Miloslav Nekvinda

AUTOMATY

PRACUJÍCÍ V REÁLNÉM ČASE

Kandidátská práce

VŠST Liberec, únor 1966

A U T O M A T Y

P R A C U J Í C Í v R E Á L N É M Č A S E

Kandidátská práce

Aspirant: Miloslav N e k v i n d a ,
VŠST Liberec

Školitel: Dr. Josef B í l ý ,
Matematicko-fysikální fakulta KU, Praha

Úvod

V posledních letech se v teorii automatů stále více pozornosti věnuje otázkám složitosti různých algoritmických procesů, specielně otázkám počítání v reálném čase. Jedním z prvních pokusů vyložit teorii počítání v reálném čase je patrně práce H. YAMADY [8], [9], ve které autor zavádí pojem funkce vyčíslitelné v reálném čase. Vyšetřuje rostoucí funkce, jejichž oborem jsou přirozená čísla a jejich funkční hodnoty jsou opět přirozená čísla. K vyčíslování funkcí užívá vícepáskových automatů bez vstupu, pracujících v diskrétní časové škále a vydávajících v každém taktu symbol 0 nebo 1. Takový automat vyčísluje tedy nekonečnou posloupnost $\beta = \beta_1 \beta_2 \dots \beta_n \dots$, $\beta_i \in \{0,1\}$, $i = 1,2,\dots$, příslušná funkce je pak dána vztahem

$$f(n) = \min \left(k, \sum_{i=1}^{k} \beta_i = n\right).$$

Ukazuje některé třídy funkcí vyčíslitelných v reálném čase a některé operace, které lze s těmito funkcemi provádět, abychom dostali opět funkce vyčíslitelné v reálném čase.

M.O. Rabin zavádí v [6] pojem jevu rozeznatelného v reálném čase. Užívá vícepáskových automatů se vstupem a výstupem. Každé posloupnosti vstupních symbolů, tj. vstupnímu slovu $\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$ přiřazuje automat binární výstupní posloupnost stejné délky $\beta_1 \beta_2 \dots, \beta_n$. (Symbol β_i je ovšem vydán v i-tém taktu,

$i = 1,2,\ldots,n$) Automat J rozpoznává daný jev A (tj. podmnožinu vstupních slov), jestliže platí: $\alpha \in A \Leftrightarrow \beta_n = 1$. Kdyby vstupní abeceda byla jednoprvková (šlo by vlastně o automat bez vstupu), automat J by vyčísloval nějakou yamadovskou funkci. Lze tedy yamadovské automaty chápat jako speciální případ automatů, pracujících v reálném čase ve smyslu Rabinově (viz [6]).

Hartmanis, Stearns v [5] zavádějí pojem složitosti dané posloupnosti (nekonečné), která má být automaty jisté třídy vyčíslována. Složitost je měřena tím, jak dlouho (tj. kolik taktů) trvá výpočet prvních n členů posloupnosti. Přitom se připouští, že automat může v jednom taktu vydat více výstupních symbolů, i když omezeně mnoho (nebo též žádný). Nekonečnou posloupnost považují za vyčíslitelnou v reálném čase, existuje-li automat, který pro libovolné n vyčíslí prvých n členů této posloupnosti ne později než během prvních n taktů. Takto chápané počítání v reálném čase je ovšem odlišné od pojetí Yamady [8]. Je zřejmé, že je-li nekonečná posloupnost α yamadovsky vyčíslitelná, je vyčíslitelná v reálném čase ve smyslu Hartmanise a Stearnse.

Existují další práce, zabývající se počítáním v reálném čase a otázkami složitosti algoritmů, např. práce V.A. Trachtenbrota [7] , O obecných otázkách této problematiky je ~~informována~~ referováno např. v článku J. Bečváře [2] .

V této práci se vyšetřují automaty, pracující v reálném čase ve smyslu Rabina. V první a ve druhé části se vyšetřují základní vlastnosti těchto automatů. Je dokázána věta 2.1 , ze které snadno plyne např. věta o kompresi času i prostoru paměti. Ve třetí části jsou řešeny některé konkrétní úlohy, týkající se vyčíslování operátorů resp. jevů v reálném čase. Čtvrtá část se stručně dotýká problematiky automatů, které mohou ~~jít~~ mít na jedné pásce více čtecích ~~slov~~ hlav, v páté části je učiněn pokus klasifikovat operátory (jevy) vyčíslitelné v reálném čase podle toho, jak velký prostor paměti je potřebný k jejich vyčíslení. Tato část svými výsledky souvisí jednak s prací I. Hartmanise, P.M. Levise II a R. E. Stearnse [4], jednak s prací H. Yamady [8] .

Děkuji svému školiteli Dr Josefu Bílému za porozumění a pomoc, kterou mi obětavě v průběhu mé aspirantury poskytoval.

Tato práce vznikla v souvislosti s činností semináře z teorie automatů, který probíhá na VŠST v Liberci. Vedoucímu semináře doc. Jiřímu Bečvářovi vděčím nejen za řadu cenných podnětů a připomínek, ale i za příznivé podmínky, které mi pro práci během aspirantury jako vedoucí katedry vytvořil.

Liberec, únor 1966

Miloslav Nekvinda

1. Základní pojmy

Nechť A je konečná množina. Symbolem A^∞ budeme značit množinu všech konečných posloupností (slov), jejichž členy jsou prvky z A. Jestliže $a \in A^\infty$, pak symbolem $d(a)$ označíme počet členů posloupnosti a. Je-li $a \in A^\infty$, $b \in A^\infty$, $a = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m$, $b = \beta_1 \beta_2 \dots \beta_n$, $\alpha_i, \beta_j \in A$, pak ab (sřetězení slov a,b) je slovo z A^∞ tvaru $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m \beta_1 \beta_2 \dots \beta_n$. Zřejmě $d(ab) = d(a) + d(b)$. Prázdné slovo označujeme symbolem ϕ. Zřejmě $a\phi = \phi a = a$. Množina A^∞ tvoří pologrupu s jednotkou ϕ vzhledem k operaci sřetězení.

Značnou část otázek z teorie automatů lze formulovat v termínech zobrazení vhodných pologrup A^∞ do B^∞. V dalším budeme předpokládat, že A, B jsou konečné množiny.

Definice 1.1. Zobrazení (operátor) F A^∞ do B^∞ se nazývá automatové, jsou-li splněny následující podmínky:

1. $a \in A^\infty$, $b \in B^\infty$, $b = F(a) \Rightarrow d(b) = d(a)$
2. $a \in A^\infty$, $a = a_1 a_2$, $b = F(a) \Rightarrow b = b_1 b_2$, $b_1 = F(a_1)$.

Jevem v pologrupě A^∞ rozumíme jakoukoliv podmnožinu slov J pologrupy A^∞. Každý jev $J \subset A^\infty$ lze charakterisovat s pomocí automatového zobrazení F A^∞ do B^∞, kde $B = \{0,1\}$, definovaného následujícím způsobem:

Nechť $a \in A^\infty$, $F(a) = b = \beta_1 \beta_2 \dots \beta_n$. Pak $a \in J \Leftrightarrow \beta_n = 1$.

Je zřejmé, že automatové zobrazení je udanou podmínkou jednoznačně určeno. Obráceně, je-li dáno automatové zobrazení F z A^{∞} do B^{∞}, $B = \{0,1\}$, existuje právě jeden jev $J \subset A^{\infty}$ takový, že příslušný operátor Φ je totožný s F.

Vzniká přirozeně otázka, zda lze k danému jevu realizovat nějaké zařízení, které by jej rozeznávalo, přesněji nějaký automat, na jehož vstup jdou postupně symboly slova $a \in A^{\infty}$ a který na výstupu vydává buď symbol 1 nebo 0 podle toho, zda dané slovo, které bylo vstupním zařízením sejmuto, patří do daného jevu či nikoliv. Budeme požadovat, aby automat pracoval v nějaké diskrétní časové škále $t_1 < t_2 < \dots$. Na vstup tedy postupně v uvedených časových okamžicích přicházejí symboly vstupního slova a a na výstupu v týchž časových okamžicích jsou vydávány výstupní symboly. Je jasné, že jde jen o matematickou idealizaci takového zařízení, neboť symbol, který je v i-tém časovém okamžiku na výstupu, závisí obecně též na i-tém vstupním symbolu; prakticky ovšem nelze v nulovém čase provést zpracování vstupní informace. Tento způsob koordinace výstupu se vstupem lze chápat tak, že po i-tém vstupním symbolu je další vstupní symbol pro automat nedosažitelný (vstup je zablokován) do té doby, dokud se na výstupu neobjeví i-tý výstupní symbol. Za časovou škálu lze vzít zřejmě přirozená čísla $t = 1,2,\dots$, kterým dále budeme říkat takty (časový okamžik $t = n$ je n-tý takt). Požadavek ~~Požadovat~~ realizace nějakého operátoru dále vyžaduje, aby příslušný automat byl v jistém smyslu konečný. Budeme požadovat, aby operační jednotka obsahovala omezený počet vnitřních stavů. Automat bude mít k disposici konečný počet neomezených pásek, které budou na začátku práce, tj. v 1.taktu prázdné. Půjde tedy o rostoucí automat. Tyto úvahy zpřesníme v následující definicí.

Děfinice 1.2 Mějme konečné neprázdné množiny (abecedy) $\mathcal{F}$ (abeceda vnitřních stavů), Σ (vstupní abeceda), $\mathcal{S}_i$ (pracovní abeceda i-té pásky), $i = 1,2,\ldots,n$, Π (výstupní abeceda), $M = \{0,1,-1\}$.
Automat J s n-páskami je konečná množina $(3n + 4)$-tic tvaru

(1.1) $$(s_i;\ \alpha_j;\ S_{i_1}, S_{i_2},\ldots, S_{i_n};\ S_{j_1}, S_{j_2},\ldots, S_{j_n};\ m_1, m_2,\ldots m_n;\ s_k;\ \beta_\ell)$$

taková, že k libovolné možné kombinaci prvých $n + 2$ symbolů existuje právě jedna taková $(3n + 4)$-tice. Přitom $s_i \in \mathcal{F}$; $\alpha_j \in \Sigma$, $S_{i_p} \in \mathcal{S}_p$, $S_{j_p} \in \mathcal{S}_p$, $p = 1,2,\ldots,n$; $m_i \in M$, $i = 1,2,\ldots,n$; $s_k \in \mathcal{F}$; $\beta_\ell \in \Pi$.

Je zřejmé, že automat lze chápat jako zobrazení množiny (kartézského součinu) $\mathcal{F} \times \Sigma \times \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2 \times \ldots \times \mathcal{S}_n$ do množiny $\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2 \times \ldots \times \mathcal{S}_n \times M^n \times \mathcal{F} \times \Pi$, kde $M^n = M \times M \times \ldots \times M$(n-krát). Dané $(3n + 4)$-tici tvaru (1.1) odpovídá přiřazení

(1.2) $$(s_i;\alpha_j;\ S_{i_1}, S_{i_2},\ldots,S_{i_n}) \to (S_{j_1}, S_{j_2},\ldots,S_{j_n};\ m_1, m_2, \ldots, m_n;\ s_k;\ \beta_\ell)$$

Budeme též říkat, že pravidla (1.1) resp. (1.2) jsou substituční pravidla automatu J. Poznamenejme, že definicí (1.2) není ještě příslušný automat zcela popsán. Jde o to, jak budeme daná substituční pravidla interpretovat. To provedeme v dalších definicích, kde zavedeme pojem konfigurace automatu. Předpokládejme, že každá z abeced $\mathcal{S}_i$ obsahuje prázdný symbol Λ, $i = 1,2,\ldots,n$, dále, že existuje nějaký počáteční vnitřní stav $s_0 \in \mathcal{F}$ automatu, tj. stav, ve kterém se automat nachází v 1. taktu. Dále předpokládejme, že v 1. taktu je na všech buňkách libovolné pracovní pásky zapsán symbol Λ (pásky jsou prázdné). Na umístění čtecích hlav v 1.taktu pak nezáleží. Stav celého automatu (konfiguraci) lze popsat tím, že uvedeme

1. vnitřní stav automatu
2. slova jež jsou zapsána na pracovních páskách
3. umístění čtecích hlav .

Definice 1.3 . Nechť Δ_i non $\in \mathcal{S}_j$, $i,j = 1,2,\ldots,n$.

Konfigurace K automatu J je (n + 1)-tice slov tvaru

(1.3) $$K = (s_i;\ X_1\Delta_1X_1'\ ;\ X_2\Delta_2X_2'\ ;\ \ldots\ ;\ X_n\Delta_nX_n'\ ),$$

kde $s_i \in \mathcal{F}$, $\phi \neq X_i \in \mathcal{S}_i^{\infty}$, $X_i' \in \mathcal{S}_i^{\infty}$, $i = 1,2,\ldots, n$.

Nyní sestrojíme zobrazení φ, ψ, které libovolné dvojici (α_j, K), $\alpha_j \in \Sigma$, K je konfigurace automatu J, přiřadí výstupní symbol a novou konfiguraci K'.

Nechť $\alpha_j \in \Sigma$, K je konfigurace tvaru (1.3). Označme $pr_i(K)$ = poslední symbol ve slově X_i, $i = 1,2,\ldots,n$. (Symbol $pr_i(K)$ representuje symbol čtený na i-té pásce.)

Utvořme (n+2)-tici $(Y_1;Y_2;Y_3,\ldots,Y_{n+2})$, kde $Y_1 = s_i$ (tj. první symbol v konfiguraci K), $Y_2 = \alpha_j$, $Y_{2+i} = pr_i(K)$, $i = 1,2,\ldots,n$. Tato (n+2)-tice je dvojicí (α_j, K) jednoznačně určena. Nyní vezmeme pravidlo (1.2), jehož levá strana je totožná s (n+2)-ticí $(Y_1,Y_2,\ldots,Y_{n+2})$. Symbol β_ℓ v tomto pravidle je příslušný výstupní symbol. Zobrazení

(1.4) $$\beta_\ell = \varphi(\alpha_j, K)$$

je tedy jednoznačně určeno. Nyní určíme konfiguraci K'. Z určeného pravidla (1.2) jsou vidět symboly, jež mají být na aktivních buňkách napsány, posuny čtecích hlav a nový stav s_k. Jde o to, jak se změní i-té slovo konfigurace K, $i = 2,\ldots,n+1$. Vezměmě případ $i = 2$ (v ostatních případech je vše analogické); vezměme tedy slovo $P_1 = X_1 \Delta_1 X_1'$; výsledné slovo na 1.pásce označme P_1'. Mohou nastat tyto případy:

1. $m_1 = -1$
   a) je-li $d(X_1) \geq 2$, tedy $X_1 = Z_1 S_{i_1}$, $S_{i_1} \in \mathcal{S}_1$, $\phi \neq Z_1 \in \mathcal{S}_1^\infty$;
   pak $P_1' = Z_1 \Delta_1 S_{j_1} X_1'$.
   b) je-li $d(X_1) = 1$, pak $P_1' = \Lambda \Delta_1 S_{j_1} X_1'$.
2. $m_1 = 0$. Označme $X_1 = Z_1 S_{i_1}$; jest $P' = Z_1 S_{j_1} \Delta_1 X_1'$.
3. $m_1 = 1$. Označme $X_1 = Z_1 S_{i_1}$.
   a) je-li $d(X_1') = 0$, pak $P_1' = Z_1 S_{j_1} \Lambda\ \Delta_1$,
   b) je-li $d(X_1') \geq 1$, tedy $X_1' = S_1' Z_1'$, $S_1' \in \mathcal{S}_1$, $Z_1' \in \mathcal{S}_1^\infty$.

Pak $\quad P_1' = Z_1 S_{j_1} S_1' \Delta_1 Z_1'$

Analogicky definujeme slova $P_2', \dots, P_n'$. $K' = (s_k; P_1'; P_2'; \dots; P_n')$ je hledaná konfigurace. Zobrazení ψ

(1.5) $$K' = \psi(\alpha_j, K)$$

je zřejmě jednoznačně určeno.

Definice 1.4

Vztahy (1.4), (1.5) se nazývají kanonické rovnice automatu J, definovaného pravidly (1.1), funkce φ, ψ sě nazývají kanonické funkce.

Nechť $s_0 \in \mathcal{F}$ je počáteční stav automatu J. Konfigurace

(1.6) $$(s_0; \Lambda\Delta_1; \Lambda\Delta_2; \dots; \Lambda\Delta_n)$$

se nazývá počáteční. Pomocí kanonických rovnic automatu J určíme automatové zobrazení Σ^∞ do Π^∞, které automat definuje. Buď dáno slovo $a \in \Sigma^\infty$, $a = \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_p$. Počáteční konfiguraci automatu J označme K_1. Položme

$$K_2 = \psi(\alpha_1; K_1) \;;\; \beta_1 = \varphi(\alpha_1; K_1)$$

$$K_3 = \psi(\alpha_2; K_2) \;;\; \beta_2 = \varphi(\alpha_2; K_2)$$

(1.7)

$$K_{p+1} = \psi(\alpha_p; K_p); \; \beta_p = \varphi(\alpha_p; K_p)$$

Vztahy (1.7) je jednoznačně určeno slovo $b = \beta_1\beta_2\dots,\beta_p$. Zobrazení $b = \Phi(a)$ je zřejmě automatové. Operátor Φ je jednoznačně určen automatem J (tj. substitučními pravidly (1.1)) a počátečním stavem s_0; označujme jej Φ_J.

Je zřejmé, že definiční obor funkcí φ, ψ lze rozšířit tak, že první argument může být libovolné slovo $a \in \Sigma^\infty$. Nechť $a = \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p$, K je konfigurace. Položíme-li

$$K_1 = K,\quad K_{i+1} = \psi(\alpha_i, K_i),\quad \beta_i = \varphi(\alpha_i, K_i),$$
$$i = 1,2,\ldots,p\ ,$$

jsou $K_{p+1} = \psi(a,K)$, $\beta_1\beta_2\ldots\beta_p = \varphi(a,K)$ hledaná rozšíření, definujeme-li $\psi(\phi,K) = K$; $\varphi(\phi, K) = \phi$.

Zřejmě platí: nechť K je konfigurace, $a_1 \in \Sigma^\infty$, $a_2 \in \Sigma^\infty$. Označme

$$K_1 = \psi(a_1,K) \qquad b_1 = \varphi(a_1,K)$$
$$K_2 = \psi(a_2,K_1) \qquad b_2 = \varphi(a_2,K_1)$$
$$K_3 = \psi(a_1a_2,K) \qquad b = \varphi(a_1a_2,K)\ .$$

Pak $K_2 = K_3$, $b = b_1 b_2$.

Definice 1.5 Nechť K je konfigurace automatu J tvaru (1.3), nechť k je přirozené číslo. Okolím k-tého řádu konfigurace K rozumíme konfiguraci

(1.8) $\quad O(K,k) = (s_i;\ Y_1\Delta_1 Y_1';\ X_2\Delta_2 Y_2';\ldots;\ Y_n\Delta_n Y_n')$,

těchto vlastností:

1. Jestliže $d(X_i) = p \leqq k$, pak $Y_i = \Lambda^{k-p} X_i$,
   je-li $d(X_i) > k$, pak $X_i = Z_i Y_i$, $d(Y_i) = k$, $i = 1,2,\ldots n$.
2. Jestliže $d(X_i') = q \leqq k - 1$, pak $Y_i' = X_i' \Lambda^{k-q-1}$,
   jestliže $d(X_i') \geqq k$, pak $X_i' = Y_i' Z_i$, $d(Y_i') = k-1$,
   $i = 1,2,\ldots,n$.

Je zřejmé, že platí: nechť k je přirozené číslo, nechť K_1, K_2 jsou konfigurace automatu J, $O(K_1,k) = O(K_2,k)$, nechť $a \in \Sigma^\infty$, $d(a) \leqq k$, Pak $\varphi(a,K_1) = \varphi(a,K_2)$.

2. Vlastnosti automatů, pracujících v reálném čase

Pojem automatu, jak byl zaveden v definici 1.2, je možno zobecnit, a to tím způsobem, že a) pracovní hlava na libovolné pásce čte a přepisuje v daném taktu současně více sousedních symbolů, b) posun čtecí hlavy může být o více buněk vpraco resp. vlevo. Pro jednodu - chost formulace udáme příslušnou definici pouze pro jednopáskový automat.

Definice 2.1 Nechť r,m jsou přirozená čísla. Nechť jsou dány abecedy $\mathcal{F}$ (abeceda vnitřních stavů), Σ (vstupní abeceda), $\mathcal{S}$ (abeceda prac.pásky), Π (výstupní abeceda), $M = \{-m,-m+1,\dots,-1,0,1,\dots,m\}$. Automat s jednou páskou je konečná množina sedmic tvaru

$$(s_i; \alpha_j; S_{i_1}S_{i_2}\dots S_{i_r}; S_{j_1}S_{j_2},\dots S_{j_r}; m_l; s_k;\beta_\ell) \tag{2.1}$$

taková, že k libovolné kombinaci prvých tří slov existuje právě jedna sedmice. Přitom

$$s_i, s_k \in \mathcal{F}\,;\quad \alpha_j \in \Sigma\quad;\ S_{i_p} \in \mathcal{S},\ S_{j_p} \in \mathcal{S},\ p=1,2,\dots,r;$$
$$m_l \in M,\quad \beta_\ell \in \Pi.$$

Budeme říkat, že definovaný automat patří do třídy $J_{r;m}$.

Definice 2.2 Nechť n je přirozené číslo, nechť $\vec{r} = (r_1,r_2,\dots,r_n)$ $\vec{m} = (m_1,m_2,\dots,m_n)$ jsou n-tice přirozených čísel. Symbolem $J^n_{\vec{r},\vec{m}}$ budeme označovat třídu automatů s n páskami, pro něž platí:

1. pracovní hlava i-té pásky čte a přepisuje v daném taktu současně r_i sousedních symbolů (slovo napsané na r_i sousedních ~~pás~~ buň-kách), $i = 1,2,\dots,n$.

2. posun i-té pracovní hlavy v daném taktu je udán číslem z množiny $M_i = \{-m_i, -m_i+1 \dots, -1,0,1,\dots,m_i\}$, $i = 1,2,\dots,n$.

Je zřejmé, jak by vypadala přesná definice automatu třídy $J^n_{\vec{r},\vec{m}}$. Automaty udané definicí 2.1 patří tedy do třídy $J^1_{r,m}$, kde r,m jsou přirozená čísla, automaty, udané definicí 1.2 , patří do třídy $J^n_{\vec{e},\vec{e}}$, kde $\vec{e} = (1,1,\dots,1)$ je n-tice, jejíž všechny souřadnice jsou rovny jedné.

Podobně jako byl v případu automatu třídy $J^n_{\vec{e},\vec{e}}$ zaveden pojem konfigurace, je možno zavést zřejmým způsobem pojem konfigurace automatu třídy $J^n_{\vec{r},\vec{m}}$ a nalézt příslušné kanonické rovnice (viz vztahy (1.7)).

V dalším půjde o to, dokázat, že operátor, realizovatelný nějakým automatem třídy $J^n_{\vec{r},\vec{m}}$ je možno vždy realizovat vhodným automatem třídy $J^n_{\vec{e},\vec{e}}$.

Lemma 2.1 Buď dán automat $J \in J^1_{r,m}$. Pak existuje automat $\bar{J} \in J^1_{r+m-1,m}$ těchto vlastností:

1. množina M_1, udávající možné posuny čtecí hlavy automatu $\bar{J}$ je rovna $\{-m,0,m\}$.
2. $\Phi_{\bar{J}} = \Phi_J$.

Důkaz: Nechť abecedy a substituční pravidla automatu J jsou dány definicí 2.1 . Za abecedy automatu $\bar{J}$ zvolíme:

$\mathcal{F}_1 = \{(s,p);\ s \in \mathcal{F},\ p \in \{1,2,\dots,m\}\}$, $\Sigma_1 = \Sigma$, $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}$,
$\Pi_1 = \Pi$, $M_1 = \{-m,0,m\}$.

Počáteční stav automatu $\bar{J}$ je dvojice $(s_0,1)$, kde s_0 je počáteční stav automatu J . Nyní zkonstruujeme substituční pravidla automatu $\bar{J}$, jež mají tvar

(2.2) $(\bar{s}_u;\ \alpha_j;\ a_{r+m-1}) \rightarrow (b_{r+m-1};\ \bar{m};\ \bar{s}_v;\ \bar{\beta}_\ell)$,

kde $\bar{s}_u,\ \bar{s}_v \in \mathcal{F}_1$, $\bar{m} \in M_1$, $\alpha_j \in \Sigma_1$, $\beta_\ell \in \Pi_1$, $a_{r+m-1} \in \mathcal{S}_1^\infty$,
$b_{r+m-1} \in \mathcal{S}_1^\infty$, $d(a_{r+m-1}) = d(b_{r+m-1}) = r+m-1$.

Buď

$(*)$ $((s_i,p)\ ;\ \alpha_j;\ a_{r+m-1})$

levá strana substitučního pravidla (2.2) . Označme $a_{r+m-1} = a_{p-1}\, a_r\, a_{m-p}$, kde indexy značí současně délku slov. Výrazem $(*)$ je jednoznačně určena trojice $(s_i;\alpha_j;\ a_r)$, tj. levá strana jistého substitučního pravidla automatu J . Nechť toto pravidlo má tvar

$$(s_i;\alpha_j;\ a_r) \rightarrow (b_r;\ m_1;\ s_k;\ \beta_\ell) .$$

Položme

1. $b_{r+m-1} = a_{p-1}\, b_r\, a_{m-p}$,
2. $\bar{\beta}_\ell = \beta_\ell$.

Definujme funkce $f(i)$, $g(i)$ pro $i = -m+1, -m+2,\dots,0,1,\dots 2m$ takto:

$f(i) = i + m$, $g(i) = -m$ pro $i \leq 0$;
$f(i) = i$, $g(i) = 0$ pro $i = 1,2,\dots,m$;
$f(i) = i - m$, $g(i) = m$ pro $i = m+1,m+2,\dots,2m$

a položme

3. $\overline{m} = g(m_1+\mu)$,

4. $\overline{s}_v = (s_k, q)$, $q = f(m_1+\mu)$.

Uvedenými podmínkami je je každé levé straně substitučního pravidla (2.2) jednoznačně určena i jeho pravá strana. Je zřejmé, že pro zkonstruovaný automat $\overline{J}$ platí $\overline{J} \in J^1_{r+m-1,m}$ a první podmínka lemmatu. Nyní dokážeme, že operátory realizované automaty J, $\overline{J}$ jsou totožné. V dalším budeme zkonstruovaný automat $\overline{J}$ nazývat sdruženým s J .

Řekneme, že konfigurace K automatu J je sdružená s konfigurací $\overline{K}$ automatu $\overline{J}$ sdruženého s J , sjestliže platí

$$K = (s_i;\ a\Delta b) , \quad \overline{K} = (\ (s_i,p);\ c\Delta d\ ) ,$$

přičemž existuje slovo a_{m-p} délky $m-p$ takové, že

$$c = a\,a_{m-p} , \quad b = a_{m-p}\,d .$$

V posledních vztazích je rovnost chápána tak, že se nepřihlíží k prázdným symbolům na začátku resp. na konci uvedených slov, tedy např.

$$\Lambda\Lambda a_1 \Lambda\Lambda a_2 \Lambda = a_1 \Lambda\Lambda a_2 \Lambda\Lambda .$$

Poznámka. Symboly Δ vyskytující se v konfiguracích K, $\overline{K}$ vyznačují umístění pravého okraje čtecí hlavy, tedy např. poslední symbol slova a je nejpravějším symbolem slova pásky, který je čten čtecí hlavou v taktu, odpovídajícím konfiguraci K .

Je zřejmé, že počáteční konfigurace automatu J a $\overline{J}$, jež mají tvar

$$(s_0;\ \Lambda^r\Delta\ ) , \quad (\ (s_0,1)\ ;\ \Lambda^{r+m-1}\Delta\ )$$

jsou sdružené. Stačí nyní dokázat toto tvrzení:

Nechť $\varphi, \psi, \varphi_1, \psi_1$ jsou funkce, vyskytující se v kanonických rovnicích automatu J , $\overline{J}$. Jsou-li K, $\overline{K}$ sdružené konfigurace automatu J, $\overline{J}$ a $\alpha_j \in \Sigma\ (= \Sigma_1)$, pak

$\varphi(\alpha_j, K) = \varphi_1(\alpha_j, \overline{K})$ a konfigurace

$K_1 = \psi(\alpha_j, K)$, $\overline{K}_1 = \psi_1(\alpha_j, \overline{K})$ jsou sdružené .

Buďte tedy K, $\bar{K}$ sdružené konfigurace automatu J, $\bar{J}$. Pak pro vhodné přirozené p, $1 \leqq p \leqq m$ lze psát

(2.3) $K = (s_i;\ a\, a_{p-1}\, a_r \Delta a_{m-p}\ b)$, $\bar{K} = ((s_i,p);\ a a_{p-1} a_r a_{m-p} \Delta\ b)$.

Nechť $\alpha_j \in \Sigma$. Substituční pravidlo automatu J, které lze užít na konfiguraci K, má tvar

$$(s_i;\ \alpha_j;\ a_r;\ a_r';\ m_1;\ s_k;\ \beta_\ell).$$

Substituční pravidlo automatu $\bar{J}$, které lze užít na konfiguraci $\bar{K}$, má tvar

$$((s_i,p);\alpha_j;\ a_{p-1}\, a_r\, a_{m-p};\ a_{p-1}\, a_r'\, a_{m-p};\ \bar{m};\ (s_k,q);\beta_\ell),$$

kde $\bar{m}, q$ jsou jednoznačně určeny podmínkami 3 a 4. Je vidět, že $\varphi(\alpha_j,K) = \varphi_1(\alpha_j, \bar{K})$. Pokud jde o funkce ψ, ψ_1, uvažujme dva případy:

1. $m_1 \geqq 0$. Je tedy $1 \leqq m_1+p$.

a) $m_1+p \leqq m$. Podle vztahů 3 a 4 máme $q = m_1+p$, $\bar{m} = 0$. Označíme-li v (2.3) $a_{m-p} = a_{m_1}\, a_{m-m_1-p}$, máme

$$K_1 = \psi(\alpha_j, K) = (s_k,\ a\, a_{p-1}\, a_r'\, a_{m_1} \Delta\, a_{m-m_1-p}\ b),$$

$$\bar{K}_1 = \psi_1(\alpha_j, \bar{K}) = ((s_k,m_1+p);\ a\, a_{p-1}\, a_r'\, a_{m-p} \Delta\ b).$$

Zřejmě K_1, $\bar{K}_1$ jsou sdružené konfigurace.

b) $m_1+p > m$. Jest $q = m_1+p-m$, $\bar{m} = m$. Označíme-li v (2.3) $a_{m-p}\ b = a_{m_1}\, a_{m-q}\, a'$ (přitom slovo $a_{m-p}\ b$ eventuelně doplníme zprava prázdnými symboly tak, abychom dostali slovo délky aspoň $m_1 + m - q = 2m - p$), pak

$$K_1 = (s_k;\ a\, a_{p-1}\, a_r'\, a_{m_1} \Delta a_{m-q}\, a'),$$

$$\bar{K}_1 = ((s_k,q);\ a\, a_{p-1}\, a_r'\, a_{m_1}\, a_{m-q} \Delta\, a').$$

Je vidět, že konfigurace $K_1, \bar{K}_1$ jsou sdružené.

2. $m_1 < 0$. Tento případ lze vyšetřit analogicky jako předchozí.

Tím je tvrzení dokázáno. Tedy $\Phi_{\bar{J}} = \Phi_J$.

Lemma 2.2 Buď dán automat $J \in J^1_{r,m}$. Nechť množina M udávající možné posuny čtecí hlavy automatu J je rovna $\{-m; 0; m\}$. Pak existuje přirozené p a automat $\bar{J} \in J^1_{p,1}$ takový, že

$$\Phi_{\bar{J}} = \Phi_J .$$

Důkaz. Čtecí hlava automatu J má rozsah $r \geq 1$. Je zřejmé, že je možno rozsah čtecí hlavy fiktivně rozšířit tak, aby byl násobkem čísla m, aniž by se porušil operátor, který je automatem J realizován. Předpokládejme tedy, že $r = p.m$. Zvolme abecedy automatu $\bar{J}$:

$\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}$, $\Sigma_1 = \Sigma$, $\Pi_1 = \Pi$, $M_1 = \{-1; 0; 1\}$,

$\mathcal{S}_1 = \{a;\ a \in \mathcal{S}^\infty,\ d(a) = m\}$, kde symboly bez indexů $(\mathcal{F}, \Sigma, ,,,)$ označují abecedy automatu J. Rozsah čtecí hlavy automatu $\bar{J}$ je p. Ukažme, jak vypadají substituční pravidla automatu $\bar{J}$. Buď dána levá strana substitučního pravidla automatu $\bar{J}$:

(*) $(s_i;\ \alpha_j;\ a_1 a_2 \ldots a_p)$,

$a_i \in \mathcal{S}_1$, $i = 1,2,\ldots,p$. Tento výraz lze považovat za levou stranu substitučního pravidla automatu J. Nechť toto pravidlo má tvar

$$(s_i;\ \alpha_j;\ S_1 S_2 \ldots S_r;\ S_1' S_2' \ldots S_r';\ m_1;\ s_k;\ \beta_\ell),$$

kde $S_1 S_2 \ldots S_r = a_1 a_2 \ldots a_p$. Definujme $a_1', a_2', \ldots, a_p'$ a $\bar{m}_1$ vztahy $a_1' a_2' \ldots a_p' = S_1' S_2' \ldots S_r'$, $d(a_i') = m$, $i = 1,2,\ldots,p$; $\bar{m}_1 = \operatorname{sign} m_1$. Pak pravidlo odpovídající (*) má tvar

$$(s_i;\ \alpha_j;\ a_1 a_2 \ldots a_p;\ a_1' a_2' \ldots a_p';\ \bar{m}_1;\ s_k;\ \beta_\ell).$$

Je zřejmé, že takto definovaný automat $\bar{J}$ splňuje podmínky lemmatu.

Lemma 2.3 Buď dán automat $J \in J^1_{r,1}$. Pak existuje automat $\bar{J} \in J^1_{1,1}$ takový, že platí

$$\Phi_{\bar{J}} = \Phi_J .$$

Důkaz. Pro $r=1$ není co dokazovat. Nechť $r>1$. Za abecedy automatu $\bar{J}$ vezmeme $\Sigma_1 = \Sigma$, $\mathcal{F}_1 = \{s;\ s = (s_i;\ p;\ a),\ p \in \{-1;\ 0,\ 1\},\ a \in \mathcal{S}^{\infty},\ d(a) = r-1\}$, $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}$, $\Pi_1 = \Pi$, $M_1 = M$. Nechť

(2.4) $U = (s;\ \alpha_j;\ S_t)$

je levá strana substitučního pravidla automatu $\bar{J}$; přitom $\alpha_j \in \Sigma_1$, $S_t \in \mathcal{S}_1$, $s = (s_i;\ p;\ a)$, $s_i \in \mathcal{F}$, $a = S_{i_1} S_{i_2} \ldots S_{i_{r-1}} \in \mathcal{S}_1^{\infty}$.

Každé trojici U přiřadíme trojici $V = \xi(U)$ tvaru :

$$V = (s_i;\ \alpha_j;\ aS_t)\ ,\quad \text{je-li } p = 0,\ 1\ ,$$

(2.5) $$V = (s_i;\ \alpha_j;\ S_t a\ )\ ,\quad \text{je-li } p = -1\ .$$

V je levá strana nějakého substitučního pravidla automatu J ; nechť toto pravidlo má tvar $V \to X = f(V)$, kde

(2.6) $X = (S'_{i_1} S'_{i_2} \ldots S'_{i_n};\ m;\ s_k;\ \beta_\ell\ )$.

Definujme funkce g_1, h_1 proměnné X :

(2.7) $g_1(X) = m,\quad h_1(X) = \beta_\ell$.

Dále definujme funkce η_1, ξ_1 proměnné X (tj. pravé strany substitučního pravidla automatu J):

(2.8)
$$\left.\begin{aligned} \eta_1(X) &= S'_{i_r} \\ \xi_1(X) &= (s_k;\ m;\ S'_{i_1} S'_{i_2} \ldots S'_{i_{r-1}}) \end{aligned}\right\} \quad \text{pro } m = -1,\ 0$$
$$\left.\begin{aligned} \eta_1(X) &= S'_{i_1} \\ \xi_1(X) &= (s_k;\ m;\ S'_{i_2} S'_{i_3} \ldots S'_{i_r}) \end{aligned}\right\} \quad \text{pro } m = 1$$

Konečně definujme funkce argumentu U (tj. levé strany substitučního pravidla automatu J) :

$$\eta(U) = \eta_1(f(\xi(U))) = \eta_1(X);\quad \xi(U) = \xi_1(X);\quad g(U) = g_1(X),$$
$$h(U) = h_1(X)\ .$$

Substituční pravidla automatu $\bar{J}$ lze psát ve tvaru

(2.9) $U \to (\eta(U);\ g(U);\ \xi(U);\ h(U)\ )$.

Je zřejmé, že zkonstruovaný automat $\bar{J} \in J^1_{1,1}$. Dokážeme, že realizuje týž operátor jako automat J .

Definice. Řekneme, že konfigurace $K, \bar{K}$ automatu $J, \bar{J}$ jsou sdružené, jestliže platí

$$K = (s_i;\ a\ S_{i_1} S_{i_2} \dots S_{i_r}\ \Delta\ b) \tag{2.10}$$

a

$$\bar{K} = ((s_i;\ p;\ S_{i_1} S_{i_2} \dots S_{i_{r-1}});\ aS_{i_r}\ \Delta\ b), \quad \text{je-li } p = 0,1,$$
$$\bar{K} = ((s_i;\ p;\ S_{i_2} S_{i_3} \dots S_{i_r});\ a\ S_{i_1}\ \Delta\ b), \quad \text{je-li } p = -1\ . \tag{2.11}$$

Přitom $s_i \in \mathcal{F}$, $a \in \mathcal{S}^\infty$, $b \in \mathcal{S}^\infty$, $S_{i_j} \in \mathcal{S}$, $j = 1,2,\dots,r$.

Zřejmě počáteční konfigurace

$$K_1 = (s_o;\ \Lambda^r \Delta)\ ,\quad \bar{K}_1 = ((s_o;\ 0;\ \Lambda^{r-1})\ ;\ \Lambda\Delta\ )$$

automatu $J, \bar{J}$ jsou sdružené. Nechť φ, ψ resp. φ_1, ψ_1 jsou kanonické funkce automatu J resp. $\bar{J}$. Stačí dokázat, že platí: Nechť $K, \bar{K}$ jsou sdružené konfigurace automatu $J, \bar{J}$, $\alpha_j \in \Sigma$. Pak $\varphi(\alpha_j;\ K) = \varphi_1(\alpha_j;\ \bar{K})$ a konfigurace $K' = \psi(\alpha_j;\ K)$, $\bar{K}' = \psi_1(\alpha_j;\ K)$ jsou opět sdružené. Nechť tedy $K, \bar{K}$ jsou sdružené konfigurace automatu $J, \bar{J}$ tvaru (2.10),(2.11), $\alpha_j \in \Sigma$. Pak mohou nastat dva případy:

1. $p = 0$ resp. $p = 1$.

Levé strany substitučních pravidle automatů J resp. $\bar{J}$, které lze užít na konfigurace $K, \bar{K}$ tvaru (2.10),(2.11) a symbol α_j mají tvar

$$(s_i;\ \alpha_j;\ S_{i_1} S_{i_2} \dots S_{i_r}) \text{ resp. } ((s_i;\ p;\ S_{i_1} S_{i_2} \dots S_{i_{r-1}});\ \alpha_j;\ S_{i_r})\ .$$

Trojice V (viz (2.5)) má nyní tvar $(s_i; \alpha_j;\ S_{i_1} S_{i_2} \dots S_{i_r})$. Označme (viz (2.6)) $X = (S'_{i_1} S'_{i_2} \dots S'_{i_r};\ m;\ s_k;\ \beta_\ell)$.

Z definice funkce $h_1(X)$ vyplývá, že $\varphi(\alpha_j;K) = \varphi_1(\alpha_j;\bar{K})$. Pokud jde o konfigurace K', $\bar{K}'$, mohou nastat tyto případy:

a) číslo m ve výrazu X je rovno -1 . Označíme-li $a = \bar{a} S$, $\bar{a} \in \mathcal{S}^\infty$, $S \in \mathcal{S}$, jestliže $a \neq \phi$, pak (viz (2.6))

$$K' = (s_k;\ \bar{a}\ S\ S'_{i_1} S'_{i_2} \dots S'_{i_{r-1}}\ \Delta\ S'_{i_r}\ b\ )$$

a podle (2.7), (2.8)

$$\bar{K}' = ((s_k;\ -1;\ S'_{i_1} S'_{i_2} \dots S'_{i_{r-1}});\ \bar{a}S\ \Delta S'_{i_r}\ b\ ).$$

V případě $a = \phi$ máme $K' = (s_k;\ \Lambda S'_{i_1} S'_{i_2} \dots S'_{i_{r-1}}\ \Delta\ S'_{i_r} b)$,

$$\bar{K}' = ((s_k;\ -1;\ S'_{i_1} S'_{i_2} \dots S'_{i_{r-1}});\Lambda\ \Delta S'_{i_r}\ b\ ).$$

Je vidět, že $K', \bar{K}'$ jsou opět sdružené konfigurace.

b) $m = 0$. V tomto případě je zřejmě

$$K' = (s_k;\ aS'_{i_1} S'_{i_2} \dots S'_{i_r}\ \Delta\ b)\ ,\quad \bar{K}' = (s_k;\ 0;\ S'_{i_1} S'_{i_2} \dots S'_{i_{r-1}});\ aS'_{i_r}\ \Delta\ b).$$

c) $m = 1$. Označíme-li $b = S\bar{b}$, $S \in \mathcal{S}$, $\bar{b} \in \mathcal{S}^\infty$, jestliže $b \neq \phi$, pak podle (2.6), (2.7), (2.8) máme

$$K' = (s_k;\ a\ S'_{i_1} S'_{i_2} \dots S'_{i_r}\ S\ \Delta\ \bar{b}\ )$$

$$\bar{K}' = ((s_k;\ 1;\ S'_{i_2} S'_{i_3} \dots S'_{i_r});\ a\ S'_{i_1} S\ \Delta\ \bar{b}).$$

Jestliže $b = \phi$, pak

$$K' = (s_k;\ a\ S'_{i_1} \dots S'_{i_r}\ \Lambda\ \Delta)\ ,$$

$$\bar{K}' = ((s_k;\ 1;\ S'_{i_2} S'_{i_3} \dots S'_{i_r});\ a\ S'_{i_1}\ \Lambda \Delta\ ).$$

Je vidět, že jak v případě b), tak i v případě c) jsou konfigurace $K', \bar{K}'$ sdružené.

2. $p = -1$. Nechť $K, \bar{K}$ mají tvar (2.10), (2.11), $\alpha_j \in \Sigma$.

Levá strana substitučního pravidla automatu $\bar{J}$, které lze užít na

konfiguraci $\bar{K}$ a α_j, má tvar $((s_i; -1; S_{i_2}S_{i_3}\ldots S_{i_r}); \alpha_j; S_{i_1})$. Odpovídající trojice V (2.5) má tvar $(s_i; \alpha_j; S_{i_1}S_{i_2}\ldots S_{i_r})$ a je totožná s levou stranou substitučního pravidla automatu J, které je možno užít ke konfiguraci K a symbolu α_j.
Odpovídající pravá strana tohoto substitučního pravidla má tvar (2.6). Je snadno vidět, že $\varphi(\alpha_j, K) = \varphi_1(\alpha_j, \bar{K})$. Nyní se analogicky jako v prvním případě zjistí, že konfigurace $\varphi(\alpha_j, K)$, $\varphi_1(\alpha_j, \bar{K})$ jsou sdružené. Tím je lemma dokázáno.

Všechna předchozí lemmata byla formulována pro případ, kdy automat J měl pouze jedinou pracovní pásku. Z důkazů je patrné, že tato lemmata zůstanou v platnosti i v případě vícepáskového automatu, budou-li se úpravy, jež se prováděly pro jednopáskový automat, provádět jen pro jedinou (např.první) pracovní pásku a ostatní pásky se ponechají beze změny. Ukážeme, jak je možno formulovat lemma 2.3 v obecném případě vícepáskového automatu.

Lemma 2.3′ Nechť $\vec{r} = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$, $\vec{m} = (1, m_2, m_3, \ldots, m_n)$, $\vec{r}_o = (1, r_2, r_3, \ldots, r_n)$ jsou n-tice přirozených čísel. Buď dán automat $J \in J^n_{\vec{r},\vec{m}}$. Pak existuje automat $\bar{J} \in J^n_{\vec{r}_o,\vec{m}}$ takový, že platí

$$\Phi_{\bar{J}} = \Phi_J \quad .$$

Jestliže je tedy dán automat $J \in J^n_{\vec{r},\vec{m}}$, kde $\vec{r} = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$, $\vec{m} = (m_1, m_2, \ldots m_n)$ jsou n-tice přirozených čísel, lze v podstatě podle lemmatu 2.1 zkonstruovat automat $J_1 \in J^n_{\vec{r}_1,\vec{m}_1}$, kde

$\vec{r}_1 = (r_1+m_1 - 1, r_2,\dots,r_n)$, $\vec{m}_1 = \vec{m}$, přičemž posun čtecí hlavy na první pásce je dán množinou $\{-m_1; 0; m_1\}$. Na automat J_1 lze opět užít lemmatu 2.1 a upravit způsob posunu čtecí hlavy na 2.pásce atd. Analogicky lze pak na všechny pásky automatu užít lemmat 2.2 a 2.3 . Lze tedy dokázat následující větu.

Věta 2.1 Nechť $\vec{r} = (r_1,r_2,\dots,r_n)$, $\vec{m} = (m_1,m_2,\dots,m_n)$ jsou n-tice přirozených čísel. Pak ke každému automatu $J \in J^n_{\vec{r},\vec{m}}$ existuje automat $\bar{J} \in J^n_{\vec{e},\vec{e}}$ ($\vec{e}$ je n-tice, jejíž všechny souřadnice jsou rovny jedné) takový, že platí

$$\Phi_{\bar{J}} = \Phi_J \ .$$

Důsledek 1 . Nechť $J \in J^n_{\vec{e},\vec{e}}$. Nechť existuje i, $1 \leq i \leq n$ a K takové, že čtecí hlava i-té pásky automatu J je při libovolné vstupní posloupnosti vzdálena od první buňky (tj. buňky, na níž se nacházela čtecí hlava i-té pásky v 1.taktu) o méně než K . Pak existuje $\bar{J} \in J^{n-1}_{\vec{e},\vec{e}}$ takový, že platí

$$\Phi_{\bar{J}} = \Phi_J \ .$$

Důsledek 2. Nechť $J \in J^n_{\vec{e},\vec{e}}$. Nechť existují přirozená čísla i, j, $1 \leq i < j \leq n$ a číslo K takové, že čtecí hlavy i-té a j-té pásky jsou při libovolné vstupní posloupnosti od sebe vzdáleny o méně než K . Pak existuje $\bar{J} \in J^{n-1}_{\vec{e},\vec{e}}$ takový, že platí

$$\Phi_{\bar{J}} = \Phi_J \ .$$

Důkaz. i-tou a j-tou pásku automatu J lze uvažovat jako jedinou pásku, jejíž pracovní abecedu tvoří dvojice (S_{i_p}, S_{j_q}), kde S_{i_p}, S_{j_q} jsou symboly pracovní abecedy i-té resp. j-té pásky. Obě čtecí hlavy lze uvažovat jako jedinou čtecí hlavu s rozsahem K a celkem zřejmým způsobem upravit její posun tak, aby tento nový automat J_1 s $n-1$ páskami realizoval týž operátor jako automat J. Nyní podle věty 2.1 existuje automat $\bar{J} \in J^{n-1}_{\vec{e},\vec{e}}$ takový, že $\Phi_{\bar{J}} = \Phi_{J_1}$. Jelikož $\Phi_{J_1} = \Phi_J$, je tvrzení dokázáno.

Nechť $J \in J^n_{\vec{r},\vec{m}}$, $a \in \Sigma^\infty$. Označme $l_i(a,J)$ počet buněk i-té pásky, které automat J použije při zpracování slova a; $l(a, J) = \max\limits_{i=1,2,\dots,n} l_i(a,J)$. Ukážeme, jak z předchozích lemmat plyne věta o kompresi prostoru, jež je formulována např. v [4].

Věta 2.2 Nechť $J \in J^n_{\vec{e},\vec{e}}$ a nechť m je přirozené číslo. Pak existuje automat $\bar{J} \in J^n_{\vec{e},\vec{e}}$ takový, že platí:

1. $\Phi_{\bar{J}} = \Phi_J$,
2. $l(a,\bar{J}) \leqq \dfrac{l(a,J)}{m} + 1$ pro libovolné $a \in \Sigma^\infty$.

Důkaz. Pro jednoduchost předpokládejme, že jde o jednopáskový automat. Nechť $J \in J^1_{1,1}$. Jest $J \in J^1_{1,m}$. Podle lemmatu 2.1 existuje $J_1 \in J^1_{m,m}$, $\Phi_{J_1} = \Phi_J$ a J_1 splňuje předpoklady lemmatu 2.2. Existuje tedy $J_2 \in J^1_{p,1}$ takový, že $\Phi_{J_2} = \Phi_{J_1}$. Z lemmatu 2.2 plyne, že číslo $p = 1$. Tedy $J_2 \in J^1_{1,1}$. Nyní provedeme odhady čísel l_i. Nechť $a \in \Sigma^\infty$. Z konstrukcí, prováděných v důkazech lemmat 2.1, 2.2 vyplývá:

$l(a,J_1) \leqq l(a,J) + 2(m-1)$, $l(a,J_2) = \frac{l(a,J_1)}{m}$. Tedy

$l(a,J_2) \leqq \frac{l(a,J)}{m} + 2$. K dokončení důkazu stačí nyní užít tohoto triviálního tvrzení : nechť $J \in J^1_{1,1}$, nechť k je přirozené číslo. Pak existuje automat $\bar{J} \in J^1_{1,1}$ takový, že platí: $\Phi_{\bar{J}} = \Phi_J$, $l(a,\bar{J}) \leqq$ $\leqq l(a,J) - k$, jestliže $l(a,J) > k$ a $l(a,\bar{J}) = 1$, je-li $l(a,J) \leqq k$.

Buď dán automat $J \in J^n_{\vec{e},\vec{e}}$ a přirozené číslo m. Označme $\Sigma_m = \Sigma^m$, $\Pi_m = \Pi^m$ (kartézské součiny (množin) vstupní a výstupní abecedy automatu J). Buď $\Phi = \Phi_J$ operátor Σ^∞ do Π^∞ realizovaný automatem J . Buď Φ_m operátor Σ_m^∞ do Π_m^∞ , definovaný následujícím způsobem. Nechť $A \in \Sigma_m^\infty$. Jest $A = a_1 a_2 \dots a_\ell$, $a_i \in \Sigma_m$, $i = 1,2,\dots,\ell$. Definujme funkci η: jestliže $a_i = (\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_m})$, kde $\alpha_{i_j} \in \Sigma$, $j = 1,2,\dots,m$, pak $\eta(a_i) = \alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\dots\alpha_{i_m}$; $\eta(A) = \eta(a_1)\eta(a_2)\dots\eta(a_\ell)$. Označme $\bar{B} = \Phi(\eta(A))$. Jest $\bar{B} = b_1 b_2 \dots b_\ell$, $b_i \in \Pi^\infty$, $d(b_i) = m$, $i = 1,2,\dots,\ell$. Jestliže $b_j = \beta_{j_1}\beta_{j_2}\dots\beta_{j_m}$, $\beta_{j_p} \in \Pi$, $p = 1,2,\dots,m$, pak položme $\xi(b_j) = (\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \dots, \beta_{j_m}) \in \Pi_m$, $B = \xi(\bar{B}) = \xi(b_1)\xi(b_2)\dots\xi(b_\ell)$ Pak $B = \Phi_m(A)$. Nyní vyslovíme větu o časové kompresi, která je dokázána např. v [5].

Věta 2.3 Buď dán automat $J \in J^n_{\vec{e},\vec{e}}$. Označme $\Phi = \Phi_J$. Pak existuje automat $\bar{J} \in J^n_{\vec{e},\vec{e}}$ takový, že platí :

$$\Phi_{\bar{J}} = \Phi_m .$$

lemmat 2.1, 2.2 vyplývá:

$l(a_1 J_1)$ $l(a,J) + 2(m-1)$, $l(a,J_2) = \frac{l(a,J)}{m}$. Tedy $l(a,J_2)$ $\frac{l(a,J)}{m} + 2$. K dokončení důkazu stačí nyní užít tohoto triviálního tvrzení nechť J $J^1_{1,1}$, k přirozené číslo. Pak existuje automat J $J^1_{1,1}$ takový, že platí: $J = J$, $l(a,J)$ $l(a,J) - k$, jestliže $l(a,J)$ k a $l(a,J) = 1$, je-li $l(a,J$ k .

Buď dán automat J $J^n_{e,e}$ a přirozené číslo m . Označme

$_m =$ m , $\frac{m}{m} \equiv \frac{m}{m}$ (

Důkaz: Buď dáno vstupní slovo $a \in \Sigma^{\infty}$ délky m . Nechť v taktu t se čtecí hlava i-té pásky automatu J nachází na buňce B^i . Nechť

$$B^i_{-m+1}\, B^i_{-m+2} \dots B^i_{-1} B^i B^i_1 B^i_2 \dots B^i_{m-1}$$

je posloupnost sousedních buněk i-té pásky se střední buňkou B^i , $i = 1,2,\dots,n$. Je jasné, že slovem a , vnitřním ~~slovem~~ stavem automatu J a obsahem uvedených skupin buněk je jednoznačně určena činnost automatu J a dalších m taktech, ve kterých se bude číst a přepisovat pouze v uvedených skupinách buněk a pro výsledný posun čtecí hlavy (po m taktech) i-té pásky $\overline{m}_i$ platí $|\overline{m}_i| \leqq m$, $i = 1,2,\dots,n$. To znamená, že lze konstruovat automat $J_1 \in J^n_{\vec{r},\vec{m}}$, $\vec{r} = (2m-1, 2m-1,\dots,2m-1)$, $\vec{m} = (m,m,\dots,m)$ takový, že platí $\Phi_{J_1} = \Phi_m$. Podle věty 2.1 existuje automat $\bar{J} \in J^n_{\vec{e},\vec{e}}$, $\Phi_{\bar{J}} = \Phi_{J_1}$. Tím je věta dokázána.

Lemma 2.4 Nechť $J \in J^n_{\vec{e},\vec{e}}$, nechť i je přirozené číslo, $1 \leqq i \leqq n$. Nechť množina M_i , udávající možný posun čtecí hlavy i-té pásky má tvar $M_i = \{0,1\}$. Pak existuje $\bar{J} \in J^{n-1}_{\vec{e},\vec{e}}$ takový, že $\Phi_{\bar{J}} = \Phi_J$.

Důkaz: Označme symboly pracovní ~~xxxx~~ abecedy i-té pásky $A_1 = \Lambda, A_2,\dots,$ Utvořme nový automat $\bar{J}$, který vznikne z automatu J vynecháním i-té pásky a jeho stavy jsou dvojice (s_i, A_j) , $s_i \in \mathcal{F}$, $j = 1,2,\dots,r$. Počáteční stav automatu $\bar{J}$ je (s_0,Λ), kde s_0 je počáteční stav automatu J. Ostatní pásky ponechme beze změny. Nyní popíšeme substituční pravidla automatu $\bar{J}$. Automat $\bar{J}$ čte v daném taktu jen $n-1$ symbolů; původní symbol z i-té pásky lze vyčíst z jeho stavu. Tím je dána levá strana substitučního pravidla automatu J. Jestliže je (v automatu J) $m_i = 0$ a na i-tou pásku automatu J by byl zapsán symbol A_k', nový stav J je s', pak nový stav automatu $\bar{J}$ je (s', A_k'). Jestliže je $m_i = 1$, je nový stav automatu $\bar{J}$ dán dvojicí (s', A_1). Je vidět, že $\bar{J}$ splňuje požadavek lemmatu.

V definici automatu bylo užito pojmu vnitřního stavu. Vzniká otázka, zda automaty bez vnitřních stavů, tj. automaty, které se nacházejí ve stále stejném stavu, budou schopny realizovat tytéž operátory jako automaty s vnitřními stavy.

Definice 2.3 Říkáme, že automat J, udaný definicí 2.1 (resp. definicí 2.2) je bez vnitřních stavů, je-li abeceda vnitřních stavů jednoprvková.

Poznámka. Z definice je zřejmé, že v substitučních pravidlech automatu bez vnitřních stavů lze vnitřní stav vypustit.

Věta 2.4 Nechť $\vec{r} = (2,1,1,\dots,1)$, $\vec{e} = (1,1,\dots,1)$. Buď dán automat $J \in J^n_{\vec{e},\vec{e}}$. Pak existuje automat $\bar{J} \in J^n_{\vec{r},\vec{e}}$ takový, že platí:

1. $\bar{J}$ je bez vnitřních stavů,
2. $\Phi_{\bar{J}} = \Phi_J$.

Důkaz. Provedeme jej pro případ jedné pracovní pásky. Za pracovní abecedu $\mathcal{S}_1$ pásky automatu $\bar{J}$ vezmeme 1. všechny dvojice tvaru (s_i, Λ), $s_i \in \mathcal{S}$, kde $\mathcal{S}$ je pracovní abeceda pásky automatu J, 2. všechny dvojice tvaru (Λ, s_i), $s_i \in \mathcal{F}$, kde $\mathcal{F}$ je abeceda vnitřních stavů automatu J, 3.dvojici $(\Lambda,\Lambda) = \bar{\Lambda}$. Přitom předpokládáme, že $\Lambda \in \mathcal{S}$, $\mathcal{F} \cap \mathcal{S} = \phi$. Nyní určíme substituční pravidla automatu $\bar{J}$. Levá strana substitučního pravidla automatu $\bar{J}$ má tvar

(2.12) $\qquad U = (\alpha_j; AB)$,

kde $\alpha_j \in \Sigma$, $A \in \mathcal{S}_1$, $B \in \mathcal{S}_1$. Nechť substituční pravidla automatu J mají tvar

(2.13) $\qquad (s_i; \alpha_j; S_{i_1}) \rightarrow (S'_{i_1}; m; s_k; \beta_\ell)$.

Význam symbolů v (2.13) je zřejmý. Každé dvojici U tvaru (2.12) přiřadíme nejprve trojici $V = f(U)$, tj. levou stranu substitučního pravidla (2.13). Nechť

1. $A = B = \bar{\Lambda} = (\Lambda,\Lambda)$. Pak $V = (s_o; \alpha_j; \Lambda)$, kde $s_o \in \mathcal{F}$ je počáteční stav automatu J .

2. $A = (S_{i_1},\Lambda)$, $B = (\Lambda, s_i)$. Pak $V = (s_i; \alpha_j; S_{i_1})$.

3. $A = (\Lambda, s_i)$, $B = (S_{i_1},\Lambda)$, pak $V = (s_i; \alpha_j; S_{i_1})$

4. $A = (S_{i_1},\Lambda)$, $B = (S_{i_2},\Lambda)$, pak $V = (s_o; \alpha_j; \Lambda)$.

Tedy každé dvojici U je přiřazena levá strana (2.13) a tím i symboly na pravé straně 2.13) S'_{i_1}, m, s_k, β_ℓ. Lze tedy definovat funkce g, h, ξ, η proměnné U :

$\xi(U) = m$, $\quad \eta(U) = \beta_\ell$;

$g(U) = (S'_{i_1},\Lambda)$, $\quad h(U) = (\Lambda, s_k)$, jestliže $m = 0,1$;

$g(U) = (\Lambda, s_k)$, $\quad h(U) = (S'_{i_1},\Lambda)$. Jestliže $m = -1$.

Substituční pravidla automatu $\bar{J}$ lze nyní psát ve tvaru

(2.14) $\qquad (\alpha_j; AB; g(U)h(U); \xi(U); \eta(U))$.

Nyní je nutno dokázat, že $J, \bar{J}$ realizují týž operátor. Řekneme, že konfigurace $K, \bar{K}$ automatu $J, \bar{J}$ jsou sdružené, jestliže lze psát

$K = (s_i; S_{i_1} S_{i_2} \dots S_{i_p} \Delta S_{i_{p+1}} \dots S_{i_q})$,

$K = (A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_p} A \Delta A_{i_{p+1}} \dots A_{i_q})$,

přičemž $A_{i_j} = (S_{i_j}, \Lambda)$, $j = 1,2,\dots,p-1, p+1,\dots,q$ a $A_{i_p} A$ je rovno buď $(S_{i_p}, \Lambda)(\Lambda, s_i)$ nebo $(\Lambda, s_i)(S_{i_p}, \Lambda)$.
Počáteční konfigurace $K_1 = (s_o, \Lambda \Delta)$, $\bar{K}_1 = (\bar{\Lambda}\bar{\Lambda}\Delta)$ považujeme též za sdružené. ~~Označíme~~ Jsou-li $\varphi, \psi, \varphi_1, \psi_1$ kanonické funkce automatu $J, \bar{J}$, pak se dá snadno ukázat, že platí: jsou-li $K, \bar{K}$ sdružené konfigurace automatu $J, \bar{J}$, $\alpha_j \in \Sigma$, pak $\varphi(\alpha_j, K) = \varphi_1(\alpha_j, \bar{K})$ a konfigurace $K' = \psi(\alpha_j, K)$, $\bar{K}' = \psi_1(\alpha_j, \bar{K})$ jsou opět sdružené.
Tím je věta 2.4 dokázána.

V dosavadních úvahách byly pracovní pásky automatů oboustranně nekonečné. Někdy může být technicky výhodné užívat pásek, jež jsou jen jednostranně nekonečné, tedy nekonečných polopásek;

Věta 2.5 Buď dán automat $J \in J^n_{\vec{e},\vec{e}}$. Pak existuje automat $\bar{J} \in J^n_{\vec{e},\vec{e}}$ takový, že platí:

1. Buď B^i_o ta buňka i-té pásky automatu $\bar{J}$, na níž se nachází čtecí hlava v prvním taktu, $i = 1,2,\dots,n$. Pak se čtecí hlava i-té pásky při jakékoliv vstupní posloupnosti nenachází nikdy vlevo od nuňky B^i_o, $i = 1,2,\dots, n$.

2. $\Phi_{\bar{J}} = \Phi_J$.

Poznámka: Toto lemma je v poněkud odlišném znění formulováno v práci H. Yamady, viz [9].

Důkaz. Provedeme jej opět pro jednopáskový stroj. Nechť $\Sigma, \mathcal{F}, \mathcal{S}, \Pi$ jsou abecedy automatu J (viz označení v definici 2.1). Za abecedy automatu $\bar{J}$ vezmeme $\Sigma_1 = \Sigma$, $\Pi_1 = \Pi$ a

$$\mathcal{F}_1 = \{(s_k,P); s_k \in \mathcal{F}\} \cup \{(s_k,L_*); s_k \in \mathcal{F}\} \cup \{\bar{s}_o\},$$
$$\mathcal{S}_1 = \{(S_i,S_j); S_i \in \mathcal{S}, S_j \in \mathcal{S}\} \cup \{(S_i, *); S_i \in \mathcal{S}\}.$$

Přitom předpokládáme, že $*$ non $\in \mathcal{S}$. Počáteční stav automatu $\bar{J}$ je $\bar{s}_o$. V dalším $U \to V$ značí substituční pravidlo automatu $\bar{J}$, $X \to Y$ substituční pravidlo automatu J, tedy $U = (s, \alpha_j, A)$, $V = (A', \bar{m}, s', \bar{\beta}_\ell)$ kde $s, s' \in \mathcal{F}_1$, $\alpha_j \in \Sigma_1$, $\bar{\beta}_\ell \in \Pi_1$, $A, A' \in \mathcal{S}_1$. Buď dána levá strana U substitučního pravidla automatu $\bar{J}$.

1. Je-li $s = \bar{s}_o$, položíme $X = f(U) = (s_o; \alpha_j; \Lambda)$, s_o je počáteční stav J.

   Je-li $A = (S_i, *)$, $s = (s_r,P)$ nebo $s = (s_r,L)$, položíme $X = (s_r; \alpha_j; S_i)$. Nechť pravá strana pravidla $X \to Y$ automatu J má tvar $Y = (S'; m; s_k; \beta_\ell)$. Pak položíme

   $V = ((S', *); |m|; (s_k, Z); \beta_\ell)$,

   kde $Z = P$, je-li $m = 1$, $Z = L$, je-li $m = -1, 0$..

2. $A = (S_p, S_q)$, $S_p \in \mathcal{S}$, $S_q \in \mathcal{S}$.

   a) $s = (s_r,P)$. Pak položíme $X = (s_r; \alpha_j; S_p)$. Nechť odpovídající Y má tvar $Y = (S'; m; s_k; \beta_\ell)$. Potom nechť

   $V = ((S', S_q); m; (s_k,P); \beta_\ell)$.

   b) $s = (s_r, L)$. Pak položíme $X = (s_r; \alpha_j; S_q)$. Nechť odpovídající Y má tvar $Y = (S'; m; s_k; \beta_\ell)$. Pak nechť

   $V = ((S_p, S'); -m; (s_k,L); \beta_\ell)$.

Tím jsou definována substituční pravidla automatu $\bar{J}$. Počáteční konfigurace automatu $\bar{J}$ je rovna $\bar{K}_1 = (s_o, (\Lambda, \Lambda)\Delta)$. Nyní se analogicky jako v předchozích lemmatech zjistí, že automat $\bar{J}$ má požadované vlastnosti.

Buď dán automat $J \in J^n_{\vec{r},\vec{m}}$, $a \in \Sigma^\infty$, $d(a) > 0$. Nechť t je přirozené číslo, $1 \leq t \leq d(a)$. Výrazem $m_i(J,a,t)$ označme číslo, udávající posun čtecí hlavy i-té pásky automatu J v taktu t při zpracování slova a. Z důkazů lemmat 2.1 - 2.3 vyplývá

Lemma 2.5 Nechť $J \in J^n_{\vec{r},\vec{m}}$. Nechť $\bar{J} \in J^n_{\vec{e},\vec{e}}$ je automat, zkonstruovaný ve shodě s důkazy lemmat 2.1 - 2.3 (je tedy $\Phi_{\bar{J}} = \Phi_J$).
Pak platí:

jestliže $m_i(J,a,t) = 0$, pak $m_i(\bar{J},a,t) = 0$, $i = 1,2.,\ldots,n$.

Lemma 2.6 Nechť $J \in J^n_{\vec{e},\vec{e}}$, $\vec{r} = (3,1,1,\ldots,1)$, $\vec{m} = (2,1,1,\ldots,1)$.
Pak existuje $\bar{J} \in J^n_{\vec{r},\vec{m}}$ takový, že platí

1. $\Phi_{\bar{J}} = \Phi_J$,

2. Je-li t liché, pak $m_1(\bar{J},a,t) = 0$.

Důkaz. Provedeme jej opět pro jednopáskový automat. Nechť $\Sigma, \mathcal{F}, \mathcal{S}, M = \{-1; 0; 1\}, \Pi$ jsou abecedy automatu $J \in J^1_{1,1}$. Abecedy automatu $\bar{J}$ buďte $\Sigma_1 = \Sigma$, $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}$, $\Pi_1 = \Pi$, $M_1 = \{-2;-1;0;1;2\}$ a $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F} \cup \{(s_i,p);\ s_i \in \mathcal{F},\ p \in \{-1;0;1\}\}$. Počáteční stav automatu $\bar{J}$ je s_0, kde s_0 je počáteční stav automatu J. (Poznamenejme, že je-li $\bar{J}$ ve stavu $s = (s_i,p)$, znamená to, že se $\bar{J}$ nachází v sudém taktu.) Nechť U je levá strana substitučního pravidla automatu $\bar{J}$, tedy

$$U = (s; \alpha_j; S_1S_2S_3),$$

$s \in \mathcal{F}_1$, $\alpha_j \in \Sigma_1$, $S_i \in \mathcal{S}_1$, $i = 1,2,3$. Nyní určíme pravou stranu

V substitučního pravidla $U \to V$. Mohou nastat dva případy:

1. $s = s_i$, kde $s_i \in \mathcal{F}$. Pak nechť $X = (s_i; \alpha_j; S_2)$, což je levá strana substitučního pravidla $X \to Y$ automatu J . Nechť pravá strana tohoto pravidla má tvar $Y = (S'; m; s_k; \beta_\ell)$ (význam symbolů je zřejmý). Pak nechť

$$V = (S_1 S' S_3;\ 0;\ (s_k, m);\ \beta_\ell) .$$

2. $s = (s_i, p)$, $s_i \in \mathcal{F}$, $p \in \{-1;0;1\}$. Pak položme $X = (s_i; \alpha_j; S_{2+p})$. Jestliže $Y = (S'; m; s_k; \beta_\ell)$, nechť

$$V = (Z\ ;\ m+p\ ;\ s_k\ ;\ \beta_\ell) ,$$

kde $Z = S' S_2 S_3$ pro $p = -1$, $Z = S_1 S' S_3$ pro $p = 0$ a $Z = S_1 S_2 S'$ pro $p = 1$. Je snadno vidět, že zkonstruovaný automat $\bar{J} \in J^1_{3,2}$ splňuje požadavky lemmatu.

Poznámka. Lemma 2.6 zůstane v platnosti, jestliže druhou vlastnost nahradíme vlastností

2´. Je-li t sudé , pak $m_1(\bar{J}, a, t) = 0$

Dále je zřejmé, že se uvedené vlastnosti mohou přenést na kteroukoli pracovní pásku.

Z předchozích lemmat vyplývá

Věta 2.6 Nechť $J \in J^n_{\vec{e}, \vec{e}}$, nechť i je přirozené číslo, $1 \leqq i \leqq n$. Pak existuje automat $\bar{J} \in J^n_{\vec{e}, \vec{e}}$ těchto vlastností:

1. $\Phi_{\bar{J}} = \Phi_J$,

2. Nechť $a \in \Sigma^\infty$ je libovolné vstupní slovo, $d(a) \geqq 1$, nechť t je přirozené číslo, $1 \leqq t \leqq d(a)$, ~~nechť~~ Pak platí:

je-li t liché (respektive je-li t sudé), pak $m_i(\bar{J}, a, t) = 0$.

Důkaz. Provedeme jej pro případ $i = 1$. Podle lemmatu 2.6 existuje $J_1 \in J^n_{\vec{r},\vec{m}}$, $\vec{r} = (3,1,1,\ldots,1)$, $\vec{m} = (2,1,1,\ldots,1)$ takový, že $\bar{\Phi}_{J_1} = \bar{\Phi}_J$, $m_1(J_1,a,t) = 0$ pro t liché. Podle lemmatu 2,5 existuje $J_2 \in J^n_{\vec{e},\vec{e}}$ takový, že $\bar{\Phi}_{J_2} = \bar{\Phi}_{J_1}$ a $m_1(J_2,a,t) = 0$, jestliže $m_1(J_1,a,t) = 0$. Zřejmě J_2 je hledaný automat.

Analogicky lze dokázat tato tvrzení:

1. Ke každému automatu $J \in J^n_{\vec{e},\vec{e}}$ existuje automat $\bar{J} \in J^n_{\vec{e},\vec{e}}$ takový, že

   (i) $\bar{\Phi}_{\bar{J}} = \bar{\Phi}_J$,

   (ii) abecedy, udávající možný posun čtecích ~~slov~~ hlav automatu $\bar{J}$ jsou rovny $M_i = \{-1;1\}$, $i = 1,2,\ldots,n$.

2. Nechť k_i, ℓ_i jsou celá čísla, $k_i < 0$, $\ell_i > 0$, $i = 1,2,\ldots,n$. Nechť $J \in J^n_{\vec{e},\vec{e}}$. Pak existuje $\bar{J} \in J^n_{\vec{e},\vec{e}}$ takový, že

   (i) $\bar{\Phi}_{\bar{J}} = \bar{\Phi}_J$,

   (ii) abecedy posuvu automatu $\bar{J}$ jsou rovny $M_i = \{k_i; \ell_i\}$, $i = 1,2,\ldots,n$.

3. Nechť $J \in J^n_{\vec{e},\vec{e}}$; nechť i, m, ℓ jsou přirozená čísla, $1 \leq i \leq n$, $m \leq \ell$. Pak existuje $\bar{J} \in J^n_{\vec{e},\vec{e}}$ a platí:

   (i) $\bar{\Phi}_{\bar{J}} = \bar{\Phi}_J$,

   (ii) je-li $t \neq m + k\ell$, $k = 0,1,\ldots$, pak $m_i(\bar{J},a,t) = 0$.

4. Nechť $J \in J^n_{\vec{e},\vec{e}}$. Pak existuje $\bar{J} \in J^n_{\vec{e},\vec{e}}$ a platí

   (i) $\bar{\Phi}_{\bar{J}} = \bar{\Phi}_J$,

   (ii) je-li $t \neq i + kn$, pak $m_i(\bar{J},a,t) = 0$, $k = 1,2,\ldots$, $i = 1,2,\ldots,n$.

Automat $\bar{J}$ má tedy tu vlastnost, že se v libovolném taktu posune nejvýše jedna čtecí hlava.

3. O operátorech realizovatelných v reálném čase

Definice 3.1 Nechť Σ, Π jsou konečné abecedy. Nechť Φ je operátor (automatové zobrazení), zobrazující Σ^{∞} do Π^{∞}. Řekneme, že Φ je realizovatelný v reálném čase, existuje-li přirozené číslo n a automat $J \in J^{n}_{\vec{e},\vec{e}}$ takový, že platí

$$\Phi_J = \Phi .$$

Poznámka. V dalším budeme třídu automatů $J^{n}_{\vec{e},\vec{e}}$ označovat symbolem $J^n, n \geq 1$. Třídu konečných automatů označme J^0. Označme dále symbolem $\bar{J}^n$ třídu automatů, splňující následující vlastnosti:

1. $\bar{J}^n \subset J^n$

2. $J \in \bar{J}^n \Rightarrow$ automat J je bez vnitřních stavů.

Definice 3.2 Řekneme, že třída automatů T_1 je slabší než třída automatů T_2 (nebo že T_2 je silnější než T_1), $T_1 \prec T_2$, jestliže platí: ke každému automatu $J_1 \in T_1$ existuje automat $J_2 \in T_2$ takový, že platí $\Phi_{J_2} = \Phi_{J_1}$. Jestliže $T_1 \prec T_2$ a existuje automat $J_2 \in T_2$ takový, že pro libovolný automat $J \in T_1$ jest $\Phi_J \neq \Phi_{J_2}$, pak píšeme $T_1 \prec\!\!\prec T_2$. Jestliže platí současně $T_1 \prec T_2$, $T_2 \prec T_1$, píšeme $T_1 \succ\!\prec T_2$.

Je zřejmé, že platí, $\bar{J}^n \prec J^n$ pro libovolné přirozené n. Dále je zřejmé, že $J^n \prec \bar{J}^{n+1}$, neboť lze stavy automatu $J \in J^n$ zapisovat na další pásku, a ~~složit~~ utvořit tak automat bez vnitřních stavů s $n+1$ páskami, realizující týž operátor. Platí tedy

$$J^0 \prec \bar{J}^1 \prec J^1 \prec \bar{J}^2 \prec J^2 \prec \ldots .$$

V dalším tyto relace zpřesníme. Protože půjde většinou o representovatelnost jevů, tedy o operátory, ve kterých je abeceda $\Pi = \{0,1\}$, ukažme podrobněji některé možnosti reprezentace jevů s pomocí jiných abeced (např. abecedy stavů apod.)

Mějme automat $J \in J^n$, definovaný substitučními pravidly (1.2). Nechť $R = \mathcal{F} \times \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2 \times \ldots \times \mathcal{S}_n \times \Pi$. Řekneme, že automat J rozeznává jev $A \subset \Sigma^\infty$, existují-li množiny R_0, R_1, $R_0 \cup R_1 = R$, $R_0 \cap R_1 = \phi$ a platí: nechť $a \in \Sigma^\infty$, $d(a) = p > 0$. Nechť při vstupním slovu a jsou v p-tém taktu automatu J na aktivních buňkách 1.,2.,...,n-té pásky psány symboly $S_{i_1}, S_{i_2}, \ldots, S_{i_n}$, automat J přejde do stavu s_i a vydá výstupní symbol β_ℓ. Pak

$$a \in A \Leftrightarrow (s_i; S_{i_1}, S_{i_2}, \ldots, S_{i_n}, \beta_\ell) \in R_1.$$

V případě, že R = F, pak daný jev rozeznává-me s pomocí vnitřních stavů. Pro $R = \Pi = \{0,1\}$ dostaneme původní definici rozeznatelnosti jevu. Kdyby např. $R = \mathcal{S}_1$, pak daný jev rozeznává-me podle toho, co se v daném taktu píše na 1.pásku. Obecně může být R kartézským součinem jen některých z uvedených množin. Všechny tyto speciální případy spadají ovšem do udané obecné definice rozeznatelnosti, což lze zařídit vhodným rozkladem R.

Jev, který lze rozeznat automatem J ve smyslu výše uvedené definice, lze rozeznat též automatem se stejným počtem pracovních pásek, avšak jen s pomocí vnitřních stavů. Stačí zakódovat posloupnosti z R do vnitřních stavů, tj. utvořit nový automat $\bar{J}$, jehož abeceda stavů je tvořena všemi prvky z R a ostatní abecedy jsou totožné s odpovídajícími abecedami automatu J . Substituční pravidla automatu $\bar{J}$ lze udat takto: buď (1,2) substituční pravidlo automatu J . Pak odpovídající substituční pravidla automatu $\bar{J}$ mají tvar

$$((s_i,X_{i_1},X_{i_2},\dots,X_{i_n},x_\ell);\ \alpha_j;\ S_{i_1},S_{i_2}\dots,S_{i_n}) \rightarrow$$

$$\rightarrow (S_{j_1},S_{j_2},\dots,S_{j_n};\ m_1,m_2,\dots,m_n;\ (s_k,S_{j_1},S_{j_2},\dots,S_{j_n},\beta_\ell);\ \beta_\ell)\ ,$$

kde $X_{i_1},X_{i_2},\dots,X_{i_n}$ jsou libovolné prvky abecedy 1,,2,,...,n-té pásky, x_ℓ libovolný prvek výstupní abecedy automatu $\bar{J}$. Za počáteční stav automatu $\bar{J}$ lze vzít $(s_0,\Lambda,\dots,\Lambda,\beta_1)$. Je zřejmé, že jev A lze rozeznat automatem $\bar{J}$, a to prostřednictvím jen jeho vnitřních stavů. Výstupní abecedu zde vlastně nepotřebujeme, výstupní posloupností je zde posloupnost vnitřních stavů, z níž je nutno vypustit počáteční stav.

Dále je zřejmé, že jev A lze rozeznat vhodným automatem s použitím dvouprvkové abecedy výstupních symbolů. K tomu stačí utvořit automat $\bar{\bar{J}}$ s výstupní abecedou $\{0;1\}$ a ostatní abecedy automatu $\bar{\bar{J}}$ nechat stejné jako abecedy automatu $\bar{J}$.

Substituční pravidla automatu $\bar{\bar{J}}$ budou shodná s pravidly automatu $\bar{J}$ až na poslední symbol β_ℓ , kde bude symbol 1 nebo 0 podle toho, je-li nový stav automatu $\bar{J}$ (resp. $\bar{\bar{J}}$) z R_1 nebo z R_0 .

Věta 3.1. $\quad J^0 \prec\!\!\prec \bar{J}^1$.

Důkaz. Obecně mají substituční pravidla automatu $J \in \bar{J}^1$ tvar

$$(s;\ \alpha_j;\ S_{i_1};\ \overset{S_{j_1 j}}{m_1};\ s;\ \beta_\ell)\ ,$$

kde s je jediný stav automatu J . Udáme automat $J \in \bar{J}^1$ bez výstupu se vstupní abecedou $\Sigma = \{0,1\}$ a s pracovní ~~páskou~~ abecedou

$\mathcal{S}_1 = \{\Lambda; a\}$. Pravidla takového automatu lze tedy udat ve tvaru (vypustíme-li stav s ze substitučních pravidel)

$$(\alpha_j;\ S_{i_1};\ S_{j_1};\ m_1),$$

$\alpha_j \in \Sigma$, $S_{i_1} \in \mathcal{S}_1$, $S_{j_1} \in \mathcal{S}_1$, $m_1 \in \{-1;0;1\}$. Buď tedy J automat s těmito substitučními pravidly

$$(0;\Lambda;\Lambda;-1),\quad (1;\Lambda;a;1),\quad (0;a;a;-1),\quad (1;a;a;1).$$

Nechť A je jev, charakterizovaný symbolem $\Lambda \in \mathcal{S}_1$. Zřejmě platí:

1. 1^n non $\in A$, $n \geqq 1$,
2. $1^n 0 \in A$, $n \geqq 0$,
3. $1^n 0 0^k$ non $\in A$, $1 \leqq k \leqq n$,
4. $1^n 0 0^n 0^k \in A$, $k \geqq 1$.

Dokážeme, že jev A nelze rozeznat konečným automatem. Buď $\bar{J}$ konečný automat. Jde-li na jeho vstup posloupnost 111..., existuje takové $m \geqq 1$ a $k > 0$, že slova $x = 1^m$, $y = 1^{m+k}$ převedou automat $\bar{J}$ do téhož stavu. Podle vlastnosti 4 přijme automat J slovo $1^m 0^{m+2}$. Podle vlastnosti 3 automat J nepřijme slovo $1^{m+k} 0^{m+2}$. Automat $\bar{J}$ je však oběma slovy převeden do téhož stavu; tedy $\bar{J}$ nerozeznává jevv A. Tím je věta dokázána.

Věta 3.2 $\bar{J}^1 \prec\!\!\prec J^1$.

Důkaz. Nechť $J \in \bar{J}^1$, tj. J je automat s jednou pracovní páskou bez vnitřních stavů. Nechť vstupní abeceda automatu J je $\Sigma = \{0;1\}$, abeceda pásky $\mathcal{S} = \{S_1 = \Lambda;\ S_2; \dots;\ S_r\}$. Opět lze předpokládat, že J je bez výstupu (uvedený jev lze rozeznávat pomocí symbolů pásky).

Nechť $A \subset \Sigma^{\infty}$ je jev, který je tvořen všemi slovy ze Σ^{∞}, která mají týž počet nul a jedniček. Ukážeme, že J nerozezná jev A. Předpokládejme opak. Pak existuje rozklad abecedy $\mathcal{S}$ na množiny R_0, R_1, $R_0 \cup R_1 = \mathcal{S}$, $R_0 \cap R_1 = \phi$ a platí: $a \in A$, $d(a) = p \Leftrightarrow$ v p-tém taktu automatu J při vstupním slovu a je na aktivní ~~pásce~~ buňce zapsán (nikoliv čten) symbol z R_1.

Na aktivní buňce pásky je v 1.taktu čten symbol $S_1 = \Lambda$ (při jakémkoli vstupním slovu).

1. Nechť B_1 je buňka, na níž se nachází čtecí hlava automatu J v 1.taktu. Ukážeme, že při vstupním symbolu 0 zůstává čtecí hlava opět na buňce B_1, tj. ve shodě s označemím v lemmatu 2.5

(3.1) $m_1(J,0,1) = 0$

Vezměme vstupní slovo $a = 01$ a předpokládejme, že (3.1) neplatí. Nechť např. $m_1(J,0,1) = 1$ (případ $m_1(=J,0,1) = -1$ lze vyšetřit analogicky). Pak ve druhém taktu je na pásce čten symbol $S_1 = \Lambda$ a při vstupním symbolu 1 (ve 2.taktu) ~~nemá~~ musí být na aktivní buňce zapsán symbol z R_1, neboť $01 \in A$. Automat J obsahuje tedy pravidlao $(1;\Lambda;\ S_{j_1},m)$, $S_{j_1} \in R_1$. To však znamená, že při vstupním slovu $a = 1$, které nepatří do A, je na aktivní buňce zapsán symbol $S_{j_1} \in R_1$ a to je spor.

2. Předpokládejme nyní, že na vstup automatu J jde posloupnost $000\ldots$. Kdyby čtecí hlava nikdy neopustila buňku B_1, pak by existovala přirozená čísla $m,n, m < n$ taková, že vstupní slova 0^m, 0^n převedou automat J do téže konfigurace. Pak ovšem vstupní posloupnosti $0^m 1^{m-1}$,

0^n1^{m-1} převedou automat J do téže konfigurace a tedy slova 0^m1^m, 0^n1^m jsou automatem J buď obě přijata nebo nikoli. To je však spor, neboť $0^m1^m \in A$, 0^n1^m non$\in A$.

Existuje tedy $m \geqq 2$ takové, že automat J při vstupním slovu 0^m opustí buňku B_1 poprvé v m-tém taktu

3. Vezměne nyní slovo 0^m01. Podle 2 se čtecí hlava po m taktech (tj. v taktu m+1) nachází na buňce, kde čte symbol Λ. Po dalších dvou taktech (tj. po vstupu celého slova $0^{m+1}1$) je podle 1 na této buňce zapsán symbol, patřící do R_1. Automat J tedy přijímá slovo $0^{m+1}1$ $(m \geqq 2)$ a to je spor.

Zbývá ukázat, že uvedený jev A je rozeznatelný vhodným automatem $J \in J^1$. To je však celkem zřejmé. Automat může pracovat tak, že si v několika prvních taktech označí vhodnými symboly několik buněk a pracuje tím způsobem, že čtecí hlava jde vpravo při vstupním symbolu 1 a vlevo při vstupním symbolu 0, aniž by přepisovala symboly na ostatních buňkách. Jakmile se čtecí hlava dostane na buňky, které byly označeny v prvních taktech, snadno se rozpozná, kdy má vstupní slovo týž počet nul a jedniček.

Jednu z matod, jak dokázat, že daný jev není rozeznatelný automatem $J \in J^n$, lze formulovat takto:

Lemma 3.1 Nechť $A \subset \Sigma^\infty$; nechť existují $a \in \Sigma^\infty$, $b \in \Sigma^\infty$, $c \in \Sigma^\infty$ a přirozené číslo k tak, že platí

1. $d(c) = k$
2. $ac \in A$, bc non $\in A$,

3. Buďte $K(a)$, $K(b)$ konfigurace automatu J, do nichž je převeden automat J vstupními slovy a,b. Nechť okolí k-tého řádu těchto konfigurací splňují podmínku

$$O(K(a), k) = O(K(b), k) .$$

Pak automat J nerozeznává jev A.

Věta 3.3. $J^1 -\!\!\ll J^2$.

Tuto větu dokázal M.O. Rabin v práci [6]. Nechť $\Sigma = \{0; 1; a; b; \alpha; \beta\}$, nechť $X = \{a; b\}^\infty$, $Z = \{0; 1\}^\infty$. Nechť

$$A = \{u\, v \alpha u^{-1} ;\ u \in X,\ v \in Z\} \cup \{u\, v \beta v^{-1} ;\ u \in X,\ v \in Z\} ,$$

u^{-1} značí slovo obrácené k slovu u. Jev A je zřejmě rozeznatelný vhodným automatem $J \in J^2$. Rabin ukazuje, že platí: nechť $J \in J^1$. Pak existuje přirozené číslo k a slova $u_1 \in X$, $u_2 \in X$; $u_1 \neq u_2$, $d(u_1) = d(u_2) = k$ a slova $v_1 \in Z$, $v_2 \in Z$ taková, že

$$O(K(u_1 v_1), k+1) = O(K(u_2 v_2), k+1) .$$

Je zřejmé, že $u_1 v_1 \alpha u_1^{-1} \in A$, $u_2 v_2 \alpha u_1^{-1}$ non $\in A$. Jev A tedy splňuje podmínky lemmatu 3.1. To znamená, že A není rozeznatelný žádným automatem z třídy J^1.

Poznámka. Otázka, zda platí $J^n -\!\!\ll J^{n+1}$ pro $n \geqq 2$, zůstává zatím, zdá se neřešena. Pokud jde o vztah mezi $\bar{J}^n$ a J^n, $n \geqq 2$, platí

Věta 3.4 Nechť n je přirozené číslo, $n \geqq 2$. Pak $\bar{J}^n \succ\!\!\prec J^n$.

Důkaz. Stačí dokázat $J^n \prec \bar{J}^n$, což provedeme pro případ $n = 2$. Z důkazu bude patrné, že zůstane v platnosti i pro $n > 2$. Nechť tedy $J \in J^2$. Podle věty 2.6 existuje automat $J_1 \in J^2$ těchto vlastností:

1. $\Phi_{J_1} = \Phi_J$,

2. $m_1(J_1,a,t) = 0$ pro t liché,

   $m_2(J_1,a,t) = 0$ pro t sudé.

($m_i(J_1,a,t)$ značí posun i-té čtecí hlavy v taktu t při svtupním slovu a.) Buďte $\Sigma, \mathcal{F}, \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, M_1 = M_2 = \{-1;0;1\}, \Pi$ abecedy automatu J_1. Udáme automat J_2 bez vnitřních stavů s abecedami $\Sigma, \bar{\mathcal{S}}_1, \bar{\mathcal{S}}_2, \bar{M}_1 = \bar{M}_2 = \{-1; 0; 1\}$,

kde

$$\bar{\mathcal{S}}_1 = \mathcal{S}_1 \cup \{(S_i, s_j); S_i \in \mathcal{S}_1, s_j \in \mathcal{F}\},$$

$$\bar{\mathcal{S}}_2 = \mathcal{S}_2 \cup \{(S_i, s_j); S_i \in \mathcal{S}_2, s_j \in \mathcal{F}\}.$$

Předpokládáme ovšem, že $\Lambda \in \mathcal{S}_i$, $i = 1,2$. Substituční pravidla automatu J_2 mají tvar

$$(\alpha_j; \bar{S}_{i_1}, \bar{S}_{i_2}) \rightarrow (\bar{S}_{j_1}, \bar{S}_{j_2}; m_1, m_2; \beta_\ell),$$

stručně $U \rightarrow V$, kde $\alpha_j \in \Sigma$; $\bar{S}_{i_1}, \bar{S}_{j_1} \in \bar{\mathcal{S}}_1$; $\bar{S}_{i_2}, \bar{S}_{j_2} \in \bar{\mathcal{S}}_2$. Tato pravidla zkonstruujeme tak, že k danému U přiřadíme jednoznačně levou stranu X substitučního pravidla $X \rightarrow Y$ automatu J_1 a podle příslušného Y, které je jednoznačně určeno X (a ovšem i U) určíme jednoznačně V. Pravidla automatu J_2 rozdělíme na čtyři skupiny.

1. $\bar{S}_{i_1} = \Lambda$, $\bar{S}_{i_2} = \Lambda$. Pak položíme $X = (s_0; \alpha_j; \Lambda, \Lambda)$. Nechť

(3.2) $\quad Y = (S_{j_1}, S_{j_2}; m_1, m_2; s_k; \beta_\ell)$.

Pak $V = ((S_{j_1}, s_k), S_{j_2}; m_1, m_2; \beta_\ell)$.

2. $\overline{S}_{i_1} = (S_{i_1}, s_i)$, $\overline{S}_{i_2} = S_{i_2}$. Pak nechť $X = (s_i; \alpha_j; S_{i_1}; S_{i_2})$.,

Nechť odpovídající Y má tvar (3.2). Položme $V = (S_{j_1}, (S_{j_2}, s_k);$
$m_1, m_2, \beta_\ell)$.

3. $\overline{S}_{i_1} = S_{i_1}$, $\overline{S}_{i_2} = (S_{i_2}, s_i)$. Položme $X = (s_i; \alpha_j; S_{i_1}; S_{i_2})$.

Nechť odpovídající Y má tvar (3.2) . Pak $V = ((S_{j_1}, s_k), S_{j_2};$
$m_1, m_2; \beta_\ell)$.

4. V ostatních případech lze pravidla definovat libovolně, neboť automat J_2 se nikdy nedostane do konfigurace, vyžadující jejich použití.

Je vidět, že platí:

1. Pravidla 1.skupiny mohou být užita jen v 1.taktu, ve kterém zůstane čtecí hlava první pásky bez pohybu.

2. Pravidla 2. skupiny budou aplikována jen v sudých taktech, ve kterých je čtecí hlava druhé pásky bez pohybu.

3. Pravidla třetí skupiny budou aplikována jen v lichých taktech, ve kterých je čtecí hlava 1.pásky bez pohybu.

Je zřejmé, že J_2 je dvoupáskový automat bez vnitřní paměti a $\Phi_{J_2} = \Phi_J$. Tím je věta dokázána.

V dalším ukážeme příklad jevu nerozeznatelného v reálném čase.

Nechť $\Sigma = \{0; 1; *\}$, $U = \{0; 1\}$. Nechť

$$A = \{w;\ w = u_1 * u_2 * \ldots * u_n * v\ ,\ n \geq 1,\ u_i \in U^\infty,$$
$$i = 1,2,\ldots,n,\ \ v \in U^\infty \text{ a existuje } i,\ 1 \leq i \leq n \text{ takové,} \tag{3.3}$$
$$\text{že } u_i = v^{-1}\},$$

kde slovo v^{-1} značí slovo obrácené k v (tj. jestliže $v = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r$, pak $v^{-1} = \alpha_r \alpha_{r-1} \dots \alpha_1$) .

Lemma 3.2. Jev A definovaný vztahem (3.3) není rozeznatelný v reálném čase.

Poznámka. Toto tvrzení dokázali Hartmanis, Stearns v práci [10] .

Důkaz. Buď n libovolné přirozené číslo, J libovolný automat, $J \in J^n$. Dokážeme, že automat J nerozeznává jev A . Nechť $\mathcal{F}$, $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2, \dots$, $\mathcal{S}_n$ jsou abecedy automatu J (abeceda vnitřních stavů, abecedy pásek). Označme $p = \operatorname{card} \mathcal{F}$, $\ell = \max_{i=1,2,\dots,n} \operatorname{card} \mathcal{S}_i$. Nechť k je přirozené číslo, pro něž platí

$$2^{2^k} - 1 > p\ell^{(2k+1)n} \quad (3.4)$$

Nechť $G(k)$ je množina všech okolí $(k+1)$-tého řádu konfigurací automatu J . Je vidět, že $\operatorname{card} G(k) \leqq p\ell^{(2k+1)n}$. Nechť $H(k)$ je množina všech slov tvaru $a = x_1 * x_2 * \dots * x_i$, kde $x_j \in U^{\infty}$, $d(x_j) = k$, $x_r \neq x_s$ pro $r \neq s$, $i = 1,2,\dots,2^k$. Přitom budeme považovat dvě slova $a \in H(k)$, $b \in H(k)$ za ekvivalentní, $a \sim b$, existuje-li permutace $(r_1, r_2, \dots, r_i)$ množiny $(1,2,\dots,i)$ taková, že $a = x_1 * x_2 * \dots * x_i$, $b = x_{r_1} * x_{r_2} * \dots * x_{r_i}$. Množina $H(k)$ se vzhledem k této akvivalenci rozpadne na $2^{2^k} - 1$ různých tříd. Vzhledem k (3.4) existují v $H(k)$ dvě slova a, b, jež nejsou ekvivalentní a pro něž platí

$$O(K(a),\ k+1) = O(K(b),\ k+1) .$$

Nechť $a = x_1 * x_2 * \ldots * x_i$, $b = y_1 * y_2 * \ldots * y_j$. Protože a, b nejsou ekvivalentní, nastane aspoň jeden ze dvou případů:

1. existuje p , $1 \leqq p \leqq i$, že $x_p \neq y_t$, $t = 1,2,\ldots,j$.
2. existuje q , $1 \leqq q \leqq j$ tak, že $x_t \neq y_q$, $t = 1,2,\ldots,i$.

V prvním případě (druhý se vyšetří analogicky) platí $a * x_p^{-1} \in A$, $b * x_p^{-1}$ non $\in A$. Je vidět, že automat J vyhovuje předpokladům lemmatu 3.1. Tedy J nerozezná jev A .

Nechť A je jev definovaný vztahem (3.3). Utvořme jev $B = A^{-1} = \{w;\ w^{-1} \in A\}$. J Bečvář [1] klade otázku, zda jev B je rozeznatelný v reálném čase. Jev B lze zřejmě definovat takto: nechť $\Sigma = \{0;\ 1;\ *\}$, $U = \{0,\ 1\}$. Pak

$$B = \{w;\ w = v * u_1 * u_2 * \ldots * u_n \text{ , } n \geqq 1 \text{ , } u_i \in U^\infty \text{, } i = 1,2,\ldots,n \text{,}$$
$$v \in U^\infty \text{ a existuje } i \text{ , } 1 \leqq i \leqq n \text{ takové, že } u_i = v^{-1}\} . \tag{3.5}$$

Dokážeme, že platí

Lemma 3.3 Jev B definovaný vztahem (3.5) je rozeznatelný vhodným automatem $J \in J^4$.

zlepšeno na J^3

Důkaz. Nebudeme automat J přesně konstruovat, ukážeme jen jeho podstatné rysy, z nichž bude patrné, že automat J požadované vlastnosti skutečně existuje. Činnost automatu rozdělíme na několik etap.

1. Na vstup jde slovo v . Slovo v se zapíše na první pásku postupně do buněk č. $1,2,\ldots,d(v)$. První buňku je přitom nutno označit (vyznačit levý okraj slova) např- symboly $\overline{1},\overline{0}$ namísto $1,0$.

Rozsah čtecí hlavy 1.pásky nechť je dán číslem 4; v etapě, která byla právě popsána, lze symboly slova u zapisovat např. pravým okrajem čtecí hlavy.

2. Na vstupu je poprvé symbol $*$. Nyní se označí pravý okraj slova v napsaného na 1.pásce. Pak jde na vstup slovo u_1. Nyní se čtecí hlava vrací nalevo a srovnává čtené symboly 1.pásky se symboly slova u_1.

α) Je-li $u_1 = v^{-1}$, je slovo $v * u_1$ přijato. Jestliže po tomto ~~stavu~~ slovu následuje symbol $*$, jsou všechna další prodloužení tohoto slova přijata. Následuje-li symbol z U, slovo přijato není a činnost automatu je jako v případě β.

β) Jestliže u_1 není počátečním úsekem slova v^{-1}, $d(u_1) \leqq d(v)$, čtecí hlava 1.pásky zůstane na místě až do okamžiku, kdy se na vstupu objeví další symbol $*$. Příslušná vstupní slova se ovšem nepřijímají.

3. Nechť na vstup jde další symbol $*$. Nechť pravý okraj čtecí hlavy 1.pásky se nachází na buňce k, $1 \leqq k \leqq d(v)$. Na druhé, třetí a čtvrté pásce mohou být v tomto okamžiku zapsána jakákoliv slova. Na vstup nyní jde slovo u_2. Nyní v každém taktu přejde čtecí hlava 1.pásky o čtyři buňky vpravo a čtené symboly (čtveřice) se zapisují na druhou pásku (s označením levého okraje). Čtecí hlava druhé pásky má tedy rozsah 4 a posunuje se v této etapě v čtyři buňky vpravo za jeden takt. Na třetí pásce se zapisují postupně (zleva doprava) symboly slova u_2 (ze vstupu), přičemž se označí levý okraj.

Na čtvrté pásce se zaznamená počet taktů ℓ (vhodným slovem v ℓ sousedních buňkách s vyznačením okrajů), potřebných k tomu, aby čtecí hlava první pásky dosáhla pravého okraje slova v. Je zřejmé, že $\ell \leqq [\frac{d(v)-k}{4}] + 1$. Snadnou úpravou lze též zařídit, že $\ell \leqq \frac{d(v)}{4}$, což v dalším předpokládejme.

4. Po dosažení pravého okraje slova v na 1. pásce se čtecí hlava první pásky posunuje dalších ℓ taktů (jejich počet je vyznačen na čtvrté pásce) vlevo po dvou buňkách za jeden takt.

Totéž provádí čtecí hlava druhé pásky.

Na třetí pásce se zapisuje dalších ℓ symbolů vstupního slova u_2 do dalších buněk pásky.

Čtecí hlava čtvrté pásky jde nalevo a zjišťuje, kdy proběhne těchto ℓ taktů. Po ukončení této etapy je na páskách tato situace:

a) Čtecí hlava první pásky se nachází ve vzdálenosti $d(v)-2\ell$ od
= $\ell\ell$ od levého okraje
pravého okraje slova v (je jasné, že lze zařídit, aby se v této vzdálenosti nacházel např. levý okraj čtecí ~~pásky~~ hlavy).

b) Totéž platí pro čtecí hlavu druhé pásky, na níž je zapsán nějaký koncový úsek slova v.

c) na třetí pásce je zapsán počáteční úsek slova u_2 délky 2ℓ , čtecí hlava je na pravém okraji.

d) na obsahu čtvrté pásky v dalším nezáleží .

5. Nyní při dalších vstupních symbolech slova u_2 jde čtecí hlava první pásky v každém taktu o jednu buňku vlevo a automat

srovnává čtené symboly z 1.pásky se vstupními symboly slova u_2 . Čtecí hlava druhé pásky jde v každém taktu o jednu buňku vpravo , čtecí hlava třetí pásky o jednu buňku v taktu vlevo a srovnávají se čtené symboly druhé a třetípásky. Jelikož $\frac{d(v)}{2} \geqq 2\ell$, je zřejmé, že tímto způsůbem lze slovo u_2 porovnat v reálném čase se slovem v^{-1} . Jakmile je porpvé zjištěno, že $u_2 \neq v^{-1}$, zůstanou všechny čtecí hlavy nadále na svých místech až do doby, kdy na vstup přijde další symbol $*$. Jestliže $u_2 = v^{-1}$, automat vstupní slovo přijme. Jestliže po slově $u_2 = v^{-1}$ následuje symbol $*$, automat přijímá všechna další prodloužení dosavadního vstupního slova. Jestliže po slově $u_2 = v^{-1}$ následuje symbol z U , automat další slovo nepřijímá, ponechá čtecí hlavy na místech a čeká až se objeví další symbol $*$.

6. Nechť na vstup jde další symbol $*$ a předchozí vstupní úsek nebyl přijat. Pak se opakuje celý postup od bodu 3 (se vstupními slovy $u_3, u_4, \ldots$). Je vidět, že popsaný automat rozeznává jev B . Tento automat užívá čtecích hlav s rozsahem 4 s možností posuvu až o 4 buňky. Podle věty 2.1 existuje automat $\bar{J} \in J^4$, který též rozeznává jev B .

Poznámka. Podrobnou analyzou práce automatu J lze zjistit, že lze sloučit třetí a čtvrtou pásku v jedinou pásku. Lze tedy dokázat, že existuje $J \in J^3$ rozeznávající jev B .

Z posledních dvou lemmat vyplývá

Věta 3.5. Existuje jev A rozeznatelný v reálném čase a takový, že jev A^{-1} není rozeznatelný v reálném čase.

Nyní si položme tuto úlohu. Buď dán jev A a nechť existuje automat J, který rozeznává jev A se zpožděním o r-taktů. Jde o to, zda A je rozeznatelný v reálném čase. Zaveďme nejprve další označení. Nechť J je automat s výstupní abecedou $\Pi = \{0; 1\}$. Symbolem $J[1]$ označme jev $A \subset \Sigma^{\infty}$ určený následující podmínkou: buď K_1 počáteční konfigurace a φ kanonická funkce automatu J; pak

$$a \in A \Leftrightarrow \text{ slovo } \varphi(a, K_1) \text{ končí symbolem } 1 .$$

Věta 3.6 Nechť A je jev rozeznatelný automatem J se zpožděním o r taktů, tj.: nechť $B = J[1]$. Pak

1. $a \in A \Rightarrow$ pro libovolné $b \in \Sigma^{\infty}$, $d(b) = r$ jest $ab \in B$,

2. a non $\in A \Rightarrow$ pro libovolné $b \in \Sigma^{\infty}$, $d(b) = r$ jest ab non$\in B$.

Pak existuje automat $\bar{J}$ takový, že $A = \bar{J}[1]$.

Tato věta je jednoduchým důsledkem věty následující.

Věta 3.6'. Nechť J je automat, $B = J[1]$. Buď $A \subset \Sigma^{\infty}$ jev definovaný podmínkou

$$a \in A \Leftrightarrow \text{ existuje } b \in \Sigma^{\infty},\ d(b) = r,\ ab \in B .$$

Pak existuje automat $\bar{J}$ takový, že $A = \bar{J}[1]$.

Důkaz. Pro jednoduchost předpokládejme, že J je automat s jednou pracovní páskou s výstupní abecedou $\Pi = \{0; 1\}$. Nechť K je libovolná konfigurace automatu J, $O(K,r)$ její okolí r-tého řádu. Zřejmě pro libovolné slovo $a \in \Sigma^{\infty}$, $d(a) \leqq r$ platí

$$\varphi(a,K) = \varphi(a,O(K,r)) ,$$

kde φ je kanonická funkce automatu J. Buď f funkce definovaná podmínkou

$f(K) = f(O_{*}(K,r)) = 1$, existuje-li $a \in \Sigma^{\infty}$, $d(a)=r$ takové, že slovo $\varphi(a,K)$ končí symbolem 1,

$f(K) = 0$ v ostatních případech.

Definujme automat $J_1 \in J^1_{2r-1,1}$ se stejnými abecedami jako u automatu J. Buď dáno substituční pravidlo

$$(s_i;\alpha_j;\ S_{i_0}) \rightarrow (S_{j_0};\ m_l;\ s_k;\beta_\ell)$$

automatu J. Pak automat J_1 obsahuje všechna pravidla tvaru

$$(s_i;\alpha_j;\ X_{r-1}\ X_{r-2}\ \dots\ X_1\ S_{i_0}\ Y_1\ Y_2\ \dots\ Y_{r-1}) \rightarrow$$

$$\rightarrow (X_{r-1}\ X_{r-2} \dots\ X_1\ S_{j_0}\ Y_1\ Y_2\ \dots\ Y_{r-1};\ m_l;\ s_k;\ \gamma) ,$$

kde $X_i \in \mathcal{S}$, $Y_i \in \mathcal{S}$ jsou libovolné a $\gamma = f((s_i;\ X_{r-1}\ X_{r-2} \dots$

$$\dots X_1\ S_{i_0} \Delta\ Y_1\ Y_2 \dots\ Y_{r-1}))\ .$$

Tedy každému substitučnímu pravidlu antomatu J odpovídá konečná množina substitučních pravidel automatu J_1. Automat J_1 kromě těchto žádná jiná neobsahuje. Je vidět, že J_1 má následující vlastnost. Nechť $C = J_1[1]$. Pak

$$a \in C \Leftrightarrow ex\ .\ b \in \Sigma^{\infty},\ d(b) = r \ \text{ a } \ ab \in B\ .$$

To znamená, že $C = A$. Podle věty 2.1 existuje $\bar{J} \in J^1_{1,1}$ takový, že $\Phi_{\bar{J}} = \Phi_{J_1}$, tj. $\bar{J}[1] = J_1[1]$. Tím je věta dokázána.

4. Automaty s více čtecími hlavami na jedné pásce

Automat $J \in J^n$ (s n páskami) je možno též chápat jako automat $\bar{J}$ s jedinou páskou s pracovní abecedou $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2 \times \ldots \times \mathcal{S}_n$, kde $\mathcal{S}_i$ je pracovní abeceda i-té pásky automatu J, $i = 1,2,\ldots,n$. Je-li $S \in \mathcal{S}$, $S = (S_{i_1}, S_{i_2},\ldots,S_{i_n})$, definujme $\eta_i(S) = S_{i_j}$, $j = 1,2,\ldots,n$. Substituční pravidla automatu $\bar{J}$ lze pak udat následujícím způsobem: nechť p-tá čtecí hlava automatu $\bar{J}$ čte symbol $A_p \in \mathcal{S}$, $p = 1,2,\ldots,n$; nechť $s_i \in \mathcal{F}$, $\alpha_i \in \Sigma$. Položme $S_{i_p} = \eta_p(A_p)$, $p = 1,2,\ldots,n$. Nechť

(4.1) $\quad (s_i;\alpha_j; S_{i_1},S_{i_2}\ldots, S_{i_n}; S_{j_1},S_{j_2}\ldots, S_{j_n}; m_1,m_2\ldots,m_n; s_k;\beta_\ell)$

je substituční pravidlo automatu J. Pak automat $\bar{J}$ obsahuje pravidlo tvaru

(4.2) $\quad (s_i;\alpha_j;A_1,A_2,\ldots,A_n; B_1,B_2,\ldots,B_n; m_1,m_2,\ldots, m_n; s_k; \beta_\ell)$,

kde B_i se liší od A_i jen v i-té souřadnici, $\eta_i(B_i) = S_{j_i}$, $i = 1,2,\ldots,n$. Tedy i-tá čtecí hlava automatu $\bar{J}$ přepisuje jen i-tou souřadnici čtecího symbolu A_i. Jestliže dvě nebo více čtecích hlav automatu $\bar{J}$, např. j-tá a k-tá se nachází v nějakém taktu na téže buňce, pak výsledný symbol napsaný na této buňce po okončení taktu bude obecně různý od B_i i od B_k. To znamená, že symboly $B_1,B_2,\ldots,B_n$ v (4.2) nejsou definitivní symboly, které mají být v daném taktu čtecími hlavami na aktivních buňkách zapsány.

Chceme-li pravidla (4.2) chápat tak, že B_i má být symbol, který je po ukončení taktu skutečně napsán na buňce, na níž byla i-tá čtecí hlava, dojde přirozeně ke kolisi. Tuto nepříjemnost je možno odstranit, jak ukážeme dále. Udáme tři typy jednopáskových automatů.

Mějme abecedy $\Sigma, \mathcal{F}, \mathcal{S}$, $M = \{-1;0;1\}$, Π.

1. typ. Automat J je dán konečnou množinou substitucí tvaru

$$(4.3) \quad (s_i; \alpha_j; N_1, N_2, \ldots, N_k; S_{i_1}, S_{i_2}, \ldots, S_{i_n}) \rightarrow (S_{j_1}, S_{j_2}, \ldots, \\ \ldots, S_{j_n}; m_1, m_2, \ldots, m_n; s_k; \beta_\ell),$$

kde $N_1, N_2, \ldots, N_k$ tvoří rozklad množiny $N = \{1;2;\ldots;n\}$,

$1 \leqq k \leqq n$, tj. $N_j \neq \phi$, $j = 1,2,\ldots k$; $N_p \cap N_q = \phi$ pro $p \neq q$,

$\bigcup_{p=1}^{k} N_p = N$. Substituce (4.3) má dále tuto vlastnost

$$(4.3') \quad p \in N_r,\ q \in N_r \Rightarrow S_{i_p} = S_{i_q},\ S_{j_p} = S_{j_q},\quad p,q = 1,2,\ldots,n; \\ r = 1,2,\ldots,k .$$

Interpretace: Předpokládáme, že automat J má na počátku každého taktu informaci, které z čtecích hlav se nacházejí na společné buňce, což lze udat rozkladem množiny N.

2. typ. Nepředpokládáme, že automat rozpozná, že některé čtecí hlavy jsou na téže buňce, stanovíme však preferenci udáním pořadí $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ čísel $(1,2,\ldots,n)$, které bude mít operační jednotka automatu k disposici a podle níž bude řídit přepisování symbolů. Automat J lze tedy zapsat jako množinu substitucí tvaru

(4.4) $(s_i;\alpha_j;\ S_{i_1},\ S_{i_2},\dots,S_{i_n}) \rightarrow (S_{j_1},\ S_{j_2},\dots,S_{j_n};$
$m_1,m_2,\dots,m_n;\ s_k;\ \beta_\ell)$.

Je-li preference dána pořadím $(p_1,p_2,\dots,p_n)$, je činnost automatu v daném taktu následující: po zjištění, které substituce je nutno použít, zapíše p_n-tá čtecí hlava symbol $S_{j_{p_n}}$, pak p_{n-1}-tá čtecí hlava zapíše symbol $S_{j_{p_{n-1}}}$ atd. až p_1-tá čtecí hlava zapíše symbol S_{p_1} . Nato se provedou příslušné posuny čtecích hlav, vydá se výstupní symbol a automat přejde do nového stavu podle substituce (4.4). Je zřejmé, že vhodným přečáslováním čtecích hlav lze preferenci udat základním pořadím (1,2,...,n).

3. typ. Automat J je konečná množina substitucí tvaru (4.4) s touto vlastností:

$$S_{i_p} = S_{i_q} \Rightarrow S_{j_p} = S_{j_q} \quad ,\ p,q = 1,2,\dots,n\ .$$

Definice 4.1 Třídu automatů (s n čtecími hlavami) i-tého typu označme $\tilde{\mathfrak{J}}^{n,i}$, i = 1,2,3.

Lemma 4.1. $\tilde{\mathfrak{J}}^{n,3} \prec \tilde{\mathfrak{J}}^{n,2} \prec \tilde{\mathfrak{J}}^{n,1}$.

Důkaz. Je zřejmé, že $\tilde{\mathfrak{J}}^{n,3} \prec \tilde{\mathfrak{J}}^{n,2}$. Dokážeme, že $\tilde{\mathfrak{J}}^{n,2} \prec \tilde{\mathfrak{J}}^{n,1}$. Nechť $J \in \mathfrak{J}^{n,2}$. Nechť preference automatu J je udána pořadím (1,2,...,n). Utvořme automat $\bar{J} \in \tilde{\mathfrak{J}}^{n,1}$ se stejnými abecedami jako u automatu J .

Nechť
$$(s_i;\ \alpha_j;\ N_1,N_2,\dots,N_k;\ S_{i_1},\ S_{i_2},\dots,S_{i_n})$$

je levá strana substitučního pravidla $U \to V$ automatu $\bar{J}$. Výrazu U lze jednoznačně přiřadit substituční pravidlo automatu J

$$(s_i;\alpha_j;S_{i_1},S_{i_2},\dots,S_{i_n}) \to (S_{j_1},S_{j_2},\dots,S_{j_n};m_1,m_2,\dots,m_n;s_k;\beta_\ell).$$

Položme

$$V = (S'_{j_1}, S'_{j_2},\dots,S'_{j_n}; m_1,m_2,\dots,m_n; s_k; \beta_\ell),$$

kde S'_{j_k}, $k = 1,2,\dots,n$ splňují následující podmínku:

je-li $N_p = \{r_1;r_2;\dots,r_q\}$, $r_1 < r_2 < \dots < r_q$, pak

$$S'_{j_{r_1}} = S'_{j_{r_2}} = \dots = S'_{j_{r_q}} = S_{j_{r_1}}, \quad p = 1,2,\dots,k.$$

Zřejmě $\bar{J} \in \tilde{J}^{n,1}$ a $\Phi_{\bar{J}} = \Phi_J$.

Lemma 4.2. $J^n \prec \tilde{J}^{n,1}$.

Důkaz. Tvrzení je zřejmé.

Lemma 4.3. Nechť n je přirozené číslo. Pak existuje přirozené číslo p takové, že

$$\tilde{J}^{n,1} \prec \tilde{J}^{n+p,2}$$

Důkaz. Nechť $J \in \tilde{J}^{n,1}$. Utvořme automat $\bar{J}$, který kromě pracovní pásky s n čtecími hlavami bude mít dalších $p = \binom{n}{2}$ pomocných pracovních pásek s jednou čtecí hlavou, jejichž funkce spočívá v tom, že zjišťují, které pracovní hlavy první pásky se nacházejí na společné buňce. To lze snadno zařídit tím způsobem, že se v 1.taktu na pomocné pásce označí buňka a v dalších taktech se čtecí hlava od této buňky vzdaluje nebo přibližuje podle toho, zda se od sebe vzdalují či přibližují uvažované dvě čtecí hlavy první pásky. Z těchto $\binom{n}{2}$ pásek lze tedy v libovolném taktu zjistit, které čtecí hlavy jsou na společné buňce čili vytvořit příslušný rozklad $\{N_1, N_2, \ldots, N_k\}$. Pak je tedy jasné co která hlava má na první pásce napsat. Stačí nyní uvažovat všech $1+\binom{n}{2}$ pásek jako jedinou pásku s abecedou vytvořenou kartézským součinem abeced jednotlivých pásek. Čtecí hlavy odpovídající pomocným páskám nikdy nepřepisují čtený symbol (kromě 1.taktu), tj. píší týž symbol, který čtou. Stačí nyní udat preferenci např. pořadím $(1,2,\ldots,n,n+1,\ldots,n+\binom{n}{2})$, kde čísla $1,2,\ldots,n$ se vztahují k ~~převodním~~ původním čtecím hlavám. Je jasné, že utvořený automat $\bar{J}$ simuluje práci automatu J, tj. $\Phi_{\bar{J}} = \Phi_J$.

Lemma 4.4. $J^2 \prec \tilde{J}^{2,3}$.

Důkaz. Podle věty 2.5 lze předpokládat, že pracovní pásky automatu J jsou polópásky. Nechť první páska je ohraničena zleva, je tedy tvořena buňkami

$$B_o B_1 B_2 \ldots$$

Nechť druhá páska je omezená zprava a je tedy tvořena buňkami

$$\ldots B_{-3} B_{-2} B_{-1} .$$

Podle věty 2.6 lze předpokládat, že

$$m_1(J,a,t) = 0 \quad \text{pro} \quad t \quad \text{sudé}; \quad m_2(J,a,t) = 0 \quad \text{pro} \quad t \quad \text{liché} .$$

Dále předpokládejme, že

$$m_1(J,a,1) = 1$$

a že čtecí hlava 1.pásky se v dalších taktech už nikdy nedostane na buňku B_o, což lze zřejmě zařídit.

Obohatíme ještě pracovní abecedy automatu J dalšími prázdnými symboly. Především lze předpokládat, že $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 = \{\Lambda\}$. Nechť Λ_1 non $\in \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$, Λ_2 non $\in \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$, $\Lambda \neq \Lambda_1 \neq \Lambda_2 \neq \Lambda$. Nechť

$$\bar{\mathcal{S}}_1 = \{\Lambda_1\} \cup \mathcal{S}_1, \quad \bar{\mathcal{S}}_2 = \{\Lambda_2\} \cup \mathcal{S}_2 .$$

Nový automat J_1 s abecedami $\Sigma_1 = \Sigma$, $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}$, $\bar{\mathcal{S}}_1$, $\bar{\mathcal{S}}_2$, $\Pi_1 = \Pi$ bude pracovat stejným způsobem jako automat J s tím rozdílem, že

1. pokud čtecí hlava i-té pásky automatu J zapisovala symbol Λ, zapisuje čtecí hlava i-té pásky automatu J_1 symbol Λ_i, $i = 1,2$,
2. pravá strana substitučního pravidla automatu J_1 nezávisí na tom, je-li čtený symbol i-té pásky roven Λ nebo Λ_i, $i = 1,2$.

Protože se čtecí hlava 1.pásky nikdy nevrátí zpět na buňku B_o, lze na tuto buňku zapsat v 1.taktu symbol, který je v 1.taktu zapisován druhou čtecí hlavou na buňku B_{-1}. To znaená, že v 1. taktu je nutno mít na první pásce k disposici i abecedu pásky druhé, tedy abecedu $\bar{\mathcal{S}}_1 \cup \bar{\mathcal{S}}_2$. Je jasné, že v dalších taktech stačí na první pásce abeceda $\bar{\mathcal{S}}_1$.

Jestliže nyní slepíme první pásku s páskou druhou překrytím buněk B_{-1} s B_o a v prvním taktu dáme čtecí hlavy na tuto (zdvojenou) buňku, pak zřejmě dostáváme automat J_2, pro který platí:

1. $J_2 \in \tilde{\mathfrak{J}}^{2,3}$
2. $\Phi_{J_2} = \Phi_J$.

Tím je lemma dokázáno.

Poznámka. Zatím není jasné, zda pro $n > 2$ platí $J^n \prec \tilde{J}^{n,3}$. Také otázka, zda existuje operátor realizovatelný automatem s více čtecími hlavami na jedné pásce, je též realizovatelný v reálném čase ve smyslu definice 3.1, zůstává otevřená.

Příklad. Nechť $\Sigma = \{0;1;*\}$, $X = \{0;1\}^{\infty}$. Definujme jev

$$A = \{a;\ a = u * v,\ u \in X,\ v \in X,\ v \text{ je počáteční úsek slova } u\}.$$

Je zřejmé, že jev A je rozeznatelný vhodným jednopáskovým automatem se dvěma čtecími hlavami; je dokonce rozeznatelný vhodným automatem $J \in \tilde{J}^{2,3}$. Je otázka, zda jev A je rozeznatelný v reálném čase ve smyslu definice 3.1.

Lemma 4.5 Nechť A je jev definovaný vztahem (3.3), nechť n je přirozené číslo. Neexistuje $J \in \tilde{J}^{n,1}$ rozpoznávající jev A.

Důkaz. Je zcela analogický jako důkaz lemmatu 3.2.

5. Yamadovské funkce a složitost jevů rozeznatelných v reálném čase

V práci Hartmanise, Lewise a Stearnse [4] jsou klasifikovány jevy podle toho, kolik buněk paměti potřebuje automat k jejich rozeznání. Buď dána třída automatů T a neklesající funkce $L(n)$, zobrazující přirozená čísla do sebe. Pak daný jev A patří do třídy určené funkcí L (vzhledem ke třídě T), existuje-li automat $J \in T$ takový, že platí:

1. automat J rozeznává jev A

2. nechť a je libovolné vstupní slovo, $d(a) = n$.

Nechť v taktu t , ve kterém automat J rozhodne zda $a \in A$ resp. a non $\in A$ je počet upotřebených buněk (v čase od 1 do t) roven $p(n)$. Pak $p(n) \leq L(n)$.

V práci [4] uvažují autoři čtyři třídy automatů, které mají kromě pracovních pásek pásku vstupní, na níž je nutno slovo a před zahájením práce automatu J umístit:

1. automaty, ve kterých se čtecí hlava vstupní pásky může pohybovat jen vpravo nebo zůstat na místě, tj. abeceda posunů této pásky je rovna $M_0 = \{0;1\}$.

2. automaty, pro které $M_0 = \{-1;0;1\}$.

3. zásobníkové automaty, jejichž čtecí hlava vstupní pásky se pohybuje jako v případě 1.

4. zásobníkové automaty s pohybem čtecí hlavy na vstupní pásce jako v případě 2.

Dokazují, že pro každou uvedenou třídu existuje funkce $\mathscr{L}(n)$ taková, že platí: jestliže $L(n)$ je funkce, pro níž $\lim_{n\to\infty} \frac{L(n)}{\mathscr{L}(n)} = 0$ a jev A je rozeznatelný vhodným automatem s omezením paměti $L(n)$, pak A je rozeznatelný konečným automatem. Dále dokazují, že platí: jestliže $L(n) \geqq \mathscr{L}(n)$, $L_1(n)$ je konstruktivní (tento pojem bude upřesněn později), $\lim_{n\to\infty} \frac{L_1(n)}{L(n)} = +\infty$, pak existuje jev A rozeznatelný s prostorovým omezením $L_1(n)$, který však není rozeznatelný s prostorovým omezením $L(n)$. Tato věta zaručuje netriviálnost klasifikace jevů vzhledem k různým funkcím $L(n)$. Autoři dále dokazují řadu vět majícících vztah k abstraktním jazykům. Celá tato klasifikace si nevšímá času, který je potřebný k rozeznání slova délky n. Fischer [3] formuluje úlohu klasifikovat jevy rozpoznatelné s jistým časovým omezením podle toho, jak velký prostor paměti je k jejich rozeznání potřeba. V dalším se pokusíme tuto úlohu částečně řešit, a to pro případ jevů rozeznatelných v reálném čase ve smyslu definice 3.1 .

Nechť m je přirozené číslo, $J \in J^m$. Obohatíme pracovní abecedy automatu J o nový prázdný symbol $\bar{\Lambda} \neq \Lambda$, $\bar{\Lambda}$ non $\in$ $\mathscr{S}_i$, $i = 1,2,\ldots,m$, tj. utvoříme nový automat $\bar{J} \in J^m$ s pracovními abecedami $\bar{\mathscr{S}}_i = \mathscr{S}_i \cup \{\bar{\Lambda}\}$, kde $\mathscr{S}_i$ jsou pracovní abecedy automatu J, $i = 1,2,\ldots,m$; ostatní abecedy ponecháme beze změny. Automat $\bar{J}$ bude realizovat týž operátor jako automat J. Substituční pravidlo automatu $\bar{J}$ se liší od pravidel automatu J jedině tím, že automat $\bar{J}$ zapisuje na pásku symbol $\bar{\Lambda}$, jestliže automat J zapisuje symbol Λ a pravá strana substitučního pravidla automatu $\bar{J}$ nezávisí na tom, zda zaměníme na její levé straně symbol Λ (pokud se tam vyskytuje) za symbol $\bar{\Lambda}$ a naopak. Užití nového prázdného symbolu umožňuje v kterémkoliv taktu rozeznat, které buňky paměti automatu $\bar{J}$ byly až dosud použity. V dalším budeme vždy předpokládat, že automaty, kterých budeme užívat, mají právě popsanou vlastnost.

Nechť $J \in J^m$, $a \in \Sigma^\infty$. Buď $K(a)$ konfigurace, do níž je automat J převeden vstupním slovem a,

$$K(a) = (s_i; \ldots; A_1^k A_2^k \ldots A_p^k \Delta_k A_{p+1}^k \ldots A_q^k; \ldots),$$

kde $A_j^k \in \mathcal{S}_k$ $(A_j^k \neq \Lambda)$, $j = 1,2,\ldots q$; $k = 1,2,\ldots,m$. Označme

$p_k(a) = q$ (délka slova na k-té pásce po zpracování slova a).

Je zřejmé, že platí: je-li $a = bc$, je $p_k(a) \geqq p_k(b)$; $p_k(\phi) = 1$.

Označme

$$\ell_i(J,n) = \max_{d(a)=n} p_i(a) \quad , \quad i = 1,2,\ldots,m;$$

$$\ell(J,n) = \max_{i=1,2\ldots,m} \ell_i(n) \quad , \quad \bar{\ell}(J,n) = \sum_{i=1}^{m} \ell_i(J,n).$$

Je zřejmé, že $\ell(J,n) \leqq n+1$ pro libovolné n .

Definice 5.1 Buď dána neklesající funkce L, zobrazující přirozená čísla do množiny nezáporných čísel, nechť m je přirozené číslo. Řekneme, že automat $J \in J^m$ pracuje s prostorovým omezením L, jestliže existuje n_0 tak, že

$$\ell(J,n) \leqq L(n) \quad \text{pro} \quad n \geqq n_0 .$$

Řekneme, že $J \in J^m$ pracuje s celkovým prostorovým omezením $L(n)$ jestliže

$$\bar{\ell}(J,n) \leqq L(n) \quad \text{pro} \quad n \geqq n_0 .$$

Poznámka. Konečné automaty lze považovat za automaty, které pracují s prosotorovým omezením L, přičemž $L(n) \leqq$ const, $n = 1,2,\dots$. Lze např. položit $L(n) \equiv 0$.

Označení. Nechť a,b jsou nezáporná čísla. Položme $a \dot{-} b = a - b$, jestliže $a \geqq b$, $a \dot{-} b = 0$, je-li $a < b$.

Uveďme bez důkazu

Lemma 5.1 Nechť L je neklesající funkce, zobrazjící množinu přirozených čísel do množiny nezáporných čísel; nechť r je kladné číslo. Položme $L_1(n) = L(n) \dot{-} r$, $n = 1,2,\dots$. Pak platí: jestliže automat $J \in J^m$ pracuje s prostorovým omezením $L(n)$, pak existuje $\bar{J} \in J^m$, který pracuje s prostorovým omezením $L_1(n)$ a $\Phi_{\bar{J}} = \Phi_J$.

Definice 5.2 Libovolnou neklesající funkci L, zobrazující množinu přirozených čísel do množiny nezáporných reálných čísel nazveme funkcí složitosti.

Lemma 5.2 Buď dán automat $J \in J^m$, který pracuje s prostorovým omezením $L(n)$. Pak existuje automat $\bar{J} \in J^m$, který pracuje s celkovým prostorovým omezením $L(n)$ a $\Phi_{\bar{J}} = \Phi_J$.

Důkaz. Je-li funkce složitosti L omezená, pak operátor Φ_J lze realizovat konečným automatem a lemma platí. Nechť L je neomezená. Pak pro skoro všechna n platí

$$\ell_i(J,n) \leqq \ell(J,n) \leqq L(n)\,, \quad i = 1,2,\dots,m\,.$$

Podle věty o kompresi (věta 2.2) a lemmatu 5.2 existuje automat $\bar{J} \in J^m$ takový, že pro skoro všechna n a $i = 1,2,\dots,m$ platí

$$\ell_i(\bar{J},n) \leqq \frac{1}{m} L(n) \ , \quad \Phi_{\bar{J}} = \Phi_J \ .$$

Pro skoro všechna n tedy platí

$$\bar{\ell}(\bar{J},n) = \sum_{i=1}^{m} \ell_i(\bar{J},n) \leqq L(n)$$

a lemma je dokázáno.

V dalším se tedy stačí omezit na vyšetřování automatů, pracujících s prostorovým omezením L .

Definice 5.3 Nechť L je funkce složitosti. Symbolem $T(L)$ označme třídu všech automatů $J \in J^n$, $n = 0,1,\dots$, pracujících s prostorovým omezením L .

Definice 5.4 Řekneme, že operátor Φ patří do třídy složitosti L , $\Phi \in R(L)$, existuje-li $J \in T(L)$ takový, že $\Phi_J = \Phi$. Budeme též říkat, že Φ je L-vyčíslitelný.

Řekneme, že jev A patří do třídy složitosti $R(L)$, jestliže příslušný operátor (s výstupní abecedou $\{0;1\}$) , který jev A charakterizuje, patří do třídy $R(L)$.

Třídu operátorů, realizovatelných konečnými automaty, označme $R(0)$.

Lemma 5.3 Nechť L je funkce složitosti, $L_1(n) = n$, $n = 1,2,\dots$. Pak každý L-vyčíslitelný operátor je L_1-vyčíslitelný.

Důkaz. Vyplývá ze vztahu $\ell(J,n) \leqq n+1$ a z lemmatu 5.1 .

Lemma 5.4. Nechť pro funkci složitosti L platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L(n)}{\lg n} = 0 . \tag{5.1}$$

Pak platí: je-li operátor $\Phi \in R(L)$, pak $\Phi \in R(0)$.

Poznámka. Tato věta je pro jisté třídy automatů dokázána v [4] .

Důkaz. Nechť $J \in J^m$, $J \in T(L)$, $\Phi_J = \Phi$. Jsou-li $\mathcal{F}_{\xi}, \mathcal{S}_1, \ldots$ $\ldots, \mathcal{S}_m$ abeceda vnitřních stavů a pracpvní abecedy automatu J , označme

$$s = \operatorname{card} \mathcal{F} ; \quad r_i = \operatorname{card} \mathcal{S}_i, \quad i = 1,2,\ldots,m; \quad r = \max_{i=1,2,\ldots,m} r_i$$

Počet všech různých konfigurací $K(a)$ automatu J , kde a je libovolné slovo délky n , není větší než

$$s . r^{m.\ell(n)} . \ell^m(n) ,$$

$\ell(n) = \ell(J,n)$. Podle (5.1) existuje přirozené číslo N takové, že platí

$$s . r^{m\ell(N)} \ell^m(N) < N .$$

To znamená, že pro libovolné vstupní slovo a, $d(a) = N$ platí: existují a_1, a_2, a_3, $a_2 \neq \phi$, $a = a_1 a_2 a_3$ a $K(a_1) \equiv K(a_1 a_2)$.

Označme

$$\mathcal{S} = \{K(a); \ a \in \Sigma^{\infty}, \ d(a) \leqq N\} .$$

Nyní ukážeme, že pro libovolné slovo $a \in \Sigma^{\infty}$ platí $K(a) \in \mathcal{S}$.

Důkaz provedeme indukcí podle délky slova a .

1. Je-li $d(a) \leqq N$, je $K(a) \in \mathcal{S}$.

2. Nechť $n \geqq N$ a nechť pro všechna slova a délky $\leqq n$ platí $K(a) \in \mathcal{S}$. Nechť $a \in \Sigma^{\infty}$, $d(a) = n+1$. Pak lze psát

$a = bc$, $d(b) = N$. Existuje rozklad slova b , $b = b_1 b_2 b_3$, $b_2 \neq \phi$ a $K(b_1) = K(b_1 b_2)$. Tedy $K(a) = K(bc) = K(b_1 b_2 b_3 c) = K(b_1 b_3 c)$ a $d(b_1 b_3 c) \leqq n$. Tedy $K(b_1 b_3 c) \in \mathcal{S}$ a tvrzení je dokázáno. To však znamená, že $\ell(J,n) \leqq \ell(N)$ pro libovolné n , tedy $\Phi \in R(0)$ a lemma je dokázáno.

Lemma 5.5 Nechť L_1, L_2 jsou dvě funkce složitosti. Nechť existuje konstanta $c > 0$ taková, že

$$L_1(n) \leqq c\, L_2(n)$$

pro skoro všechna n . Buď dán operátor Φ . Pak platí:

je-li $\Phi \in R(L_1)$, pak $\Phi \in R(L_2)$.

Důkaz. Stačí ukázat, že platí: je-li Φ L-vyčíslitelný, je i $\frac{1}{m}$L-vyčíslitelný pro libovolné přirozené číslo m . To však plyne snadno z věty o kompresi.

Z posledních lemmat vyplývá, že stačí dále vyšetřovat funkce složitosti L, pro něž $\lg n \leqq L(n)$ pro nekonečně mnoho n , $L(n) \leqq n$. Jestliže $L_1(n) \leqq L_2(n)$, pak $R(L_1) \subset R(L_2)$. Cílem dalších úvah bude nalézt podmínky, za nichž $R(L_1) \neq R(L_2)$.

Definice 5.5 Yamadův automat, stručně Y-automat, je automat popsaný definicí 1.2 a splňující tyto vlastnosti:

1. vstupní abeceda je jednoprvková
2. výstupní abeceda je binární , $\Pi = \{0;1\}$.

Y-automat můžeme též chápat jako automat bez vstupu. Délka vstupních slov udává jen počet taktů, ten je však udán také délkou výstupního slova. Y-automat přiřazuje tedy každému přirozenému n (tj. počtu taktů) posloupnost z nul a jedniček délky n. Lze říci, že Y-automat generuje nekonečnou posloupnost z nul a jedniček. Jestliže se v této posloupnosti vyskytuje nekonečně mnohokrát symbol 1, budeme říkat, že je posloupnost regulární; příslušný Y-automat se též nazývá regulární.

Buď dána nekonečná posloupnost

$$\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots \tag{5.2}$$

$\alpha_i \in \{0,1\}$, $i = 1,2,\ldots$ a nechť symbol 1 se v této posloupnosti vyskytuje nekonečněmnohokrát (posloupnost α je regulární). Každé takové posloupnosti přiřadíme funkci f, zobrazující N do N (N je množina přirozených čísel) tímto předpisem: nechť $n \in N$. Pak

$$f(n) = \min \left\{p;\ p \in N,\ \sum_{i=1}^{p} \alpha_i = n \right\}.$$

Zřejmě f je rostoucí funkce. Zobrazení, přiřazující právě popsaným způsobem každé regulární posloupnosti (5.2) funkci f, označme F; tedy $f = F(\alpha)$. Obráceně lze každé rostoucí funkci f, zobrazující N do N přiřadit právě jednu posloupnost α tvaru (5.2) tak, že $F(\alpha) = f$.

Definice 5.6 Řekneme, že rostoucí funkce f zobrazující N do N je yamadovská, resp. že f je y-funkce, existuje-li Y-automat J, generující posloupnost α, pro níž $F(\alpha) = f$. V tomto případě budeme též říkat, že automat J generuje funkci f.

Posloupnosti (5.2) lze přiřadit funkci, která je, zhruba řečeno, inversní k funkci $f = F(\alpha)$. Buď dána posloupnost α tvaru (5.2). Definujme funkci $\varphi = F_1(\alpha)$ zobrazující N do N_0 (N_0 je množina celých nezáporných čísel) předpisem

$$\varphi(n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i .$$

Funkce φ má zřejmě tyto vlastnosti.

(i) φ je neklesající, $\varphi(1) = 0$ nebo $\varphi(1) = 1$,

(ii) $\varphi(n+1) - \varphi(n) \leqq 1$ pro všechna $n \in N$,

(iii) je-li α regulární, je $\lim_{n\to\infty} \varphi(n) = +\infty$.

Obráceně ke každé funkci φ zobrazující N do N_0 a splňující podmínky (i),(ii), existuje právě jedna posloupnost α tvaru (5.2), pro níž $F_1(\alpha) = \varphi$. Jestliže φ vyhovuje podmínce (iii), je posloupnost α regulární. V tomto případě budeme říkat, že φ je regulární.

Definice 5.7 Řekneme, že funkce φ, zobrazující N do N_0, je inversní yamadovská funkce respektive že φ je i-funkce, existuje-li Y-automat J, generující regulární posloupnost α a $F_1(\alpha) = \varphi$. Budeme též říkat, že automat J generuje i-funkci φ.

Mezi i-funkcemi a y-funkcemi existuje vzájemně jednoznačné přiřazení $f = F(F_1^{-1}(\varphi))$. Zřejmě pro libovolnou i-funkci φ a jí odpovídající y-funkci f platí

$$\varphi(f(n)) = n \text{ pro všechna } n \in N ,$$

$$f(\varphi(n)) = n_1 , \text{ kde } n_1 \text{ je nejmenší přirozené číslo,}$$

pro něž $\varphi(n_1) = \varphi(n)$.

Definice 5.8 Řekneme, že i-funkce φ má vlastnost V , existuje-li Y-automat J generující tuto funkci s prostorovým omezením $L(n) = \varphi(n)$. V tomto případě budeme též říkat, že automat J má vlastnost V . Řekneme, že posloupnost α respektive y-funkce f má vlastnost V , má-li vlastnost V odpovídající i-funkce φ .

Věta 5.1 Nechť L, L_1 jsou funkce složitosti a nechť platí

1. L_1 je i-funkce s vlastností V ,
2. $\liminf\limits_{n \to \infty} \frac{L(n)}{L_1(n)} = 0$.

Pak existuje jev A a platí: $A \in R(L_1)$, $A \text{ non} \in R(L)$.

Důkaz. Nechť $\Sigma = \{0;1;*\}$, $\Sigma_1 = \{0;1\}$. Nechť J_1 je Y-automat(bez vstupu), generující i-funkci L_1 s prostorovým omezením L_1 . Příslušnou generovanou posloupnost označme

$$\beta = \beta_1 \beta_2 \ldots ,$$

$\beta_i \in \Sigma_1$, i = 1,2,... . Buď J_2 automat se dvěma vstupy V, V_1 s jednou pracovní páskou, jejíž pracovní abeceda $\mathcal{S}_1 = \{0;1;\bar{0};\bar{1}\}$, výstupní abeceda automatu J_2 je $\{0;1\}$. Vstupní abeceda pro vstup V je Σ , pro vstup V_1 - Σ_1 . Z automatů J_1, J_2 sestavíme jediný automat J tak, že výstup automatu J_1 připojíme na vstup V_1 . Vstupní abeceda automatu J (se vstupem V) je a symbol α_n v opačném případě. Čtecí hlava se posune o jednu buňku vpravo. Výstupní symbol $\gamma_n = 0$.

2. Nechť $\alpha_i \neq *$, $i = 1,2,\dots,n-1$, $\alpha_n = *$. V tomto případě se zapíše na aktivní buňku pracovní pásky automatu J_2 jakýkoli symbol a čtecí hlava se posune vlevo.

a) jestliže $\sum_{i=1}^{n-1} \beta_i = 0$, pak automat J_2 přejde do stavu $\bar{s}$ a vydá symbol $\gamma_n = 1$.

b) jestliže ex. $i < n$, $\beta_i = 1$, pak $\gamma_n = 0$ a automat J_2 dále pracuje, jak je udáno v etapě č.3 .

3. Nechť $\alpha_i \neq *$, $i = 1,2,\dots,n-1, \alpha_n = *$. Nechť automat J_2 nepřejde v n-tém taktu do stavu $\bar{s}$. Popíšeme nyní činnost J_2 v taktech $i > n$. Definujme nejpreve funkci h proměnné $x \in \mathcal{S}_1$: $h(0) = h(\bar{0}) = 0$, $h(1) = h(\bar{1}) = 1$. Nechť v taktu i není automat J_2 ve stavu $\bar{s}$. Buď δ_i symbol čtený na pásce automatu J_2 . Pak mahou nastat dva případy:

a) $h(\delta_i) \neq \alpha_i$. V tomto případě je $\gamma_i = 0$ a automat J_2 přejde do ~~dtx~~ stavu $\bar{s}$.

b) $h(\delta_i) = \alpha_i$. Jestliže $\delta_i \in \{0,1\}$, pak J_2 zůstane v témž stavu, čtecí hlava se posune vlevo a $\gamma_i = 0$. Jestliže $\delta_i \in \{\bar{0},\bar{1}\}$,pak $\gamma_i = 1$ a J_2 přejde do stavu $\bar{s}$.

Je zřejmé, že automat J pracuje s prostorovým omezením $1 + L_1(n)$. Podle lemmatu 5.1 existuje automat J realizující týž operátor s prostorovým omezením $L_1(n)$.

Je zřejmé, že automat J přijímá právě ta slova $a \in \Sigma^{\infty}$, která mají tvar

(5.3) $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n * \alpha'_1\alpha'_2\ldots\alpha'_m$,

kde $\alpha_i \in \Sigma_1$, $\alpha'_j \in \Sigma_1$, $i = 1,2,\ldots,n$; $j = 1,2,\ldots,m$ a pro něž platí: buď f y-funkce generovaná automatem J_1 , tj. $f = F(F_1^{-1}(L_1))$ (viz definici 5.6 a 5.7).

Pak

(5.4) $m = L_1(n)$; $\alpha_{f(i)} = \alpha'_{m+1-i}$, $i = 1,2,\ldots,m$.

Nechť $A \subset \Sigma^\infty$ je jev, obsahující všechna slova tvaru (5.3) a splňující podmínku (5.4). Dokážeme, že jev A nelze rozpoznat žádným automatem s prostorovým omezením $L(n)$, tj. A non $\in R(L)$. Předpokládejme, že existuje $J \in T(L)$, $J \in J^m$, rozeznávající jev A . Nechť $\mathcal{F}$, $\mathcal{S}_i$, $i = 1,2,\ldots,m$ jsou abecedy automatu J (abeceda vnitřních stavů a pracovní abecedy). Označme $s = \operatorname{card} \mathcal{F}$, $r_i = \operatorname{card} \mathcal{S}_i$, $r = \max r_i$, $i = 1,2,\ldots,m$. Nechť $G(n)$ je počet všech možných konfigurací $K(a)$ automatu J , $a \in \Sigma^\infty$, $d(a) \leqq n$. Ježto $J \in T(L)$, jest $\operatorname{card} G(n) \leqq s.r^{mL(n)}.L^m(n)$. Nechť $H(n)$ je množina všech slov $a \in \Sigma_1^\infty$, $d(a) = n$. Považujme dvě slova $a = \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n \in H(n)$, $b = \beta_1\beta_2\ldots\beta_n \in H(n)$ za ekvivalentní , $a \sim b$, jestliže platí: nechť $p = L_1(n)$, $f = F(F_1^{-1}(L_1))$. Pak pro všechna i, $1 \leqq i \leqq p$ platí $\alpha_{f(i)} = \beta_{f(i)}$. Je zřejmé, že $H(n)$ obsahuje právě $2^{L_1(n)}$ různých tříd vzhledem k udané ekvivalenci. Protože J rozpoznává jev A , musí platit: jestliže $a \in H(n)$, $b \in H(n)$, a non$\sim b$, pak $K(a) \neq K(b)$. To znamená, že platí

$$2^{L_1(n)} \leqq sr^{mL(n)}L^m(n)$$

pro libovolné přirozené n . Pro všechna n tedy platí

$L_1(n)\lg 2 \leqq \lg s + m(\lg r) \cdot L(n) + m \lg L(n)$. Existuje tedy konstanta $k > 0$ taková, že $L(n) \geqq k\, L_1(n)$ pro všechna n a to je spor s druhým předpokladem věty.

Důsledek 1 . Nechť L, L_1 jsou funkce složitosti a nechť platí:

1. L_1 je i-funkce s vlastností V,
2. $\lim_{n\to\infty} \frac{L(n)}{L_1(n)} = 0$.

Pak $R(L) \subsetneqq R(L_1)$.

Důsledek 2. Nechť L je i-funkce, $L(n) = o(\lg n)$. Pak L nemá vlastnost V .

Důkaz. Předpokládejme, že L má vlastnost V . Konečný automat lze chápat jako automat s prostorovým omezením $L_1(n) = 1$. Platí tedy: 1 . $L(n)$ má vlastnost V , 2. $\lim_{n\to\infty} \frac{L_1(n)}{L(n)} = 0$. Podle věty 5.1 existuje jev A , který je L-rozeznatelný, nikoli však rozeznatelný konečným automatem. Pro funkci L platí podle předpokladu vztah (5.1). Podle lemmatu 5.5 je jev A rozeznatelaný konečným automatem a to je spor.

Z věty 5.1 vyplývá důležitost yamadovských funkcí s vlastností V pro klasifikaci operátorů respektive jevů realizovatelných respektive rozeznatelných v reálném čase. Cílem dalších úvah bude ukázat, že existuje dosti široká třída yamadovských funkcí s vlastností V .

Nejprve zavedeme některá označení. Nechť $J \in J^n$ je Y-automat, tj. automat bez vstupu, $\mathcal{F}, \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \ldots, \mathcal{S}_n$, $M = \{-1;0;1\}$, $\Pi = \{0;1\}$ jeho abecedy. Utvořme automat $J' \in J^n$ s týmiž abecedami a se vstupní abecedou $\Sigma = \{0;1\}$. Udáme substituční pravidla automatu J'. Nechť

$$(s_i;\ S_{i_1}, S_{i_2}, \ldots, S_{i_n};\ S_{j_1}, S_{j_2}, \ldots, S_{j_n}; m_1, m_2, \ldots, m_n;\ s_k;\ \beta_\ell)$$

je substituční pravidlo automatu J. Pak automat J' obsahuje pravidla

$$(s_i;1;\ S_{i_1}, S_{i_2}, \ldots, S_{i_n}; S_{j_1}, S_{j_2} \ldots,\ S_{j_n}; m_1, m_2, \ldots,\ m_n;\ s_k; \beta_\ell)$$

a

$$(s_i;0;S_{i_1}, S_{i_2} \ldots, S_{i_n};\ S_{i_1}, S_{i_2}, \ldots, S_{i_n};\ 0,0,\ldots,0; s_i;\ 0\ ) .$$

Definice 5.9. Jestliže automat J' vznikne z Y-automatu J právě popsaným způsobem, řekneme, že jsme automat J opatřili vstupem; řekneme, že J' je Y-automat se vstupem.

Je zřejmé, že Y-automat J se vstupem má tyto vlastnosti:

1. $\Sigma = \Pi = \{0;1\}$,

2. vstupní symbol 0 nemění konfiguraci automatu J, který v tomto případě vydá na výstupu symbol 0 .

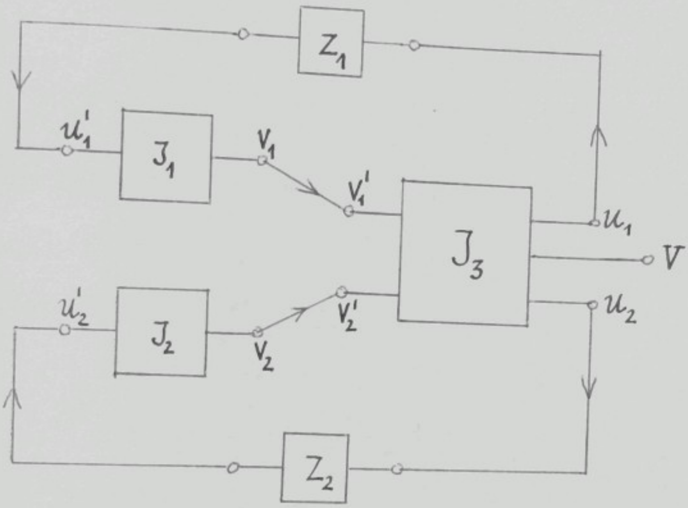
Dále je zřejmé, že ke každému automatu J_1, který splňuje vlastnosti 1. a 2., existuje Y-automat J bez vstupu takový, že $J' = J_1$.

V dalších úvahách budeme s pomocí několika daných automatů konstruovat jistá schemata. Případ, který se bude nejčastěji vyskytovat, nyní popíšeme. Je zřejmé, že definici 1.2 automatu J lze zobecnit na případ, kdy automat J má více vstupů a výstupů. Jestliže má automat J např. p vstupů s abecedami $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_p$, lze jej též popsat definicí 1.2 jako automat s jedním vstupem $\Sigma = \Sigma_1 \times \Sigma_2 \times \dots \times \Sigma_p$. Buď J_i automat s jedním vstupem U_i' a s jedním výstupem V_i, $i = 1,2$. Nechť J_3 je automat se dvěma vstupy V_1', V_2' a třemi výstupy U_1, U_2, V. Nechť Z_i, $i = 1,2$, jsou zpožďovací elementy, tj. konečné automaty, zpožďující vstupní posloupnost o jeden takt. V prvním taktu vydávají nějaký symbol své abecedy (vstupní abeceda zpožďovacího elementu je ovšem totožná s jeho výstupní abecedou). Je-li U vstup automatu, označme symbolem $\Sigma(U)$ příslušnou vstupní abecedu, je-li U výstup automatu, pak symbolem $\Pi(U)$ označme příslušnou výstupní abecedu. Předpokládejme, že platí $\Sigma(U_i') = \Pi(U_i)$, $\Sigma(V_i') = \Pi(V_i)$, $i = 1,2$. Nechť abeceda Z_i (vstupní i výstupní) je rovna $\Pi(U_i)$, $i = 1,2$. Utvořme schema $\mathcal{S}$ (viz obrázek 5.1) tak, že výstup V_i automatu J_i spojíme se vstupem V_i' automatu J_3, $i = 1,2$, a výstup U_i automatu U_i přes zpožďovací element Z_i se vstupem U_i' automatu J_i, $i = 1,2$. Uvedené schema $\mathcal{S}$ je schematem s jediným výstupem V. Dá se dokázat, že operátor (v našem případě posloupnost), který realizuje schema $\mathcal{S}$ se dá realizovat vhodným automatem ve smyslu definice 1.2. H.Yamada dokazuje toto tvrzení v [9] pro jistá obecná schemata.

Výsledek H. Yamady formulujme nyní bez důkazu v poněkud zesíleném znění.

Obr. 5.1

Schema $\mathcal{S}(J_1,J_2,J_3)$



Lemma 5.6. Nechť $\mathcal{S} = \mathcal{S}(J_1,J_2,J_3)$ je schema, sestrojené z automatů J_1,J_2,J_3 výše popsaným způsobem. Nechť $\ell(\mathcal{S},n)$ je číslo s touto vlastností: pracovní prostor libovolné pásky automatu J_i, pracujícího ve schematu $\mathcal{S}$, $i = 1,2,3$ není během prvých taktů větší než $\ell(\mathcal{S},n)$, $n = 1,2,\dots$.

Pak existuje automat J (s počtem pásek rovným součtu počtu pásek automatů J_1,J_2,J_3) a platí:

1. J realizuje touž výstupní posloupnost jako schema $\mathcal{S}$.
2. $\ell(J,n) \leqq \ell(\mathcal{S},n)$, $n = 1,2,\dots$.

Poznámka. Lemma 5.6 formuloval pro obecnější schemata, jež mohou mít několik vstupů a výstupů. Je nutno ovšem předpokládat, že schema $\mathcal{S}$ je správně utvořené (do vstupu daného automatu lže převést jen jeden výstup s touž abecedou a v libovolném uzavřeném cyklu schematu musí být zařazen zpožďovací element).

Věta 5.2 Nechť f_1, f_2 jsou y-funkce. Pak $f_1 + f_2$ je též y-funkce a platí: mají-li f_1, f_2 vlastnost V, má i $f_1 + f_2$ vlastnost V.

Důkaz. Především existují automaty J_1, J_2 generující funkce f_1, f_2. Nechť J_i' je automat J_i opatřený vstupem (viz definici 5.9), i=1,2. Nechť J_3 je konečný automat se dvěma binárními vstupy V_1', V_2' a třemi binárními výstupy U_1, U_2, U. Všechny binární abecedy nechť jsou rovny $\{0;1\}$. Utvořme schema $\mathcal{S}(J_1', J_2', J_3^{\bullet})$. Nechť pro zpožďovací elementy Z_1, Z_2 platí: $Z_1(1) = 1$, $Z_2(1) = 0$. (Zde značíme symbolem Z_i též operátor, který zpožďovací element realizuje.) Činnost automatu J_3 buď dána následující tabulkou; automat J_3 bude mít dva vnitřní stavy s_{10}, s_{01} s počátečním stavem s_{10}.

s	$V_1' = V_1$	$V_2' = V_2$	U_1	U_2	V	s(t+1)
s_{10}	0	x	1	0	0	s_{10}
s_{10}	1	x	0	1	0	s_{01}
s_{01}	x	0	0	1	0	s_{01}
s_{01}	x	1	1	0	1	s_{10}

Pokud se v tabulce vyskyruje x, lze za něj dosadit libovolný prvek z $\{0;1\}$. Přejde-li automat J_3 do stavu s_{10}, znamená to, že v příštím taktu bude pracovat jen automat J_1', neboť na vstup automatu J_2' přijde symbol 0 ; přejde-li J_3 so stavu s_{01}, pak v příštím taktu pracuje automat J_2' a J_1' je zastaven, neboť na jeho vstup půjde 0 . Ukážeme, že schema $\mathcal{S}$ realizuje funkci $f_1 + f_2$. Předpokládejme, že v m-tém taktu je na výstupu V n-tá jednička, m > n . V tomto taktu přejde J_3 do stavu s_{10}. V dalších taktech je zastavena činnost automatu J_2' až do okamžiku, kdy se na výstupu V_1 automatu J_1' objeví další symbol 1 , v pořadí již (n+1)-ní. V tomto taktu je vydán automatem J_3 pokyn k zastavení automatu J_1' a v dalších taktech pracuje jen automat J_2' až do taktu, kdy na výstupu V_2 vydá svou (n+1)-ní jedničku. V tomto taktu vydá schema $\mathcal{S}$ (tj. automat J_3) svou (n+1-ní jedničku, J_3 přejde do stavu s_{10} a cykl se opakuje. Je zřejmé, že schema $\mathcal{S}$ generuje funkci $f_1 + f_2$. Nechť f_1, f_2 mají vlastnost V . Protože schema $\mathcal{S}$ vydává svou n-tou jedničku vždy až v některém taktu, který následuje po taktu, kdy J_1' vydává svou n-tou jedničku, je zřejmé, že $\mathcal{S}$ potřebuje k vydání své n-té jedníčky pracovní prostor délky nejvýše n . Podle lemmatu 5.6 existuje automat J s vlastností V , generující funkci $f_1 + f_2$. Tím je věta dokázána.

Následující lemmata uvedeme bez důkazu.

Lemma 5.7 Nechť y-funkce f má vlastnost V, nechť k je celé číslo, $f(1) + k \geqq 1$. Pak funkce $f + k$ je y-funkce s vlastností V.

Lemma 5.8 Nechť f je y-funkce, k přirozené číslo. Pak $k.f$ je y-funkce a platí: má-li f vlastnost V, má i $k.f$ vlastnost V.

Lemma 5.9 Nechť f je y-funkce, k přirozené číslo. Nechť pro $n = 1,2.,,,$ platí $k / f(n)$ (funkční hodnoty jsou celistvými násobky čísla k). Pak $\frac{1}{k} f$ je y-funkce a platí: má-li f vlastnost V, má i $\frac{1}{k} f$ vlastnost V.

Věta 5.3 Nechť f_1, f_2 jsou y-funkce a nechť platí

1. $f_1 - f_2$ je rostoucí, $f_1(1) - f_2(1) \geqq 1$
2. existuje konstanta $c > 1$ a přirozené číslo m tak, že

$$f_1(x+m) - f_1(x) \geqq c\ (f_2(x+m) - f_2(x)), \quad x = 1,2,\ldots .$$

Pak platí:

(i) $f_1 - f_2$ je y-funkce,

(ii) mají-li f_1, f_2 vlastnost V, má i $f_1 - f_2$ vlastnost V.

Poznámka. Důkaz tvrzení (i) lze nalézt v [9]. Podrobnou analýzou důkazu lze zjistit, že platí i tvrzení (ii).

Věta 5.4 Nechť f je y-funkce. Definujme funkci φ vztahem $\varphi(n) = \sum_{i=1}^{n} f(i)$, $n = 1,2,\ldots$. Pak φ je y-funkce a platí: jestliže f má vlastnost V, má i φ vlastnost V.

Poznámka. V [9] je dokázáno, že φ je y-funkce. Půjde tedy o vlastnost V.

Důkaz. Nechť f má vlastnost V. Existuje automat J s vlastností V generující f. Přidáme k automatu J binární vstup s abecedou $\{0;1\}$ a utvoříme tak automat $\bar{J}$, jehož substituční pravidla jsou totožná s pravidly automatu J, pokud jde na jeho vstup symbol 1. Jde-li na vstup automatu $\bar{J}$ symbol 0, pak $\bar{J}$ vymazává obsah svých pásek. Budeme předpokládat, že platí: jestliže automat $\bar{J}$ vydal svou n-tou jedničku (v $f(n)$-tém taktu) a jde-li na jeho vstup po dalších $f(n)$ taktů symbol 0, pak $\bar{J}$ dokáže během této doby vymazat obsah svých pásek a přejít do svého počátečního stavu, aby byl schopen opět od počátku generovat funkci f. To lze zřejmě zařídit, neboť délka pracovního prostoru automatu $\bar{J}$ při vydání n-té jedničky je na libovolné jeho pásce $\leqq n$ ($\bar{J}$ má vlastnost V) a protože $f(n) \geqq n$, lze eventuelním rozšířením čtecí hlavy a zvětšením posunu dosáhnout toho, že během dalších $f(n)$ taktů (dokonce n taktů) přejde automat $\bar{J}$ do své počáteční konfigurace. Automat $\bar{J}$ začne pak generovat od počátku funkci f, jakmile na jeho vstup přijde posloupnost jedniček. Vezměme nyní dva takové automaty $\bar{J}$ (stejné) a označme je J_1, J_2. Buď J_3 automat s jednou páskou, se dvěma binarními vstupy V_1', V_2' a třemi binárními výstupy U_1, U_2, V. Utvořme schema φ, viz obr. 5.1. Popíšeme v hrubých rysech jeho činnost. Nechť pro zpožďovací elementy platí $Z_1(1) = 1$, $Z_2(1) = 0$. Předpokládejme, že v $\varphi(n)$-tém taktu vydá automat J_3 na výstupu V symbol 1 (svou n-tou jedničku) a nechť na své pásce má zapsané slovo délky n s označenými okraji a se čtecí hlavou na jednom z okrajů, např.

na levém okraji. Předpokládejme, že J_1 je ve svém počátečním stavu. Nyní na vstup automatu J_1 půjde posloupnost jedniček a na vstup J_2 posloupnost nul. Automat J_1 tedy generuje funkci f a automat J_2 vymazává obsah svých pásek. Jestliže se na výstupu automatu J_1 objeví symbol 1, posune se čtecí hlava automatu J_3 o jednu buňku vpravo. Nechť B_n je buňka pásky automatu J_3, na níž je pravý okraj slova délky n, B_{n+1} její pravá sousední buňka. V taktu, kdy automat J_1 generuje svou (n+1)-ní jedničku, označí se buňka B_{n+1} jako krajní (příznak okraje se předtím vymaže z B_n), automat J_3 vydá symbol 1 (svou (n+1)-ní jedničku vůbec) a v dalších taktech (automat J_2 je nyní již ve své počáteční konfiguraci) začne J_2 znovu ~~konfigurovat~~ generovat funkci f a J_1 vymazává obsah svých pásek. (Cykl se tedy opakuje s tím rozdílem, že si automaty J_1, J_2 vymění svou funkci a čtecí hlava pásky automatu J_3 se bude posunovat vlevo). Je vidět, že schema $\mathcal{S}$ generuje funkci φ a že má vlastnost V .

Věta 5.5 Nechť P je polynom stupně aspoň prvého s racionálními koeficienty a nechť

1. $P(n)$ je přirozené číslo , $n = 1,2,\dots$

2. Posloupnost $\{P(n)\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí .

Pak P je y-funkce s vlastností V .

Poznámka. V [9] je dokázáno, že P je y-funkce. Uvedená ~~konstanta~~ konstrukce však nedokazuje, že P má vlastnost V .

Důkaz. Zřejmě polynom 1.stupně, splňující podmínky věty, má vlastnost V (rostoucí lineární funkci lze generovat dokonce konečným automatem). Předpokládejme, že věta platí pro všechny polynomy stupně $r \geqq 1$. Buď P polynom stupně $r+1$ splňující podmínky věty. Polynom $Q(x) = P(x+1) - P(x)$ je stupně r a platí

$$P(n) = P(1) + \sum_{i=1}^{n-1} Q(i) .$$

Protože je P roustoucí, existuje n_o tak, že Q je rostoucí pro $n \geqq n_o$. Pak polynom $Q_1(x) = Q(x+n_o-1)$ je stupně r a splňuje předpoklady věty. Má tedy vlastnost V. Podle věty 5.4 má vlastnost V i funkce $R(n) = \sum_{i=1}^{n} Q_1(i)$. Protože pro $n > n_o$ je

$$P(n) = P(n_o) + R(n-n_o) ,$$

lze P generovat tak, že prvých $P_{(n_o)}$ taktů generujeme vhodným konečným automatem J_1 a od taktu $P(n_o) + 1$ necháme pracovat automat J_2 s vlastností V, generující funkci R. Je zřejmé, že příslušné schema generuje funkci P a má vlastnost V.

Věta 5.6 Nechť f_1, f_2 jsou y-funkce. Pak $f_1 f_2$ je y-funkce. Mají-li f_1, f_2 vlastnost V, má i $f_1 f_2$ vlastnost V.

Důkaz, který spočívá v konstrukci jistého schematu, generujícího funkci $f_1 f_2$, zde nebudeme uvádět. V práci H. Yamady [9] je dokázáno, že $f_1 f_2$ je y-funkce, jsou-li f_1, f_2 y-funkce.

Věta 5.7 Nechť f, g jsou y-funkce. Položme $f(o) = g(o) = 0$ a pro $n = 0,1,2,\dots$ označme

$$u_{(n+1)} = \min (f(n+1) - f(n), g(n+1) - g(n)),$$

$$v(n+1) = \max (f(n+1) - f(n), g(n+1) - g(n)),$$

$$U(n) = \sum_{i=1}^{n} u(i) \quad , \quad U(0) = 0$$

$$V(n) = \sum_{i=1}^{n} v(i), \quad V(0) = 0 .$$

Existuje y-funkce $r = r(f,g)$ těchto vlastností:

1. $r(U(n)) = V(n)$, $n = 1,2,\ldots,$

2. $r(U(n) + i) = V(n) + i$, $i = 1,2,\ldots, u(n+1)-1$; $n=0,1,2,\ldots$

3. Mají-li f,g vlastnost V, má i $r(f,g)$ vlastnost V.

Důkaz. Nechť automaty J_1, J_2 generují funkce f,g. Nechť J_1', J_2' jsou automaty, které vzniknou tak, že J_1, J_2 opatříme binárním vstupem ve smyslu definice 5.9. Nechť J_3 je konečný automat s binárními vstupy V_1', V_2' a binárními výstupy U_1, U_2, V. Utvořme schema $\mathcal{S} = \mathcal{S}(J_1', J_2', J_3)$. Nechť zpožďovací elementy ve schematu $\mathcal{S}$ splňují podmínky $Z_1(1) = Z_2(1) = 1$. Nechť automat J_3 má tři vnitřní stavy s_0, s_1, s_2; nechť počáteční stav je s_0. Automat J_3 je definován následující tabulkou:

s	V_1'	V_2'	U_1	U_2	V	$s(t+1)$
s_0	0	0	1	1	1	s_0
s_0	0	1	1	0	0	s_1
s_0	1	0	0	1	0	s_2
s_0	1	1	1	1	1	s_0
s_1	0	x	1	0	0	s_1
s_1	1	x	1	1	1	s_0
s_2	x	0	0	1	0	s_2
s_2	x	1	1	1	1	s_0

Pokud se v tabulce vyskytuje symbol x, lze za něj obsadit libovolný symbol z $\{0;1\}$. Schema $\mathcal{S}$ je nyní jednoznačně určeno. Ukážeme, že

$\mathcal{S}$ generuje funkci r , splňující vlastnosti 1. a 2. Důkaz provedeme indukcí podle n . Jest $u(1) = \min(f(1), g(1))$, $v(1)=\max(f(1),g($
Z tabulky přechodů automatu J_3 je zřejmé, že J_3 vydává na výstupu V symbol 1 ve všech taktech $1,2,\dots,u(1)-1$ a bude stále ve stavu $s_($ Všimněme si taktu $u(1)$. V tomto taktu (pro určitost předpokládejme, že $f(1) \geqq g(1)$) je vydán na výstupu automatu J_2' symbol 1 (poprvé). Nyní se činnost automatu J_2' zastaví až do okamžiku, kdy J_1' vydá svou prvou jedničku - v taktu $f(1)$. V tomto taktu je vydán na výstupu V automatu J_3 symbol 1 (poprvé), uvedou se v činnost oba automaty J_1', J_2', automat J_3 ~~půjde~~ přejde do stavu s_0 . Schematem $\mathcal{S}$ byla tedy generována posloupnost

$$1^{g(1)-1}\; 0^{f(1)-g(1)} 1 \quad (\text{obecně } 1^{u(1)-1}\; 0^{v(1)-u(1)} 1\ ) .$$

To znamená, že vlastnost 1 je dokázána pro n = 1 a vlastnost 2 pro n = 0 . Analogicky lze provést indukční krok, což pro stručnost vypustíme. Důkaz třetí vlastnosti je zřejmý.

Důsledek 1 . Nechť f,g jsou y-funkce, nechť e je identická funkce, $e(n) = n$, $n = 1,2,\dots$. Pak platí:

1. $r(f,f) = e$
2. $r(f,g) = r(g,f)$
3. $r(f,e) = f$

Důkaz plyne snadno z věty 5.7 .

Důsledek 2. Nechť f,g jsou y-funkce; nechť platí

(5.5) $\quad f(n+1) - f(n) \geqq g(n+1) - g(n), \quad n = 1,2,\dots$.

Pak y-funkce $r = r(f,g)$ splňuje následující podmínky:

1. $r(g(n)) = f(n)$, $n = 1,2,\ldots$,

2. $r(g(n)+i) = f(n)+i$; $i = 1,2,\ldots, g(n+1) - g(n)-1$; $n=0,1,2,\ldots$

Důkaz. Jest (viz označení ve větě 5.7) $u(n) = g(n)-g(n-1)$, $v(n) = f(n)-f(n-1)$, $n = 1,2,\ldots$, $U(n) = g(n)$, $V(n) = f(n)$ a stačí dosadit do vztahů 1 a 2 ve větě 5.7 .

V případě, že pro funkce f,g platí (5.5), lze říci, že $r = r(f,g)$ je zhruba rovna funkci $f(g^{-1}(n))$, přesněji - obě funkce mají stejné funkční hodnoty v bodech $g(n)$.

Lemma 5.10 Nechť y-funkce f,g splňují podmínku (5.5). Nechť $r = r(f,g)$; nechť s je y-funkce, pro níž

(5.6) $s(g(n)) = f(n)$, $n = 1,2,\ldots$.

Pak platí

$$s(n) \geqq r(n) \text{ , } n = 1,2,\ldots .$$

Důkaz plyne snadno z důsledku 2 věty 5.7

Funkci $r(f,g)$ lze tedy, je-li splněna podmínka (5.5), charakterisovat následujícím způsobem.

Lemma 5.11 Nechť f,g jsou y-funkce , splňující vztah (5.5). Nechť r_1 je y-funkce, splňující vlastnosti

1. $r_1(g(n) = f(n)$, $n = 1,2,\ldots$.

2. Je-li s libovolná y-funkce, splňující podmínku (5.6),

je $s(n) \geqq r_1(n)$, $n = 1,2,\ldots$.

Pak $r_1 = r(f,g)$.

Vezměme nyní konkrétní případ. Nechť p,q jsou přirozená čísla, $p > q$. Nechť $f(n) = n^p$, $g(n) = n^q$. Pro takto definované y-funkce s vlastností V je zřejmě splněna podmínka (5.5). Existuje tedy y-funkce $r = r((\ )^p, (\ )^q)$, kterou stručně označme $r(\ )^{p/q}$.

Lemma 5.12. Platí

1. $r(n^q)^{p/q} = n^p$, $n = 1,2,\dots$.
2. $r(n^q + i)^{p/q} = n^p + i$, $i = 1,2,\dots,(n+1)^q - n^q - 1$; $n=0,1,2,\dots$
3. $r(\ )^{p/q}$ má vlastnost V .

Důkaz plyne z důsledku 2 z věty 5.7 .

Označme dále symbolem $r_1(\ )^{q/p}$ i-funkci odpovídající y-funkci $r(\ )^{p/q}$, tedy $r_1 = F_1(F^{-1}(r))$ (funkce F,F_1 jsou udány definicemi 5.6,5.7).

Lemma 5.13 . Platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r_1(n)^{q/p}}{n^{q/p}} = 1 \ , \quad \lim_{n\to\infty} \frac{r(n)^{p/q}}{n^{p/q}} = 1 \ . \tag{5.7}$$

Důkaz. Dokážeme první rovnost. Především pro všechna přirozená k platí $r_1(k^p)^{q/p} = k^q$, tedy pro $n = k^p$, $k = 1,2,\dots$ je hodnota vyšetřovaného zlomku rovna jedné. Nechť k,n jsou přirozená čísla a nechť $k^p < n < (k+1)^p$. Zřejmě

$$k^q < p^{q/p} < (k+1)^q \quad \text{a}$$

$$k^q \leqq r_1(n)^{q/p} \leqq (k+1)^q \ ,$$

platí tedy

$$\frac{k^q}{(k+1)^q} < \frac{r_1(n)^{q/p}}{n^{q/p}} < \frac{(k+1)^q}{k^q} \ .$$

Přejdeme-li v poslední nerovnosti k limitě pro $k \to \infty$, dostaneme hledaný vztah. Druhou rovnost lze dokázat analogicky.

Věta 5.8 Nechť α je reálné číslo, β číslo racionální, $0 \leqq \alpha < \beta \leqq 1$. Pak platí

$$R(n^{\alpha}) \subsetneqq R(n^{\beta}) \ .$$

Důkaz. Je zřejmé, že $R(n^{\alpha}) \subset R(n^{\beta})$. Je-li $\beta = 1$, pak tvrzení plyne z důsledku 1 věty 5.1, neboť funkce n^1 má vlastnost V. Nechť $\beta < 1$. Existují přirozená čísla p, q, $p > q$, $\beta = \frac{q}{p}$.

Z lemmatu 5.13 vyplývá vztah $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{r_1(n)^{q/p}}{n^{\beta}} = 1$. Tedy $R(n^{\beta}) = R(r_1(n)^{q/p})$. Dále platí $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{\alpha}}{n^{\beta}} = 0$, tedy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{\alpha}}{r_1(n)^{q/p}} = 0$.

Tvrzení věty nyní vyplývá z věty 5.1 (důsledek 1), neboť $r_1(\ )^{q/p}$ má vlastnost V.

Důsledek. Nechť α, β jsou reálná čísla, $0 \leqq \alpha < \beta \leqq 1$. Pak

$$R(n^{\alpha}) \subsetneqq R(n^{\beta}) \ .$$

Důkaz. Existuje racionální γ, $\alpha < \gamma < \beta$. Z věty 5.8 vyplývá vztah $R(n^{\alpha}) \subsetneqq R(n^{\gamma})$. Protože je $R(n^{\gamma}) \subset R(n^{\beta})$, je tvrzení dokázáno.

Uveďme ještě bez důkazu některá další tvrzení, týkající se funkcí složitosti.

Lemma 5.14 Nechť φ_1, φ_2 jsou i-funkce. Pak funkce φ, ψ, definované vztahem

$$\varphi(n) = \min(\varphi_1(n), \varphi_2(n)), \ \psi(n) = \max(\varphi_1(n), \varphi_2(n)), \ n=1,2,\ldots,$$

jsou i-funkce. Jestliže φ_1, φ_2 mají vlastnost V, mají i φ, ψ vlastnost V

Lemma 5.15 Existuje i-funkce φ s vlastností V taková, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(n)}{\lg n} = 1 .$$

Poznámka. Toto lemma má zřejmě vztah k důsledku 2 věty 5.1.

Lemma 5.16 Nechť φ_1, φ_2 jsou i-funkce; nechť existuje n_0 tak, že pro $n \geqq n_0$ je $\varphi_1(n) + \varphi_2(n) \leqq n$. Pak existuje i-funkce η a platí

1. $\eta(n) \leqq \varphi_1(n) + \varphi_2(n)$, $n = 1,2,\dots$
2. $\frac{1}{2} \leqq \liminf\limits_{n\to\infty} \frac{\eta(n)}{\varphi_1(n)+\varphi_2(n)}$; $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{\eta(n)}{\varphi_1(n)+\varphi_2(n)} = 1$
3. mají-li φ_1, φ_2 vlastnost V , má i η vlastnost V .

Lemma 5.17 Nechť φ_1, φ_2 jsou i-funkce; nechť existuje n_0 tak, že pro $n > n_0$ je $\varphi_1(n) . \varphi_2(n) \leqq n$. Pak existuje i-funkce η a platí:

1. $\eta(n) \leqq \varphi_1(n) \varphi_2(n)$, $n = 1,2,\dots$
2. $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{\eta(n)}{\varphi_1(n) . \varphi_2(n)} = 1$
3. jestliže φ_1, φ_2 mají vlastnost V , má i η vlastnost V

Z á v ě r

V poslední části byly formulovány některé věty, týkající se klasifikace operátorů realizovatelných v reálném čase. V této klasifikaci měli rozhodující úlohu y-funkce (respektive i-funkce) s vlastností V . Bylo již řečeno, že ne každá y-funkce má vlastnost V . V souvislosti s tím vzniká otázka bližšího určení třídy y-funkcí s vlastností V . Není např. jasné, zda existuje i-funkce φ , $\lg n \leqq \varphi(n)$, $n = 1,2,\dots$ a taková, že φ nemá vlastnost V . Další důležitá otázka byla již formulována v [3] . Nechť T je časová funkce ($T(n) \geqq n$) a S_T třída operátorů, vyčíslitelných s časovým omezením T (tj. prvých n výstupních symbolů je vydáno vhodným automatem za čas ne větší než $T(n)$, $n = 1,2,\dots$) . Jde o to, operátory třídy S_T klasifikovat navíc podle spotřeby paměti.

L i t e r a t u r a

[1] Jiří Bečvář: Real-Time and Complexity Problems in Automata Theory, Kybernetika č. 6, roč.1/1965, 475-497

[2] Jiří Bečvář: Probleme der Komplexität in der Theorie der Algorithmen und Automaten, rozmnoženo, v tisku ve sb.konference "Arbeitstagung über Automatentheorie", Hannover 1965

[3] P.C. Fischer: Multi-tape and infinite-state automata, referát na International Colloquium on Algebraic Lunquistics and Automata Theory, 1964, Jerusalem, Israel

[4] J. Hartmanis, P.M. Lewis II, R.E. Stearns: Classifications of Computations by time and memory requirements, referát na kongresu IFIP, New York 1965

[5] J. Hartmanis, R.E. Stearns: On the computational complexity of algorithmus, Trans. Amer. Math. Soc. 117-1965, 285-306

[6] M.O.Rabin: Real time computation, Israel J.of Math. 1 (1963), 203-211

[7] V.A. Trachtenbrot: Turingovy vyčislenija a logaritmičeskim zamedlenijem, Algebra i logika 3/4 (1964) 33-48

[8] Hisao Yamada: Real-time computation and recursive functions not real-time compútable, IRE Trans. on Electronic Computens, EC-11(1962), 753-760

[9] Hisao Yamada: Counting by a class of growing automata. PhD Thesis, Moore School of Elect. Eng., University of Pennsylvania (1960)

[10] J. Hartmanis, R.R. Stearns: Computational complexity of recursive sequences. Proc. of the Fifth Annal Symposium on Switching Circuit Theory and Logical Design, held at Princeton University (1964),82-90

O b s a h