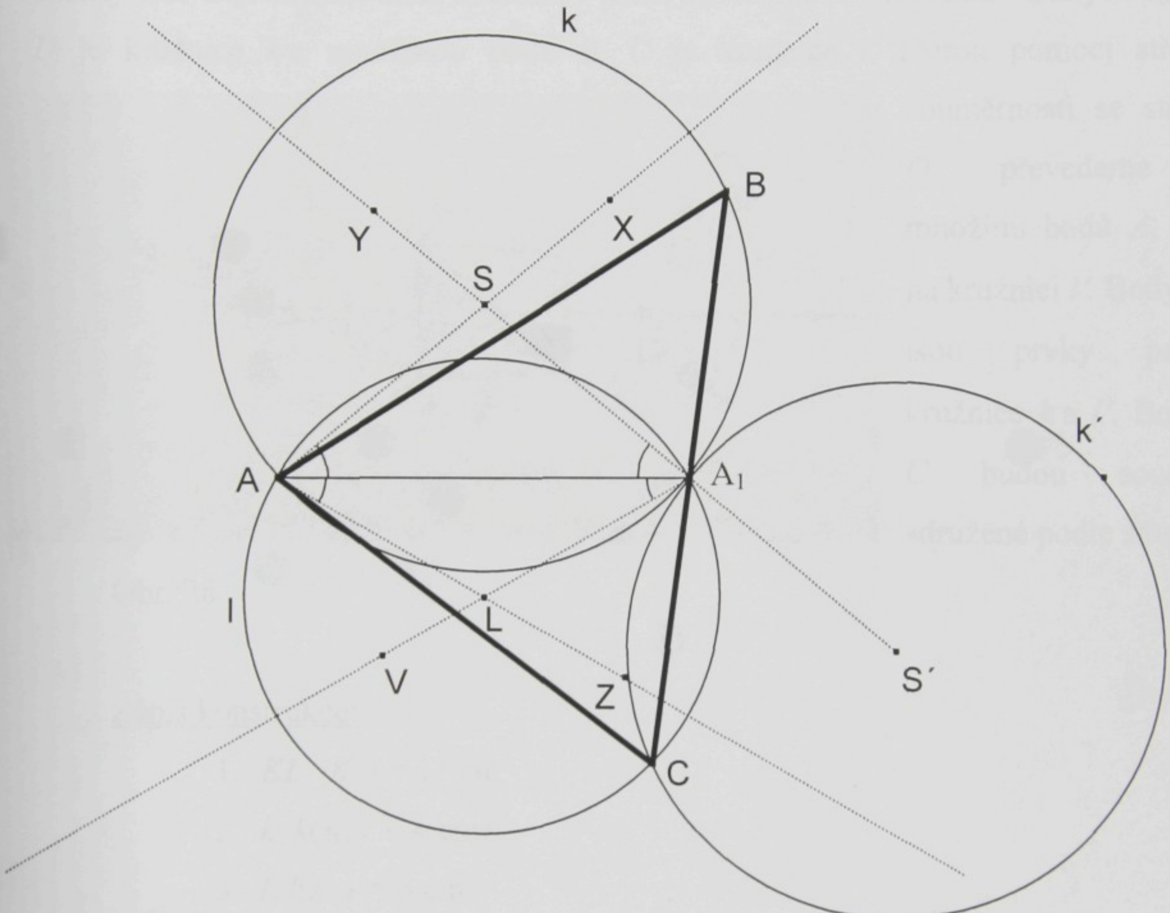
9. L; $l(L; r_1 = |LA|)$

10. k'; $\boldsymbol{S}(A_1)$: $k \rightarrow k'$

11. C; $C \in k' \cap l$

12. B; $\boldsymbol{S}(A_1)$: $C \rightarrow B$

13. $\Delta\ ABC$



Obr. 27

Diskuse:

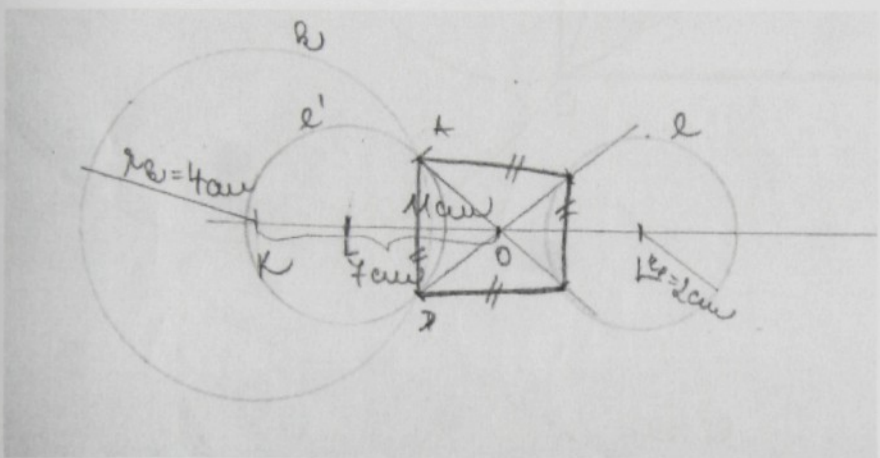
Úloha má v rovině jedno řešení a tím je $\Delta\ ABC$.

Příklad 11

Jsou dány kružnice $k(K; r = 4$ cm) a $l(L; r = 2$ cm) tak, že $|KL| = 11$ cm. Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$ tak, že body A, D leží na kružnici k a body B, C leží na kružnici l. Pro bod O platí, že $O \in KL$ a $|KO| = 7$ cm.

Řešení:

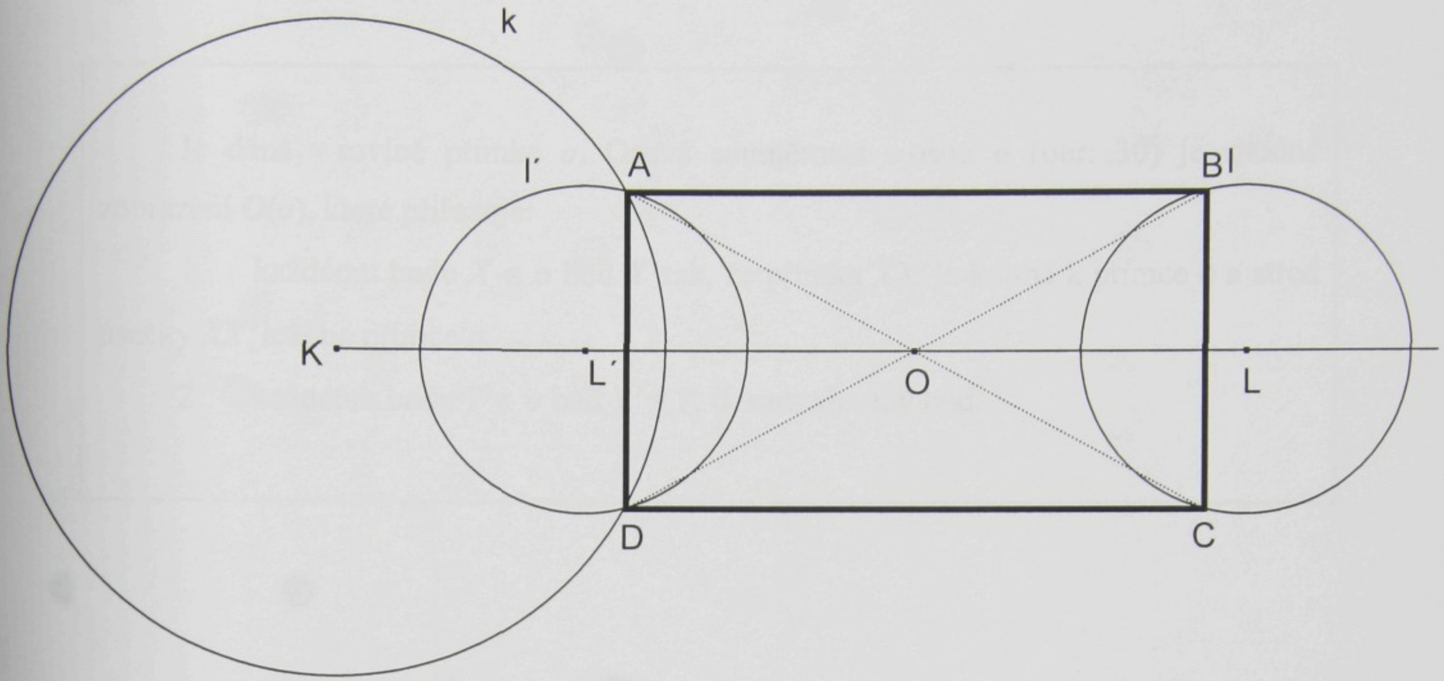
V náčrtku je znázorněné předpokládané řešení. Bod O bude zároveň středem úsečky KL. Čtyřúhelník bude souměrný podle úsečky KL. Množinou možných bodů A, D je kružnice k a množinou bodů B, C je kružnice l, kterou pomocí středové souměrnosti se středem O převedeme na množinu bodů A, D, tj. na kružnici l'. Body A, D jsou prvky průniku kružnice k a l'. Body B, C budou souměrně sdružené podle středu O.



Obr. 28

<u>Zápis konstrukce:</u>

1. KL; $|KL| = 11$ cm
2. k; $k(K; r = 4$ cm)
3. l; $l(L; r = 3$ cm)
4. O; $O \in KL$; $|KO| = 7$ cm
5. l'; $\boldsymbol{S}(O)$: $l \to l'$
6. A; $A \in k \cap l'$
7. D; $D \in k \cap l'$
8. B; $\boldsymbol{S}(O)$: $D \to B$
9. C; $\boldsymbol{S}(O)$: $A \to C$
10. Čtyřúhelník $ABCD$



Obr. 29

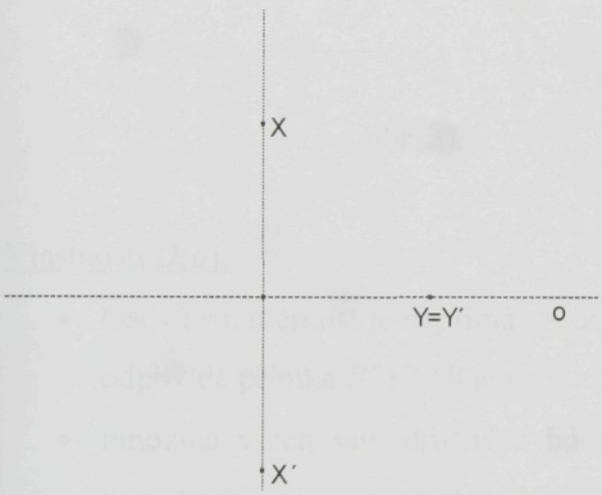
Diskuse:

Úloha má v rovině jedno řešení a tím je obdélník *ABCD*.

1.3 Osová souměrnost

Je dána v rovině přímka o. Osová souměrnost s osou o (obr. 30) je shodné zobrazení $\boldsymbol{O}(o)$, které přiřazuje:

1. každému bodu $X \notin o$ bod X' tak, že přímka XX' je kolmá k přímce o a střed úsečky XX' leží na přímce o,
2. každému bodu $Y \in o$ bod $Y' = Y$, tj. samodružný bod.



obr. 30

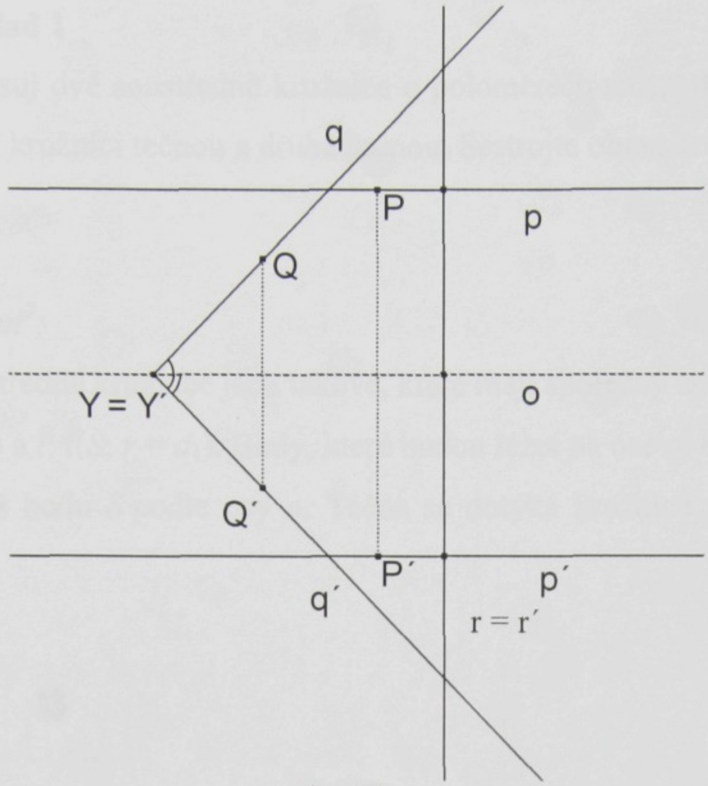
Přímka o se nazývá **osa osové souměrnosti**.

Útvary U, U', z nichž jeden je obrazem druhého v osové souměrnosti s osou o, nazýváme útvary souměrně sdružené podle osy o.

Je-li U ≅ U', pak **útvar U je osově souměrný podle osy *o*.**

Osovou souměrnost s osou o zapisujeme $\boldsymbol{O}(o)$.

Zobrazení útvaru U (vzoru) do útvaru U' (obrazu) zapisujeme v osové souměrnosti $\boldsymbol{O}(o)$: U → U'.



obr. 31

Vlastnosti ***O***(*o*):

- Osová souměrnost je nepřímá shodnost, tj. v osové souměrnosti přímce AB odpovídá přímka $B'A'$ (AB je vzor a $B'A'$ je obraz),
- množina všech samodružných bodů v osové souměrnosti je osa $o = o'$, která tvoří jedinou silně samodružnou přímku (Obr. 31),
- invariantní jsou všechny přímky kolmé k ose o (Obr. 31),
- obrazem přímky p rovnoběžné s osou souměrnosti o je přímka p' rovnoběžná s osou o (Obr. 31),
- obrazem přímky q, která není rovnoběžná s osou o a není k ní kolmá, je přímka q', která se s přímkou q protíná na ose o (obr. 31),

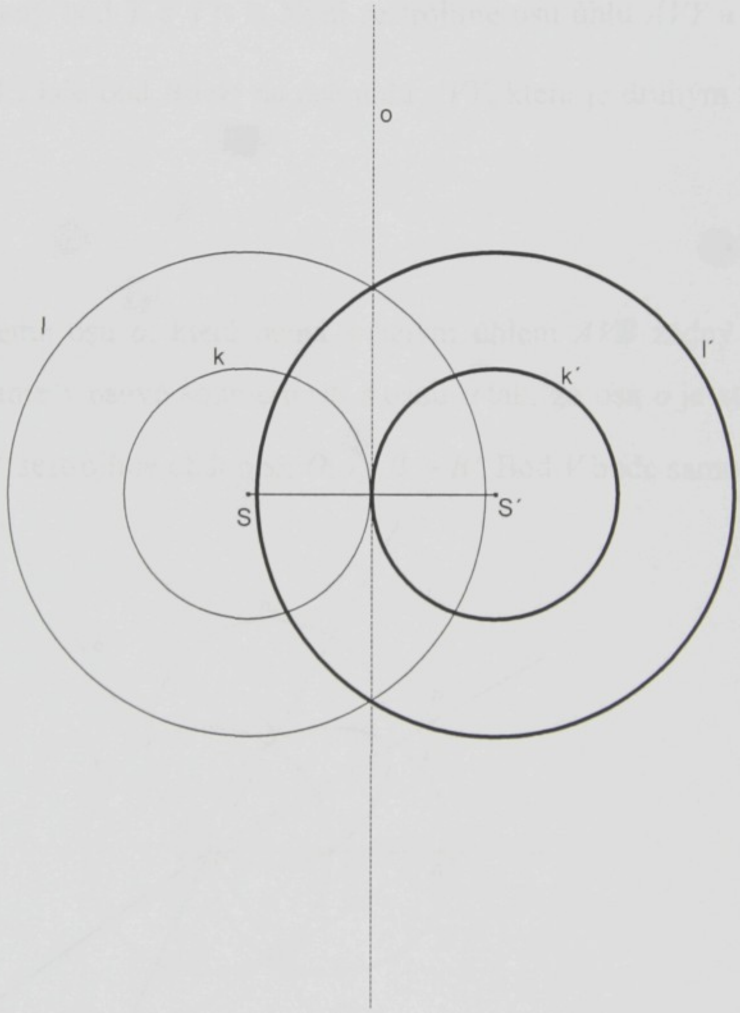
Osovou souměrnost používáme při konstrukci trojúhelníku, je-li jedním z daných prvků součet nebo rozdíl jeho stran.

Příklad 1

Narýsuj dvě soustředné kružnice o poloměrech různé délky a zvolte osu *o*, která bude jedné kružnici tečnou a druhé sečnou. Sestrojte obraz kružnic v osové souměrnosti s osou *o*.

Řešení[2]*:*

Soustředné kružnice jsou takové, které mají společný střed. Sestrojíme kružnice *k*; $k(S;\ r = d$[3]$)$ a *l*; $l(S;\ r = d_1)$. Body, které budou ležet na ose *o*, budou samodružné. Bod S' bude obraz bodu *S* podle osy *o*. Tečna se dotýká kružnice v jednom bodě a sečna ji protíná.



Obr. 32

Diskuse:

Úloha má jedno řešení, které záleží na umístění osy *o*. Vždy jsou obrazem soustředné kružnice k', l' se středem S'.

[2] Zápis konstrukce v tomto případě není nutný.
[3] Písmena d, d_1 nám určují délku poloměru kružnice.

Příklad 2

Za pomoci kružidla sestrojte úhel *AVB* o velikosti 30°. Dále sestrojte jeho obraz v osové souměrnosti s osou *o*. Osu zvolte tak, aby

a) procházela vrcholem V a neměla s úhlem *AVB* jiný společný bod,

b) ležela mimo úhel *AVB*,

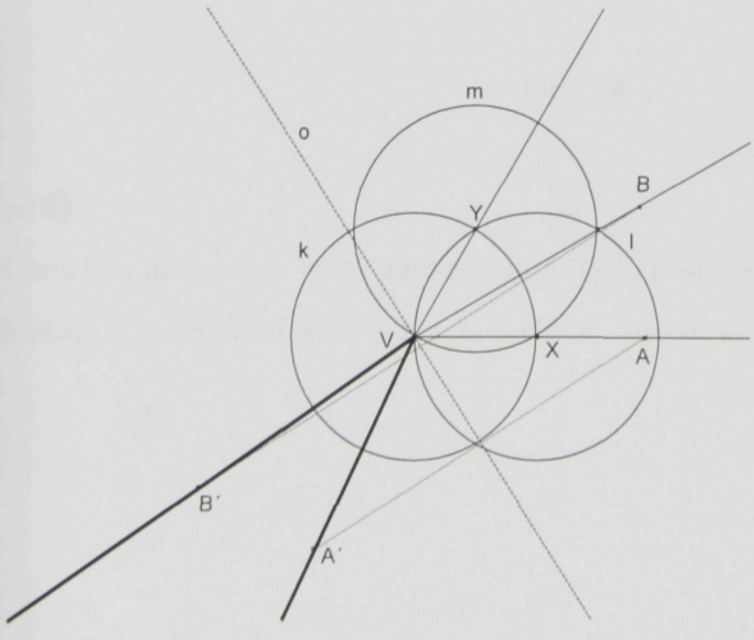
c) jedno rameno bylo osou úhlu *AVB*.

Řešení[4]:

Pomocí kružidla sestrojíme úhel *AVY* o velikosti 60° a to tak, že sestrojíme libovolnou kružnici *k* se středem *V*. Bod $X \in k \cap \rightarrow AV$. Dále sestrojíme kružnici $l(X;\ r = |XV|)$. Hledaný bod $Y \in l \cap k$. Nyní sestrojíme osu úhlu *AVY* a výsledný úhel *AVB* má velikost 30°, kde bod *B* leží na ose úhlu *AVY*, která je druhým ramenem úhlu *AVB*.

ad a)

Bodem *V* vedeme osu *o*, která nemá s daným úhlem *AVB* žádný jiný společný bod. Bod *A′* sestrojíme v osové souměrnosti s osou *o* tak, že osa *o* je středem *AA′*, tj. $\boldsymbol{O}(o)$: $A \rightarrow A'$. Bod *B′* sestrojíme obdobně; $\boldsymbol{O}(o)$: $B \rightarrow B'$. Bod *V* bude samodružný.



Obr. 33

[4] Příklad je na tolik jednoduchý a jasný, že neuvedla zápis konstrukce. Z řešení je zřejmé, jak se úhel rýsuje.

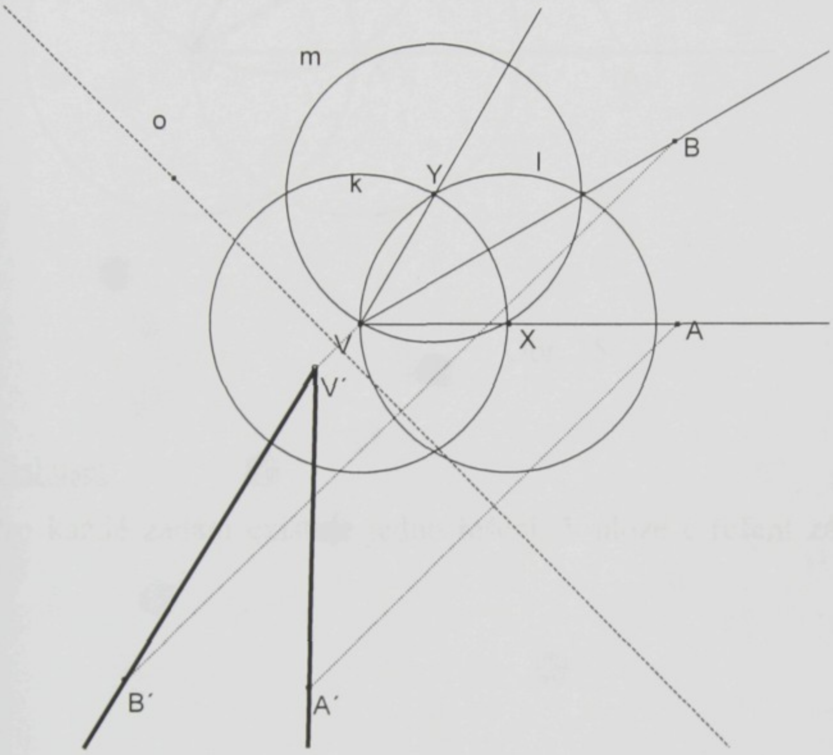
ad b)

Osa o nemá s daným úhlem AVB žádný společný bod. Proto žádný bod nebude samodružný. Sestrojíme obrazy bodů A, V, B tak, že:

A'; $\boldsymbol{O}(o)$: $A \rightarrow A'$

B'; $\boldsymbol{O}(o)$: $B \rightarrow B'$

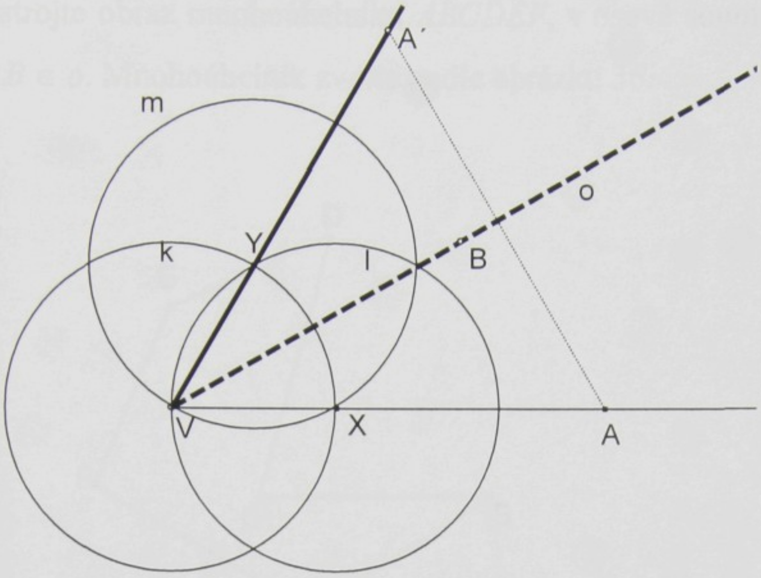
C'; $\boldsymbol{O}(o)$: $C \rightarrow C'$



Obr. 34

ad c)

Osou souměrnosti je jedno rameno úhlu AVB. Body, které leží na ose o, jsou body samodružné. Hledaný bod A' je obrazem bodu A v osové souměrnosti s osou o.



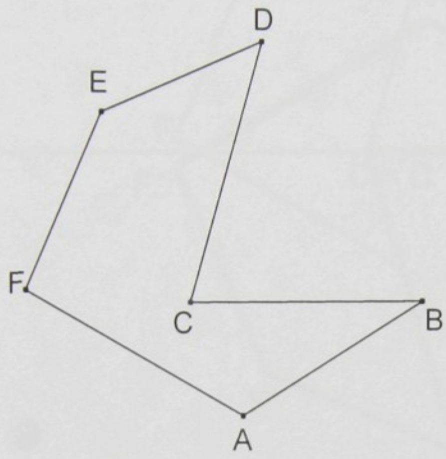
Obr. 35

Diskuse:

Pro každé zadání existuje jedno řešení. V úloze c řešení závisí na volbě osy *o*.

Příklad 3

Sestrojte obraz mnohoúhelníku *ABCDEF*, v osové souměrnosti s osou o tak, aby $C \in o \wedge B \in o$. Mnohoúhelník zvolte podle obrázku 36.



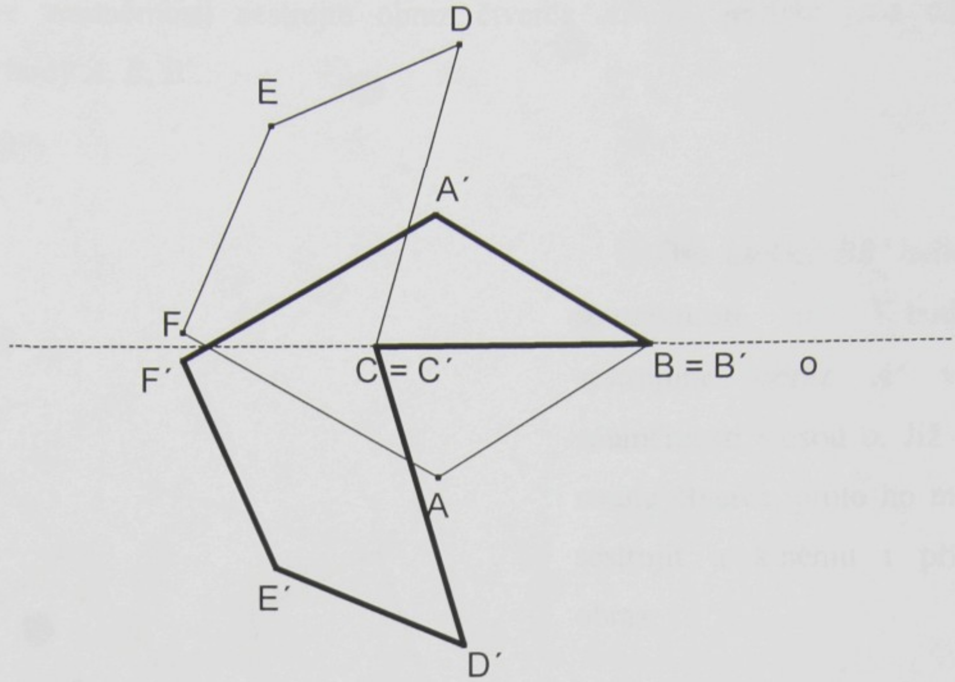
Obr. 36

Řešení:

Body, které leží na ose o, což jsou bod B, C, jsou samodružné. Ostatní body zobrazíme v osové souměrnosti s osou o.

<u>Zápis konstrukce:</u>

1. Mnohoúhelník *ABCDEF*
2. $o; C \in o \wedge B \in o$
3. $A;\ \boldsymbol{O}(o): A \to A'$
4. $D;\ \boldsymbol{O}(o): D \to D'$
5. $E;\ \boldsymbol{O}(o): E \to E'$
6. $F;\ \boldsymbol{O}(o): F \to F'$
7. Mnohoúhelník $A'B'C'D'E'F'$



Obr. 37

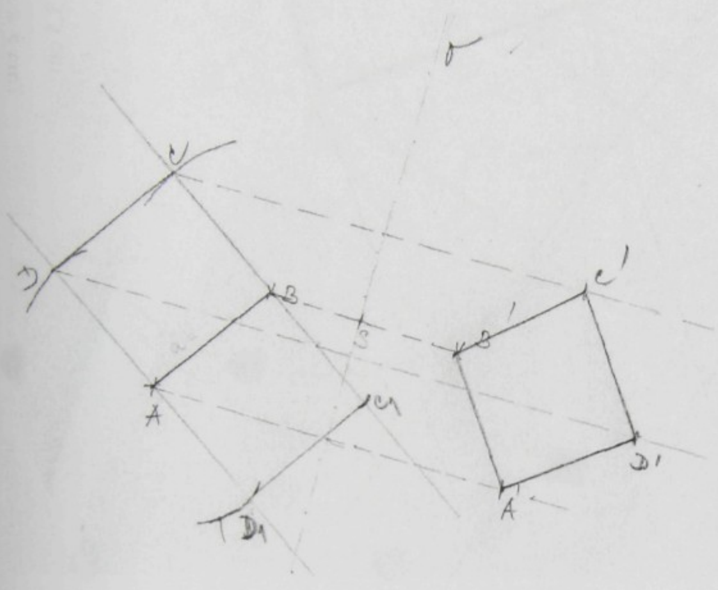
Diskuse:

Úloha má v rovině jedno řešení a tím je mnohoúhelník $A'B'C'D'E'F'$.

Příklad 4

V osové souměrnosti sestrojte obraz čtverce *ABCD*, jestliže jsou dány tři nekolineární body *A*, *B*, *B′*.

Řešení:

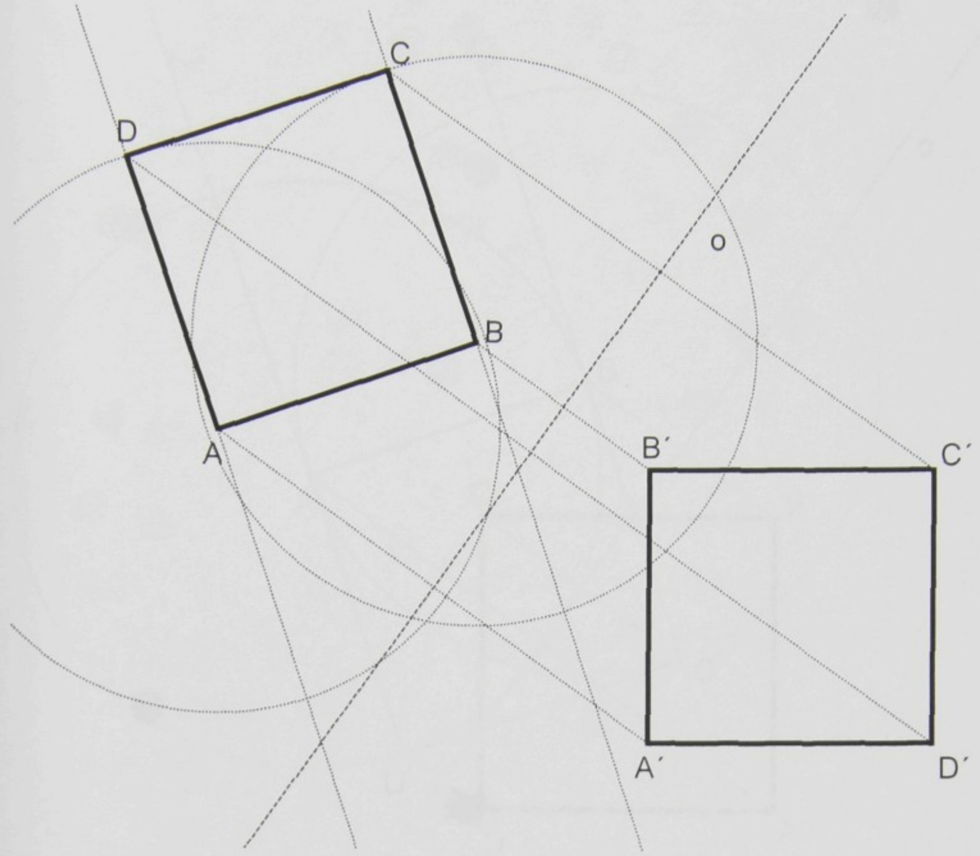


Osa úsečky *BB′* bude osou souměrnosti *o*. K bodu *A* sestrojíme obraz *A′* v osové souměrnosti s osou *o*. Již známe stranu čtverce, proto ho můžeme sestrojit a k němu i příslušný obraz.

Obr. 38

<u>Zápis konstrukce:</u>

1. *A*; *B*; *B′*
2. *o*; *o* je osa úsečky *BB′*
3. doplnit na čtverec *ABCD*
4. *A′*; ***O***(*o*): *A* → *A′*
5. *C′*; ***O***(*o*): *C* → *C′*
6. *D′*; ***O***(*o*): *D* → *D′*
7. *Čtverec A′B′C′D′*

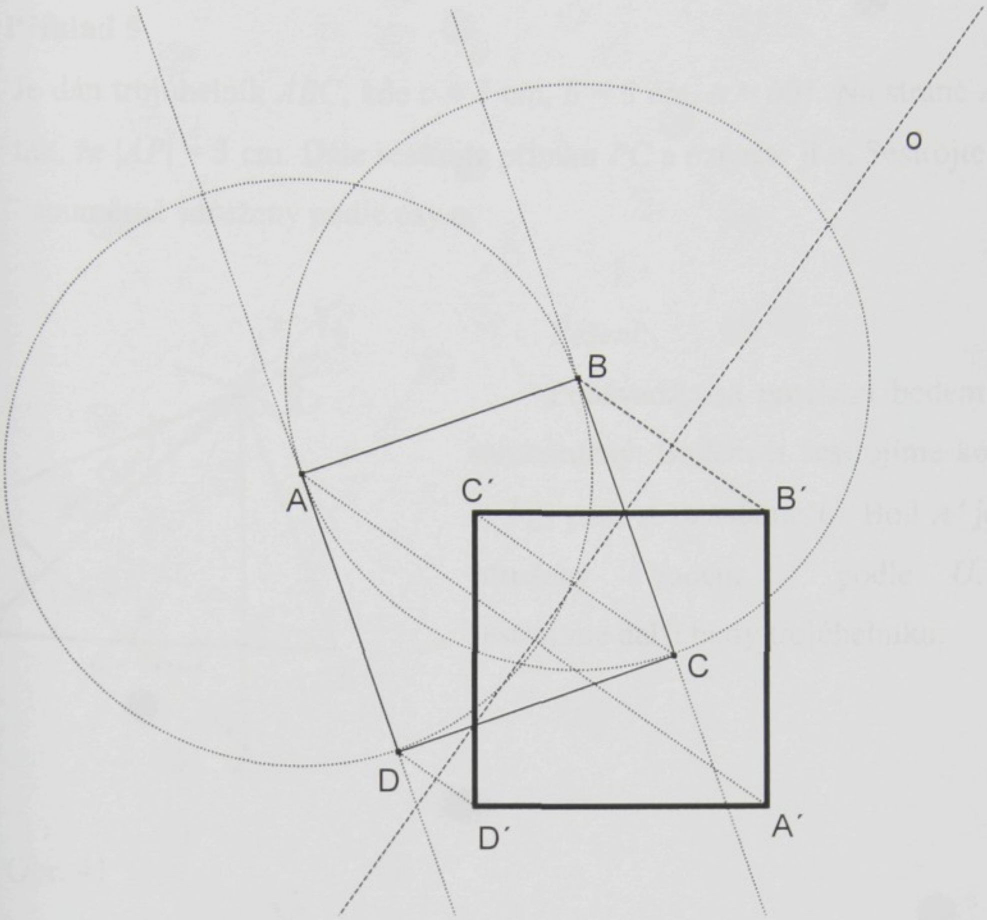


Obr. 39

Druhé řešení:

Zápis konstrukce:

1. A; B; B'
2. o; o je osa úsečky BB'
3. doplnit na čtverec $ABCD$
4. A'; $\boldsymbol{O}(o)$: $A \rightarrow A'$
5. C'; $\boldsymbol{O}(o)$: $C \rightarrow C'$
6. D'; $\boldsymbol{O}(o)$: $D \rightarrow D'$
7. Čtverec $A'B'C'D'$



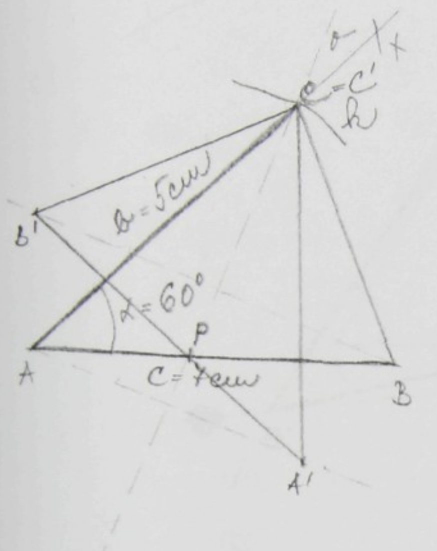
Obr. 40

Diskuse:

Úloha má v dané rovině dvě řešení a to čtverec $A'B'C'D'$ (obr. 39) a čtverec $A'B'C'D'$ (obr. 40). Pro přehlednost uvádím řešení ve dvou obrázcích.

Příklad 5

Je dán trojúhelník *ABC*, kde $c = 7$ cm, $b = 5$ cm, $\alpha = 60°$. Na straně *AB* sestrojte bod *P* tak, že $|AP| = 3$ cm. Dále sestrojte přímku *PC* a označte ji *o*. Sestrojte trojúhelník *A'B'C'* souměrně sdružený podle osy *o*.



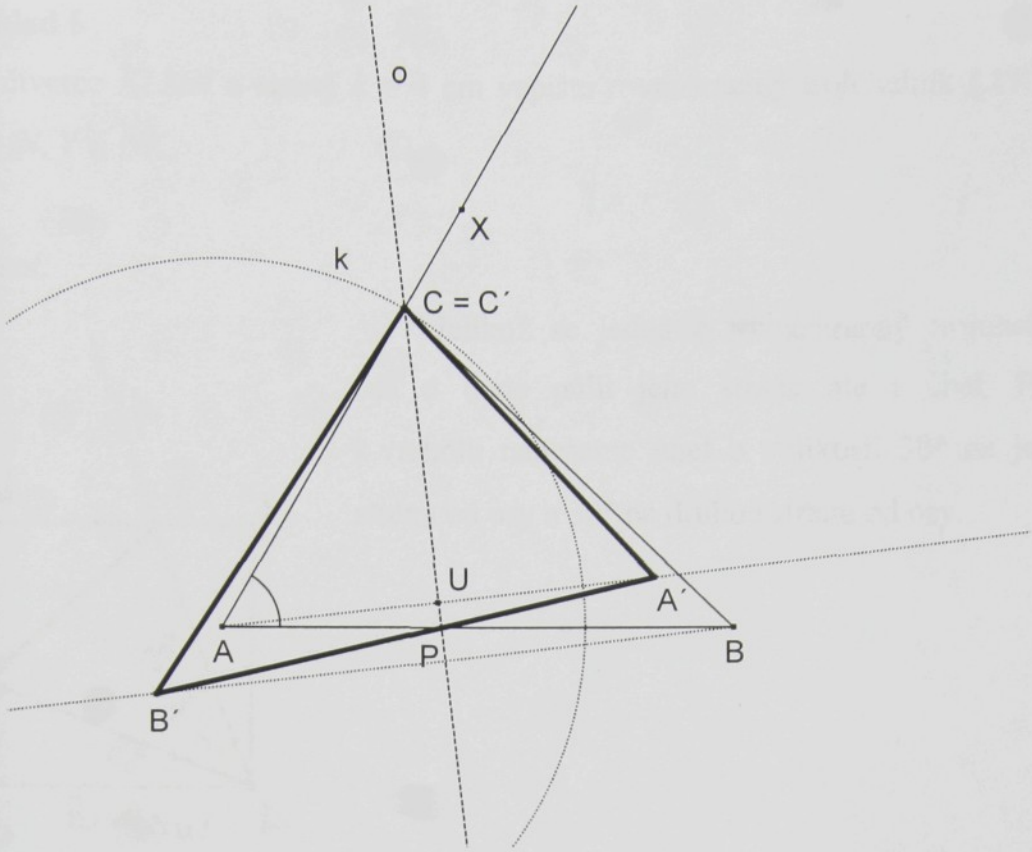
Obr. 41

Řešení:

Poněvadž osa prochází bodem *C*, je tedy samodružný. Bodem *A* sestrojíme kolmici k ose *o*. Její patu si označíme *U*. Bod *A'* je souměrně sdružený s bodem *A* podle *U*. Obdobně sestrojíme další body trojúhelníku.

Zápis konstrukce:

1. AB; $|AB| = c = 7$ cm
2. BAX; $|\angle BAX| = \alpha = 60°$
3. k; $k(A; r_b = 5\text{ cm})$
4. C; $C \in \rightarrow AX \cap k$
5. $\Delta\, ABC$
6. P; $P \in AB$, $|AP| = 3$ cm.
7. o; $P \in o \wedge C \in o$
8. A'; $\boldsymbol{O}(o)$: $A \rightarrow A'$
9. B'; $\boldsymbol{O}(o)$: $B \rightarrow B'$
10. $\Delta\, A'B'C'$



Obr. 42

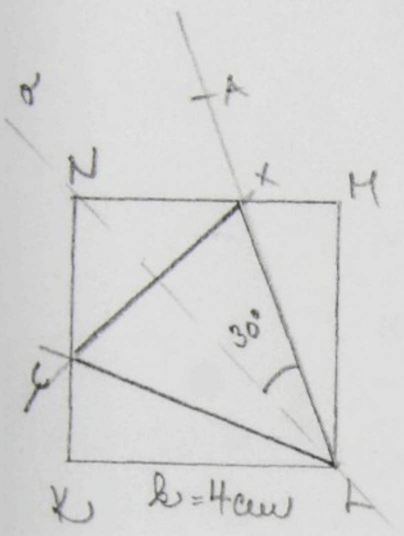
Diskuse:

Úloha má ve zvolené polorovině právě jedno řešení a tím je trojúhelník $AB'C'$.

Příklad 6

Do čtverce *KLMN* o straně $k = 4$ cm vepište rovnostranný trojúhelník *LXY* tak, aby $X \in MN$, $Y \in NK$.

Řešení:

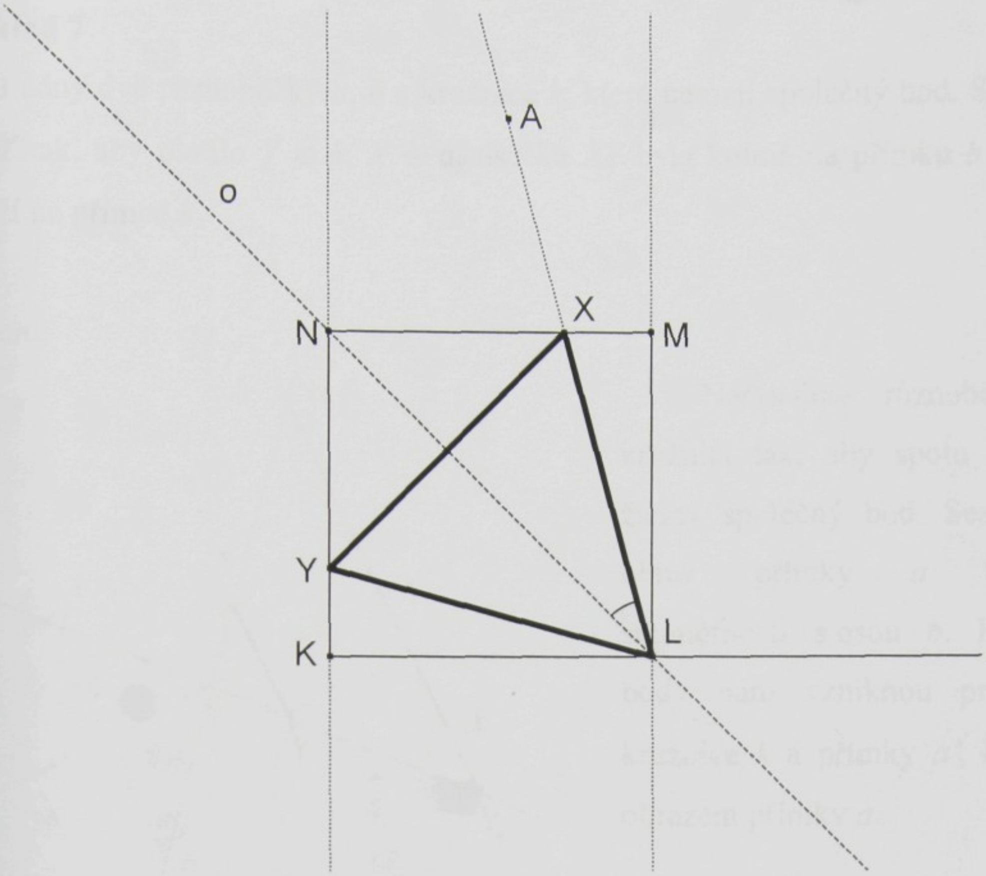


Obr. 43

Jelikož se jedná o rovnostranný trojúhelník, osa o bude půlit jeho stranu ale i úhel. Proto k vrcholu naneseme úhel o velikosti 30° na jednu stranu od osy a 30° na druhou stranu od osy.

Zápis konstrukce:

1. KL; $|KL| = 4$ cm
2. p; $p \perp KL$; $k \in p$
3. q; $q \perp KL$; $L \in q$
4. K; $K(K; r = 4 \text{ cm})$
5. N; $N \in p \cap k$
6. r; $r \perp p$; $N \in r$
7. M; $M \in q \cap r$
8. Čtverec *KLMN*
9. O; $L \in o \wedge N \in o$
10. $\angle NLA$; $|\angle NLA| = 30°$
11. X; $X \in \rightarrow LA \cap MN$
12. Y; $\boldsymbol{O}(o)$: $X \rightarrow Y$
13. $\Delta\ LXY$



Obr. 44

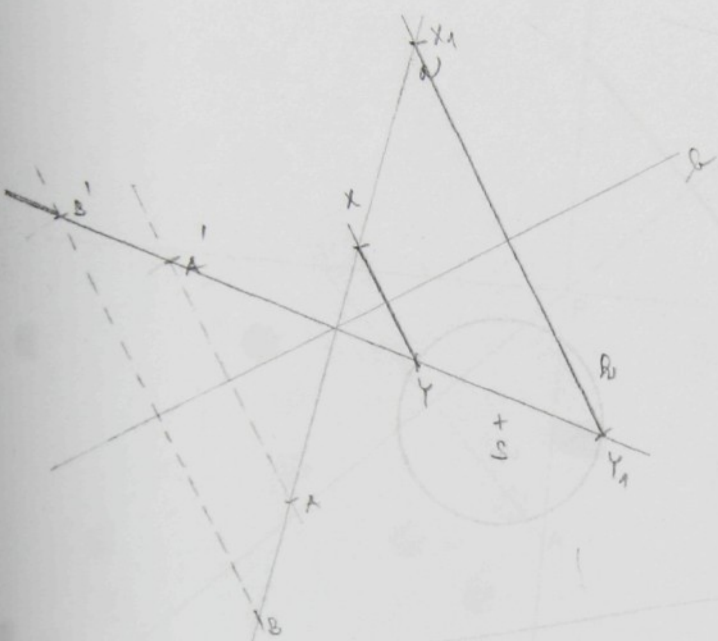
Diskuse:

Úloha má ve zvolené polorovině jedno řešení a tím je trojúhelník *LXY*.

Příklad 7

Jsou dány dvě různoběžky a, b a kružnice k, které nemají společný bod. Sestrojte úsečku XY tak, aby platilo $Y \in k$, $X \in a$, úsečka XY byla kolmá na přímku b a střed úsečky leží na přímce b.

Řešení:



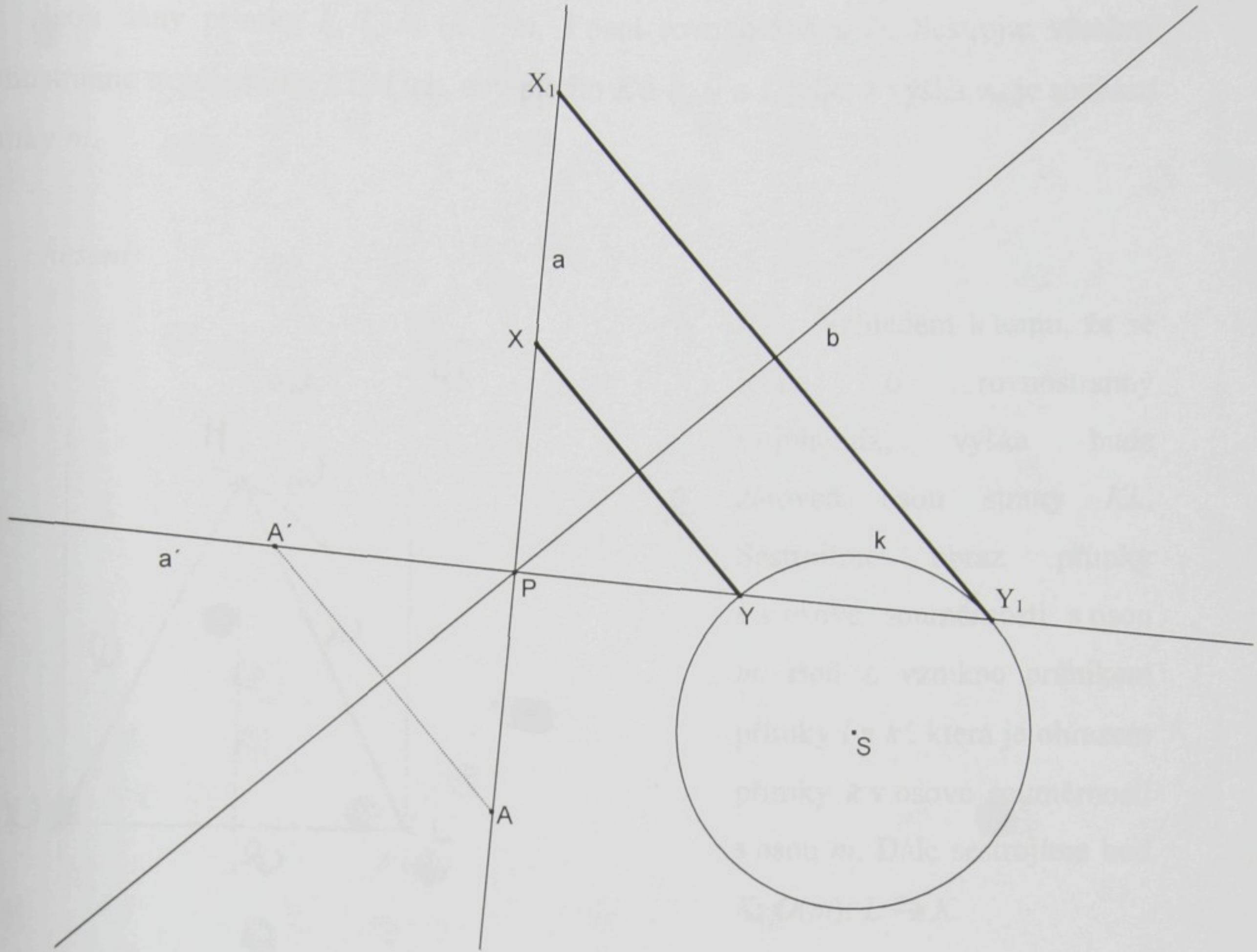
Narýsujme různoběžky a kružnici tak, aby spolu neměly žádný společný bod. Sestrojíme obraz přímky a v osové souměrnosti s osou b. Hledané body nám vzniknou průnikem kružnice k a přímky a', která je obrazem přímky a.

Obr. 45

Zápis konstrukce[5]:

1. a; b; k;
2. P; $P \in a \cap b$
3. A; $A \in a$
4. A; $\boldsymbol{O}(b)$: $A \rightarrow A'$
5. a'; $A \in a' \wedge P \in a'$
6. Y; $Y \in k \cap a'$
7. Y_1; $Y_1 \in k \cap a'$
8. X; $\boldsymbol{O}(b)$: $Y \rightarrow X$
9. X_1; $\boldsymbol{O}(b)$: $Y_1 \rightarrow X_1$
10. XY
11. X_1Y_1

[5] V náčrtku je ukázáno jak se zobrazuje přímka v osové souměrnosti. Cabri Geometry však umí přímku zobrazit v osové souměrnosti bez toho, aniž bychom zobrazovali dva body, které leží na této přímce.



Obr. 46

Diskuse:

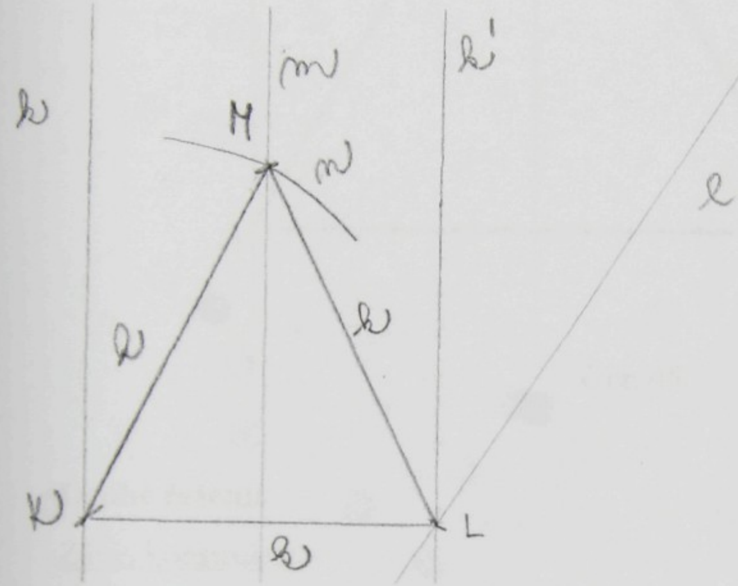
Protože nám přímka *a´* protnula kružnici *k* ve dvou bode *Y*, Y_1 a tyto body splňují požadované vlastnosti, má úloha dvě řešení a tím jsou úsečky *XY*, X_1Y_1.

Pokud se kružnice k bude nacházet vlevo o různoběžky a, budeme hledat obraz přímky b′ v osové souměrnosti s osou a. Výsledkem budou opět dvě úsečky, které budou splňovat požadované vlastnosti.

Příklad 8

Jsou dány přímky k, l, m ($k \parallel m$, k není rovnoběžná s l). Sestrojte všechny rovnostranné trojúhelníky KLM tak, aby platilo $K \in k$, $L \in l$, jejichž výška v_m je součástí přímky m.

Řešení:

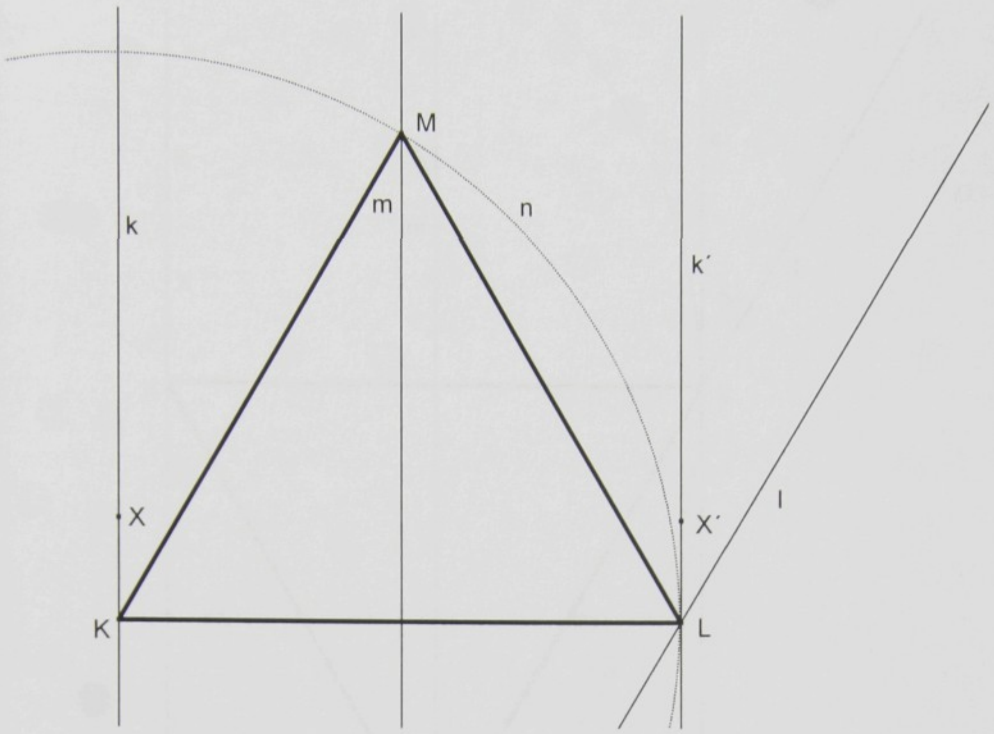


Obr. 47

Vzhledem k tomu, že se jedná o rovnostranný trojúhelník, výška bude zároveň osou strany KL. Sestrojíme obraz přímky k v osové souměrnosti s osou m. Bod L vznikne průnikem přímky l a k', která je obrazem přímky k v osové souměrnosti s osou m. Dále sestrojíme bod K; $\boldsymbol{O}(m)$: $L \rightarrow K$.

<u>Zápis konstrukce:</u>

1. k, l, m; $k \parallel m$, k není rovnoběžná s l
2. k'; $\boldsymbol{O}(m)$: $k \rightarrow k'$
3. L; $L \in l \cap k'$
4. K; $\boldsymbol{O}(m)$: $L \rightarrow K$
5. n; $n(K; r = |KL|)$
6. M; $M \in m \cap n$
7. $\Delta\, KLM$

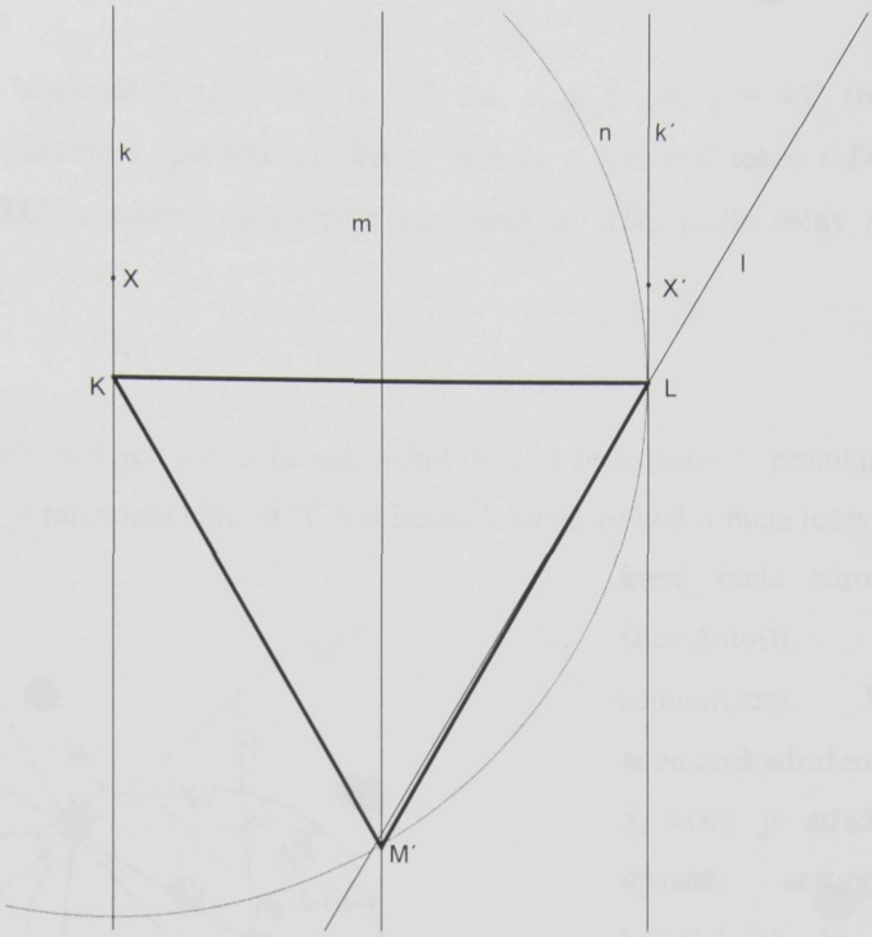


Obr. 48

Druhé řešení:

Zápis konstrukce:

1. k, l, m; $k \parallel m$, k není rovnoběžná s l
2. k'; $\boldsymbol{O}(m)$: $k \to k'$
3. L; $L \in l \cap k'$
4. K; $\boldsymbol{O}(m)$: $L \to K$
5. n; $n(K; r = |KL|)$
6. M'; $M' \in m \cap n$
7. $\Delta\ KLM'$



Obr. 49

Diskuse:

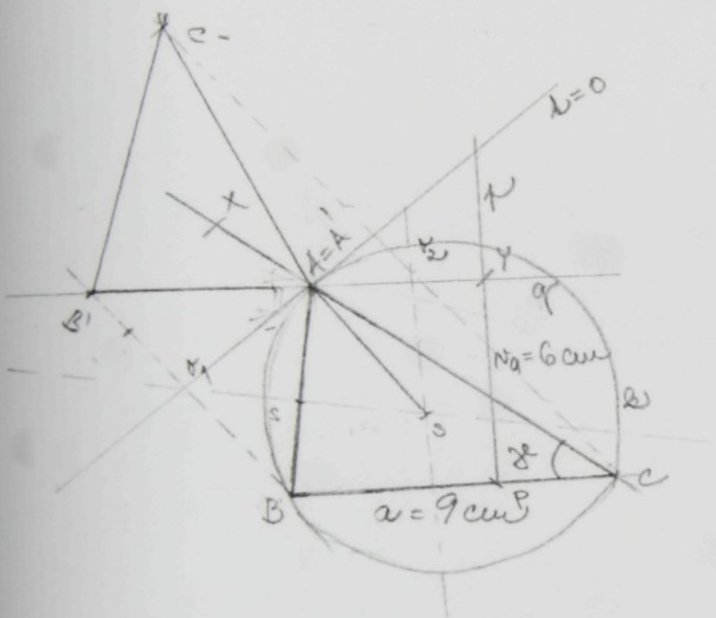
Vzdálenosti mezi jednotlivými přímkami si musíme zvolit podle uvážení. Protože nám kružnice n protnula přímku m ve dvou bodech M, M', které splňují požadované vlastnosti, má úloha v dané rovině dvě řešení. Řešení pro přehlednost uvádím ve dvou obrázcích. Prvním je trojúhelník KLM (obr. 48) a druhým trojúhelník KLM' (obr. 49).

Příklad 9

Sestrojte trojúhelník *ABC*, je-li $a = 9$ cm, $v_a = 6$ cm, $\gamma = 45°$ (bez použití úhloměru). Trojúhelníku opiš kružnici *k* a ve vrcholu *A* k ní veď tečnu *t*. Dále sestroj trojúhelník *A'B'C'* souměrně sdružený s trojúhelníkem *ABC* podle tečny *t* jako osy souměrnosti.

Řešení:

Úloha bude mít jen jedno řešení, neboť bod *A* bude ležet v průniku výšky v_a a → *CX*, která je ramenem úhlu *BCX*. Vzhledem k tomu, že bod *A* bude ležet na tečně *t*, která bude zároveň osou souměrnosti, bude samodružný. Bod *S'* souměrně sdružený s bodem *S*, který je střed kružnice opsané, sestrojíme na kolmici tak, že $AS \cong S'A$. Další body sestrojíme obdobně.



Obr. 50

Zápis konstrukce

1. BC; $|BC| = a = 9$ cm
2. p; $p \perp BC$
3. P; $P \in p \cap BC$
4. v_a; $P \in v_a$; $v_a = 6$ cm
5. q; $q \perp p$
6. Y; $Y \in q \cap p$
7. $\angle BCX$; $|\angle BCX| = \gamma = 45°$
8. A; $A \in \rightarrow CX \cap q$
9. $\triangle ABC$
10. o_1; o_1 je osa úsečky CA

11.o_2; o_2 je osa úsečky BA

12.S, $S \in o_1 \cap o_2$

13.k; $k(S; r = |SA|)$

14.t; $t \perp OA$; $A \in$ t

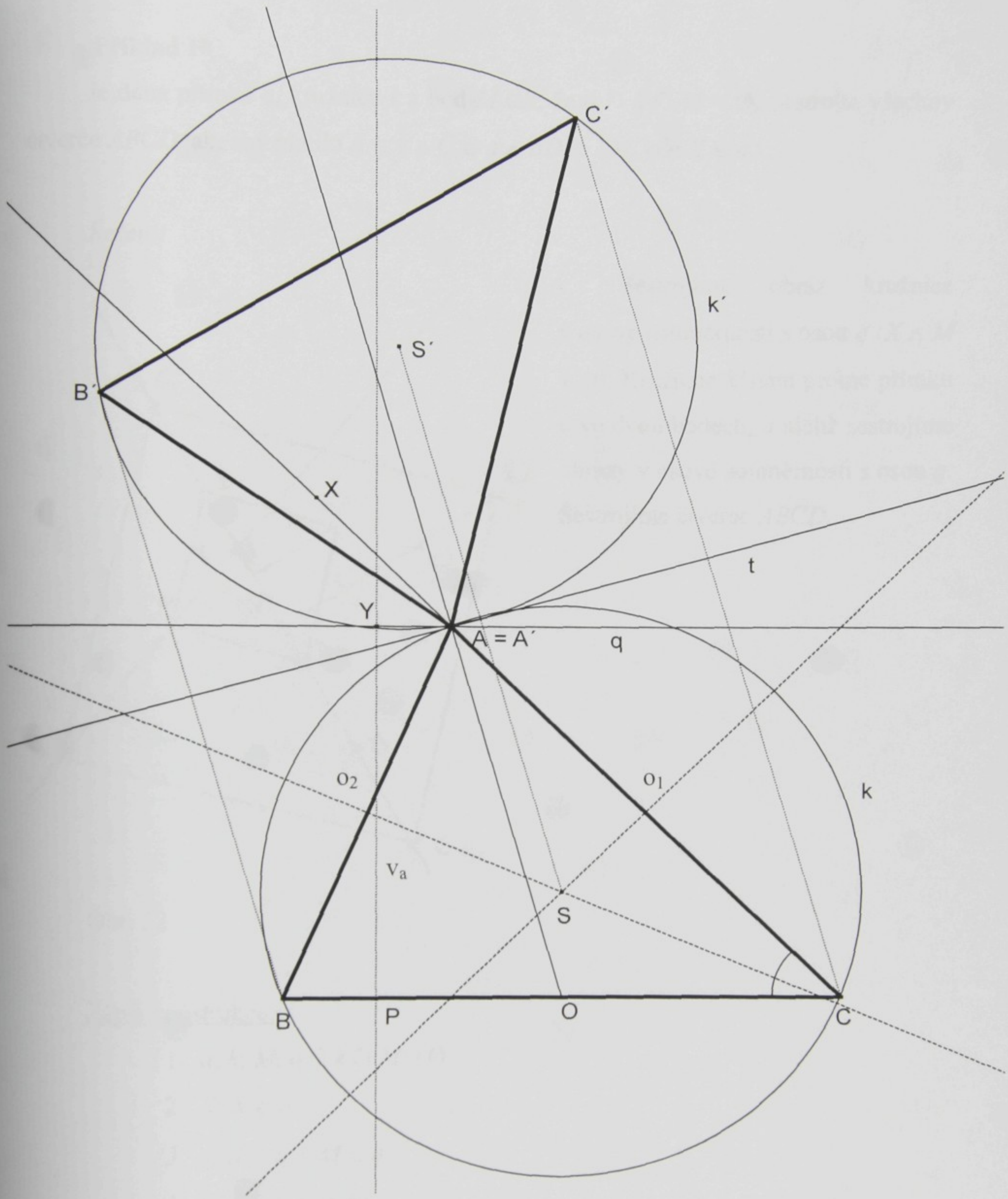
15.B'; $\boldsymbol{O}(t)$: $B \rightarrow B'$

16.C'; $\boldsymbol{O}(t)$: $C \rightarrow C'$

17.$\Delta\, A'B'C'$

18.S'; $\boldsymbol{O}(t)$: $S \rightarrow S'$

19.k'; $k'(S'; r' = |SA|)$



Obr. 51

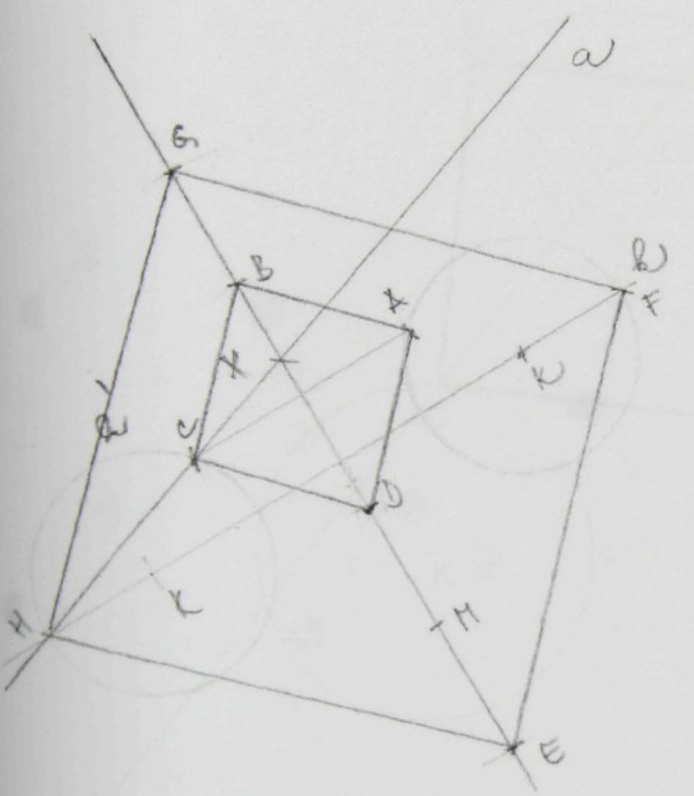
Diskuse:

Úloha má ve zvolené polorovině právě jedno řešení a tím je $\Delta\ A'B'C'$.

Příklad 10

Je dána přímka a, kružnice k a bod M tak, že $a \cap k \cap M = \emptyset$. Sestrojte všechny čtverce $ABCD$ tak, aby platilo $A \in k \wedge C \in a \wedge BD \subset XM$, kde $X \in a$.

Řešení:



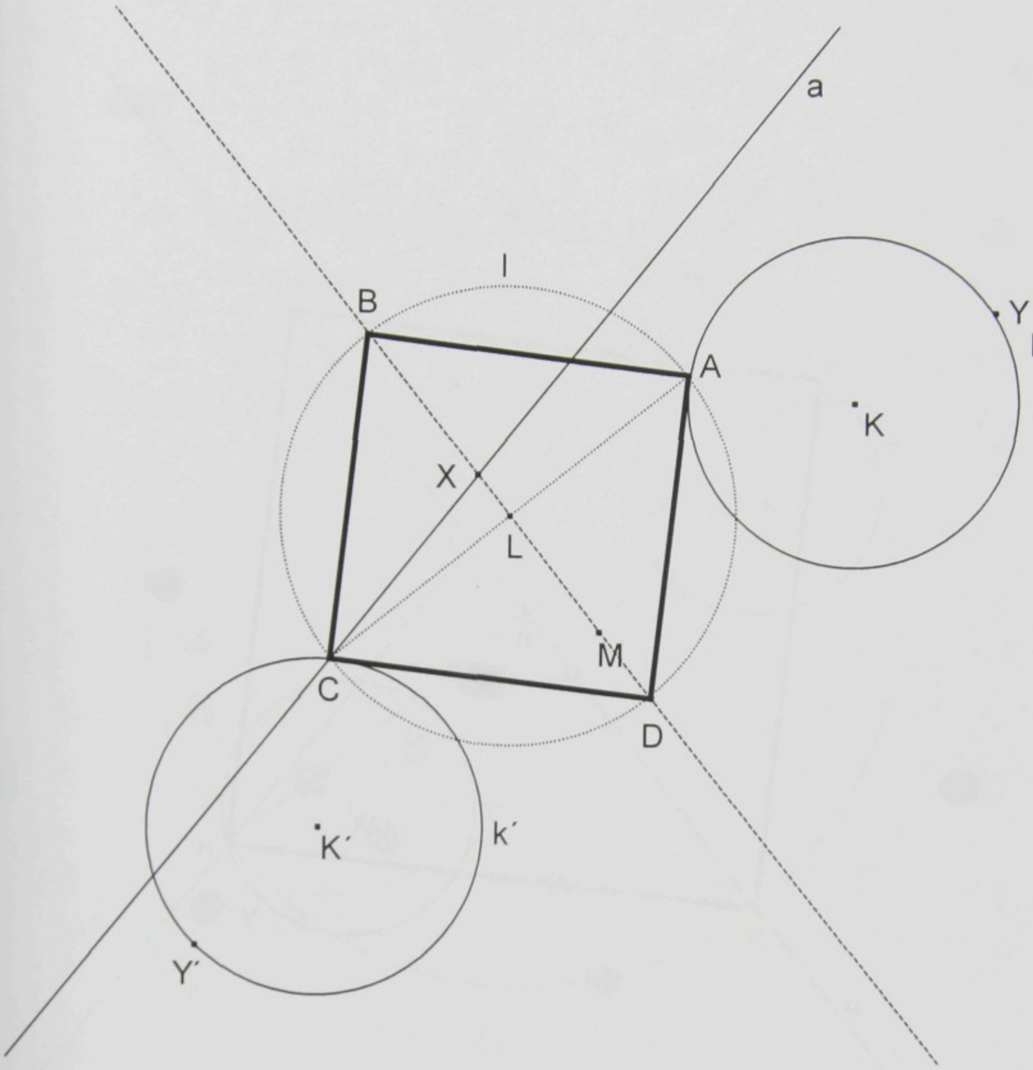
Sestrojíme obraz kružnice v osové souměrnosti s osou q ($X \wedge M \in q$). Kružnice k' nám protne přímku a ve dvou bodech, u nichž sestrojíme obrazy v osové souměrnosti s osou q. Sestrojíme čtverec $ABCD$.

Obr. 52

Zápis konstrukce:

1. a; k; M; $a \cap k \cap M = \emptyset$
2. X; $X \in a$
3. q; $X \in q \wedge M \in q$
4. k'; $\boldsymbol{O}(q)$: $k \rightarrow k'$
5. C; $C \in a \cap k'$
6. A; $\boldsymbol{O}(q)$: $C \rightarrow A$
7. L; $L \in q \cap CA$
8. l; $l(L; r = |CA|)$
9. B; $B \in l \cap q$
10. D; $D \in l \cap q$

11.Čtverec *ABDC*



Obr. 53

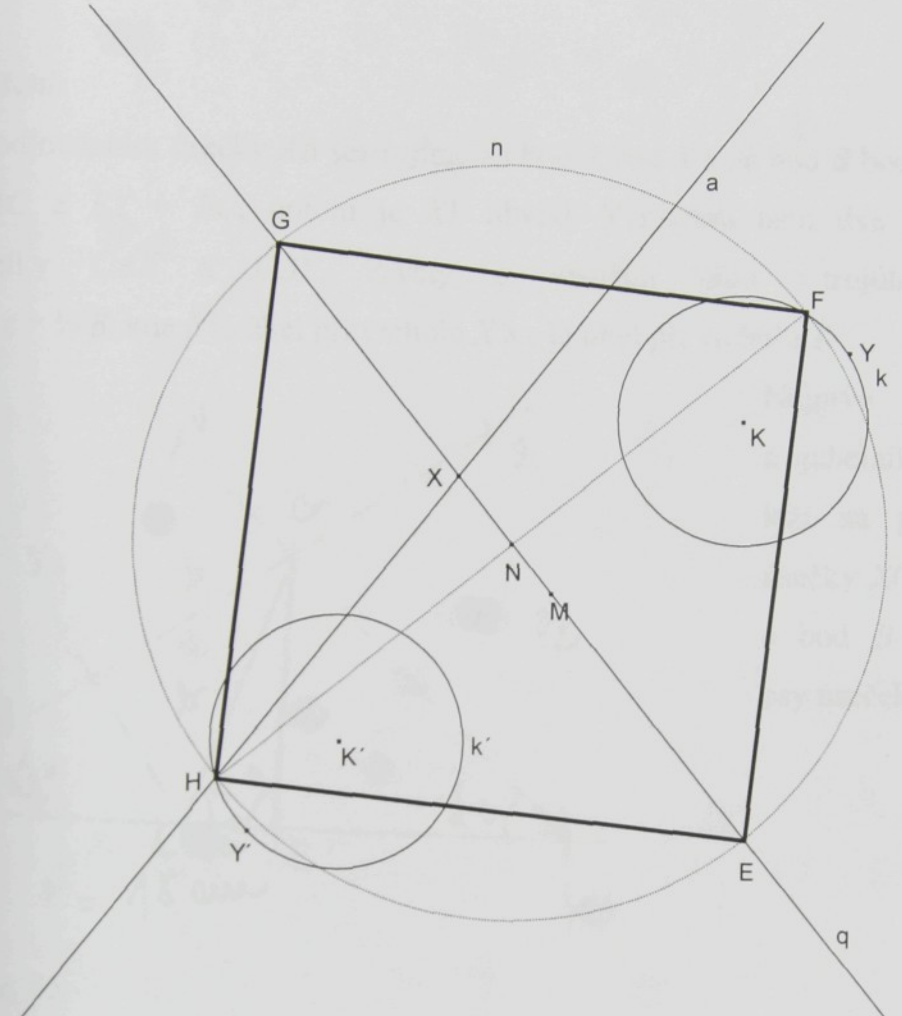
Druhé řešení:

Zápis konstrukce:

1. $a; k; M; a \cap k \cap M = \emptyset$
2. $X; X \in a$
3. $q; X \in q \wedge M \in q$
4. $k'; \boldsymbol{O}(q): k \rightarrow k'$
5. $H; H \in a \cap k'$
6. $F; \boldsymbol{O}(q): H \rightarrow F$
7. $N; N \in q \cap HF$
8. $n; n(N; r = |HF|)$
9. $E; E \in n \cap q$

10.G; $G \in n \cap q$

11. Čtverec EFGH



Obr. 54

Diskuse:

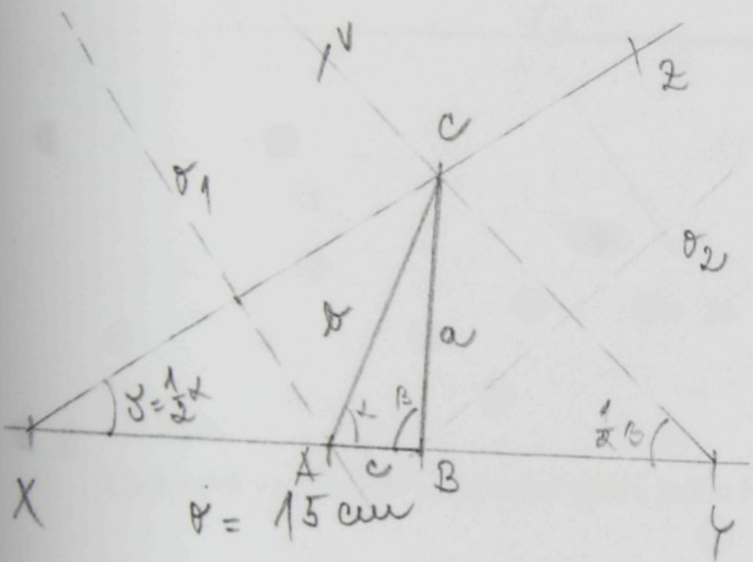
Protože nám kružnice k′ protnula přímku a ve dvou bodech H, C a tyto body splňují požadované vlastnosti, má úloha v rovině dvě řešení, která pro přehlednost uvádím ve dvou obrázcích. Prvním je čtverec *ABCD* (obr. 36) a druhým je čtverec *EFGH* (obr. 37).

Příklad 11

Sestrojte všechny trojúhelníky ABC, je-li dán jejich obvod $o = 15$ cm a úhly $\alpha = 70°$, $\beta = 50°$.

Řešení:

Prodloužením úsečky AB sestrojíme za bod A bod X a za bod B bod Y, aby platilo $AX = AC$ a $BY = BC$, potom je XY obvod. Vzniknou nám dva rovnoramenné trojúhelníky CAX a CBY. Z věty o vnějším úhlu v trojúhelníku plyne $\delta = \frac{1}{2}\alpha$, $\varepsilon = \frac{1}{2}\beta$, kde δ je úhel při vrcholu X a ε je úhel při vrcholu Y.

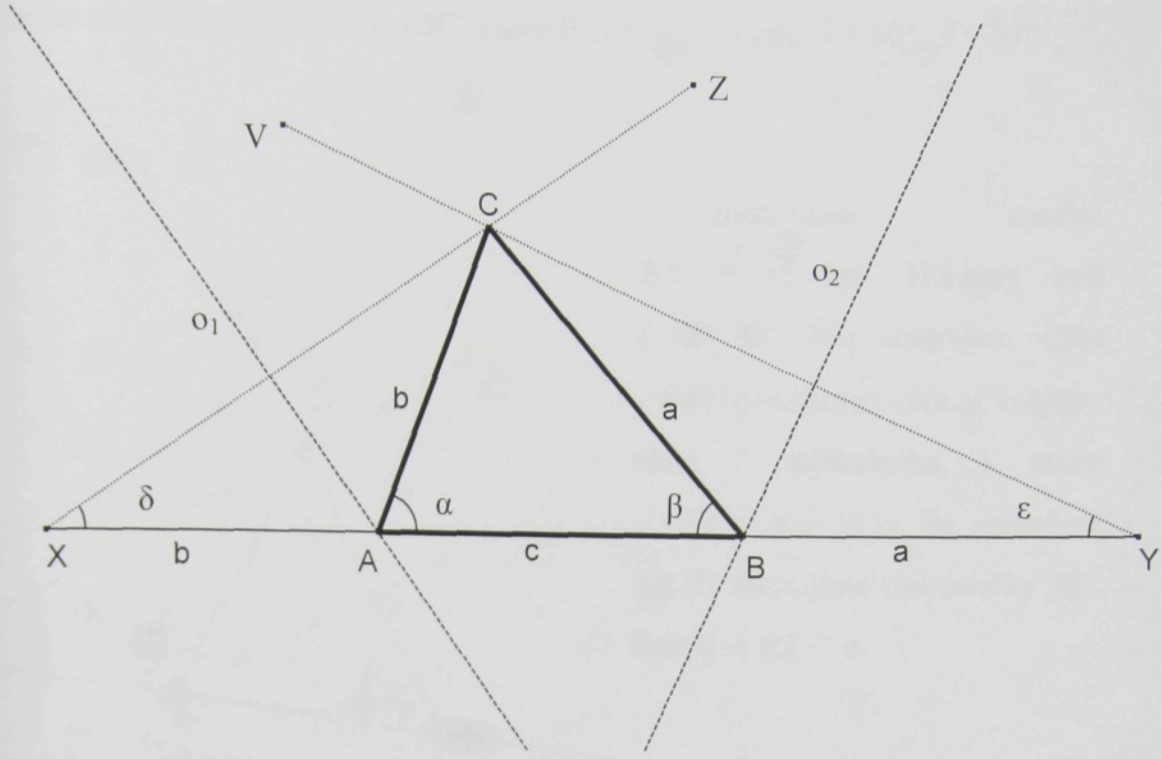


Obr. 55

Nejprve sestrojíme trojúhelník XYC. Bod A leží na průsečíku osy úsečky XC a úsečky XY a bod B na průsečíku osy úseček YC a XY.

<u>Zápis konstrukce:</u>

1. XY; $|XY| = o = 15$ cm
2. $\angle YXZ$; $|\angle YXZ| = \delta = \frac{1}{2}\alpha$
3. $\angle XYV$; $|\angle XYV| = \varepsilon = \frac{1}{2}\beta$
4. C; $C \in \rightarrow XZ \cap \rightarrow YV$
5. o_1; o_1 je osa úsečky XC
6. A; $A \in o_1 \cap XY$
7. o_2; o_2 je osa úsečky YC
8. B; $B \in o_2 \cap XY$
9. ΔABC



Obr. 56

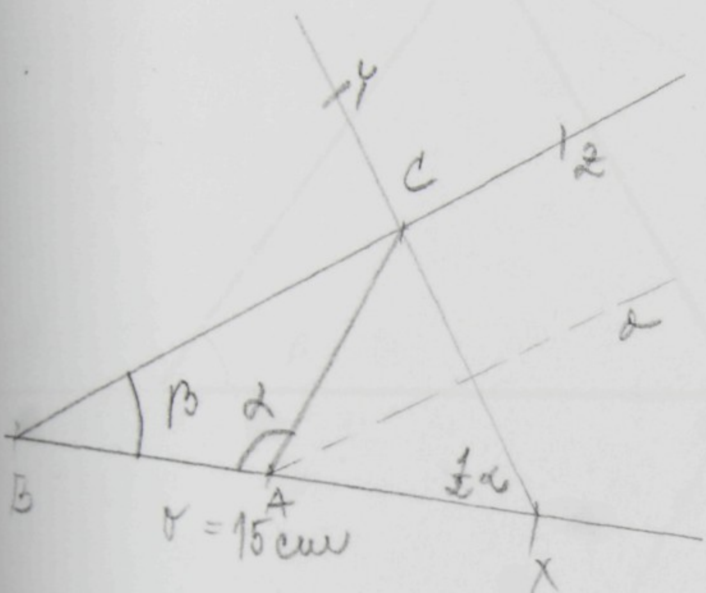
Diskuse:

Úloha má ve zvolené polorovině právě jedno řešení a tím je $\Delta\ ABC$.

Příklad 12

Sestrojte všechny trojúhelníky ABC, znáte-li $|b + c| = 15$ cm, $\alpha = 60°$, $\beta = 55°$.

Řešení:

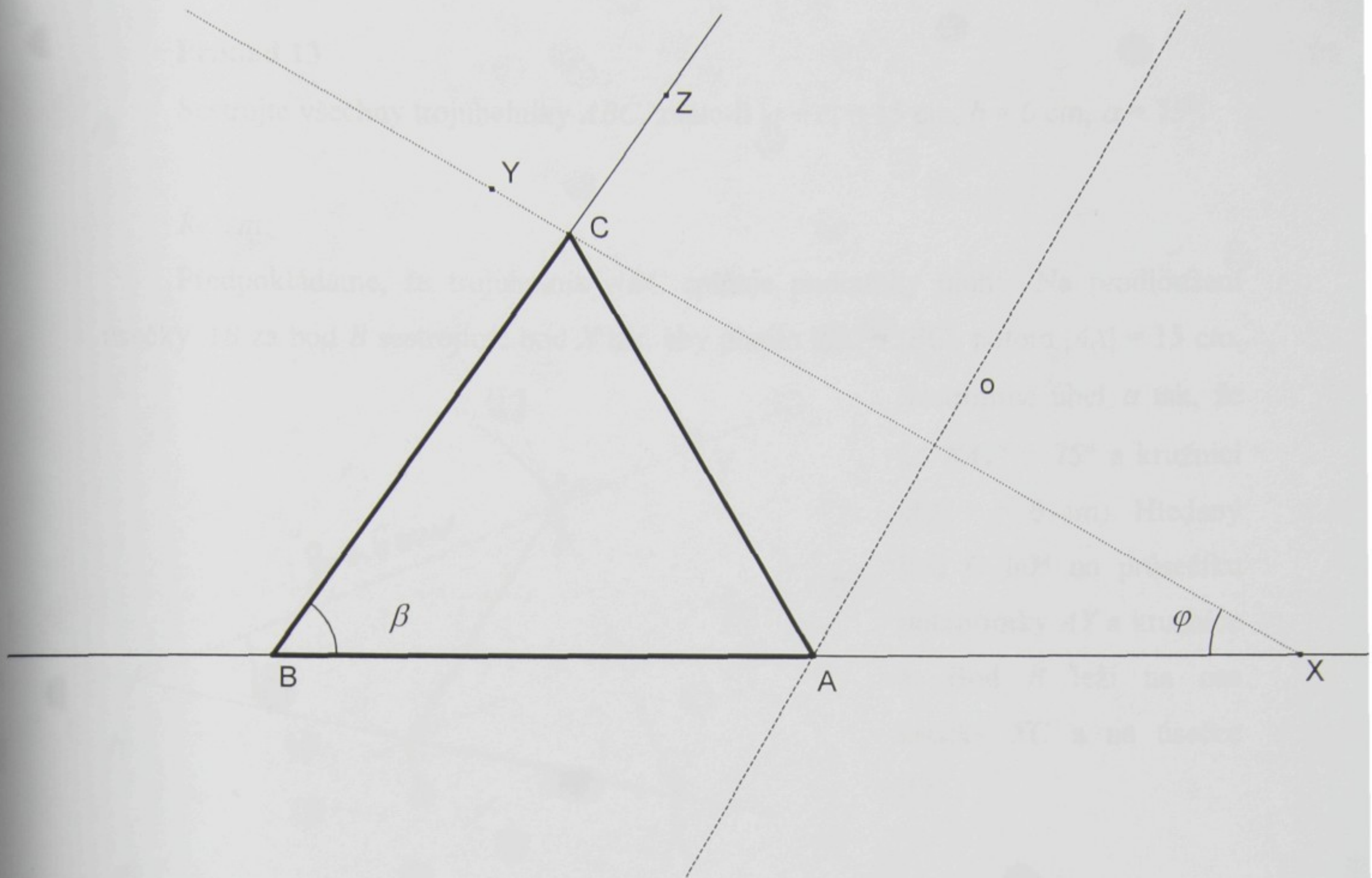


Sestrojíme úsečku $|BX| = 15$ cm. Hledaný bod $A \in BX$. Pro sestrojení úhlu $\angle BXY$ použijeme větu o vnějším úhlu trojúhelníku, takže $\angle BXY = \varphi = \frac{1}{2}\alpha$. Po sestrojení ΔBXC sestrojíme osu úsečky XC. Bod $A \in BX \cap o$.

Obr. 57

Zápis konstrukce

1. BX; $|BX| = |b + c| = 15$ cm
2. $\angle BXY$; $|\angle BXY| = \varphi = \frac{1}{2}\alpha$
3. $\angle XBZ$; $|\angle XBZ| = \beta = 55°$
4. C; $C \in \rightarrow BZ \cap \rightarrow XY$
5. o; o je osa úsečky XC
6. A; $A \in BX \cap o$
7. $\Delta\, ABC$



Obr. 58

Diskuse:

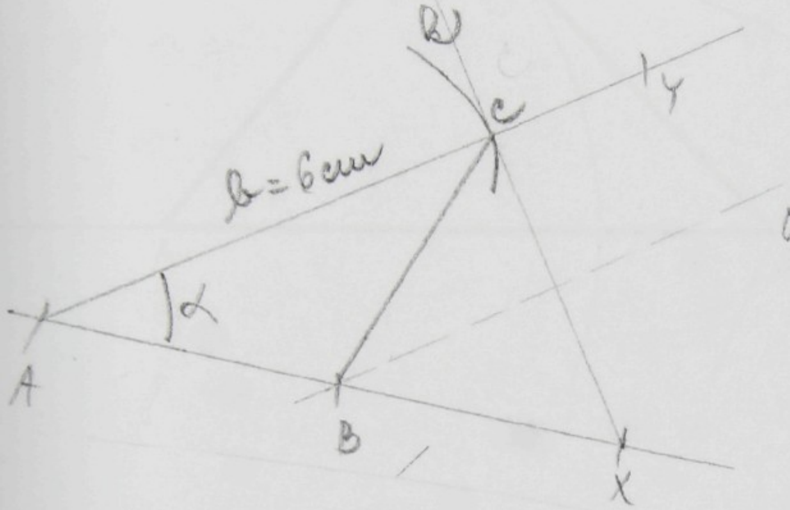
Úloha má v dané polorovině *BXC* právě jedno řešení a tím je trojúhelník *ABC*.

Příklad 13

Sestrojte všechny trojúhelníky ABC, znáte-li $|a + c| = 15$ cm, $b = 6$ cm, $\alpha = 75°$.

Řešení:

Předpokládáme, že trojúhelník ABC splňuje podmínky úlohy. Na prodloužení úsečky AB za bod B sestrojíme bod X tak, aby platilo $|BX| = |BC|$, potom $|AX| = 15$ cm.

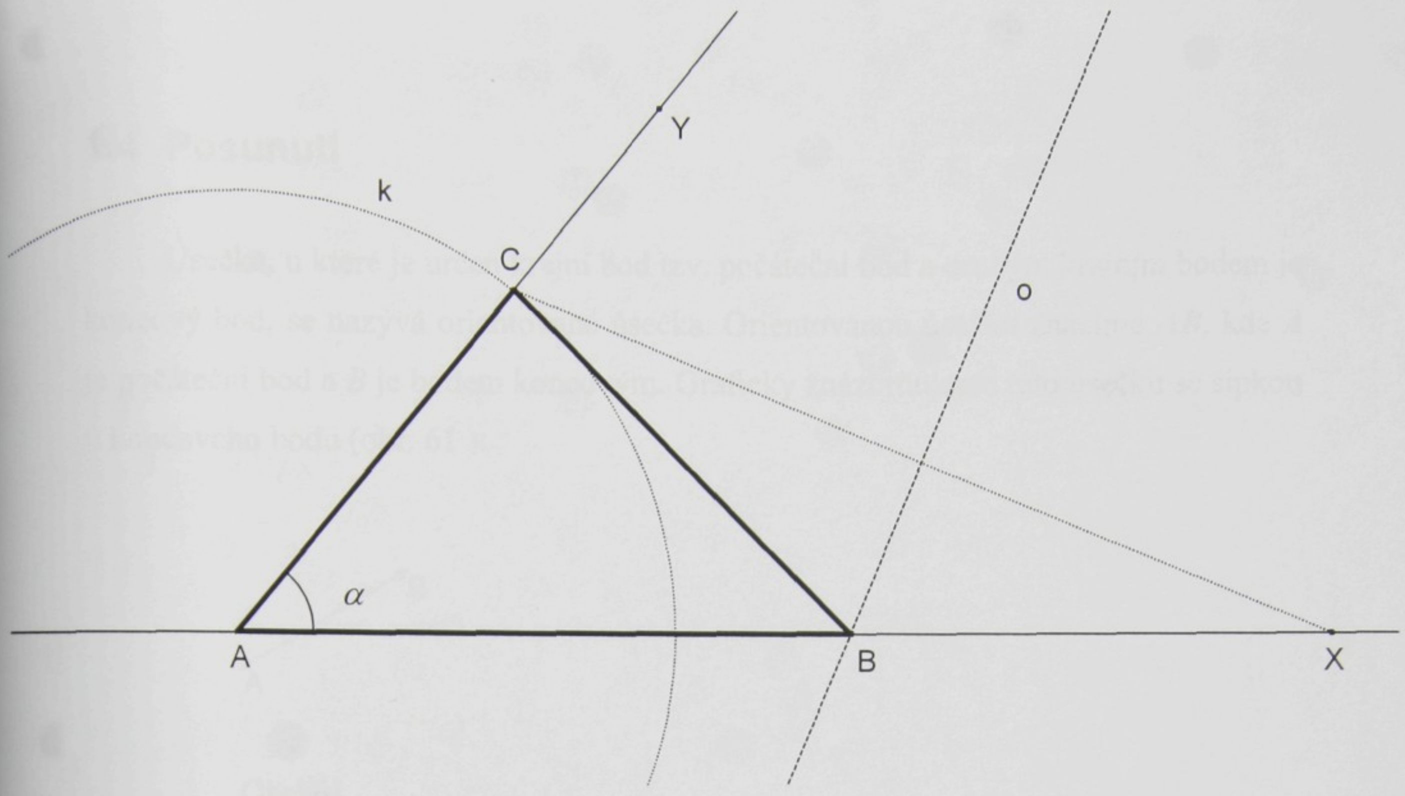


Sestrojíme úhel α tak, že $|\angle XAY| = 75°$ a kružnici $k(A;\ r = 6\text{ cm})$. Hledaný bod C leží na průsečíku polopřímky AY a kružnice k. Bod B leží na ose úsečky XC a na úsečce AX.

Obr. 59

<u>Zápis konstrukce</u>

1. AX; $|AX| = 15$ cm
2. $\angle XAY$; $|\angle XAY| = \alpha = 75°$
3. k; $k(A;\ r = 6\text{ cm})$
4. C; $C \in \rightarrow AY \cap k$
5. O; o je osa úsečky XC
6. B; $B \in o \cap AX$
7. $\Delta\, ABC$



Obr. 60

Diskuse:

Úloha má ve zvolené polorovině právě jedno řešení a tím je trojúhelník *ABC*.

1.4 Posunutí

Úsečka, u které je určen krajní bod tzv. počáteční bod a druhým krajním bodem je koncový bod, se nazývá orientovaná úsečka. Orientovanou úsečku značíme ***AB***, kde *A* je počáteční bod a *B* je bodem koncovým. Graficky znázorňujeme tuto úsečku se šipkou u koncového bodu (obr. 61).

Obr. 61

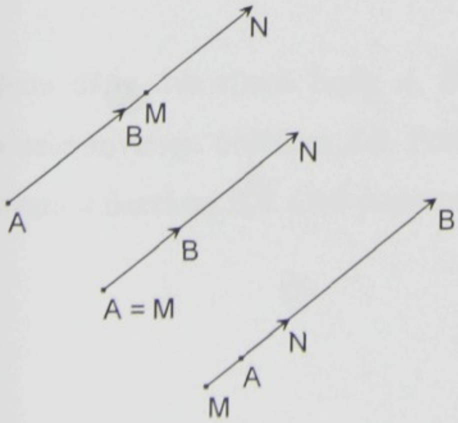
Délku (velikost) orientované úsečky ***AB*** značíme |***AB***|.

Bod je orientovaná úsečka, kde počáteční i koncový bod splývají. Taková úsečka se nazývá nulová orientovaná úsečka, její délka je nula.

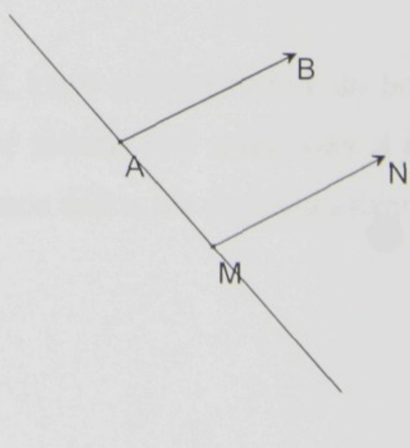
Orientované úsečky ***AB*** a ***MN*** jsou souhlasně orientované, pokud

1. leží na téže přímce a polopřímka ***AB*** je částí polopřímky ***MN*** či naopak, případně obě polopřímky splynou (obr. 62), nebo

2. leží na různých rovnoběžkách a koncové body leží ve stejné polorovině s hraniční přímkou ***AM*** (obr. 63).

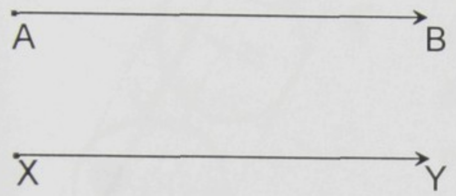


Obr. 62



Obr.63

Je dána orientovaná úsečka $\boldsymbol{AB}$. Ke každému bodu X sestrojíme Y tak, že úsečka XY je shodná a souhlasně orientovaná s úsečkou $\boldsymbol{AB}$. Vzniklé shodné zobrazení $\boldsymbol{T(AB)}$ se nazývá posunutí neboli translace (obr. 64).



Obr. 64

Délkou orientované úsečky $\boldsymbol{AB}$ je určena délka posunutí a její směr určuje směr posunutí.

Posunutí $\boldsymbol{T}$ o délku danou orientovanou úsečkou AB zapisujeme $\boldsymbol{T(AB)}$.

Vlastnosti $\boldsymbol{T(AB)}$:

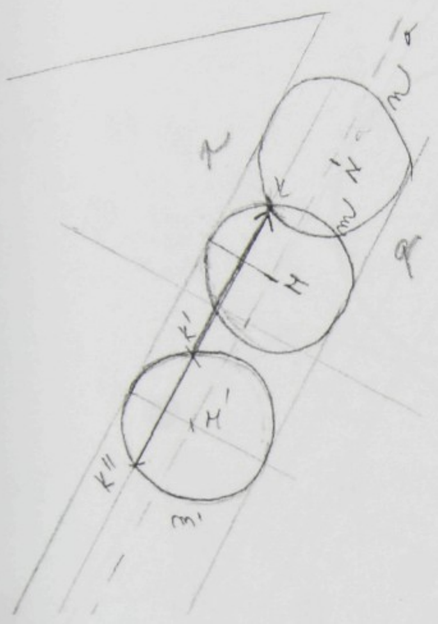
- Posunutí je přímá shodnost,
- posunutí nemá žádné samodružné body,
- obrazem přímky p, která není rovnoběžná se směrem posunutí je přímka p' rovnoběžná s přímkou p,
- přímky, které jsou rovnoběžné se směrem posunutí, jsou samodružné.

Jsou dány dva různé body A, B. Posunutí, které zobrazí bod A do bodu B, je určeno orientovanou úsečkou $\boldsymbol{AB}$. Posunutí, které zobrazí bod B do bodu A je určeno orientovanou úsečkou $\boldsymbol{BA}$. Obě posunutí mají stejnou délku, ale opačnou orientaci.

Příklad 1

Jsou dány rovnoběžné přímky p, q a bod K. Sestrojte kružnici m, která se dotýká přímky p, q a prochází bodem K.

Řešení:

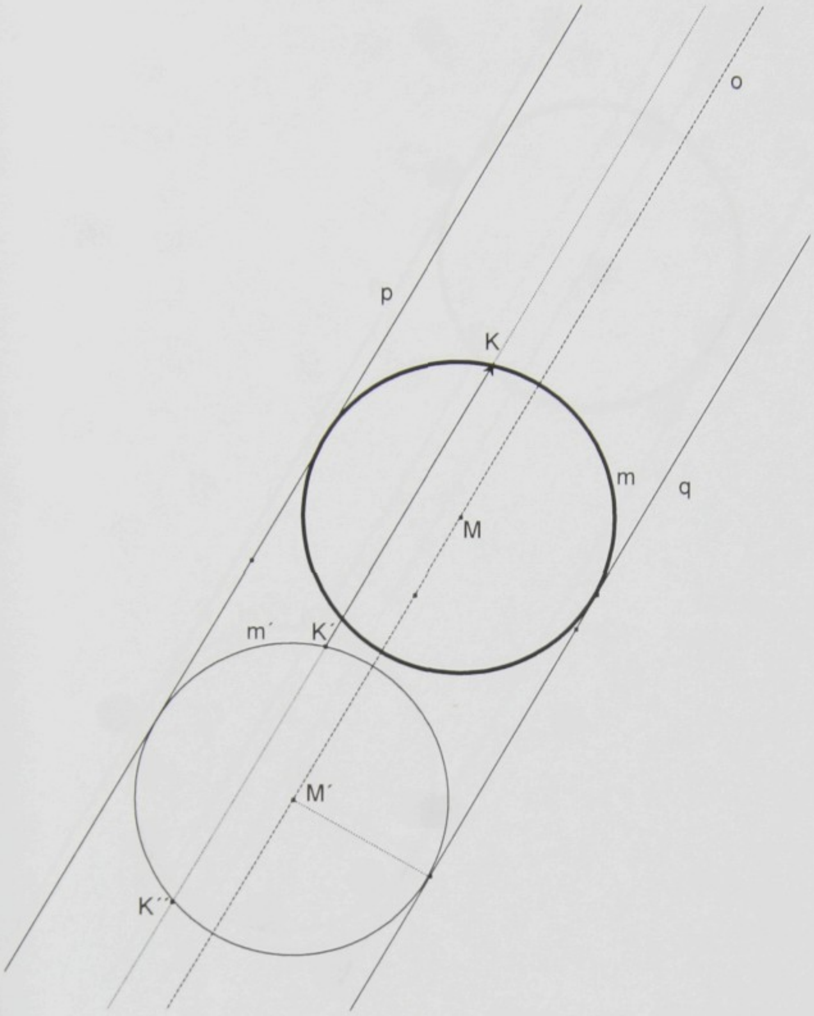


Předpokládáme, že bod K, leží v pásu (p, q). Střed kružnice, která se dotýká přímky p, q, leží na ose tohoto pásu. Sestrojíme pomocnou kružnici m', která se sice bude dotýkat přímek, ale nebude procházet bodem K. Bodem K povedeme přímku k tak, aby $k \parallel p$. Její průsečíky s m' označíme K', K''. Hledané kružnice jsou obrazem kružnice m' v posunutí $T(K'K)$ a $T(K''K)$.

Obr. 65

Zápis konstrukce:

1. $p, q; p \parallel q$
2. K; K leží uvnitř pásu (p, q)
3. M'; M' leží uvnitř pásu (p, q)
4. m'; $m'(M'; r = \frac{1}{2}|pq|)$
5. k; $k \parallel q$; $K \in k$
6. K'; $K' \in m' \cap k$
7. m; $T(K'K)$: $m' \to m$

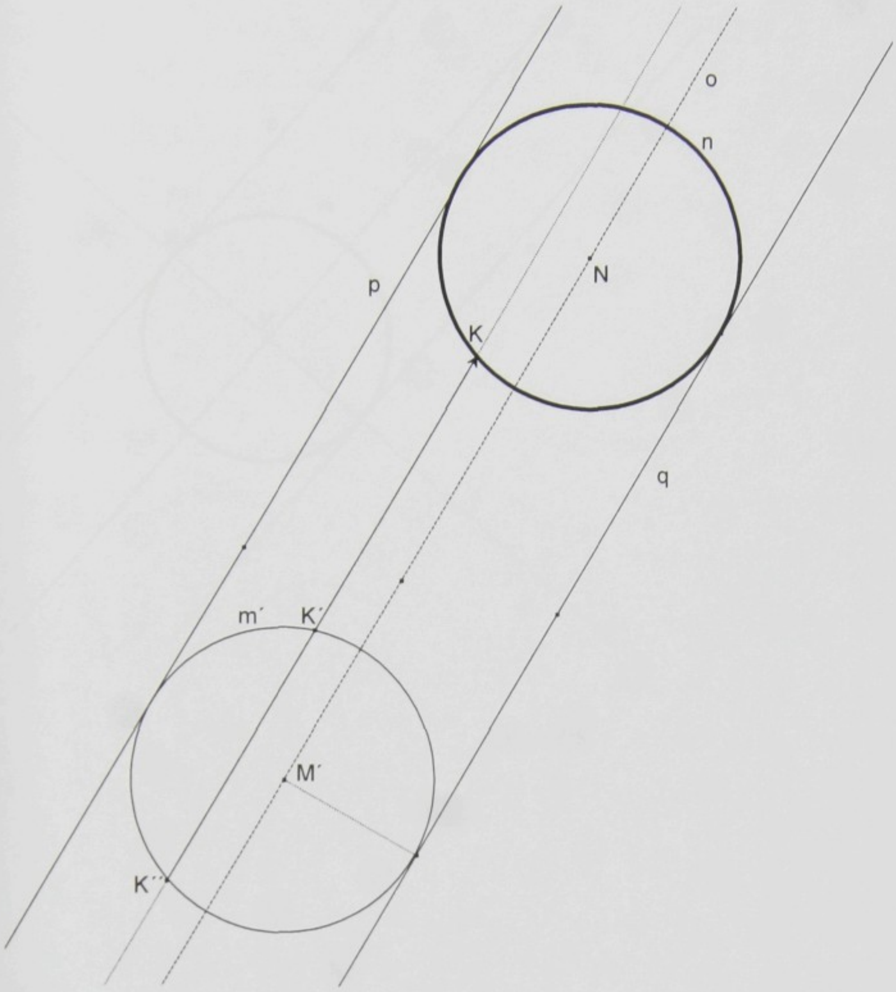


Obr. 66

Druhé řešení:

Zápis konstrukce:

1. $p, q; p \parallel q$
2. K; K leží uvnitř pásu (p, q)
3. M'; M' leží uvnitř pásu (p, q)
4. m'; $m'(M'; r = \frac{1}{2}|pq|)$
5. k; $k \parallel q$; $K \in k$
6. K''; $K'' \in m' \cap k$
7. n; $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{K''K})$: $m' \to n$

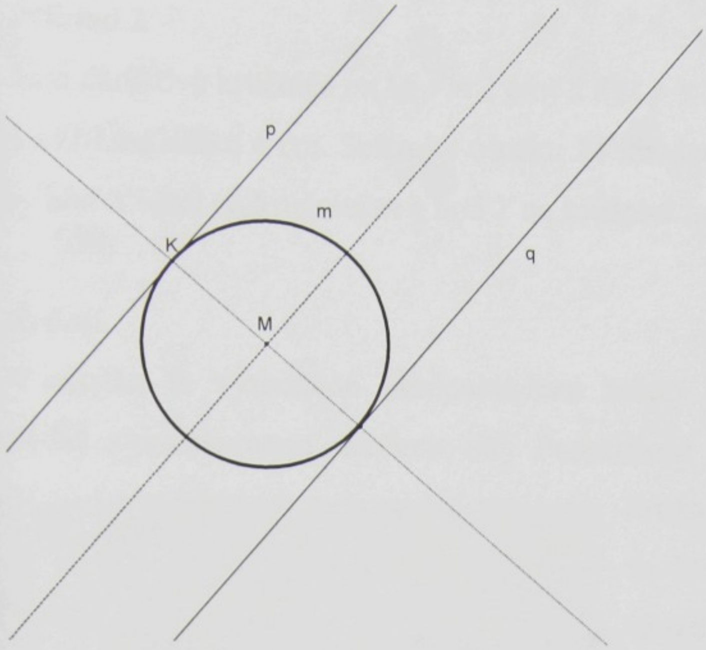


Obr. 67

Diskuse:

Aby úloha měla dvě řešení, musí bod K ležet uvnitř pásu (p, q), potom jejím řešením jsou dvě kružnice m (obr. 66), n (obr. 67). Pro přehlednost uvádím řešení ve dvou obrázcích.

Pokud $K \in p \vee K \in q$ úloha má pouze jedno řešení (obr. 68). A pokud bod K leží mimo pás (p, q), úloha nemá řešení.



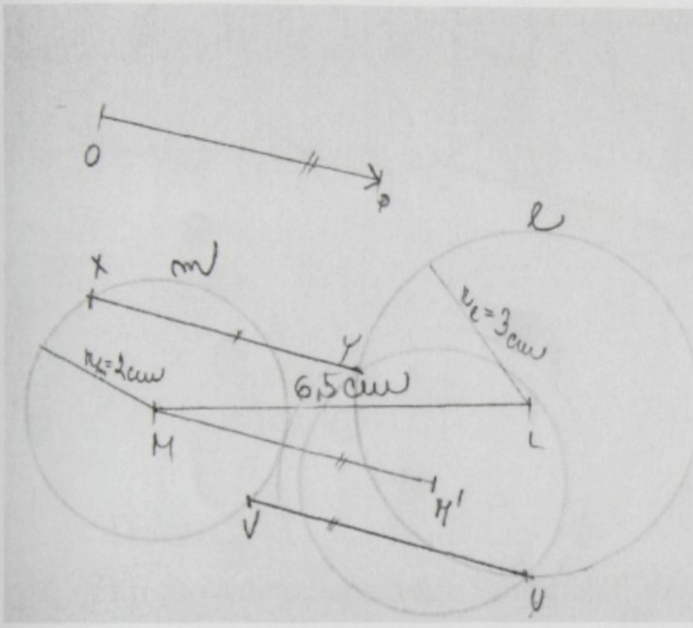
Obr. 68

Příklad 2

Jsou dána dvě kružnice $m(M; r = 2\text{ cm})$ a $l(L; r = 3{,}5\text{ cm})$, přičemž $|ML| = 6{,}5$ cm, a úsečka OP má délku 4 cm. Sestrojte úsečku XY shodnou a rovnoběžnou s úsečkou OP tak, aby bod X ležel na kružnici m a bod Y na kružnici l.

Řešení:

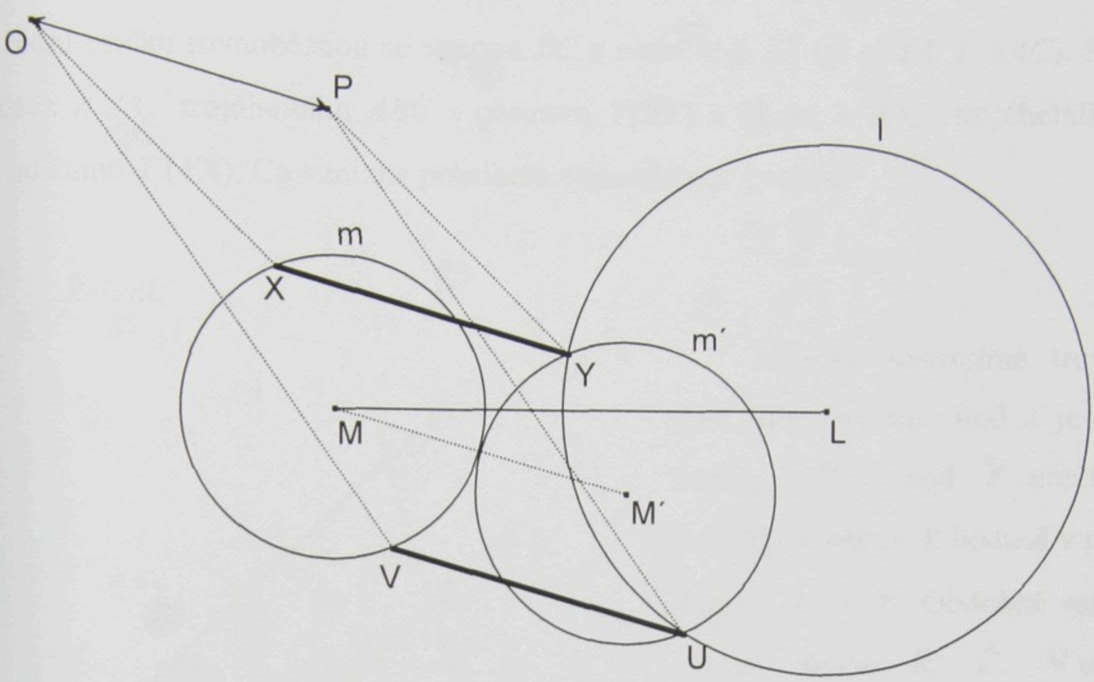
V náčrtku je vyznačeno předpokládané řešení. Úsečka XY o délce 4 cm je rovnoběžná s orientovanou úsečkou $\boldsymbol{OP}$. Podmínkou úlohy je, aby bod X ležel na kružnici m (kružnice m je množina možných bodů X); obdobně je kružnice l množinou možných bodů Y. Bod Y je obrazem bodu X v posunutí $T(\boldsymbol{OP})$. Tímto posunutím převedeme kružnici m v kružnici m', bod M v M'. Hledaný bod Y vznikne $m' \cap l$. Bod X je pak obrazem bodu Y v opačném posunutí $T'(\boldsymbol{PO})$.



Obr. 69

<u>Zápis konstrukce:</u>

1. ML; $|ML| = 6{,}5$ cm
2. m; $m(M; r = 2\text{ cm})$
3. l; $l(L; r = 3{,}5\text{ cm})$
4. m'; $T(\boldsymbol{OP})$: $m \rightarrow m'$
5. Y; $Y \in m' \cap l$
6. U; $U \in m' \cap l$
7. X; $T(\boldsymbol{PO})$: $Y \rightarrow X$
8. V; $T(\boldsymbol{PO})$: $U \rightarrow V$
9. XY, UV



Obr. 70

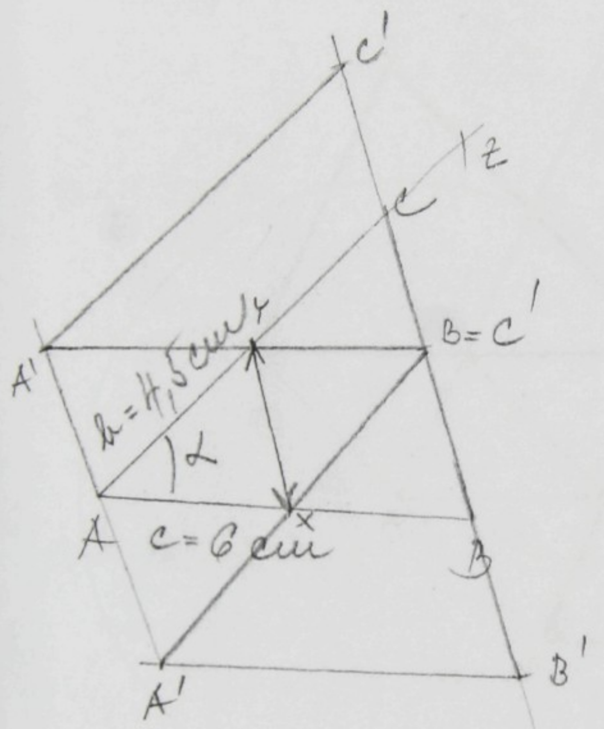
Diskuse:

Při provádění konstrukce jsme zjistili, že m' a l mají dva společné body Y, V, jimž v posunutí $\boldsymbol{T'(PO)}$ odpovídají body X, U, proto má úloha dvě řešení a tím jsou úsečky XY, UV.

Příklad 3

Sestrojte trojúhelník ABC, kde $|AB| = 6$ cm, $|AC| = 4{,}5$ cm, $\alpha = 65°$. Dále sestrojte střední příčku rovnoběžnou se stranou BC a označte ji XY ($X \in AB$, $Y \in AC$). Sestrojte obraz $A'B'C'$ trojúhelníku ABC v posunutí $T(XY)$ a obraz $A''B''C''$ trojúhelníku ABC v posunutí $T'(YX)$. Co vznikne průnikem obou obrazů a vzoru?

Řešení:



Obr. 71

Nejprve sestrojíme trojúhelník ABC, dle věty *sus*. Bod X je středem úsečky AB a bod Y úsečky AC. Sestrojíme obraz A' bodu A v posunutí $T(XY)$: $A \to A'$. Obdobně sestrojíme obrazy bodů B, C. V opačném posunutí sestrojíme obraz A'' bodu A v $T'(YX)$. Obdobně sestrojíme obrazy pro zbylé body.

Zápis konstrukce:

1. AB; $|AB| = 6$ cm
2. $\angle BAZ$; $|\angle BAZ| = \alpha = 65°$
3. k; $k(A; r = 4{,}5$ cm)
4. C; $C \in k \cap \rightarrow AZ$
5. ΔABC
6. X; X je střed AB
7. Y; Y je střed AC
8. XY
9. A'; $T(XY)$: $A \to A'$

10.B′; $\boldsymbol{T}(XY)$: $B \to B'$

11.C′; $\boldsymbol{T}(XY)$: $C \to C'$

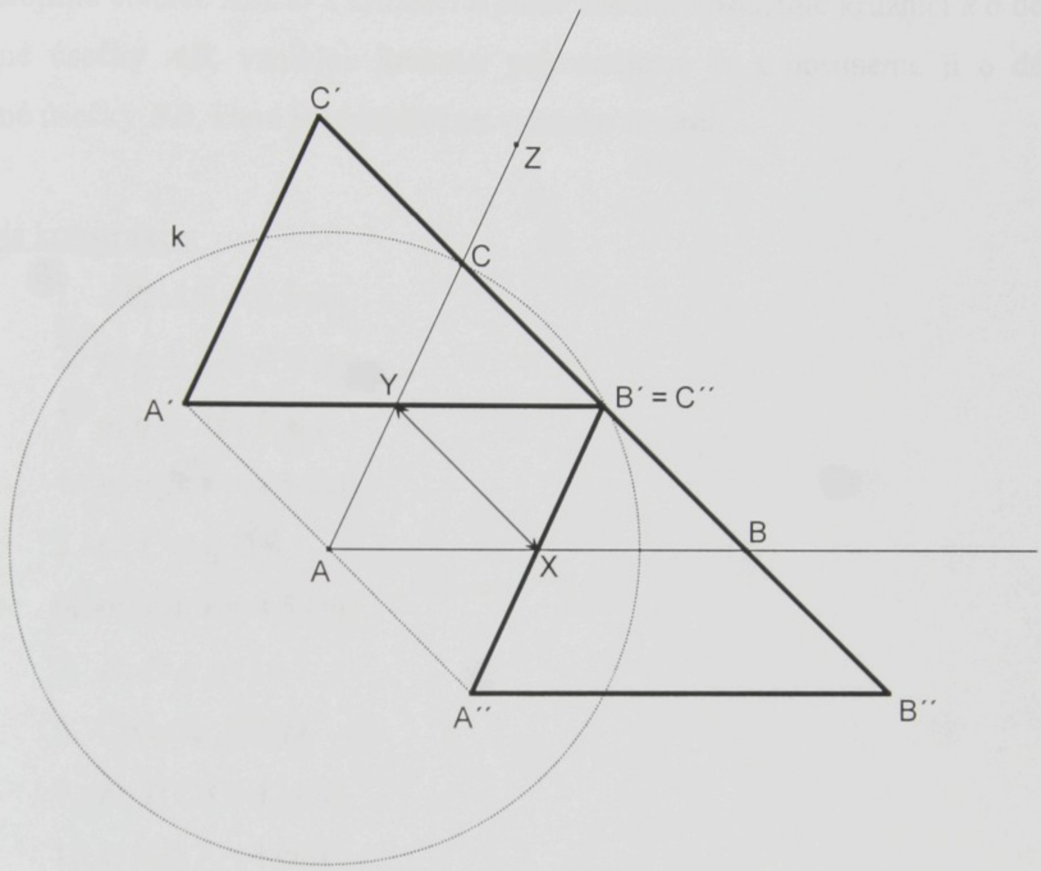
12.$\Delta A'B'C'$

13.A″; $\boldsymbol{T}(YX)$: $A \to A''$

14.B″; $\boldsymbol{T}(YX)$: $B \to B''$

15.C″; $\boldsymbol{T}(YX)$: $C \to C''$

16.$\Delta A''B''C''$



Obr. 72

Diskuse:

Úloha má jedno řešení. Průnikem obou obrazů a vzoru je střed úsečky *BC*.

Příklad 4

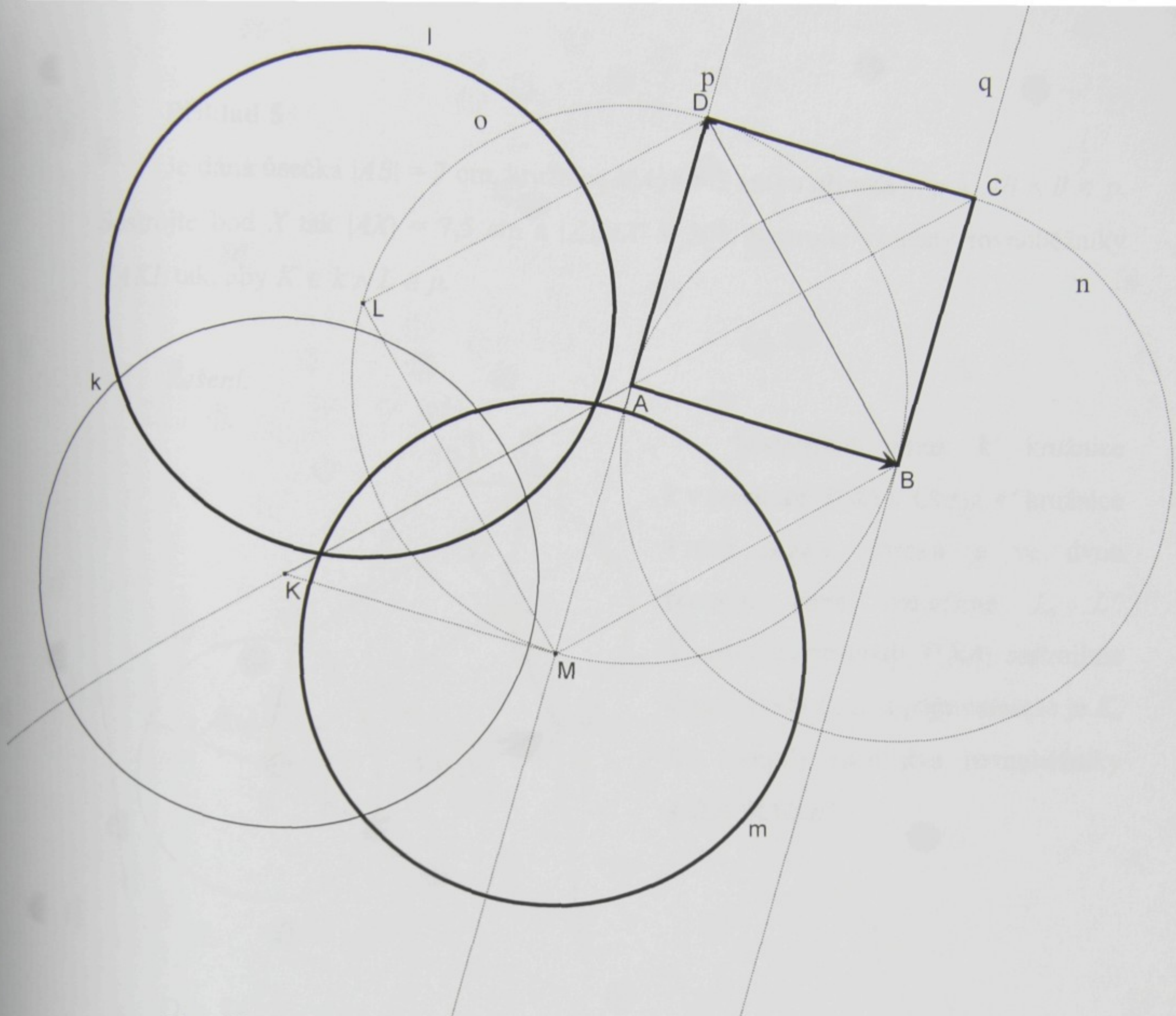
Sestrojte čtverec $ABCD$ o straně $a = 4{,}5$ cm a kružnici $k(K; r = 4$ cm) tak, aby bod A byl středem úsečky KC. Dále sestrojte kružnici m, která je obrazem k v posunutí $\boldsymbol{T}(AB)$, a kružnici l, která je obrazem m v posunutí $\boldsymbol{T}(BD)$. Co je obrazem kružnice k v posunutí $\boldsymbol{T}(AD)$.

Řešení:

Sestrojíme čtverec $ABCD$ a kružnici k podle zadání. Posuneme kružnici k o délku orientované úsečky $\boldsymbol{AB}$, vzniklou kružnici pojmenujeme m a posuneme ji o délku orientované úsečky $\boldsymbol{BD}$, která je úhlopříčkou v daném čtverci.

<u>Zápis konstrukce:</u>

1. AB; $|AB| = 4{,}5$ cm
2. p; $p \perp AB$; $A \in p$
3. q; $q \perp AB$; $B \in q$
4. n; $n(B; r = 4{,}5$ cm)
5. C; $C \in q \cap n$
6. o; $o(A; r = 4{,}5$ cm)
7. D; $D \in p \cap o$
8. Čtverec $ABCD$
9. K; $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{CA})$: $A \to K$
10. k; $k(K, r = 4$ cm)
11. m; $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{AB})$: $k \to m$
12. l; $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{BD})$: $m \to l$



Obr. 73

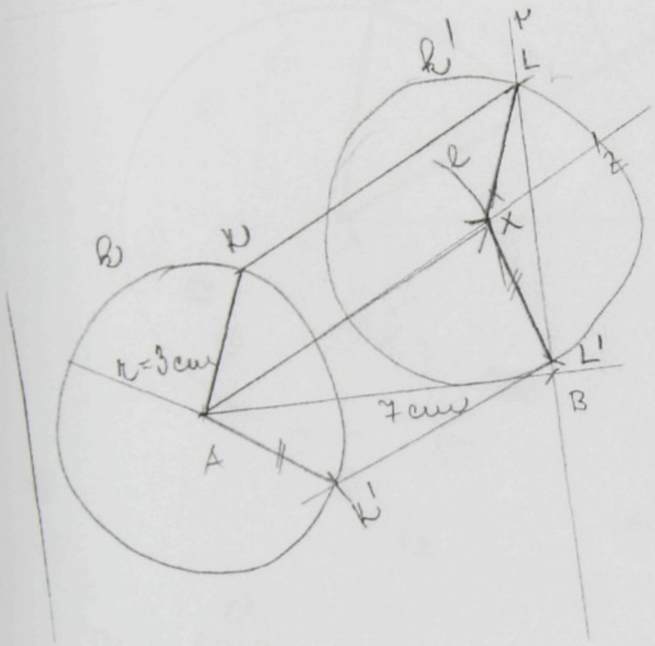
Diskuse:

Úloha má ve zvolené polorovině jedno řešení. Obrazem kružnice k v posunutí $T(AD)$ je kružnice l, která je obrazem kružnice m v posunutí $T(BD)$.

Příklad 5

Je dána úsečka $|AB| = 7$ cm, kružnice $k(A;\ r = 3$ cm) a přímka p, $p \perp AB \wedge B \in p$. Sestrojte bod X tak $|AX| = 7{,}5$ cm a $|\angle BAX| = 30°$. Sestrojte všechny rovnoběžníky $XAKL$ tak, aby $K \in k \wedge L \in p$.

Řešení:

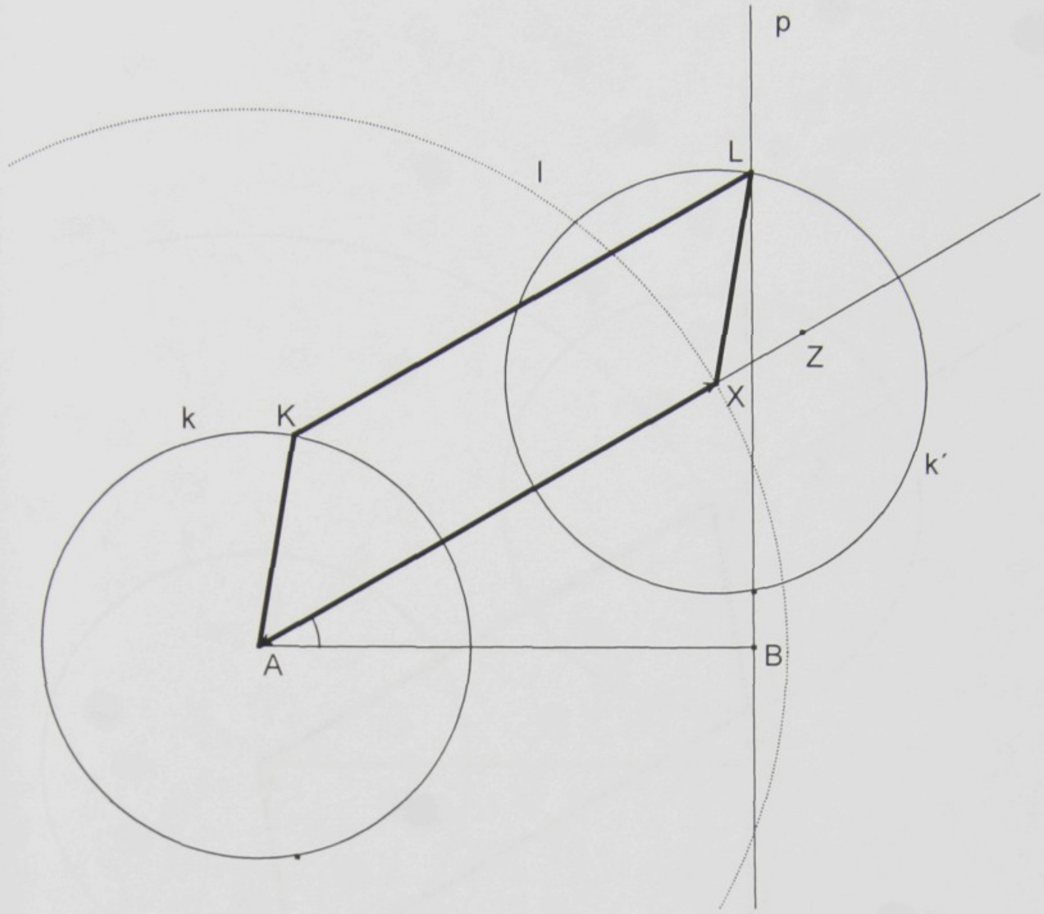


Obr. 74

Sestrojíme obraz k' kružnice k v posunutí $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{AX})$. Obraz k' kružnice k nám protne přímku p ve dvou bodech, které označíme L, L'. V opačném posunutí $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{XA})$ sestrojíme obrazy bodu L, L' a pojmenujeme je K, K'. Vznikly nám dva rovnoběžníky $AXLK$, $AXL'K'$.

<u>Zápis konstrukce:</u>

1. AB; $|AB| = 7$ cm
2. k; $k(A;\ r_k = 3$ cm)
3. p; $p \perp AB$; $B \in p$
4. l; $l(A;\ r_l = 7{,}5$ cm)
5. $\angle BAZ$; $|\angle BAZ| = 30°$
6. X; $X \in l \cap \rightarrow AZ$
7. k'; $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{AX})$: $k \rightarrow k'$
8. L; $L \in k' \cap p$
9. K; $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{XA})$: $L \rightarrow K$
10. Rovnoběžník $AXLK$

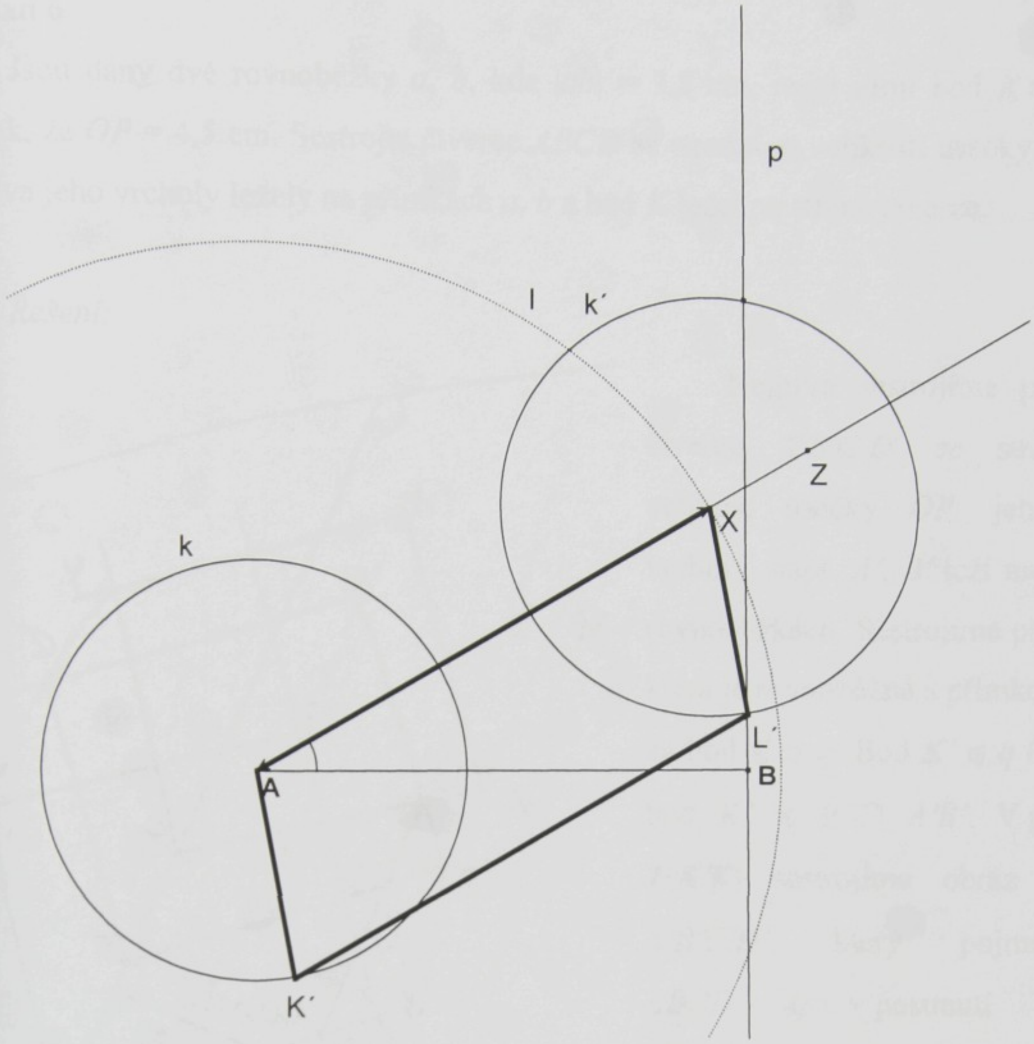


Obr. 75

Druhé řešení:

Zápis konstrukce:

1. AB; $|AB| = 7$ cm
2. k; $k(A; r = 3$ cm)
3. p; $p \perp AB$; $B \in p$
4. l; $l(A; r_l = 7{,}5$ cm)
5. $\angle BAZ$; $|\angle BAZ| = 30°$
6. X; $X \in l \cap \rightarrow AZ$
7. k'; $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{AX})$: $k \rightarrow k'$
8. L'; $L' \in k' \cap p$
9. K'; $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{XA})$: $L' \rightarrow K'$
10. Rovnoběžník $AXL'K'$



Obr. 76

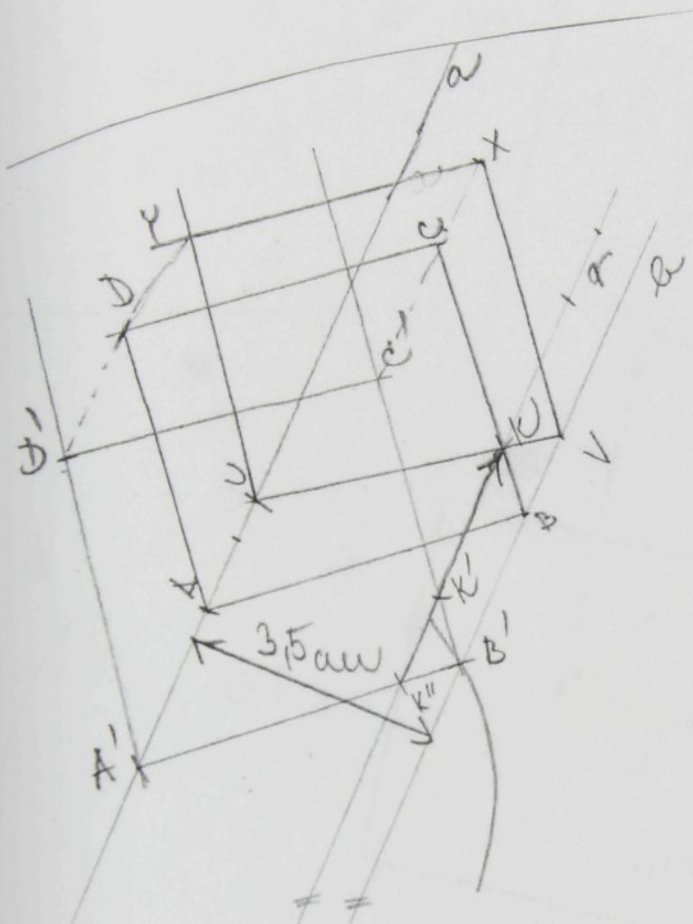
Diskuse:

Úloha má dvě řešení. Pro přehlednost je uvádím ve dvou obrázcích. Prvním řešením je rovnoběžník *AXLK* (obr. 75) a druhým je rovnoběžník *AXL´K´* (obr. 76).

Příklad 6

Jsou dány dvě rovnoběžky a, b, kde $|ab| = 3{,}5$ cm, mezi nimi bod K a úsečka OP,tak, že $OP = 4{,}5$ cm. Sestrojte čtverec $ABCD$ se stranou o velikosti úsečky OP tak, aby dva jeho vrcholy ležely na přímkách a, b a bod K ležel na straně čtverce.

Řešení:



Obr. 77

Nejprve sestrojíme pomocný čtverec $A'B'C'D'$ se stranou o velikost úsečky OP, jehož dva vrcholy, např. A', B' leží na daných rovnoběžkách. Sestrojíme přímku q, která je rovnoběžná s přímkou a tak, že bod $K \in q$. Bod $K' \in q \cap A'B'$ a bod $K'' \in q \cap A'B'$. V posunutí $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{K'K})$ sestrojíme obraz čtverce $A'B'C'D'$, který pojmenujeme $ABCD$ a v posunutí $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{K''K})$ sestrojíme obraz čtverce $A'B'C'D'$, který nazveme $UVXY$.

Zápis konstrukce:

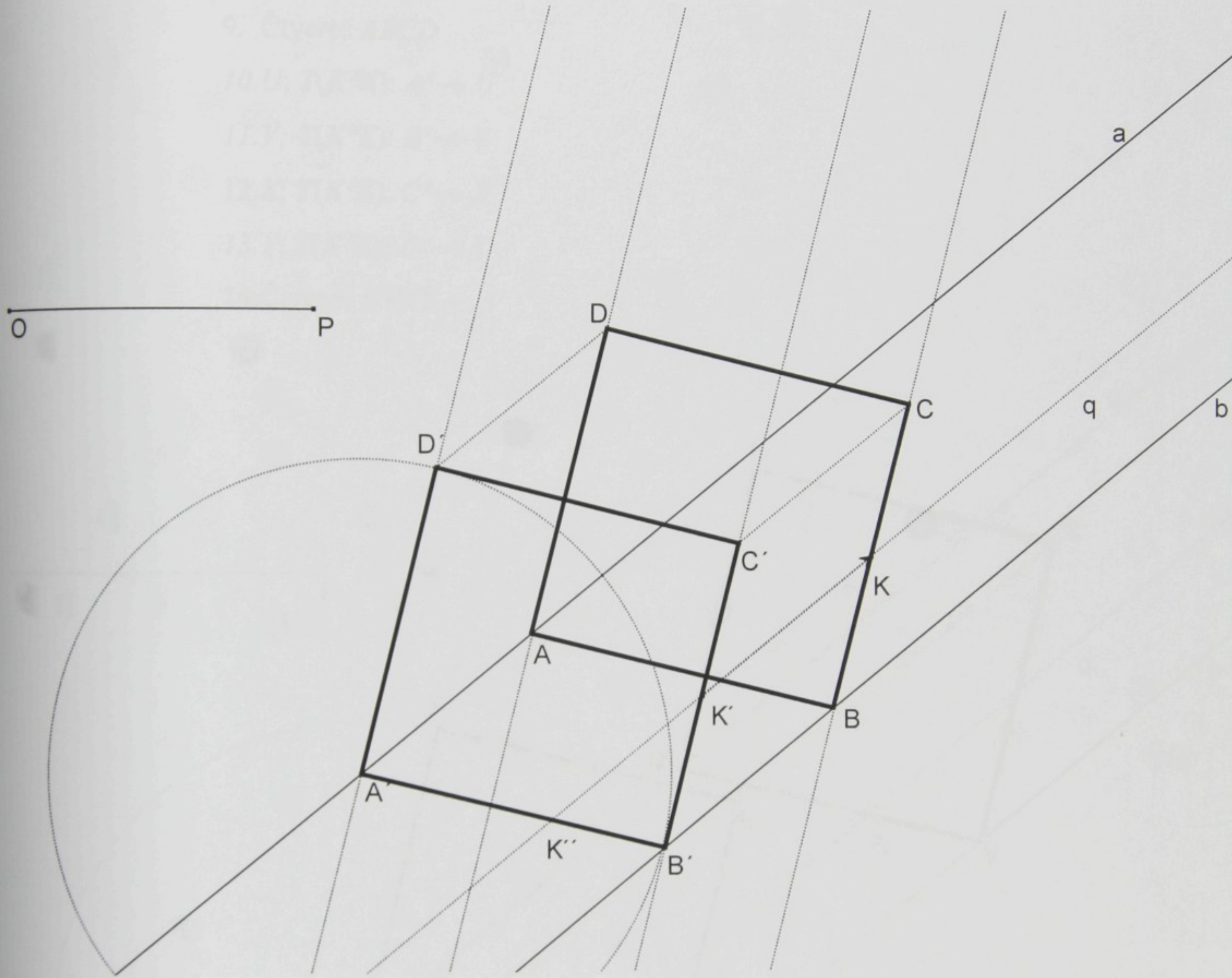
1. $a, b;\ a \parallel b;\ |ab| = 3{,}5$ cm
2. $K, K \in (a, b)$
3. $OP;\ |OP| = 4{,}5$ cm
4. $A'B';\ |A'B'| = 4{,}5$ cm; $A' \in a \wedge B' \in b$
5. Doplnění na čtverec $A'B'C'D'$
6. $q;\ q \parallel a \wedge K \in q$
7. $K';\ K' \in q \cap A'B'$
8. $K'';\ K'' \in q \cap A'B'$
9. $A;\ \boldsymbol{T}(\boldsymbol{K'K}):\ A' \to A$

10. B; $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{K''K})$: $B' \to B$

11. C; $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{K''K})$: $C' \to C$

12. D; $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{K''K})$: $D' \to D$

13. Čtverec $ABCD$



Obr. 78

Druhé řešení:

<u>Zápis konstrukce:</u>

1. a, b; $a \parallel b$; $|ab| = 3{,}5$ cm
2. K, $K \in (a, b)$
3. OP; $|OP| = 4{,}5$ cm

4. $A'B'$; $|A'B'| = 4,5$ cm; $A' \in a \wedge B' \in b$

5. Doplnění na čtverec $A'B'C'D'$

6. q; $q \parallel a \wedge K \in q$

7. K'; $K' \in q \cap A'B'$

8. K''; $K'' \in q \cap A'B'$

9. Čtverec $ABCD$

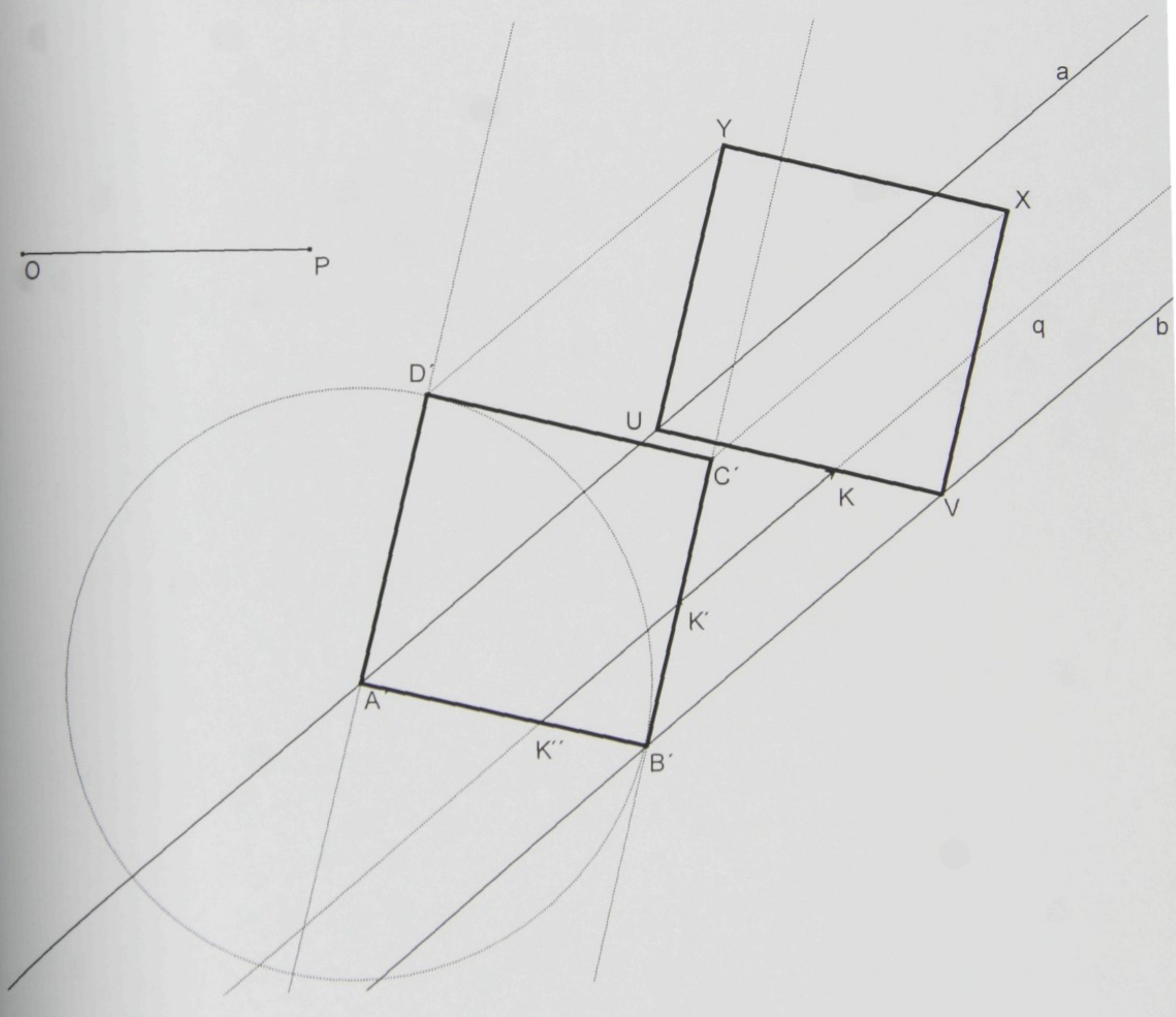
10. U; $T(K''K)$: $A' \to U$

11. V; $T(K''K)$: $B' \to V$

12. X; $T(K''K)$: $C' \to X$

13. Y; $T(K''K)$: $D' \to Y$

14. Čtverec $UVXY$



Obr. 79

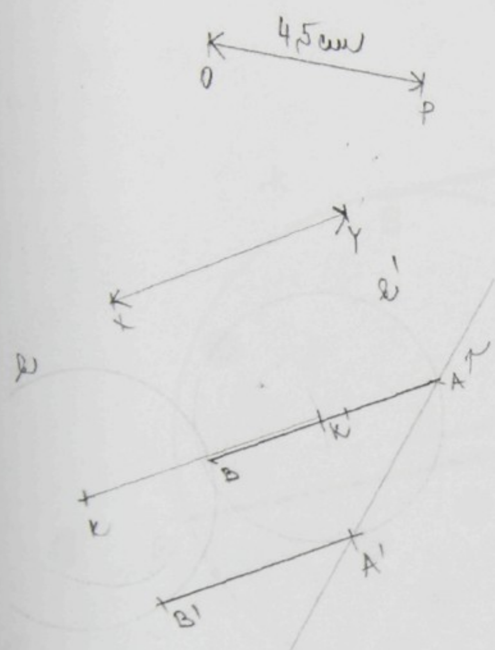
Diskuse:

Protože námi sestrojený pomocný čtverec $A'B'C'D'$ protnul přímku q, na které leží bod K a která je rovnoběžná s přímkou a, ve dvou bodech K', K'', má úloha ve zvolené polorovině dvě řešení, která splňují dané vlastnosti a tím je čtverec $ABCD$ (obr. 78) a čtverec $UVXY$ (obr. 79). Pro přehlednost je uvádím ve dvou obrázcích.

Příklad 7

Je dána přímka p, kružnice $k(K, r = 3\ \text{cm})$ tak, že $p \cap k = \emptyset$ a úsečka XY o velikosti 7 cm. Sestrojte úsečku AB, která je rovnoběžná s úsečkou XY a velikosti těchto úseček se rovnají a zároveň musí platit $A \in p \wedge B \in k$.

Řešení:

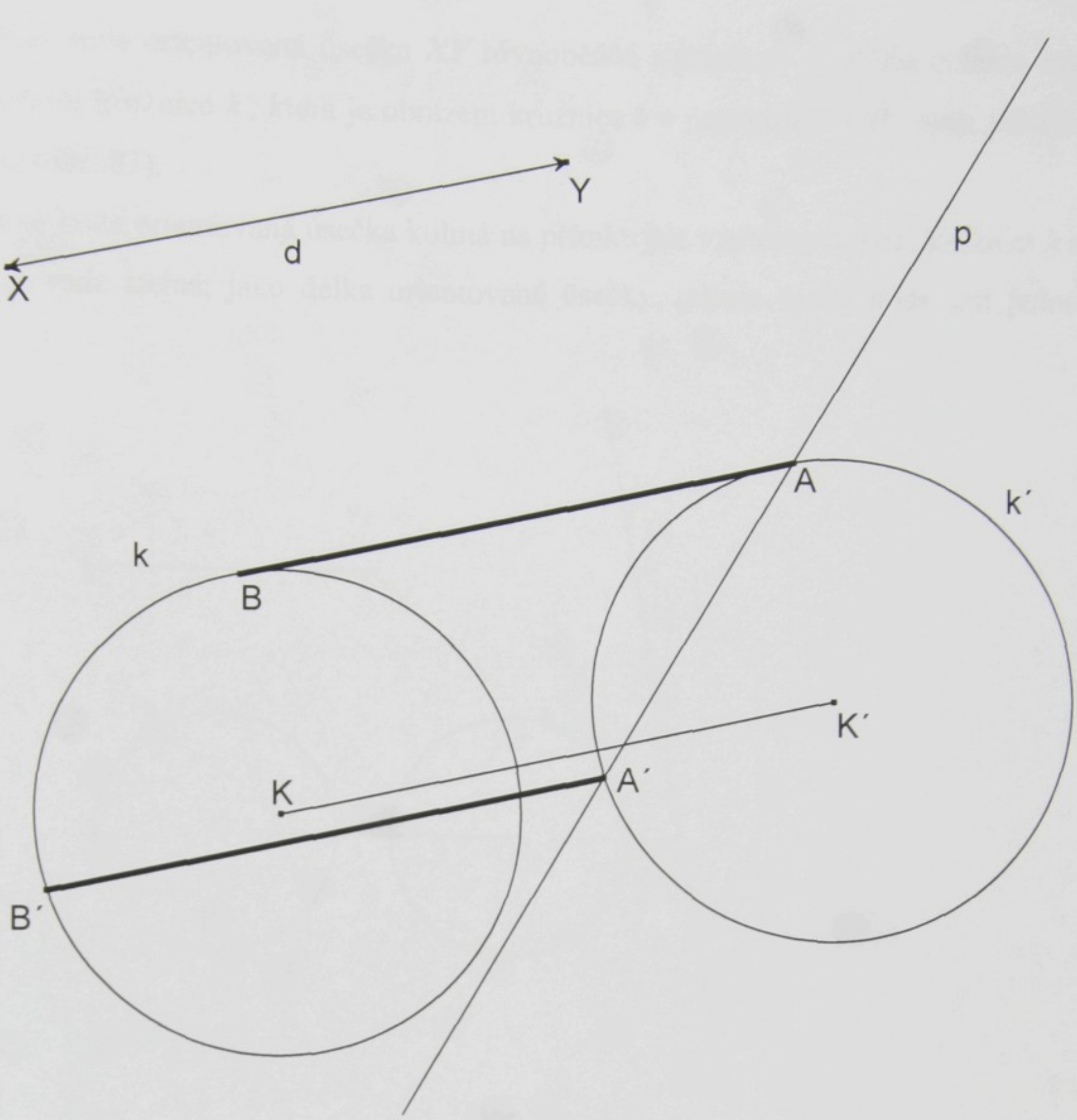


Obr. 80

Jelikož je bod A obrazem bodu B, musí ležet na obrazu kružnice k v posunutí $T(XY)$ a ze zadaní na přímce p. Obraz kružnice k' nám přímku p protne ve dvou bodech, které pojmenujeme A, A'. Bod B je obraze m bodu A v posunutí $T(YX)$. Bod B'je obrazme bodu A'v posunutí $T(YX)$.

Zápis konstrukce:

1. k; $k(K; r = 3\ \text{cm})$
2. p; $p \cap k = \emptyset$
3. XY; $|XY| = d = 7\ \text{cm}$
4. k'; $T(XY)$: $k \rightarrow k'$
5. A; $A \in p \cap k'$
6. A'; $A' \in p \cap k'$
7. B; $T(YX)$: $A \rightarrow B$
8. Úsečka AB
9. B': $T(YX)$: $A' \rightarrow B'$
10. Úsečka $A'B'$



Obr. 81

Diskuse:

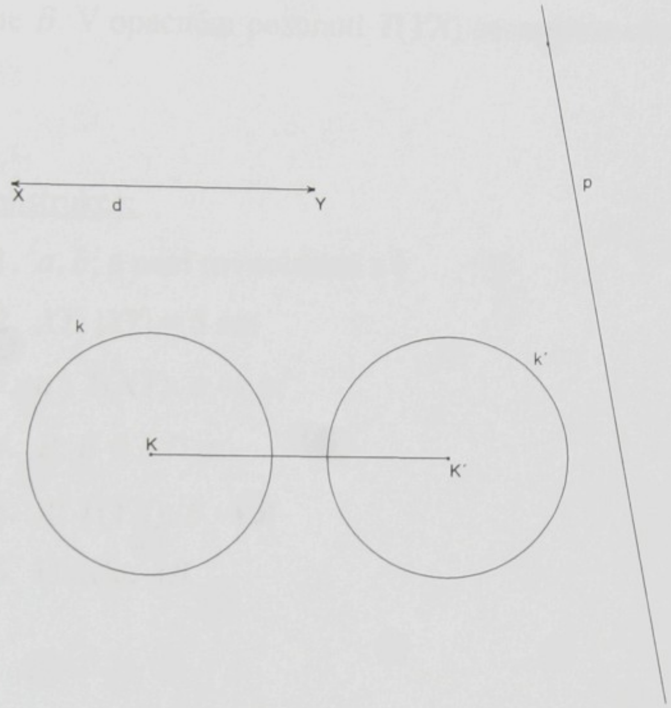
Ač tato úloha vypadá velmi jednoduše, může nastat situace, kdy bude mít jedno, dvě nebo žádné řešení. Záleží na poloze orientované úsečky ***OP*** vzhledem ke kružnici *k* a na její délce vzhledem k umístění kružnice *k* a přímky *p*.

Aby úloha měla řešení, musí být vzdálenost mezi kružnici *k* a přímkou *p* menší než je délka zadané úsečky a přímka *p* nesmí být rovnoběžná s orientovanou úsečkou ***OP***, potom bude mít úloha dvě řešení. V našem případě jsou řešením dvě úsečky *AB*, *A'B'*, protože nám kružnice *k'* protnula přímku *p* ve dvou bodech(obr. 81).

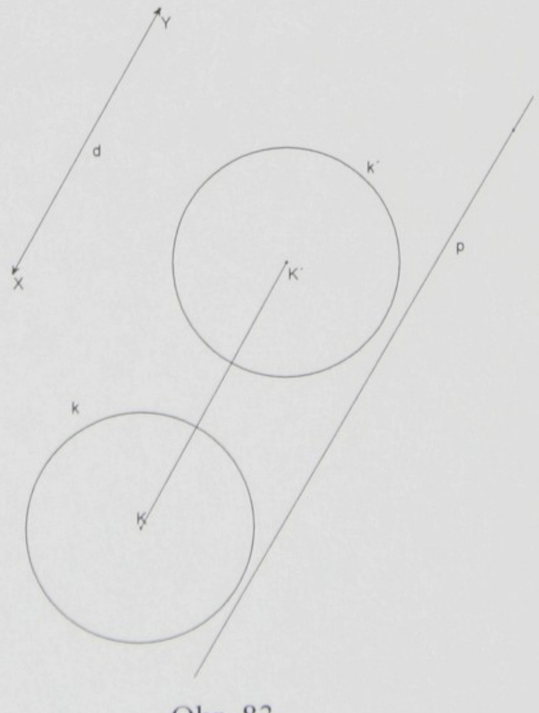
Pokud ovšem vzdálenost mezi kružnicí *k* a přímkou *p* bude větší než je délka orientované úsečky, úloha nebude mít řešení (obr. 82)

Pokud bude orientovaná úsečka ***XY*** rovnoběžná s přímkou p, úloha nebude mít řešení, protože kružnice k', která je obrazem kružnice k v posunutí $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{OP})$, nám přímku p neprotne (obr. 83).

Pokud bude orientovaná úsečka kolmá na přímku p a vzdálenost mezi kružnicí k a přímkou p bude stejná, jako délka orientované úsečky, potom úloha bude mít jedno řešení.



Obr. 82



Obr. 83

Příklad 8

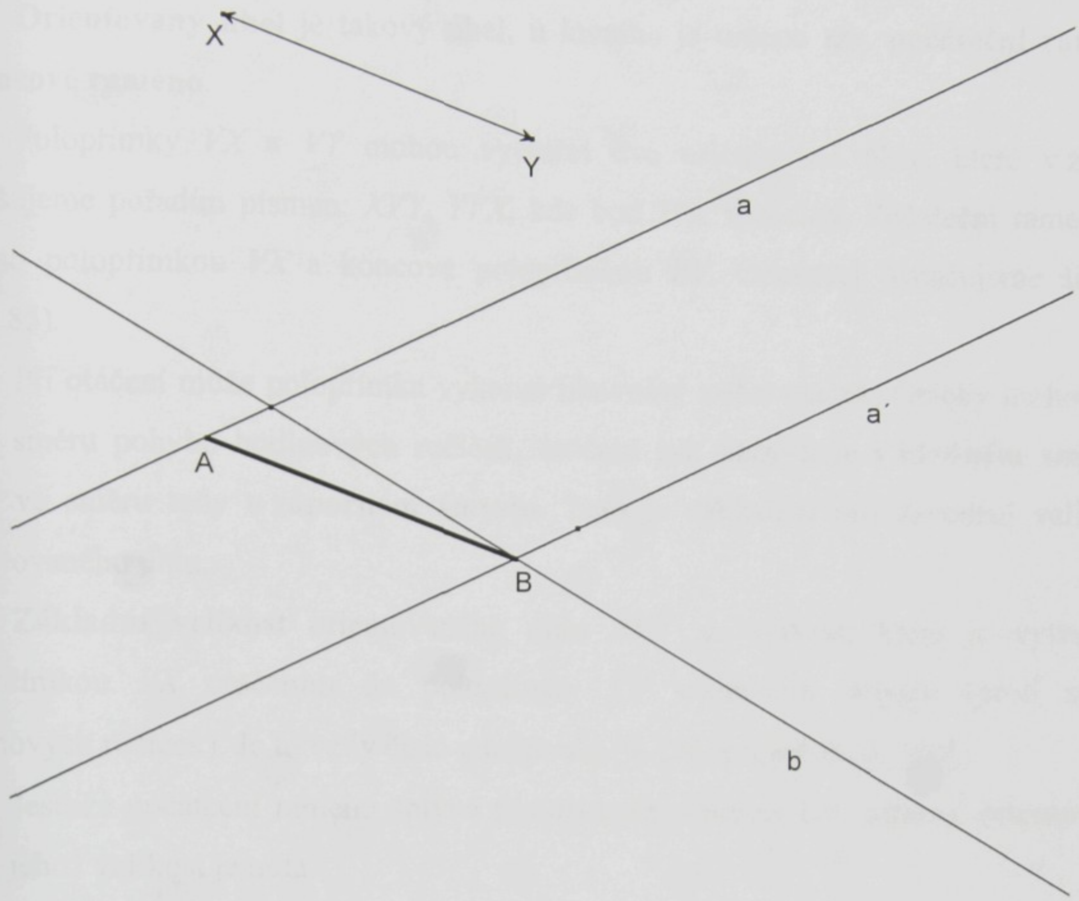
Jsou dány různoběžky a, b a úsečka $|XY| = 5$ cm. Sestrojte úsečku AB, která je shodná a rovnoběžná s úsečkou XY a bod $A \in a$, $B \in b$.

Řešení:

Sestrojíme obraz přímky a v posunutí $\boldsymbol{T}(XY)$. Bod, který vznikl průnikem přímky a', b, označíme B. V opačném posunutí $\boldsymbol{T}(YX)$ sestrojíme obraz bodu B a označíme ho A.

<u>Zápis konstrukce:</u>

1. a, b; a není rovnoběžná s b
2. XY; $|XY| = 5$ cm
3. a'; $\boldsymbol{T}(XY)$: $a \rightarrow a'$
4. B; $B \in b \cap a'$
5. A; $\boldsymbol{T}(YX)$: $B \rightarrow A$
6. Úsečka AB



Obr. 84

Diskuse:

Úloha má v dané rovině jedno řešení, které záleží na volbě orientované úsečky *XY*. Pokud by byla orientovaná úsečka *XY* rovnoběžná s různoběžkou *a*, musíme posunout různoběžku *b*. V našem případě bylo jedno, zda posunu různoběžku *a* či *b*.

1.5 Otočení

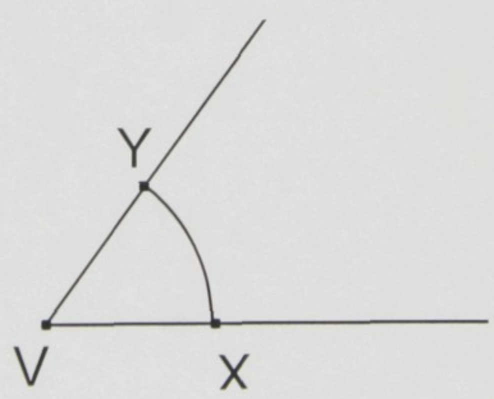
Orientovaný úhel je takový úhel, u kterého je určeno tzv. **počáteční rameno** a **koncové rameno**.

Polopřímky VX a VY mohou vytvářet dva orientované úhly, které v zápise rozlišujeme pořadím písmen: XVY, YVX, kde bod V je společný. Počáteční rameno je určeno polopřímkou VX a koncové polopřímkou VY. Orientaci označujeme šipkou (obr. 85).

Při otáčení může polopřímka vykonat libovolný počet otáček. Otáčky mohou být proti směru pohybu hodinových ručiček, otočení pak nazýváme **v kladném smyslu**, nebo ve směru tedy **v záporném smyslu**. Toto je základem pro zavedení velikosti orientovaného úhlu.

Základní velikost orientovaného úhlu XVY je velikost, která je vytvořena polopřímkou VX otočením do polopřímky VY v kladném smyslu (proti směru hodinových ručiček). Je to vždy číslo z intervalu $\langle 0, 2\pi)$, případně $\langle 0, 360°)$.

Jestliže počáteční rameno splývá s koncovým, vznikne tzv. **nulový orientovaný úhel**, jehož velikost je nula.



Obr. 85

Je dán orientovaný úhel φ a bod V. **Otočení** neboli **rotace** (obr. 85) je shodné zobrazení $\boldsymbol{R}(V,\varphi)$, které přiřazuje:

1. každému bodu $X \neq V$ bod X' tak, že $|XV'| = |XV|$ a orientovaný úhel XVX' má velikost φ,
2. bodu V bod $V' = V$, tj. samodružný bod.

Bod V se nazývá **střed otočení**, orientovaný úhel φ **úhel otočení**.

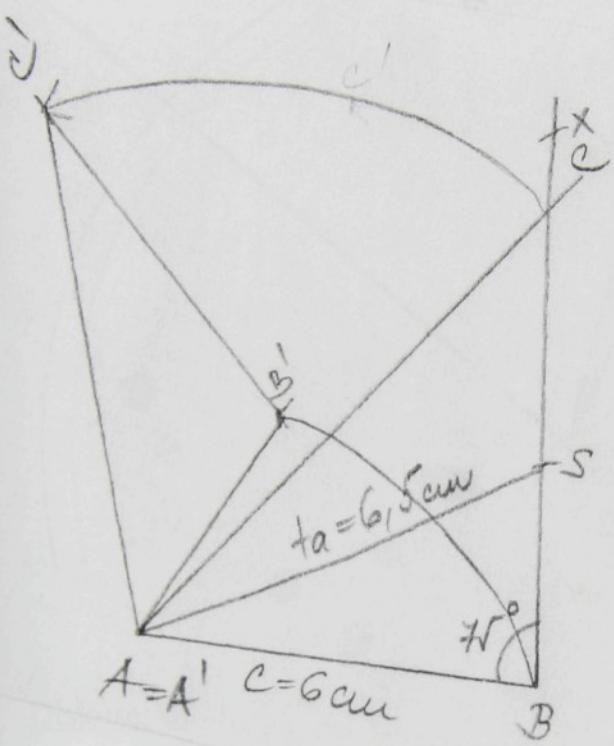
Vlastnosti $\boldsymbol{R}(V, \varphi)$:

- Otočení je přímá shodnost,
- otočení má jediný samodruhý bod; je jím střed otočení V,
- otočení o úhel $\varphi \neq 180°$ nemá invariantní přímky,
- otočení o úhel $\varphi \neq 180°$ každé přímce p přiřadí přímku p' s danou přímkou různoběžnou.

Příklad 1

Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dána strana $|AB| = 6$ cm, těžnice $t_a = 6{,}5$ cm a úhel $\beta = 75°$. V otočení $\boldsymbol{R}(A, 75°)$ sestrojte jeho obraz $A'B'C'$.

Řešení:



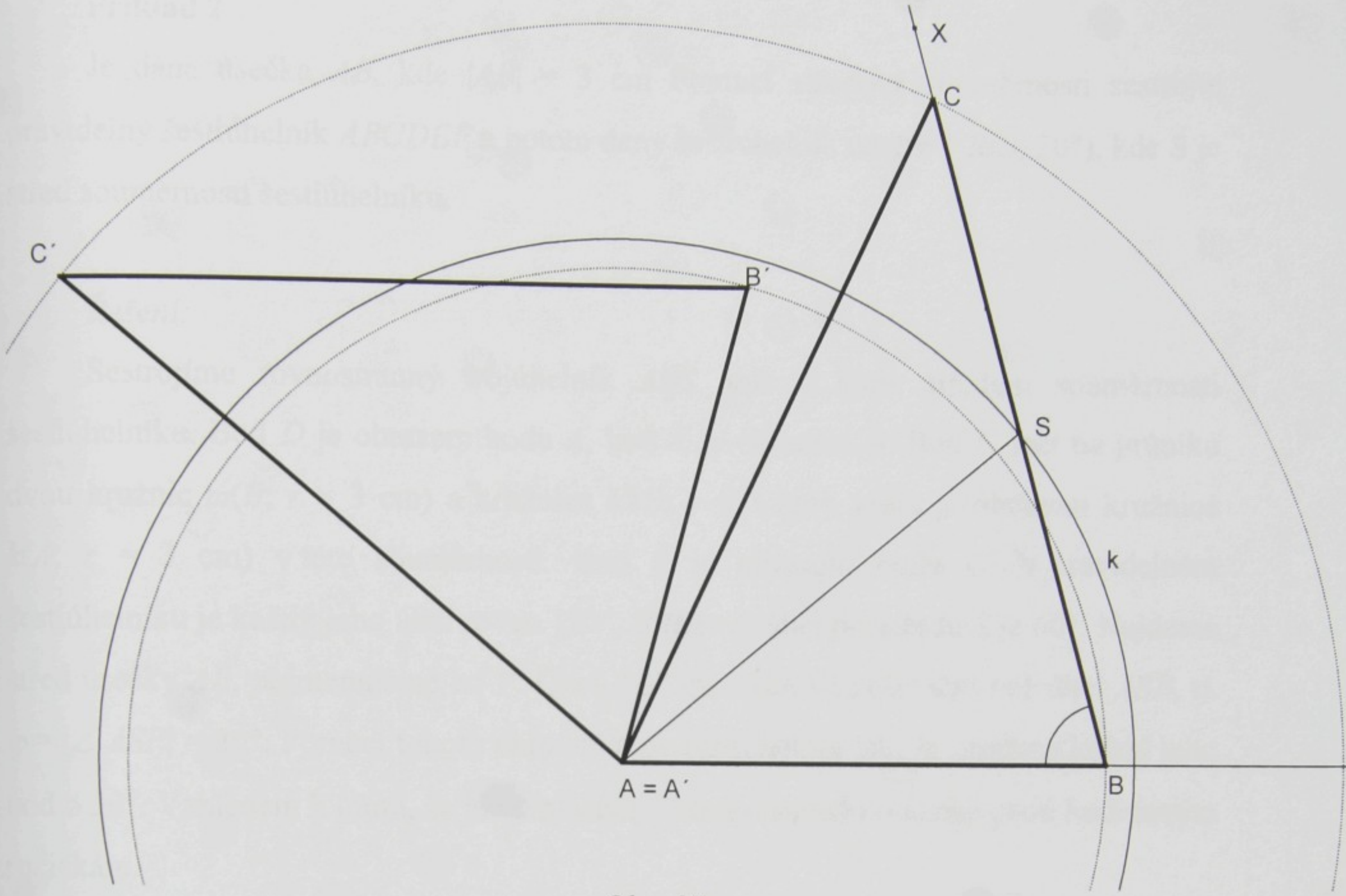
Známe vrcholy A, B. Bod S je středem strany BC a můžeme ho sestrojit jako průsečík kružnice $k(A;\ r = |t_a|)$ a polopřímky BX. Pro hledaný bod C platí, že leží na polopřímce BS a $|BS| = |SC|$.

Středem otočení je bod A, tedy $A = A'$, který je. samodružným bodem. Úhel otočení je $\varphi = 75°$.

Obr. 86

<u>Zápis konstrukce:</u>

1. AB; $|AB| = 6$ cm
2. $\angle ABX$; $|\angle ABX| = \beta = 75°$
3. k; $k(A;\ r = 6{,}5$ cm$)$
4. S; $S \in \rightarrow BX \cap k$
5. C; $\boldsymbol{S}(S)$: $B \rightarrow C$
6. $\Delta\, ABC$
7. A'; $A' = A$
8. C'; $\boldsymbol{R}(A;\ 75°)$: $C \rightarrow C'$
9. B'; $\boldsymbol{R}(A;\ 75°)$: $B \rightarrow B'$
10. $\Delta\, A'B'C'$



Obr. 87

Diskuse:

Úloha má v dané polorovině jedno řešení.

Příklad 2

Je dána úsečka AB, kde $|AB| = 3$ cm Pomocí středové souměrnosti sestrojte pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$ a potom daný šestiúhelník otočte v $\boldsymbol{R}(S; 30°)$, kde S je střed souměrnosti šestiúhelníku.

Řešení:

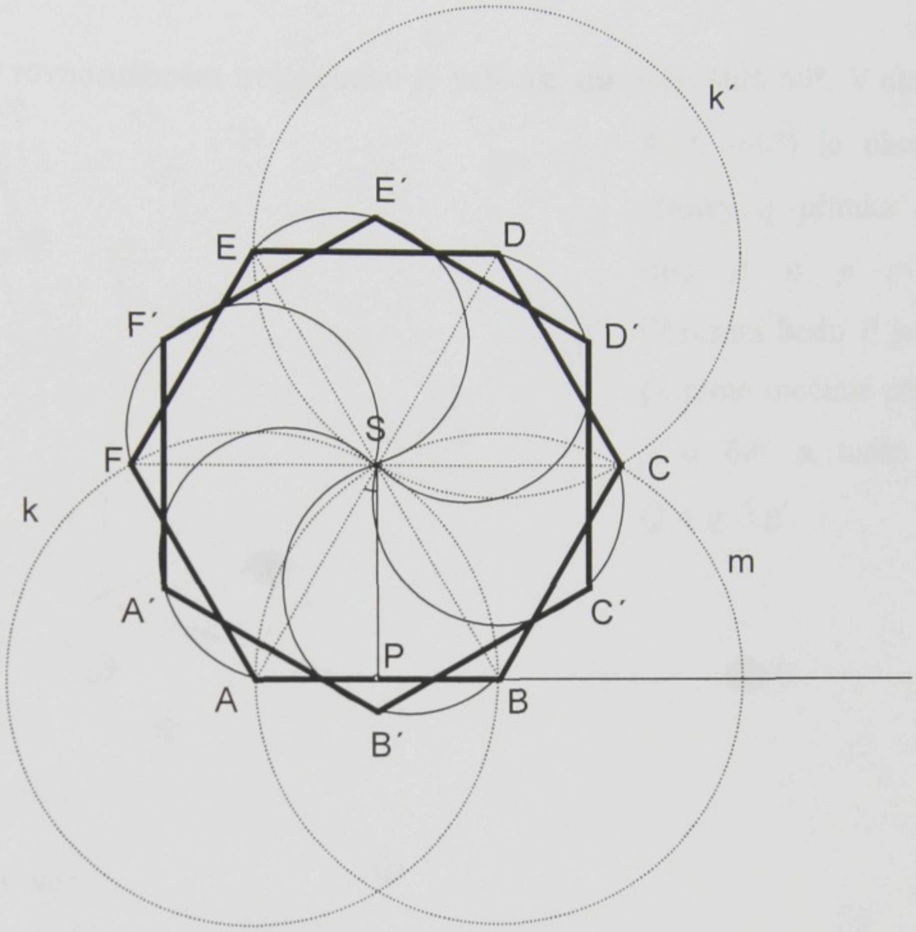
Sestrojíme rovnostranný trojúhelník ABS, kde S bude středem souměrnosti šestiúhelníku. Bod D je obrazem bodu A, bod E je obrazem B. Bod C leží na průniku dvou kružnic $m(B;\ r = 3$ cm) a kružnice $k'(D;\ r = 3$ cm), která je obrazem kružnice $k(A;\ r = 3$ cm) v této souměrnosti. Bod F je obrazem bodu C. V pravidelném šestiúhelníku je každý jeho úhel roven 120°. Středový úhel při středu S je 60°. Najdeme střed úsečky AB, pojmenujeme ho P. Úhel ASP má velikost poloviční než úhel ASB, tj. $\varphi = |\angle ASP| = 30°$. Pomocí tohoto úhlu otočíme šestiúhelník tak, že otočíme každý jeho bod o 30°. Vzhledem k tomu, že jde o otáčení v kladné smyslu otáčíme proti hodinovým ručičkám.

<u>Zápis konstrukce:</u>

1. $AB;\ |AB| = 3$ cm
2. $k;\ k(A;\ r = |AB|)$
3. $m;\ m(B;\ r = |AB|)$
4. $S;\ S \in k \cap m$
5. $D;\ \boldsymbol{S}(S): A \rightarrow D$
6. $E;\ \boldsymbol{S}(S): B \rightarrow E$
7. $k';\ \boldsymbol{S}(S): k \rightarrow k'$
8. $C;\ C \in m \cap k'$
9. $F;\ \boldsymbol{S}(S): C \rightarrow F$
10. Šestiúhelník $ABCDEF$
11. P; P je střed AB
12. $A';\ \boldsymbol{R}(S; 30°): A \rightarrow A'$
13. $B';\ \boldsymbol{R}(S; 30°): B \rightarrow B'$
14. $C';\ \boldsymbol{R}(S; 30°): C \rightarrow C'$
15. $D';\ \boldsymbol{R}(S; 30°): D \rightarrow D'$
16. $E';\ \boldsymbol{R}(S; 30°): E \rightarrow E'$

17. F'; $\boldsymbol{R}(S;\ 30°)$: $F \rightarrow F'$

18. Šestiúhelník $A'B'C'D'E'F'$



Obr. 88[6]

Diskuse:

Úloha má ve zvolené polorovině jedno řešení.

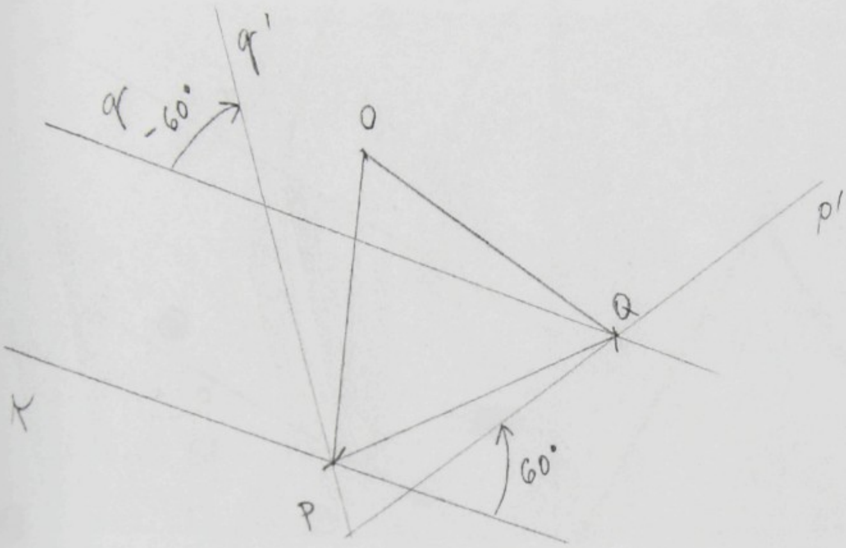
[6] Takové obrazce umí Cabri Geometry rýsovat bez použití otočení.

Příklad 3

Jsou dány dvě rovnoběžné přímky p, q a mino ně bod O. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník OPQ tak, aby jeho vrcholy P, Q ležely po řadě na přímkách p, q.

Řešení:

Víme, že v rovnostranném trojúhelníku je velikost vnitřních úhlů 60°. V otočení $\boldsymbol{R}(O, -60°)$ je obrazem přímky q přímka q'[7]. Bod $P \in p \cap q'$. Obrazem bodu P je bod Q, proto otočíme přímku p o 60° a tudíž bod $Q \in q \cap p'$.

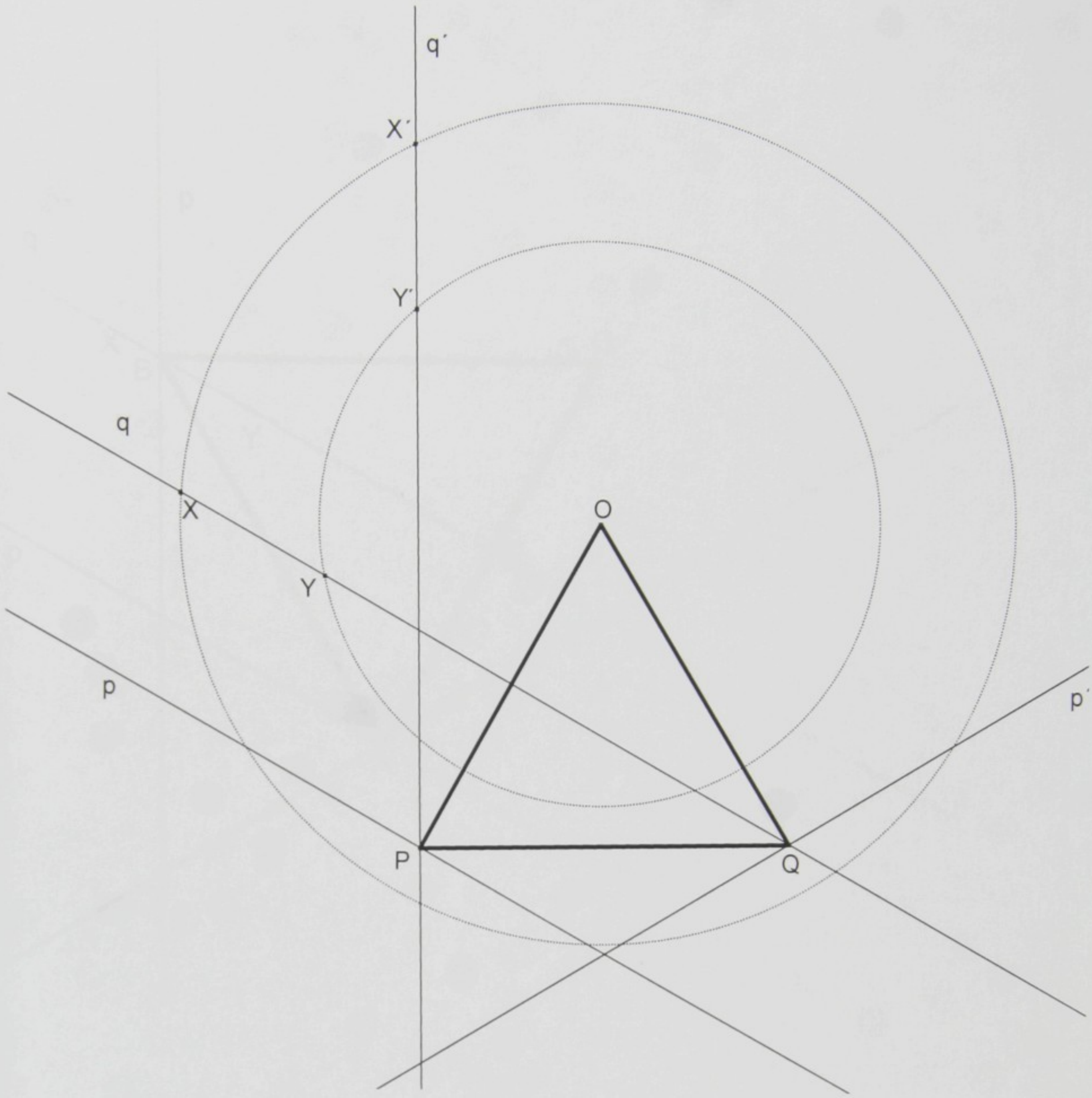


Obr. 89

<u>Zápis konstrukce:</u>

1. p, q, O
2. q'; $\boldsymbol{R}(O, -60°)$: $q \rightarrow q'$
3. P; $P \in p \cap q'$
4. p'; $\boldsymbol{R}(O, 60°)$: $p \rightarrow p'$
5. Q; $Q \in p' \cap q$
6. $\Delta\, OPQ$

[7] Program Cabri geometrie umí otočit přímku, aniž by byl nějaký bod na této přímce. V matematice otáčíme přímku tak, že otočíme některé dva body, které leží na dané přímce. V řešení ukazuji způsob otáčení pomocí dvou bodů na přímce q. Přímku p již otáčím pomocí Cabri geometrie.

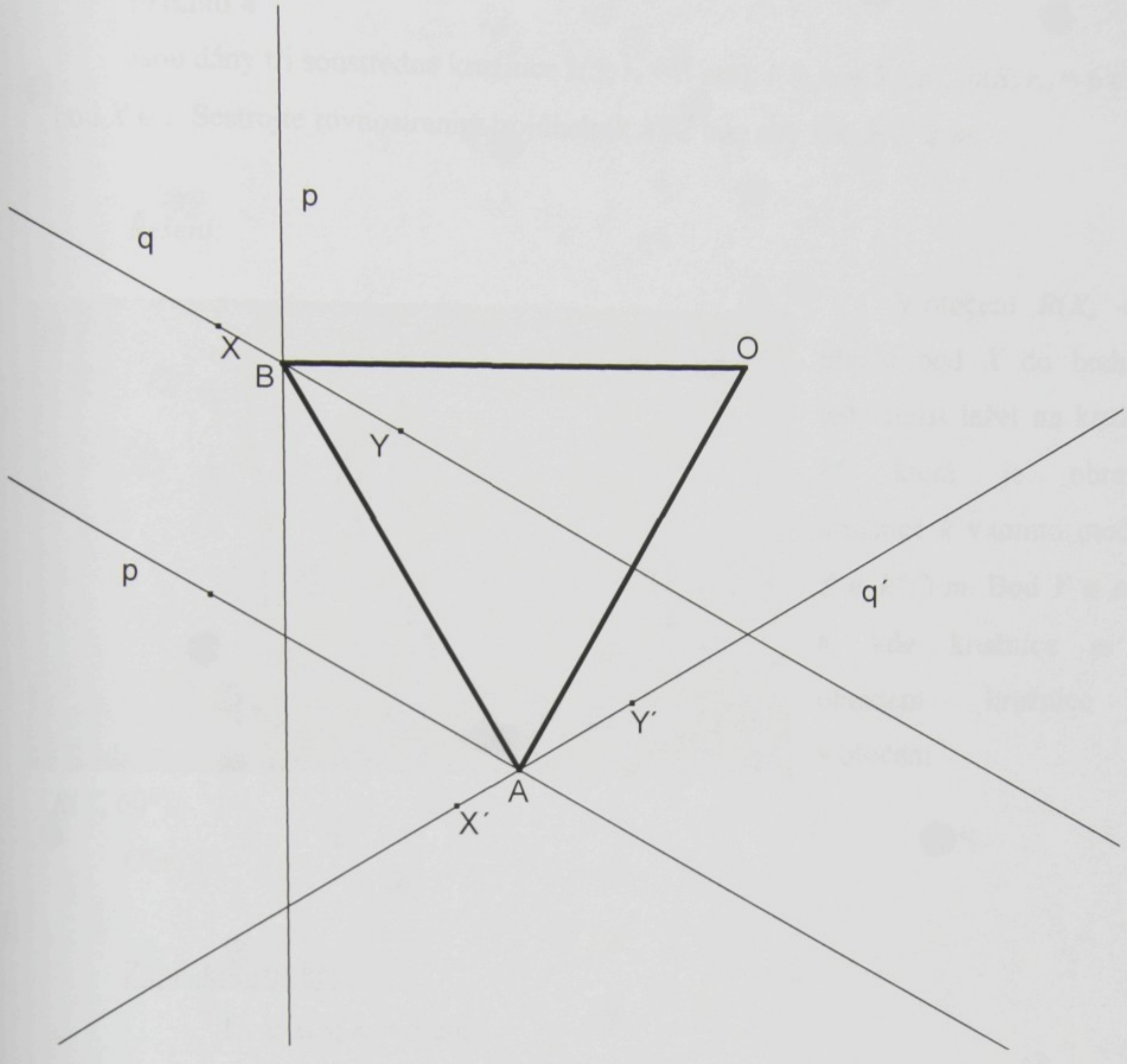


Obr. 90

Druhé řešení:

Zápis konstrukce:

1. p, q, O
2. q'; $\boldsymbol{R}(O, 60°)$: $q \rightarrow q'$
3. A; $A \in p \cap q'$
4. p'; $\boldsymbol{R}(O, -60°)$: $p \rightarrow p'$
5. B; $B \in p' \cap q$
6. $\Delta\, ABO$



Obr. 91

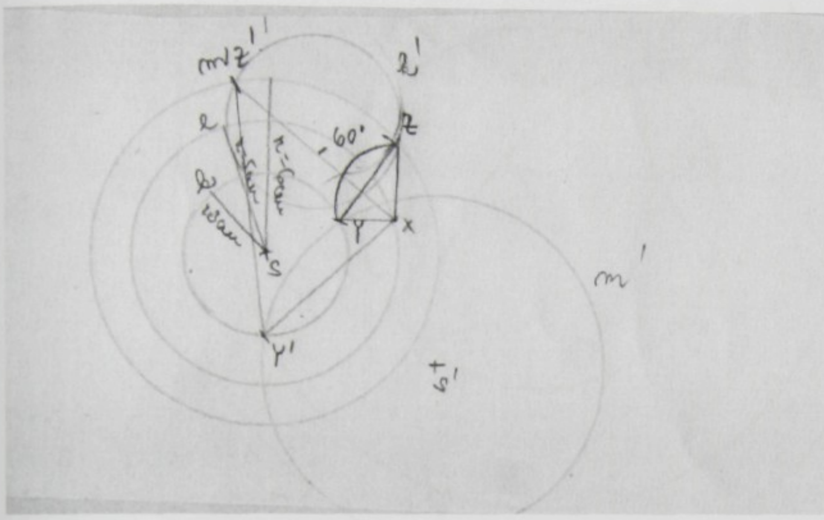
Diskuse:

Pro přehlednost uvádím řešení ve dvou obrázcích. Prvním řešením je trojúhelník *OPQ* (obr.) a druhým je trojúhelník *ABO* (obr. 63), kde $A \in p$, $B \in q$, protože přímku *p* lze otočit kolem bodu *O* také o -60. Úloha má tedy dvě řešení.

Příklad 4

Jsou dány tři soustředné kružnice $k(S;\ r_k = 3\ \text{cm})$, $l(S;\ r_l = 5\ \text{cm})$, $m(S;\ r_m = 6\ \text{cm})$ a bod $X \in l$. Sestrojte rovnostranný trojúhelník XYZ tak, aby $Y \in k$, $Z \in m$.

Řešení:

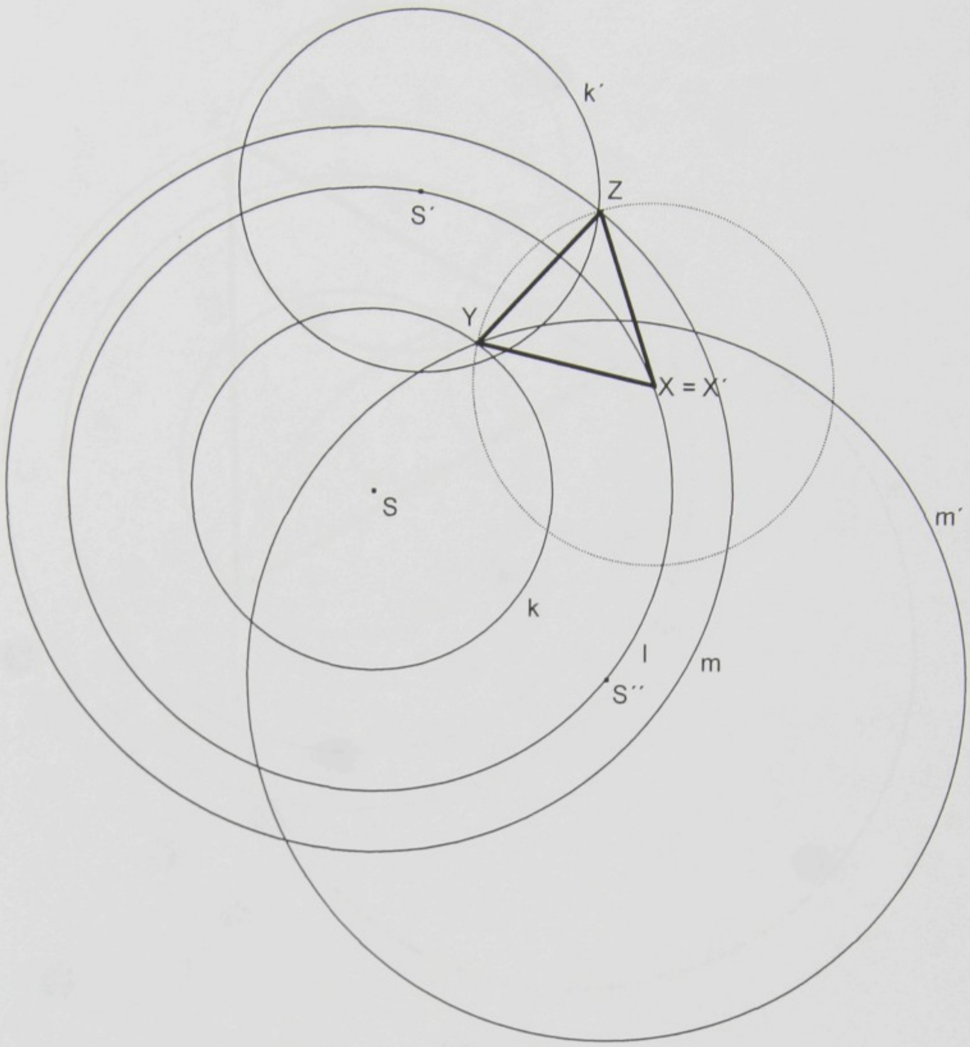


V otočení $\boldsymbol{R}(X,\ -60°)$ přejde bod X do bodu Z, tedy musí ležet na kružnici k', která je obrazem kružnice k v tomto otočení. $Z \in k' \cap m$. Bod $Y \in m' \cap k$, kde kružnice m' je obrazem kružnice m v otočení $\boldsymbol{R}(X,\ 60°)$.

Obr. 92

<u>Zápis konstrukce:</u>

1. k; $k(S;\ r_k = 3\ \text{cm})$
2. l; $l(S;\ r_l = 5\ \text{cm})$
3. m; $m(S;\ r_m = 6\ \text{cm})$
4. X; $X \in l$
5. k'; $\boldsymbol{R}(X,\ -60°)$: $k \rightarrow k'$
6. Z; $Z \in k' \cap m$
7. m'; $\boldsymbol{R}(X,\ 60°)$: $m \rightarrow m'$
8. Y; $Y \in m' \in k$
9. $\Delta\, XYZ$

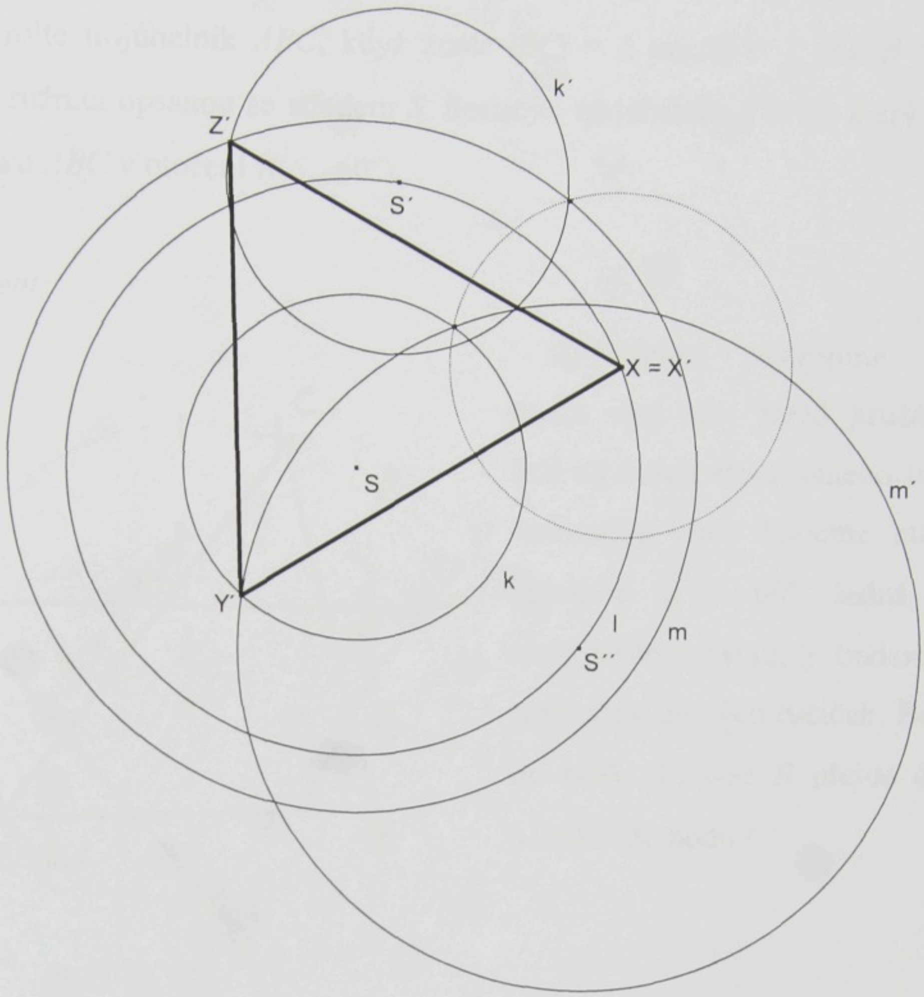


Obr. 93

Druhé řešení:

Zápis konstrukce:

1. k; $k(S; r_k = 3$ cm)
2. l; $l(S; r_l = 5$ cm)
3. m; $m(S; r_m = 6$ cm)
4. X; $X \in l$
5. k'; $\boldsymbol{R}(X, -60°)$: $k \rightarrow k'$
6. Z'; $Z' \in k' \cap m$
7. m'; $\boldsymbol{R}(X, 60°)$: $m \rightarrow m'$
8. Y'; $Y' \in m' \in k$
9. $\Delta\, XY'Z'$



Obr. 94

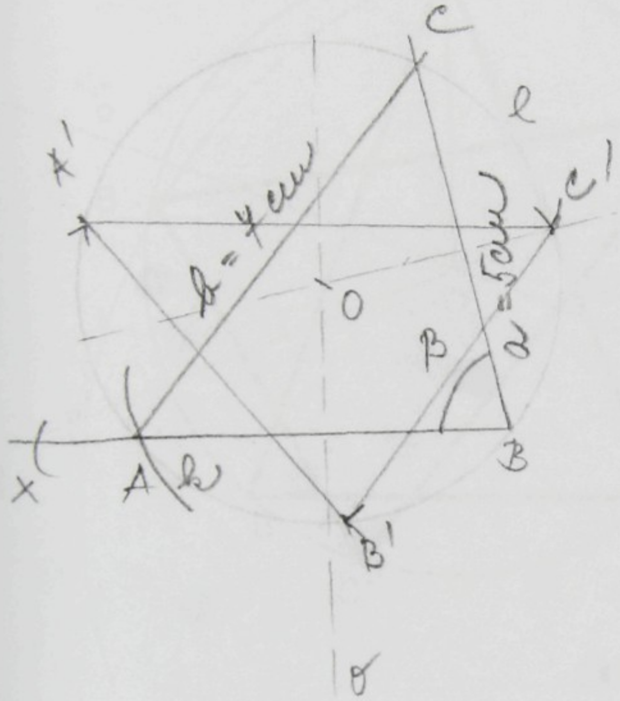
Diskuse:

Protože kružnice *m´* protnula kružnici *k* ve dvou bodech *Y*, *Y´*, které splňují požadované vlastnosti, má úloha dvě řešení a tím je trojúhelník *XYZ* (obr. 93) *X´Y´Z´* (obr. 94).

Příklad 5

Sestrojte trojúhelník ABC, když znáte $|BC| = 5$ cm, $b = 7$ cm, $\beta = 70°$. Dále sestrojte kružnici opsanou se středem S. Sestrojte trojúhelník $A'B'C'$, který je obrazem trojúhelníku ABC v otočení $\boldsymbol{R}(S, -60°)$.

Řešení:



Obr. 95

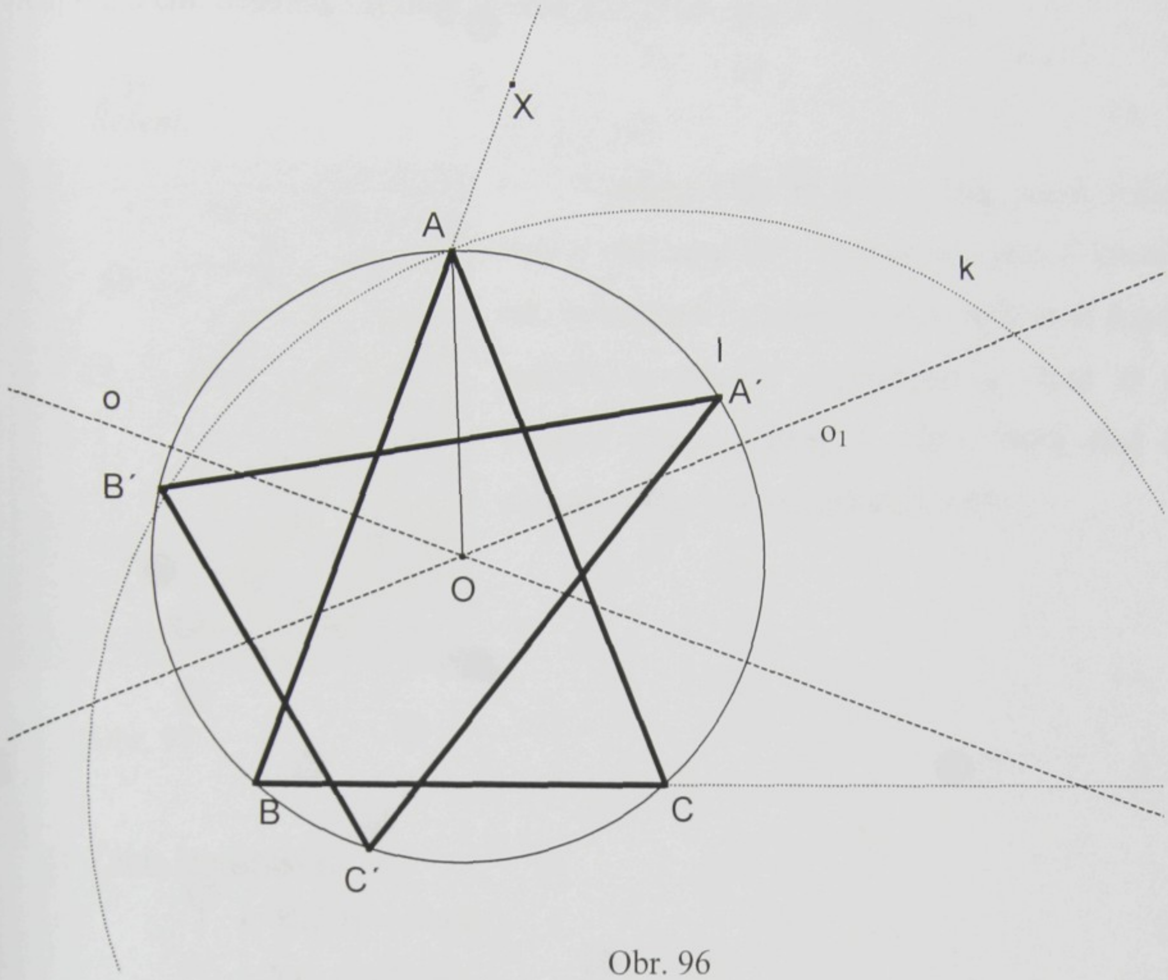
Nejprve sestrojíme trojúhelník podle věty *sus*. Střed kružnice opsané leží na osách stran daného trojúhelníku. Jednotlivé body budeme otáčet kolem středu a to o -60°. Jedná se otočení v záporném smyslu, tj. budeme otáčet po směru hodinových ručiček. Bod A přejde do bodu A', bod B přejde do bodu B' a bod C do bodu C'.

Zápis konstrukce:

1. BC; $|BC| = a = 5$ cm
2. $\angle CBX$; $|\angle CBX| = \beta = 70°$
3. k; $k(C; r_k = 7$ cm)
4. A; $A \in \rightarrow BX \cap k$
5. ΔABC
6. o; o je osa úsečky AB
7. o_l; o_l je osa úsečky BC
8. O; $O \in o \cap o_l$
9. l; $l(O, r_l = |OA|)$
10. A'; $\boldsymbol{R}(O, -60°)$: $A \rightarrow A'$
11. B'; $\boldsymbol{R}(O, -60°)$: $B \rightarrow B'$

12. C'; $\boldsymbol{R}(O, -60°)$: $C \rightarrow C'$

13. $\Delta\, A'B'C'$



Obr. 96

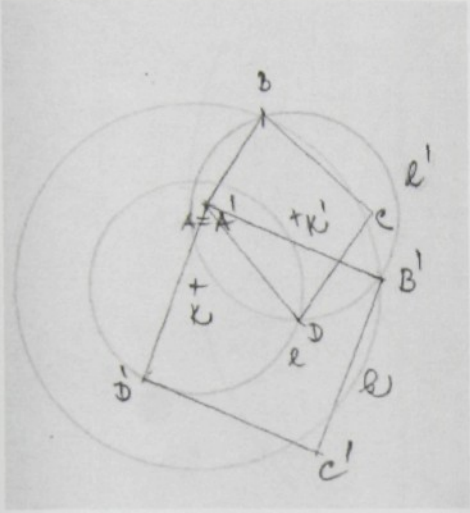
<u>Diskuse:</u>

Úloha má ve zvolené polorovině jedno řešení a tím je trojúhelník $A'B'C'$.

Příklad 6

Jsou dány dvě soustředné kružnice $k(K;\ r_k = 5\text{cm})$, $l(K;\ r_l = 3\text{ cm})$ a bod A, kde $|KA| = 2{,}5$ cm. Sestrojte všechny čtverce $ABCD$ tak, aby $B \in k \wedge D \in l$.

Řešení:

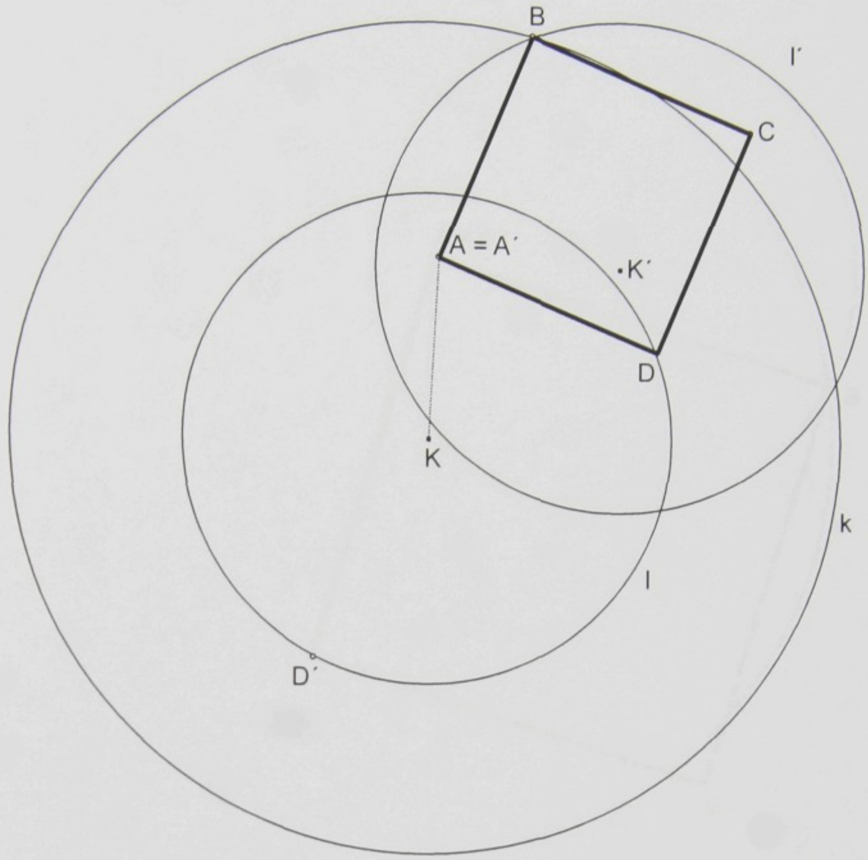


Obr. 97

Všechny úhly ve čtverci jsou pravé, jedná se tedy o otočení o 90°. Sestrojíme obraz l' kružnici l tak, že kružnici l otočíme v $\boldsymbol{R}(A, 90°)$. Bod B leží na průniku kružnice l' a kružnici k. Bod D nám vznikne otočením bodu B v $\boldsymbol{R}(A, -90°)$. Bod C je obrazem bodu A v otočení $\boldsymbol{R}(B, -90°)$.

Zápis konstrukce:

1. k; $k(K;\ r_k = 5\text{ cm})$
2. l; $l(K;\ r_l = 3\text{ cm})$
3. A; $|AK| = 2{,}5$ cm
4. l'; $\boldsymbol{R}(A, 90°)$: $l \rightarrow l'$
5. B; $B \in k \cap l'$
6. D; $\boldsymbol{R}(A, -90°)$: $B \rightarrow D$
7. C; $\boldsymbol{R}(B, -90°)$: $A \rightarrow C$
8. Čtverec $ABCD$

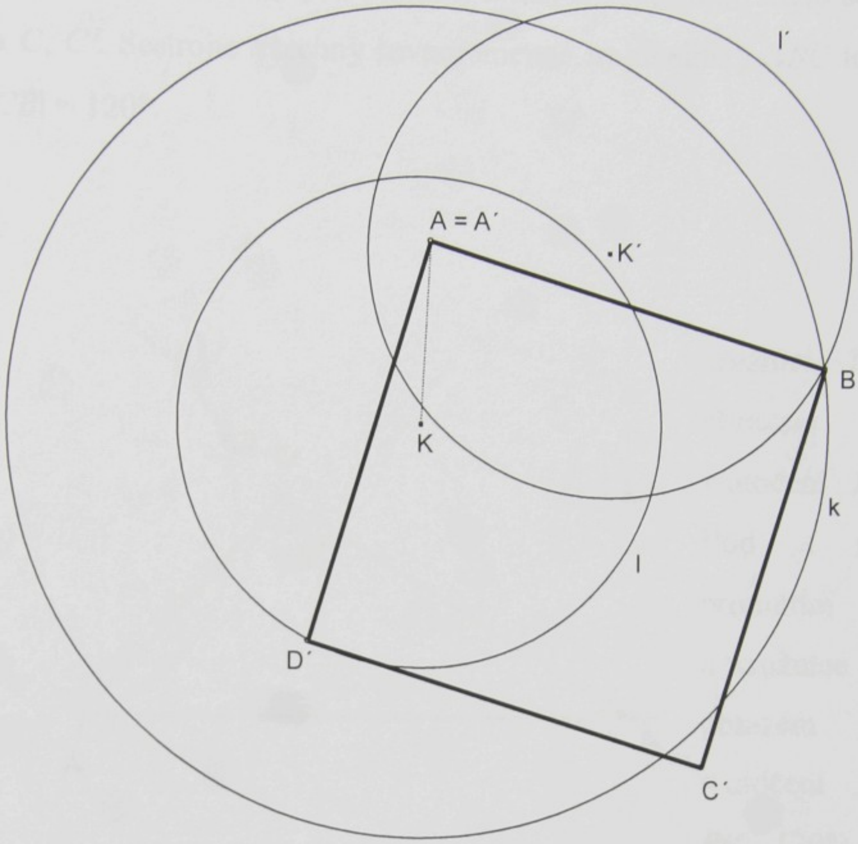


Obr. 98

Druhé řešení:

Zápis konstrukce:

1. k; $k(K; r_k = 5$ cm)
2. l; $l(K; r_l = 3$ cm)
3. A; $|AK| = 2{,}5$ cm
4. l'; $\boldsymbol{R}(A, 90°)$: $l \to l'$
5. B'; $B' \in k \cap l'$
6. D'; $\boldsymbol{R}(A, -90°)$: $B' \to D'$
7. C'; $\boldsymbol{R}(B', -90°)$: $A \to C'$
8. Čtverec $A'B'C'D'$



Obr. 99

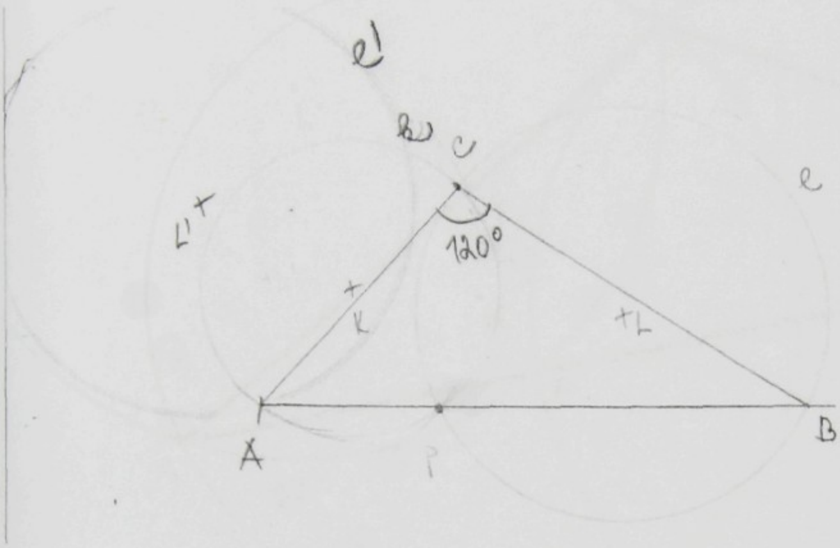
Diskuse:

Úloha má v rovině dvě řešení. Je to čtverec *ABCD* (obr. 98) a čtverec *A′B′C′D′* (obr. 99).

Příklad 7

Jsou dány dvě kružnice $k(K;\ r_k = 4$ cm) a $l(L;\ r_l = 4{,}5$ cm), které se protínají ve dvou bodech C, C'. Sestrojte všechny rovnoramenné trojúhelníky ABC tak, že $A \in k$, $B \in l$ a $|\angle ACB| = 120°$.

Řešení:

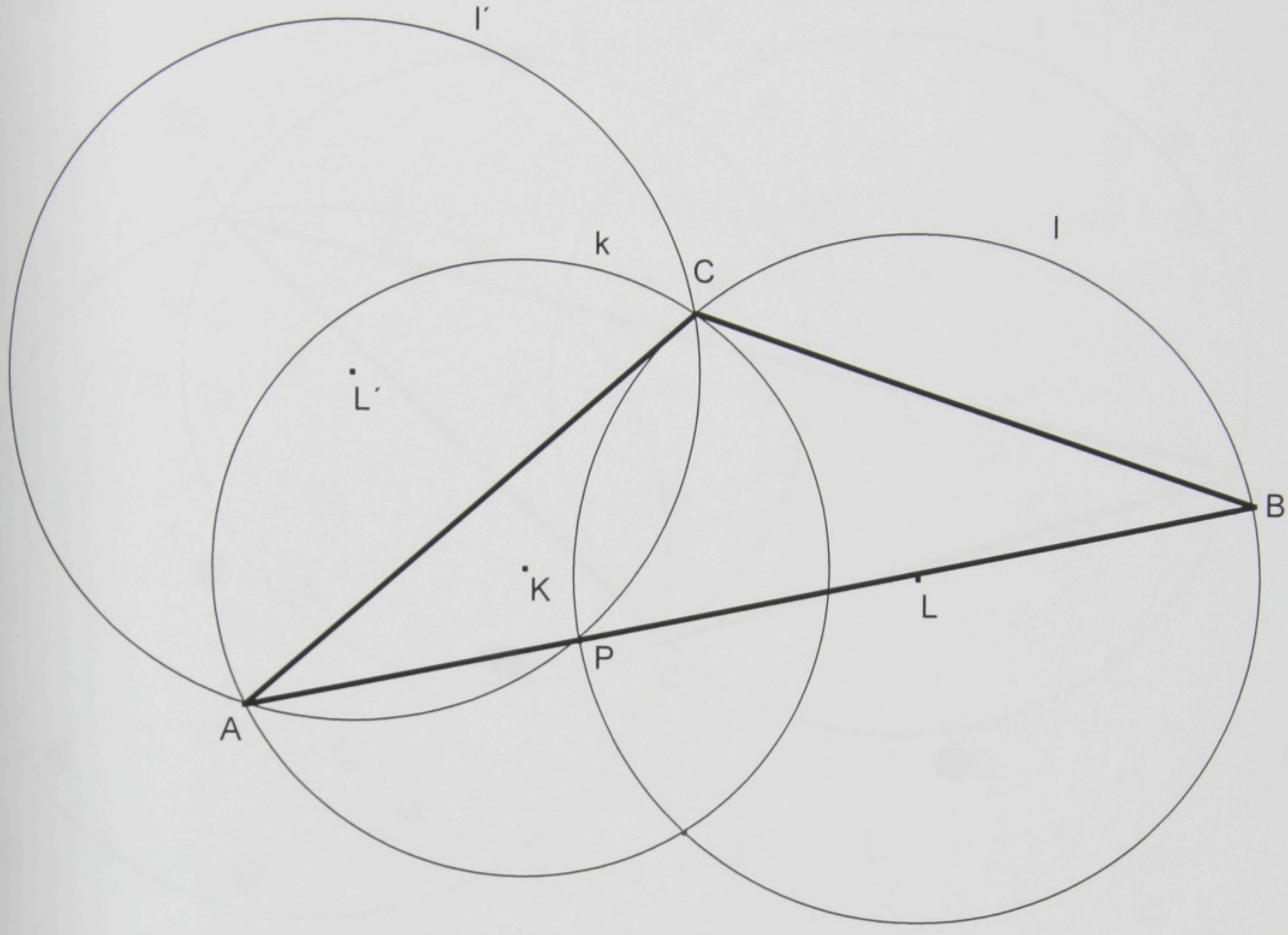


Obr. 100

Sestrojíme kružnici l', která je obrazem kružnice l v otočení $\boldsymbol{R}(C,\ -120°)$. Bod A nám vznikl protnutím kružnice l' a kružnice k. Bod B je obrazem bodu A v otočení $\boldsymbol{R}(C,\ 120°)$.

<u>Zápis konstrukce:</u>

1. k; $k(K;\ r_k = 4$ cm)
2. l; $l(L;\ r_l = 4{,}5$ cm)
3. C, $C \in k \cap l$
4. l'; $\boldsymbol{R}(C, -120°)$: $l \rightarrow l'$
5. A; $A \in k \cap l'$
6. B; $\boldsymbol{R}(C, 120°)$: $A \rightarrow B$
7. $\Delta\, ABC$

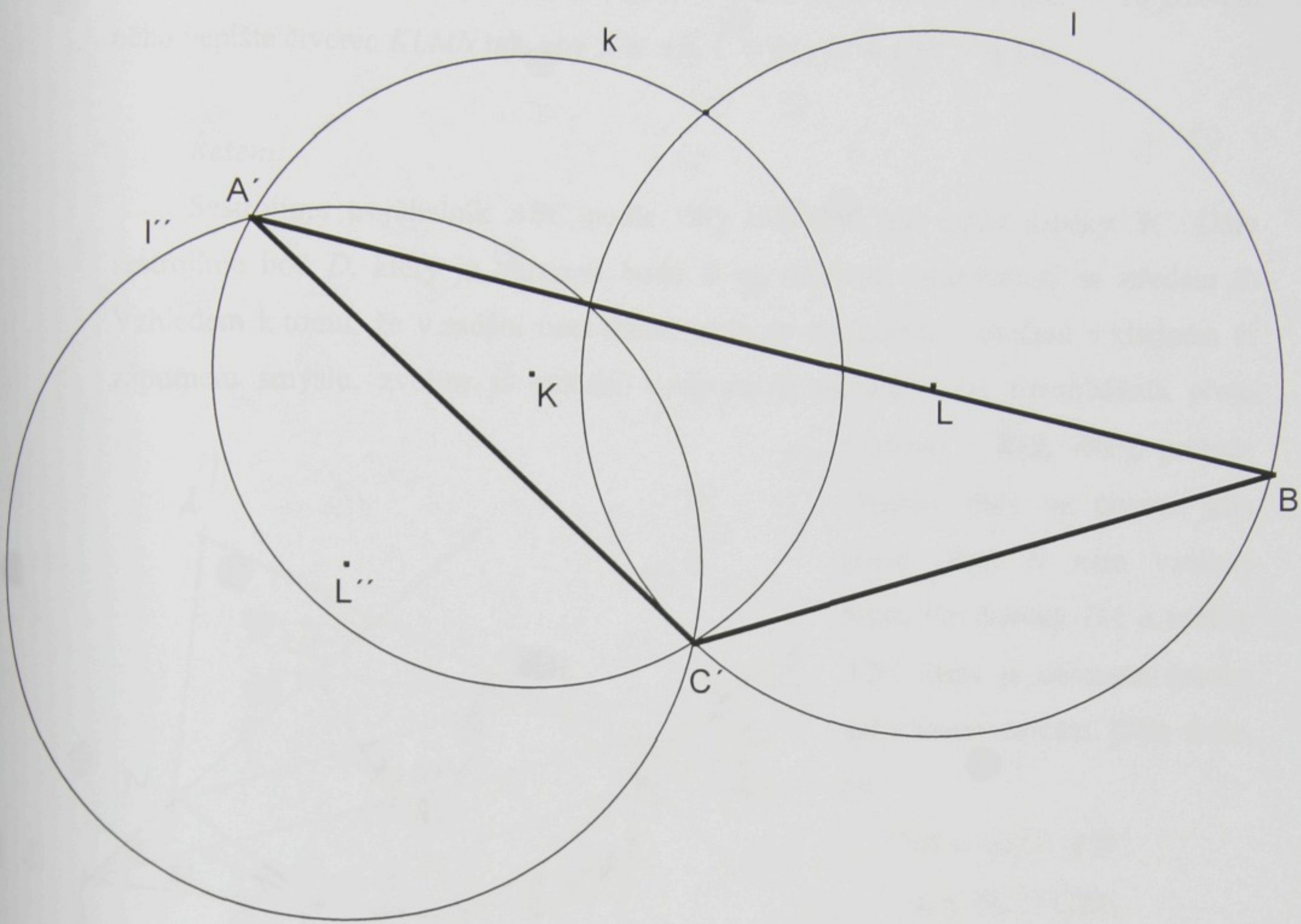


Obr. 101

Druhé řešení:

Zápis konstrukce:

1. k; $k(K;\, r_k = 4$ cm$)$
2. l; $l(L;\, r_l = 4{,}5$ cm$)$
3. C'; $C' \in k \cap l$
4. l''; $\boldsymbol{R}(C, 120°)$: $l \to l''$
5. A'; $A' \in k \cap l''$
6. B'; $\boldsymbol{R}(C, -120°)$: $A' \to B'$
7. $\Delta A'B'C'$



Obr. 102

Diskuse:

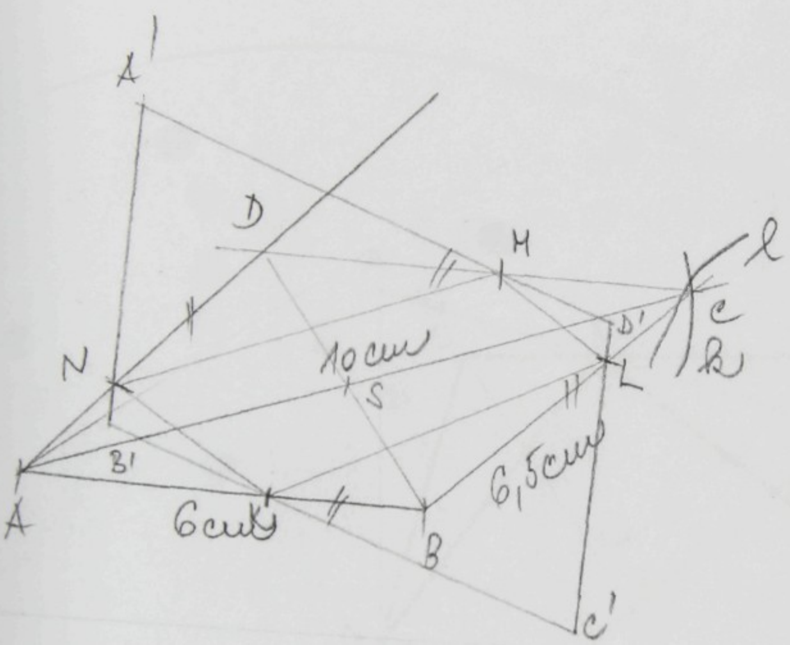
Úloha má v dané rovině dvě řešení, která splňují požadované vlastnosti. Pro přehlednost uvádím řešení ve dvou obrázcích. Záleží na tom, který vrchol si označíme jako *C*. Prvním řešením je trojúhelník *ABC* (obr. 101) a druhým trojúhelník *A´B´C´* (obr. 102).

Příklad 8

Je dán rovnoběžník $ABCD$, kde $|AB| = 6$ cm, $|BC| = 6{,}5$ *cm*, $|AC| = 10$ cm. Do něho vepište čtverec $KLMN$ tak, aby $K \in AB$, $L \in BC$, $M \in CD$, $N \in DA$.

Řešení:

Sestrojíme trojúhelník ABC podle věty *sss*. Bod S je střed úsečky AC. Dále sestrojíme bod D, který je obrazem bodu B ve středové souměrnosti se středem S. Vzhledem k tomu, že v zadání není dáno, jestli se má jednat o otočení v kladném či záporném smyslu, zvolím si otočení v záporném smyslu. Celý rovnoběžník proto otočíme v $\boldsymbol{R}(S, -90°)$, protože všechny úhly ve čtverci jsou pravé. Bod N nám vznikne protnutím úsečky DA a úsečky $A'B'$, která je obrazem úsečky AB v tomto otočení. Dále víme, že:



$M \in CD \cap A'D'$,

$L \in BC \cap C'D'$,

$K \in AB \cap B'C'$.

Obr. 103

<u>Zápis konstrukce:</u>

1. AB; $|AB| = 6$ cm
2. k; $k(A; r_k = 10$ cm$)$
3. l; $l(B; r_l = 6{,}5$ cm$)$
4. C; $C \in k \cap l$
5. S; S je střed AC
6. D; $\boldsymbol{S}(S)$: $B \rightarrow D$
7. Rovnoběžník $ABCD$
8. A'; $\boldsymbol{R}(S, -90°)$: $A \rightarrow A'$
9. B'; $\boldsymbol{R}(S, -90°)$: $B \rightarrow B'$

10.C′; $\boldsymbol{R}(S, -90°)$: $C \rightarrow C'$

11.D′; $\boldsymbol{R}(S, -90°)$: $D \rightarrow D'$

12.Rovnoběžník $A'B'C'D'$

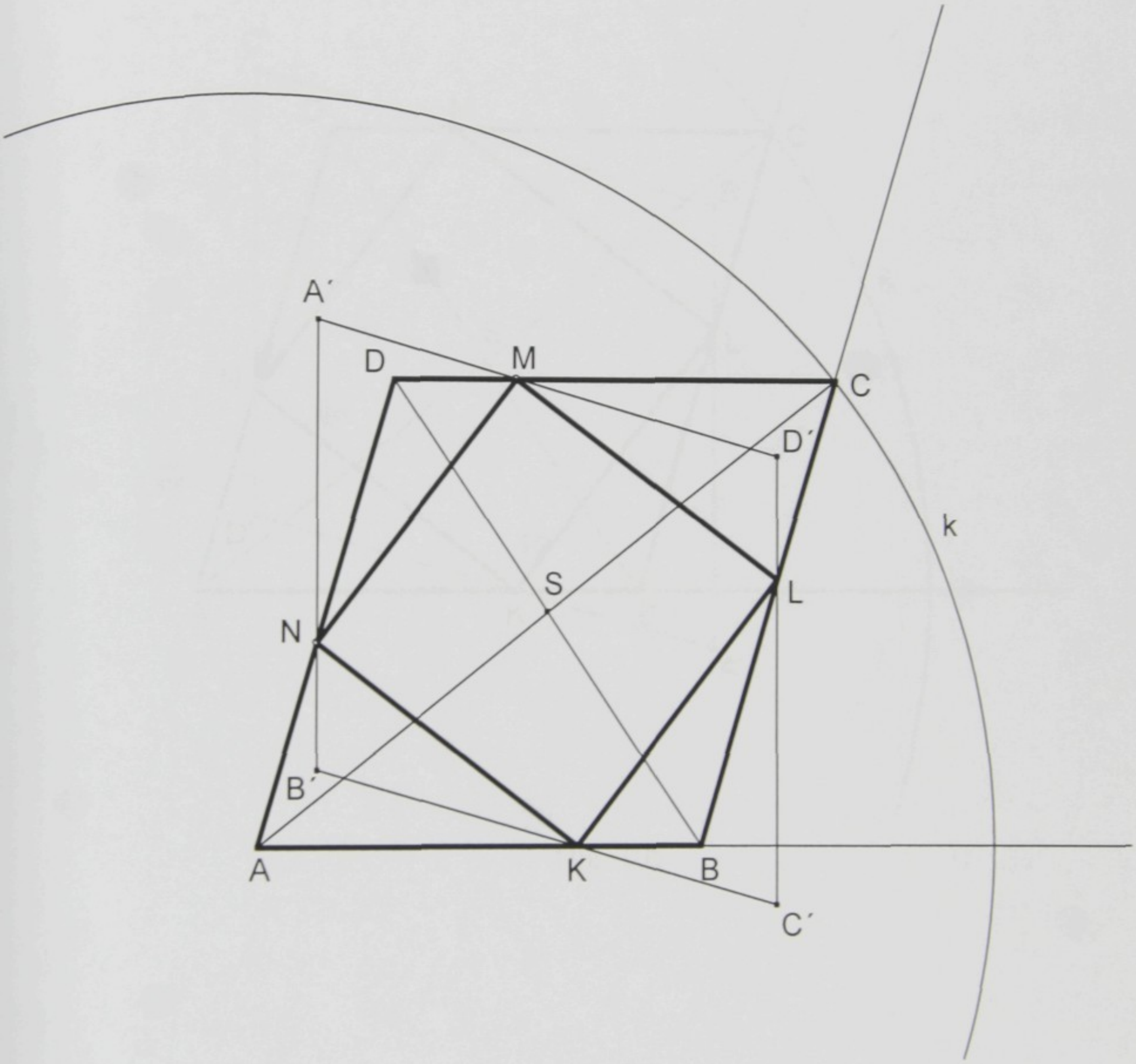
13.K; $K \in AB \cap B'C'$

14.L; $L \in BC \cap C'D'$

15.M; $M \in CD \cap D'A'$

16.N; $N \in DA \cap A'B'$

17.Čtverec $KLMN$



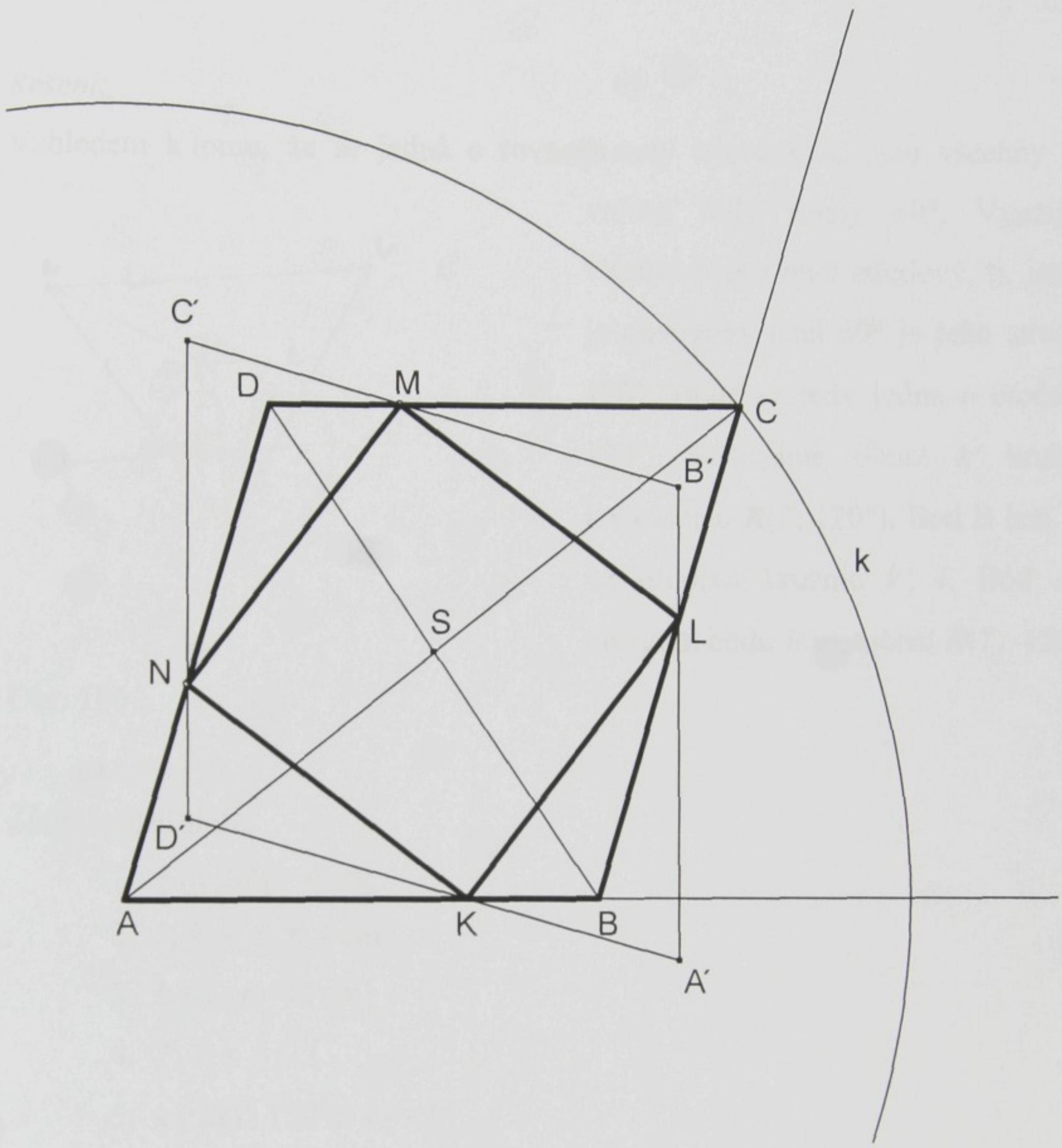
Obr. 104

Diskuse:

Jelikož není ze zadání jasné o jaké otočení se bude jednat, zvolila jsem si otočení v záporném smyslu. Řešením je čtverec KLMN (obr. 104).

K řešení úlohy můžeme použít i otočení v kladném smyslu, ovšem vznikne nám stejný čtverec jako v otočení v záporném smyslu (obr. 105).

Úloha má tedy v dané polorovině jedno řešení.



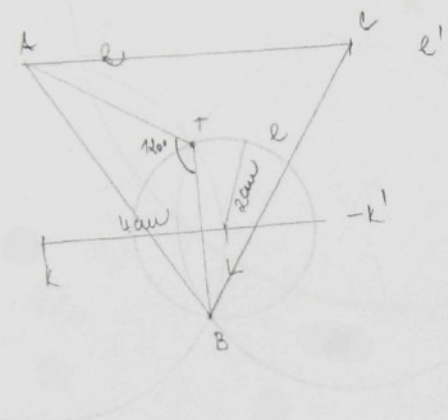
Obr. 105

Příklad 9

Jsou dány kružnice $k(K, r_k = 4$ cm) a $l(L; r_l = 2$ cm), $|KL| = 4$ cm. Bod T je jedním z bodů, ve kterých se kružnice protínají. Sestrojte všechny rovnostranné trojúhelníky ABC tak, aby platilo $A \in k$, $B \in l$ a T byl těžištěm tohoto trojúhelníku.

Řešení:

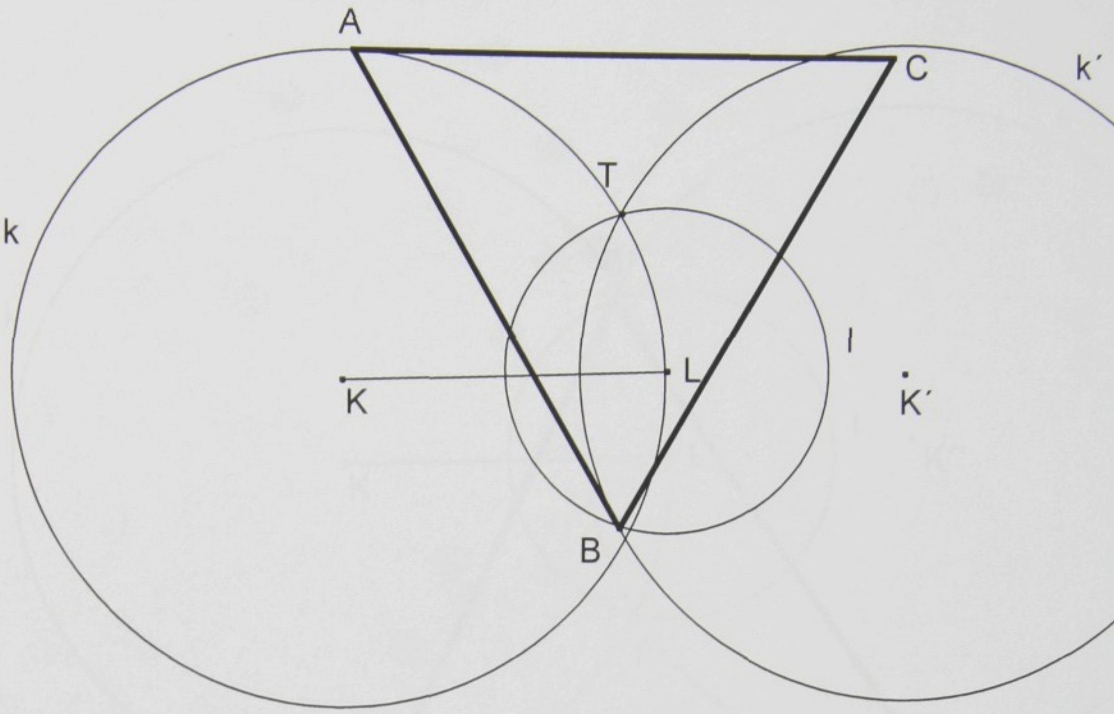
Vzhledem k tomu, že se jedná o rovnostranný trojúhelník, jsou všechny jeho vnitřní úhly rovny 60°. Využijeme vlastnosti pro úhel středový, tj. jestliže je obvodový úhel 60° je jeho středový 120°. Bude se tedy jedna o otočení o 120°. Sestrojíme obraz k' kružnice k v otočení $\boldsymbol{R}(T, 120°)$. Bod B leží tedy na průniku kružnic k', l. Bod A je obrazem bodu B v otočení $\boldsymbol{R}(T, -120°)$.



Obr. 106

<u>Zápis konstrukce:</u>

1. KL; $|KL| = 4$ cm
2. k; $k(K; r_k = 4$ cm)
3. l; $l(L; r_l = 2$ cm)
4. T; $T \in k \cap l$
5. k'; $\boldsymbol{R}(T; 120°)$: $k \to k'$
6. B; $B \in l \cap k'$
7. A; $\boldsymbol{R}(T, -120°)$: $B \to A$
8. C; $\boldsymbol{R}(T, -120°)$: $B \to C$
9. $\Delta\, ABC$

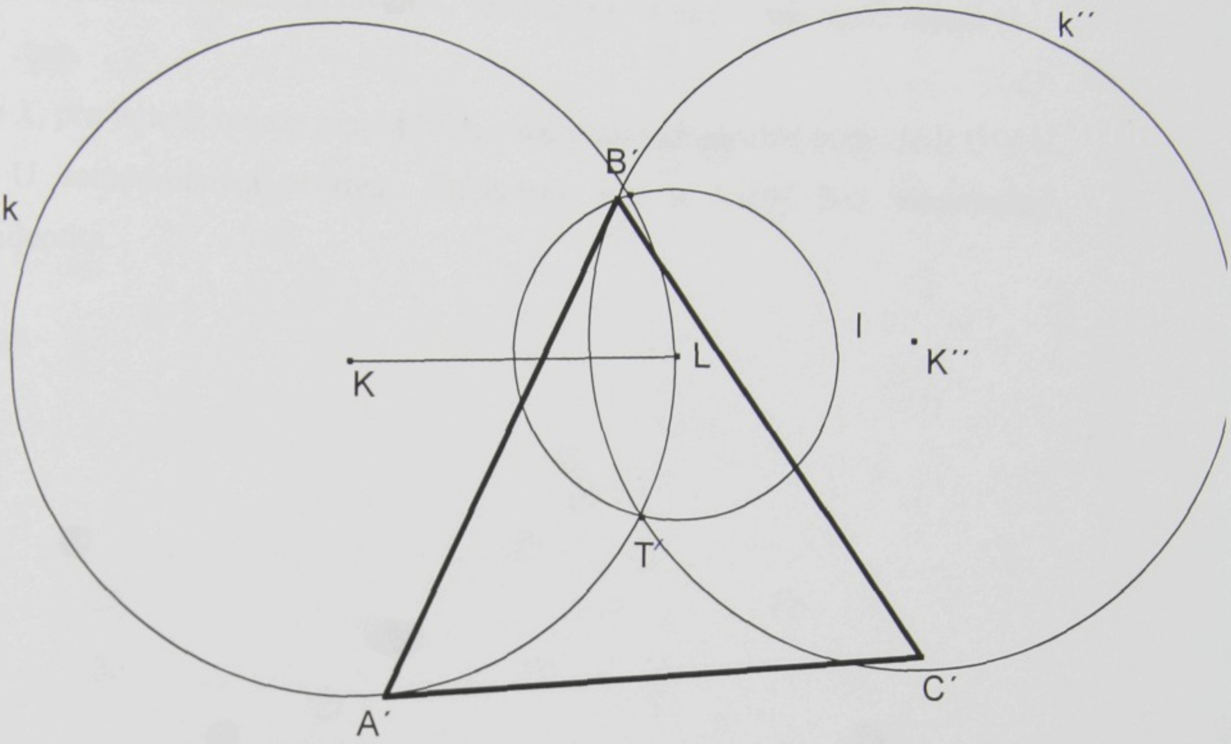


Obr. 107

Druhé řešení:

Zápis konstrukce:

1. KL; $|KL| = 4$ cm
2. k; $k(K; r_k = 5 \text{ cm})$
3. l; $l(L; r_l = 3 \text{ cm})$
4. T'; $T' \in k \cap l$
5. k''; $\boldsymbol{R}(T; -120°)$: $k \to k''$
6. B'; $B' \in l \cap k''$
7. A'; $\boldsymbol{R}(T, 120°)$: $B' \to A'$
8. C'; $R(T; -120°)$: $B' \to C'$
9. $\Delta A'B'C'$



Obr. 108

Diskuse:

Úloha má v dané rovině dvě řešení. Pro přehlednost uvádím řešení ve dvou obrázcích. Řešení jsou závislá na volbě bodu *T*. Jedním řešením je trojúhelník *ABC* (obr. 107) a druhým trojúhelník *A'B'C'* (obr. 108).

1.6 *Identita*

Množinu obrazů všech bodů útvaru U označíme U ′a nazýváme obraz útvaru U.

Body X, pro jejichž obrazy platí $X' = X$, e nazývají samodružné body. Je-li U ′= U, nazýváme U samodružným útvarem. Zobrazení, kde je každý bod samodružný, nazýváme identita.

1.7 *Skládání shodných zobrazení*

Jsou dána dvě shodná zobrazení $\boldsymbol{Z}_1$, $\boldsymbol{Z}_2$ a libovolný bod X; $\boldsymbol{Z}_1 : X \to X'$, $\boldsymbol{Z}_2$: $X' \to X'$. Zobrazení $\boldsymbol{Z}$: $X \to X''$ se nazývá složené zobrazení ze zobrazení $\boldsymbol{Z}_1$ a $\boldsymbol{Z}_2$.

Operaci skládání je zvykem značit o. Zapisujeme takto: $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{Z}_2 \circ \boldsymbol{Z}_1$.

Skládání zobrazení není komutativní.

Skládáním dvou osových souměrností $O(o_1)$ a $O(o_2)$.

Vzájemná poloha těchto os může být:

- o_1 a o_2 jsou totožné,
- o_1 a o_2 jsou rovnoběžné,
- o_1 a o_2 jsou různoběžné.

A je libovolný bod jehož obraz v osové souměrnosti $\boldsymbol{O}(o_1)$ je A', A'' je obraz bodu A'v osové souměrnosti $A(o_2)$.

1. $o_1 = o_2$: $\boldsymbol{O}(o_2) \circ \boldsymbol{O}(o_1) = \mathbf{I}$

V tomto případě je složením dvou osových souměrností **identita**.

2. $o_1 \parallel o_2$: $\boldsymbol{O}(o_2) \circ \boldsymbol{O}(o_1) = \boldsymbol{T}$

Zobrazením je tedy **posunutí**, jehož délka je rovna dvojnásobku vzdálenosti os.

3. o_1 a o_2: $\boldsymbol{O}(o_2) \circ \boldsymbol{O}(o_1) = \boldsymbol{R}$

Zobrazení je tedy **otočení**, kde středem je průsečík daných os a velikost úhlu otočení je dvojnásobek úhlu velikosti os.

Složením dvou osových souměrností vznikne vždy jedno ze shodných zobrazení: identita, otočení či posunutí.

Skládání tří a více souměrností.

Zobrazení, které je složené ze tří osových souměrností, je buď osová souměrnost, nebo posunutá souměrnost.

Vzhledem k tomu, že při dalším skládání neobjevíme žádné shodné zobrazení, můžeme tvrdit:

Libovolné shodné zobrazení se dá složit z jedné, dvou nebo tří osových souměrností. Existují pouze následující shodná zobrazení: osová souměrnost, identita, posunutí, otočení a posunutá souměrnost popř. středová souměrnost jako zvláštní případ otočení.

Příklad 1

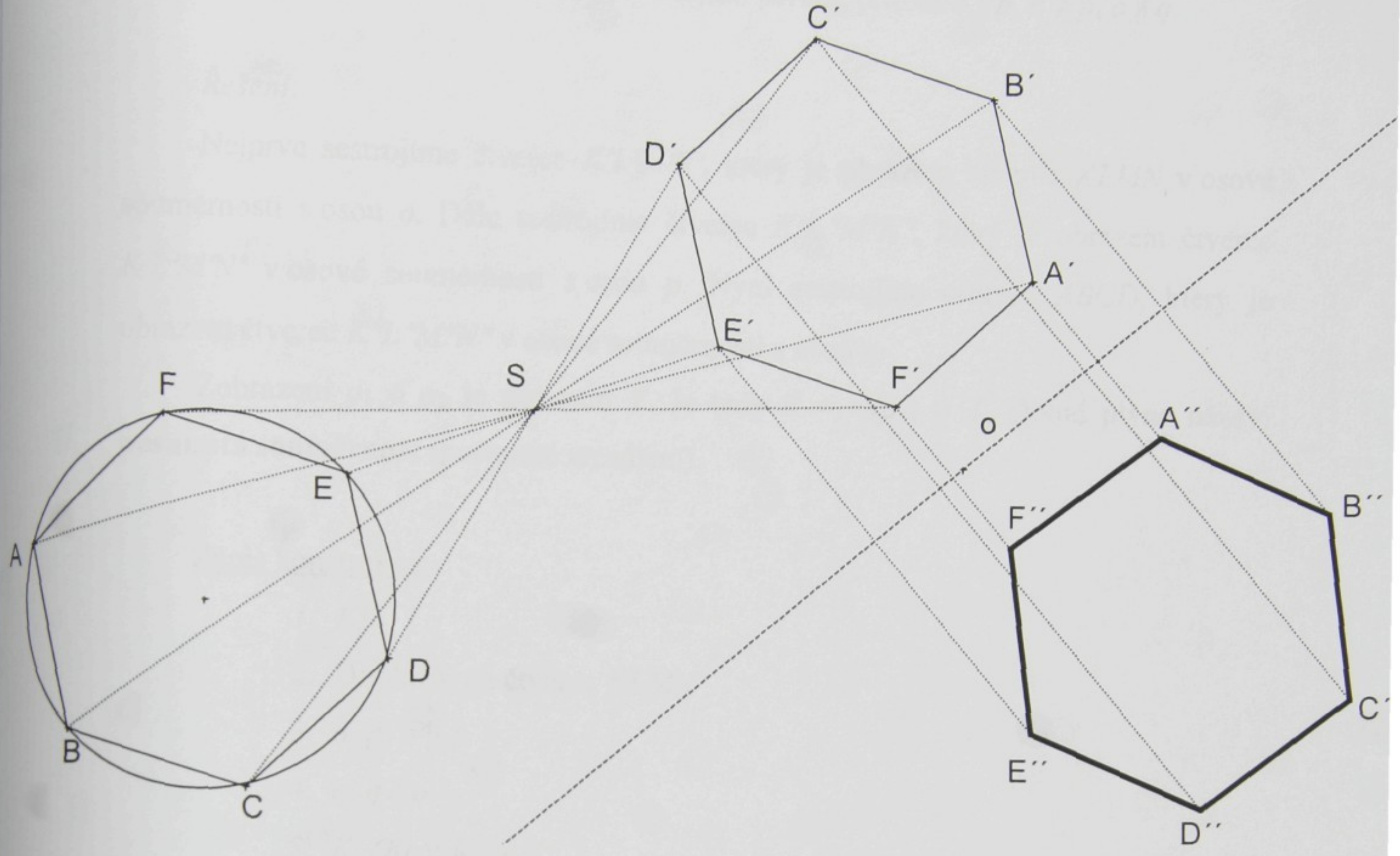
Je dán pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$, kde $|AB| = 2{,}5$ cm. Zobrazte tento šestiúhelník v zobrazení, které je složením středové souměrnosti se středem S a osové souměrnosti s osou o. Bod $S \notin o$.

Řešení:

Pravidelný šestiúhelník můžeme sestrojit pomocí středové souměrnosti nebo tak, že sestrojíme kružnici o poloměru $|AB| = 2{,}5$ cm. Tuto délku postupně nanášíme na kružnici. Hledané body vznikají průnikem kružnic. Sestrojíme šestiúhelník $A'B'C'D'E'F'$, který je obrazem šestiúhelníku $ABCDEF$ ve středové souměrnosti se středem S. Dále sestrojíme šestiúhelník $A''B''C''D''E''F''$, který je obrazem šestiúhelníku $A'B'C'D'E'F'$.

<u>Zápis konstrukce:</u>

1. AB; $|AB| = 2{,}5$ cm
2. sestrojení šestiúhelníku
3. Šestiúhelník $ABCDEF$
4. S, o
5. A'; $\mathbf{S}(S)$: $A \to A'$
6. B'; $\mathbf{S}(S)$: $B \to B'$
7. C'; $\mathbf{S}(S)$: $C \to C'$
8. D'; $\mathbf{S}(S)$: $D \to D'$
9. E'; $\mathbf{S}(S)$: $E \to E'$
10. F'; $\mathbf{S}(S)$: $F \to F'$
11. Šestiúhelník $A'B'C'D'E'F'$
12. A''; $\mathbf{O}(o)$: $A' \to A''$
13. B''; $\mathbf{O}(o)$: $B' \to B''$
14. C''; $\mathbf{O}(o)$: $C' \to C''$
15. D''; $\mathbf{O}(o)$: $D' \to D''$
16. E''; $\mathbf{O}(o)$: $E' \to E''$
17. F''; $\mathbf{O}(o)$: $F' \to F''$
18. Šestiúhelník $A''B''C''D''E''F''$



Obr. 109

Diskuse:

Úloha má ve zvolené polorovině jedno řešení a je jím pravidelný šestiúhelník $A''B''C''D''E''F''$.

Příklad 2

Je dán čtverec $KLMN$. Zobrazte tento čtverec v zobrazení, které vznikne složením tří osových souměrností s osami o, p, q v tomto pořadí; přitom $o \parallel p$, $o \neq p$, $o \nparallel q$.

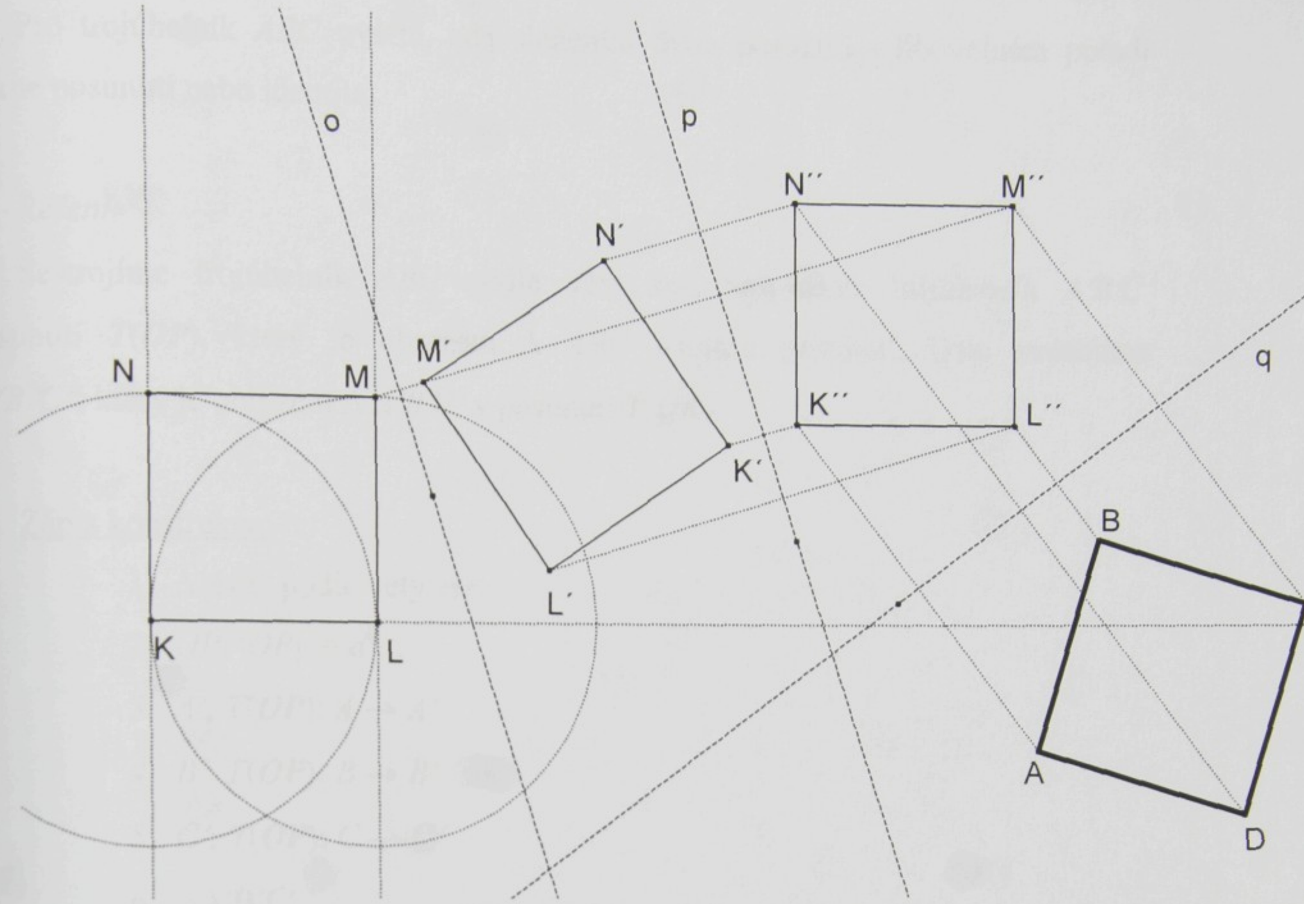
Řešení:

Nejprve sestrojíme čtverec $K'L'M'N'$, který je obrazem čtverce $KLMN$ v osové souměrnosti s osou o. Dále sestrojíme čtverec $K''L''M''N''$, který je obrazem čtverec $K'L'M'N'$ v osové souměrnosti s osou p. Nyní sestrojíme čtverec $ABCD$, který je obrazem čtverec $K''L''M''N''$ v osové souměrnosti s osou q.

Zobrazení $o_1 \circ o_2$ je posunutí $\boldsymbol{T}$. Je tedy $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{O}(o_3) \circ \boldsymbol{T}$. Odtud plyne název: **posunutá souměrnost** (posunuté zrcadlení).

Zápis konstrukce:

1. KL
2. Doplnění na čtverec $KLMN$
3. $o, p; o \parallel p$
4. $q; q \nparallel o$
5. K: $\boldsymbol{O}(o)$: $K \to K'$
6. L: $\boldsymbol{O}(o)$: $L \to L'$
7. M: $\boldsymbol{O}(o)$: $M \to M'$
8. N: $\boldsymbol{O}(o)$: $N \to N'$
9. Čtverec $K'L'M'N'$
10. K': $\boldsymbol{O}(p)$: $K' \to K''$
11. L': $\boldsymbol{O}(p)$: $L' \to L''$
12. M': $\boldsymbol{O}(p)$: $M' \to M''$
13. N': $\boldsymbol{O}(p)$: $N' \to N''$
14. Čtverec $K''L''M''N''$
15. K'': $\boldsymbol{O}(q)$: $K'' \to A$
16. L'': $\boldsymbol{O}(q)$: $L'' \to B$
17. M'': $\boldsymbol{O}(q)$: $M'' \to C$
18. N'': $\boldsymbol{O}(q)$: $N'' \to D$
19. Čtverec $ABCD$



Obr. 110

Diskuse:

Úloha má ve zvolené polorovině jedno řešení a je jím čtverec $ABCD$.

Příklad 3

Pro trojúhelník ABC ověřte, zda složením dvou posunutí v libovolném pořadí vznikne posunutí nebo identita.

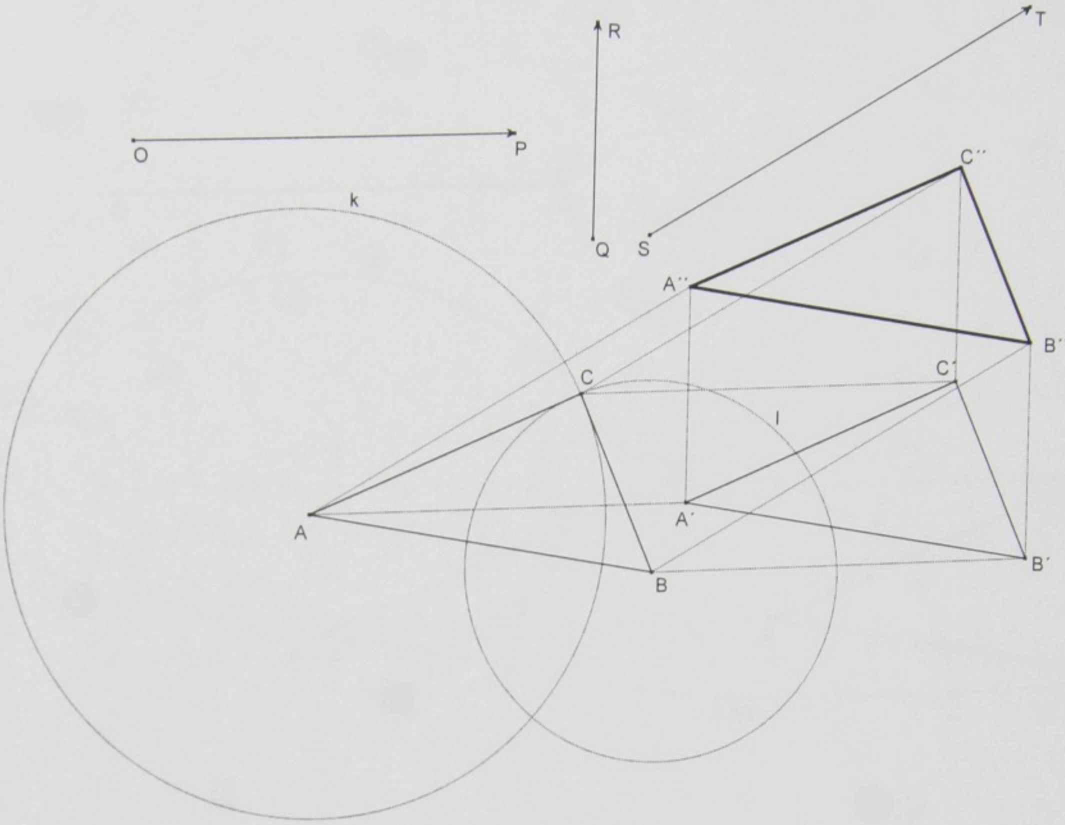
Řešení:

Sestrojíme trojúhelník ABC podle věty *sss*. Sestrojíme trojúhelník $A'B'C'$ v posunutí $\boldsymbol{T(OP)}$, který je obrazem $\Delta\ ABC$ v tomto posunutí. Dále sestrojíme $\Delta\ A''B''C''$, který je obrazem $\Delta\ A'B'C'$ v posunutí $\boldsymbol{T(QR)}$.

<u>Zápis konstrukce:</u>

1. $\Delta\ ABC$ podle věty *sss*
2. OP; $|OP| = d$[8]
3. A'; $\boldsymbol{T(OP)}$: $A \to A'$
4. B'; $\boldsymbol{T(OP)}$: $B \to B'$
5. C'; $\boldsymbol{T(OP)}$: $C \to C'$
6. $\Delta A'B'C'$
7. QR; $|QR| = d$
8. A''; $\boldsymbol{T(QR)}$: $A' \to A''$
9. B''; $\boldsymbol{T(QR)}$: $B' \to B''$
10. C''; $\boldsymbol{T(QR)}$: $C' \to C''$
11. $\Delta\ A''B''C''$

[8] Jelikož není v zadání určeno, jak velká má být orientovaná úsečka ***OP***, zvolila jsem písmenko *d*, které představuje libovolné přirozené číslo. U orientované úsečky ***QR*** jsem zvolila také písmenko *d*, ovšem za tyto dvě neznáme nemusíme dosadit stejné číslo. Úsečky ***OP***, ***QR*** nemusí mít ani stejný směr.



Obr. 111

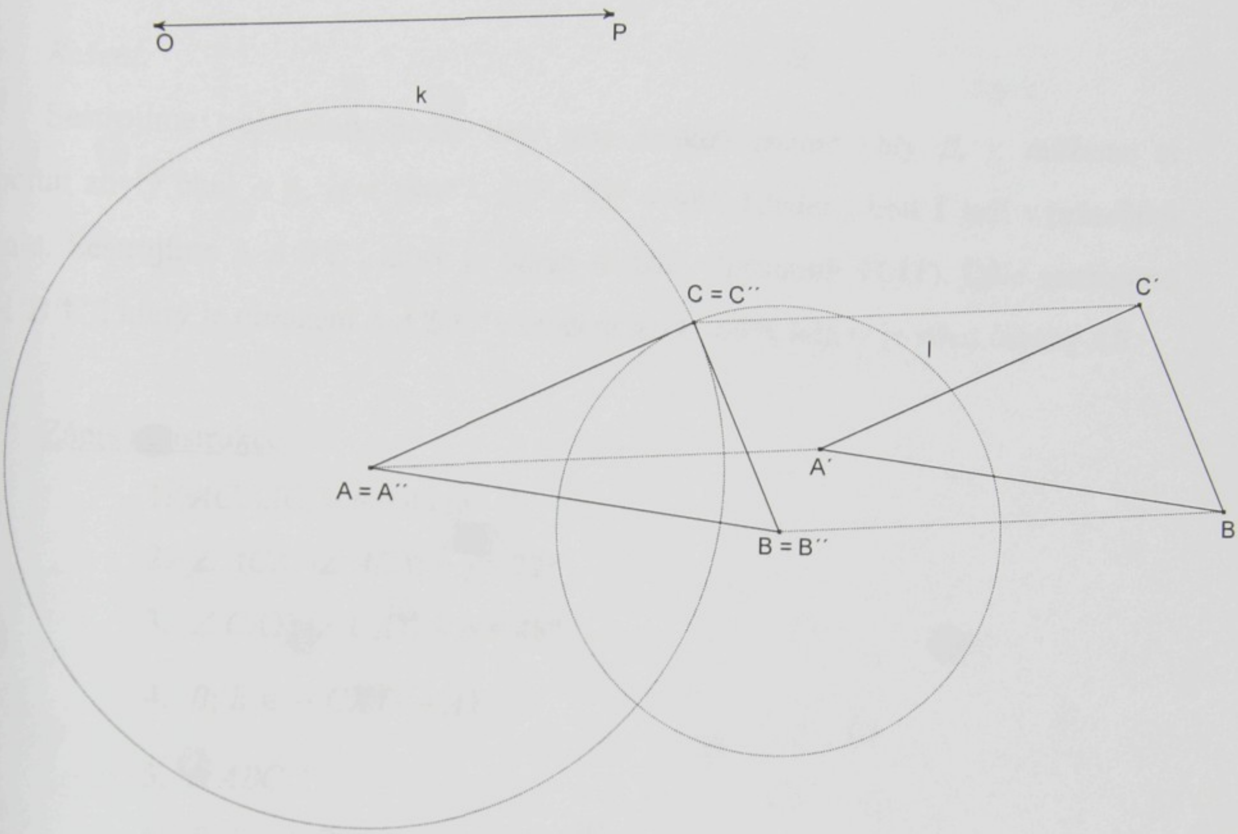
Druhé řešení:

Zápis konstrukce:

1. $\Delta\, ABC$ podle věty *sss*
2. OP; $|OP| = d$[9]
3. A'; $\boldsymbol{T(OP)}$: $A \rightarrow A'$
4. B'; $\boldsymbol{T(OP)}$: $B \rightarrow B'$
5. C'; $\boldsymbol{T(OP)}$: $C \rightarrow C'$
6. $\Delta\, A'B'C'$
7. A''; $\boldsymbol{T(PO)}$: $A' \rightarrow A''$
8. B''; $\boldsymbol{T(PO)}$: $B' \rightarrow B''$
9. C''; $\boldsymbol{T(PO)}$: $C' \rightarrow C''$

[9] Jelikož není v zadání určeno, jak velká má být orientovaná úsečka ***OP***, zvolila jsem písmenko *d*, které představuje libovolné přirozené číslo.

10. $\Delta\ A''B''C''$



Obr. 112

Diskuse:

Úloha má dvě řešení. Pro přehlednost je uvádím ve dvou obrázcích. V prvním případě (obr. 111) jsme trojúhelník *ABC* zobrazili ve dvou různých posunutí a to ***T***(***OP***), ***T***(***QR***), kde ***OP*** a ***QR*** jsou orientované úsečky, které nemají stejný směr ani stejnou délku. Výsledkem tohoto zobrazení je posunutí ***T***(***ST***).

V druhém případě (obr. 112) jsme Δ *ABC* nejprve posunuli v posunutí ***T***(***OP***) a jeho obraz *A´B´C´* v opačném posunutí ***T***(***PO***). Výsledkem je tedy identita.

Příklad 4

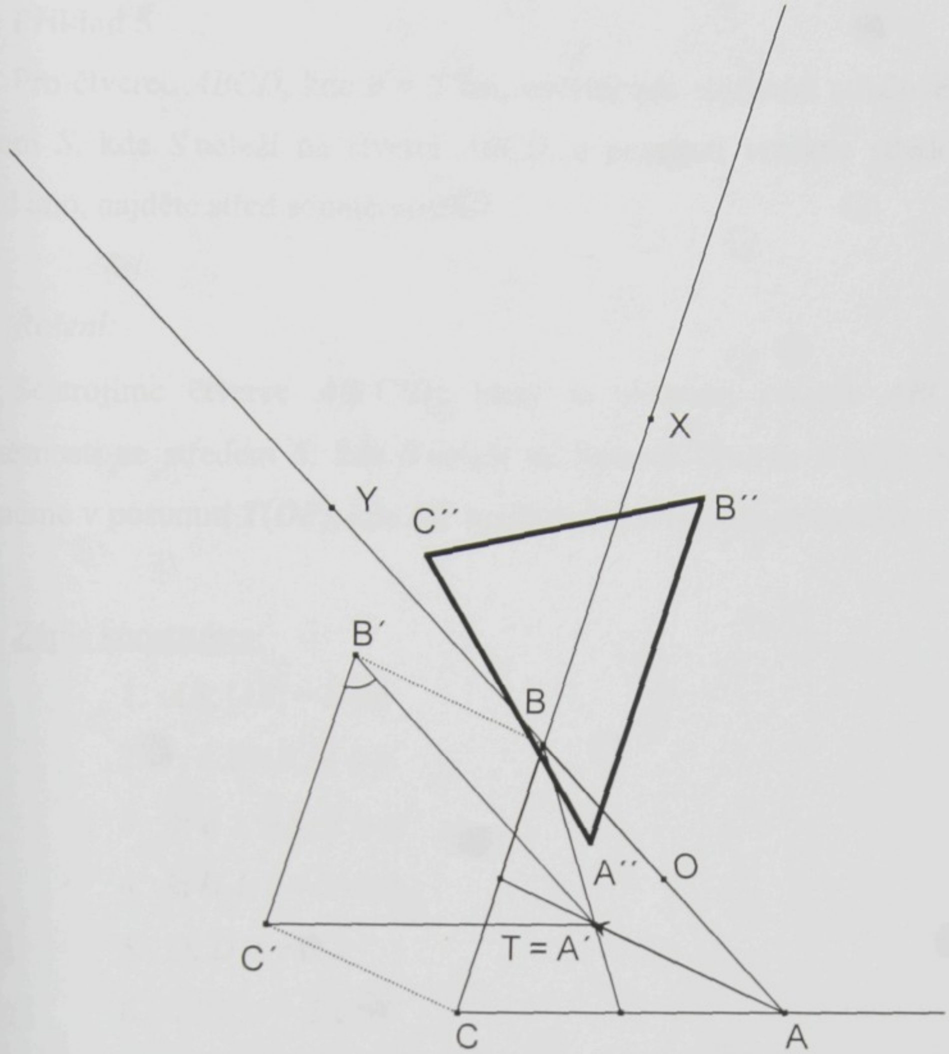
Je dán trojúhelník ABC, kde $b = 4$ cm, $\beta = 60°$, $\gamma = 72°$. Zobrazte trojúhelník ABC v zobrazení, které vznikne složením posunutí dané orientovanou úsečkou $\boldsymbol{AT}$, kde T je těžiště tohoto trojúhelníku, a otočení $\boldsymbol{R}(O, -60°)$, kde O je střed AB.

Řešení:

Sestrojíme trojúhelník podle věty *usu*. Jelikož známe úhly β, γ, můžeme si spočítat zbylý úhel α tj. $\alpha = 180° - 60° - 72° = 48°$. Hledaný bod T leží v průsečíku těžnic. Sestrojíme $\Delta\, A'B'C'$, který je obraz $\Delta\, ABC$ v posunutí $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{AT})$. Dále sestrojíme $\Delta\, A''B''C''$, který je obrazem $\Delta\, A'B'C'$ v otočení $\boldsymbol{R}(O, -60°)$, kde O je střed úsečky AB.

<u>Zápis konstrukce:</u>

1. AC; $|AC| = b = 4$ cm
2. $\angle ACX$; $|\angle ACX| = \gamma = 72°$
3. $\angle CAY$; $|\angle CAY| = \alpha = 48°$
4. B; $B \in \rightarrow CX \cap \rightarrow AY$
5. $\Delta\, ABC$
6. T; $T \in t_a \cap t_b$
7. A'; $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{AT})$: $A \rightarrow A'$
8. B'; $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{AT})$: $B \rightarrow B'$
9. C'; $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{AT})$: $C \rightarrow C'$
10. $\Delta\, A'B'C'$
11. O; O je střed AB
12. A''; $\mathbf{R}(O, -60)$: $A' \rightarrow A''$
13. B''; $\mathbf{R}(O, -60)$: $B' \rightarrow B''$
14. C''; $\mathbf{R}(O, -60)$: $C' \rightarrow C''$
15. $\Delta\, A''B''C''$



Obr. 113

Diskuse:

Úloha má ve zvolené polorovině jedno řešení. Je jím trojúhelník $A''B''C''$.

Příklad 5

Pro čtverec $ABCD$, kde $a = 3$ cm, ověřte, zda složením středové souměrnosti se středem S, kde S neleží na čtverci $ABCD$, a posunutí vznikne středová souměrnost. Pokud ano, najděte střed souměrnosti.

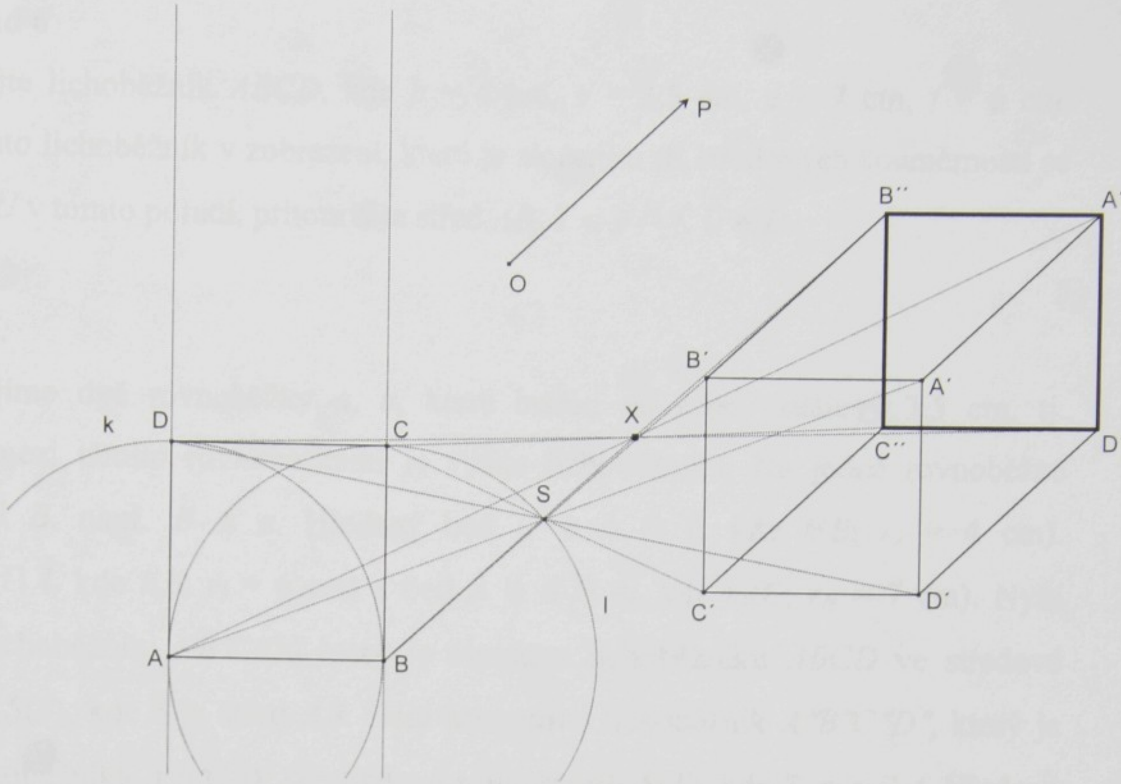
Řešení:

Sestrojíme čtverec $A'B'C'D'$, který je obrazem čtverce $ABCD$ ve středové souměrnosti se středem S, kde S neleží na hranách čtverce $ABCD$. Sestrojený obraz posuneme v posunutí $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{OP})$, kde $\boldsymbol{OP}$ je libovolná orientovaná úsečka.

Zápis konstrukce:

1. AB; $|AB| = 3$ cm
2. r; $r \perp AB$, $A \in r$
3. q; $q \perp AB$, $B \in q$
4. k; $k(A; r = 3 \text{ cm})$
5. D; $D \in r \cap k$
6. l; $l(B; r = 3 \text{ cm})$
7. C; $C \in q \cap l$
8. Čtverec $ABCD$
9. S
10. A'; $\boldsymbol{S}(S)$: $A \to A'$
11. B'; $\boldsymbol{S}(S)$: $B \to B'$
12. C'; $\boldsymbol{S}(S)$: $C \to C'$
13. D'; $\boldsymbol{S}(S)$: $D \to D'$
14. Čtverec A'B'C'D'
15. $\boldsymbol{OP}$; $|\boldsymbol{OP}| = \text{d}$[10]
16. A''; $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{OP})$: $A' \to A''$
17. B''; $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{OP})$: $B' \to B''$
18. C''; $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{OP})$: $C' \to C''$
19. D''; $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{OP})$: $D' \to D''$
20. Čtverec $A''B''C''D''$

[10] Jelikož není v zadání určeno, jak velká má být orientovaná úsečka $\boldsymbol{OP}$, zvolila jsem písmenko d, které představuje libovolné přirozené číslo.



Obr. 114

Diskuse:

Úloha má ve zvolené polorovině jedno řešení a tím je čtverec *ABCD*. Složením středové souměrnosti ***S***(*S*) a posunutí ***T***(***OP***) vznikla středová souměrnost ***S***(*X*).

Příklad 6

Sestrojte lichoběžník $ABCD$, kde $b = 4$ cm, $v = 3{,}5$ cm, $e = 7$ cm, $f = 6$ cm. Zobrazte tento lichoběžník v zobrazení, které je složením tří středových souměrností se středy S, T, U v tomto pořadí, přitom S je střed AB, $T \in e \cap f$, $U = D$.

Řešení:

Sestrojíme dvě rovnoběžky a, b, které budou od sebe vzdáleny 3,5 cm, tj. vzdálenost mezi těmito rovnoběžkami je výška lichoběžníku. Na jedné rovnoběžce zvolíme bod B, např. $B \in a$. Hledaný bod $C \in b \cap k$, kde $k(B;\ r_k = 4$ cm$)$. Bod $D \in b \cap l$, kde $l(B;\ r_l = 6$ cm$)$ a bod $A \in a \cap m$, kde $m(C;\ r_m = 7$ cm$)$. Nyní sestrojíme lichoběžník $A'B'C'D'$, který je obrazem lichoběžníku $ABCD$ ve středové souměrnosti $\mathbf{S}(S)$, kde S je střed AB. Dále sestrojíme lichoběžník $A''B''C''D''$, který je obrazem lichoběžníka $A'B'C'D'$ ve středové souměrnosti $\mathbf{S}(T)$, kde $T \in e \cap f$. Hledaný lichoběžník $KLMN$ je obrazem lichoběžníka $A''B''C''D''$ ve středové souměrnosti $\mathbf{S}(U)$, kde $U = D$.

<u>Zápis konstrukce:</u>

1. $a, b;\ a \parallel b$
2. $B;\ B \in b$
3. $k;\ k(B;\ r_k = 4$ cm$)$
4. $C;\ C \in b \cap k$
5. $l;\ l(B;\ r_l = 6$ cm$)$
6. $D;\ D \in b \cap l$
7. $m;\ m(C;\ r_m = 7$ cm$)$
8. $A;\ A \in a \cap m$
9. Lichoběžník $ABCD$
10. S; S je střed AB
11. A'; $\mathbf{S}(S)$: $A \rightarrow A'$
12. B'; $\mathbf{S}(S)$: $B \rightarrow B'$
13. C'; $\mathbf{S}(S)$: $C \rightarrow C'$
14. D'; $\mathbf{S}(S)$: $D \rightarrow D'$
15. Lichoběžník $A'B'C'D'$
16. $T;\ T \in e \cap f$

17. A''; $\mathbf{S}(T)$: $A' \to A''$

18. B''; $\mathbf{S}(T)$: $B' \to B''$

19. C''; $\mathbf{S}(T)$: $C' \to C''$

20. D''; $\mathbf{S}(T)$: $D' \to D''$

21. Lichoběžník $A''B''C''D''$

22. U; $U = D$

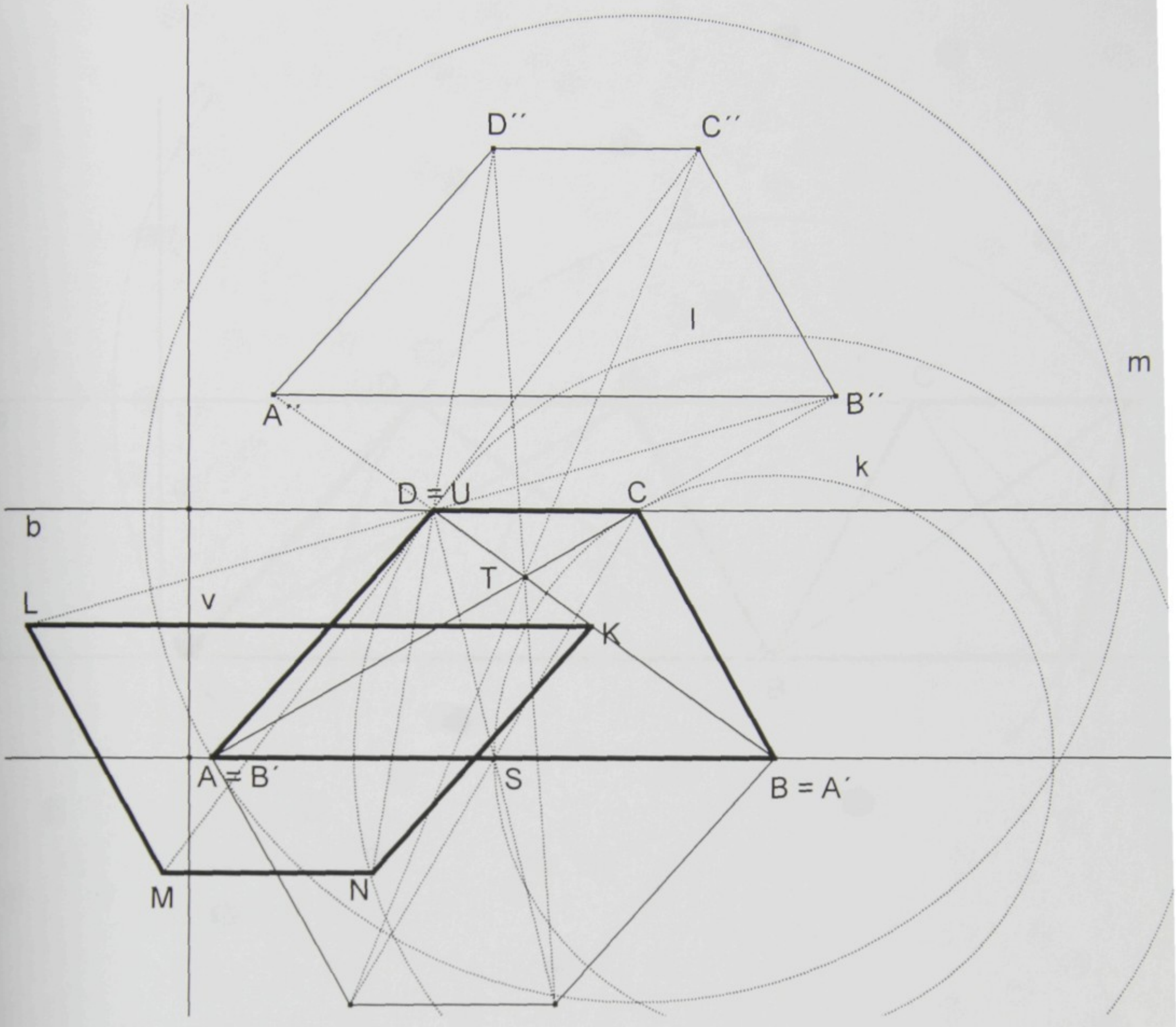
23. K; $\mathbf{S}(U)$: $A'' \to K$

24. L; $\mathbf{S}(U)$: $B'' \to L$

25. M; $\mathbf{S}(U)$: $C'' \to M$

26. N; $\mathbf{S}(U)$: $D'' \to N$

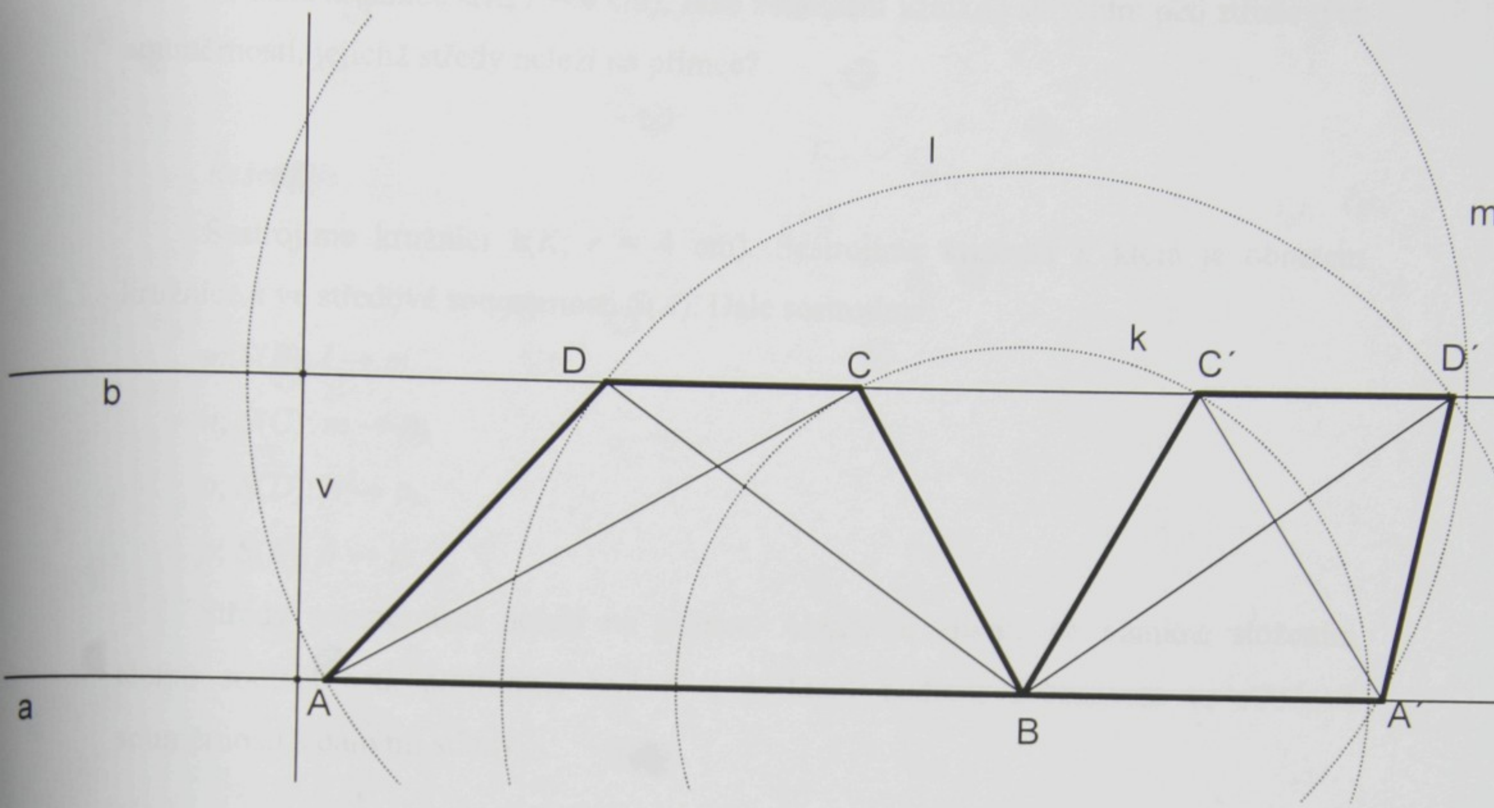
27. Lichoběžník $KLMN$



Obr. 115

Diskuse:

Rovnoběžku b nám kružnice k protnula ve dvou bodech C, C′. Tento bod splňuje požadované vlastnosti. Kružnice l má rovnoběžku b také protnula ve dvou bodech, tj. vznikly nám dva body D, D′. I tyto body splňují požadované vlastnosti. Bod A′ nám vznikl protnutím kružnice m a rovnoběžky a, ale tento bod nesplňuje všechny požadované vlastnosti (obr. 116), proto má úloha v dané rovině určené rovnoběžkami a, b jedno řešení.



Obr. 116

Příklad 7

Je dána kružnice $k(K, r = 4\text{ cm})$. Jaké zobrazení vznikne složením pěti středových souměrností, jejichž středy neleží na přímce?

Řešení:

Sestrojíme kružnici $k(K; r = 4\text{ cm})$. Sestrojíme kružnici l, která je obrazem kružnice k ve středové souměrnosti $\boldsymbol{S}(A)$. Dále sestrojíme:

$m; \boldsymbol{S}(B)\colon l \to m$

$n; \boldsymbol{S}(C)\colon m \to n$,

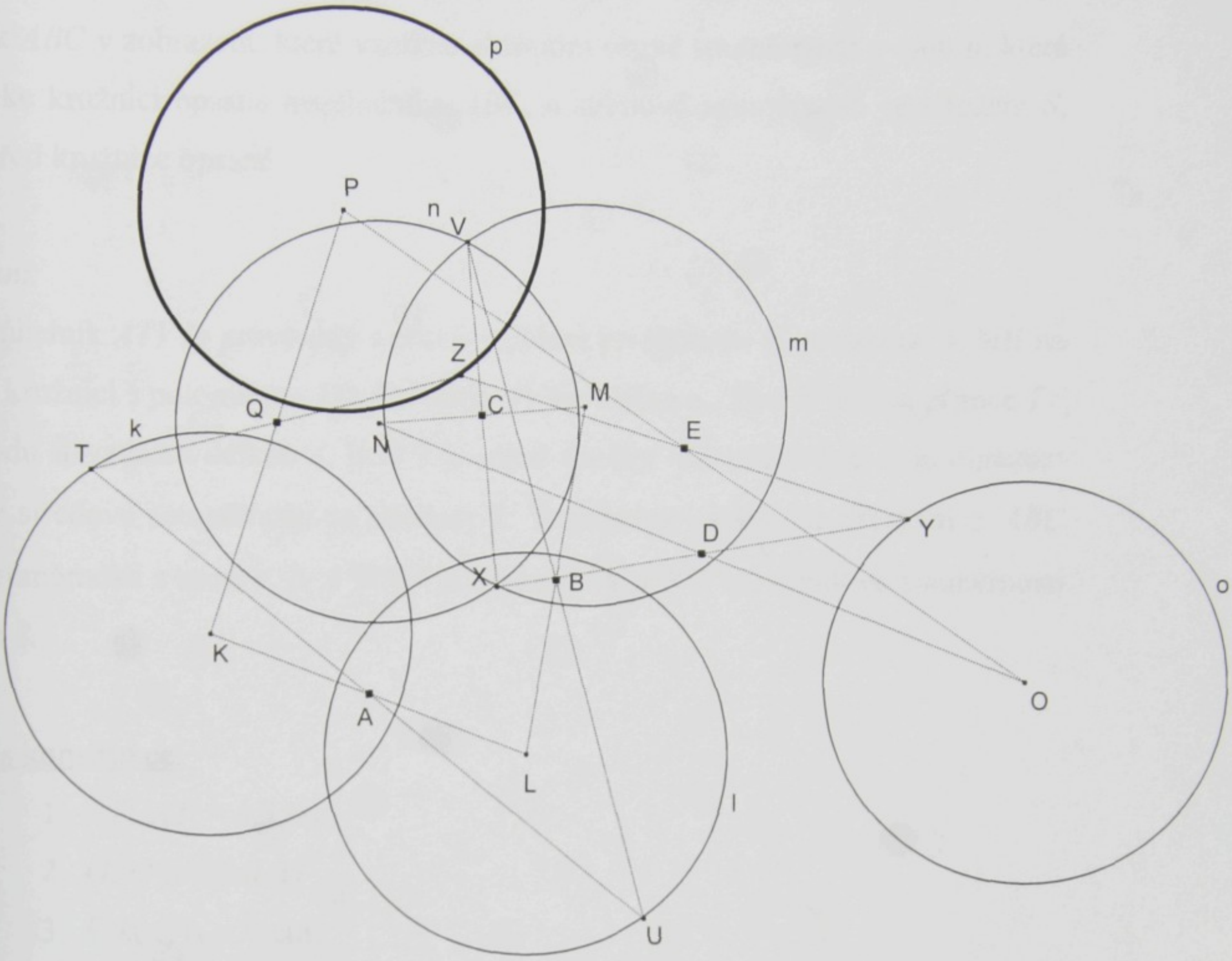
$o; \boldsymbol{S}(D)\colon n \to o$,

$p; \boldsymbol{S}(E)\colon o \to p$.

Středy souměrnosti neleží na přímce. Abychom zjistili, co vznikne složením těchto souměrností, sestrojíme bod $T \in k$, který budeme zobrazovat ve středové souměrnosti s danými středy.

Zápis konstrukce:

1. k; $k(K; r = 4\text{ cm})$
2. T; $T \in k$
3. A, B, C, D, E; A, B, C, D neleží na přímce
4. l; $\boldsymbol{S}(A)\colon k \to l$
5. U; $\boldsymbol{S}(A)\colon T \to U$
6. m; $\boldsymbol{S}(B)\colon l \to m$
7. V; $\boldsymbol{S}(B)\colon U \to V$
8. n; $\boldsymbol{S}(C)\colon m \to n$
9. X; $\boldsymbol{S}(C)\colon V \to X$
10. o; $\boldsymbol{S}(D)\colon n \to o$
11. Y; $\boldsymbol{S}(D)\colon X \to Y$
12. p; $\boldsymbol{S}(E)\colon o \to p$
13. Z; $\boldsymbol{S}(E)\colon Y \to Z$
14. Q; $Q \in KP \cap TZ$



Obr. 117

Diskuse:

Úloha má jedno řešení a tím je kružnice $p(P; r = 4 \text{ cm})$. Složením pěti středových souměrností vznikla opět středová souměrnost $\boldsymbol{S}(Q)$, tj. p; $\boldsymbol{S}(Q)$: $k \rightarrow p$.

Příklad 9

Je dán trojúhelník ABC, kde $t_a = 4{,}5$ cm, $v_a = 4$ cm, $c = 6$ cm.. Zobrazte trojúhelník ABC v zobrazení, které vznikne složením osové souměrnosti s osou o, která je tečnou ke kružnici opsané trojúhelníka ABC, a středové souměrnosti se středem S, kde S je střed kružnice opsané.

Řešení:

Trojúhelník ATV je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu V, proto bod V leží na Thaletově kružnici s poloměrem TO. Odvěsna AV má délku v_a. Bod B leží na přímce TV a je od bodu A vzdálen délkou c. Bod T je střed úsečky BC, proto bod C je obrazem bodu B ve středové souměrnosti se středem T. Trojúhelník $A'B'C'$ je obrazem $\Delta\ ABC$ v osové souměrnosti s osou o. $\Delta\ A''B''C''$ je obrazem $\Delta\ A'B'C'$ ve středové souměrnosti se středem S.

Zápis konstrukce:

1. AT; $|AT| = 4{,}5$ cm
2. O; O je střed AT
3. k; $k(A;\ r_k = 4$ cm$)$
4. l; $l(O;\ r_l = |OA|)$
5. V; $V \in k \cap l$
6. m; $m(A;\ r_m = 6$ cm$)$
7. VT
8. B; $B \in \leftrightarrow VT \cap m$
9. C; $\boldsymbol{S}(T)$: $B \rightarrow C$
10. $\Delta\ ABC$
11. o_1; o_1 je osa AC
12. o_2; o_2 je osa BC
13. S; $S \in o_1 \cap o_2$
14. n; $n(S;\ r_n = |SA|)$
15. P; $P \in n$
16. t; $t \perp SP$; $t = o$
17. A'; $\boldsymbol{O}(t)$: $A \rightarrow A'$
18. B'; $\boldsymbol{O}(t)$: $B \rightarrow B'$

19. C'; $\boldsymbol{O}(t)$: $C \to C'$

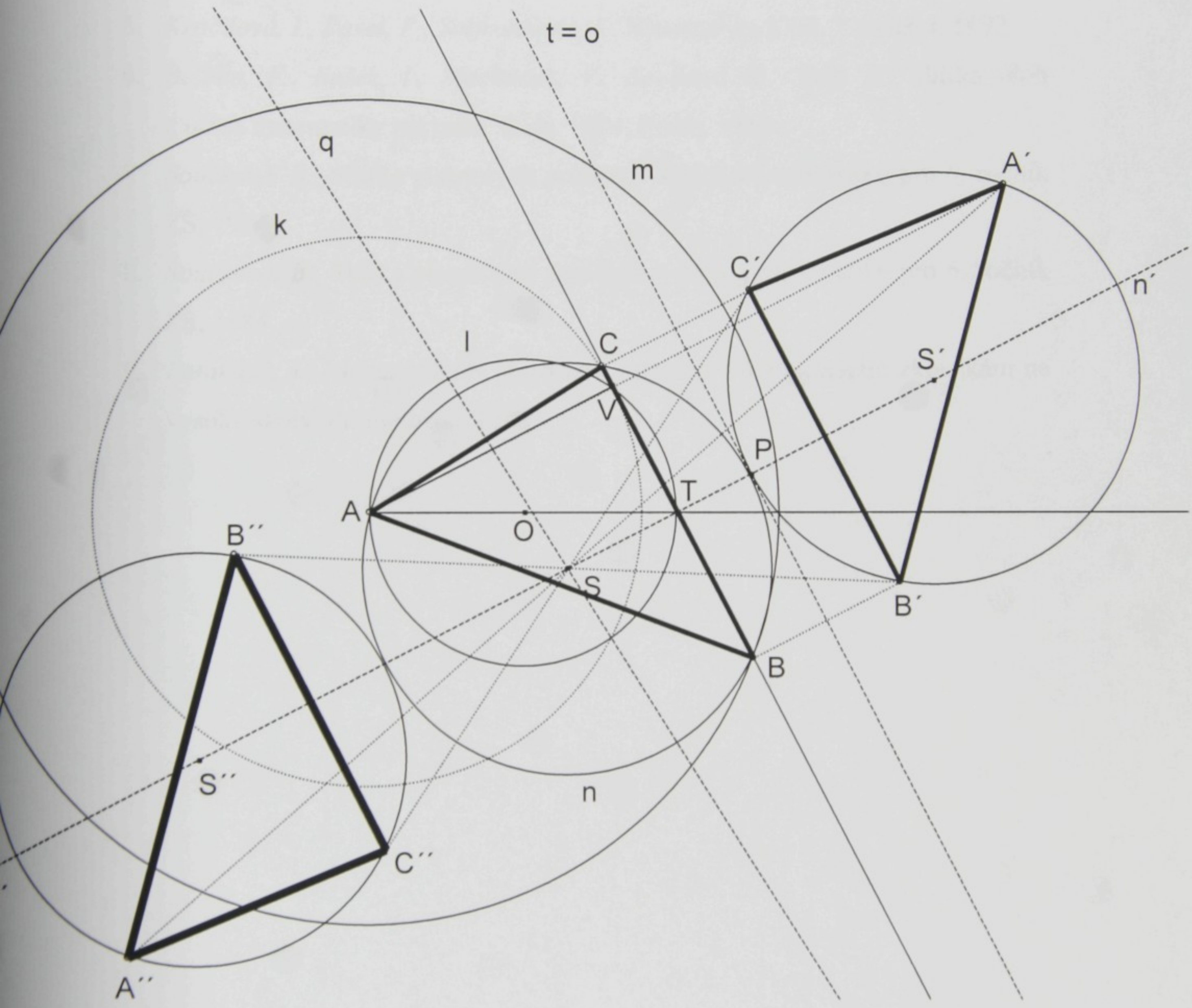
20. $\Delta\, A'B'C'$

21. A''; $\boldsymbol{S}(S)$: $A' \to A''$

22. B''; $\boldsymbol{S}(S)$: $B' \to B''$

23. C''; $\boldsymbol{S}(S)$: $C' \to C''$

24. $\Delta\, A''B''C''$



Obr. 118

Diskuse:

Úloha má v dané polorovině ATV jedno řešení.

Seznam použité literatury

1. *Pomykalová, E.*: Matematika pro gymnázia – Planimetrie, Prometheus, 1999
2. *Trejbal, J., Filip, Š., Kuřinová, E., Mäsiar, P.*: Sbírka úloh z Matematiky pro 7. ročník ZŠ, Státní Pedagogické nakladatelství., Praha, 1992.
3. *Boček, L.*: Základy Planimetrie, SPN, Praha, 1990.
4. *Šedivý, J.*: Shodnost a podobnost v konstrukčních úlohách, Mladá Fronta, Praha, 1980
5. *Kročilová, I., Pavel, P., Solfronková, J.*: Matematika I. díl, 2. vydání, 1992
6. *Běloun, F., Bušek, I., Macháček, V., Sovíková K., Šůla, V.*: Sbírka úloh z učiva matematiky základní školy, SPN, Praha, 1985
7. *Součková, B.*: Sbírka písemných prověrek a úloh z Matematiky pro 5. ročník ZŠ, 1984
8. *Součková, B.*: Sbírka písemných prověrek a úloh z Matematiky pro 6. ročník ZŠ, 1984
9. *Petáková, J.*: Matematika – příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy, Prométheus, 1998