TECHNICKÁ UNIVERSITA V LIBERCI
HOSPODÁŘSKÁ FAKULTA

245

Studijní program: **6202 - Hospodářská politika a správa**

Studijní obor: **Pojišťovnictví**

# Technické rezervy v životním pojištění

The life insurance technical reserves

**DP – PO – KPO – 2003 08**

**Viktor Hostinský**



Vedoucí práce: Ing. Jiří Všetečka – katedra pojišťovnictví

Konzultant: Mgr. Libor Hendrych – pojišťovna Wüstenrot

Počet stran: 67

Počet příloh: 2

Datum odevzdání : 23. 5. 2003

TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI

Hospodářská fakulta

katedra pojišťovnictví

Školní rok: 2002/2003

# ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

pro: **Viktora Hostinského**

***Program č. 6202 M*** ***Hospodářská politika a správa***
***Obor č. 6202 T*** ***Pojišťovnictví***

Vedoucí katedry Vám ve smyslu zákona č. 111/1998 Sb. O vysokých školách a navazujících předpisů určuje tuto diplomovou práci:

Název tématu:

**Technické rezervy v životním pojištění**

Zásady pro vypracování:

1. Druhy pojistných rezerv v životním pojištění
2. Rezerva pojistného životních pojištění
3. Způsob výpočtu netto a brutto rezervy
4. Výpočty založené na rezervě pojistného životních pojištění

Rozsah práce: 50 - 60 stran
(do rozsahu nejsou započítány úvodní listy, přehled literatury a přílohy)

Doporučená literatura:

- Cipra, T.: Pojistná matematika teorie a praxe, Ekopress, Praha 1999
- Vostatek, J.: Sociální a soukromé pojištění, Codex Bohemia, Praha 1996
- Spirit, M.: Pojistné právo, skripta VŠE, Praha 2000
- www.cap.cz

Vedoucí diplomové práce: Ing. Jiří Všetečka

Konzultant: Mgr. Libor Hendrych

Termín zadání diplomové práce: 24.10.2002

Termín odevzdání diplomové práce: 23.5.2003

Technická univerzita v Liberci
Hospodářská fakulta

prof. Ing. Jara Kaňoková, CSc.
vedoucí katedry

doc. Ing. Jiří Kraft, CSc.
děkan Hospodářské fakulty

# Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracoval samostatně s použitím uvedené literatury pod vedením vedoucího a konzultanta. Byl jsem seznámen s tím, že na mou diplomovou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 o právu autorském, zejména §60 (školní dílo) a §35 (o nevýdělečném užití díla k vnitřní potřebě školy). Beru na vědomí, že TUL má právo na uzavření licenční smlouvy o užití mé práce a prohlašuji, že souhlasím s případným užitím mé práce (prodej, zapůjčení apod.). Jsem si vědom toho, že užití své diplomní práce či poskytnutí licence k jejímu užití mohu jen se souhlasem TUL, která má právo ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, vynaložených univerzitou na vytvoření díla (až do její skutečné výše).

Po pěti letech si mohu tuto práci vyžádat v Univerzitní knihovně TU v Liberci, kde je uložena, a tím výše uvedená omezení vůči mé osobě končí.

V Liberci dne 20. 5 2003

Na tomto místě bych chtěl poděkovat vedoucímu mého diplomového semináře panu Ing. Jiřímu Všetečkovi za inspirativní připomínky a vedení při zpracování mé diplomové práce.

# Resumé

Cílem této práce je objasnění problematiky technických rezerv v oblasti životního pojištění. Je zaměřena především na rezervu pojistného životních pojištění, jakožto nejvýznamnější položku pasiv v rozvaze každé životní pojišťovny. Práce je dělena do kapitol, které na sebe navazují.

V první kapitole je přiblížena legislativní úprava technických rezerv v České republice. Jde zejména o vymezení tvorby rezerv předepsanou zákonem, a o zákonnou úpravu umístění prostředků rezerv do investic. Ve druhé kapitole se snažím o vysvětlení nutnosti rezervy tvořit. Je zde vysvětlen princip ekvivalence a jednotlivé faktory ovlivňující výši pojistného.

Z metod užívaných pojistnými matematiky pro určení pojistného jsem si ve třetí kapitole pro ilustraci tvorby nettorezervy vybral nejdříve spojitý přístup. Nespojitý přístup je pak vysvětlen ve druhé části třetí kapitoly, kde je také odvozen rekurentní vzorec pro spojité rezervy a způsob výpočtu rezervy pomocí komutačních čísel. Závěr práce je věnován analýze rozkladu pojistného na ukládací a rizikovou část a bruttorezervě pojistného.

# Resume

The aim of this work is to explain the life insurance technical reserves issues. It's particulary directed to the life insurance premium reserve, as the most important liabilities item in the balance-sheet of each insurance company. The work is splitt into related chapters.

First chapter approximates the technical reserves legislative adjustment in the Czech republic. It concerns mainly the range of technical reserves generation prescribed by the law, as well as the statutory regulations of placement of reserves recources in capittal assets. In the second chapter, I would like to try to explain the need for reserves generation. The equivalence principal and individual factors affecting the premium amount are both introduced in this chapter.

For the illustration of the net premium reserve calculation in third chapter, I firstly chose the fully continuous method (among the methods used by actuaries for net premium determination). The fully discrete net premiums reserves are explained in the second part of third chapter, where recursive formula for fully discrete reserves and reserve formulas in terms of commutation functions are fully derivated. The end of this work is inscribed to deviding net premium into save and risk part and to gross premium reserve.

OBSAH

## Seznam zkratek a symbolů

| | |
|---|---|
| ČR | Česká republika |
| EU | Evropská Unie |
| IBNR | vzniklé, ale dosud neohlášené (incurred but not reported) |
| MF | ministerstvo financí |
| RBNS | ohlášené, ale dosud nevyřízené (reported but not settled) |
| $B$ | bruttopojistné |
| $d_x$ | střední počet jedinců, kteří při daném výchozím stavu zemřou ve věku $x$ |
| E[] | střední hodnota náhodné veličiny |
| $i$ | úroková míra |
| $l_x$ | střední počet jedinců, kteří se při daném výchozím stavu dožijí věku $x$ |
| L | budoucí ztráta |
| $P$, $\pi$ | nettopojistné |
| P[] | pravděpodobnost náhodné veličiny |
| $p_x$ | pravděpodobnost přežití ve věku $x$ |
| $q_x$ | pravděpodobnost smrti ve věku $x$ |
| $S$, $a_j, b_j$ | pojistná částka |
| $v$ | odúročitel |
| $V$ | rezerva |
| $x$ | věk |
| Z – | náhodná veličina |
| $\delta$ | intenzita úročení |
| $\sigma$ | směrodatná odchylka |
| $\mu$ | intenzita úmrtnosti |

# ÚVOD

Pojišťovnictví je obor, který v porovnání s jinými oblastmi soukromého podnikání vykazuje mnoho rozdílů. Tyto odlišnosti vycházejí z samého charakteru činnosti pojišťoven. Předmětem pojišťovací činnosti je akumulace prostředků lidí, jejichž majetek, zdraví nebo život jsou vystaveny pojistnému riziku a současně přerozdělování těchto prostředků. Existuje tedy časový rozdíl mezi platbou pojistného a výplatou pojistného plnění, přičemž přesná výše nebo okamžik vzniku pojistného plnění nejsou známy.

Úkolem každé soukromé pojišťovny je proto nejen stanovení ekvivalentní výše pojistného, ale také jeho správné přerozdělení v čase. Pojišťovna nemůže v jednom období spotřebovat pojistné, aniž by zkoumala, k jakému účetnímu období se toto pojistné váže. Důležitostí této problematiky si je vědoma i každá vláda a proto svou pojistnou legislativou ukládá každé pojišťovně povinnost vytvářet technické rezervy.

Zásadní význam technických rezerv je patrný zejména v oblasti životního pojištění, kde existuje rozdílná výše pojistného rizika v závislosti na věku pojištěné osoby. Díky pojistně matematickým metodám výpočtu hodnoty závazků pojišťovny ze životního pojištění je docíleno rozložení pojistného rizika neseného pojišťovnou a konstantnosti výše placeného pojistného po celou dobu pojištění. Hodnota tohoto závazku se nazývá rezerva pojistného životních pojištění. Tato pojistně-technická rezerva představuje nejvýznamnější položku v pasivech životní pojišťovny. Její výpočet je poměrně komplikovaný a její konečná výše je závislá na mnoha faktorech (jako je zvolená technická úroková míra nebo úmrtnostní tabulky) a proto se může u různých pojišťoven lišit. Výchozí principy a metodika jejího stanovení jsou však shodné.

Tato práce si klade za cíl objasnit nutnost tvorby a prezentovat různé postupy výpočtu technických rezerv se zaměřením na rezervu pojistného životních pojištění. Jelikož se jedná o oblast soukromého pojištění jsou i zde všechny výpočty založeny na principu ekvivalence. Výchozím předpokladem je spojitý přístup k produktům životního pojištění ( vycházejícího ze spojitého úročení a spojitého modelování úmrtnosti).

Je zde však také vysvětlen nespojitý přístup a způsob výpočtu pomocí komutačních čísel (předpoklad fiktivního souboru).

# 1 Druhy pojistných rezerv v životním a neživotním pojištění

## *1.1 Technické rezervy neživotního a životního pojištění*

Technické rezervy neživotního a životního pojištění představují nejvýznamnější položku na straně pasiv v rozvaze každé pojišťovny. Z účetního hlediska jsou tyto rezervy zdrojem krytí aktiv. A to zdrojem cizím, jelikož se jedná o závazky vůči pojištěným. Jejich výše není předem známa, ale stanovuje se pomocí pojistně matematických propočtů, což plyne z charakteristiky pojištění. Při pojišťovací činnosti pojišťovna akumuluje finanční prostředky (pojistné) od osob, které jsou ohroženy určitým rizikem a vytváří tak peněžní fond, ze kterého následně hradí škody vzniklé realizací daného rizika. Tato činnost je označována jako obrácený výrobní cyklus. Pojišťovna tak prodává svou službu, aniž by předem věděla, kolik bude muset vynaložit nákladů. Ty může pouze odhadnout na základě statistiky a matematiky velkých čísel.

Velikost vytvořeného peněžního fondu by měla být dostatečná aby pojišťovna byla schopna v kterémkoliv okamžiku své činnosti dostát všem svým závazkům. Důležité je proto i stanovit ekvivalentní výši pojistného, aby ve své celkové (naakumulované) výši, časově odpovídající účetnímu období, pokrylo všechny náklady vzniklé v tomto období, a to i takové, které budou uhrazeny až v budoucích účetních obdobích. Pojišťovna tedy musí spotřebovávat pojistné s ohledem na to, ke kterému účetnímu období se pojistné váže. V životním pojištění s konstantním pojistným, kde je pojištění sjednáváno zpravidla pro delší časové období, je nutné brát v úvahu měnící se pojistné riziko. Pojišťovna, která by tak nečinila, by se dříve či později dostala do finančních potíží.

V této souvislosti nabývá rozhodující význam pojem technických rezerv. Jedná se o závazky, které jsou pravděpodobné (v některých případech jisté), přičemž jejich výše nebo okamžik, ve kterém vzniknou, jsou nejisté. Tyto rezervy je potřeba vytvořit například v případě, kdy víme nebo pokládáme za pravděpodobné (to vyplývá z dlouhodobé statistiky), že došlo v daném účetním období k pojistné události, jež nebyla ohlášena nebo nebyla ještě zlikvidována (neznáme přesnou výši škody). V pojištění pro případ smrti nebo dožití je zase jistý vznik pojistné události i výše pojistného plnění, nejistý je však okamžik, kdy závazek pojišťovny plynoucí z takového pojištění vznikne. Jak z výše uvedeného plyne, je vytváření rezerv finančních prostředků nezbytné pro zdravé a plynulé fungování soukromých pojišťoven. Z toho důvodu jsou také pojistné rezervy předmětem státního dozoru a tedy i upraveny pojistnou legislativou. V české republice je to zákon 363/1999 Sb., o pojišťovnictví, který stanoví tvorbu, použití a způsob umístění prostředků technických rezerv pojišťovny. S ohledem na významné, mnohdy zcela zásadní odlišnosti v provozování životního a neživotního pojištění je povinnost vytvářet technické rezervy rozdělena na oblast životního a neživotního pojištění. Zákon stanoví že:

Je-li provozována pojišťovací činnost podle jednoho nebo více pojistných odvětví životních pojištění, vytváří pojišťovna tyto technické rezervy:

- rezervu na nezasloužené pojistné,
- rezervu na pojistná plnění,
- rezervu na prémie a slevy,
- rezervu životních pojištění, je-li nositelem investičního rizika pojistník,
- rezervu na pojistné životních pojištění.

Je-li provozována pojišťovací činnost podle jednoho nebo více pojistných odvětví neživotních pojištění, vytváří pojišťovna tyto technické rezervy:

- rezervu na nezasloužené pojistné,
- rezervu na pojistná plnění,
- rezervu na prémie a slevy,
- vyrovnávací rezervu,
- rezervu na pojistné neživotních pojištění.

V roce 2000 byl přijat zákon č. 492/2000 Sb., kterým se mění zákon č. 586/1992 Sb., o daních z příjmů. Tento zákon ustanovil daňovou podporu životního pojištění. Jedná se o ty produkty, které mají charakter „spoření na stáří". Do této skupiny patří pojištění pro případ dožití, pro případ smrti nebo dožití a důchodové pojištění, přičemž daňové úlevy se týkají jednak zaměstnavatele a jednak samotného pojištěného – poplatníka. To má za následek konjunkturu životního pojištění.

Také neživotní pojištění prokazuje v poslední době velmi dynamický rozvoj v souvislosti s měnícími se požadavky pojistného trhu a rostoucími riziky (povodně, havárie autobusů, teroristické útoky). V důsledku tohoto vývoje vzniká i potřeba tvorby takových technických rezerv, které nejsou explicitně upraveny zákonem. Příkladem je rezerva na závazky vůči České kanceláři pojistitelů stanovená jejím členům podle § 18 odst. 6 zákona č. 168/1999 Sb., o pojištění odpovědnosti z provozu vozidla. Pojišťovna v takovém případě předkládá ministerstvu ke schválení návrh, ve kterém sama navrhuje tvorbu a způsob použití takové technické rezervy, v závislosti na charakteru provozované pojistné činnosti.

## 1.2 Tvorba a použití rezerv

Tvorbu a použití technických rezerv upravuje zákon v souladu s příslušnými směrnicemi EU (viz. Čl.17 směrnice č. 92/96 EEC) v §§ 14 – 20.

### *1.2.1 Rezerva na nezasloužené pojistné*

Rezerva na nezasloužené pojistné se tvoří jak u životních, tak i u neživotních pojištění. Výše této rezervy odpovídá části předepsaného pojistného vztahujícího se k budoucím účetním obdobím. Tato rezerva je v podstatě založena na principu časového rozlišení výnosů, známého z účetnictví běžných podnikatelských subjektů. Pokud je například 1. 7. 2000 uzavřena smlouva a zaplaceno pojistné ve výši 1000 Kč na jeden rok, pak pojišťovna vykáže předepsané pojistné v částce 1000 Kč a zároveň vytvoří rezervu na nezasloužené pojistné ve výši Kč 500. Tím získá odpovídající výši zaslouženého pojistného pro rok 2000 ( 500 Kč ). V roce 2001 pojišťovna rezervu na nezasloužené pojistné vyčerpá a získá tak zasloužené pojistné pro rok 2001 ve výši pětiset korun. Stejný princip se uplatňuje při uznávání odečitatelných položek ze základu daně. Celková výše rezervy se stanoví jako souhrn těchto částí pojistného vypočítaný podle jednotlivých pojistných smluv. Nelze-li stanovit výši rezervy podle jednotlivých smluv, použijí se pro stanovení výše této rezervy matematicko-statistické metody.

Ty se použijí i v případě, že se jedná o pojištění takového pojistného rizika, které se v průběhu roku opakovaně mění. Taková metoda musí tedy respektovat změny rizika tak, aby nedocházelo k situaci, kdy pojišťovna v daném roce spotřebuje pojistné, které mělo být odloženo pro plnění závazků z pojištění, které vzhledem k proměnlivosti pojistného rizika nastanou v příštích obdobích.

### *1.2.2 Rezerva na pojistná plnění*

Rezerva na pojistná plnění se také tvoří u životních i neživotních pojištění. Je určena ke krytí závazku z pojistných událostí:

a) v běžném účetním období vzniklých, hlášených, ale v tomto období nezlikvidovaných (RBNS),
b) v běžném účetním období vzniklých, ale v tomto období nehlášených (IBNR).

V tomto případě jde tedy o časové rozlišení nákladů. Situace je zde poněkud složitější vzhledem k určení výše těchto nákladů. V praxi totiž nejsou na konci roku nahlášeny všechny škody, které v daném roce vznikly. Tyto škody mohou být nahlášeny během příštího roku ale nezřídka se stává, že jsou hlášeny s odstupem několika let. I takové škody je pojišťovna povinna hradit, což vyplývá z občanského zákoníku (viz Např. § 101, 104 a 106). Pojišťovna proto tvoří tuto rezervu nejen na pojistné událostí známé, ale i na ty, o kterých lze na základě statistiky předpokládat, že v daném roce vznikly ale nebyly nahlášeny.

Výše rezervy se určí jako součet nákladů na jednotlivé pojistné události, které byly pojišťovně nahlášeny, ke kterému se připočítá výše odhadnutých nákladů na škody, které pravděpodobně vznikly aniž by byly nahlášeny a výše odhadovaných nákladů spojených s likvidací pojistné události. V praxi se tato rezerva vytváří ke každé pojistné události v okamžiku jejího oznámení a podle průběhu likvidace se její výše přizpůsobuje skutečnému plnění, popřípadě se zcela zruší či spotřebuje. Pokud výši rezervy nelze stanovit uvedeným způsobem, používají se matematicko-statistické metody. V případě odhadu nákladů na nenahlášené pojistné události se používají vypracované matematické metody založené na dlouhodobých statistikách. Příkladem mohou být trojúhelníková schémata, kde jsou celková dosud vyplacená pojistná plnění uspořádaná v řádcích podle roku vzniku pojistné události a na sloupcích podle počtu let, které od vzniku pojistné události uplynuly. Nejvýznamnější je pak tato metoda doplněná o „stupně“ – tzv. stupňové metody (metody Chain-Ladder).

Rezerva na pojistná plnění se snižuje o odhad předpokládané výše vymahatelných částek, na něž má pojišťovna nárok v souvislosti s pojistným plněním. Poskytuje-li se u jednotlivých druhů pojištění pojistné plnění formou důchodu, tvoří se tato rezerva na základě pojistně matematických metod. Někdy se udává ještě rezerva ke krytí závazků v běžném účetním období vzniklých, zlikvidovaných ale v tomto období nezaplacených. Jedná se však spíše o účetní pojem a tyto rezervy jsou součástí RBNS.

Závazky z pojistných událostí nastalých a ohlášených v běžném účetním období, včetně nákladů na likvidaci těchto událostí, které byly zahrnuty do rezervy pojistného životních pojištění nebo do rezervy pojistného neživotních pojištění, nesmí být zahrnuty do rezervy na pojistná plnění. Tím se zabraňuje tomu, aby se zdvojovala tvorba rezerv na stejné závazky, což by vedlo k neoprávněnému snižování základu daně z příjmů.

### *1.2.3 Rezerva na prémie a slevy*

Rezervu na prémie a slevy vytváří pojišťovna pouze tehdy, jestliže se v pojistné smlouvě zavázala poskytnout při splnění dohodnutých podmínek prémii nebo slevu na pojistném. V pojistných smlouvách životních pojištění se pojišťovny zavazují k poskytnutí určitého podílu na výnosech nebo zisku z investování prostředků technických rezerv vytvářených v těchto pojištěních pojištěnému. Nejsou-li některé části těchto podílů zahrnuty v rezervě životních pojištění (§18), pak se zahrnou do tvorby této rezervy. Tato rezerva se při provozování zajišťovací činnosti tvoří pouze tehdy, existuje-li pro ni na základě zajistné smlouvy důvod.

### *1.2.4 Rezerva životních pojištění, je-li nositelem investičního rizika pojistník*

V poslední době se na pojistném trhu objevují produkty životního pojištění, kde riziko investování prostředků technické rezervy nese pojistník Ten si sám vybírá druh finančního umístění, do kterého budou rezervy investovány . Výše pojistného plnění je pak odvislá na hodnotě, kterou v daném momentě má jeho podíl na investovaných prostředcích. Výše rezervy se stanoví jako souhrn závazků vůči pojištěným ve výši hodnoty jejich podílů na umístěných prostředcích pojistného z jednotlivých smluv životních pojištění, a to podle zásad obsažených v pojistných smlouvách. V některých případech tohoto pojištění smlouva obsahuje i ujednání o plnění ve sjednané výši. Pak pojišťovna na toto plnění současně vytváří rezervu na pojistná plnění životních pojištění.

### *1.2.5 Rezerva pojistného životních pojištění*

Tato rezerva bude podrobně analyzována v další části této práce. Na tomto místě pouze uvedu její zákonné charakteristiky. Tato rezerva je určena ke krytí budoucích závazků z životních pojištění. Vytváří se z jednotlivých pojistných smluv metodami pojistné matematiky. Podmínkou jejího výpočtu je použití stejných statistických dat (úmrtnostních tabulek) a stejné úrokové míry, jakých bylo použito při výpočtu pojistného.

Stejné podmínky, které platí pro tvorbu technických rezerv pro tuzemské pojišťovny, jsou uplatňovány i pro pojišťovací činnost zahraničních pojišťoven provozovanou v České republice prostřednictvím jejich organizačních složek. Technické rezervy stanovené zákonem vytváří taková pojišťovna k plnění těch závazků, které vyplývají z její pojišťovací činnosti provozované na našem území. Výjimkou je společenství pojistitelů známé jako Lloyd´s, které prokazuje ministerstvu tvorbu těchto rezerv v souladu s předpisy platnými pro tento syndikát. Jako důkaz je vyžadován výkaz o této tvorbě předkládaný ministerstvu a potvrzený dozorčím orgánem Velké Británie.

Pojišťovna musí vytvářet rezervy v plné výši, tj. bez odpočtu části připadající na zajistitele. Pro zajišťovnu jsou povinnosti jiné. Ta je povinna udržovat technické rezervy ve výši odpovídající jejím závazkům vyplývajícím z uzavřených zajišťovacích smluv. Technické rezervy je zajišťovna povinna vytvořit, jen pokud to vyplývá z uzavřených zajišťovacích smluv.

O každé rezervě se účtuje odděleně od ostatních závazků pojišťovny nebo zajišťovny, což zajišťuje přehlednost a průkaznost tvorby a užití technických rezerv. Pojišťovna nebo zajišťovna předkládá ministerstvu výkaz o tvorbě a výši technických rezerv a skladbě finančního umístění aktiv, jejichž zdrojem jsou technické rezervy. Tento výkaz zpracovává za období od 1. 1. do 30. 6. a od 1. 7. do 31. 12. běžného roku. Aby byla zajištěna jednotnost těchto výkazů a zejména, aby bylo umožněno jejich počítačové zpracování, ukládá se ministerstvu povinnost vyhlásit náležitosti tohoto výkazu ve Finančním zpravodaji.

## 1.3 Skladba finančního umístění

Jak plyne z předchozího textu, tvorba odpovídajících rezerv a stanovení jejich správné výše jsou pro bezproblémový chod pojišťovny nezbytné. Neméně důležité je však také jejich správné investování. Novelizací zákona o pojišťovnictví došlo ve skladbě finančního umístění aktiv k zásadním změnám. Které finanční nástroje tato skladba zahrnuje, definuje zákon o pojišťovnictví v § 21. Než se však dostaneme k jeho rozboru, přiblížíme si základní zásady, které je pojišťovna i zajišťovna povinna dodržovat při strukturování finančních aktiv, jejichž zdrojem jsou technické rezervy.

Nejdůležitější zásadou je ***zásada bezpečnosti***. Ta říká , že jednotlivé složky finančního umístění musí poskytovat záruku návratnosti vložených prostředků. Druhou zásadou je ***zásada rentability***, tedy výnosnosti uložených prostředků. Často je snahou pojišťoven tuto zásadu upřednostňovat, zejména na úkor bezpečnosti. To s sebou nese riziko insolvence, což musí vláda kontrolovat a sankcionovat případná porušení. Zásada rentability musí být současně vyvážena ***zásadou likvidity***. Tyto váhy přitom přímo závisejí na charakteru provozované činnosti. Je zřejmé, že u dlouhodobých závazků, které jsou typické pro životní pojištění, bude více převažovat výnosnost, neboť lze dostatečně přesně odhadnout, jaká výše prostředků bude v dané době nutná k výplatě pojistných plnění. Naopak v neživotním pojištění převažuje zásada likvidity, neboť vývoj pojistného rizika se vyznačuje značnými výkyvy a pojišťovna musí mít k dispozici dostatek prostředků k výplatám pojistných plnění ve lhůtách stanovených právním předpisem (§ 797 občanského zákoníku).

Čtvrtou je ***zásada diverzifikace***, tj. dostatečného rozložení jednotlivých složek finanční skladby mezi různé subjekty. Tím je myšleno rozložení mezi takové subjekty, mezi nimiž nejsou kapitálové či jiné vazby vytvářející řetězec, ve kterém narušení některého článku může vyvolat vážné finanční potíže ostatních článků nebo dokonce krach celého řetězce.

A nyní k § 21, který definuje skladbu finančního umístění. Podle něj finanční umístění zahrnuje:

a) dluhopisy vydané Českou republikou nebo Českou národní bankou a dluhopisy, za které převzala záruku Česká republika,
b) dluhopisy vydané bankami,
c) veřejně obchodovatelné dluhopisy vydané obchodními společnostmi,
d) pokladniční poukázky,
e) veřejně obchodovatelné komunální obligace,
f) půjčky, úvěry a jiné pohledávky, jejichž splnění je zajištěno bankovní zárukou,
g) směnky, jejichž splnění je zajištěno bankovní zárukou,
h) nemovitosti na území České republiky,
i) hypoteční zástavní listy,
j) veřejně obchodovatelné akcie a podílové listy,
k) depozita a depozitní certifikáty u bank, které mají povolení působit na území České republiky jako banka,
l) podílové listy otevřených podílových fondů,
m) předměty a díla umělecké kulturní hodnoty oceněná nejméně 2 znalci, za podmínky jejich pojištění pro případ poškození, zničení, ztráty nebo odcizení u jiné pojišťovny,

n) státní dluhopisy, jejichž emitenty jsou členské státy Evropské unie nebo centrální banky těchto států, a dluhopisy vydané Evropskou investiční bankou, Evropskou bankou pro obnovu a rozvoj nebo Mezinárodní bankou pro obnovu a rozvoj,

o) zahraniční cenné papíry, s nimiž se obchoduje na veřejném trhu členských států Evropské unie,

p) zahraniční cenné papíry, s nimiž se obchoduje na veřejném trhu členských států Organizace pro ekonomickou spolupráci a rozvoj,

q) deriváty v souvislosti s aktivy uvedenými v tomto odstavci mohou být použity pouze tehdy, přispívají-li ke snižování investičního rizika nebo usnadňují-li účinné řízení portfolia,

r) půjčky pojištěným, kteří uzavřeli s pojišťovnou smlouvu na životní pojištění.

Je zřejmé, že oproti předcházející právní úpravě zde došlo ke zcela zásadním změnám. Především se umožnilo pojišťovnám investovat aktiva, jejichž zdrojem jsou technické rezervy, do zákonem vymezených zahraničních finančních instrumentů, což předcházející právní úprava výslovně zakazovala. Finanční umístění v České republice je zahrnuto v položkách finanční skladby pod písmeny a) až m), v zahraničí pak pod písmeny n) až r). Nově se umožňují i investice do předmětů a děl umělecké hodnoty.

Zákon určuje hranici odpovídající 30 % průměrného stavu finančního umístění, které musí být uloženo v rychle likvidních aktivech, tj. pokladničních poukázkách, dluhopisech vydaných Českou republikou, depozitech, depozitních certifikátech nebo obligacích vydaných bankou nebo pobočkou zahraniční banky oprávněnou působit jako banka v České republice podle zákona o bankách. Průměrným stavem se rozumí stav finančního umístění vypočítaný za kalendářní měsíc, tj. k poslednímu dni tohoto měsíce. Ten se zjistí jako součet stavu finančního umístění k prvnímu a poslednímu dni kalendářního měsíce, za který se průměrný stav zjišťuje, který se poté dělí dvěma.

V případě rezervy životního pojištění, je-li nositelem investičního rizika pojistník, se musí pojišťovna řídit rozhodnutími pojistníka a investovat v souladu s ustanoveními pojistné smlouvy. Proto pro ni v těchto případech platí ustanovení upravující finanční skladbu aktiv, jejichž zdrojem je technická rezerva, přiměřeně.

Jestliže se pojišťovna nebo zajišťovna zavázala k pojistnému plnění v jiné než české měně, je povinna vytvořit aktiva, jejichž zdrojem jsou technické rezervy, v této měně. To neplatí, jestliže by tato aktiva nepřesahovala 7% výše těchto rezerv. Toto pravidlo kongruence zákon převzal z práv Evropského společenství, kde jsou tzv. kongruenční pravidla obsahem přílohy I ke směrnici č. 88/357/EEC týkající se neživotního pojištění a přílohy I směrnice č. 92/96/EEC týkající se životního pojištění.

# 2 Rezerva pojistného životních pojištění

V této kapitole se přesuneme od teoretických základů technických rezerv a jejich legislativní úpravy k podrobné analýze rezervy pojistného životních pojištění. Ta je bezesporu nejvýznamnější a také nejobjemnější technickou rezervou v každé životní pojišťovně. Proč tomu tak je a jak je pro pojišťovnu nezbytně nutné tuto rezervu vytvářet si ukážeme hned v úvodu této kapitoly.

## 2.1 Nezbytnost tvorby rezervy pojistného životních pojištění

Nutnost vytvářet rezervu pojistného životních pojištění nevyplývá pojišťovně pouze ze zákona, ale ze samého charakteru životního pojištění. Tak například v dočasném pojištění pro případ smrti je zpravidla placené roční pojistné konstantní pro každý rok předem stanovené doby dohodnuté ve smlouvě. Mezitím riziko kryté tímto pojištěním zjevně s přibývajícím věkem pojištěného rok od roku roste. Pojišťovna proto musí pojistné kalkulovat tak, aby pokrylo riziko po celou dobu pojištění. V praxi to znamená, že placené pojistné je v prvních letech vyšší než je riziko, které je tímto pojištěním kryto, přičemž po určité době rostoucí riziko (lépe řečeno náklady na jeho krytí) konstantní pojistné převýší. A právě z přebytků pojistného v prvních letech pojištění musí pojišťovna nashromáždit dostatečně velkou rezervu pojistného, která je v pozdějších letech používána pro placení převyšujících nákladů na krytí rizika nad pojistným.

**Příklad 2-1**

Uvažujme situaci, kdy 30letý muž uzavře dočasné pojištění pro případ smrti na pojistnou částku Kč 1000,- na 21 let. Pojišťovna stanoví roční nettopojistné ve výši Kč 2,96,- při jehož stanovení odmýšlí od úročení. Takový postup je v praxi zcela nemyslitelný, neboť výše úroků je pro většinu pojistných výpočtů rozhodující, pro pochopení principu tvorby rezervy pojistného je však ideální.

Očekávané příjmy jsou klesající, což je dáno ubývajícím počtem osob platících pojistné a pro daný rok se spočtou jako součin $P \cdot {}_{k}p_x$, což znamená vynásobení pojistného pravděpodobností dožití se daného věku 30letého muže.

Očekávané výdaje se pak spočtou jakou součin pojistné částky a pravděpodobnosti úmrtí 30letého muže v daném věku. Tedy $S \cdot {}_{k|}q_x$

Výsledné hodnoty jsou uvedeny v tabulce 2-1. Sloupec očekávaných výdajů představuje výši rizika, které je pojištěním kryto. Pokud by pojišťovna místo konstantní částky volila přirozené pojistné, pak by se jeho netto hodnota v závislosti na věku měnila. Klient by platil například v 1. roce $q_{30} \cdot S =$ 1,08 Kč na 1000 Kč pojistné částky, v 11. roce pak $q_{40} \cdot S =$ 2,27 Kč a v posledním roce by se částka vyšplhala až na $q_{50} \cdot S =$ 7,11 Kč za roční pojištění pro případ smrti. Takové pojištění by bylo zřejmě neprodejné.

Jestliže se však v životním pojištění princip přirozeného pojistného jako nevhodný běžně nepoužívá a pojistné se nastaví na konstantní výši, pak zákonitě klient platí v prvních letech pojištění více, než je zapotřebí k pokrytí pojištěného rizika, zatímco později se situace obrátí a klient platí méně, než je potřeba.

Jak je z tabulky 2-1 patrné výdaje poprvé překročí příjmy ve 13. roce pojištění. Výše rezervy zde začíná klesat a je odčerpávána pro úhradu výdajů převyšujících příjmy. V posledním roce je pak rovna nule.

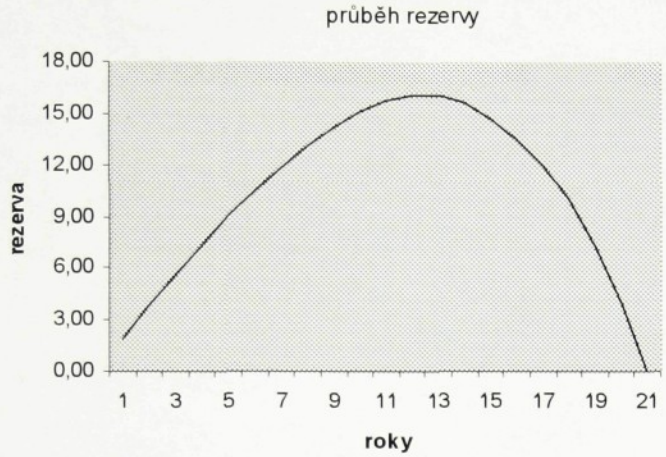
**tabulka 2-1**

Očekávané příjmy a výdaje v jednotlivých letech dočasného pojištění pro případ smrti s konstantním ročním pojistným. (30letý muž na 21 let na pojistnou částku 1000 Kč)

| věk | Očekávané příjmy (Kč) | Očekávané výdaje (Kč) | vytvořená kumulativní rezerva na konci roku |
|---|---|---|---|
| 30 | 2,96 | 1,08 | 1,88 |
| 31 | 2,96 | 1,05 | 3,79 |
| 32 | 2,95 | 1,14 | 5,60 |
| 33 | 2,95 | 1,18 | 7,37 |
| 34 | 2,95 | 1,30 | 9,02 |
| 35 | 2,94 | 1,46 | 10,50 |
| 36 | 2,94 | 1,62 | 11,82 |
| 37 | 2,93 | 1,63 | 13,12 |
| 38 | 2,93 | 1,87 | 14,18 |
| 39 | 2,92 | 1,98 | 15,13 |
| 40 | 2,92 | 2,24 | 15,81 |
| 41 | 2,91 | 2,57 | 16,15 |
| 42 | 2,90 | 3,00 | 16,05 |
| 43 | 2,89 | 3,30 | 15,64 |
| 44 | 2,88 | 3,81 | 14,71 |
| 45 | 2,87 | 4,10 | 13,48 |
| 46 | 2,86 | 4,33 | 12,01 |
| 47 | 2,85 | 4,85 | 10,01 |
| 48 | 2,83 | 5,54 | 7,30 |
| 49 | 2,82 | 6,19 | 3,93 |
| 50 | 2,80 | 6,72 | 0,00 |
| | 60,95 | 60,95 | |

**Obrázek 2-1**

Průběh tvorby rezervy




Ve smíšeném pojištění je pak nevhodnost přirozeného pojistného ještě markantnější, neboť pojistné v posledním roce by odpovídalo $P = (q_{50} + p_{50}) \cdot S = 1000$ Kč, tedy pojistné částce. Zjednodušený model tvorby rezervy pojistného si ukážeme opět na příkladě. Uvažujme stejnou situaci jako v příkladě 2-1, s tím že pojištěnému je navíc v případě dožití se 51 let vyplacena pojistná částka 1000 Kč.

Průběh rezervy je zde odlišný. Pojišťovna z přebytků pojistného musí nashromáždit dostatečnou částku na to, aby všem jež se dožijí věku 51 let mohla vyplatit pojistnou částku 1000 Kč

Takovou situaci opět vystihuje tabulka 2-2, ve které je znázorněn průběh tvorby rezervy, vycházející z očekávaných příjmů a očekávaných výdajů.

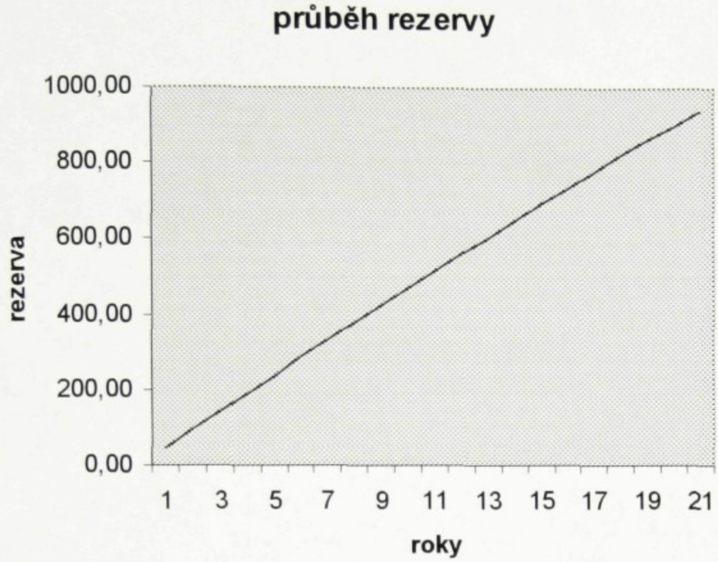
**tabulka 2-2**

Očekávané příjmy a výdaje v jednotlivých letech smíšeného pojištění s konstantním ročním pojistným. (30letý muž na 21 let na pojistnou částku 1000 Kč)

| věk | Očekávané příjmy (Kč) | Očekávané výdaje (Kč) | vytvořená rezerva na konci roku |
|---|---|---|---|
| 30 | 48,54 | 1,08 | 47,46 |
| 31 | 48,49 | 1,05 | 94,90 |
| 32 | 48,44 | 1,14 | 142,19 |
| 33 | 48,38 | 1,18 | 189,40 |
| 34 | 48,32 | 1,30 | 236,42 |
| 35 | 48,26 | 1,46 | 283,22 |
| 36 | 48,19 | 1,62 | 329,79 |
| 37 | 48,11 | 1,63 | 376,27 |
| 38 | 48,03 | 1,87 | 422,44 |
| 39 | 47,94 | 1,98 | 468,40 |
| 40 | 47,84 | 2,24 | 514,01 |
| 41 | 47,74 | 2,57 | 559,17 |
| 42 | 47,61 | 3,00 | 603,79 |
| 43 | 47,47 | 3,30 | 647,95 |
| 44 | 47,31 | 3,81 | 691,44 |
| 45 | 47,12 | 4,10 | 734,46 |
| 46 | 46,92 | 4,33 | 777,05 |
| 47 | 46,71 | 4,85 | 818,91 |
| 48 | 46,48 | 5,54 | 859,85 |
| 49 | 46,21 | 6,19 | 899,87 |
| 50 | 45,91 | 6,72 | 939,05 |
| 51 | 0,00 | 939,05 | 0 |
| | 1000,00 | 1000,00 | |

**Obrázek 2-2**

Průběh rezervy smíšeného pojištění s konstantním ročním pojistným. (30letý muž na 21 let na pojistnou částku 1000 Kč)




## 2.2 *Princip ekvivalence*

Než přistoupíme k odvození základních vzorců pro výpočet rezervy pojistného jednotlivých druhů životního pojištění, přibližme si principy ocenění základních druhů životního pojištění.

Princip ekvivalence je základním východiskem pro všechny pojistně-matematické výpočty. Je založen na požadavku, aby příjmy a výdaje pojišťovny byly v rovnováze.

Ekvivalentní vztah vzniká ve chvíli, kdy je uzavřen kontrakt dvěmi stranami, které se dohodnou na směně určité série plateb. Například při splácení půjčky vypůjčitel platí sérii odpovídajících splátek ekvivalentních s jednorázovou platbou půjčujícího v den sjednání půjčky. V životním pojištění je to tak, že pojištěný platí sérii nettopojistných pojistiteli ekvivalentních, v den uzavření pojistky, s částkou pojištěnou pro případ smrti pojištěného nebo dožití se konce pojištění. Nebo jedinec může směnit odložený důchod za konstantní pojistné, které je v den uzavření smlouvy ekvivalentní měsíčním platbám pojišťovny tomuto jedinci pokud se dožívá určitého věku. Ekvivalence v případě půjčky je dána rovností současných hodnot uvažovaných částek. Výše úroku je dohodnuta ve smlouvě a proto není složité určit výši splátek. V případě pojištění a důchodu je situace evidentně složitější a je dána rovností mezi dvěmi tzv. aktuárskými (očekávanými) současnými hodnotami. Pojišťovna musí své příjmy a výdaje odhadnout, přičemž zohledňuje dva aspekty. Je to faktor času, tedy určení časové hodnoty peněž a dekrementní faktor pojistného kmene, který je dán úmrtností pojištěných.

### 2.2.1 Časová hodnota peněz

Životní pojištění se týká značných časových horizontů. Z toho důvodu je nutné, aby se veškeré finanční toky vztahovali k určitému časovému okamžiku. Za tímto účelem zvolíme postup běžný z finanční matematiky, při němž se finanční toky rozložené v čase vztáhnou diskontováním do jejich počáteční hodnoty (určí se současná hodnota budoucích příjmů) a nebo úročením do jejich koncové hodnoty ( určí se budoucí hodnota současných příjmů). V životním pojištění se převážně počítají počáteční hodnoty vždy k okamžiku uzavření příslušného pojištění, přičemž se diskontuje s použitím diskontního faktoru (odúročitele) typu

$$v = \frac{1}{1+i} \qquad (2.2.1)$$

pro zvolenou pojistně-technickou úrokovou míru $i$. Technická úroková míra je od dubna maximálně 4 % a pojišťovny musí přizpůsobit své pojistné podmínky tak, aby vyhlášce MF ČR vyhověly. Technickou úrokovou míru uvádějí pojišťovny ve smluvních podmínkách, které jsou součástí pojistné smlouvy. Proto je její výše zaručena po celou dobu platnosti pojistné smlouvy. Snížení technické úrokové míry je zapříčiněno vývojem na kapitálových a finančních trzích, které příliš velké zisky neumožňují. Ještě před pěti lety pojišťovny připisovaly z výnosů až 10 %, dnes je to kolem 3 % a u některých jen čtvrtina procenta.

Diskontování pojistné částky $S$ o n roků zpět při výpočtu počáteční hodnoty probíhá podle vzorce

$$P = S \,.\, v^n \tag{2.2.2}$$

a úročení částky pojistného $P$ o n roků vpřed při případném výpočtu koncové hodnoty podle vzorce typu

$$S = P \,.\, (1+i)^n \,. \tag{2.2.3}$$

V praxi je zvykem zadávat úrokové míry jako roční nominální úrokové míry, přestože frekvence úročení m (kdy se úroky připisují několikrát ročně) bývá většinou větší než jedna. V takovém případě hovoříme o roční efektivní úrokové míře a platí zde vztah

$$\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^m = 1+i \;. \tag{2.2.4}$$

V pojišťovnách se využívá spojitého úročení, předpokládající připisování úroků v „nekonečně malých" časových intervalech. Jestliže limitní hodnoty frekvence úročení blížící se nekonečnu označíme jako

$$\delta = \lim i^{(m)} = \lim m\left((1+i)^{1/m} - 1\right) \quad \text{pro } m \to \infty \tag{2.2.5}$$

pak

$$e^{\delta} = 1+i, \tag{2.2.6}$$

tj.

$$\delta = \ln(1+i). \tag{2.2.7}$$

hodnota $\delta$ se nazývá intenzita úročení odpovídající efektivní úrokové míře $i$. Diskontováním jednotkové částky dostaneme

$$v^t = (1+i)^{-t} = e^{-\delta t} \tag{2.2.8}$$

### 2.2.2 dekrementní faktor náhodné veličiny.

Nahodilé vymírání populace je příčinou náhodného charakteru finančních toků a to jak na straně pojistného plnění (např. dožití se sjednaného konce pojištění není jisté) tak na straně pojistného (např. placení pojistného obvykle končí s úmrtím klienta). Pojišťovna proto musí pracovat s aktuárskými (očekávanými) hodnotami, které získává na základě propočtů pravděpodobnosti. Vychází při tom z úmrtnostních tabulek, které si sestavuje sama na základě údajů o svém pojistném kmeni nebo je přebírá od Českého statistického úřadu. Na tomto místě bych uvedl některé základní veličiny pro většinu kalkulací v životním pojištění.

Základním stavebním kamenem všech modelů, kde se nahodilost týká toho, jak dlouho jedinec přežije, je náhodná veličina T(x), představující délku života x-letého jedince, za podmínky že se věku x dožil.

$$ {}_tq_x = P[T(x) \leq t] \qquad t \geq 0 \tag{2.2.9} $$

$$ {}_tp_x = 1 - {}_tq_x = P[T(x) > t] \qquad t \geq 0 \tag{2.2.10} $$

$$ {}_{s|}q_x = P[\, s < T(x) \leq s + 1] \qquad s \geq 0 \tag{2.2.11} $$

Symbol ${}_tq_x$ můžeme interpretovat jako pravděpodobnost, že x-letý jedinec zemře během t roků. To znamená, že ${}_tq_x$ je distribuční funkcí T($x$). Na druhou stranu, ${}_tp_x$ můžeme interpretovat jako pravděpodobnost, že $x$-letý jedinec se dožije věku $x + t$. To znamená, že ${}_tp_x$ je funkcí přežití pro $x$-letého jedince. Symbol ${}_{s|}q_x$ je pak pravděpodobnost toho, že jedinec, který je naživu ve věku $x$, zemře ve věku $x + s$.

Důležité je také zavést pojem, kterým je intenzita úmrtnosti ve věku $x$. Vyjdeme přitom z následující pravděpodobnosti

$$ P\,[x < X \leq x + \Delta x \,|\, X > x] \tag{2.2.12} $$

Kde X představuje náhodnou veličinu, vyjadřující věk, ve kterém novorozenec zemře (věk smrti novorozence).

Nyní

$$P\,[x < X \leq x + \Delta x \mid X > x] = \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{1-F(x)} \cong \frac{f(x)\Delta x}{1-F(x)} \approx \mu_x \,.\, \Delta x \qquad (2.2.13)$$

Výraz $\mu_x \,.\, \Delta x$ lze interpretovat jako pravděpodobnost úmrtí ve věkovém intervalu ( $x$, $x$ + $\Delta x$) infinitezimální délky $\Delta x$ za podmínky, že daný jedinec se dožil věku $x$ a

$$\mu_x = \frac{f(x)}{1-F(x)} = -\frac{1}{{}_xp_0} \cdot \frac{d}{dx} \cdot {}_xp_0 = -\frac{d}{dx}\ln({}_xp_0) \qquad (2.2.14)$$

Potom tedy ${}_tp_x\ \mu_{x+t}$ dt je pravděpodobnost že jedinec který se dožil věku $x$ zemře mezi $t$ a $t + dt$ a

$$\int_0^\infty {}_tp_x\ \mu_{x+t}\, \mathrm{dt} = 1 \qquad (2.2.15)$$

Pomocí intenzity úmrtnosti lze napsat některé důležité vzorce pro základní pojmy z modelu úmrtnosti.

$${}_tq_x = \int_0^t {}_sp_x\ \mu_{x+s}\, \mathrm{ds} \qquad (2.2.16)$$

$${}_tp_x = \exp\left(-\int_0^t \mu_{x+s}\, ds\right) \qquad (2.2.17)$$

O dekrementním řádu úmrtnosti se mluví zejména v souvislosti s veličinami $l_x$ a $d_x$ a jejich posloupnostmi. Tyto funkce úmrtnostní tabulky se konstruují na základě pravděpodobností úmrtí a dožití. Veličinu $l_x$ můžeme definovat jako střední počet jedinců, kteří se při daném výchozím stavu $l_0$ (zpravidla 100 000) dožijí věku x a posloupnost $l_x$ je pak definována jako

$$l_x = l_0 \,.\, {}_xp_0 \qquad (2.2.18)$$

a dále platí

$$l_{x+n} = l_x \,.\, {}_np_x \qquad (2.2.19)$$

$d_x$ můžeme interpretovat jako střední počet jedinců, kteří při daném výchozím stavu $l_0$

zemřou ve věku $x$ a platí

$$d_x = l_x - l_{x+1} \tag{2.2.20}$$

Nyní jsme si ukázali další, nepravděpodobnostní, interpretaci úmrtnostních tabulek. Matematicky je založená na dekrementních (úbytkových) hodnotách. V tomto smyslu lze hovořit o tzv. „deterministické skupině přežívajících". Tento koncept je analogický s modelem spojitého úročení. Tabulka 2.2 je konstruována ke shrnutí těchto paralel.

**tabulka 2-3**

paralely mezi složeným úročením a konceptem skupiny přežívajících

| Složené úročení | Skupina přežívajících |
|---|---|
| A(t) = velikost fondu v čase t, čas měřený v letech | $l_x$ = velikost skupiny ve věku x, věk měřený v letech |
| Efektivní roční úroková míra (spojitá) $$i_t = \frac{A(t+1) - A(t)}{A(t)}$$ | Efektivní roční míra úmrtnosti (nespojitá) $$q_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x}$$ |
| Efektivní n-letá úroková míra, začátek v $t$ $${}_n i_t = \frac{A(t+n) - A(t)}{A(t)}$$ | Efektivní n-letá míra úmrtnosti, začátek v $x$ $${}_n q_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x}$$ |
| Úroková intenzita v roce $t$ $$\delta_t = \lim_{\Delta t \to 0} \left[ \frac{A(t+\Delta t) - A(t)}{A(t)\Delta t} \right] = \frac{1}{A(t)} \frac{dA(t)}{dt}$$ | Intenzita úmrtnosti ve věku $x$ $$\mu_x = \lim_{\Delta x \to 0} \left[ \frac{l_x - l_{x+\Delta x}}{l_x \Delta x} \right] = -\frac{1}{l_x} \frac{dl_x}{dx}$$ |

V předchozí části textu jsme si ukázali dva základní aspekty ovlivňující budoucí příjmy a výdaje pojišťovny. V pojetí principu ekvivalence to znamená, že pojišťovna při svých kalkulacích pracuje s aktuárskými (očekávanými) současnými hodnotami (tedy se současnými hodnotami v průměru očekávaných budoucích příjmů a výdajů).

Princip ekvivalence lze tedy zapsat ve tvaru

***Aktuárská (očekávaná) současná hodnota pojistného = aktuárská (očekávaná) současná hodnota pojistného plnění.***

Pravá strana rovnice se také označuje jako počáteční hodnota pojištění a je-li navíc počítána pro jednotková pojistná plnění (tj. pro pojistnou částku ve výši 1 Kč nebo pro důchod v roční výši 1 Kč), pak se mluví o jednotkové počáteční hodnotě pojištění.

Výběr vzorců pro jednotkové počáteční hodnoty důležitých pojistných produktů v pojištění osob je shrnut v tabulce 2-4.

**tabulka 2-4**

přehled jednotkových počátečních hodnot důležitých pojistných produktů se spojitým přístupem

| **Pojistný produkt** | **Jednotková počáteční hodnota** |
|---|---|
| - pojištění pro případ dožití | $\overline{{}_nE_x} = {}_np_x . v^n$ |
| - pojištění pro případ smrti | $\overline{A}_x = \int_0^{\infty} {}_tp_x . \mu_{x+t} . v^t dt$ |
| - dočasné pojištění pro případ smrti | $\overline{A}^1_{x\overline{n}\vert} = \int_0^{n} {}_tp_x . \mu_{x+t} . v^t dt$ |
| -smíšené pojištění | $\overline{A}_{x\overline{n}\vert} = \overline{A}^1_{x\overline{n}\vert} + {}_nE_x$ |
| - doživotní důchod | $\overline{a}_x = \int_0^{\infty} {}_tp_x . v^t dt$ |
| - dočasný důchod | $\overline{a}_{x\overline{n}\vert} = \int_0^{n} {}_tp_x . v^t dt$ |
| - odložený doživotní důchod | ${}_{k\vert}\overline{a}_x = \int_k^{\infty} {}_tp_x . v^t dt$ |
| - odložený dočasný důchod | ${}_{k\vert}\overline{a}_{x\overline{n}\vert} = \int_k^{k+n} {}_tp_x . v^t dt$ |

**Pozn. 2.1**. Kalkulované střední hodnoty se mohou od skutečně realizovaných hodnot výrazně lišit. Pojišťovna proto musí počítat i s tzv. pojistně-technickým rizikem. Pojistně technické riziko je přirozené měřit směrodatnou odchylkou výše škody na jednu pojistnou smlouvu, což je v pravděpodobnostním počtu obvyklá míra pro ocenění chyby vzniklé použitím průměru.

$$\text{Riziko na jednu pojistku} = \frac{\sigma(Z)}{\sqrt{N}} \qquad (2.2.21)$$

a

$$\sigma(Z) = \sqrt{\operatorname{var}(Z)} = \left[E(Z^2) - (E(Z))^2\right]^{1/2} \qquad (2.2.22)$$

Kde Z je vhodně zvolená náhodná veličina (např. v pojištění pro případ dožití je to ${}_n\overline{E}_x = {}_np_x . v^n$) a N je počet uzavřených smluv. Z toho vyplývá, že pojišťovna by měla rozšiřovat své pojistné kmeny, aby tak snížila riziko.

## 2.3 Kalkulace nettopojistného

Pohlížíme-li na rozdíl mezi současnou hodnotou pojistného plnění a současnou hodnotou pojistného jako na finanční ztrátu pojišťovny , pak podle principu ekvivalence musí platit

$$E(L) = 0$$

Kde L je vhodně zvolená ztrátová funkce.

Ukažme si nyní využití tohoto principu na příkladu.

**Příklad 2-2**

Pojistitel plánuje uzavřít pojistku s jedincem ve věku 0, jehož celočíselná délka života, K, je dána pravděpodobnostní funkcí

$${}_{k|}q_0 = \frac{1}{4} \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

**Pozn.2.2.** Zde jsme zavedli náhodnou veličinu $K_x$ označovanou jako celočíselnou délku života ve věku x, která je definována jako celá část náhodné veličiny $T_x$, tj. $K_x = [T_x]$ a nabývá pouze diskrétních hodnot k = 0, 1, 2, … .

Pojistitel zaplatí 1 jednotku na konci roku, kdy pojištěný zemře výměnou za platbu pojistného $P$ na začátku každého roku, kdy bude pojištěný naživu. Najděte roční pojistné $P$. Pro obě části předpokládejme efektivní roční úrokovou míru $i = 0{,}04$.

Řešení:

$P$ by mělo být takové, aby očekávaná současná hodnota finanční ztráty pojišťovny, ke dni uzavření pojistky, byla rovna nule. Pro K = $k$ a libovolné pojistné $P$, je současná hodnota ztráty pojišťovny v den uzavření pojistky

$$v^{k+1} - P\ddot{a}_{\overline{k+1|}}.$$

Tedy jednotková současná hodnota pojistného plnění mínus současná hodnota dosud zaplacených pojistných. Jelikož míra úmrtnosti je pro celé období konstantní, její váhy neovlivňují výpočet ztráty.

Platí tedy, že $P$ by mělo být stanoveno tak, aby

$$\sum_{k=0}^{3} (v^{k+1} - P\ddot{a}_{\overline{k+1|}}) = 0$$

$$P = \frac{\sum_{k=0}^{3} v^{k+1}}{\sum_{k=0}^{3} \ddot{a}_{\overline{k+1|}}} = \frac{\sum_{k=0}^{3} v^{k+1}}{\sum_{k=0}^{3} \frac{1-v^{k+1}}{1-v}}$$

což dává pojistné $P = 0{,}3772$.

Výsledek si nyní shrňme do přehledné tabulky.

| **Výstup** $k$ | **Pravděpodobnost** $_{k\|}q_0$ | **všeobecný vzorec** | **Současná hodnota ztráty** |
|---|---|---|---|
| 0 | ¼ | $v^1 - P\ddot{a}_{\overline{1}\|}$ | 0,5843 |
| 1 | ¼ | $v^2 - P\ddot{a}_{\overline{2}\|}$ | 0,1846 |
| 2 | ¼ | $v^3 - P\ddot{a}_{\overline{3}\|}$ | -0,1998 |
| 3 | ¼ | $v^4 - P\ddot{a}_{\overline{4}\|}$ | -0,5693 |
| | | | $\sum = 0$ |

V tomto příkladě tedy

E [současná hodnota pojistných plnění – současná hodnota nettopojistných ] = 0,

což je ekvivalentní s

E [současná hodnota pojistných plnění] = E [ současná hodnota nettopojistných ].

Jinými slovy, nettopojistné je stanoveno tak, aby se aktuárská současná hodnota pojistných plnění rovnala aktuárské současné hodnotě nettopojistných. V tabulce 2-4 jsou kalkulovány aktuárské současné hodnoty, které mohou být v této rovnosti použity. Jejich aplikací pak získáme jednotlivé vzorce nettopojistného.

Uvažujme například stanovení ročního nettopojistného pro doživotní pojištění pro případ smrti x-letého muže s pojistnou částkou S. Princip ekvivalence zde bude mít tento tvar

$$\overline{P}_x . \overline{a}_x = S . \overline{A}_x$$

$$\overline{P}_x = \frac{S.\overline{A}_x}{\overline{a}_x} = \frac{\int_0^\infty {}_tp_x.\mu_{x+t}.v^t dt}{\int_0^\infty {}_tp_x.v^t dt}.S \qquad (2.3.1)$$

Některé vzorce nettopojistného si opět shrneme v tabulce 2-5.

**tabulka 2-5**

vzorce nettopojistného vybraných druhů životního pojištění

| **Pojistný produkt** | **Vzorec nettopojistného** |
|---|---|
| - pojištění pro případ smrti | $\overline{P}_x = \frac{\overline{A}_x}{\overline{a}_x}$ |
| - dočasné pojištění pro případ smrti | $\overline{P}^1_{x,\overline{n}\vert} = \frac{\overline{A}^1_{x,\overline{n}\vert}}{\overline{a}_{x,\overline{n}\vert}}$ |
| -smíšené pojištění | $\overline{P}_{x,\overline{n}\vert} = \frac{\overline{A}_{x,\overline{n}\vert}}{\overline{a}_{x,\overline{n}\vert}}$ |
| - odložený doživotní důchod | $\overline{P}_{x;\overline{k}\vert} = \frac{\overline{A}^{\ \ 1}_{x;\overline{k}\vert}\overline{a}_{x+k}}{\overline{a}_{x;\overline{k}\vert}}$ |

# 3 Nettorezerva

V předchozí kapitole jsme představili princip ekvivalence, přičemž jsme finanční toky vztahovali k počátku pojištění a pracovali jsme s očekávanými počátečními hodnotami. V této části budeme aplikovat princip ekvivalence jednotlivých plateb v časovém období po vzniku pojištění. Zavedeme proto tzv. bilanční (zůstatkovou) položku, která bude pro jednu ze zúčastněných stran představovat pasivum a pro druhou aktivum. V případě půjčky je bilanční položka aktivem pro půjčujícího a pasivem pro vypůjčujícího. V případě životního pojištění a pojištění důchodu, se tato bilanční položka nazývá rezerva nettopojistného. Ta je závazkem pojišťovny a aktivem pro pojištěného nebo jedince kupujícího si důchod.

**Příklad 3-1**

Nyní se vraťme k příkladu 2-2. Předpokládejme, že pojištěný je jeden rok po uzavření pojistky stále naživu. K tomuto okamžiku zhodnoťme současné hodnoty budoucích finančních toků. Použijeme roční nettopojistné, 0,3772 stanovené v příkladu 2-2.

Řešení:

Pravděpodobnostní funkce pro K, celočíselná délka života, byla dána jako ¼ pro $k = 0, 1, 2, 3$. Podmíněná pravděpodobnost pro K, dané jako K≥1, je

$$P(K = k \mid K \geq 1) = \frac{P(K = k)}{P(K \geq 1)} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3} \qquad k = 1, 2, 3.$$

Požadované současné hodnoty jsou uvedeny níže.

| | | Současná hodnota budoucích závazků (1 rok po vzniku pojištění, i=0,04) | | |
|---|---|---|---|---|
| **Výstup k** | **Podmíněná pravděpodobnost** | **pojistitele** | **pojištěného** | **Ztráta pojišťovny** |
| 1 | 1/3 | $v^1 = 0{,}9615$ | $P\ddot{a}_{\overline{1}|} = 0{,}3772$ | 0,5843 |
| 2 | 1/3 | $v^2 = 0{,}9246$ | $P\ddot{a}_{\overline{2}|} = 0{,}7399$ | 0,1846 |
| 3 | 1/3 | $v^3 = 0{,}889$ | $P\ddot{a}_{\overline{3}|} = 1{,}0886$ | -0,1998 |

Aktuárská současná hodnota závazku pojistitele je

$$\frac{1}{3}(0{,}9615 + 0{,}9246 + 0{,}889) = 0{,}925$$

a stejně tak aktuárská současná hodnota závazku pojištěného činí 0,7352. Bilanční položka,

$$0{,}925 - 0{,}7352 = 0{,}1898,$$

je nettorezerva 1 rok po uzavření pojištění, těsně před zaplacením druhého pojistného. Stejným způsobem získáme nettorezervu po 2. roce, která činí 0,3844 a po 3. roce 0,5843. Zdálo, by se, že rezerva na pokrytí nákladů např. po 3. roce nestačí, vzhledem k tomu, že podmíněná pravděpodobnost úmrtí v posledním roce je 1. Nutno však počítat s tím, že pojišťovna na začátku dalšího roku inkasuje pojistné. V posledním roce je pak tato suma 0,9615 což se rovná $v$.

## 3.1 Spojitý přístup k rezervě nettopojistného

V této části vytvoříme model rezervy vycházející z nettopojistného, které jsme odvodili v předchozí kapitole a shrnuli v tabulce 2-4. Jedná se tedy o případ, kdy je pojistné placené kontinuálně a pojistná částka je vyplacena okamžitě při smrti pojištěného.

Uvažujme rezervu pojistného pro doživotní pojištění smrti $x$-letého jedince na spojité bázi. Pojištěný platí roční pojistné $\overline{P}_x$. Odpovídající rezerva pojištěného, který se dožil konce $t$-tého roku je označena ${}_t\overline{V}_x$. Ke stanovení ${}_t\overline{V}_x$, za předpokladu principu ekvivalence, zavedeme náhodnou proměnnou $U$, délku života $x + t$ - letého jedince, s pravděpodobnostním rozdělením

$${}_u p_{x+t} \cdot \mu_{x+t+u} \qquad u \geq 0.$$

Nyní definujeme budoucí ztrátu v čase $t$ jako

$${}_tL = v^U - \overline{P}_x \overline{a}_{\overline{U}|} \tag{3.1.1}$$

Rezerva nettopojistného je definována jako očekávaná budoucí ztráta. Máme tedy

$$\begin{aligned} {}_t\overline{V}_x &= E\left[v^U\right] - \overline{P}_x . E\left[\overline{a}_{\overline{U}|}\right] \\ &= \overline{A}_{x+t} - \overline{P}_x . \overline{a}_{x+t} \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

Tento vzorec říká, že

***(rezerva) =***

***= (aktuárská (očekávaná) současná hodnota doživotního pojištění pro případ smrti od věku x+t) – (aktuárská (očekávaná) současná hodnota budoucích pojistných placených v roční výši $\overline{P}_x$).***

Mezi formulacemi $\overline{P}_x$ a ${}_t\overline{V}_x$ existuje souvztažnost. Pokud $t = 0$, pak podle vzorce (3.1.2) ${}_0\overline{V}_x = 0$. To je následkem použití principu ekvivalence v čase, kdy je stanoveno nettopojistné.

Díky náhodnému charakteru délky života může být pro dané pojištění pro případ smrti jako měřítko variability použit rozptyl L . Riziko spojené s tvorbou nettorezervy lze pak počítat následujícím způsobem

$$\sigma\left[v^u - \overline{P}_x \bar{a}_{\overline{U|}}\right] = \sigma\left[v^U - \frac{\overline{P}_x(1-v^t)}{\delta}\right] = \sigma\left[\left(1+\frac{\overline{P}_x}{\delta}\right).v^U - \frac{\overline{P}_x}{\delta}\right] = \sigma\left[\left(1+\frac{\overline{P}_x}{\delta}\right).v^U\right]$$

$$= \left(1+\frac{\overline{P}_x}{\delta}\right).\ \sigma\left(v^U\right)$$

$$= \left(1+\frac{\overline{P}_x}{\delta}\right).\left({}^2\overline{A}_{x+t} - \overline{A}^2_{x+t}\right). \qquad (3.1.3)$$

**Příklad 3-2**

Za předpokladu, že úmrtnost je určena podle de Moivreho věty s $l_x = 100 - x$ a úroková míra je 4%, spočítejte

a) $\overline{P}_{35}$

b) ${}_t\overline{V}_{35}$ pro t = 0, 10, 20, 30, 40, 50, 60.

řešení

a) Na základě $l_x = 100 - x$ získáme ${}_tp_{35} = 1 - t/65$ a ${}_tp_{35} \cdot \mu_{35+t} = 1/65$

pro $0 \leq t < 65$. Z toho vyplývá

$$\bar{A}_{35} = \int_0^{65} v^t \frac{1}{65} dt = \frac{\bar{a}_{\overline{65}|}}{65} = \frac{\frac{1-v^{65}}{\delta}}{65} = 0{,}31609$$

a

$$\bar{a}_{35} = \frac{1-\bar{A}_{35}}{\log 1{,}04} = 17{,}4375$$

Potom

$$\bar{P}_{35} = \frac{0{,}31609}{17{,}4375} = 0{,}018127$$

b) Ve věku 35 + $t$, máme $\bar{A}_{35+t} = \bar{a}_{\overline{65-t}|} / (65-t)$ a

$${}_t\bar{V}_{35} = \bar{A}_{35+t} - 0{,}018127 .\ \bar{a}_{35+t} .$$

Aplikací tohoto vzorce získáme následující výsledky

| t | ${}_t\bar{V}_{35}$ |
|---|---|
| 0 | 0,0000 |
| 10 | 0,1372 |
| 20 | 0,2246 |
| 30 | 0,3331 |
| 40 | 0,4697 |
| 50 | 0,6431 |
| 60 | 0,8659 |

Analogicky s konstantním nettopojistným a pojistným plněním nyní můžeme definovat všeobecný vzorec budoucí ztráty pro každé spojité pojištění smrti

$${}_tL = b_{t+U} v^U - \int_0^U \pi_{t+s} v^s ds \tag{3.1.4}$$

kde $b_{t+U}$ výše pojistného plnění v případě že nastane smrt pojištěného v čase $t + U$ a $\pi_{t+s}$ je výše ročního spojitého nettopojistného v čase $t + s$. Rezerva nettopojistného pro tento případ je potom

$$ {}_t\overline{V} = E[{}_tL] = \int_0^\infty \left( b_{t+u} v^u - \int_0^u \pi_{t+s} v^s ds \right) {}_u p_{x+t} \mu_{x+t+u} du = $$

$$ = \int_0^\infty b_{t+u} v^u {}_u p_{x+t} \mu_{x+t+u} du - \int_0^\infty \pi_{t+s} v^s {}_s p_{x+t} ds \qquad (3.1.5) $$

kde druhý integrál v (3.1.5) jsme získali obrácením pořadí integrace. V případě smíšeného pojištění nutno do prvního integrálu zahrnout velikost pojistného plnění při dožití se sjednaného věku - $a_{t+u}$. Rezerva nettopojistného pak bude mít následující tvar

$$ {}_t\overline{V}_{\overline{x,n|}} = \int_0^n b_{t+u} v^u {}_u p_{x+t} \mu_{x+t+u} + a_{t+u} v^u {}_u p_{x+t} du - \int_0^n \pi_{t+s} v^s {}_s p_{x+t} ds \qquad (3.1.6) $$

Tento postup při výpočtu rezervy nettopojistného lze označit jako prospektivní výpočet rezervy. Jinými slovy, ${}_t\overline{V}$ můžeme vyjádřit jako aktuárskou současnou hodnotu budoucích pojistných plnění mínus aktuárská současná hodnota budoucích nettopojistných. Pokud bychom postupovali obráceně a rezervu bychom počítali podle toho, kolik nám zbyde z každého nettopojistného po odečtení nákladů na pojistná plnění, potom bychom mohli tento retrospektivní způsob výpočtu zapsat tímto vzorcem

$$ {}_t\overline{V}_{\overline{x,n|}} = \int_0^t \pi_s v^s {}_s p_x ds - \int_0^t b_u v^u {}_u p_x \mu_{x+u} + a_u v^u {}_u p_x du, \qquad (3.1.7) $$

tedy minulé příjmy mínus minulé výdaje. Ačkoli retrospektivní metoda skutečně popisuje proces tvorby rezervy, v praxi se dává jednoznačně přednost prospektivnímu vzorci, neboť dovoluje zohlednit budoucí změny (dekrementní, úrokové apod.).

Stejně jako u nettopojistného je zvykem zapisovat vzorce nettorezerv pro jednotkovou pojistnou částku a jednotkový důchod. Nyní uvedeme prospektivní tvary rezervy pro některé vybrané druhy pojištění s ročním pojistným:

***- pojištění pro případ dožití***: do (3.1.6) dosadíme $a_n = 1$ a jinak položit $a_{t+u} = 0$,

$b_{t+u} = 0$:

$$ {}_t\overline{V}_{\overline{x,n|}} = {}_n p_x v^n - \overline{P}_{\overline{x,n|}} . \overline{a}_{x+t:\overline{n-t|}} = {}_{n-t}E_{x+t} - \overline{P}_{\overline{x,n|}} . \overline{a}_{x+t:\overline{n-t|}} \qquad (3.1.8) $$

***- pojištění pro případ smrti***: $b_{t+u} = 1$ pro $u = 0$ až $\infty$, $a_{t+u} = 0$,

$$ {}_t\overline{V}_x = \int_0^{\infty} {}_u p_{x+t} \cdot \mu_{x+t+u} . v^u du - \overline{P}_x . \overline{a}_{x+t} = \overline{A}_{x+t} - \overline{P}_x . \overline{a}_{x+t} \qquad (3.1.9) $$

***- dočasné pojištění pro případ smrti***: $b_{t+u} = 1$ pro $u = 0$ až $n$, $a_{t+u} = 0$,

$$ {}_t\overline{V}_{\overline{x,n|}} = \int_0^{n} {}_u p_{x+t} \cdot \mu_{x+t+u} . v^u du - \overline{P}_{\overline{xn|}} . \overline{a}_{x+t:\overline{n-t|}} = \overline{A}^{1}_{x+t:\overline{n-t|}} - \overline{P}_{\overline{xn|}} . \overline{a}_{x+t:\overline{n-t|}} \qquad (3.1.10) $$

***- smíšené pojištění***: $b_{t+u} = 1$ pro $u = 0$ až $n$, $a_{t+u} = 0$, $a_n = 1$

$$ {}_t\overline{V}_{\overline{x,n|}} = \int_0^{n} {}_u p_{x+t} \cdot \mu_{x+t+u} . v^u du + {}_n p_x v^n - \overline{P}_{\overline{xn|}} . \overline{a}_{x+t:\overline{n-t|}} = \overline{A}_{x+t:\overline{n-t|}} - \overline{P}_{\overline{xn|}} . \overline{a}_{x+t:\overline{n-t|}} \qquad (3.1.11) $$

***- pojištění odloženého doživotního důchodu s odkladem na k let***:

$$ {}_t\overline{V}_x = \begin{cases} {}_{k-t|}\overline{a}_{x+t} - \overline{P}_{\overline{x,k|}} . \overline{a}_{x+t:\overline{k-t|}} & \text{Pro t < k} \\ \overline{a}_{x+t} & \text{Pro t} \geq \text{k,} \end{cases} \qquad (3.1.12) $$

## 3.2 Ostatní vzorce pro spojité rezervy

Doposud jsme vyvinuli pouze jednu metodu ke psaní vzorců pro rezervy, tedy prospektivní metodu, která stanovuje, že rezerva je rozdíl mezi aktuárskou současnou hodnotou budoucích pojistných plnění a budoucích nettopojistných. Z prospektivního postupu můžeme jednoduše vyvinout tři další tvary vzorců pro pojištění s konstantním pojistným. To budeme ilustrovat na příkladě smíšeného pojištění.

- *diferenční tvar* pro ${}_t\overline{V}_{x,\overline{n}|}$ získáme vytknutím $\overline{a}_{x+t:\overline{n-t}|}$ z prospektivního vzorce pro ${}_t\overline{V}_{x,\overline{n}|}$:

$$ {}_t\overline{V}_{x,\overline{n}|} = \left[ \frac{\overline{A}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\overline{a}_{x+t:\overline{n-t}|}} - \overline{P}_{x\overline{n}|} \right] . \overline{a}_{x+t:\overline{n-t}|} \qquad (3.2.1) $$

Toto ukazuje rezervu jako aktuárskou současnou hodnotu rozdílu pojistného placeného po zbývající čas pojištění. Rozdíl pojistného je získán odečtením původního ročního nettopojistného od pojistného za shodné pojištění sjednané pro dosažený věk $x + t$ a pro zbývající pojistné plnění.

Druhý tvar vzorce je získán vytknutím aktuárské současné hodnoty budoucího pojistného plnění z prospektivního vzorce. Pro ${}_t\overline{V}_{x,\overline{n}|}$ tedy máme

$$ {}_t\overline{V}_{x,\overline{n}|} = \left[ 1 - \overline{P}_{x\overline{n}|} . \frac{\overline{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\overline{A}_{x+t:\overline{n-t}|}} \right] . \overline{A}_{x+t:\overline{n-t}|} $$

$$ = \left[ 1 - . \frac{\overline{P}_{x\overline{n}|}}{\overline{P}_{x+t:\overline{n-t}|}} \right] . \overline{A}_{x+t:\overline{n-t}|} . \qquad (3.2.2) $$

Zde je znázorněna rezerva jako aktuárská současná hodnota části zbývajícího budoucího pojistného plnění, která není kryta budoucím pojistným. Všimněme si že $\overline{P}_{x+t:\overline{n-t}|}$ je nettopojistné v případě, že budoucí pojistná plnění mají být kryta z budoucího pojistného, ale $\overline{P}_{x\overline{n}|}$ je skutečně placené nettopojistné. $\overline{P}_{x\overline{n}|} / \overline{P}_{x+t:\overline{n-t}|}$ je tedy část budoucího pojistného plnění krytého budoucím pojistným. Toto je nazýváno *výplatním tvarem*.

Třetím výrazem je *retrospektivní tvar*. Ten získáme pomocí všeobecného vztahu, pro $t < n - s$

$$\overline{A}_{x+s:\overline{n-s}|} = \overline{A}^{\,1}_{x+s:\overline{t}|} + {}_tE_{x+s}\,\overline{A}_{x+s+t:\overline{n-s-t}|},$$

$$\overline{a}_{x+s:\overline{n-s}|} = \overline{a}_{x+s:\overline{t}|} + {}_tE_{x+s}\,\overline{a}_{x+s+t:\overline{n-s-t}|}.$$

Substitucí těchto výrazů do prospektivního vzorce pro ${}_s\overline{V}_{x,\overline{n}|}$ získáme

$$\begin{aligned} {}_s\overline{V}_{x,\overline{n}|} &= \overline{A}^{\,1}_{x+s:\overline{t}|} - \overline{P}_{x\overline{n}|}\,\overline{a}_{x+s:\overline{t}|} + {}_tE_{x+s}\left[\overline{A}_{x+s+t:\overline{n-s-t}|} - \overline{P}_{x:\overline{n}|}\,\overline{a}_{x+s+t:\overline{n-s-t}|}\right] \\ &= \overline{A}^{\,1}_{x+s:\overline{t}|} + {}_tE_{x+s}\;{}_{s+t}\overline{V}_{x,\overline{n}|} - \overline{P}_{x\overline{n}|}\,\overline{a}_{x+s:\overline{t}|}. \end{aligned} \qquad (3.2.3)$$

Rezervy jsou tedy na začátku a na konci intervalu propojeny následujícím argumentem

***(rezerva na začátku)***

***= (aktuárská současná hodnota pojistného plnění placeného během intervalu)***

***+ (aktuárská současná hodnota pojištění na dožití na částku, odpovídající rezervě na konci intervalu)***

***- (aktuárská současná hodnota nettopojistného placeného během intervalu).***

Upravená symbolika

$${}_s\overline{V}_{x,\overline{n}|} + \overline{P}_{x\overline{n}|}\,\overline{a}_{x+s:\overline{t}|} = \overline{A}^{\,1}_{x+s:\overline{t}|} + {}_tE_{x+s}\;{}_{s+t}\overline{V}_{x,\overline{n}|} \qquad (3.2.4)$$

ukazuje, že aktuárské současné hodnoty zdrojů, na jedné straně a potřeb, na straně druhé, se rovnají.

Retrospektivní tvar pak získáme dosazením za $s = 0$, tedy ${}_0\overline{V}_{x,\overline{n}|} = 0$ podle principu ekvivalence, znamenající, že

$$ {}_t\bar{V}_{x,\overline{n}|} = \frac{1}{{}_tE_x}\left[\bar{P}_{x\overline{n}|}\bar{a}_{x\overline{t}|} - \bar{A}^{1}_{x\overline{t}|}\right] \qquad (3.2.5) $$

dále $\bar{s}_{x\overline{t}|} = \bar{a}_{x\overline{t}|} / {}_tE_x$ , takže můžeme zapsat

$$ {}_t\bar{V}_{x,\overline{n}|} = \bar{P}_{x\overline{n}|}\bar{s}_{x\overline{t}|} - {}_t\bar{k}_x \qquad (3.2.6) $$

kde

$$ {}_t\bar{k}_x = \frac{\bar{A}^{1}_{x\overline{t}|}}{{}_tE_x} \qquad (3.2.7) $$

jsou akumulované náklady pojištění. Rezerva může být tedy popsána jako rozdíl mezi nettopojistnými, nashromážděnými v minulosti s úrokem a sdílenými pouze mezi dožívajícími se věku $x + t$, a v minulosti naakumulovanými náklady pojištění.

## 3.3 Diskrétní (nespojitý) přístup k rezervě nettopojistného.

V této kapitole budeme probírat rezervy stanovené za předpokladu, že pojistné je placeno ročně a pojistné plnění je vypláceno vždy na konci roku, ve kterém jedinec zemře. Uvažujme jednotkové pojištění pro případ smrti s ročním pojistným $P_x$. V takovém případě je rezerva na konci $k$ let označena jako ${}_kV_x$. Definujme náhodnou proměnnou $J$ jako celočíselnou délku života $x + k$ – letého jedince s pravděpodobnostní funkcí ${}_jp_{x+k}q_{x+k+j}$, $j = 0, 1, 2, \dots\dots$ Potom je budoucí ztráta definována jako

$$ {}_kL = v^{J+1} - P_x\ddot{a}_{\overline{J+1}|}, \qquad (3.3.1) $$

a z definice ${}_kV_x = E[{}_kL]$ vyplývá

$$ {}_kV_x = A_{x+k} - P_x\ddot{a}_{x+k}. \qquad (3.3.2) $$

Tento prospektivní vzorec pro ${}_kV_x$ je aktuárská současná hodnota pojištění pro případ smrti od věku $x + k$ mínus aktuárská současná hodnota budoucích nettopojistných $P_x$.

V porovnání s předchozími kapitolami zjistíme, že $J = K - k$ s pravděpodobnostní funkcí

$$ {}_jp_{x+k}q_{x+k+j} = \frac{{}_{k+j}p_xq_{x+k+j}}{{}_kp_x}. $$

Zde pracujeme s pravděpodobností, že $x$-letý jedince se dožije věku $x + k$.

Analogicky se (3.1.3) máme

$$\sigma[{}_kL] = \sigma\left[v^{J+1}\left(1+\frac{P_x}{d}\right)\right]^{1/2} =$$

$$= \left[1+\frac{P_x}{d}\right]\sigma\left[v^{J+1}\right]^{1/2}. \qquad (3.3.3)$$

Nyní uvažujme obecnou situaci, kdy

- pojistná částka pro případ smrti je splatná na konci roku pojištění, ve kterém nastala smrt,
- pojistné je placeno ročně, na začátku roku pojištění,
- pojistné plnění v $j$-tém roce pojištění je $b_j$, $j = 1, 2, 3.....$,
- platba pojistného v $j$-tém roce pojištění je $\pi_{j-1}$, pro $j = 1, 2, ....$

Budoucí ztráta na konci roku pojištění je nyní

$${}_kL = b_{k+J+1}v^{J+1} - \sum_{h=0}^{J}\pi_{k+h}v^h. \qquad (3.3.4)$$

Rezerva nettopojistného, označena jako ${}_kV$, je definována jako

$${}_kV = E\,[{}_kL] = \sum_{j=0}^{\infty}\left[b_{k+j+1}v^{j+1} - \sum_{h=0}^{j}\pi_{k+h}v^h\right]{}_jp_{x+k}q_{x+k+j}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} b_{k+j+1}v^{j+1}\,{}_jp_{x+k}q_{x+k+j} - \sum_{h=0}^{\infty}\pi_{k+h}v^h\,{}_hp_{x+k} \qquad (3.3.5)$$

kde je druhá suma získána obrácením pořadí sumace. Jako pro ostatní rezervy je tedy ${}_kV_x$ aktuárská současná hodnota budoucích pojistných plnění mínus aktuárská současná hodnota budoucích nettopojistných.

Vzorce rezerv v tabulce 3-1 jsou analogické s rezervami v kapitole 3.1

**tabulka 3-1**

nespojité rezervy; věk při uzavření pojistné smlouvy $x$; čas $k$; jednotková částka

| pojistný produkt | prospektivní vzorec nettorezervy | |
|---|---|---|
| pojištění pro případ smrti | $A_{x+k} - P_x \ddot{a}_{x+k}$ | |
| dočasné pojištění pro případ smrti | $A^1_{x+k:\overline{n-k}\vert} - P^1_{x:\overline{n}\vert} \ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}\vert}$ | |
| smíšené pojištění | $A_{x+k:\overline{n-k}\vert} - P_{x:\overline{n}\vert} \ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}\vert}$ | |
| pojištění pro případ dožití | $A_{x+k:\overset{1}{\overline{n-k}\vert}} - P_{x:\overset{1}{\overline{n}\vert}} \ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}\vert}$ | |
| pojištění odloženého doživotního důchodu | $A_{x+k:\overset{1}{\overline{n-k}\vert}} \ddot{a}_{x+n} - P({}_{n\vert}\ddot{a}_x)\, \ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}\vert}$ | pro $k < n$ |
| | $\ddot{a}_{x+k}$ | pro $k \geq n$ |

Vzorce podobné vzorcům v kapitole 3.2 mohou být odvozeny také pro nespojité nettorezervy pojistného. Budeme je ilustrovat na příkladu vzorců pro ${}_kV_{x:\overline{n}\vert}$ s minimálním výkladem. Verbální interpretace a početní operace úzce souvisí s těmi, které jsme aplikovali pro spojité rezervy nettopojistného.

Diferenční tvar

$$ {}_kV_{x:\overline{n}|} = \left(P_{x+k:\overline{n-k}|} - P_{x,\overline{k}|}\right)\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|}, \tag{3.3.6} $$

výplatní tvar

$$ {}_kV_{x:\overline{n}|} = \left[1 - \frac{P_{x:\overline{n}|}}{P_{x+k:\overline{n-k}|}}\right].A_{x+k:\overline{n-k}|}. \tag{3.3.7} $$

Pro retrospektivní vzorec nejdříve pro $h < n - j$,

$$ {}_jV_{x:\overline{n}|} = A^{1}_{x+j:\overline{h}|} - P_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{x+j:\overline{h}|} + {}_hE_{x+j}\;{}_{j+h}V_{x:\overline{n}|}. \tag{3.3.8} $$

Potom, pro $j = 0$, tedy ${}_0V_{x:\overline{n}|} = 0$, máme

$$ {}_hV_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{{}_hE_x}\left[P_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{x:\overline{h}|} - A^{1}_{x:\overline{h}|}\right] $$

$$ = P_{x:\overline{n}|}\;s_{x:\overline{h}|} - {}_hk_x. \tag{3.3.9} $$

**Příklad 3-3**

Uvažujme nyní podobnou situaci jako v příkladě 2-1. 30letý muž uzavře pojištění pro případ smrti na 20 let na pojistnou částku Kč 1000,-. Předpokládejme nyní, že takové pojištění bylo uzavřeno s každým členem skupiny o $l_{30}$-ti členech ve věku 30 let. Budeme sledovat finanční toky očekávané pro tuto skupinu na základě úmrtnostních tabulek Českého statistického úřadu pro rok 2001 s roční úrokovou mírou 4% a jako vedlejší produkt získáme rezervu nettopojistného.

Řešení:Nejdříve vypočítáme roční pojistné,

$$ \pi = 1000\,.\,P^{1}_{30:\overline{20}|} = 1000\,.\,\frac{\sum_{k=0}^{n-1} {}_kp_x . q_{x+k} v^{k+1}}{\sum_{k=0}^{n-1} {}_kp_x . v^{k}} = \frac{0{,}03246}{13{,}93345} = 2{,}3296456\,. $$

Dále se očekávaná akumulace fondu této skupiny (daná akumulací pojistných, připisováním úroků a vyplácením pojistných částek) vyvíjí následovně

| (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) | (7) | (8) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| rok $h$ | očekávané pojistné na začátku roku $l_{50+h-1}\pi$ | očekávaný fond na začátku roku $(2)_h + (6)_{h-1}$ | očekávaný úrok $(0{,}04)\ (3)_h$ | očekávané výplaty pojistných částek $1000.d_{50+h-1}$ | očekávaný fond na konci roku $(3)_h+(4)_h-(5)_h$ | očekávaný počet těch kteří přežili na konci roku $l_{50+h}$ | ${}_hV^1_{30:\overline{20}\vert}$ $(6)_h : (7)_h$ |
| 1 | 228193 | 228193 | 9128 | 105607 | 131714 | 97846 | 1,35 |
| 2 | 227947 | 359661 | 14386 | 102662 | 271385 | 97744 | 2,78 |
| 3 | 227708 | 499093 | 19964 | 111828 | 407228 | 97632 | 4,17 |
| 4 | 227447 | 634676 | 25387 | 115203 | 544859 | 97517 | 5,59 |
| 5 | 227179 | 772038 | 30882 | 127070 | 675849 | 97389 | 6,94 |
| 6 | 226883 | 902732 | 36109 | 142711 | 796131 | 97247 | 8,19 |
| 7 | 226550 | 1022681 | 40907 | 158928 | 904660 | 97088 | 9,32 |
| 8 | 226180 | 1130840 | 45234 | 159366 | 1016708 | 96928 | 10,49 |
| 9 | 225809 | 1242516 | 49701 | 182942 | 1109275 | 96745 | 11,47 |
| 10 | 225383 | 1334658 | 53386 | 193530 | 1194514 | 96552 | 12,37 |
| 11 | 224932 | 1419445 | 56778 | 219410 | 1256814 | 96333 | 13,05 |
| 12 | 224421 | 1481234 | 59249 | 251739 | 1288745 | 96081 | 13,41 |
| 13 | 223834 | 1512579 | 60503 | 293539 | 1279544 | 95787 | 13,36 |
| 14 | 223150 | 1502694 | 60108 | 323664 | 1239138 | 95464 | 12,98 |
| 15 | 222396 | 1461534 | 58461 | 373621 | 1146374 | 95090 | 12,06 |
| 16 | 221526 | 1367900 | 54716 | 401865 | 1020751 | 94688 | 10,78 |
| 17 | 220590 | 1241341 | 49654 | 424087 | 866908 | 94264 | 9,20 |
| 18 | 219602 | 1086510 | 43460 | 474960 | 655010 | 93789 | 6,98 |
| 19 | 218495 | 873506 | 34940 | 543134 | 365312 | 93246 | 3,92 |
| 20 | 217230 | 582542 | 23372 | 605914 | 0 | 92640 | 0,00 |

**Příklad 3-4**

Předpokládejme nyní 20leté smíšené životní pojištění na 1000 korun pojistné částky, sjednané s každým členem skupiny $l_{30}$-ti mužů ve věku 30 let. Sledujme finanční toky této skupiny očekávané na základě úmrtnostních tabulek Českého statistického úřadu pro rok 2001 s roční úrokovou mírou 4% a jako vedlejší produkt získejme rezervu nettopojistného.

Řešení:

Nejdříve vypočítáme roční pojistné,

$$\pi = 1000\ .\ P_{30:\overline{20|}} = 1000\ .\ \frac{\sum_{k=0}^{n-1} {}_kp_x . q_{x+k} v^{k+1} + {}_np_x . v^n}{\sum_{k=0}^{n-1} {}_kp_x . v^k} = \frac{0{,}03246 + 0{,}4344}{13{,}93345} = 33{,}51.$$

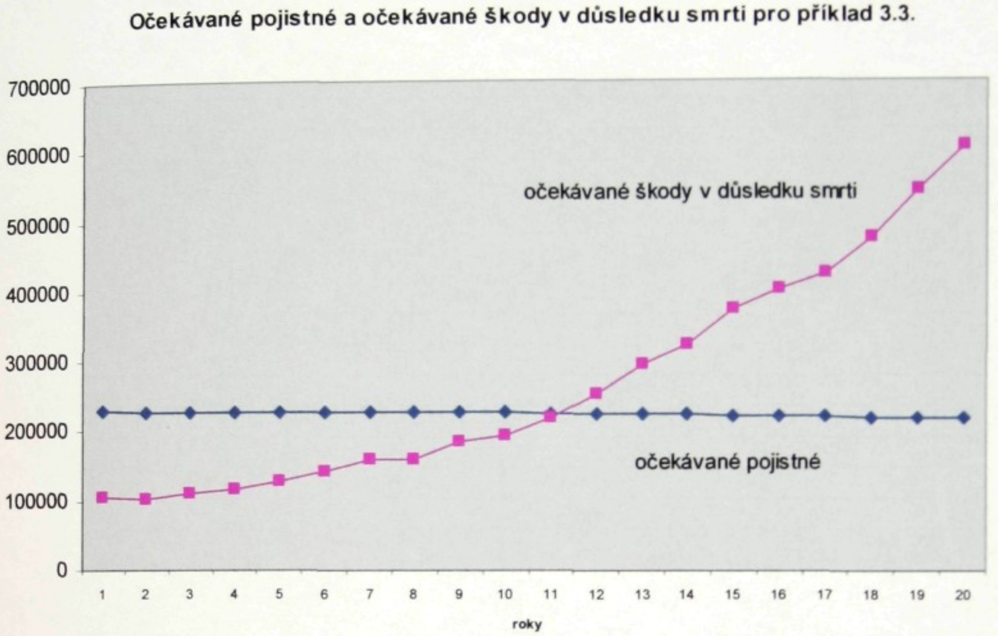
Dále se očekávaná akumulace fondu této skupiny (daná akumulací pojistných, připisováním úroků a vyplácením pojistných částek) vyvíjí následovně

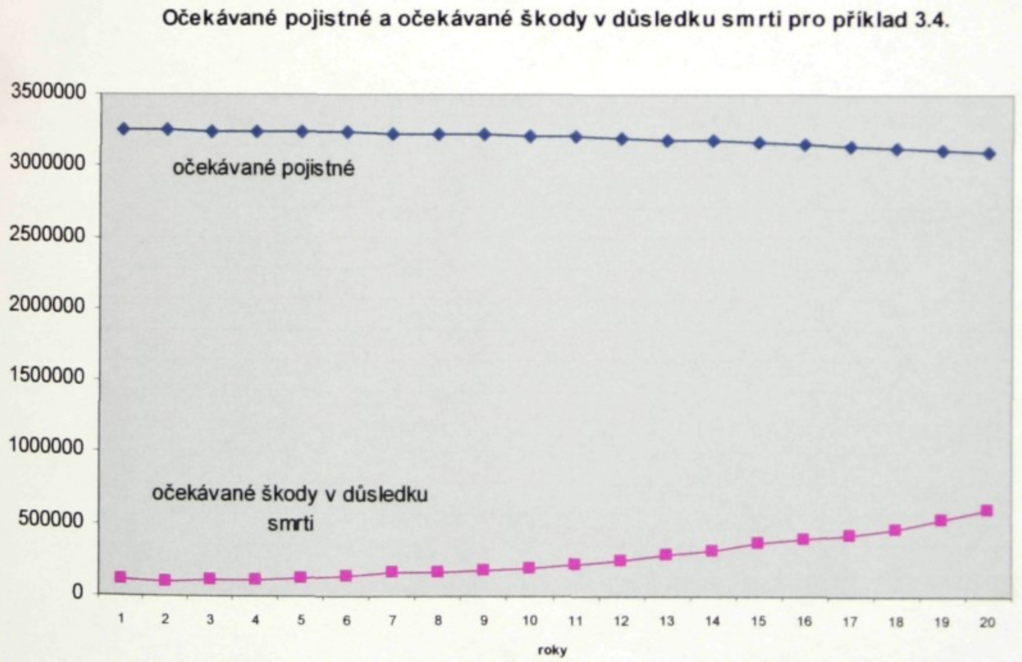
| (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) | (7) | (8) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| rok $h$ | očekávané pojistné na začátku roku $l_{50+h-1}\pi$ | očekávaný fond na začátku roku $(2)_h + (6)_{h-1}$ | očekávaný úrok $(0{,}04)(3)h$ | očekávané výplaty pojistných částek $1000.d_{50+h-1}$ | očekávaný fond na konci roku $(3)_h+(4)_h-(5)_h$ | očekávaný počet těch kteří přežili na konci roku $l_{50+h}$ | ${}_hV_{30:\overline{20|}}$ $(6)_h : (7)_h$ |
| 1 | 3262677 | 3262677 | 130507 | 105607 | 3287577 | 97846 | 33,60 |
| 2 | 3259159 | 6546736 | 261869 | 102662 | 6705944 | 97744 | 68,61 |
| 3 | 3255740 | 9961683 | 398467 | 111828 | 10248322 | 97632 | 104,97 |
| 4 | 3252015 | 13500337 | 540013 | 115203 | 13925147 | 97517 | 142,80 |
| 5 | 3248177 | 17173324 | 686933 | 127070 | 17733187 | 97389 | 182,09 |
| 6 | 3243945 | 20977132 | 839085 | 142711 | 21673506 | 97247 | 222,87 |
| 7 | 3239191 | 24912697 | 996508 | 158928 | 25750277 | 97088 | 265,23 |
| 8 | 3233897 | 28984175 | 1159367 | 159366 | 29984175 | 96928 | 309,34 |
| 9 | 3228589 | 33212764 | 1328511 | 182942 | 34358333 | 96745 | 355,14 |
| 10 | 3222496 | 37580828 | 1503233 | 193530 | 38890531 | 96552 | 402,79 |
| 11 | 3216049 | 42106580 | 1684263 | 219410 | 43571434 | 96333 | 452,30 |
| 12 | 3208741 | 46780175 | 1871207 | 251739 | 48399643 | 96081 | 503,74 |
| 13 | 3200356 | 51599999 | 2064000 | 293539 | 53370460 | 95787 | 557,18 |
| 14 | 3190578 | 56561039 | 2262442 | 323664 | 58499816 | 95464 | 612,80 |
| 15 | 3179797 | 61679613 | 2467185 | 373621 | 63773177 | 95090 | 670,66 |
| 16 | 3167352 | 66940529 | 2677621 | 401865 | 69216285 | 94688 | 730,99 |
| 17 | 3153967 | 72370252 | 2894810 | 424087 | 74840975 | 94264 | 793,95 |
| 18 | 3139841 | 77980816 | 3119233 | 474960 | 80625089 | 93789 | 859,64 |
| 19 | 3124020 | 83749109 | 3349964 | 543134 | 86555939 | 93246 | 928,25 |
| 20 | 3105929 | 89661868 | 3586475 | 605914 | 92642429 | 92640 | 1000,00 |

Sloupce (2) a (5) v předchozích příkladech znázorňují výše očekávaných pojistných a očekávaných škod v důsledku smrti. V příkladu 3-3 očekávané pojistné převyšuje očekávané škody až do 12. roku, ale potom jsou nižší. Přebytek pojistného v prvních letech je akumulován ve fondu, aby byl v pozdějších letech, kdy jsou pojistná plnění vyšší, čerpán. Na konci 20. roku se předpokládá že tento fond bude vyčerpán.

**Obrázek 3-1**

Očekávané pojistné a škody pro příklady 3-3 a 3-4



Pro případ smíšeného životního pojištění na 20 let v příkladě 3-4 je situace zcela odlišná. Jak je zde vidět, očekávané pojistné po celou dobu dalece převyšuje škody v důsledku rizika smrti. Z vytvořené peněžní zásoby po 20-ti letech je pojišťovna schopna poskytnout v den maturity pojistky 1000 Kč každému z jedinců, u kterých očekává, že se daného věku dožijí.

Z příkladu 3-3 a 3-4 je patrné, že dočasné pojištění pro případ smrti představuje nízké pojistné, nízkou akumulaci přebytků a tedy i nízkou rezervu pojistného. V porovnáním s pojistnou částkou je tato rezerva zanedbatelná (např. pro $n = 20$ dosahuje maximální hodnoty $1000 \cdot {}_{12}V_{30:\overline{20}|} = 13{,}41$ Kč, tj. méně než 1,5 % pojistné částky). Na druhou stranu smíšené pojištění znamená vysoké pojistné, vysokou akumulaci přebytků a tedy vysokou rezervu pojistného. V praxi většinou pojišťovny v prvním případě tvorbu rezervy pojistného úplně zanedbávají, jako by se jednalo o čistě rizikové pojištění s přirozeným pojistným, a rozlišují:

- ***rezervotvorná*** pojištění (pojištění s kapitálovou hodnotou)- u těchto pojištění se v praxi fakticky vytváří rezerva pojistného (např. smíšené pojištění, pojištění doloženého doživotního důchodu),
- ***nerezervotvorná*** pojištění – tato pojištění nevytvářejí rezervu pojistného vůbec nebo v zanedbatelné velikosti (např. dočasné pojištění pro případ smrti).

## 3.4 Rekurentní vzorec nettorezervy

V odstavci 3.3 jsme uvažovali pojištění x-letého jedince poskytující pojistnou částku v případě smrti $b_{j+1}$ na konci pojištěného roku $j+1$, kupované za roční nettopojistné $\pi_j$, $j = 0, 1, \ldots$, s $\pi_j$ splatném na začátku pojištěného roku $j+1$. Rezerva ${}_{h-1}V$ na konci roku $h-1$ je dána

$$ {}_{h-1}V = \sum_{j=0}^{\infty} b_{h+j} v^{j+1} {}_{j}p_{x+h-1} q_{x+h-1+j} - \sum_{j=0}^{\infty} \pi_{h+j-1} v^{j} {}_{j}p_{x+h-1}. \qquad (3.4.1) $$

Můžeme vyjmout první dva výrazy v sumacích a získáme

$$ {}_{h-1}V = b_h v\, q_{x+h-1} - \pi_{h-1} + v\, p_{x+h-1} \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} b_{h+j} v^j\, {}_{j-1}p_{x+h} q_{x+h+j-1} - \sum_{j=1}^{\infty} \pi_{h+j-1} v^{j-1}\, {}_{j-1}p_{x+h} \right\}. \quad (3.4.2) $$

Výraz v závorkách je roven ${}_hV$, z čehož plyne

$$ {}_{h-1}V = b_h v\, q_{x+h-1} - \pi_{h-1} + v\, p_{x+h-1}\, {}_hV, $$

nebo

$$ {}_{h-1}V + \pi_{h-1} = b_h v\, q_{x+h-1} + {}_hV\, v\, p_{x+h-1}. \quad (3.4.3) $$

Slovy řečeno, zdroje na začátku roku pojištění $h$ se rovnají aktuárské současné hodnotě potřebných finančních prostředků ke konci roku.

Vzorec (3.4.3) může být přetransformován tak, abychom oddělili pojistné $\pi_{j-1}$,

$$ \pi_{j-1} = b_h v\, q_{x+h-1} + \left( {}_hV\, v\, p_{x+h-1} - {}_{h-1}V \right). \quad (3.4.4) $$

První člen pravé strany rovnice (3.4.4) je nettopojistné jednoletého pojištění na pojištěnou částku $b_h$. Druhý člen $\left( {}_hV\, v\, p_{x+h-1} - {}_{h-1}V \right)$ reprezentuje částku, která navýší rezervu ${}_{h-1}V$ na začátku roku, za daného úroku a úmrtnosti, na částku ${}_hV$ na konci roku.

Odlišnou analýzu získáme, pokud předpokládáme, že rezerva ${}_hV$ je v takové výši aby pokryla pojistné plnění pro případ smrti $b_h$, a pouze částka nettorizika, $b_h$ - ${}_hV$, musí být pokryta jednoletým dočasným pojištěním. Pro takovou analýzu substituujeme $1-q_{x+h-1}$ za $p_{x+h-1}$ v (3.4.3) a násobíme $1+i$,

$$ {}_hV = \left( {}_{h-1}V + \pi_{h-1} \right)(1+i) - \left( b_h - {}_hV \right) q_{x+h-1}. \quad (3.4.5) $$

Vzhledem k (3.4.4), nyní máme

$$ \pi_{h-1} = \left( b_h - {}_hV \right) v q_{x+h-1} + v\, {}_hV - {}_{h-1}V. \quad (3.4.6) $$

První komponent na pravé straně rovnice je nettopojistné pokrývající v průměru riziko pojistného plnění jednoletého dočasného pojištění pro případ smrti, zohledňující velikost vytvořené rezervy použité při výplatě pojistného plnění. Druhý člen $\left( v\, {}_hV - {}_{h-1}V \right)$

reprezentuje částku, která navýší rezervu ${}_{h-1}V$ na začátku roku, za daného úroku, na částku ${}_{h}V$ na konci roku. Zde je ${}_{h}V$ použito, v případě smrti, k pokrytí pojistného plnění v případě smrti.

První analýza (3.4.4), nevyužívá rezervu k pokrytí pojistného plnění v případě smrti a rezerva se tedy akumuluje za dané úrokové míry a úmrtnosti, respektive pravděpodobnosti přežití. Oba komponenty pravé strany rovnice (3.4.4) obsahují riziko úmrtnosti, zatímco v (3.4.6) jej obsahuje pouze první komponent.

## 3.5 Vzorce nettorezervy při použití komutačních čísel

V předchozích částech jsme vyvinuli prospektivní vzorce pro rezervy za použití aktuárských současných hodnot budoucích pojistných plnění a nettopojistných. Retrospektivní vzorce byly odvozeny pomocí aktuárských akumulovaných hodnot minulých pojistných a akumulovaných nákladů minulých pojistných plnění. Přístup pomocí komutačních čísel znamená, že „abstraktní“ pravděpodobnosti úmrtí a dožití jsou nahrazeny „konkrétními“ počty zemřelých a dožívajících. Oblíbenost tohoto principu fiktivního souboru je dána zejména možností snadné kombinace dekrementních a finančních instrumentů formou komutačních čísel. Jejich hodnoty pojišťovny tabelují s využitím tabulkových procesorů (Excel apod.) a používají prakticky pro všechny výpočty prováděné v rámci životního pojištění.

Při systematické prezentaci komutačních čísel rozlišujeme:

- komutační čísla nultého řádu:

  $D_x = l_x v^x$ (diskontovaný počet dožívajících se věku x),

  $C_x = d_x v^{x+1}$ (diskontovaný počet zemřelých ve věku x)

- komutační čísla prvního řádu:

$$N_x = \sum_{j=0}^{\omega-x} D_{x+j}$$

$$M_x = \sum_{j=0}^{\omega-x} C_{x+j}$$

- komutační čísla druhého řádu:

$$S_x = \sum_{j=0}^{\omega-x} N_{x+j}$$

$$R_x = \sum_{j=0}^{\omega-x} M_{x+j}$$

Je tedy snadné přepsat vzorce rezerv pomocí komutačních čísel.

**tabulka 3-2**

Rezervy nettopojistného; věk při uzavření pojistné smlouvy $x$; čas $k$; jednotková částka

| produkt | | čitatel (jmenovatel je vždy $D_{x+k}$) | |
|---|---|---|---|
| | | prospektivní vzorec | retrospektivní vzorec |
| pojištění pro případ smrti | ${}_kV_x$ | $M_{x+k} - P_x\ N_{x+k}$ | $P_x(N_x - N_{x+k}) - (M_x - M_{x+k})$ |
| dočasné pojištění pro případ smrti | ${}_kV^1_{x:\overline{n}\vert}$ | $M_{x+k} - M_{x+n} - P^1_{x:\overline{n}\vert}\ (N_{x+k} - N_{x+n})$ | $P^1_{x:\overline{n}\vert}\ (N_x - N_{x+k}) - (M_x - M_{x+k})$ |
| smíšené pojištění | ${}_kV_{x:\overline{n}\vert}$ | $M_{x+k} - M_{x+n} + D_{x+n} - P_{x:\overline{n}\vert}\ (N_{x+k} - N_{x+n})$ | $P_{x:\overline{n}\vert}(N_x - N_{x+k}) - (M_x - M_{x+k})$ |
| dočasné pojištění pro případ dožití | ${}_kV_{x:\overset{1}{\overline{n}\vert}}$ | $D_{x+n} - P_{x:\overset{1}{\overline{n}\vert}}\ (N_{x+k} - N_{x+n})$ | $P_{x:\overset{1}{\overline{n}\vert}}(N_x - N_{x+k})$ |

**Příklad 3-5**

Vypočítejte průběh nettorezervy pro pojištění odloženého doživotního důchodu s ročním pojistným 40letého muže s odkladem 20 let na 1 000 Kč ročního důchodu (úmrtnost ČR 2001; pojistně-technická úroková míra 4%)

**tabulka 3-3**

Průběh nettorezervy odloženého doživotního důchodu s ročním pojistným 40letého muže s odkladem 20 let na 1 000 Kč ročního důchodu (úmrtnost ČR 2001; pojistně-technická úroková míra 4%)

| *t* | nettorezerva | *t* | nettorezerva | *t* | nettorezerva |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 369,19 | 21 | 11963,49 | 41 | 5476,63 |
| 2 | 754,28 | 22 | 11620,60 | 42 | 5209,31 |
| 3 | 1156,34 | 23 | 11275,42 | 43 | 4950,54 |
| 4 | 1576,27 | 24 | 10934,06 | 44 | 4700,57 |
| 5 | 2015,56 | 25 | 10588,11 | 45 | 4459,60 |
| 6 | 2474,99 | 26 | 10241,01 | 46 | 4227,80 |
| 7 | 2955,58 | 27 | 9894,63 | 47 | 4005,28 |
| 8 | 3459,58 | 28 | 9549,83 | 48 | 3792,11 |
| 9 | 3989,42 | 29 | 9212,38 | 49 | 3588,32 |
| 10 | 4546,90 | 30 | 8876,82 | 50 | 3393,88 |
| 11 | 5133,62 | 31 | 8542,16 | 51 | 3208,73 |
| 12 | 5751,18 | 32 | 8210,00 | 52 | 3032,74 |
| 13 | 6402,68 | 33 | 7879,71 | 53 | 2865,70 |
| 14 | 7094,13 | 34 | 7554,32 | 54 | 2707,32 |
| 15 | 7828,33 | 35 | 7237,75 | 55 | 2557,15 |
| 16 | 8611,10 | 36 | 6926,54 | 56 | 2414,49 |
| 17 | 9444,72 | 37 | 6622,61 | 57 | 2278,14 |
| 18 | 10334,21 | 38 | 6325,24 | 58 | 2145,92 |
| 19 | 11285,15 | 39 | 6034,14 | 59 | 2013,58 |
| 20 | 12303,84 | 40 | 5752,22 | 60 | 1872,10 |

Výpočty provedeme podle následujícího vzorce

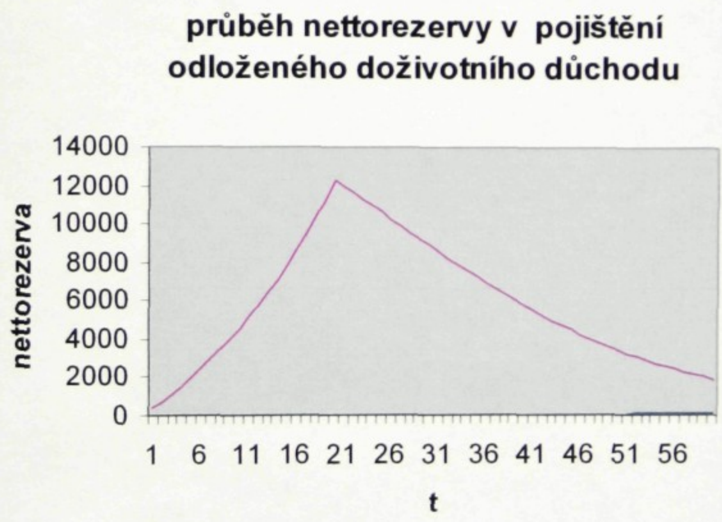
$$
{}_tV_x = \begin{cases} {}_{h-k|}\ddot{a}_{x+k} - P_{\overline{x,h|}}.\ddot{a}_{x+k:\overline{h-k|}} = \dfrac{N_{x+h}}{D_{x+k}}.\dfrac{N_x - N_{x+k}}{N_x - N_{x+h}} & \text{Pro } k < h \\[2ex] \ddot{a}_{x+k} = \dfrac{N_{x+k}}{D_{x+k}} & \text{Pro } k \geq h, \end{cases}
$$

Takže např. nettorezerva vytvořená do konce desátého roku uvažovaného pojištění je

$$
1000.{}_{10}V_{40} = 1000.\frac{N_{50}}{D_{60}}.\frac{N_{40} - N_{60}}{N_{40} - N_{50}} = 1000.\ \frac{96752{,}6}{13035{,}62}.\frac{369923 - 202576{,}1}{369923 - 96752{,}6} = 4546{,}9
$$

**Obrázek 3-2**

průběh nettorezervy odloženého doživotního důchodu s ročním pojistným 40letého muže s odkladem na 20 let na 1000 Kč ročního důchodu




Jak je z obrázku patrné, během odkladu pojištění se musí nashromáždit částka, ze které se pak během výplaty důchodu pouze čerpá.

Rekuretní vzorec nettorezervy můžeme pomocí komutačních čísel zapsat takto

$$\left({}_{t-1}V_{x;\overline{n}|} + P_{x;\overline{n}|}\right)D_{x+t-1} - \left(a_t \,.\, D_{x+t} + b_t \,.\, C_{x+t-1}\right) = {}_tV_{x;\overline{n}|} \,.\, D_{x+t} \qquad (3.5.1)$$

# 4 Ukládací a riziková část pojistného

V této kapitole si ukážeme, jak pojišťovna postupuje při pojistné události, respektive z jakých zdrojů kryje pojistné plnění.

Pojišťovna inkasuje od pojistníků pojistné ve formě brutto-pojistného, které po odečtení správních nákladů tvoří čisté (netto) pojistné. Část čistého pojistného (někdy i celé čisté pojistné) je určena k pokrytí rizika v daném pojistném období (roce); jde o tzv. rizikové pojistné, resp. rizikovou část pojistného. Zbývající část čistého pojistného tvoří tzv. ukládací část pojistného. Její význam je veliký zejména v pojištěních za běžné pojistné obsahujících složku na dožití a v pojištěních za jednorázové pojistné. Ukládací část čistého pojistného průběžně vytváří nettorezervu. Jestliže dojde např. ve smíšeném pojištění s běžným pojistným k úmrtí pojištěného před uplynutím pojistné doby, pak je rezerva pojistného jedním ze dvou zdrojů pro pojistné plnění. Pojišťovna tedy uhradí část pojistné částky z vytvořené rezervy pojistného k dané pojistné smlouvě. Zbývající druhou část pak uhradí z rizikového kapitálu. Ten je tvořen rizikovými částmi všech nettopojistných v daném pojistném kmeni a kryje rizikový kapitál v těch pojištěních z pojistného kmene, u nichž došlo v daném pojistném období k úmrtí. Riziková část pojistného pro dané období za daný pojistný kmen se tedy v tomto období celá spotřebuje (při platnosti použitých dekrementních předpokladů).

Rozklad pojistného na ukládací a rizikovou část má i svůj praktický význam při zajišťování, kde se zajišťuje na rizikové bázi. Ceduje se tedy jen příslušná část rizika úmrtí a jinak veškerá odpovědnost za správu pojistky včetně pojistných rezerv zůstává na prvopojistiteli. V případě smíšeného pojištění se tak v jednotlivých letech pojistky ceduje vždy jen příslušná část rizikového kapitálu. Rekurentní vzorec nettorezervy (3.5.1) lze podobnými úpravami jako v (3.4.4) až (3.4.6) upravit do tvaru

$$\begin{aligned} P_{x;\overline{n}|} &= {}_tV_{x;\overline{n}|} \cdot \frac{D_{x+t}}{D_{x+t-1}} - {}_{t-1}V_{x;\overline{n}|} + \frac{a_t \,.\, D_{x+t} + b_t \,.\, C_{x+t-1}}{D_{x+t-1}} = \\ &= {}_tV_{x;\overline{n}|} . v - {}_{t-1}V_{x;\overline{n}|} + \frac{a_t \,.\, D_{x+t} + \left(b_t - {}_tV_{x;\overline{n}|}\right) . \, C_{x+t-1}}{D_{x+t-1}} = \\ &= P^{ukl}_{x;\overline{n}|}(t) + P^{riz}_{x;\overline{n}|}(t) \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

(při poslední úpravě byl použit vztah $D_{x+t} = D_{x+t-1}.v - C_{x+t-1}$), kde

$$\begin{aligned} P^{ukl}_{x;\overline{n}|}(t) &= {}_tV_{x;\overline{n}|} . v - {}_{t-1}V_{x;\overline{n}|}, \\ P^{riz}_{x;\overline{n}|}(t) &= \frac{a_t \,.\, D_{x+t} + \left(b_t - {}_tV_{x;\overline{n}|}\right) . \, C_{x+t-1}}{D_{x+t-1}} \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

Přitom ukládací část pojistného reprezentuje částku, která navýší rezervu ${}_{t-1}V_{x;\overline{n}|}$ na začátku roku, za daného úroku, na částku ${}_tV_{x;\overline{n}|}$ na konci roku.

Riziková část pojistného je nettopojistné pokrývající v průměru riziko pojistného plnění jednoletého dočasného pojištění pro případ smrti, zohledňující velikost vytvořené rezervy použité při výplatě pojistného plnění.

**Příklad 4-1**

Vypočítejte ukládací a rizikovou část nettopojistného v jednotlivých letech smíšeného pojištění s ročním pojistným 30letého muže na 20 let na 1000 Kč pojistné částky (úmrtnost: ČR 2001; pojistně-technická úroková míra: 4%).

Řešení:

Např. pro t = 10 je podle příkladu 3.4

$P^{ukl}_{30;\overline{20}|}(10) = {}_{10}V_{30;\overline{20}|} . v - {}_9V_{30;\overline{20}|} = 402{,}79 \,.\, (1/1{,}04) - 355{,}14 = 32{,}16$ Kč

$P^{riz}_{30;\overline{20}|}(10) = P_{30;\overline{20}|} - P^{ukl}_{30;\overline{20}|}(10) = 33{,}31 - 32{,}16 = 1{,}15$ Kč

**tabulka 4-1** Ukládací a riziková část nettopojistného (viz příklad 4.1.1)

| t | $P_{30;\overline{20}\rvert}$ | $P^{ukl}_{30;\overline{20}\rvert}$ | $P^{riz}_{30;\overline{20}\rvert}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 33,31 | 32,31 | 1,00 |
| 2 | 33,31 | 32,37 | 0,94 |
| 3 | 33,31 | 32,32 | 0,98 |
| 4 | 33,31 | 32,34 | 0,97 |
| 5 | 33,31 | 32,28 | 1,02 |
| 6 | 33,31 | 32,21 | 1,09 |
| 7 | 33,31 | 32,15 | 1,15 |
| 8 | 33,31 | 32,22 | 1,09 |
| 9 | 33,31 | 32,14 | 1,17 |
| 10 | 33,31 | 32,16 | 1,15 |
| 11 | 33,31 | 32,11 | 1,20 |
| 12 | 33,31 | 32,06 | 1,25 |
| 13 | 33,31 | 32,01 | 1,30 |
| 14 | 33,31 | 32,05 | 1,26 |
| 15 | 33,31 | 32,07 | 1,24 |
| 16 | 33,31 | 32,22 | 1,09 |
| 17 | 33,31 | 32,42 | 0,89 |
| 18 | 33,31 | 32,63 | 0,68 |
| 19 | 33,31 | 32,91 | 0,40 |
| 20 | 33,31 | 33,31 | 0,00 |

# 5 Bruttorezerva

V předchozích kapitolách jsme počítali rezervy pojistného životních pojištění, přičemž jsme zohlednili pouze náklady na pojistná plnění. Životní pojišťovny však na svou činnost vynakládají další výdaje, které se nazývají správní náklady. Bruttorezerva je pak nettorezerva zohledňující správní náklady.

## *5.1 Klasický přístup ke správním nákladům v bruttorezervě*

Tento způsob využívají pojišťovny v rámci klasické německé školy (Německo, Rakousko, Švýcarsko, ale také většina životních pojišťoven na českém pojistném trhu). Pojišťovny začleňují správní náklady přímo do vzorců využívaných pro výpočet výsledného bruttopojistného. Správní náklady se zde klasifikují následujícím způsobem

- Počáteční jednorázové náklady $\alpha$: představují náklady spojené s uzavřením pojistné smlouvy, jako jsou provize pojistným agentům, náklady na vstupní lékařskou prohlídku, na vystavení pojistné smlouvy apod. Náklady $\alpha$ se obvykle započítávají jako procento z pojistné částky, nebo jako procenta z ročního důchodu.

- Běžné správní náklady $\beta$: Jedná se o každoroční náklady během trvání pojištění spojené s jeho udržováním, jako je administrativa, nájem budov, provoz výpočetní techniky, korespondence aj. Náklady $\beta$ se obvykle započítávají jako procenta z pojistné částky nebo jako procenta z ročního důchodu. V případě, že doba placení pojistného je kratší než pojistná doba, se často uvažují zvlášť běžné správní náklady $\beta_1$ během celého trvání pojištění a vedle nich běžné správní náklady $\beta_2$ během placení pojistného ($\beta = \beta_1 + \beta_2$).

- Inkasní náklady $\gamma$: Jedná se o náklady spojené s inkasem pojistného. Započítávají se jako procenta z ročního bruttopojistného.

- Náklady při výplatě důchodu $\delta$: Tyto náklady vznikají jen u důchodového pojištění jako náklady spojené s výplatami důchodu. Většinou se započítávají jako procenta z ročního důchodu.

Na ukázku uveďme následující prospektivní vzorce pro některé vybrané druhy pojištění (vždy na jednotkovou pojistnou částku nebo jednotkový důchod):

*- smíšené pojištění*

- při běžném pojistném:

$$ {}_tV^{brutto}_{x;\overline{n}|} = \left(A_{x-t;\overline{n-t}|} + \beta.\ddot{a}_{x+t;\overline{n-t}|} + \gamma.B_{x;\overline{n}|}.\ddot{a}_{x+t;\overline{n-t}|}\right) - B_{x;\overline{n}|}.\ddot{a}_{x+t;\overline{n-t}|}, $$

kde v závorce jsou uvedeny výdaje od počátku (t+1)-ního roku včetně správních nákladů a od nich se odečítají příjmy od počátku (t+1)-ního roku na základě bruttopojistného; jestliže nyní použijeme následující vyjádření ročního bruttopojistného ve smíšeném pojištění

$$ B_{x;\overline{n}|} = \frac{A_{x;\overline{n}|} + \alpha + \beta.\ddot{a}_{x;\overline{n}|}}{(1-\gamma).\ddot{a}_{x;\overline{n}|}} = \frac{1}{1-\gamma}\left({}_nP_x + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x;\overline{n}|}} + \beta\right) = {}_nP_x + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x;\overline{n}|}} + \beta + \gamma.B_{x;\overline{n}|}, $$

pak dostaneme finální vzorec

$$ {}_tV^{brutto}_{x;\overline{n}|} = \left(A_{x-t;\overline{n-t}|} + \beta.\ddot{a}_{x+t;\overline{n-t}|} + \gamma.B_{x;\overline{n}|}.\ddot{a}_{x+t;\overline{n-t}|}\right) - \left(P_{x;\overline{n}|} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x;\overline{n}|}} + \beta + \gamma.B_{x;\overline{n}|}\right).\ddot{a}_{x+t;\overline{n-t}|} = $$

$$ = A_{x-t;\overline{n-t}|} - P_{x;\overline{n}|}.\ddot{a}_{x+t;\overline{n-t}|} - \alpha \cdot \frac{\ddot{a}_{x+t;\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{x;\overline{n}|}} = $$

$$ = {}_tV_{x;\overline{n}|} - \alpha \cdot \frac{\ddot{a}_{x+t;\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{x;\overline{n}|}} \quad ; \qquad (5.1.1) $$

- při jednorázovém pojistném:

$$ {}_tV^{brutto}_{x;\overline{n}|} = A_{x-t;\overline{n-t}|} + \beta_1 \cdot \ddot{a}_{x+t;\overline{n-t}|} = {}_tV_{x;\overline{n}|} + \beta_1 \cdot \ddot{a}_{x+t;\overline{n-t}|}; \qquad (5.1.2) $$

*- pojištění pro případ smrti:*

- při běžném pojistném

$$ {}_tV^{brutto}_{x} = A_{x+t} - P_x.\ddot{a}_{x+t} - \alpha \cdot \frac{\ddot{a}_{x+t}}{\ddot{a}_x} = {}_tV_x - \alpha \cdot \frac{\ddot{a}_{x+t}}{\ddot{a}_x}; \qquad (5.1.3) $$

- při jednorázovém pojistném

$$ {}_tV^{brutto}_{x} = A_{x+t} + \beta_1 \cdot \ddot{a}_{x+t} = {}_tV_x + \beta_1 \cdot \ddot{a}_{x+t}; \qquad (5.1.4) $$

- *pojištění odloženého doživotního důchodu:*

  - při běžném pojistném:

$$
{}_tV_x^{brutto} = \begin{cases} (1+\delta)\cdot\left({}_{k-t|}\ddot{a}_{x+t} - P_{\overline{xk|}}.\ddot{a}_{x+t;\overline{k-t|}}\right) - \alpha\cdot\dfrac{\ddot{a}_{x+t;\overline{k-t|}}}{\ddot{a}_{x;\overline{k|}}} = \\ = (1+\delta)\,{}_tV_x - \alpha\cdot\dfrac{\ddot{a}_{x+t;\overline{k-t|}}}{\ddot{a}_{x;\overline{k|}}} & \text{pro } t<k, \\ (1+\delta)\cdot\ddot{a}_{x+t} = (1+\delta)\,{}_tV_x & \text{pro } t\geq k; \end{cases} \qquad (5.1.5)
$$

  - při jednorázovém pojistném:

$$
{}_tV_x^{brutto} = \begin{cases} (1+\delta)\,{}_{k-t|}\ddot{a}_{x+t} + \beta_1.\ddot{a}_{x+t;\overline{k-t|}} = \\ = (1+\delta)\,{}_tV_x + \beta_1.\ddot{a}_{x+t;\overline{k-t|}} & \text{pro } t<k, \\ (1+\delta)\cdot\ddot{a}_{x+t} = (1+\delta)\,{}_tV_x & \text{pro } t\geq k; \end{cases} \qquad (5.1.6)
$$

Z předchozích příkladů lze vyvodit pravidla pro získání bruttorezervy z nettorezervy. V případě běžného pojistného se používá tzv. zillmerování rezerv. To spočívá v tom, že o pohledávku za pojistníky, kterou v tomto případě představují nezaplacené pořizovací náklady na uzavření pojistných smluv, se sníží technická rezerva. Odečte se tedy člen

$$
\alpha\cdot\frac{\ddot{a}_{x+t}}{\ddot{a}_x} \quad nebo \quad \alpha\cdot\frac{\ddot{a}_{x+t;\overline{n-t|}}}{\ddot{a}_{x;\overline{n|}}}. \qquad (5.1.7)
$$

Tento způsob pochází z r. 1863, kdy jej zavedl německý aktuár Zillmer. Splácení pořizovacích nákladů je rozloženo do jednotlivých splátek tohoto pojistného. Pojišťovna je tak vlastně věřitelem svých pojistníků ve výši části uvedených nákladů, které musí být splaceny v budoucích splátkách běžného pojistného. Zillmerovaná rezerva vychází ze záporné počáteční hodnoty, kterou si někdy udržuje i během prvních let pojištění. Podle naší legislativy se záporné hodnoty rezervy pojistného nahrazují nulovými hodnotami.

Při jednorázovém pojistném se přičte člen

$$\beta_1 \cdot \ddot{a}_{x+t} \quad nebo \quad \beta_1 \cdot \ddot{a}_{x+t;\overline{n-t}|},$$

který bývá označován jako rezerva běžných správních nákladů. Ta je učena k pokrytí budoucích běžných správních nákladů a vytváří se též u pojištění s dobou placení pojistného kratší než je pojistná doba (např. pojištění, u něhož byla provedena redukce pojistné částky, spojená s upuštěním od dalšího placení pojistného).

**Příklad 5-1** Porovnejte vývoj nettorezervy a bruttorezervy v jednotlivých letech smíšeného pojištění s ročním pojistným 30letého muže na 20 let na 1000 Kč pojistné částky (úmrtnost: ČR 2001; pojistně-technická úroková míra: 4%; $\alpha = 0,05$).

Řešení: výpočty se provádějí podle pravidla (5.1.7). Např. pro $t = 10$ při běžném pojistném

$$1000 \cdot {}_{10}V^{brutto}_{30;\overline{20}|} = 1000 \cdot \left( {}_{10}V_{30} - \alpha \cdot \frac{\ddot{a}_{40;\overline{10}|}}{\ddot{a}_{30;\overline{20}|}} \right) = 360{,}55 \text{ Kč}$$

zápornou hodnotu bruttorezervy v prvním roce je nutné nahradit nulou.

**tabulka 5-1**

Průběh nettorezervy a bruttorezervy smíšeného pojištění 30letého muže na 20 let na 1000 Kč pojistné částky (viz příklad 5.1)

| $t$ | ${}_tV_{30;\overline{20}\vert}$ | $\alpha \cdot \dfrac{\ddot{a}_{x+t;\overline{n-t}\vert}}{\ddot{a}_{x;\overline{n}\vert}}$ | ${}_tV^{brutto}_{30;\overline{20}\vert}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 32,25 | 48,32 | -16,07 |
| 2 | 65,83 | 46,57 | 19,26 |
| 3 | 100,80 | 44,75 | 56,04 |
| 4 | 137,21 | 42,86 | 94,35 |
| 5 | 175,14 | 40,90 | 134,25 |
| 6 | 214,68 | 38,86 | 175,82 |
| 7 | 255,90 | 36,74 | 219,16 |
| 8 | 298,85 | 34,53 | 264,31 |
| 9 | 343,67 | 32,24 | 311,42 |
| 10 | 390,41 | 29,86 | 360,55 |
| 11 | 439,24 | 27,39 | 411,86 |
| 12 | 490,31 | 24,81 | 465,50 |
| 13 | 543,80 | 22,14 | 521,66 |
| 14 | 599,80 | 19,36 | 580,44 |
| 15 | 658,59 | 16,47 | 642,12 |
| 16 | 720,19 | 13,45 | 706,74 |
| 17 | 784,73 | 10,30 | 774,43 |
| 18 | 852,64 | 7,02 | 845,62 |
| 19 | 924,31 | 3,59 | 920,72 |
| 20 | 1000,00 | 0,00 | 1000,00 |

# Závěr

Skladba technických rezerv v životní pojišťovně je v České Republice, stejně jako ve většině vyspělých ekonomik, dána zákonem. Jejich výše je určována matematicko-statistickými metodami a metodami finanční a pojistné matematiky.

Bezesporu nejdůležitější rezervou je rezerva pojistného životních pojištění. Její tvorba je nutná z důvodu měnícího se rizika při placení konstantního pojistného v dlouhých časových intervalech. Při její kalkulaci se vychází z principu ekvivalence a z definice rezervy jako očekávané budoucí ztráty, kdy se metodami pojistné a finanční matematiky zohlední dva rozhodující faktory – technická úroková míra a úmrtnostní tabulky. Přitom pojišťovna při kalkulaci rezervy pojistného životních pojištění využívá stejnou technickou úrokovou míru a úmrtnostní tabulky, které použila při stanovení výše pojistného.

Ve třetí kapitole jsou uvedeny dva základní přístupy k výpočtu rezervy pojistného životních pojištění. Spojitý přístup vychází ze spojitého úročení a spojitého modelování úmrtnosti a využívá se v případě, že se pojistné plnění v případě smrti vyplácí „okamžitě“ po úmrtí a nikoli až na konci pojistného roku, v němž došlo k úmrtí, jak je tomu v případě diskrétního přístupu. Různé druhy vzorců pro rezervy, jako je retrospektivní vzorec vycházející z konceptu akumulovaných nákladů minulých pojistných plnění, tuto teorii dále rozvádějí. Rekurentní vzorce pro nespojité rezervy poskytují základy pro pochopení problematiky dlouhodobého pojištění a důchodu.

Tato práce je koncipována k přiblížení problematiky tvorby technických rezerv každému, kdo se s tímto pojmem setkal a má zájem se o něm dozvědět něco bližšího. Pro odvození vzorců jsou však využity obecně platné metody a postupy, a vzorce odvozené ve třetí části mohou být využity i při samotném procesu kalkulace rezerv pojistného v každé životní pojišťovně. Spojitý a diskrétní způsob kalkulace rezerv pojistného jsou dvě metody, které jsou základem pro zbylé dva přístupy ke kalkulaci rezerv pojistného. Jedná se o diskontované spojité rezervy (ekvivalentní s případem rozdělitelného pojistného) a polospojité rezervy. Jejich odvozením by tedy bylo možné získat kompletní návod pro výpočet rezervy pojistného životních pojištění.

## *Seznam literatury*

Bowers, N. L., JR., Gerber, H. U., Hickman, J. C., Jones, D. A. and Nesbitt, C. J.: Actuarial mathematics, Society of actuaries, Itasca 1986

Cipra, T.: Pojistná matematika teorie a praxe, Ekopress, Praha 1999

Huleš, J. a Hornigová, J.: Účetnictví pojišťoven, Linde, Praha 1997

Karfíková, M., Přikryl, V. a Čechová, J.: Základy pojišťovacího práva, Orac, Praha 2001

Kovář, B.: Směrnice životního pojištění EHS, Pojistné rozpravy č. 7/1999, str. 40-45, ČAP, Praha 1999

Sharp, K. P.: Reserves for policies with nonannual premiums, North America Actuarial Journal, Volume 2, Number 3, str. 118-127, 1998

Vostatek, J.: Sociální a soukromé pojištění, Codex Bohemia, Praha 1996

www.cap.cz

www.czso.cz

www.wuestenrot.cz

# Seznam příloh

Úmrtnostní tabulky pro Českou republiku v roce 2001. Zdroj: Český statistický úřad (2 strany)

Rozvaha pojišťovny Wüstenrot k 31. 12. 2001. Zdroj: Výroční zpráva pojišťovny Wüstenrot za rok 2001 (1 strana)

**2001** **Česká republika**

| muži | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| věk | qx | px | lx | dx | Lx | Tx | ex |
| 0 | 0,004537 | 0,995463 | 100000 | 454 | 99583 | 7214500 | 72,14 |
| 1 | 0,000584 | 0,999416 | 99546 | 58 | 99517 | 7114917 | 71,47 |
| 2 | 0,000173 | 0,999827 | 99488 | 17 | 99479 | 7015400 | 70,51 |
| 3 | 0,000087 | 0,999913 | 99471 | 9 | 99467 | 6915921 | 69,53 |
| 4 | 0,000146 | 0,999854 | 99462 | 14 | 99455 | 6816454 | 68,53 |
| 5 | 0,000203 | 0,999797 | 99448 | 20 | 99438 | 6716999 | 67,54 |
| 6 | 0,000207 | 0,999793 | 99428 | 21 | 99417 | 6617561 | 66,56 |
| 7 | 0,000146 | 0,999854 | 99407 | 15 | 99400 | 6518144 | 65,57 |
| 8 | 0,000164 | 0,999836 | 99392 | 16 | 99384 | 6418744 | 64,58 |
| 9 | 0,000147 | 0,999853 | 99376 | 15 | 99369 | 6319360 | 63,59 |
| 10 | 0,000163 | 0,999837 | 99362 | 16 | 99353 | 6219991 | 62,60 |
| 11 | 0,000175 | 0,999825 | 99345 | 17 | 99337 | 6120638 | 61,61 |
| 12 | 0,000169 | 0,999831 | 99328 | 17 | 99320 | 6021301 | 60,62 |
| 13 | 0,000154 | 0,999846 | 99311 | 15 | 99304 | 5921982 | 59,63 |
| 14 | 0,000224 | 0,999776 | 99296 | 22 | 99285 | 5822678 | 58,64 |
| 15 | 0,000311 | 0,999689 | 99274 | 31 | 99258 | 5723393 | 57,65 |
| 16 | 0,000500 | 0,999500 | 99243 | 50 | 99218 | 5624135 | 56,67 |
| 17 | 0,000649 | 0,999351 | 99193 | 64 | 99161 | 5524917 | 55,70 |
| 18 | 0,000851 | 0,999149 | 99129 | 84 | 99087 | 5425756 | 54,73 |
| 19 | 0,000963 | 0,999037 | 99044 | 95 | 98997 | 5326669 | 53,78 |
| 20 | 0,001019 | 0,998981 | 98949 | 101 | 98899 | 5227672 | 52,83 |
| 21 | 0,001057 | 0,998943 | 98848 | 104 | 98796 | 5128774 | 51,89 |
| 22 | 0,001109 | 0,998891 | 98744 | 109 | 98689 | 5029978 | 50,94 |
| 23 | 0,001055 | 0,998945 | 98634 | 104 | 98582 | 4931288 | 50,00 |
| 24 | 0,001043 | 0,998957 | 98530 | 103 | 98479 | 4832706 | 49,05 |
| 25 | 0,000963 | 0,999037 | 98428 | 95 | 98380 | 4734227 | 48,10 |
| 26 | 0,000933 | 0,999067 | 98333 | 92 | 98287 | 4635847 | 47,14 |
| 27 | 0,000953 | 0,999047 | 98241 | 94 | 98194 | 4537560 | 46,19 |
| 28 | 0,000969 | 0,999031 | 98147 | 95 | 98100 | 4439366 | 45,23 |
| 29 | 0,001024 | 0,998976 | 98052 | 100 | 98002 | 4341266 | 44,28 |
| 30 | 0,001078 | 0,998922 | 97952 | 106 | 97899 | 4243264 | 43,32 |
| 31 | 0,001049 | 0,998951 | 97846 | 103 | 97795 | 4145365 | 42,37 |
| 32 | 0,001144 | 0,998856 | 97744 | 112 | 97688 | 4047570 | 41,41 |
| 33 | 0,001180 | 0,998820 | 97632 | 115 | 97574 | 3949883 | 40,46 |
| 34 | 0,001303 | 0,998697 | 97517 | 127 | 97453 | 3852309 | 39,50 |
| 35 | 0,001465 | 0,998535 | 97389 | 143 | 97318 | 3754856 | 38,56 |
| 36 | 0,001634 | 0,998366 | 97247 | 159 | 97167 | 3657538 | 37,61 |
| 37 | 0,001641 | 0,998359 | 97088 | 159 | 97008 | 3560370 | 36,67 |
| 38 | 0,001887 | 0,998113 | 96928 | 183 | 96837 | 3463362 | 35,73 |
| 39 | 0,002000 | 0,998000 | 96745 | 194 | 96649 | 3366525 | 34,80 |
| 40 | 0,002272 | 0,997728 | 96552 | 219 | 96442 | 3269877 | 33,87 |
| 41 | 0,002613 | 0,997387 | 96333 | 252 | 96207 | 3173434 | 32,94 |
| 42 | 0,003055 | 0,996945 | 96081 | 294 | 95934 | 3077228 | 32,03 |
| 43 | 0,003379 | 0,996621 | 95787 | 324 | 95625 | 2981294 | 31,12 |
| 44 | 0,003914 | 0,996086 | 95464 | 374 | 95277 | 2885668 | 30,23 |
| 45 | 0,004226 | 0,995774 | 95090 | 402 | 94889 | 2790391 | 29,34 |
| 46 | 0,004479 | 0,995521 | 94688 | 424 | 94476 | 2695502 | 28,47 |
| 47 | 0,005039 | 0,994961 | 94264 | 475 | 94027 | 2601026 | 27,59 |
| 48 | 0,005791 | 0,994209 | 93789 | 543 | 93518 | 2507000 | 26,73 |
| 49 | 0,006498 | 0,993502 | 93246 | 606 | 92943 | 2413482 | 25,88 |
| 50 | 0,007110 | 0,992890 | 92640 | 659 | 92311 | 2320539 | 25,05 |
| 51 | 0,007626 | 0,992374 | 91981 | 701 | 91631 | 2228228 | 24,22 |
| 52 | 0,008295 | 0,991705 | 91280 | 757 | 90901 | 2136598 | 23,41 |
| 53 | 0,009442 | 0,990558 | 90523 | 855 | 90095 | 2045696 | 22,60 |
| 54 | 0,010486 | 0,989514 | 89668 | 940 | 89198 | 1955601 | 21,81 |
| 55 | 0,011762 | 0,988238 | 88728 | 1044 | 88206 | 1866403 | 21,04 |
| 56 | 0,012793 | 0,987207 | 87684 | 1122 | 87123 | 1778197 | 20,28 |
| 57 | 0,013871 | 0,986129 | 86562 | 1201 | 85962 | 1691074 | 19,54 |
| 58 | 0,014996 | 0,985004 | 85362 | 1280 | 84722 | 1605112 | 18,80 |
| 59 | 0,016168 | 0,983832 | 84082 | 1359 | 83402 | 1520390 | 18,08 |
| 60 | 0,017344 | 0,982656 | 82722 | 1435 | 82005 | 1436988 | 17,37 |

**2001** **Česká republika**

| muži | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| věk | qx | px | lx | dx | Lx | Tx | ex |
| 61 | 0,018809 | 0,981191 | 81288 | 1529 | 80523 | 1354983 | 16,67 |
| 62 | 0,020398 | 0,979602 | 79759 | 1627 | 78945 | 1274460 | 15,98 |
| 63 | 0,022646 | 0,977354 | 78132 | 1769 | 77247 | 1195515 | 15,30 |
| 64 | 0,024243 | 0,975757 | 76362 | 1851 | 75437 | 1118268 | 14,64 |
| 65 | 0,026303 | 0,973697 | 74511 | 1960 | 73531 | 1042831 | 14,00 |
| 66 | 0,028701 | 0,971299 | 72551 | 2082 | 71510 | 969300 | 13,36 |
| 67 | 0,031353 | 0,968647 | 70469 | 2209 | 69364 | 897791 | 12,74 |
| 68 | 0,034796 | 0,965204 | 68259 | 2375 | 67072 | 828426 | 12,14 |
| 69 | 0,037845 | 0,962155 | 65884 | 2493 | 64638 | 761355 | 11,56 |
| 70 | 0,041004 | 0,958996 | 63391 | 2599 | 62091 | 696717 | 10,99 |
| 71 | 0,044598 | 0,955402 | 60792 | 2711 | 59436 | 634626 | 10,44 |
| 72 | 0,048392 | 0,951608 | 58080 | 2811 | 56675 | 575190 | 9,90 |
| 73 | 0,052873 | 0,947127 | 55270 | 2922 | 53809 | 518515 | 9,38 |
| 74 | 0,058203 | 0,941797 | 52347 | 3047 | 50824 | 464706 | 8,88 |
| 75 | 0,063420 | 0,936580 | 49301 | 3127 | 47737 | 413882 | 8,40 |
| 76 | 0,069309 | 0,930691 | 46174 | 3200 | 44574 | 366145 | 7,93 |
| 77 | 0,075527 | 0,924473 | 42974 | 3246 | 41351 | 321571 | 7,48 |
| 78 | 0,082180 | 0,917820 | 39728 | 3265 | 38096 | 280220 | 7,05 |
| 79 | 0,089830 | 0,910170 | 36463 | 3275 | 34825 | 242125 | 6,64 |
| 80 | 0,097564 | 0,902436 | 33188 | 3238 | 31569 | 207299 | 6,25 |
| 81 | 0,106273 | 0,893727 | 29950 | 3183 | 28358 | 175730 | 5,87 |
| 82 | 0,115716 | 0,884284 | 26767 | 3097 | 25218 | 147372 | 5,51 |
| 83 | 0,125944 | 0,874056 | 23670 | 2981 | 22179 | 122154 | 5,16 |
| 84 | 0,137010 | 0,862990 | 20689 | 2835 | 19271 | 99975 | 4,83 |
| 85 | 0,148970 | 0,851030 | 17854 | 2660 | 16524 | 80703 | 4,52 |
| 86 | 0,161878 | 0,838122 | 15194 | 2460 | 13964 | 64179 | 4,22 |
| 87 | 0,175791 | 0,824209 | 12735 | 2239 | 11615 | 50215 | 3,94 |
| 88 | 0,190765 | 0,809235 | 10496 | 2002 | 9495 | 38599 | 3,68 |
| 89 | 0,206852 | 0,793148 | 8494 | 1757 | 7615 | 29105 | 3,43 |
| 90 | 0,224106 | 0,775894 | 6737 | 1510 | 5982 | 21489 | 3,19 |
| 91 | 0,242572 | 0,757428 | 5227 | 1268 | 4593 | 15507 | 2,97 |
| 92 | 0,262292 | 0,737708 | 3959 | 1038 | 3440 | 10914 | 2,76 |
| 93 | 0,283303 | 0,716697 | 2921 | 827 | 2507 | 7474 | 2,56 |
| 94 | 0,305628 | 0,694372 | 2093 | 640 | 1773 | 4967 | 2,37 |
| 95 | 0,329283 | 0,670717 | 1453 | 479 | 1214 | 3194 | 2,20 |
| 96 | 0,354267 | 0,645733 | 975 | 345 | 802 | 1980 | 2,03 |
| 97 | 0,380564 | 0,619436 | 630 | 240 | 510 | 1178 | 1,87 |
| 98 | 0,408138 | 0,591862 | 390 | 159 | 310 | 668 | 1,71 |
| 99 | 0,436932 | 0,563068 | 231 | 101 | 180 | 358 | 1,55 |
| 100 | 0,466864 | 0,533136 | 130 | 61 | 100 | 177 | 1,36 |
| 101 | 0,497824 | 0,502176 | 69 | 34 | 52 | 78 | 1,12 |
| 102 | 0,529673 | 0,470327 | 35 | 18 | 26 | 26 | 0,74 |
| 103 | 0,562243 | 0,437757 | 16 | 16 | 0 | 0 | 0,00 |

## Rozvaha k 31.12. (v tis. Kč)

| Aktiva | 2000 Čistá výše | 2001 Hrubá výše | 2001 Úprava | 2001 Čistá výše |
|---|---|---|---|---|
| Nehmotný majetek | 2 395 | 4 517 | 3 207 | 1 310 |
| Finanční umístění (investice) | 101 510 | 187 427 | | 187 427 |
| Ostatní finanční umístění | 101 510 | 187 427 | | 187 427 |
| Cenné papíry s pevným výnosem | 61 510 | 123 927 | | 123 927 |
| Depozita u bank | 40 000 | 63 500 | | 63 500 |
| Pohledávky | 2 259 | 5 645 | 401 | 5 244 |
| *Pohledávky z přímého pojištění a zajištění* | 2 246 | 5 343 | 401 | 4 942 |
| Pohledávky za pojistníky | 2 246 | 4 943 | 401 | 4 542 |
| Pohledávky při operacích zajištění | | 400 | | 400 |
| Ostatní pohledávky | 13 | 302 | | 302 |
| Ostatní aktiva | 11 094 | 13 102 | 1 143 | 11 959 |
| Hmotný movitý majetek | 865 | 2 357 | 1 143 | 1 214 |
| Provozní movitý majetek | 865 | 2 357 | 1 143 | 1 214 |
| Pořízení majetku | 125 | 370 | | 370 |
| Pokladní hodnoty a ostatní finanční majetek | 10 104 | 10 375 | | 10 375 |
| Běžné účty | 10 005 | 10 205 | | 10 205 |
| Pokladna a jiné pokladní hodnoty | 99 | 170 | | 170 |
| Přechodné účty aktiv | 3 602 | 10 725 | | 10 725 |
| Pořizovací náklady na pojistné smlouvy | 428 | 5 177 | | 5 177 |
| Ostatní přechodné účty aktiv | 3 174 | 5 548 | | 5 548 |
| Neuhrazená ztráta minulých let | | 6 421 | | 6 421 |
| Ztráta běžného účetního období | 11 333 | 24 027 | | 24 027 |
| AKTIVA CELKEM | 132 193 | 251 864 | 4 751 | 247 113 |
| **Pasiva** | | | | |
| Základní kapitál a fondy | 74 912 | | | 110 000 |
| Základní kapitál | 60 000 | | | 70 000 |
| Emisní ažio | 14 912 | | | 40 000 |
| Technické rezervy | 46 540 | 121 724 | | 121 724 |
| Rezerva na nezasloužené pojistné | 1 095 | 4 404 | | 4 404 |
| Rezerva pojistného životních pojištění | 42 301 | 110 452 | | 110 452 |
| Rezerva na pojistná plnění | 1 663 | 4 239 | | 4 239 |
| Rezerva na prémie a slevy | 1 481 | 2 629 | | 2 629 |
| Rezervy na ostatní rizika a ztráty | 448 | | | 405 |
| Jiné rezervy | 448 | | | 405 |
| Závazky | 10 058 | | | 13 847 |
| Závazky z přímého pojištění a zajištění | 8 836 | | | 12 094 |
| Závazky vůči pojištěným | 8 104 | | | 8 234 |
| Závazky vůči zprostředkovatelům | 220 | | | 1 653 |
| Závazky při operacích zajištění | 512 | | | 2 207 |
| Závazky daňové | 189 | | | |
| *Závazky soc. zabezpečení a zdrav. pojištění* | 359 | | | 476 |
| Ostatní závazky | 674 | | | 1 277 |
| Přechodné účty pasiv | 235 | | | 1 137 |
| PASIVA CELKEM | 132 193 | | | 247 113 |