TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI
Fakulta přírodovědně-humanitní
a pedagogická

WAVELETOVÉ METODY PRO PŘIBLIŽNÉ ŘEŠENÍ PARCIÁLNÍCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC

Diplomová práce

Studijní program: N1103 – Aplikovaná matematika
Studijní obor: 1103T035 – Matematické modely a jejich aplikace

Autor práce: **Bc. Daniela Cvejnová**
Vedoucí práce: RNDr. Václav Finěk, Ph.D.

Liberec 2015

TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI
Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická
Akademický rok: **2013/2014**

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení:	**Bc. Daniela Cvejnová**
Osobní číslo:	**P13000627**
Studijní program:	**N1103 Aplikovaná matematika**
Studijní obor:	**Matematické modely a jejich aplikace**
Název tématu:	**Waveletové metody pro přibližné řešení parciálních diferenciálních rovnic**
Zadávající katedra:	**Katedra matematiky a didaktiky matematiky**

Z á s a d y p r o v y p r a c o v á n í :

Waveletové metody jsou velice efektivním nástrojem pro hledání přibližného řešení parciálních diferenciálních rovnic na hyperkrychli. Studentka se seznámí s touto zajímavou problematikou a bude se věnovat praktické implementaci waveletových bází k přibližnému řešení parciálních diferenciálních rovnic na jednoduchých oblastech zejména ve dvou dimenzích. Implementuje několik waveletových bází zkonstruovaných v posledních letech, otestuje je při numerickém řešení diferenciálních rovnic a porovná jejich vlastnosti.

Rozsah grafických prací:

Rozsah pracovní zprávy:

Forma zpracování diplomové práce: **tištěná/elektronická**

Seznam odborné literatury:

[1] Bin Han and Zuowei Shen, Wavelets with short support , SIAM Journal on Mathematical Analysis, Vol. 38 (2006), Issue 2, 530-556.

[2] R. Q. Jia and S. T. Liu, Wavelet bases of Hermite cubic splines on the interval, Advances in Computational Mathematics 25 (2006), 23-39.

[3] T.J. Dijkema and R. P. Stevenson (2010). A sparse Laplacian in tensor product wavelet coordinates. Numerische Mathematik, 115(3), 433-449.

[4] R. Stevenson, Tammo Jan Dijkema and Christoph Schwab, An adaptive wavelet method for solving high-dimensional elliptic PDEs, Constr. Approx. 30(3), 423-455 (2009).

[5] Karsten Urban, Wavelet Methods for Elliptic Partial Differential Equations, Oxford University Press, USA (January 27, 2009), 482, ISBN-10: 0198526059.

Vedoucí diplomové práce: **RNDr. Václav Finěk, Ph.D.**
Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Datum zadání diplomové práce: **16. dubna 2014**

Termín odevzdání diplomové práce: **24. dubna 2015**

doc. RNDr. Miroslav Brzezina, CSc.
děkan

L.S.

doc. RNDr. Jaroslav Mlýnek, CSc.
vedoucí katedry

dne

Prohlášení

Byla jsem seznámena s tím, že na mou diplomovou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb., o právu autorském, zejména § 60 – školní dílo.

Beru na vědomí, že Technická univerzita v Liberci (TUL) nezasahuje do mých autorských práv užitím mé diplomové práce pro vnitřní potřebu TUL.

Užiji-li diplomovou práci nebo poskytnu-li licenci k jejímu využití, jsem si vědoma povinnosti informovat o této skutečnosti TUL; v tomto případě má TUL právo ode mne požadovat úhradu nákladů, které vynaložila na vytvoření díla, až do jejich skutečné výše.

Diplomovou práci jsem vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury a na základě konzultací s vedoucím mé diplomové práce a konzultantem.

Současně čestně prohlašuji, že tištěná verze práce se shoduje s elektronickou verzí, vloženou do IS STAG.

Datum:

Podpis:

Poděkování

Mnohokrát děkuji svému vedoucímu práce, panu RNDr. Václavu Fiňkovi, Ph.D., za odvahu tuto práci vést, a za nekonečnou trpělivost při mnohých konzultacích. Za spolupráci a ochotu věnovat mi svůj čas děkuji také paní RNDr. Martině Šimůnkové, Ph.D., která byla vždy připravená vyřešit každý problém. Velký dík patří také všem, kteří byli nuceni vést soukromé hodiny výuky pro jedinou studentku oboru, a nedali najevo rozhořčení. Nakonec děkuji svým nejbližším a přátelům, kteří, ač mé práci vůbec nerozumí, přesto přispěli moudrými radami a podpořili mě v optimismu.

. . . .

Daniela Cvejnová

Anotace

Diplomová práce se zabývá numerickým řešením parciálních diferenciálních rovnic na čtvecové oblasti, konkrétně na intervalu $[0, 1]^2$, a to pomocí waveletových bází. V první části jsou nadefinovány základní pojmy, jako jsou Hilbertovy a Sobolevovy prostory, Rieszova báze a wavelet. Dále je uveden koncept multirozkladu, který se využívá ke konstrukci waveletových bází. Je také zavedena waveletová báze na intervalu a uvedeny některé důležité vlastnosti waveletů.

Ve druhé části jsou definovány spliny, po částech polynomiální funkce, kterých se ke konstrukci waveletů často využívá. Podrobněji se zde zabýváme B-spliny a Hermitovými kubickými spliny. Řešená úloha je představená v kapitole třetí, společně s odvozením její slabé formulace a s podmínkami existence a jednoznačnosti řešení.

V rámci této práce byly implementovány tři různé waveletové báze, které jsou představeny v další kapitole. Pomocí těchto bází pak byla numericky řešena zadaná úloha. K řešení byla použita Galerkinova metoda. V poslední kapitole jsou uvedeny obdržené výsledky.

Klíčová slova: Rieszova báze, wavelet, škálovací funkce, B-spline, kubický Hermitův spline, numerické řešení parciálních diferenciálních rovnic

Anotation

This thesis focuses on numerical solution of the partial differential equation on the square, specifically on the two-dimensional interval $[0,1]^2$, by using wavelet basis. In the first part, we start with definitions of Hilbert and Sobolevov spaces, Riesz basis and wavelet are stated. This part also introduces the concept of multiresolution analysis, which is later used for the construction of wavelet bases and wavelet basis on the interval. Some important properties of wavelets are also mentioned in this part.

In the second part, spline – piecewise-polynomial functions, which are often used for the construction of wavelets, are defined. In detail we deal with B-splines and Hermite cubic splines. The solved equation is introduced in the third part, together with the derivation of the weak formulation and with the conditions of existence and uniqueness of the solution of the equation.

In this work, three different wavelet basis were implemented. They are introduced in the next part. Using this bases, the differential equation was numerically solved. The Galerkin method was used for the solving of the equation. In last chapter the obtained results are shown.

Keywords: Riesz bases, wavelet, scaling function, B-spline, cubic Hermite spline, numerical solution of partial differential equation

Obsah

1 Wavelety: teoretický základ

1.1 Úvod

V této části nadefinujeme prostory, ve kterých se v rámci této práce budeme pohybovat, uvedeme základní pojmy používané při studiu waveletů a seznámíme se s konceptem multirozkladu – obecným postupem konstrukce waveletové báze. Zjistíme také, jakým způsobem se waveletová báze konstruuje na uzavřeném intervalu. Některé vlastnosti waveletů jsou uvedeny na závěr v kapitole 1.6.

1.2 Prostory funkcí

V celé práci se budeme pohybovat v Hilbertově prostoru $H^1(\Omega)$, který je speciálním případem Sobolevova prostoru $W^{k,p}(\Omega)$. Zde tedy uvádíme obecnou definici Hilbertových a Sobolevových prostorů, společně s definicí prostoru Lebesgueovsky integrovatelných funkcí $L^2(\mathbb{R})$, která je pro definici Sobolevových prostorů důležitá.

Definice 1. *Hilbertovým prosorem H nad tělesem $\mathbb{R}$ nazýváme úplný normovaný lineární prostor se skalárním součinem. Pro úplný prostor platí, že každá Cauchyovská posloupnost v něm má svou limitu. Skalárním součinem rozumíme zobrazení $H \times H \to \mathbb{R}$, které každým dvěma prvkům $u, v \in H$ přiřadí číslo $\langle u, v\rangle \in \mathbb{R}$, a pro které platí:*

1. $\langle u, v\rangle > 0, \quad \forall u \neq 0$
2. $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle, \quad \forall u, v \in H$
3. $\lambda\langle u, v\rangle = \langle \lambda u, v\rangle, \quad \forall u, v \in H,\ \lambda \in \mathbb{R}$
4. $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle \quad \forall u, v, w \in H$

Definice 2. *Nechť $p > 0$. Lebesgueovým prostorem $L^p(\Omega)$ rozumíme prostor všech měřitelných funkcí $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$, pro něž je integrál*

$$\int_\Omega |f(x)|^p \, dx$$

konečné.

Na tomto prostoru zavedeme také funkci

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Tato funkce splňuje všechny vlastnosti normy až na ekvivalenci $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0$, neboť $\int_\Omega |f(x)|^p dx = 0 \Rightarrow f = 0$ pouze skoro všude na množině Ω. Proto se obvykle místo funkcí zavádí třídy ekvivalence funkcí, ve kterých se funkce liší pouze na množině míry nula, a obdobně definovaná funkce $\|f\|_p$ už je normou na takovém prostoru.

Speciálně si uveďme prostor $L^2(\Omega)$, ve kterém je skalární součin pro funkce $f, g \in L^2(\Omega)$ definován následnovně:

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\Omega)} := \int\limits_\Omega f(x)g(x)dx.$$

Prostor $L^2(\Omega)$ s takto definovaným skalárním součinem je dokonce Hilbertovým prostorem.

Nyní si uvedeme definice slabé derivace a Sobolevova prostoru (čerpáno z [5], [12] a [1]).

Definice 3. *Nechť $u \in L^p(\Omega), p \in [1, \infty]$. Nechť vektor $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N), \alpha_i > 0$ je N-rozměrný multiindex a číslo*

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i$$

je délkou (velikostí) tohoto multiindexu. Symbolem $D^\alpha u$ označíme parciální derivaci

$$\frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} ... \partial_N^{\alpha_N}}.$$

Řekneme, že funkce w je slabou (zobecněnou) derivací funkce u řádu $|\alpha|$, a označíme ji symbolem $D^\alpha u$, jesltiže pro všechna $v \in C_0^\infty(\Omega)$ platí

$$\int_\Omega w(x)v(x)dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u(x) D^\alpha v(x)dx.$$

Slabou derivaci nyní využijeme v definici Sobolevova prostoru:

Definice 4. *Sobolevův prostor řádu $k \in \mathbb{N}$ je definován jako*

$$W^{k,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) \colon D^\alpha u \in L^p(\Omega), \text{ pro všechna } |\alpha| \leq k\},$$

kde derivací $D^\alpha u$ se rozumí derivace ve slabém smyslu podle definice 3. Vzhledem k normě

$$\|u\|_{k,p,\Omega} := \begin{cases} \left(\sum\limits_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}, & p \in [1, \infty) \\ \max\limits_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}, & p = \infty \end{cases}$$

je $W^{k,p}(\Omega)$ Banachovým prostorem.

Sobolevovým prostorem s homogenními Dirichletovými okrajovými podmínkami rozumíme uzávěr množiny $\{u \in C^\infty(\Omega) : u|_{\partial\Omega} = 0\}$ v prostoru $W^{k,p}(\Omega)$ a značíme ho $W_0^{k,p}(\Omega)$.

Speciálním případem Sobolevových prostorů je prostor $W^{k,2}(\Omega)$, který je Hilbertovým prostorem se skalárním součinem

$$(u, v) = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega D^\alpha u(x) D^\alpha v(x) dx \qquad u, v \in W^{k,2}(\Omega).$$

Tento prostor se obvykle značí $H^k(\Omega)$.

Definice 5. *Nechť $m \in \mathbb{N}$. Sobolevův prostor záporného řádu je prostor $W^{-m,q}(\Omega)$, který je duálním prostorem k prostoru $W_0^{m,p}(\Omega)$. Prostorem $W_0^{m,p}(\Omega)$ rozumíme uzávěr prostoru C_0^∞ ve $W^{m,p}(\Omega)$, a sdružený exponent q je dán vztahem*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Duálním prostorem rozumíme prostor všech spojitých lineárních funkcionálů na prostoru $W^{m,p}(\Omega)$.

Definice 6. *Sobolevovým prostorem $W^{s,p}(\Omega), \Omega \in \mathbb{R}^n$, neceločíselného řádu $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, kde $s = m + \sigma, m \in \mathbb{N}, 0 < \sigma < 1$, rozumíme*

$$W^{s,p}(\Omega) = \left\{ u \in W^{m,p}, \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{\|x - y\|^{\sigma + n/p}} \in L^p(\Omega \times \Omega), \forall\, |\alpha| = m \right\}.$$

Normu na tomto prostoru definujeme vztahem

$$\|u\|_{s,p,\Omega} = \left(\|u\|_{m,p,\Omega} + \sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega\times\Omega} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^p}{\|x-y\|^{\sigma p+n}} dxdy \right)^{1/p}.$$

1.3 Rieszova báze, wavelet

Pojem Rieszovy báze je klíčovým pojmem pro definici samotného waveletu, který je ústředním pojmem této práce. Zde tedy uvádíme obě tyto definice.

Definice 7. *Množinu funkcí* $\{b_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ *nazveme Rieszovou bází Hilbertova prostoru* H*, pokud jsou splněny následující podmínky:*

1. $\{b_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ *tvoří bázi prostoru* H
2. *pro každou konečnou posloupnost* $\{x_k\} \in l_2(\mathbb{Z})$ *existují konstanty* $c, C > 0$ *takové, že*

$$c\sum_{k\in\mathbb{Z}} |x_k|^2 \le \left\| \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k b_k \right\|_H^2 \le C\sum_{k\in\mathbb{Z}} |x_k|^2.$$

Definice 8. *Nechť* $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ *a* $\psi_{j,k} := 2^{j/2}\psi(2^j x - k)$*. Funkci* ψ *nazýváme wavelet, pokud množina* $\{\psi_{j,k} : j,k \in \mathbb{Z}\}$ *tvoří Rieszovu bázi prostoru* $L^2(\mathbb{R})$*. Wavelet* ψ *nazýváme ortonormální, pokud pro* $\psi_{j,k}$ *platí*

$$\langle \psi_{j,k}, \psi_{j',k'} \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \delta_{jj'}\delta_{kk'},$$

pro všechna $j, j', k, k' \in \mathbb{Z}$.

Rieszova báze ovšem nemusí být generována jen jednou waveletovou funkcí. V této práci uvádíme báze generované jednou, dvěma i čtyřmi waveletovými funkcemi (viz kapitoly 4.1, 4.2 a 4.3).

1.4 Multirozklad (MRA)

V následující kapitole si uvedeme definici multirozkladu (anglicky Multiresolutions-analysis, zkráceně MRA). Tento koncept zavedl Stéphan Mallat a popsal v [9]. Je to jedna z možností, jak konstruovat Rieszovy báze, a následně báze waveletové, což si v této kapitole také ukážeme.

Definice 9. *Multirozklad definujeme jako posloupnost uzavřených prostorů* $L^2(\mathbb{R})$ *splňující následující vlastnosti:*

1. *prostory jsou navzájem vnořeny:* $V_j \subset V_{j+1}$ *pro každé* $j \in \mathbb{Z}$*,*
2. *škálování:* $f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1} \Leftrightarrow f(2^{-j}x) \in V_0$*,*
3. *sjednocení prostorů je husté v* $L^2(\mathbb{R})$*:* $\lim\limits_{j\to\infty} \|f - P_j f\|_{L^2} = 0,\ \forall f \in L^2(\mathbb{R})$*, kde* P_j *představuje ortogonální projekci do* V_j*,*
4. *průnikem prostorů je nulová funkce:* $\bigcap\limits_{j\in\mathbb{Z}} V_j = 0$*, nebo jinak:* $\lim\limits_{j\to-\infty} \|P_j f\|_{L^2} = 0$*,*
5. *existuje funkce* $\varphi \in V_0$ *taková, že* $\{\varphi(x-k), k \in \mathbb{Z}\}$ *je Rieszova báze prostoru* V_0*.*

Funkce φ *se nazývá škálovací, někdy také zjemňující, funkcí.*

Označme $\varphi_{j,k} := 2^{j/2}\varphi(2^j x - k)$. Z vlastnosti 5 v definici 9 plyne, že množina $\{\varphi_{j,k}, k \in \mathbb{Z}\}$ tvoří Rieszovu bázi prostoru V_j a všechny $f_j \in V_j$ mohou být zapsány ve tvaru $f_j = 2^{j/2} f_0(2^j x)$, kde $f_0 = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} c_k \varphi(x-k)$ a tedy $f_j = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} c_k \varphi_{j,k}$. Dále platí, že $\|f_j\|_{L^2} = \|f_0\|_{L^2}$ a tedy Rieszovy konstanty c a C jsou pro všechna j stejné.

Protože prostory V_j jsou do sebe vnořeny (vlastnost 1), může být škálovací funkce z prostoru V_0 vyjádřena jako lineární kombinace funkcí z prostoru V_1:

$$\varphi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k \varphi(2x-k). \tag{1.1}$$

Tato rovnice se nazývá škálovací (zjemňujcí) rovnice a h_n škálovací (zjemňující) koeficienty.

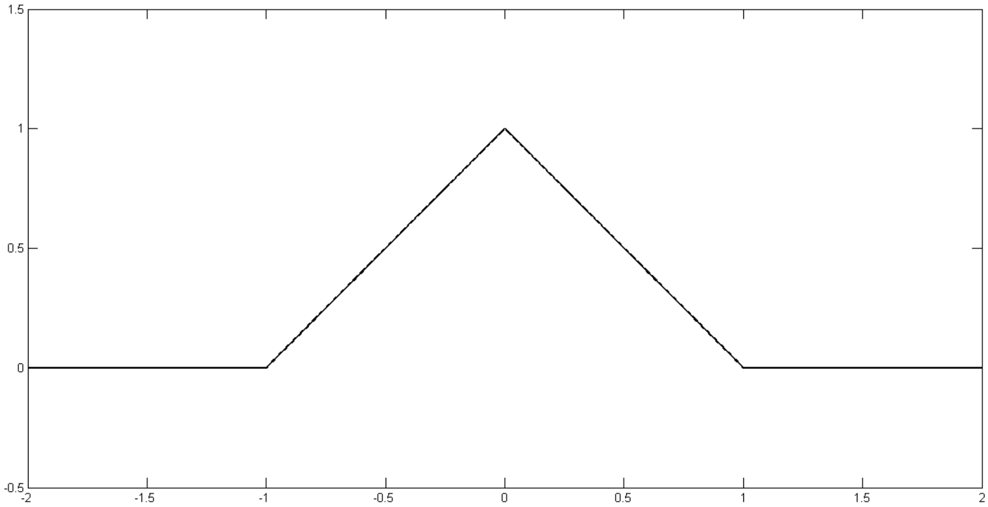
Příklad 10. *Jako příklad si můžeme uvést funkci* $\varphi = \chi_{[0,1]}$*, kde škálovací rovnice má tvar*

$$\varphi(x) = \varphi(2x) + \varphi(2x-1),$$

nebo takzvanou "hat function" $\varphi(x) = \max\{1 - |x|, 0\}$ *se škálovací rovnicí*

$$\varphi(x) = \varphi(2x) + \frac{\varphi(2x-1) + \varphi(2x+1)}{2},$$

jejíž graf vidíme na obrázku 1.



Obrázek 1: "Hat function"– klobouková funkce

Zobecněme dále koncept multirozkladu na dva multirozklady tvořené vzájemně biortogonálními bázemi a podívejme se, jak se pomocí těchto MRA konstruují wavelety.

1.4.1 Biortogonální MRA a wavelety

Z předpony "bi-"je zřejmé, že se jedná o vztah dvou bází. Uveďme si nyní definici dvou vzájemně biortogonálních bází prostoru a definici biortogonálních multirozkladů. Z té pak plyne konstrukce waveletové báze prostoru.

Definice 11. *Nechť $\{b_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ tvoří bázi prostoru $L^2(\mathbb{R})$. Potom $\{\widetilde{b}_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ je báze prostoru $L^2(\mathbb{R})$ biortogonální k $\{b_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, pokud $\langle b_k, \widetilde{b}_l\rangle = \delta_{kl}$.*

Definice 12. *Nechť $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}, \{\widetilde{V}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ jsou dva MRA, jejichž škálovací funkce φ a $\widetilde{\varphi}$ splňují vztah*

$$\langle \varphi(x), \widetilde{\varphi}(x-k)\rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \delta_{0k},$$

tedy $\{\varphi(x-k), k \in \mathbb{Z}\}$ a $\{\widetilde{\varphi}(x-k), k \in \mathbb{Z}\}$ jsou vzájemně biorotgonální báze prostorů V_0 a $\widetilde{V}_0$. Prostory $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ a $\{\widetilde{V}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ nazýváme navzájem biortogonální MRA a funkce φ a $\widetilde{\varphi}$ navzájem biortogonální škálovací funkce. Funkci φ také nazýváme primární škálovací funkcí a $\widetilde{\varphi}$ duální škálovací funkcí.

Postup, jak pomocí MRA zkonstruovat biortogonální wavelety, spočívá v nalezení doplňkových prostorů $\{W_{j-1}\}$ a $\{\widetilde{W_{j-1}}\}$ k prostorům $\{V_{j-1}\}$ a $\{\widetilde{V}_{j-1}\}$ tak, aby pro všechna $j \in \mathbb{Z}$ platilo

$$V_j = W_{j-1} \oplus V_{j-1} \tag{1.2}$$

$$\widetilde{V}_j = \widetilde{W}_{j-1} \oplus \widetilde{V}_{j-1}, \tag{1.3}$$

a dále, aby $V_j \perp \widetilde{W}_j$ a $\widetilde{V}_j \perp W_j$, $\forall j \in \mathbb{Z}$. Symbol $\oplus$ zde značí direktní součet dvou prostorů.

Máme-li $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ a $\{\widetilde{V}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ dva biortogonální MRA vytvořené funkcemi φ a $\widetilde{\varphi}$, můžeme definovat wavelety ψ a $\widetilde{\psi}$ z prostoru $L^2(\mathbb{R})$ pomocí waveletových rovnic:

$$\psi := \sum_{k\in\mathbb{Z}} b_k \varphi(2x-k), \qquad \widetilde{\psi} := \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widetilde{b}_k \widetilde{\varphi}(2x-k), \tag{1.4}$$

kde

$$b_k = (-1)^k \widetilde{h}_{1-k}, \qquad \widetilde{b}_k := (-1)^k h_{1-k},$$

přičemž h_{1-k} a $\widetilde{h}_{1-k}$ jsou škálovací koeficienty škálovací rovnice pro funkce φ a $\widetilde{\varphi}$. Důležité vlastnosti funkcí ψ a $\widetilde{\psi}$ ukazuje následující věta (čerpáno z [10]):

Věta 13. *Nechť ψ a $\widetilde{\psi}$ jsou funkce definované pomocí (1.4). Pak je také splněno následující:*

$$\langle \psi(x), \widetilde{\psi}(x-k) \rangle = \delta_{0k}, \tag{1.5}$$

$$\langle \psi(x), \widetilde{\varphi}(x-k) \rangle = \langle \widetilde{\psi}(x), \varphi(x-k) \rangle = 0 \tag{1.6}$$

a prostory W_j, $\widetilde{W}_j$ vytvořené jako uzávěry lineárních obalů množin $\{\psi_{j,k}, k \in \mathbb{Z}\}$ a $\{\widetilde{\psi}_{j,k}, k \in \mathbb{Z}\}$ tedy splňují podmínky (1.2) a (1.3). Množina funkcí $\{\psi_{j,k}, k \in \mathbb{Z}\}$ navíc tvoří Rieszovu bázi prostoru W_j.

Důkaz. Důkaz věty je uveden v [2] na stranách 77 – 78. □

1.5 Waveletová báze na intervalu

V mnoha aplikacích se užívají funkce, které jsou definované na omezeném intervalu. I v této práci se zabýváme numerickým řešením diferenciálních rovnic na intervalu. Zaměřme se proto nyní na konstrukci waveletové báze na intervalu $[0, 1]$. Použitá konstrukce byla zavedena v [10].

Definice 14. *Nechť* $j_0 \in \mathbb{Z}$ *a pro* $j \geq j_0$ *je* I_j *konečná množina indexů. Nechť dále*

$$\Phi_j = \left\{ \varphi_{j,k} \colon \varphi_{j,k} \in L^2([0,1]), k \in I_j \right\}$$

je konečná množina lineárně nezávislých funkcí. Posloupnost prostorů $\left\{ V_j^{[0,1]} \right\}_{j \geq j_0}$, *kde* $V_j^{[0,1]}$ *tvoří lineární obal* Φ_j *a dim* $V_j^{[0,1]} < \infty$, *nazýváme multirozklad (MRA) prostoru* $L^2([0,1])$ *právě tehdy, když*

1. *prostory jsou navzájem vnořeny:* $V_j^{[0,1]} \subset V_{j+1}^{[0,1]}, \quad \forall j \geq j_0$,
2. $\overline{\bigcup_{j \geq j_0} V_j^{[0,1]}} = L^2([0,1])$,
3. *pro všechna* $j \geq j_0$ *existují na* j *nezávislé konstanty* c, C: $0 < c \leq C < \infty$ *takové, že pro všechny vektory* $x = \{x_k\}_{k \in I_j} \in \mathbb{R}^{I_j}$ *platí*

$$c \left\| x \right\|_2 \quad \leq \quad \left\| \sum_{k \in I_j} x_k \varphi_{j,k} \right\|_{L^2([0,1])} \leq C \left\| x \right\|_2,$$

kde

$$\left\| x \right\|_2^2 := \sum_{k \in I_j} x_k^2 \quad a \quad \left\| f \right\|_{L^2([0,1])}^2 = \int_{[0,1]} f^2(x) dx.$$

Funkce $\varphi_{j,k}, k \in I_j$, *které prostor* $V_j^{[0,1]}$ *generují, opět nazýváme škálovací funkce.*

Všimněme si, že v případě báze na intervalu ztrácí smysl vlastnost 4 z definice 9.

Nyní budeme stejně jako v kapitole 1.4 hledat doplněk $W_j^{[0,1]}$k prostorům $V_j^{[0,1]}$ tak, aby pro všechna $j \geq j_0$ platilo

$$V_{j+1}^{[0,1]} = W_j^{[0,1]} \oplus V_j^{[0,1]}. \tag{1.7}$$

Je-li $\{V_j^{[0,1]}\}_{j \geq j_0}$ multirozklad prostoru $L^2([0,1])$, jehož indexové množiny $\{I_j\}_{j \geq j_0}$ splňují $I_j \subset I_{j+1}$, definujeme pro každé $j \geq j_0$ množinu indexů:

$$J_j := I_{j+1} \setminus I_j$$

a pro index $j = j_0 - 1$

$$J_{j_0 - 1} := I_{j_0}.$$

Pro následující definici waveletové báze na intervalu označme ještě

$$\Psi_{j_0-1} := \Phi_{j_0},$$

jinak řečeno $\psi_{j_0-1,k} := \varphi_{j_0,k}$ pro všechna $k \in J_{j_0-1}$.

Na závěr ještě pro snazší zápis definujme M množinu $M = \{(j,k)\colon j \geq j_0 - 1, k \in J_j\}$.

Definice 15. *Nechť* $\Psi_j := \{\psi_{j,k}, k \in J_j\}$ *je báze prostoru* $W_j^{[0,1]}, j \geq j_0$, *taková, že množina*

$$\Psi := \Phi_{j_0} \cup \bigcup_{j \geq j_0} \Psi_j$$

tvoří Rieszovu bázi prostu $L^2([0,1])$, *to znamená, že existují konstanty* c, C *takové, že* $0 < c \leq C < \infty$ *a pro všechny posloupnosti* $x = \{x_{j,k}\}_{j \geq j_0-1, k \in J_j}$ *splňující*

$$\|x\|^2_{l_2(M)} := \sum_{j=j_0-1}^{\infty} \sum_{k \in J_j} |x_{j,k}|^2 < \infty$$

platí

$$c\,\|x\|_{l_2(M)} \leq \| \sum_{j=j_0-1}^{\infty} \sum_{k \in J_j} x_{j,k}\psi_{j,k} \|_{L^2([0,1])} \leq C\,\|x\|_{l_2(M)}\,.$$

Pak množinu Ψ *nazveme waveletovou bází prostoru* $L^2([0,1])$.

Taková báze bývá často tvořena dilatacemi a konečným počtem posunutí jedné funkce a doplněna o funkce okrajové tak, aby funkce dohromady skutečně tvořily bázi daného prostoru. Více se o tom zmíníme v jiné části práce při konstrukci konkrétních waveletových bází.

1.6 Některé vlastnosti waveletů

V této kapitole pojmenujeme dvě důležité charakteristické vlastnosti waveletů. Obě tyto vlastnosti jsou u konstruovaných waveletových bází vítané.

1.6.1 Kompaktní nosič

Funkce $f : X \to \mathbb{R}$ se nazývá funkce s kompaktním nosičem pokud platí

$$supp\, f \subset X,$$

kde $supp\, f$ značí uzávěr množiny $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$. Pro wavelety tvořené pomocí škálové funkce to znamená, že mají pouze konečný počet nenulových waveletových koeficientů. Pro větší rychlost implementovaných algoritmů je požadovaný nejen kompaktní, ale pokud možno co nejkratší nosič funkce. Waveletové báze použité k numerickému řešení diferenciálních rovnic v této práci jsou tvořeny výhradně funkcemi s kompaktním nosičem.

1.6.2 Nulové momenty

Řekneme, že polynomiální přesnost báze je řádu k, pokud jsou všechny polynomy řádu nejvýše k obsaženy v prostoru V_0. Jinak řečeno, polynomiální přesnost báze je řádu k, jestliže báze přesně aproximuje polynomy až do řádu k. Pro bázi tvořenou funkcí ψ platí následující tvrzení:

Věta 16. *Polynomiální přesnost ortonormální báze je řádu k právě tehdy, když má funkce ψ k nulových momentů, tedy $m(n) = 0$ pro $n = 0, 1, \ldots, k$, kde n-tý moment $m(n)$ funkce $\psi(x)$ je definován jako*

$$m(n) = \int x^n \psi(x)\, dx.$$

Čím větší je polynomiální přesnost báze (tedy čím více nulových momentů má funkce ψ), tím lepší aproximační vlastnosti bude tato báze mít. Musíme však zvážit výhodu polynomiální přesnosti vůči jiným vlastnostem, například již zmíněné délce nosiče bázových funkcí a podmíněnosti báze.

Uveďme si ještě podmínku pro nulové momenty waveletové funkce ψ:

Věta 17. *Nechť $\psi(x) = \sum_{k=m}^{n} b_k \varphi(2x - k)$ a funkce φ splňuje*

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, dx = 1.$$

Pak pro nulové momenty funkce ψ platí

$$\int x^n \psi(x)\, dx = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=m}^{n} b_k k^l = 0, \qquad n = 0, \dots, k.$$

Důkaz. Upravme nejdříve výraz pro nulové momenty:

$$\int x^n \psi(x)\, dx =$$

$$= \int x^n \sum_{k=m}^{n} b_k \varphi(2x-k)\, dx = \quad \text{(substituce } y = 2x - k\text{)}$$

$$= \int \left(\frac{y+k}{2}\right)^n \sum_{k=m}^{n} b_k \varphi(y) \frac{dy}{2} = \quad \text{(podle binomické věty pro člen } (y+k)^n\text{)}$$

$$= 2^{-n-1} \sum_{k=m}^{n} \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} b_k k^l \int y^{n-l} \varphi(y)\, dy =$$

$$= 2^{-n-1} \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} \left(\int y^{n-l} \varphi(y)\, dy\right) \sum_{k=m}^{n} \left(b_k k^l\right).$$

Implikace $\sum_{k=m}^{n} b_k k^l = 0 \Rightarrow \int x^n \psi(x)\, dx = 0$ je nyní zřejmá. Pro opačnou implikaci vyčísleme z upravené rovnice nultý a první moment:

$$m(0) = 2^{-1} \sum_{l=0}^{0} \binom{0}{l} \underbrace{\int y^0 \varphi(y)\, dy}_{1} \sum_{k=m}^{n} b_k k^0 = 1/2 \sum_{k=m}^{n} b_k,$$

$$m(1) = 2^{-2} \left(\binom{1}{0} \int y^1 \varphi(y)\, dy \sum_{k=m}^{n} b_k k^0 + \binom{1}{1} \underbrace{\int y^0 \varphi(y)\, dy}_{1} \sum_{k=m}^{n} b_k k^1 \right).$$

Je-li tedy $m(0) = 0$, musí být $\sum_{k=m}^{n} b_k k^0 = 0$. Díky tomu ovšem je i první sčítanec v $m(1)$ rovný nule a tedy pro $m(1) = 0$ musí být $\sum_{k=m}^{n} b_k k = 0$. Stejným postupem bychom odvodili podmínky pro další momenty a tak i opačnou implikaci.

□

2 Spliny

Spliny jsou po částech polynomiální funkce s danou hladkostí v bodech napojení. Vzhledem k jejich jednoduché implementaci jsou v numerické matematice často používanými funkcemi pro aproximaci řešení úloh. Waveletové báze implementované v této práci jsou založeny výhradně na splinech. V první řadě to budou B-spliny druhého řádu a poté Hermitovy spliny třetího řádu. Řád splinu je dán stupněm polynomu, tedy v případě B-splinů se budeme zabývat polynomy stupně 2, u Hermitových splinů budeme diskutovat kubické polynomy. Nyní si tedy uveďme definici splinu.

Definice 18. *Nechť $X = \{x_0, x_1, \dots x_n, n \in \mathbb{N}\}$ je množina navzájem různých bodů – takzvaných uzlů, pro které platí $x_0 < x_1 < \dots < x_n$. Funkci, která je na každém intervalu $[x_i, x_{i+1}], i = 0, \dots, n-1$, $n \in \mathbb{N}$, polynom stupně nejvýše k, a která má na intervalu $[x_0, x_n]$ spojité derivace až do řádu $k-1$, nazýváme splinem řádu k. Prostor všech splinů řádu k s uzly $x_i \in X$ značíme $S^n(X)$.*

2.1 B-spliny

B-spliny jsou spliny tvořené tak, aby měly co nejkratší nosič vzhledem k požadovanému řádu, hladkosti a definičnímu oboru. V této práci je definujeme indukcí pomocí konvoluce.

Definice 19. *Nechť $n \in \mathbb{N}$. Definujme funkce $N_n(x)$ následovně:*

1. *$N_0(x) = \chi_{[0,1]}(x)$,*
2. *pro $n > 0$ definujeme $N_n(x)$ pomocí indukce $N_{n+1}(x) = (N_n * N_0)(x)$, kde * je definována následovně:*

$$(N_n * N_0)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} N_n(s) N_0(x-s)\, ds.$$

Pak tyto funkce nazýváme B-spliny řádu n. Operátor $*$ se nazývá konvoluce.

Zřejmě platí $N_n = \underbrace{N_0 * \ldots * N_0}_{n+1}$. Některé další vlastnosti B-splinů uvádí následující dvě věty.

Věta 20. *Pro funkce $N_n(x), n \in \mathbb{N}$ platí:*

$$\begin{aligned} supp\, N_n(x) &= [0, n+1] && (2.1) \\ N_n(x) &> 0, x \in (0, n+1) && (2.2) \\ N_n(x) &\in S^n(\mathbb{Z}) && (2.3) \\ \sum_{k \in \mathbb{Z}} N_n(x-k) &= 1 && (2.4) \\ N_n\left(\frac{n+1}{2} - x\right) &= N_n\left(\frac{n+1}{2} + x\right), x \in \mathbb{R} && (2.5) \end{aligned}$$

Vlastnost (2.5) značí symetrii funkce N_n podle středu.

Důkaz. Důkaz tvrzení nalezneme v [13] na straně 53. □

Věta 21. *Nechť $f \in S^n(\mathbb{Z})$. Pak je možné zapsat f ve tvaru*

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k N_n(x-k).$$

Jinými slovy, množina $\{N_n(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ tvoří bázi prostoru všech splinů řádu n.

Důkaz. Důkaz tohoto tvrzení nalezneme v [13] na straně 56. □

2.1.1 Odvození B-splinu druhého řádu

Pro konstrukci jedné z waveletových bází implementovaných v této práci jsou využity B-spliny druhého řádu. Odvoďme si proto nyní z definice 19 jejich předpis. Zachováme značení, tedy $N_0(x) = \chi_{[0,1]}(x)$. Dále je

$$N_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} N_0(s) N_0(x-s)\, ds = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[0,1]}(s)\chi_{[0,1]}(x-s)\, ds = \int_0^1 \chi_{[0,1]}(x-s)\, ds =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{použijeme substituci:} \\ u = x - s \\ s \in [0,1] \rightarrow u \in [x, x-1] \\ du = -ds \end{array} \right] = -\int_x^{x-1} \chi_{[0,1]}(u)\, du = \int_{x-1}^{x} \chi_{[0,1]}(u)\, du =$$

$$= \begin{cases} x \in [0,1] & \rightarrow \displaystyle\int_0^x 1\, du = [u]_0^x = x \\ x \in [1,2] & \rightarrow \displaystyle\int_{x-1}^1 1\, du = [u]_{x-1}^1 = 1 - (x-1) = 2 - x. \end{cases}$$

Získáváme tak předpis B-splinu prvního řádu, ze kterého získáme B-spline řádu 2:

$$N_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} N_1(s)N_0(x-s)\,ds = \underbrace{\int_0^1 s\chi_{[0,1]}(x-s)\,ds}_{(a)} + \underbrace{\int_1^2 (2-s)\chi_{[0,1]}(x-s)\,ds}_{(b)}$$

$$\text{(a)} \;= \int_0^1 s\chi_{[0,1]}(x-s)\,ds = \begin{bmatrix} u = x-s \to s = x-u \\ s \in [0,1] \to u \in [x, x-1] \\ du = -ds \end{bmatrix} = \int_{x-1}^{x} (x-u)\chi_{[0,1]}(u)\,du =$$

$$= \begin{cases} x \in [0,1] \quad \to \displaystyle\int_0^x (x-u)\,du = \left[xu - \frac{u^2}{2}\right]_0^x = x^2 - \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2} \\ x \in [1,2] \quad \to \displaystyle\int_{x-1}^{1} (x-u)\,du = \left[xu - \frac{u^2}{2}\right]_{x-1}^{1} = \ldots = x - \frac{x^2}{2}, \end{cases}$$

$$\text{(b)} \;= \int_1^2 (2-s)\chi_{[0,1]}(x-s)\,ds = \begin{bmatrix} u = x-s \to 2-s = 2+u-x \\ s \in [1,2] \to u \in [x-1, x-2] \\ du = -ds \end{bmatrix} =$$

$$= \int_{x-2}^{x-1} (2+u-x)\chi_{[0,1]}(u)\,du =$$

$$= \begin{cases} x \in [1,2] \quad \to \displaystyle\int_0^{x-1} (2+u-x)\,du = \ldots = -\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{3}{2} \\ x \in [2,3] \quad \to \displaystyle\int_{x-2}^{1} (2+u-x)\,du = \ldots = \frac{x^2}{2} - 3x + \frac{9}{2}. \end{cases}$$

Součet (a) a (b) nám nyní dá předpis hledaného B-splinu druhého řádu:

$$N_2 = \begin{cases} \frac{x^2}{2}, & x \in [0,1] \\ -x^2 + 3x - \frac{3}{2}, & x \in [1,2] \\ \frac{x^2}{2} - 3x + \frac{9}{2}, & x \in [2,3] \\ 0 & jinak. \end{cases}$$

2.2 Hermitovy spliny

Definujme nyní Hermitův interpolační spline. Jedná se opět o po částech polynomiální funkci daného stupně a hladkosti, která je však předepsaná nejen funkčními hodnotami, ale také hodnotami derivací v uzlech.

Definice 22. *Nechť* $\{x_i\}_{i=0}^n : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ *je rostoucí posloupnost uzlů. V každém uzlu* x_i *jsou dány hodnoty* $f(x_i)$ *a* $f'(x_i)$. *Kubickým Hermitovým interpolačním splinem* $s(x)$ *nazveme funkci s následujícími vlastnostmi:*

1. $s(x)$ *je polynom nejvýše 3. stupně v každém intervalu* $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$

2. $s(x) \in C^1([a, b])$

3. $s(x_i) = f(x_i)$, $s'(x_i) = f'(x_i)$, $i = 0, \ldots, n$.

Předepsané interpolační podmínky jednoznačně definují na každém intervalu $[x_{i-1}, x_i]$ kubický polynom. Tím je existence kubického Hermitova interpolačního polynomu zaručena. Polynomy pro dva sousední uzly mají ve společném uzlu stejnou hodnotu funkce i první derivace.

2.2.1 Odvození Hermitova kubického splinu pro škálovou bázi

Pro konstrukci waveletových bází podle [8] a podle [4] si nyní zkonstruujme dva kubické Hermitovy interpolační spliny s nosičem $[-1, 1]$. Jejich předpisy jsou jednoznačně určeny z podmínek uvedených v [8] na straně 8:

$$\begin{aligned} \varphi_1(\pm 1) &= 0, & \varphi_2'(\pm 1) &= 0, \\ \varphi_1(0) &= 1, & \varphi_2'(0) &= 1, \\ \varphi_1'(0) &= 0, & \varphi_2(0) &= 0, \\ \varphi_1'(\pm 1) &= 0, & \varphi_2(\pm 1) &= 0. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Funkce φ_1 a φ_2 budou tedy na intervalech $[-1, 0]$ a $[0, 1]$ polynomy třetího stupně, obecně dané předpisy ax^3+bx^2+cx+d a sx^3+tx^2ux+v. Z výše uvedených podmínek tedy dostáváme na intervalu $[-1, 0]$:

$$\begin{aligned} -a + b - c + d &= 0, & 3s - 2t + u &= 0, \\ d &= 1, & u &= 1, \\ c &= 0, & v &= 0, \\ 3a - 2b + c &= 0, & -s + t - u + v &= 0, \end{aligned}$$

z čehož jasně plyne, že $a = -2, b = -3, c = 0, d = 1$ a pro druhý polynom $s = 1$, $t = 2, u = 1, v = 0$, a tedy máme na intervalu $[-1, 0]$

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= -2x^3 - 3x^2 + 1 = (x+1)^2(1-2x), \\ \varphi_2(x) &= x^3 + 2x^2 + x = x(x+1)^2. \end{aligned}$$

Obdobně pro interval $[0, 1]$ dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} a + b + c + d = 0, &\qquad 3s + 2t + u = 0, \\ d = 1, &\qquad u = 1, \\ c = 0, &\qquad v = 0, \\ 3a + 2b + c = 0, &\qquad s + t + u + v = 0, \end{aligned}$$

ze které plyne $a = 2, b = -3, c = 0, d = 1$ a $s = 1, t = -2, u = 1, v = 0$, a tedy funkce φ_1, φ_2 se na intervalu $[0, 1]$ rovnají

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= 2x^3 - 3x^2 + 1 = (1-x)^2(1+2x), \\ \varphi_2(x) &= x^3 - 2x^2 + x = x(x-1)^2. \end{aligned}$$

Celkově tedy získáváme předpis kubických Hermitových splinů určených podmínkami (2.6) na intervalu $[-1, 1]$:

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} (x+1)^2(1-2x), & x \in [-1, 0] \\ (1-x)^2(2x+1), & x \in [0, 1] \\ 0 & \textit{jinak} \end{cases} \tag{2.7}$$

a

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} x(x+1)^2, & x \in [-1, 0] \\ x(x-1)^2, & x \in [0, 1] \\ 0 & \textit{jinak.} \end{cases} \tag{2.8}$$

3 Řešená úloha

Při odvozování slabé formulace (viz níže) budeme potřebovat dvě věty z matematické analýzy: Greenovu (někdy též zvanou Gaussovu, nebo jinak, větu o integrování per-partes pro funkce více proměnných, viz [11]), a Fubiniovu. Uveďme si tedy jejich znění. Použijeme klasické značení pomocí operátoru nabla ∇, který značí

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n} \right),$$

a Laplaceova operátoru Δ, pro který platí

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \sum \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

3.1 Greenova a Fubiniova věta

Věta 23 (Greenova)**.** *Pro omezenou oblast Ω s lipschitzovsky spojitou hranicí $\partial\Omega$ a pro všechny funkce $u \in C^1(\overline{\Omega})$, $v \in C^1(\overline{\Omega})$ a $x \in \Omega$ platí*

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v \, dx = \int_{\partial\Omega} uv\nu_i \, dS - \int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx,$$

kde ν_i je i-tá složka jednotkového vektoru vnější normály.

Pro náš případ budeme požadovat dokonce $u \in C^2(\overline{\Omega})$ a do této věty dosadíme místo funkce u její parciální derivaci $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, $i = 1, 2$. Dva vztahy takto získané sečteme a dostaneme

$$\int_\Omega \Delta uv \, dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} v \, dS - \int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx,$$

kde $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ je derivace u podle vnější normály. Speciálně pro $v \in C_0^1(\overline{\Omega})$ navíc platí

$$\int_\Omega \Delta uv \, dx = - \int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx.$$

Pokud funkce $v \in H_0^1(\Omega)$, můžeme ji vyjádřit jako limitu funkcí v_n z prostoru $C_0^1(\Omega)$, neboť $C_0^1(\Omega)$ je hustý v $H_0^1(\Omega)$. A protože platí $\lim_{n\to\infty} \int f v_n \to \int f v$, můžeme využívat Greenovu větu i pro naše funkce z $H_0^1(\Omega)$.

Věta 24 (Fubiniova)**.** *Nechť X a Y jsou měřitelné prostory, a nechť jejich součin $X \times Y$ je také měřitelný. Nechť $x \in X$ a $y \in Y$. Pak pro každou integrovatelnou funkci $f(x, y)$, tedy funkci, která je měřitelná, a pro niž*

$$\int_{X \times Y} f(x, y) d(x, y) < \infty,$$

platí

$$\int_{X \times Y} f(x, y) d(x, y) = \int_X \int_Y f(x, y) dy dx = \int_Y \int_X f(x, y) dx dy.$$

Fubiniova věta tedy (při splnění daných předpokladů) převádí dvojný integrál na dvojnásobnou integraci.

3.2 Zadaná úloha, Poissonova rovnice

V této práci budeme pomocí waveletové báze hledat přibližné řešení diferenciální rovnice druhého řádu na uzavřené oblasti Ω, konkrétně budeme řešit rovnici

$$-\Delta u + \alpha u = f.$$

V případě, že $\alpha = 0$, se tato rovnice nazývá Poissonova. Pokud navíc $f \equiv 0$, mluvíme o Laplaceově rovnici.

Dirichletova úloha spočívá v nalezení takového řešení u na oblasti Ω, které se na hranici oblasti $\partial\Omega$ rovná předepsané funkci. Pro nás bude touto oblastí $\Omega = [0, 1]^2$ a na hranici $\partial\Omega$ bude funkce $u(x, y)$ splňovat homogenní okrajové podmínky. Záporné znaménko u členu Δu není nezbytné, ale zajistí nám pohodlnější zápis slabé formulace (viz níže). Budeme tedy řešit úlohu

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) + \alpha u(x, y) &= f(x, y), \quad [x, y] \in [0, 1]^2, \\ u(0, y) = u(1, y) = u(x, 0) = u(x, 1) &= 0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

3.3 Slabá formulace, matice tuhosti

K řešení použijeme tzv. Galerkinovu metodu. Ta spočívá ve dvou krocích:

1. převedení úlohy na slabou formulaci,

2. diskretizace spojité úlohy.

První krok provedeme následujícími úpravami:

$$
\begin{aligned}
-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \alpha u &= f, \qquad\qquad / \cdot v, \quad v \in H_0^1(\Omega) \\
-\int_\Omega \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} v + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} v \right) + \alpha \int_\Omega uv &= \int_\Omega fv \qquad / \text{ Greenova věta, Fubiniova věta}
\end{aligned}
$$

$$
-\left(\underbrace{\int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu} dS}_{0} - \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} \right) - \left(\underbrace{\int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu} dS}_{0} - \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} \right) + \alpha \int_\Omega uv = \int_\Omega fv
$$

$$
\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} \right) + \alpha \int_\Omega uv = \int_\Omega fv. \tag{3.2}
$$

Pokud $u \in H_0^1(\Omega)$ a pro všechny testovací funkce $v \in H_0^1(\Omega)$ splňuje (3.2), pak se u nazývá slabým řešením rovnice (3.1).

V druhém kroku vytvoříme posloupnost prostorů $V_0 \subset \ldots \subset V_n \subset V_{n+1} \subset \ldots \subset H_0^1(\Omega)$, kde prostory V_n jsou konečné dimenze, $n \in \mathbb{N}$, pak můžeme u vyjádřit jako lineární kombinaci bázových funkcí prostoru V_n:

$$
u = \sum_{i,j=1}^{n} c_{i,j} \varphi_i(x) \varphi_j(y) \tag{3.3}
$$

a jako testovací funkce v (3.2) použijeme opět funkce $v = \varphi_k(x)\varphi_l(y), k, l \in \mathbb{N}$. Nyní můžeme rovnici (3.2) přepsat následovně:

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} \right) + \alpha \int_\Omega uv &= \int_\Omega fv \\
\sum_{i,j=1}^{n} c_{i,j} \int_\Omega \underbrace{\frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x}\frac{\partial \varphi_k(x)}{\partial x}}_{D_{i,k}} \underbrace{\varphi_j(y)\varphi_l(y)}_{G_{j,l}} + \underbrace{\varphi_i(x)\varphi_k(x)}_{G_{i,k}} \underbrace{\frac{\partial \varphi_j(y)}{\partial y}\frac{\partial \varphi_l(y)}{\partial y}}_{D_{j,l}} + & \\
+ \alpha \sum_{i,j=1}^{n} c_{i,j} \int_\Omega \underbrace{\varphi_i(x)\varphi_k(x)}_{G_{i,k}} \underbrace{\varphi_j(y)\varphi_l(y)}_{G_{j,l}} &= \underbrace{\int_\Omega f \varphi_k(x)\varphi_l(y)}_{f_{k,l}}
\end{aligned}
$$

a získáváme tak při označení $c := \{c_{i,j}\}_{i,j\in\mathbb{N}}$, $G := \{G_{i,k}\}_{i,k\in\mathbb{N}}$, $D := \{D_{j,l}\}_{j,l\in\mathbb{N}}$ a $f := \{f_{k,l}\}_{k,l\in\mathbb{N}}$ soustavu

$$(D \otimes G + G \otimes D)c + \alpha(G \otimes G)c = f, \tag{3.4}$$

kde $\otimes$ značí tenzorový součin: pro $m \times n$ matici A a $p \times q$ matici B vytvoří $(m \cdot p) \times (n \cdot q)$ matici C, jejíž prvky jsou

$$c_{\alpha,\beta} = a_{i,j} b_{k,l},$$

kde

$$\alpha = p(i-1) + k,$$
$$\beta = q(i-1) + l.$$

Pro jednozimenzionální úlohu se matice G nazývá matice tuhosti a matice D matice hmotnosti. Vektor f se nazývá v jedno- i dvoudimenzionální úloze vektorem síly. Při implementaci nebyla vytvářena celá matice $(D \otimes G + G \otimes D) + \alpha(G \otimes G)$, ale prvky tenzorového součinu byly vytvářeny v průběhu programu z jednorozměrných matic D a G přímo ve chvíli, kdy byly potřeba, a výslednou matici (dvojnásobných rozměrů) tedy nebylo potřeba uchovávat v paměti.

3.4 Existence a jednoznačnost řešení

Uveďme si nyní podmínky existence a jednoznačnosti řešení rovnice (3.1).

Označme

$$a(u,v) := \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} \right) + \alpha \int_\Omega uv \tag{3.5}$$

bilineární formu $a(u,v) : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$. Tato forma představuje levou stranu rovnice (3.2). Pro tuto formu platí následující Lax-Milgramovo lemma:

Věta 25 (Lax-Milgramovo lemma). *Nechť $V \subset H_0^1(\Omega)$ a $a(u,v) : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ je bilineární forma, pro kterou platí*

1. *$a(u,v)$ je omezená, tj. $a(u,v) \leq C \|u\|_{1,\Omega} \|v\|_{1,\Omega}$,*
2. *$s(u,v)$ je symetrická, tedy $a(u,v) = a(v,u)$ a*
3. *$a(u,v)$ je koercivní, tedy platí $a(u,u) \geq c \|u\|^2_{1,\Omega}$.*

Pak pro každé $f \in V'$ existuje právě jedno řešení $u \in V$ rovnice

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle .$$

Důkaz. Důkaz tohoto tvrzení nalezneme v [12] na stranách 72 – 73. $\square$

4 Implementované báze

4.1 Kvadratické splinové báze

Jako první užijeme k řešení naší úlohy waveletovou bázi založenou na kvadratických B-splinech, jak je uvedena v [3]. Z pohledu numerické stability je ideální využívat ortogonální waveletové báze, jejich nevýhodou je nicméně malá hladkost a poměrně velký nosič. Při numerickém řešení diferenciálních rovnic požadujeme naopak wavelety s minimálním nosičem a dostatečnou hladkostí, které mají dobré aproximační vlastnosti. Takovými funkcemi jsou právě zmíněné B-spliny, neboť mají mezi všemi funkcemi s kompaktním nosičem minimální délku nosiče vzhledem k požadované hladkosti. B. Han a Z. Shen zkonstruovali Rieszovu waveletovou bázi prostoru $L^2(\mathbb{R})$ s m nulovými momenty, která je založená na B-splinech řádu m. V tomto případě použijeme adaptaci jejich báze na interval $[0,1]$ navrženou v [3], která zachovává nulové momenty.

4.1.1 Škálovací funkce

V kapitole 2.1 jsme odvodili předpis B-splinu druhého řádu, který nyní bude tvořit škálovací funkci. Budeme tedy mít

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}, & x \in [0,1] \\ -x^2 + 3x - \frac{3}{2}, & x \in [1,2] \\ \frac{x^2}{2} - 3x + \frac{9}{2}, & x \in [2,3] \\ 0 & jinak. \end{cases}$$

Obecně pro B-spliny řádu N platí, že bázi tvoří $2^j - N + 1$ vnitřních škálovacích funkcí a $N-1$ funkcí na každém okraji. V našem případě, tedy pro $N=1$, potřebujeme dvě okrajové funkce, každou na jeden kraj. Ty jsou předepsány takto: levá okrajová funkce $\varphi_B(x)$ je definovaná tak, aby byla stejně jako funkce vnitřní po částech polynom stupně 2 a uvnitř svého definičního oboru byla třídy C^1. Její předpis zní:

$$\varphi_B(x) = \begin{cases} -\frac{3}{2}x^2 + 2x, & x \in [0,1] \\ \frac{x^2}{2} - 2x + 2, & x \in [1,2] \\ 0 & jinak \end{cases}$$

a odpovídající pravá okrajová funkce je vůči ní symetrická podle bodu 3/2. Uvedené škálovací funkce splňují zjemňující rovnici:

$$\varphi(x) = \frac{1}{4}\varphi(2x) + \frac{3}{4}\varphi(2x-1) + \frac{3}{4}\varphi(2x-2) + \frac{1}{4}\varphi(2x-3), \tag{4.1}$$

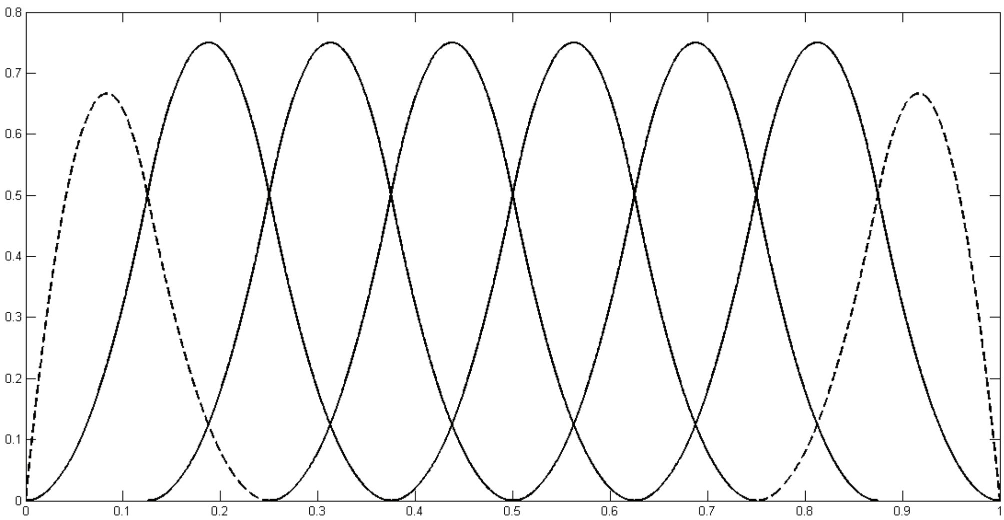
a

$$\varphi_B(x) = \frac{1}{2}\varphi_B(2x) + \frac{3}{4}\varphi(2x) + \frac{1}{4}\varphi(2x-1). \tag{4.2}$$

Báze prostoru V_j je tedy určena dilatacemi a posunutími funkce $\varphi(x)$ a doplněním na okrajích dilatacemi funkce $\varphi_B(x)$. Můžeme ji zapsat jako množinu

$$\left\{\varphi_B(2^j x), \varphi(2^j x), \varphi(2^j x - 1), \ldots, \varphi(2^j x - 2^j + 2), \varphi_B(1 - 2^j x)\right\}.$$

Například pro $j = 3$ je tato báze tvořená šesti vnitřními a dvěma okrajovými funkcemi. Jejich graf můžeme vidět na obrázku 2. Plnou čarou jsou zobrazeny vnitřní funkce φ, čerchovaně okrajová φ_B.



Obrázek 2: Osmiprvková báze prostoru V_3

4.1.2 Waveletové funkce

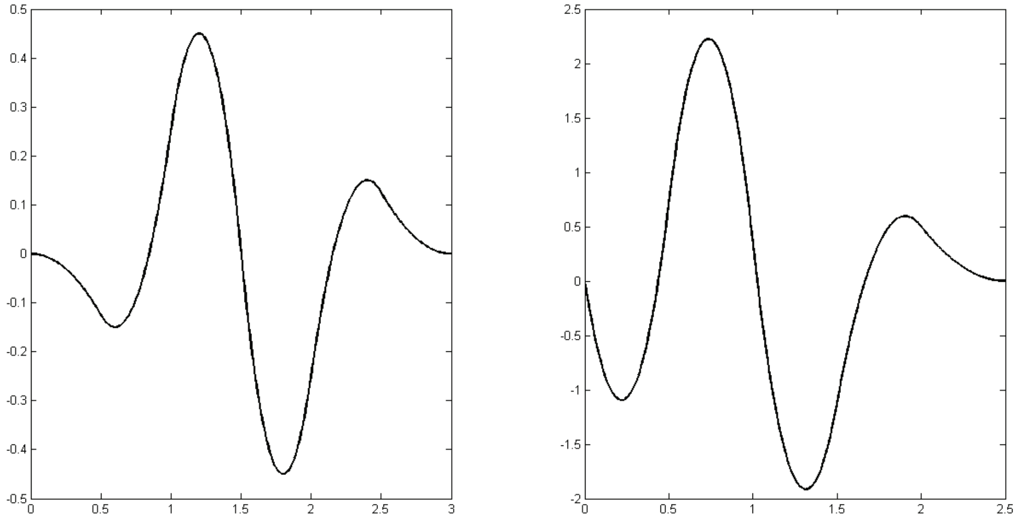
Posununtí funkce $\varphi(x)$ tvoří Rieszovu bázi prostoru $V_0 \subset L^2(\mathbb{R})$. Kvadratické splinové waveletové funkce jsou pak obvykle dány konečnou lineární kombinací těchto posunutí. Určit tuto kombinaci tak, abychom získali Rieszovu bázi, zachovali kompaktní nosič a počet nulových momentů, není snadné ani jednoznačné. Pánové B. Han a Z. Shen odvodili předpis waveletové funkce (viz [6]), která je určena následující rovnicí:

$$\psi(x) = -\frac{1}{4}\varphi(2x) + \frac{3}{4}\varphi(2x-1) - \frac{3}{4}\varphi(2x-2) + \frac{1}{4}\varphi(2x-3). \tag{4.3}$$

Její graf je na obrázku 3. Abychom ale získali bázi prostoru $L^2([0,1])$, je třeba ještě zkonstruovat vhodnou okrajovou funkci. Ta je sestavena tak, aby byla tvořena lineární kombinací funkcí škálovacích a splňovala homogenní Dirichletovy okrajové podmínky. Navíc bude mít tři nulové momenty a nosič $[0, 5/2]$. Tento okrajový wavelet je dán rovnicí

$$\psi_B(x) = -\frac{5}{2}\varphi_B(2x) + \frac{47}{12}\varphi(2x) - \frac{13}{4}\varphi(2x-1) + \varphi(2x-2). \tag{4.4}$$

Uvedená rovnice předepisuje pravou okrajovou funkci. Levá okrajová funkce k ní bude opět symetrická podle středu nosiče.



Obrázek 3: Vnitřní a okrajový wavelet založený na kvadratických B-splinech

4.2 Kubické Hermitovy spliny

V této kapitole použijeme waveletovou bázi tvořenou kubickými Hermitovými spliny podle [8] (tedy spliny, jenž jsou polynomy stupně 3). Wavelety budou mít nosič $[-1, 1]$ a budou třídy C^1. Navíc však použijeme multiwaveletovou bázi, která je generována ne jedním, ale dvěma wavelety, jejich dilatacemi a posuny. Při konstrukci multiwaveletů máme větší volnost pro kombinování vlastností, a proto můžeme ve výsledku dosáhnout lepších vlastností, než u jednoduchého waveletu. Požadovaný je především krátký nosič, pak také ortogonalita či dostatečný řád aproximace. Konstruované wavelety z různých úrovní budou ortogonální vzhledem ke skalárnímu součinu s derivacemi škálovacích funkcí $\langle \varphi', \psi' \rangle_{L^2(\mathbb{R})}$ spíše než k $\langle \varphi, \psi \rangle_{L^2(\mathbb{R})}$. Tento požadavek ortogonality je pro přibližné řešení diferenciálních rovnic vhodnější, neboť vede k dobře podmíněné bázi.

4.2.1 Škálová a waveletová báze

Nechť $H^1([0, 1])$ je Sobolevův prostor podle definice 4. Nechť $H_0^1([0, 1])$ je uzávěr množiny

$$\{u \in C([0, 1]) \cap C^1((0, 1)) \colon u(0) = u(1) = 0\}$$

v prostoru $H^1([0, 1])$. Pro $j \geq 0$ buď V_j prostor všech kubických splinů v s uzly v bodech $s/2^{j+1}$, kde $s = 0, \ldots, 2^{j+1}$, pro něž $v \in H_0^1([0, 1])$. Dimenze V_j je 2^{j+2}.

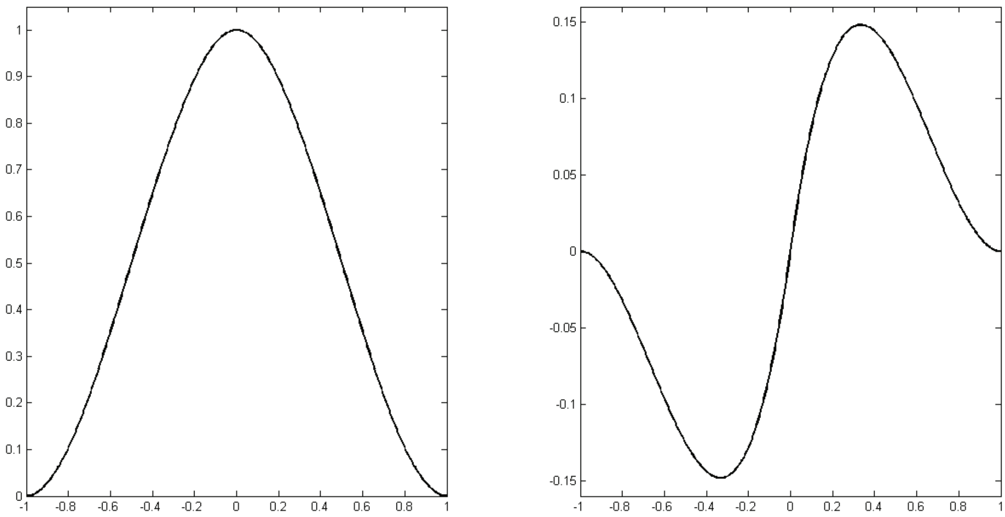
Pánové R. Q. Jia a S. T. Liu použili pro odvození báze prostoru V_j kubické Hermitovy spliny φ_1 a φ_2, které jsme si odvodili v kapitole 2.2.1, s předpisem

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} (x+1)^2(1-2x), & x \in [-1, 0] \\ (1-x)^2(2x+1), & x \in [0, 1] \\ 0 & jinak \end{cases}$$

a

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} x(x+1)^2, & x \in [-1, 0] \\ x(x-1)^2, & x \in [0, 1] \\ 0 & jinak. \end{cases}$$

Jejich grafy můžeme vidět na obrázku 4.



Obrázek 4: Škálovací funkce – kubické Hermitovy spliny

Tyto funkce jsou zřejmě polynomy stupně nejvýše 3 a patří do třídy C^1. Navíc pro ně platí (tak byly definovány, viz [4], s. 8)

$$\varphi_1(0) = 1, \quad \varphi_1'(0) = 0, \quad \varphi_2(0) = 0, \quad \varphi_2'(0) = 1, \tag{4.5}$$

a tedy pro funkci $f \in C^1$ je

$$u = \sum_{j \in \mathbb{Z}} f(j)\varphi_1(x-j) + \sum_{j \in \mathbb{Z}} f'(j)\varphi_2(x-j)$$

Hermitovská interpolace f na $\mathbb{Z}$, tedy $u(j) = f(j)$ a $u'(j) = f'(j)$ pro všechna $j \in \mathbb{Z}$.

Označme nyní $\Phi := (\varphi_1, \varphi_2)^T$ vektor, jehož složkami jsou předepsané funkce φ_1 a φ_2. Z předpisů (2.7), (2.8) těchto funkcí a z jejich vlastností (4.5) plyne následující zjemňující rovnice (podrobnosti viz [7]):

$$\Phi(x) = \sum_{k=-1}^{1} a(k)\Phi(2x-k), \qquad x \in \mathbb{R},$$

kde

$$a(-1) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \end{bmatrix}, \qquad a(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \qquad a(1) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \end{bmatrix}.$$

Lze snadno nahlédnout, že množina

$$\Phi_j := \{\varphi_1(2^{j+1}x - k), k = 1, \dots, 2^{j+1} - 1\} \cup \{\varphi_2(2^{j+1}x - k)|_{(0,1)}, k = 0, \dots, 2^{j+1}\} \tag{4.6}$$

tvoří bázi prostoru V_j. Prvky množiny Φ_j označme jako $v_1, v_2, \dots, v_{2^{j+2}}$.

Nyní budeme hledat takový prostor W_j, aby platilo

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j, \tag{4.7}$$

respektive hledáme takové dvě funkce ψ_1, ψ_2, které tento prostor W_j generují. V [8] byla navržena konstrukce waveletů, které navíc pro všechna $k \in \mathbb{Z}$ splňují

$$\begin{aligned} \langle \psi_1'(x), \varphi_1'(x-k) \rangle = \langle \psi_2'(x), \varphi_1'(x-k) \rangle = 0, \\ \langle \psi_1'(x), \varphi_2'(x-k) \rangle = \langle \psi_2'(x), \varphi_2'(x-k) \rangle = 0. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Tyto požadavky splňuje více funkcí, požadujeme-li ale navíc, aby byla ψ_1 symetrická a ψ_2 antisymetrická, pak jsou už ψ_1 a ψ_2 jednoznačně definované, a to rovnicemi

$$\psi_1(x) = -2\varphi_1(2x+1) - 21\varphi_2(2x+1) + 4\varphi_1(2x) - 2\varphi_1(2x-1) + 21\varphi_2(2x-1)$$

a

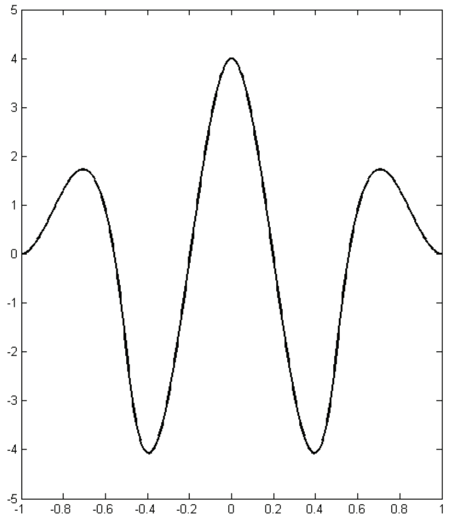
$$\psi_2(x) = \varphi_1(2x+1) + 9\varphi_2(2x+1) + 12\varphi_2(2x) - \varphi_1(2x-1) + 9\varphi_2(2x-1).$$

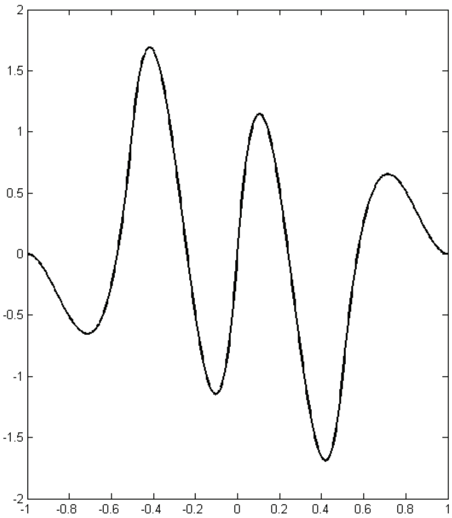
Nosič těchto funkcí je stejný jako nosič funkcí škálovacích, tedy $[-1, 1]$. Funkce jsou zobrazeny na obrázku 5.

Množina waveletových funkcí

$$\Psi_j := \{\psi_1(2^{j+1}x - k), k = 1, \dots, 2^{j+1} - 1\} \cup \{\psi_2(2^{j+1}x - k)|_{(0,1)}, k = 0, \dots, 2^{j+1}\} \tag{4.9}$$

pak tvoří bázi prostoru W_j. Dimenze W_j je 2^{j+2}. Všimněme si, že oproti bázi kvadratických splinů není potřeba konstruovat okrajové funkce. Podle (4.9) stačí restringovat funkce ψ_2 na interval $[0, 1]$. Ve skutečnosti dokonce použijeme restrikci pouze na dvě funkce a to $\psi_2(2^{j+1}x)$ a $\psi_2(2^{j+1}x - 2^{j+1})$. To velmi usnadňuje implementaci.





Obrázek 5: Waveletové funkce z kubických Hermitových splinů

4.3 Kubické Hermitovy spliny podruhé

Použijme nyní již definované škálovací báze kubických Hermitových splinů pro konstrukci waveletů podle T. J. Dijkemy a R. Stevensona (viz [4]). Na rozdíl od předchozí kapitoly bude waveletová báze obsahovat ne dva, ale čtyři „mateřské wavelety“. Zkonstruovaná báze bude mít sice větší číslo podmíněnosti, ale toto číslo bude stále poměrně malé a omezené nezávisle na velikosti úlohy. Výhodou této báze je, že pro diferenciální rovnici s konstantními koeficienty, kterou pomocí ní řešíme, budou příslušné matice hmotnosti a tuhosti velmi řídké.

4.3.1 Podmínky pro Rieszovu bázi

Než budeme konstruovat wavelety, které budou generovat bázi Sobolevova prostoru $H_0^1([0,1])$, resp. $L^2([0,1])$, uveďme si větu, která udává podmínky, za jakých konstruovaná báze bude bází Rieszovou. Tato věta byla čerpána z [4], str. 5–6.

Věta 26 (O biortogonálním rozkladu prostoru)**.** *Nechť*

$$V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset L^2([0,1]) \quad a \quad \widetilde{V}_0 \subset \widetilde{V}_1 \subset \ldots \subset L^2([0,1])$$

jsou dvě posloupnosti primárních a duálních prostorů konečné dimenze, pro které *platí*

$$\inf_{0\neq \widetilde{v}_j\in\widetilde{V}_j}\ \sup_{0\neq v_j\in V_j} \frac{\left|\langle \widetilde{v}_j, v_j\rangle_{L^2([0,1])}\right|}{\|\widetilde{v}_j\|_{L^2([0,1])}\,\|v_j\|_{L^2([0,1])}} \gtrsim 1.$$

Navíc, nechť pro $0<\gamma<d$ je

$$\inf_{v_j\in V_j}\|v-v_j\|_{L^2([0,1])}\lesssim 2^{-jd}\|v\|_{H^d([0,1])},\qquad v\in H^d([0,1]),$$

a

$$\|v_j\|_{H^s([0,1])}\lesssim 2^{js}\|v_j\|_{L^2([0,1])},\qquad v_j\in V_j, s\in[0,\gamma),$$

kde pro $s\in[0,d]$ je $H^s([0,1])=[L^2([0,1]),H^d([0,1])]_{s/d}$. Nechť obdobné vztahy platí i pro duální bázi s označením $\widetilde{V}_j,\widetilde{d},\widetilde{\gamma},\widetilde{H}^s([0,1])$. Pak pro Φ_0, bázi prostoru V_0, pro Ψ_j, stejnoměrnou Rieszovu bázi prostoru $W_j:=V_{j+1}\cap\widetilde{V}_j^{\perp_{L^2([0,1])}}$, a pro $s\in(-\widetilde{\gamma},\gamma)$ je

$$\Phi_0\cup\bigcup_{j\in\mathbb{N}_0}2^{-sj}\Psi_j$$

Rieszova báze prostoru $H^s([0,1])$, kde $H^s([0,1]):=(\widetilde{H}^{-s}([0,1]))'$ pro $s<0$.

Pro primární rozklad prostoru $L^2([0,1])$ využijeme již v minulé kapitole zmíněnou bázi kubických Hermitových splinů

$$\Phi_j:=\{\varphi_1(2^{j+1}x-k),k=1,\dots,2^{j+1}-1\}\cup\{\varphi_2(2^{j+1}x-k)|_{(0,1)},k=0,\dots,2^{j+1}\}$$

tvořenou funkcemi φ_1 a φ_2 předepsané rovnicemi (2.7) a (2.8). Je tedy

$$\Phi_0=\{\varphi_1(2x-1),\varphi_2(2x)|_{(0,1)},\varphi_2(2x-1),\varphi_2(2x-2)|_{(0,1)}\}.$$

Wavelety budou konstruovány tak, aby spolu s funkcemi φ_1 a φ_2 splňovaly předpoklady věty 26, a tedy waveletová báze bude tvořit Rieszovu bázi prostoru $L^2([0,1])$.

4.3.2 Waveletová báze

Jak již bylo zmíněno, zkonstruujeme z daných škálovacích funkcí čtyři wavelety. Ty budou na intervalech $[k,k+\frac{1}{2}]$, $k\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}$, po částech polynomy třetího stupně třídy C^1. Cílem konstrukce je ale především vytvořit takové wavelety, pro něž budou matice tuhosti a hmotnosti řídké, tedy aby pro všechna $k_1,\ k_2 \in 2\mathbb{Z}$ a $i_1,\ i_2 = 1, \ldots, 4$ platilo

$$\begin{aligned} \int \psi'_{i_1}(2^{j_1}x - k_1)\psi'_{i_2}(2^{j_2}x - k_2)\, dx = 0, &\quad \text{když } |j_1 - j_2| > 1, \\ \int \psi_{i_1}(2^{j_1}x - k_1)\psi_{i_2}(2^{j_2}x - k_2)\, dx = 0, &\quad \text{když } |j_1 - j_2| > 1. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Tabulka 1: Tabulka waveletových koeficientů

k	-3	-2	-1	0	1	2	3
$a_1^{(k)}$	-	-	-	-	$-\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$	$-\frac{2}{15}$
$b_1^{(k)}$	-	-	-	-	-1	0	1
$a_2^{(k)}$	-	-	-	-	$\frac{7}{39}$	0	$-\frac{7}{39}$
$b_2^{(k)}$	-	-	-	-	1	$\frac{44}{13}$	1
$a_3^{(k)}$	$-\frac{4595}{13728}$	$\frac{7}{65}$	$-\frac{18737}{68640}$	1	$-\frac{18737}{68640}$	$\frac{7}{65}$	$-\frac{4595}{13728}$
$b_3^{(k)}$	$-\frac{68741}{22880}$	$-\frac{69}{40}$	$-\frac{204701}{22880}$	0	$\frac{204701}{22880}$	$\frac{69}{40}$	$\frac{68741}{22880}$
$a_4^{(k)}$	$\frac{417}{22880}$	$-\frac{7}{2340}$	$\frac{5443}{205920}$	0	$-\frac{5443}{205920}$	$\frac{7}{2340}$	$-\frac{417}{22880}$
$b_4^{(k)}$	$\frac{723}{4576}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{8153}{13728}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{8153}{13728}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{723}{4576}$

První dvě waveletové funkce jsou dány rovnicemi

$$\psi_1(x) := \sum_{k=1}^{3} a_1^{(k)}\varphi_1(2x - k) + \sum_{k=1}^{3} b_1^{(k)}\varphi_2(2x - k),$$

$$\psi_2(x) := \sum_{k=1}^{3} a_2^{(k)}\varphi_1(2x - k) + \sum_{k=1}^{3} b_2^{(k)}\varphi_2(2x - k).$$

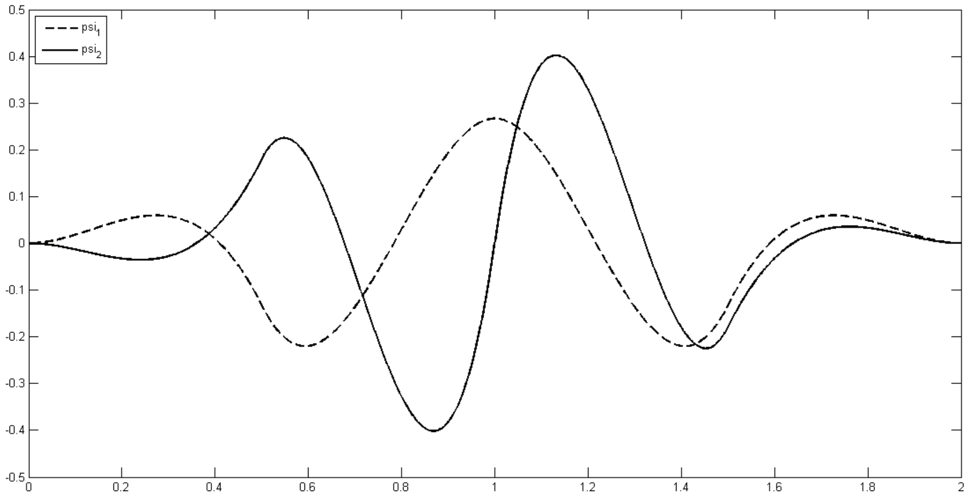
Tyto funkce mají nosič $[0, 2]$, a tím, že jsou ortogonální k polynomům třetího stupně na intervalu [0,2], a že funkce ψ_1 je sudá a ψ_2 lichá, jsou až na násobek konstantou jednoznačně určeny. Koeficienty $a_1^{(k)}, b_1^{(k)}, a_2^{(k)}, b_2^{(k)}$ nalezneme v tabulce 1. Funkce ψ_1 a ψ_2 jsou zobrazeny na obrázku 6.

Další dva wavelety jsou určeny pomocí

$$\psi_3(x) := \sum_{k=-3}^{3} a_3^{(k)}\varphi_1(2x - k) + \sum_{k=-3}^{3} b_3^{(k)}\varphi_2(2x - k),$$

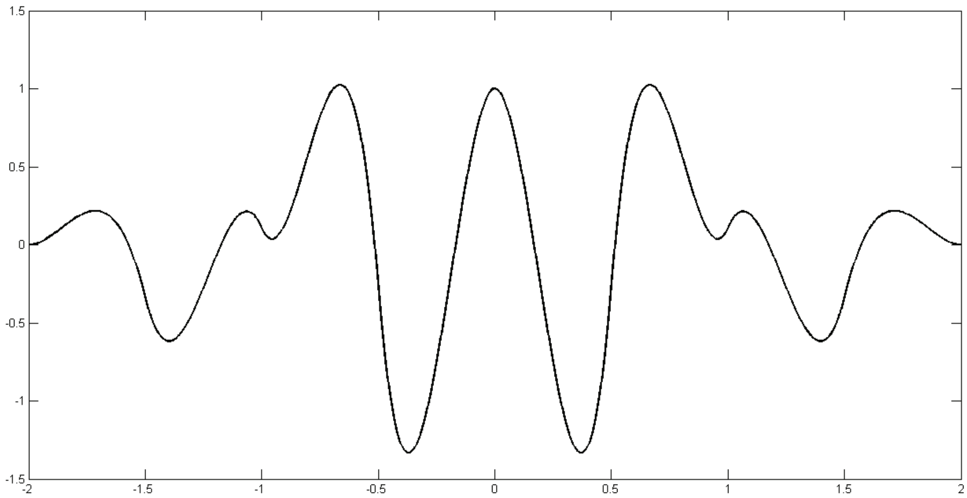
$$\psi_4(x) := \sum_{k=-3}^{3} a_4^{(k)}\varphi_1(2x - k) + \sum_{k=-3}^{3} b_4^{(k)}\varphi_2(2x - k).$$

Jejich nosičem je interval $[-2, 2]$. Až na násobek konstantou jsou tyto funkce určeny požadavkem ortogonality na kubické polynomy na intervalech [-2,0] a [0,2], pod-

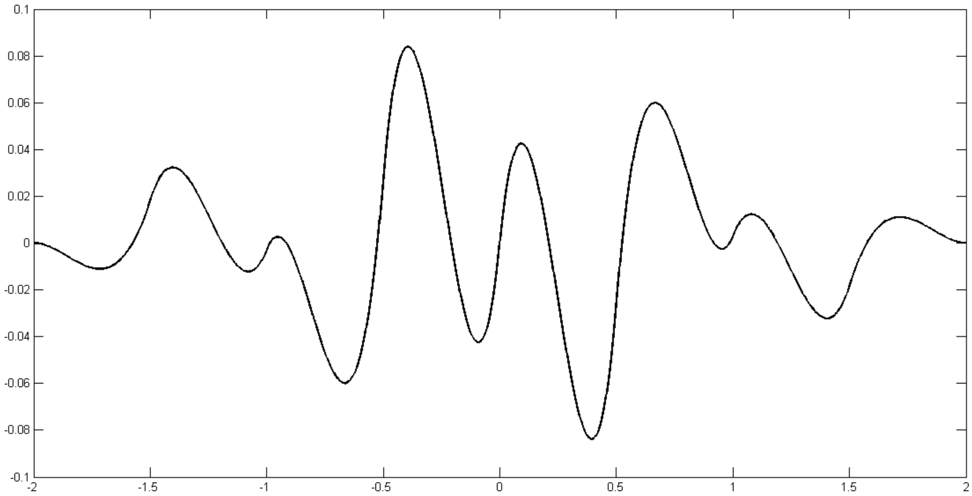


Obrázek 6: ψ_1 a ψ_2 – dvě waveletové funkce podle [4]

mínkou, aby ψ_3 byla sudá a ψ_4 lichá, a navíc, aby tvořily řídkou matici hmotnsti, jsou tyto funkce ortogonální k $\psi_1(x-k)$ a $\psi_2(x-k)$ pro $k \in 2\mathbb{Z}$. Koeficienty $a_3^{(k)}, b_3^{(k)}, a_4^{(k)}, b_4^{(k)}$ jsou rovněž uvedeny v tabulce 1. Grafy těchto funkcí jsou na obrázcích 7 a 8.



Obrázek 7: ψ_3 – třetí waveletová funkce podle [4]



Obrázek 8: ψ_4 – čtvrtá waveletová funkce podle [4]

Z těchto čtyř waveletových funkcí vytvoříme bázi Ψ_j prostoru W_j následovně:

$$\Psi_j := \{\psi_i(2^{j+1}x - k) \colon i \in \{1,2\}, k \in \{0,2,4,\ldots,2^{j+1}-2\}\} \cup$$

$$\cup \{\psi_3(2^{j+1}x - k) \colon k \in \{2,4,\ldots,2^{j+1}-2\}\} \cup \{\psi_4(2^{j+1}x - k)|_{[0,1]} \colon k \in \{0,2,4,\ldots,2^{j+1}\}\}.$$

Počet prvků této množiny je shodný s dimenzí prostoru W_j, to je 2^{j+2}.

5 Waveletová transformace a implementace

Úloha představená v kapitole 3 byla nejdříve pomocí transformace převedená do prostoru waveletových funkcí, poté řešena pomocí metody sdružených gradientů a řešení na závěr převedeno zpět do škálové báze. Celý tento postup si nyní blíže popíšeme.

5.1 Popis waveletové tarnsformace

V této kapitole popíšeme, jak funguje waveletová transformace, kterou budeme využívat při implementaci bází. V předchozích kapitolách jsme zkonstruovali posloupnost vektorových prostorů $\{V_j\}_{j=0}^{n}$, které tvoří multirozklad prostoru, ve kterém hledáme přibližné řešení rovnice (3.1). Prvky báze prostoru V_j označme $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ Nejdříve vytvoříme matice G a D z (3.4), kde G je matice integrálů ze součinů škálovacích funkcí a D ze součinů jejich derivací. V našich aplikacích jsou tyto matice zpravidla pásové, neboť bázové funkce mají krátký nosič a nenulový průnik nosičů má vždy jen několik sousedních funkcí. Tyto matice mohou mít následující strukturu:

Tabulka 2: Možná struktura matice tuhosti

$\int \varphi_i \varphi_j$	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8
φ_1	d	e	f	0	0	0	0	0
φ_2	e	a	b	c	0	0	0	0
φ_3	f	b	a	b	c	0	0	0
φ_4	0	c	b	a	b	c	0	0
φ_5	0	0	c	b	a	b	c	0
φ_6	0	0	0	c	b	a	b	f
φ_7	0	0	0	0	c	b	a	e
φ_8	0	0	0	0	0	f	e	d

Vlastnosti tenzorovéhou součinu nám umožňují nejprve transformovat tyto jednodimenzionální matice, a pak teprve vytvářet jejich tenzorový součin podle (3.1). Následně tedy provedeme waveletovou transformaci. Ta spočívá v převedení prostoru

V_j na direktní součet dvou prostorů V_{j-1} a W_{j-1}. Pomocí škálovacích a waveletových rovnic, jak jsme je uvedli v předchozích kapitolách, převedeme škálovou bázi prostoru V_j na bázi prostoru V_{j-1} s poloviční dimenzí a doplníme ji o waveletové funkce, které tvoří bázi prostoru W_{j-1}.

Prakticky spočívá transformace v přenásobení matic maticí transformační, kterou tvoří z půlky koeficienty škálové zjemňující rovnice a z druhé půlky koeficienty rovnice waveletové. Například pro bázi kvadratických B-splinů, konstruovanou v kapitole 4.1, vycházíme ze zjemňujících rovnic (4.1), (4.2), (4.3) a (4.4) a transformační matice vypadá následovně:

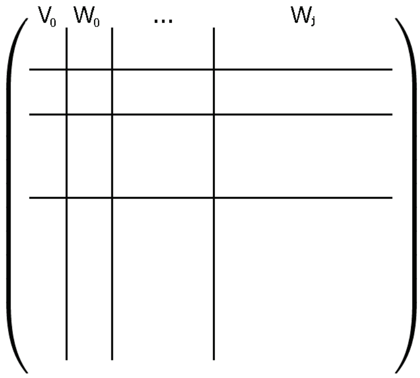
$$\begin{pmatrix}
1/2 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -5/2 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\
3/4 & 1/4 & 0 & & & \vdots & 47/12 & -1/4 & & & & \vdots \\
1/4 & 3/4 & 0 & & & & -13/4 & 3/4 & & & & \\
0 & 3/4 & 1/4 & & & & 1 & -3/4 & -1/4 & & & \\
\vdots & 1/4 & 3/4 & \ddots & 0 & \vdots & 0 & 1/4 & 3/4 & \ddots & 0 & \vdots \\
 & 0 & 1/4 & & 1/4 & 0 & \vdots & 0 & -3/4 & & -1/4 & 0 \\
 & \vdots & 1/4 & & 3/4 & 0 & & \vdots & 1/4 & & 3/4 & 1 \\
 & & 0 & & 3/4 & 1/4 & & & 0 & & -3/4 & -13/4 \\
\vdots & & \vdots & & 1/4 & 3/4 & & & \vdots & & 1/4 & 47/12 \\
0 & \dots & & & 0 & 1/2 & & & & \dots & 0 & -5/2
\end{pmatrix}$$

Transformační matice je velikosti $n \times n$, kde n je počet prvků škálové báze.

Transformaci provedeme na sloupce i řádky matic a také na vektor pravé strany. Označíme-li S matici tuhosti (popř. hmotnosti) ve škálové bázi a T transformační matici, pak matici S upravíme následujícími operacemi:

$$T^T Sc$$
$$\underbrace{T^T ST}_{S_2}\, \underbrace{T^{-1}c}_{\widetilde{u}}$$
$$S_2\, \widetilde{u}$$

Tuto transformaci pak použijeme znovu na škálovací funkce z prostoru V_{j-1}, tedy na levou a horní polovinu matice S_2 a pokračujeme dále (levou a horní čtvrtinou a dále obdobně), dokud nedostaneme báze prostorů V_0 a W_0. Multiškálová báze po takto provedené transformaci je schematicky znázorněna na obrázku 9.



Obrázek 9: Znázornění waveletové transformace na 1D matici

Následně vytvoříme dvoudimenzionální matici soustavy pomocí tenzorového součinu již transformovaných matic tuhosti a hmotnosti podle rovnice (3.4). Ve dvoudimenzionální úloze je vektor pravé strany reprezentován maticí, a transformace se na něj použije stejně jako na matice v 1D. Takto získanou soustavu budeme následně řešit pomocí metody sdružených gradientů.

5.2 Implementace

Výpočet vektoru (resp. matice) pravé strany – tedy integrálů z funkce pravé strany diferenciální rovnice přenásobené škálovacími funkcemi, byl proveden v programu MATLAB R2013b. Pro výpočet dvojného integrálu byla použita funkce *integral2*, která k výpočtu integrálu využívá adaptivních kvadraturních pravidel. Výsledky byly poté exportovány do textového souboru a převedeny do programu C++, ve kterém probíhala waveletová transformace a zároveň samotné řešení soustavy. Transformace se realizovala přenásobováním tzv. škálovými a waveletovými filtry, tedy jen nenulovými částmi sloupců transformační matice, díky čemuž nebyl program tolik paměťově náročný. Využívali jsme při tom toho, že známe strukturu transformační matice a vyhnuli jsme se tak velkému množství násobení nulovými prvky. V transformační matici se navíc, až na okraje, filtry pravidelně opakují, a tedy není potřeba matici uchovávat celou, ale pouze komprimovanou, jako konstantní počet informací, bez ohledu na úroveň báze. Transformace byla v programu C++ paralelizována na pevný počet vláken, obvykle pro čtyři vlákna, neboť program byl spouštěn na serveru *parallel 1*, který má čtyři jádra.

Soustava byla poté řešená pomocí metody sdružených gradientů s diagonálním předpodmíněním. Diagonálním předpodmíněním je myšleno, že prvky všech řádků a sloupců byly přenásobeny převrácenou hodnotou odmocniny příslušného prvku na diagonále. Počáteční iterací byl vždy nulový vektor a ukončovacím kritériem podmínka, že

$$\|r_n\| < 10^{-8}\|r_0\|,$$

kde $\|r_n\|$ je l^2 norma rezidua v n-tém kroku metody. Výsledný vektor řešení vypočtený metodou sdružených gradientů byl opět transformován do škálové báze, exportován do MATLABu a využit k vizualizaci přibližného řešení.

Ze zmíněných programů byla část implementována M. Šimůnkovou, která se tématem také zabývá. Konkrétně implementovala program na zpracování vstupních souborů, které obsahovaly informace o použitých waveletech a úrovni báze, pak také metodu sdružených gradientů a paralelizaci transformace matic do waveletové a zpět do škálové báze. V příloze práce jsou uvedeny všechny hlavičkové soubory, a ze zdrojových souborů ty části, které implementovala autorka této práce.

5.3 Konkrétní pravé strany

Jak již bylo předesláno, pomocí waveletové transformace jsme řešili diferenciální rovnici

$$-\Delta u + \alpha u = f.$$

Programy byly testovány na rovnice, u kterých známe přesné řešení, abychom mohli zkontrolovat správnost výsledku. Zvolili jsme dvě různé funkce u splňující

$$u(0, y) = u(1, y) = u(x, 0) = u(x, 1) = 0,$$

jak je požadováno ve slabé formulaci úlohy (3.1). První funkcí splňující tyto podmínky byla

$$u = x\,y\,(x-1)\,(y-1),$$

pro níž získáváme pravou stranu

$$f = \alpha\,x\,y\,(x-1)\,(y-1) - 2\,(x\,(x-1) + y\,(y-1)).$$

Protože je tato funkce polynomem druhého stupně v každé proměnné, tedy je v prostoru V_0 všech zmíněných bází, měla by chyba aproximace při použití libovolné zmíněné báze (kvadratických i kubických polynomů) být nulová.

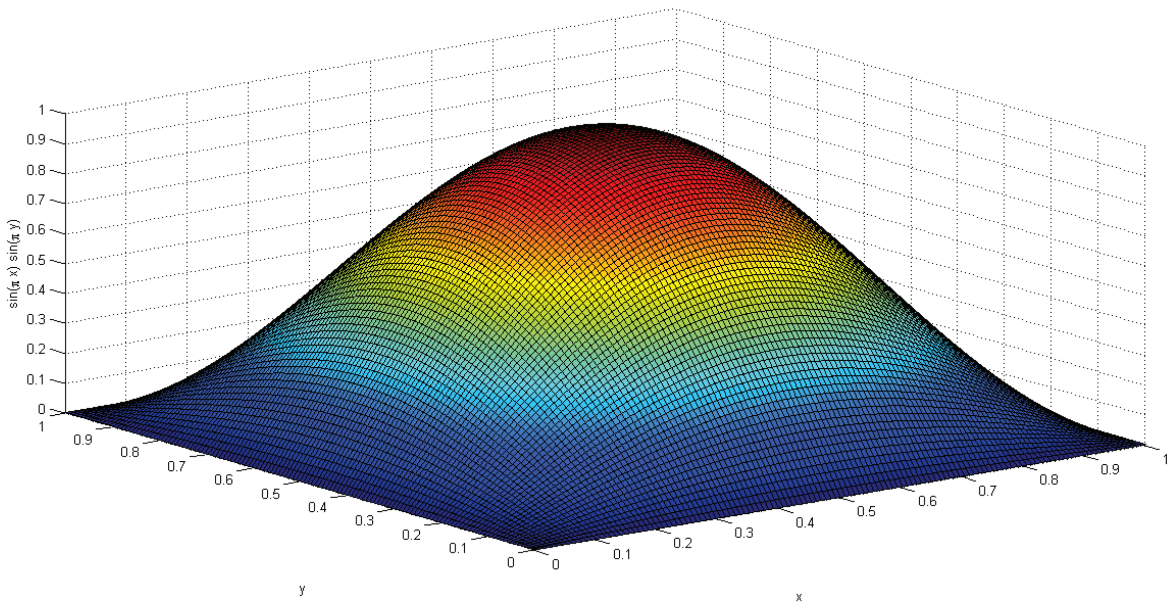
Druhou zvolenou funkcí byla funkce

$$u = sin(\pi\, x)\, sin(\pi\, y),$$

pro níž je pak v rovnici $-\Delta u + \alpha u = f$ pravá strana rovna

$$f = (c + 2\,\pi^2)\, sin(\pi\, x)\, sin(\pi\, y).$$

Tuto funkci u si můžeme prohlédnout na obrázku 10.



Obrázek 10: Funkce $sin(\pi\, x)\, sin(\pi\, y)$

5.4 Obdržené výsledky

Báze, jejichž konstrukce jsme si přiblížili v kapitole 4, jsme použili pro přibližné řešení výše uvedených diferenciálních rovnic, a to na různých úrovních. Výsledky jsou zaznamenány v tabulkách níže. První sloupec vždy značí počet úrovní rozkladu, přičemž báze v jedné dimenzi má potom 2^n prvků. Pravá strana ve dvou dimenzích (přenásobená škálovacími funkcemi a integrovaná) má tedy $2^n \times 2^n$ prvků. Počet všech prvků matice pravé strany je uveden ve druhém sloupci tabulky. U výpočtu jsme sledovali především počet iterací metody sdružených gradientů při řešení soustavy a chybu aproximovaného řešení v L^2 normě, které jsou uvedeny ve třetím a čtvrtém sloupci tabulky. Dále pak uveden čas výpočtu a celkový součet časů práce všech vláken.

První použitá báze byla založená na kvadratických splinech (viz kap. 4.1). Podle počtu cyklů metody sdružených gradientů, stejně jako podle času výpočtu, který se k počtu cyklů bezprostředně váže, je zřejmé, že konvergence řešení není při použití této báze příliš rychlá (vidíme z tabulek 3 a 4). Naopak výhodou je snadná implementace, neboť škálová i waveletová báze jsou tvořené vždy jen jednou vnitřní funkcí a dvěma okrajovými.

Tabulka 3: Kvadratická báze, polynomiální pravá strana

n	# prvků PS	# cyklů	chyba aproximace	čas běhu	$\sum$ časů
3	64	9	$4.2 * 10^{-11}$	0.010 s	0.005 s
4	256	41	$1.1 * 10^{-11}$	0.026 s	0.014 s
5	1 024	80	$9.5 * 10^{-12}$	0.105 s	0.083 s
6	4 096	127	$5.2 * 10^{-12}$	0.426 s	0.957 s
7	16 384	189	$3.9 * 10^{-12}$	2.421 s	7.314 s
8	65 536	279	$1.4 * 10^{-12}$	13.736 s	46.221 s
9	262 144	413	$1.4 * 10^{-12}$	1 m 20.048 s	4 m 40.222 s

Tabulka 4: Kvadratická báze, goniometrická pravá strana

n	# prvků PS	# cyklů	chyba aproximace	čas běhu	$\sum$ časů
3	64	9	$2.6 * 10^{-4}$	0.010 s	0.007 s
4	256	42	$3.1 * 10^{-5}$	0.027 s	0.016 s
5	1 024	80	$3.9 * 10^{-6}$	0.108 s	0.080 s
6	4 096	125	$4.8 * 10^{-7}$	0.434 s	0.951 s
7	16 384	186	$6.0 * 10^{-8}$	2.388 s	7.213 s
8	65 536	276	$7.8 * 10^{-9}$	13.529 s	45.725 s
9	262 144	408	$1.3 * 10^{-9}$	1 m 18.758 s	4 m 36.586 s

Druhá použitá báze byla založená na hermitových kubických splinech podle kapitoly 4.2. Waveletovou bázi tvoří dvě funkce, na okrajích je využita restrikce jedné z nich. Implementace této báze byla tedy o něco složitější. Z tabulky je ale zřejmé, že použití této báze bylo nejvodnější, neboť počet iterací, a tedy i doba výpočtu, je oproti kvadratické i druhé kubické bázi téměř poloviční. Získané výsledky pro pro obě volené pravé strany najdeme v tabulkách 5 a 6.

Tabulka 5: Báze podle Jia a Liu, polynomiální pravá strana

n	# prvků PS	# cyklů	chyba aproximace	čas běhu	$\sum$ časů
3	64	9	$5.5 * 10^{-14}$	0.008 s	0.002 s
4	256	27	$1.4 * 10^{-11}$	0.018 s	0.010 s
5	1 024	47	$4.0 * 10^{-12}$	0.067 s	0.051 s
6	4 096	71	$3.3 * 10^{-12}$	0.258 s	0.576 s
7	16 384	105	$2.4 * 10^{-12}$	1.419 s	4.184 s
8	65 536	154	$1.8 * 10^{-12}$	7.792 s	26.079 s
9	262 144	226	$1.2 * 10^{-12}$	44.564 s	2 m 35.818 s

Tabulka 6: Báze podle Jia a Liu, goniometrická pravá strana

n	# prvků PS	# cyklů	chyba aproximace	čas běhu	$\sum$ časů
3	64	9	$4.2 * 10^{-4}$	0.007 s	0.004 s
4	256	27	$2.9 * 10^{-5}$	0.017 s	0.010 s
5	1 024	46	$1.9 * 10^{-6}$	0.060 s	0.055 s
6	4 096	70	$1.2 * 10^{-7}$	0.266 s	0.558 s
7	16 384	104	$7.5 * 10^{-9}$	1.444 s	4.171 s
8	65 536	152	$4.7 * 10^{-10}$	7.760 s	25.744 s
9	262 144	222	$3.3 * 10^{-11}$	44.189 s	2 m 32.865 s

Třetí testovaná báze byla konstruovaná pány Dijkemou a Stevensonem, jak je uvedeno v kapitole 4.3. Počet iterací metody sdružených gradientů je větší, než v případě kubických waveletů Jia a Liu, což poukazuje na horší podmíněnost matice řešené soustavy. Chyba aproximace je však stejná. Obdržené hodnoty jsou uvedeny v tabulkách 7 a 8.

Tabulka 7: Báze podle Dijkemy a Stevensona, polynomiální pravá strana

n	# prvků PS	# cyklů	chyba aproximace	čas běhu	$\sum$ časů
3	64	9	$8.7 * 10^{-13}$	0.008 s	0.003 s
4	256	38	$1.5 * 10^{-11}$	0.023 s	0.013 s
5	1 024	75	$6.8 * 10^{-12}$	0.101 s	0.077 s
6	4 096	122	$4.4 * 10^{-12}$	0.433 s	0.952 s
7	16 384	187	$2.2 * 10^{-12}$	2.414 s	7.385 s
8	65 536	280	$1.1 * 10^{-12}$	13.979 s	47.121 s
9	262 144	411	$7.5 * 10^{-13}$	1 m 20.020 s	4 m 41.804 s

Tabulka 8: Báze podle Dijkemy a Stevensona, goniometrická pravá strana

n	# prvků PS	# cyklů	chyba aproximace	čas běhu	$\sum$ časů
3	64	9	$4.2 * 10^{-4}$	0.008 s	0.004 s
4	256	37	$2.9 * 10^{-5}$	0.023 s	0.012 s
5	1 024	76	$1.9 * 10^{-6}$	0.100 s	0.078 s
6	4 096	123	$1.2 * 10^{-7}$	0.437 s	0.961 s
7	16 384	190	$7.5 * 10^{-9}$	2.445 s	7.514 s
8	65 536	282	$4.7 * 10^{-10}$	14.135 s	47.546 s
9	262 144	417	$3.1 * 10^{-11}$	1 m 21.668 s	4 m 45.622 s

Chyba aproximace klesá pro bázi tvořenou kvadratickými B-spliny přibližně s koeficientem 8, pro báze založené na kubických Hermitových splinech s koeficientem 16. To však můžeme pozorovat pouze na úloze s goniometrickou pravou stranou, neboť přesnost řešení polynomiální úlohy, které patří již do prostoru V_0 (tedy když $n = 3$), se mění již jen zaokrouhlovacími chybami.

6 Závěr

V této práci jsme se seznámili s vybranými waveletovými bázemi a jejich základními vlastnostmi a využili jsme je pro konstrukci bází na čtvercové oblasti $[0,1]^2$. Pomocí zkonstruovaných bází jsme přibližně řešili parciální diferenciální rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty. Báze založená na kvadratických splinech byla generována pouze jednou škálovací funkcí a doplněna dvěma funkcemi okrajovými. Implementace tak byla snazší než v případě jiných bází, nicméně přibližné řešení získané pomocí této báze konvergovalo pomaleji k přesnému řešení.

Druhá báze konstruovaná pomocí kubických Hermitových splinů vedla k přesnému řešení výrazně rychleji, a to díky její vyšší polynomiální přesnosti. Její výhoda spočívala také v tom, že již nebylo potřeba konstruovat okrajovou funkci. Postačily restrikce jedné z těchto dvou funkcí. Derivace zkonstruovaných waveletů jsou ortogonální k derivacím škálových funkcí, což vedlo k lépe podmíněné bázi.

Třetí waveletová báze byla taktéž konstruována z kubických Hermitových splinů. Byly ale vytvořeny čtyři waveletové funkce namísto dvou a jejich vlastnosti výrazně snížily počet nenulových prvků matice tuhosti. Toto zlepšení se ovšem týká pouze diferenciálních rovnic druhého řádu s konstantními koeficienty. Nevýhodou pak byla složitější implementace a větší počet iterací metody sdružených gradientů.

Dále se bude pokračovat ve výpočtu čísla podmíněnosti matice soustavy a v zobecnění do vyšších dimenzí. To však již není součástí této práce.

Reference

[1] ADAMS, R. a FOURNIER, J. J. *Sobolev spaces.* 2nd ed. Amsterdam: Academic Press, 2003, xiii, 305 s. Pure and applied mathematics, 140. ISBN 978-0-12-044143-3.

[2] COHEN, A. *Numerical Analysis of Wavelet Methods.* 1. vyd. Amsterdam: Elsevier, 2003. ISBN 04-445-1124-5.

[3] ČERNÁ, D., FINĚK, V., ŠIMŮNKOVÁ, M. A Quadratic Spline-wavelet Basis on the Interval. In: CHLEBOUN, J., SEGETH, K., ŠÍSTEK, J., VEJCHODSKÝ, T. eds. *Programs and Algorithms of Numerical Matematics 16.* Praha: Ústav matematiky AV ČR, 2013, s. 29-34.

[4] DIJKEMA, T. J., STEVENSON, R. P. A Sparse Laplacian in Tensor Product Wavelet Coordinates [online]. *Numerische Mathematik.* 2010, roč. 115, č. 3, s. 433-449 [vid. 17. 4. 2012]. Dostupné z: http://staff.science.uva.nl/ rstevens/papers/DijkemaStevenson.pdf.

[5] DOLEJŠÍ, V., NAJZAR, K. Nelineární funkcionální analýza. Vyd. 1. Praha: Matfyzpress, 2010, 202 s. ISBN 978-80-7378-137-8.

[6] HAN, B., SHEN, Z. *Wavelets with short support.* SIAM J. Math. Anal. 38 (2003), s. 530-556.

[7] HEIL, C., STRANG G., STRELA, V. Approximation by Translates of Refinable Functions. *Numer. Math.* 1996, roč. 73, č. 1, s. 75-94.

[8] JIA, R. Q., LIU, S. T. Wavelet Bases of Hermite Cubic Splines on the Interval [online]. *Advances in Computational Mathematics* .2006 roč. 25, s. 23-39. [vid. 17. 4. 2012]. Dostupné z: http://www.ualberta.ca/ rjia/Paper06-10/JL06.pdf.

[9] MALLAT, S. Multiresolution Approximations and Wavelet Orthonormal Bases of $L^2(\mathbb{R})$. *Trans. Amer. Math. Soc.* 1989, roč. 315, č. 1, s.69-87.

[10] PRIMBS, M. *Stabile biorthogonale Spline-Waveletbasen auf dem Intervall.* Essen, 2006. Disertační práce. Universität Duisburg-Essen.

[11] REKTORYS, K. *Variační metody v inženýrských problémech a v problémech matematické fyziky.* Vyd. 6., opr. čes. 2. Praha: Academia, 1999, 602 s. Česká matice technická (Academia). ISBN 80-200-0714-8.

[12] URBAN, K. *Wavelet Methods for Elliptic Partial Differential Equations.* 1. vyd. New York: Oxford University Press, 2009. ISBN 978-0-19-852605-6.

[13] WOJTASZCZYK, P. *A Mathematical Introduction to Wavelets.* 1. vyd. Cambridge: Cambridge University Press, 1997. ISBN 05-215-7894-9.