

VYSOKÁ ŠKOLA STROJNÍ A TEXTILNÍ V LIBERCI
FAKULTA STROJNÍ

Ing. Banh Tien LONG

OBECNÁ TEORIE VYTVÁŘENÍ POVRCHOVÝCH PLOCH
SOUČÁSTÍ OBRÁBĚNÍM S APLIKACÍ NA PROSTOROVÉ
OZUBENÍ POMOCÍ SAMOČINNÉHO POČÍTAČE

LIBEREC 1977

Vysoká škola strojní a textilní v Liberci

Fakulta strojní

OBEZNÁ TEORIE VYTÁŘENÍ POVRCHOVÝCH PLOCH SOUČASTÍ OBRÁBĚNÍM
S APLIKACÍ NA PROSTOROVÉ OZUBENÍ POMOCÍ SAMOČINNÉHO POČÍTAČE

Kandidátská disertační práce

Vypracoval : Ing. Binh Tien Long

Školitel : Prof. Ing. Jaroslav Draský, CSc.

Liberec, březen 1977

1. Úvod

Zvyšování výkonových parametrů strojů a zařízení a požadavek vyšší spolehlivosti, kladou zvýšené nároky na kvalitu a přesnost funkčních ploch součástí, které jsou výsledkem práce řezných částí nástroje. Zároveň z hlediska kvality výrobků a ekonomiky výroby je velmi důležité a nezbytné studovat vlastnosti obroběných povrchů součástí vytvářených pohybem nástroje. Tím lze získat většinou technických informací pro racionalizaci konstrukce a technologie.

V předložené práci bych chtěl odvodit obecnou metodu vytváření ploch obrobku a studium jejich vlastností při vzájemném pohybu nástroje a součástí. Tato teorie by potom byla aplikována na kuželová kola se zakřivenými zuby Gleason a Oerlikon.

Povrch vytvářený na otáčejícím se obrobku pohybem nástroje, který rovněž rotuje kolem vlastní osy, má komplikovaný tvar a charakter. Zvlášť jedná-li se o případ různoběžných nebo mimoběžných os. Při výrobě však obvykle nedostaneme celou regulární plochu, ale plochu obsahující i singulární body, což se projeví na skutečném ozubení například jako podřezání profilu zubu. Nebo může nastat případ, že vyrobená plocha nebude odpovídat teoretické podmínce záběru dvou kol. To nás nutí zabývat se výzkumem parametrů, ovlivňujících vznik těchto jevů a určením mezních hodnot těchto parametrů. Řešení těchto otázek se nelze vyhnout. Proto je potřeba studovat vlastnosti plochy, jako je stanovení druhého základního tenzoru plochy, křivosti, indikatrix atd., které nám teprve umožní odvodit matematickou formulaci uvedených zkoumaných úloh (křivky na ploše zubu, podřezání atd.).

Jako matematického aparátu je zde použito vektorového a tenzorového počtu, jímž lze relativně jednoduše a přehledně zapsat složité vztahy, které zde platí a přechod k maticové symbolice umožňuje poměrně jednoduché numerické řešení při použití samočinného počítače.

Nakonec bych chtěl připomenout, že literatura uvedená v závěru práce mi pomohla orientovat se, které teoretické problémy jsou již v této oblasti prozkoumány, jakými metodami bylo dosaženo výsledků a umožnila mi najít novou metodu, kterou jsem použil k řešení problémů, jimiž se tato práce zabývá.

2. Základní vztahy a vlastnosti tenzoru otočení rotačních pohybů

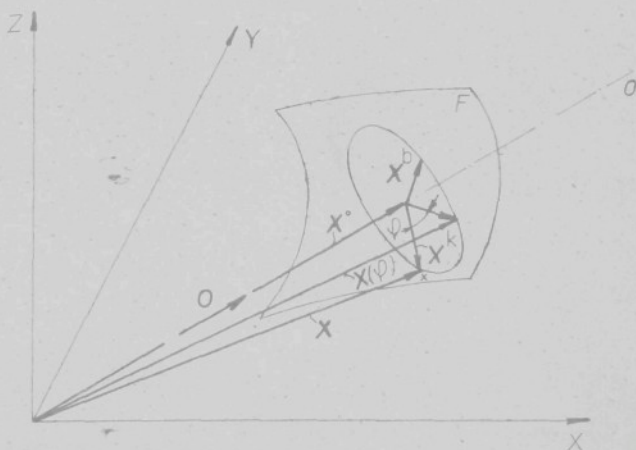
2.1 Charakteristika problému řešení

Při obrábění je někdy nezbytné znát tvar obrobku jako výsledek práce řezných částí nástroje. Většina pohybu při obrábění - ať jde o pohyb nástroje nebo součásti - jsou pohyby rotační a posuvné nebo jejich kombinace. Trajektorie těchto pohybů nám charakterizují obecné plochy nástroje nebo obrobku. Je-li předepsaný tvar profilu součásti a je známa závislost způsobu obrábění, pak lze najít profil nástroje jímž můžeme vyrobit požadovaný tvar obrobku. Nebo naopak.

Zde se naskytá otázka, jak nalézt co nejobecnější řešení výše uvedených problémů, aby výsledků bylo možno prakticky použít pro další inženýrské úlohy, řešené při výrobním procesu.

Základem obecného řešení bude odvození tenzoru otočení, který má univerzální použití i jiné přednosti při studiu vlastností ploch.

2.2 Tenzor otočení a jeho vlastnosti



obr.1

Mějme plochu (nástroj nebo součást, F (obr.1), na níž je libovolný bod X s radiusvektorem $\vec{X}$, který se otáčí v soustavě souřadnic XYZ kolem osy O . Úhel pootočení vektoru v rovině kolmé na osu otáčení nechť je φ , jednotkový vektor

ve směru osy otáčení nechť je O , pootočený vektor X označme $X(\varphi)$. Vektor X lze rozložit do dvou složek: do osy O - složka X^O a do směru kolmého na osu O - složka X^K . Předpokládejme, že X^b leží v rovině, ve které leží při otáčení koncový bod radiusvektoru X a zároveň nechť je vektor X^b kolmý na X^K . Potom lze odvodit:

$$X = X^O + X^K \quad (2.1)$$

$$X^b = O \times X = O \times X^K \quad (2.2)$$

$$X = X(x_1, x_2, x_3)$$

$$O = O(o_1, o_2, o_3)$$

$$X^b = O \times X = \begin{pmatrix} i & j & k \\ o_1 & o_2 & o_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta & -o_3 & o_2 \\ o_3 & \theta & -o_1 \\ -o_2 & o_1 & \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

$$X^b = R(O) \cdot X, \quad (2.4)$$

$R(O)$ je antisymetrický tenzor definovaný:

$$R(O) = \begin{pmatrix} \theta & -o_3 & o_2 \\ o_3 & \theta & -o_1 \\ -o_2 & o_1 & \theta \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

$R(O)$ splňuje podmínky:

$$1/ \quad a_{ij} = -a_{ji}$$

$$2/ \quad a_{ii} = 0$$

Z obr.1 rovněž plyne:

$$X^O = O \otimes O \cdot X, \quad (2.6)$$

kde $O \otimes O$ je diačický součin vektoru O (tenzorové násobení). Platí dále: $O \cdot O = O \cdot O^*$, kde O^* je transponovaný tenzor sloupcový.

Z (2.1) lze napsat:

$$X^K = X - X^O = X - O \otimes O \cdot X = (I - O \otimes O) \cdot X. \quad (2.7)$$

I je jednotkový tenzor (tenzor identity)

$$I_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{je-li } i = j \\ 0 & \text{je-li } i \neq j \end{cases} \quad (2.8)$$

Pootočený vektor $X(\varphi)$ lze nyní psát:

$$X(\varphi) = X^k \cos \varphi + X^b \sin \varphi + X^o \quad (2.9)$$

Dosažením (2.7), (2.4), (2.6) do (2.9) a úpravou dostaneme:

$$X(\varphi) = [(1 - O.O) \cos \varphi + R(O) \sin \varphi] X + O.O. X = \\ [(1 - O.O) \cos \varphi + R(O) + O.O] X = A_O^\varphi X. \quad (2.10)$$

A_O^φ je tenzor otočení, kterým se vektor X otočí o konstantní úhel φ , aniž se změní velikost vektoru. Celá vzájemná soustava se otáčí ale nedeformuje:

$$A_O^\varphi = (1 - O.O) \cos \varphi + R(O) \sin \varphi + O.O. \quad (2.11)$$

Nyní derivujeme (2.10) podle φ

$$\dot{X}(\varphi) = O \times A_O^\varphi X = R(O) A_O^\varphi X = R(O) X(\varphi). \quad (2.12)$$

Odtud řešení:

$$X(\varphi) = e^{R(O)\varphi} X \quad \begin{aligned} \frac{dX(\varphi)}{d\varphi} &= R(O) A_O^\varphi X \Rightarrow \ln X = R(O) A_O^\varphi \varphi + C \\ X(\varphi) &= e^{R(O) A_O^\varphi \varphi + C} = e^{R(O) A_O^\varphi} e^C \end{aligned} \quad (2.13)$$

Srovnáním (2.10) a (2.13) plyne:

$$A_O^\varphi = e^{R(O)\varphi} \quad (2.14)$$

Zřejmě také platí, že tenzory reciproké a transponované jsou si rovny:

$$(A_O^\varphi)^{-1} = (A_O^\varphi)^* = A_O^{-\varphi}. \quad (2.15)$$

Z obr.1 vyplývá:

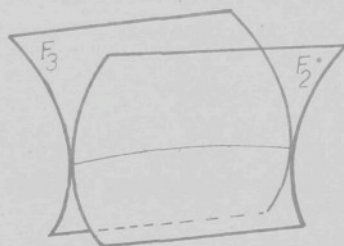
$$|A_O^\varphi \cdot X| = |A_O^\varphi X(\varphi)| = |X| = |X(\varphi)|. \quad (2.16)$$

Tím je zavedena teorie tenzoru otočení libovolného bodu obecné plochy F kolem osy O . Tento tenzor nám pak umožní řešení dalších úloh při obrábění.

3. Teorie vytvoření obalové plochy součásti (nástroje)

3.1 Obecná formulace

Nechť plocha F_3 na obr.2 je plochou nástroje a plocha F_2 nechť je plochou součásti. Za určitých předpokladů platí,



obr.2

že F_2 a F_3 jsou regulární plochy.

Nechť plocha nástroje (součásti) má rovnici:

$$X = X(u^1, u^2, u^3), \quad (3.1)$$

která má pro každé u^3 spojitě partiální derivace podle parametru u^3 do druhého řádu. Potom množinu všech ploch určených rovnicí (3.1) nazýváme jednoparametrickou soustavou ploch.

Předpokládejme, že dvě soumезné plochy F_3 a F_2 z jednoparametrické soustavy se protínají v nějaké průsečnici. Libovolný bod na této průsečnici nechť má souřadnice $(u^1, u^2; u^3)$ na ploše nástroje F_3 a nechť je současně bodem plochy součásti F_2 . Potom tento bod má vzhledem k ploše součásti F_2 souřadnice $(u^1+du^1, u^2+du^2; u^3+du^3)$, kde F_2 je plocha určená rovnicí:

$$X = X(u^1, u^2, u^3 + du^3). \quad (3.2)$$

Podmínka, aby bod ležel současně v soumезných plochách nástroje F_3 a součásti F_2 :

$$X(u^1, u^2, u^3) = X(u^1 + du^1, u^2 + du^2, u^3 + du^3). \quad (3.3)$$

Neboli:

$$X_1 du^1 + X_2 du^2 + X_3 du^3 = 0. \quad (3.4)$$

(jde o Taylorův rozvoj v okolí bodu u^1 a zanedbají se vyšší mocniny než první).

Stručně lze psát:

$$X_i = \frac{\partial X}{\partial u^i} \quad (3.5)$$

Odtud vyplývá, že tři vektory X_1, X_2, X_3 , jsou komplanární a proto smíšený součin (determinant tří vektorů) bude roven nule.

$$X_1 \cdot (X_2 \times X_3) = \det[X_1, X_2, X_3] = 0 \quad (3.6)$$

(X_1, X_2 tvoří tečnou rovinu, ve které leží vektor rychlosti X_3).

Z rovnice (3.6) je:

$$u^3 = u^3(u^1, u^2). \quad (3.7)$$

Dosaďme (3.7) do (3.1) a dostaneme rovnici obalové plochy součásti F_2 ze známé plochy nástroje F_3 nebo naopak.

$$X = X(u^1, u^2, u^3(u^1, u^2)). \quad (3.8)$$

Rovnici (3.6) odvodíme jinou cestou, která je matematicky přesnější ale méně geometricky názorná.

Nechť plocha nástroje má rovnici

$$X = X(u^1, u^2, u^3), \quad (3.8.1)$$

kde u^1, u^2, u^3 jsou parametry a platí:

$$X_{u^1} \times X_{u^2} \neq 0 \quad (3.8.2)$$

(X_{u^1}, X_{u^2} jsou parciální derivace podle u^1 a u^2).

První dva parametry u^1, u^2 určují bod na povrchu (křivočaré souřadnice na povrchu). Třetí parametr u^3 určuje soustavu ploch. Nechť po určení obálky lze napsat:

$$u^3 = f(u^1, u^2). \quad (3.8.3)$$

Parciálně derivujeme (3.8.1) podle parametrů u^1, u^2 s použitím (3.8.3)

$$\frac{\partial X}{\partial u^1} = X_{u^1} \times X_{u^3} \frac{\partial u^3}{\partial u^1}, \quad (3.8.4)$$

$$\frac{\partial X}{\partial u^2} = X_{u^2} \times X_{u^3} \frac{\partial u^3}{\partial u^2},$$

Vektory z rovnice (3.8.4) musí ležet v tečné rovině soustavy (3.8.1), která má normálu

$$N = X_{u^1} \times X_{u^2}.$$

Pro skalární součin vektoru N a vektoru tečny z rovnice (3.8.4) platí:

$$(X_{u^1} + X_{u^3} \frac{\partial u^3}{\partial u^1})(X_{u^1} \times X_{u^2}) = 0$$

$$(X_{u^2} + X_{u^3} \frac{\partial u^3}{\partial u^2})(X_{u^1} \times X_{u^2}) = 0$$

neboli smíšený součin

$$\det [X_{u^1} + X_{u^3} \frac{\partial u^3}{\partial u^1}, X_{u^1}, X_{u^2}] = \det [X_{u^1}, X_{u^2}, X_{u^3}] \frac{\partial u^3}{\partial u^1} = 0$$

$$\det [X_{u^2} + X_{u^3} \frac{\partial u^3}{\partial u^2}, X_{u^1}, X_{u^2}] = \det [X_{u^3}, X_{u^1}, X_{u^2}] \frac{\partial u^3}{\partial u^2} = 0.$$

Předpokládejme, že $\det [X_{u^1}, X_{u^2}, X_{u^3}] \neq 0$. Potom $\frac{\partial u^3}{\partial u^1} = 0$; $\frac{\partial u^3}{\partial u^2} = 0$ nebo $u^3 = \text{konstanta}$. To nevynovuje rovnici soustavy ploch. Proto musí tedy platit:

$$\det [X_{u^3}, X_{u^1}, X_{u^2}] = 0, \quad (3.8.5)$$

což bylo odvozeno v rovnici (3.6).

3.2 Povrchy součástí (nástroje) vytvořené profilem nástroje (součástí) při rotačních pohybech

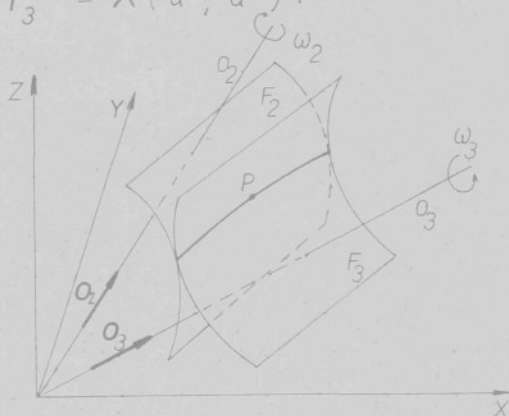
Tato formulace problému se vyskytuje hlavně při obrábění s dvěma závislými rotačními pohyby kolem dvou různoběžných nebo mimoběžných os rotace: při výrobě kuželových kol s přímými zuby (konvoldní) nebo se zakřivenými zuby (Gleason, Cerlikon), broušení atd.

Je-li vytvářena plocha třemi závislými pohyby (při výrobě kola Oerlikon, Kligelberg...) v plynulém způsobu obrábění bude problém složitější. Veškeré tyto úkoly se však redukují na použití tenzoru otočení.

3.2.1 Obalové plochy vytvořené rotačními pohyby kolem dvou různoběžných os

Jestliže se nástroj (frézovací hlava) otáčí kolem své osy O_3 (obr.3) úhlovou rychlostí ω_3 , vytváří jeho ostří při pohybu plochu

$$F_3 = X(u^1, u^2). \quad (3.9)$$



obr.3

Součást se otáčí kolem osy O_2 , která je různoběžná s osou O_3 , úhlovou rychlostí ω_2 . Jaká bude obálka F_2 ?

Podmínka valení:

$$\rho = \frac{\omega_3}{\omega_2} \quad (3.10)$$

Zavedeme tento předpoklad: plochu F_2 zastavíme a vyšetříme pohyb plochy F_3 vzhledem k ploše F_2 .

Označíme:

O_3 ... jednotkový vektor osy O_3

O_2 ... jednotkový vektor osy O_2

φ ... úhel otočení plochy F_2 .

Pohyb plochy F_3 je pak složen ze dvou částí:

1-Rotační pohyb kolem vlastní osy O_3 o úhel $\rho\varphi$. Jeho tenzor otočení je $A_{O_3}^{\rho\varphi}$

2-Rotační pohyb kolem osy O_2 při zastavené F_2 , pootočené o úhel φ ; tenzor otočení je $A_{O_2}^{\varphi}$.

Plochu nástroje v obecné poloze lze popsat takto:

$$K_n = A_{o_2}^{\varphi} A_{o_3}^{p\varphi} X(u^1, u^2). \quad (3.11)$$

V tomto případě φ zastupuje parametr u^2 z rovnice (3.1).

Podle (3.6) musí platit:

$$[K_{\varphi}, K_{u^1}, K_{u^2}] = 0. \quad (3.12)$$

Řešením soustavy rovnic (3.11), (3.12) dostaneme rovnici obálky součásti.

Podle (3.12):

$$\begin{aligned} K_{\varphi} &= \frac{\partial K}{\partial \varphi} = O_2 \times A_{o_2}^{\varphi} A_{o_3}^{p\varphi} X(u^1, u^2) + A_{o_2}^{\varphi} p O_3 \times A_{o_3}^{p\varphi} X(u^1, u^2) = \\ &= R(O_2) A_{o_2}^{\varphi} A_{o_3}^{p\varphi} X(u^1, u^2) + p A_{o_2}^{\varphi} O_3 \times A_{o_3}^{p\varphi} X(u^1, u^2). \end{aligned} \quad (3.13)$$

vektorů

Poslední člen rovnice (3.13) popisuje otočení vektorového součinu kolem osy. Lze otáčet každý vektor zvlášť, tj.

$$\begin{aligned} A_{o_2}^{\varphi} p O_3 \times A_{o_3}^{p\varphi} X(u^1, u^2) &= p A_{o_2}^{\varphi} O_3 \times A_{o_2}^{\varphi} A_{o_3}^{p\varphi} X(u^1, u^2) = \\ &= R(p A_{o_2}^{\varphi} O_3) A_{o_2}^{\varphi} A_{o_3}^{p\varphi} X(u^1, u^2). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Nakonec po úpravě:

$$K_{\varphi} = R(O_2 + p A_{o_2}^{\varphi} O_3) A_{o_2}^{\varphi} A_{o_3}^{p\varphi} X(u^1, u^2). \quad (3.15)$$

Neboli:

$$K_{\varphi} = T(\varphi) X(u^1, u^2), \quad (3.16)$$

kde:

$$T(\varphi) = R(O_2 + p A_{o_2}^{\varphi} O_3) A_{o_2}^{\varphi} A_{o_3}^{p\varphi}. \quad (3.17)$$

$$K_{u^i} = A_{0_2}^{\varphi} A_{0_3}^{p\varphi} \frac{\partial X}{\partial u^i} \quad (3.18)$$

Z rovnic (3.12), (3.16), (3.18) dostaneme:

$$\det \left[A_{0_2}^{\varphi} A_{0_3}^{p\varphi} \frac{\partial X}{\partial u^1} \quad A_{0_2}^{\varphi} A_{0_3}^{p\varphi} \frac{\partial X}{\partial u^2} \quad T(\varphi) X(u^1, u^2) \right] = 0. \quad (3.19)$$

Z (3.19) vyjádříme $u^1 = u^1(u^2, \varphi)$ a dosadíme do rovnice (3.11) dostaneme rovnici obálky

$$K = A_{0_2}^{\varphi} A_{0_3}^{p\varphi} X(u^1(u^2, \varphi), u^2). \quad (3.20)$$

Vypišme (3.20) v euklidovském trojrozměrném prostoru:

$$A_{0_2}^{\varphi} = \begin{pmatrix} 0_{21}0_{21} & 0_{21}0_{22} & 0_{21}0_{23} \\ 0_{22}0_{21} & 0_{22}0_{22} & 0_{22}0_{23} \\ 0_{23}0_{21} & 0_{23}0_{22} & 0_{23}0_{23} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -0_3 & 0_2 \\ 0_3 & 0 & -0_1 \\ -0_2 & 0_1 & 0 \end{pmatrix} \sin \varphi$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0_{21}0_{21} & 0_{21}0_{22} & 0_{21}0_{23} \\ 0_{22}0_{21} & 0_{22}0_{22} & 0_{22}0_{23} \\ 0_{23}0_{21} & 0_{23}0_{22} & 0_{23}0_{23} \end{pmatrix} \cos \varphi.$$

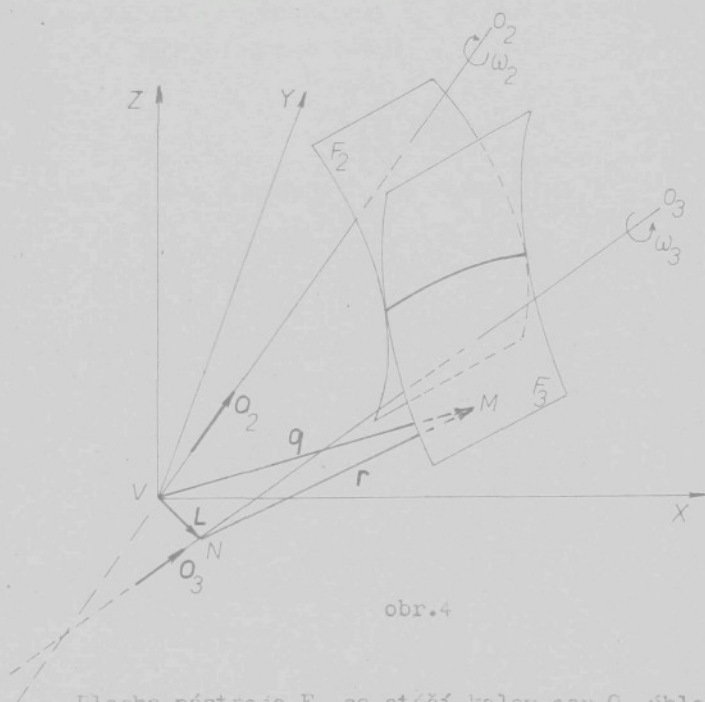
$$A_{0_3}^{p\varphi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0_{31}0_{31} & 0_{31}0_{32} & 0_{31}0_{33} \\ 0_{32}0_{31} & 0_{32}0_{32} & 0_{32}0_{33} \\ 0_{33}0_{31} & 0_{33}0_{32} & 0_{33}0_{33} \end{pmatrix} \cos p\varphi$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -0_3 & 0_2 \\ 0_3 & 0 & -0_1 \\ -0_2 & 0_1 & 0 \end{pmatrix} \sin p\varphi + \begin{pmatrix} 0_{31}0_{31} & 0_{31}0_{32} & 0_{31}0_{33} \\ 0_{32}0_{31} & 0_{32}0_{32} & 0_{32}0_{33} \\ 0_{33}0_{31} & 0_{33}0_{32} & 0_{33}0_{33} \end{pmatrix}$$

Zajímá-li nás určení plochy profilu nástroje ze známého profilu součásti, stačí chápat F_2 jako plochu nástroje a F_3

jako plochu součástí. Jinak se řešení ulohy nemění.

3.2.2 Obalové plochy vytvořené rotačními pohyby kolem dvou mimoběžných os



obr.4

Plocha nástroje F_3 se otáčí kolem osy O_3 úhlovou rychlostí ω_3 . Plocha součástí F_2 rotuje kolem osy O_2 úhlovou rychlostí ω_2 .

Nechť O_2, O_3 jsou jednotkové vektory těchto os a V je libovolný bod na ose O_2 , se kterým ztotožníme počátek pravotočivé soustavy souřadnic XYZ.

Nechť N je libovolný bod na ose O_3 a M je libovolný bod plochy F_3 . Lze napsat (viz obr.4)

$$r = q - L. \quad (3.21)$$

Trajektorie bodu M při pohybu kolem O_3

$$B_{O_3} = A_{O_3}^{p\varphi} (q - L). \quad (3.22)$$

Trajektorie bodu M při pohybu kolem O_3 vzhledem k počátku

souřadnic:

$$B_V = L + A_{O_3}^{p\varphi}(q - L). \quad (3.23)$$

Při zastavení pohybu plochy F_2 je pak trajektorie pohybu bodu K plochy F_3 vzhledem k ose O_2 :

$$K_{F_3} = A_{O_2}^{\varphi} [L + A_{O_3}^{p\varphi}(q - L)], \quad (3.24)$$

a pohyb plochy nástroje F_3 má rovnici:

$$K_n = A_{O_2}^{\varphi} [L + A_{O_3}^{p\varphi}(X(u^1, u^2) - L)]. \quad (3.25)$$

Použitím vztahu (3.12) potom máme rovnici obálky při rotačních pohybech dvou mimoběžných os:

$$K = A_{O_2}^{\varphi} [L + A_{O_3}^{p\varphi}(X(u^1, u^2, \varphi, u^2) - L)]. \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial K_n}{\partial \varphi} = O_2 \times A_{O_2}^{\varphi} [L + A_{O_3}^{p\varphi}(X - L)] +$$

$$A_{O_2}^{\varphi} O_3 \times A_{O_3}^{p\varphi}(X - L) =$$

$$= O_2 \times A_{O_2}^{\varphi} L + O_2 \times A_{O_2}^{\varphi} A_{O_3}^{p\varphi}(X - L) + p A_{O_2}^{\varphi} O_3 \times A_{O_2}^{\varphi} A_{O_3}^{p\varphi}(X - L) =$$

$$= O_2 \times A_{O_2}^{\varphi} L + (O_2 + p A_{O_2}^{\varphi} O_3) \times A_{O_2}^{\varphi} A_{O_3}^{p\varphi}(X - L) =$$

$$= R(O_2) A_{O_2}^{\varphi} L + R(O_2 + p A_{O_2}^{\varphi} O_3) A_{O_2}^{\varphi} A_{O_3}^{p\varphi}(X - L) \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial K_n}{\partial u^i} = A_{O_2}^{\varphi} [L + A_{O_3}^{p\varphi}(\frac{\partial X(u^i)}{\partial u^i} - L)]. \quad (3.28)$$

Z obr.4 je vidět, že při pohybu kolem různoběžných os je

nulový vektor a rovnice (2.26) se změni v rovnici (3.20).

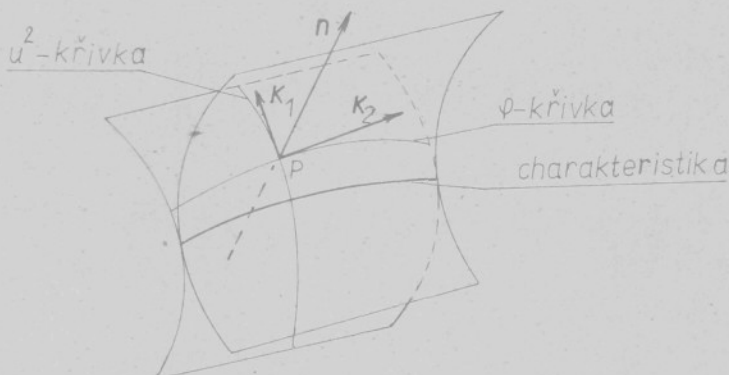
Předpokládali jsme, že plocha F_3 je regulární a plocha obálky K rovněž regulární. F_3 lze definovat různým způsobem: buď parametrickým, explicitním, implicitním vyjádřením nebo skalární funkcí vektorového argumentu. Pokud na ploše F_3 existuje nějaký singulární bod nebo množina singulárních bodů, potom jsou tyto body body vrátu. Leží-li na ploše nástroje, pak profil nástroje F_3 vyčnívá do hotové vyrobené obálky. Tomuto jevu říkáme podřezání. Budeme je zkoumat podrobně v kapitole 6.

4. Vlastnosti obrobené plochy součásti (nástroje)

4.1 Charakteristika a parametrické křivky

Charakteristikou nazýváme množinu bodů, ve kterých se dvě po sobě valící plochy F_2, F_3 dotýkají. Charakteristikou bude křivka na ploše F_3 a současně na ploše F_2 .

Z rovnice (3.11) resp. (3.25) lze při zvoleném pevném u^2 , φ najít parametr $u^1 = u^1(u^2, \varphi)$ podle (3.12) a po dosazení do (3.20) resp. (3.26) dostaneme charakteristiku na F_2 , která - po dosazení u^1, u^2 do (3.9) - leží rovněž na F_3 (obr.5).



obr.5

Při pevném parametru u^2 z rovnice (3.20) a φ proměnném vzniká tzv. parametrická u^2 -křivka. Podobně množinu bodů rovnice (3.26) při pevném φ a proměnném parametru u^2 nazýváme parametrickou φ -křivkou. Proto každým bodem regulární plochy F_2 (resp. F_3) prochází právě jedna u^2 -křivka a jedna φ -křivka. Označíme-li K_1, K_2 , tečné vektory ke křivce,

platí:

Pro mimoběžné osy

$$K_1 = \frac{\partial K}{\partial u^2} = A_{02}^{\varphi} \left[L + A_{03}^{p\varphi} \left(\frac{X(u^1(u^2, \varphi), u^2)}{\partial u^2} - L \right) \right], \quad (4.1)$$

$$K_2 = \frac{\partial K}{\partial \varphi} = O_2 \times A_{O_2}^{\varphi} \left[L + A_{O_3}^{p\varphi} \left(\frac{\partial X}{\partial \varphi} - L \right) \right] + A_{O_2}^{\varphi} O_3^p A_{O_3}^{p\varphi} (X(u^2, \varphi) - L) + A_{O_2}^{\varphi} A_{O_3}^{p\varphi} \frac{\partial X}{\partial \varphi} \quad (4.2)$$

Pro různoběžné osy:

$$K_1 = A_{O_2}^{\varphi} A_{O_3}^{p\varphi} \frac{\partial X}{\partial u^2} (u^1(u^2, \varphi), u^2), \quad (4.3)$$

$$K_{\varphi} = R(O_2 + p A_{O_2}^{\varphi} O_3) A_{O_2}^{\varphi} A_{O_3}^{p\varphi} X(u^1(u^2, \varphi), u^2) + A_{O_2}^{\varphi} A_{O_3}^{p\varphi} \frac{\partial X}{\partial \varphi} (u^1(u^2, \varphi), u^2). \quad (4.4)$$

4.2 Normála obalové plochy

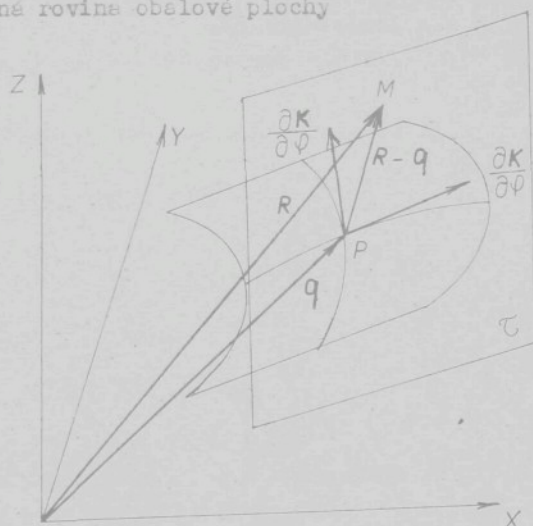
Rovnice (4.1), (4.2) nebo (4.3), (4.4) určují tečné vektory parametrické u^2 -křivky a φ -křivky. V bodě P (obr.5), který leží na křivkách, se vektor normály plochy F_2 určí jako

$$n = \frac{\partial K}{\partial u^2} \times \frac{\partial K}{\partial \varphi} \quad (4.5)$$

Jednotkový vektor normály:

$$n^o = \frac{\frac{\partial K}{\partial u^2} \times \frac{\partial K}{\partial \varphi}}{\left| \frac{\partial K}{\partial u^2} \times \frac{\partial K}{\partial \varphi} \right|} \quad (4.6)$$

4.3 Tečná rovina obalové plochy



obr.6

V regulárním bodě P obalové plochy K (plochy součásti nebo nástroje) existuje právě jedna tečná rovina, ve které leží všechny tečné vektory. Má-li libovolný bod M v rovině τ radiusvektor R , potom vektor $(R - q)$ musí být komplanární s vektory $\frac{\partial K}{\partial u^2}$, $\frac{\partial K}{\partial \phi}$. Rovnice tečné roviny je:

$$(R - q) \left(\frac{\partial K}{\partial u^2} \times \frac{\partial K}{\partial \phi} \right) = 0 \quad (4.7)$$

Opět dosažením rovnic (4.1), (4.2) resp. (4.3), (4.4) do rovnice (4.7), získáme rovnici tečné roviny k obalové ploše součásti resp. nástroje.

4.4 Odvození druhého základního tenzoru plochy

Druhý základní tenzor plochy hraje velmi důležitou roli při zkoumání vlastností plochy. To proto, že umožňuje určení křivosti plochy, optimálního bodového záberu, optimálního poloměru nástroje atd.

Někdy bývá v literatuře nevhodně druhý základní tenzor plochy nazýván tenzorem křivosti. Ale (Riemannův-Christoffelův) tenzor křivosti je tenzorem čtvrtého řádu, pomocí kterého se

určuje např. kritérium rozvinutelnosti plochy. Dále budeme používat pouze druhý základní tenzor plochy a proto jej budeme krátce nazývat tenzor plochy.

4.4.1 Tenzor plochy určené parametricky

Mějme plochu (3.20)

$$K = A_{02}^{\varphi} A_{03}^{p\varphi} X(u^1, u^2, \varphi, u^2), \quad (4.8)$$

eventuálně plochu (3.26)

$$K = A_{02}^{\varphi} [L + A_{03}^{p\varphi} (X(u^1, u^2, \varphi, u^2) \cdot L)]. \quad (4.9)$$

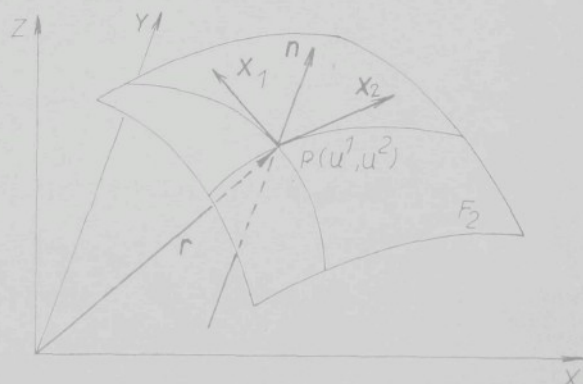
Nechť u^1 zastupuje u^1 a u^2 zastupuje φ . Potom obecně rovnice (4.8), (4.9) lze napsat:

$$X = X(u^1, u^2). \quad (4.10)$$

Nechť:

$$\begin{aligned} X_1 &= X_1(u^1, u^2), \\ X_2 &= X_2(u^1, u^2), \\ n &= n(u^1, u^2), \end{aligned} \quad (4.11)$$

určují v každém bodě F_2 dva souřadnicové vektory X_1, X_2 a jednotkový normální vektor n (obr.7)



obr.7

Zaveďme si pro ně označení:

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial u^i \partial u^j} &= \frac{\partial X_j}{\partial u^i} = X_{ij}, \\ \frac{\partial n}{\partial u^i} &= n_i. \end{aligned} \quad (4.12)$$

V pevném bodě $P(u^1, u^2)$ plochy F_2 definujeme rovnici:

$$h_{ij} = -n_i \cdot X_j \quad (4.13)$$

čtyři čísla h_{ij} , která se nazývají druhým základním tenzorem plochy. Tento tenzor je zřejmě symetrický. Platí:

$$h_{ij} = h_{ji} = (h_{ij})^*, \quad (4.14)$$

kde $(h_{ij})^*$ je transponovaný tenzor.

Dále platí:

$$h_{ij} = n \cdot X_{ij} \quad (4.15)$$

Podrobně je to rozvedeno v [L.2] a [L.3].

4.4.2 Tenzor plochy určený skalární funkcí vektorového argumentu

Rovnici (4.10) lze napsat:

$$F(r) = F_0 \quad (4.16)$$

Normála této plochy je kolineární s $\text{grad} F_0$.

$$n = \frac{\text{grad} F}{|\text{grad} F|} \quad (4.17)$$

$$n \cdot t = 0 \quad (4.18)$$

$$t = \frac{dr}{ds} \quad ,$$

kde

$$s = \int_0^{\alpha} |\dot{r}| d\alpha \quad , \quad (4.19)$$

α je reálná proměnná, s je délka oblouku křivky

$$n = n(r) |\text{grad } F|^{-1} \text{ grad } F \quad . \quad (4.20)$$

$$h_{ij} = - \frac{dn(r)}{dr} \quad (4.21)$$

Z uvedených dvou způsobů má však největší praktický význam první metoda, kdy plocha nástroje, event. součásti je určena parametricky; proto budeme dále používat první metody.

Druhý základní tenzor plochy z rovnice (3.20):

$$X_{ij} = \frac{\partial K}{\partial u^i \partial u^j} = \frac{\partial (A_{02}^{\varphi} A_{03}^{p\varphi} X(u^1, u^2, \varphi, u^2))}{\partial u^i \partial u^j} \quad (4.22)$$

(Platí předpoklad uvedený pod rovnicí (4.5)).

$$X_{11} = \frac{\partial K}{\partial u^2 \partial u^2} = A_{02}^{\varphi} A_{03}^{p\varphi} X_{u^2, u^2} \quad (4.23)$$

$$X_{22} = \frac{\partial K}{\partial \varphi \partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi} [R(0 + p A_{02}^{\varphi} A_{03}^{p\varphi}) A_{02}^{\varphi} A_{03}^{p\varphi} X + A_{02}^{\varphi} A_{03}^{p\varphi} X_{\varphi}] \quad (4.24)$$

$$X_{12} = X_{21} = \frac{\partial K}{\partial u^2 \partial \varphi} = R(0 + p A_{02}^{\varphi} A_{03}^{p\varphi}) A_{02}^{\varphi} A_{03}^{p\varphi} X_{u^2, \varphi} + A_{02}^{\varphi} A_{03}^{p\varphi} X_{u^2, \varphi} \quad (4.25)$$

Dosadíme-li (4.3), (4.4), (4.22) do (4.15) bude tenzor:

$$h_{ij} = \frac{A_{02}^{\varphi} A_{03}^{p\varphi} X_2 \times [R(O_2 + p A_{02}^{\varphi} O_3) A_{02}^{\varphi} A_{03}^{p\varphi} X + A_{02}^{\varphi} A_{03}^{p\varphi} X_{\varphi}]}{\left| A_{02}^{\varphi} A_{03}^{p\varphi} X_2 \times [R(O_2 + p A_{02}^{\varphi} O_3) A_{02}^{\varphi} A_{03}^{p\varphi} X + A_{02}^{\varphi} A_{03}^{p\varphi} X_{\varphi}] \right|}$$

$$\frac{\partial(A_{02}^{\varphi} A_{03}^{p\varphi} X(u^1(u^2, \varphi), u^2))}{\partial u^i \partial \varphi^j} \quad (4.26)$$

Podobně lze najít tenzor plochy pro pohyb kolem mimoběžných os.

4.4.3 Stanovení křivosti plochy součásti (nástroje)

Obrátíme se k rovnicím (3.20) a (3.26). Hovořili jsme o parametrických křivkách. Některé parametrické rovnice:

$$u^2 = u^2(t) \quad (4.27)$$

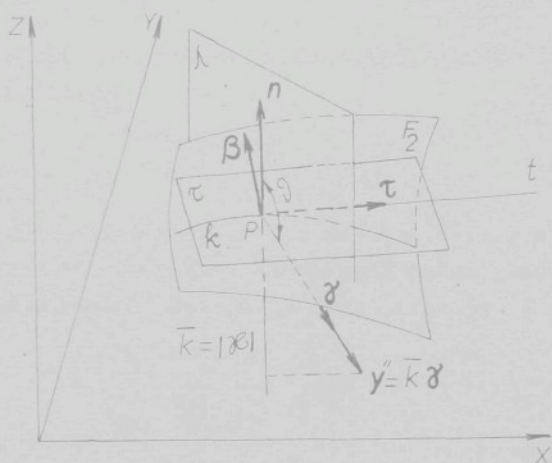
$$\varphi = \varphi(t).$$

Zřejmě lze určit délku oblouku s křivky na ploše, a zavést ji jako přirozený parametr pomocí substituce $t = t(s)$:

$$u^2 = u^2(t(s)) = u^2(s) \quad (4.28)$$

$$\varphi = \varphi(t(s)) = \varphi(s).$$

Sestrojíme v bodě P křivky k jednotkový tečný vektor τ , jednotkový vektor hlavní normály δ a jednotkový vektor binormály β (obr.8). Jednotkový normální vektor plochy F_2 je n . Úhel mezi vektory n a δ je ν .



obr. 8

Křivka k po zavedení přirozeného parametru do rovnice (4.10) nabude tvar:

$$X = X(u^1(s), u^2(s)). \quad (4.29)$$

Normální křivost $\mathcal{K}$ plochy F_2 :

$$\mathcal{K} = y'' \cdot n \quad (4.30)$$

$$y'' = \bar{k} \gamma,$$

kde $|y''| = k = \sqrt{y'' \cdot y''}$ je velikost vektoru první křivosti a $|n| = 1$.

$$\text{Potom } \mathcal{K} = k \cdot \cos \beta, \quad (4.31)$$

což lze napsat v tenzorové formuli ([L.2], [L.4]):

$$\mathcal{K} = h_{ij} (u^i)^{\cdot} (u^j)^{\cdot} \quad (4.32)$$

$$\mathcal{K} = t h_{ij} t. \quad (4.33)$$

Pro kterýkoliv jiný šikmý řez s hlavní normálou n platí

$$\mathcal{K}_s = \mathcal{K} |\cos \nu|. \quad (4.34)$$

Závislost mezi poloměrem křivosti šikmého řezu a hlavní křivostí:

$$r = r_{\text{os}} \cos \nu. \quad (4.35)$$

Nahradíme-li vektor (u^i) z rovnice (4.32) nenulovým kolíneárním vektorem du^i , který není nutně jednotkovým vektorem, potom normální křivost je dána jako:

$$\mathcal{K} = \frac{h_{ij} \cdot du^i \cdot du^j}{g_{ij} \cdot du^i \cdot du^j} \quad (4.36)$$

$$g_{ij} = X_i \cdot X_j \quad (4.37)$$

Najdeme nyní hlavní normální křivosti, tj. křivosti v hlavních směrech.

Způsobem ukazaným v [L.1] rozřešíme rovnici (4.36) a dostaneme hodnoty hlavních normálních křivosti $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$.

Zavedeme další označení:

$$H = \frac{\mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2}{2} \quad (4.38)$$

$$K = \mathcal{K}_1 \mathcal{K}_2 \quad (4.39)$$

H nazýváme střední křivostí plochy F_2

K je Gaussova křivost plochy F_2

$$H = \frac{1}{2} \frac{g_{11}h_{22}^2 - 2g_{12}h_{21} + g_{22}h_{11}}{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2} \quad (4.40)$$

$$K = \frac{h_{11}h_{22} - (h_{12})^2}{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2} \quad (4.41)$$

Pomocí (4.40) a (4.41) lze vypočítat v daném bodě plochy hlavní normální křivosti $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$.

Druhý základní tenzor plochy h_{ij} v tečné rovině soustavy charakteristických vektorů ve směru hlavních řezů se definuje:

$$h_{ij} = \begin{vmatrix} \mathcal{K}_1 & 0 \\ 0 & \mathcal{K}_2 \end{vmatrix} \quad (4.42)$$

První skalární invariant je roven součtu obou hlavních křivostí, tj. dvojnásobné střední křivosti plochy F_2

$$S(h_{ij}) = \mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2 \quad (4.43)$$

Druhý skalární invariant je roven součinu hlavních křivostí, tj. Gaussově křivosti plochy F_2 .

Když jednotkový tečný vektor $\hat{t}$ svírá s hlavním vektorem t_1 úhel φ , je vektor $\hat{t}$ určen rovnicí:

$$\hat{t} = t_1 \cos \varphi + t_2 \sin \varphi. \quad (4.44)$$

Potom je křivost normálního řezu o tečném vektoru $\hat{t}$ (dle rovnice (4.33)):

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{\hat{t}} &= \hat{t} h_{ij} \hat{t} = \\ &= (t_1 \cos \varphi + t_2 \sin \varphi) \begin{vmatrix} \mathcal{K}_1 & 0 \\ 0 & \mathcal{K}_2 \end{vmatrix} (t_1 \cos \varphi + t_2 \sin \varphi) = \\ &= (t_1 \mathcal{K}_1 \cos \varphi + t_2 \mathcal{K}_2 \sin \varphi) (t_1 \cos \varphi + t_2 \sin \varphi) = \\ &= t_1^2 \mathcal{K}_1 \cos^2 \varphi + t_2^2 \mathcal{K}_2 \sin^2 \varphi \end{aligned}$$

$$\mathcal{K}_{\hat{t}} = \mathcal{K}_1 \cos^2 \varphi + \mathcal{K}_2 \sin^2 \varphi. \quad (4.45)$$

Uvedeme bez důkazu klasifikaci bodů ležících na ploše:

1 - Eliptické body, když Gaussova křivost je kladná; to vyhovuje rovnici:

$$h_{11}h_{22} - (h_{12})^2 > 0. \quad (4.46)$$

2 - Parabolické body, když Gaussova křivost je nulová, ale existuje aspoň jedno číslo h_{ij} různé od nuly, tj.

$$h_{11}h_{22} - (h_{12})^2 = 0 \quad (4.47)$$

a alespoň jedno číslo $h_{ij} \neq 0$.

3 - Bod plochy je hyperbolickým bodem, když Gaussova křivost je záporná, tj.

$$h_{11}h_{22} - (h_{12})^2 < 0. \quad (4.48)$$

4 - Bod plochy je planárním bodem, když Gaussova křivost je nulová a všechna čísla $h_{ij} = 0$.

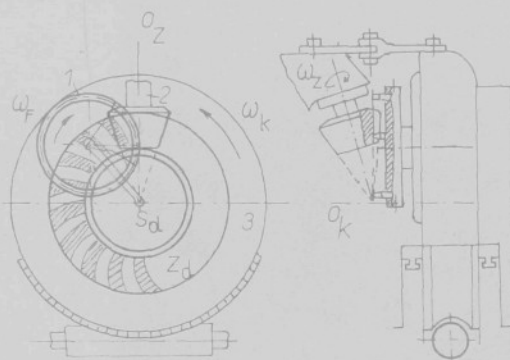
V předcházejících kapitolách byly odvozeny možnosti vytvoření obrobených ploch (resp. ploch nástroje). Na základě toho byly vyvozeny některé důležité vlastnosti ploch, které jsou nezbytné pro inženýrské úlohy při řešení optimalizace nástroje, zvětšení přesnosti součástí, využití vlastností ploch pro výzkum možnosti podřezání u kuželových kol atd. Je potřeba dodat, že pokud chceme získat ještě další informace o ploše jako např. významné směry na ploše, sférické zobrazení plochy, křivky na ploše, rozvinutelnost plochy atd., doporučujeme [L.2] s použitím výsledků, které byly odvozeny v předcházejících odstavcích této práce.

Nyní můžeme aplikovat tuto teorii na výrobu kuželových kol, kde se vyskytují složité pohyby s kinematickými vazbami

5. Vytvoření povrchu boku zubů kuželových kol

5.1 Kuželová kola s kruhově zakřivenými zuby Gleason

5.1.1 Princip práce a kinematická vazba součástí - kolébky - nástroje



obr.9

Princip práce při výrobě kuželových kol s kruhově zakřivenými zuby vyplývá z dvoubokého záběru (odvalu) výrobního kola s obráběným ozubeným kolem 2 (Z_1 , Z_2) (obr.9). Výrobní kolo Z_2 (náhradní kolo) je představováno kolébkou 3 s upnutou frézovací hlavou (1). Nože hlavy mají lichoběžníkový tvar a jsou uspořádány obvykle za sebou s vnějším a vnitřním břitem. Frézovací hlava 1 se otáčí řeznou rychlostí v (n_F) nebo ω_F , která není vázaná na ostatní pracovní pohyby. Aby se dosáhlo správného odvalení, je nutno, aby vrchol roztečného kužele frézovaného kola 2 byl totožný se středem výrobního kola S_0 , tj. osa součásti O_Z musí protínat osu kolébky O_K - a aby rovina vrcholů ostří nožů tvořila tečnou rovinu patního kužele součásti. Úhel odvalovacího pohybu musí být tak velký, aby se obrobila celá zubní mezera. Frézovací hlava je pevně spojena se středem kolébky 3, která

se otáčí úhlovou rychlostí ω_k kolem osy O_k . Součást má osu rotace O_z s úhlovou rychlostí ω_z . Iedy převodový poměr zaberu výrobního kola (počet zubů Z_c) a obráběného ozubeného kola je daný:

$$\frac{\omega_k}{\omega_z} = \frac{Z_d}{Z_k} = p = \sin \delta_k, \quad (\delta_k = 0.96) \quad (5.1)$$

kde δ_k je úhel rozteč. kužele obrobku.

Jestliže se obrobek do konečné polohy dostane z původní polohy otočením o úhel φ , potom při předpokladu, že pohyb je rovnoměrně rotační, kolébka se otočí o úhel:

$$\psi = p \cdot \varphi. \quad (5.2)$$

$$\omega_k = p \cdot \omega_z$$

Z toho principu práce vidíme, že úlohu můžeme řešit na základě kap. 3.2.1, kde osy součástí a nástroje jsou různoběžné.

Na obr. 10 je nakreslena poloha obráběného kola, kolébky a frézovací hlavy podle skutečných údajů při výrobě jednoho druhu kola v n.p. Hrádek nad Nisou. Nyní můžeme přikročit k řešení konkrétní situace.

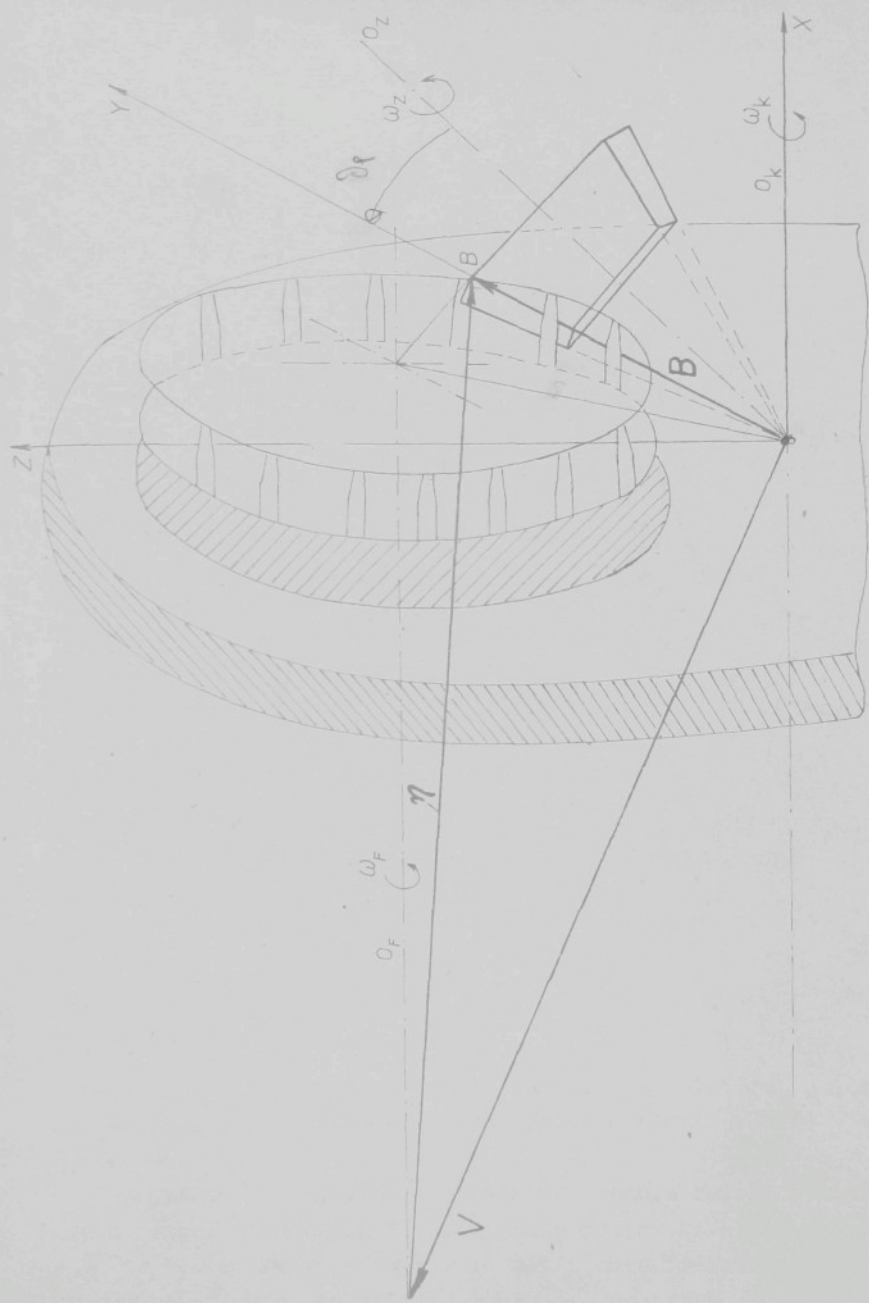
5.1.2 Rozbor profilu nástroje a plocha boku zubu

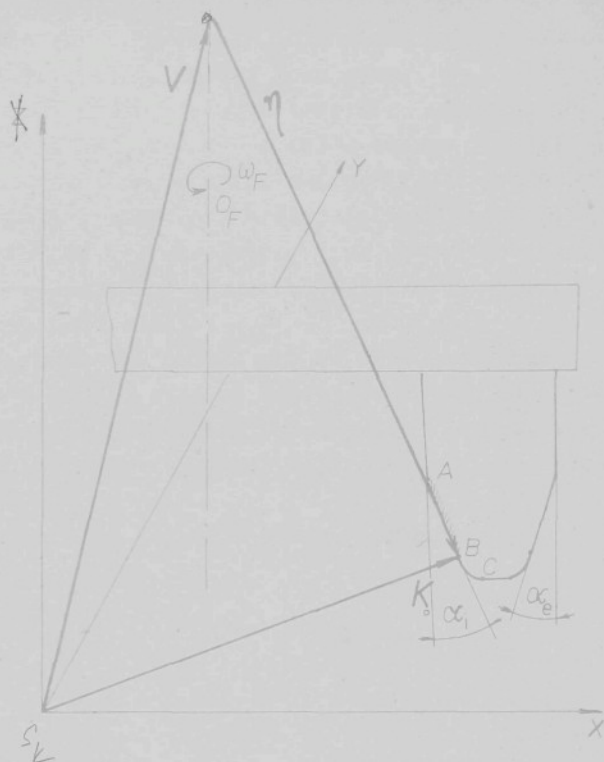
Ve frézovací hlavě jsou upevněny nože, které mají lichoběžníkový tvar (obr. 11). Každé ostří nože je tvořeno ze dvou částí. Část přímková AB a část oblouková BC.

A - Přímková část

Při výrobě kola Gleason má kužel ostří osu totožnou s osou frézovací hlavy. Proto prodloužené ostří AB protíná osu O_F v bodě M. Jestliže parametr u^1 leží na AB, potom plocha kužele nástroje vytvořená ostřím má rovnici:

$$K_{O_F} = u^1 A_{O_F} u^2 \eta \quad (5.3)$$





obr.11

Plocha kužele ostří má v systému souřadnic rovnici

$$K_0 = u^1 A_{0_F} u^2 \eta + V, \quad (5.4)$$

kde u^2 je úhel pootočení kužele nástroje z počáteční polohy na začátku výroby zubu do polohy při dokončení jednoho boku zubu,

V je vektor od počátku souřadnic k vrcholu kužele vytvořeného rotací prodlouženého ostří nože frézovací hlavy,

η je vektor od vrcholu kužele ostří nože frézovací hlavy k zvolenému bodu na ostří.

α_1 a α_e jsou úhly nože po úpravě břitu nože.
(Bude uvedena metoda korekce pro vstupní hodnoty).

Nyní podle obr.9 resp. obr.10 a podle kapitoly 3.2.1 snadno vyšetříme obalové plochy boku zubu.

Zastavíme-li pohyb součásti (obr.10), potom kolébka 3 má tenzor otočení $A_{O_K}^{p\varphi}$ kolem své osy a tenzor otočení $A_{O_Z}^{\varphi}$ kolem osy obrobku. (Zde je nutno zdůraznit, že podle směru otáčení os kolébky, obrobku a frézy, je možno rozlišit vnitřní nebo vnější valení a podle toho je potřeba zvolit orientaci jednotlivých os i směr úhlových rychlostí pro vstupní hodnoty počítače!).

Bod B je počáteční poloha dotyku nože s obrobkem. S je střed frézovací hlavy. (V n.p. Hrádek nad Nisou se nastaví osy O_F , O_K kolmo na patu zubu. Potom určení jednotkových vektorů os je jednoznačné; svěsk osy mohou mít libovolnou polohu).

Podle rovnice (3.11) máme plochu nástroje:

$$K = A_{O_Z}^{\varphi} A_{O_K}^{p\varphi} (V + u^1 A_{O_F}^{u^2} \eta) = A_{O_Z}^{\varphi} A_{O_K}^{p\varphi} K_0, \quad (5.5)$$

kde

$$K_0 = V + u^1 A_{O_F}^{u^2} \eta.$$

u^1 je parametr podél řezné hrany AB a splňuje podmínku:

$$0 \leq u^1 \leq 1 \quad ? \quad (5.6)$$

Pokud $u^1 > 1$, potom obrábění se koná špičkou nože při $u^1 = 1$.

O_Z je jednotkový vektor osy součásti

O_K je jednotkový vektor osy kolébky

O_F je jednotkový vektor osy frézy

Podmínka valení:

$$[K_{u^1}^1, K_{u^2}^2, K_{\varphi}^{\varphi}] = 0 \quad (5.7)$$

$$K_{u^1}^1 = \frac{\partial K}{\partial u^1} = A_{O_Z}^{\varphi} A_{O_K}^{p\varphi} A_{O_F}^{u^2} \eta \quad (5.8)$$

$$K_{u^2} = \frac{\partial K}{\partial u^2} = u^1 A_{o_z}^\varphi A_{o_k}^{p\varphi} R(O_F) A_{o_F}^{u^2} \eta \quad (5.9)$$

$$K_\varphi = \frac{\partial K}{\partial \varphi} = O_z \times A_{o_z}^\varphi A_{o_k}^{p\varphi} K_o + p A_{o_z}^\varphi (O_k \times A_{o_k}^{p\varphi}) K_o = \\ O_z \times A_{o_z}^\varphi A_{o_k}^{p\varphi} K_o + p A_{o_z}^\varphi O_k \times A_{o_z}^\varphi A_{o_k}^{p\varphi} K_o$$

$$K_\varphi = (O_z + p A_{o_z}^\varphi O_k) \times A_{o_z}^\varphi A_{o_k}^{p\varphi} K_o =$$

$$(O_z + p A_{o_z}^\varphi O_k) \times K =$$

$$= R(O_z + p A_{o_z}^\varphi O_k) A_{o_z}^\varphi A_{o_k}^{p\varphi} (V + u^1 A_{o_F}^{u^2} \eta). \quad (5.10)$$

Dosadíme rovnice (2.6), (5.9), (5.10) do rovnice (5.7)
a dostaneme:

$$(A_{o_z}^\varphi A_{o_k}^{p\varphi} A_{o_F}^{u^2} \eta \times u^1 A_{o_z}^\varphi A_{o_k}^{p\varphi} R(O_F) A_{o_F}^{u^2} \eta).$$

$$: R(O_z + p A_{o_z}^\varphi O_k) A_{o_z}^\varphi A_{o_k}^{p\varphi} (V + u^1 A_{o_F}^{u^2} \eta) = 0 \quad (5.11)$$

$$(A_{0Z}^{\varphi} A_{0K}^{p\varphi} A_{0F}^{u^2} \eta \times u^1 A_{0Z}^{\varphi} A_{0K}^{p\varphi} R(O_F) A_{0F}^{u^2} \eta) .$$

$$. R(O_Z + p A_{0Z}^{\varphi} O_K) A_{0Z}^{\varphi} A_{0K}^{p\varphi} V +$$

$$(A_{0Z}^{\varphi} A_{0K}^{p\varphi} A_{0F}^{u^2} \eta \times u^1 A_{0Z}^{\varphi} A_{0K}^{p\varphi} R(O_F) A_{0F}^{u^2} \eta) .$$

$$. R(O_Z + p A_{0Z}^{\varphi} O_K) A_{0Z}^{\varphi} A_{0K}^{p\varphi} u^1 A_{0F}^{u^2} \eta = 0.$$

...(5.12)

Pro vyloučení u^1 :

$$u^1 = - \frac{(A_{0Z}^{\varphi} A_{0K}^{p\varphi} A_{0F}^{u^2} \eta \times A_{0Z}^{\varphi} A_{0K}^{p\varphi} R(O_F) A_{0F}^{u^2} \eta) \cdot R(O_Z + p A_{0Z}^{\varphi} O_K) A_{0Z}^{\varphi} A_{0K}^{p\varphi} V}{(A_{0Z}^{\varphi} A_{0K}^{p\varphi} A_{0F}^{u^2} \eta \times A_{0Z}^{\varphi} A_{0K}^{p\varphi} R(O_F) A_{0F}^{u^2} \eta) \cdot R(O_Z + p A_{0Z}^{\varphi} O_K) A_{0Z}^{\varphi} A_{0K}^{p\varphi} A_{0F}^{u^2} \eta}$$

$$(A_{0Z}^{\varphi} A_{0K}^{p\varphi} A_{0F}^{u^2} \eta \times A_{0Z}^{\varphi} A_{0K}^{p\varphi} R(O_F) A_{0F}^{u^2} \eta) \cdot R(O_Z + p A_{0Z}^{\varphi} O_K) A_{0Z}^{\varphi} A_{0K}^{p\varphi} A_{0F}^{u^2} \eta$$

...(5.13)

$$u^1 \ominus = \frac{\det [A_{0Z}^{\varphi} A_{0K}^{p\varphi} A_{0F}^{u^2} \eta; A_{0Z}^{\varphi} A_{0K}^{p\varphi} R(O_F) A_{0F}^{u^2} \eta; R(O_Z + p A_{0Z}^{\varphi} O_K) A_{0Z}^{\varphi} A_{0K}^{p\varphi} V]}{\det [A_{0Z}^{\varphi} A_{0K}^{p\varphi} A_{0F}^{u^2} \eta; A_{0Z}^{\varphi} A_{0K}^{p\varphi} R(O_F) A_{0F}^{u^2} \eta; R(O_Z + p A_{0Z}^{\varphi} O_K) A_{0Z}^{\varphi} A_{0K}^{p\varphi} A_{0F}^{u^2} \eta]}$$

...(5.14)

Zde je vidět, že pro případ přímkové části ostří je parametr u^1 explicitně vyjádřený rovnicí (5.14). Avšak právě strana rovnice (5.13) resp. (5.14) je velmi složitá. Její

výpočet se usnadní řešením na samočinném počítači. Parametr u^1 splňuje rovnici (5.6) a umožňuje nám poznat, jaká je poloha ostří nebo jaká je vzdálenost bodu ostří od špičky nože, příslušná danému úhlu otočení součástí a frézovací hlavy při výrobě boku zubu. Rovnicí (5.14) lze stručně psát:

$$u^1 = u^1(\varphi, u^2). \quad (5.15)$$

Dosažením (5.14) resp. (5.15) do (5.5), najdeme:

$$K = A_{O_Z}^{\varphi} A_{O_K}^{p\varphi} V + \frac{-\det \left[A_{O_Z}^{\varphi} A_{O_K}^{p\varphi} A_{O_F}^{u^2} \eta; A_{O_Z}^{\varphi} A_{O_K}^{p\varphi} R(O_F) A_{O_F}^{u^2} \eta; R(O_Z) A_{O_K}^{\varphi} A_{O_K}^{p\varphi} V \right]}{\det \left[A_{O_Z}^{\varphi} A_{O_K}^{p\varphi} A_{O_F}^{u^2} \eta; A_{O_Z}^{\varphi} A_{O_K}^{p\varphi} R(O_F) A_{O_F}^{u^2} \eta; R(O_Z) A_{O_K}^{\varphi} A_{O_K}^{p\varphi} A_{O_F}^{u^2} \eta \right]} \cdot \left. A_{O_F}^{u^2} \eta \right\} \quad (5.16)$$

resp.

$$K = A_{O_Z}^{\varphi} A_{O_K}^{p\varphi} (V + u^1(u^2, \varphi) A_{O_F}^{u^2} \eta). \quad (5.17)$$

Pro ilustraci uvedu tenzor otočení $A_{O_Z}^{\varphi}$ kolem osy O_Z , která leží v rovině XY (obr.10) a svírá s osou Z úhel patního kužele δ_p .

Jednotkový vektor osy součástí:

$$O_Z = O_Z(\sin \delta_p, \cos \delta_p, 0). \quad (5.18)$$

$$O_Z \cdot O_Z = \begin{pmatrix} \sin^2 \delta_p & \sin \delta_p \cos \delta_p & 0 \\ \cos \delta_p \sin \delta_p & \cos^2 \delta_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.19)$$

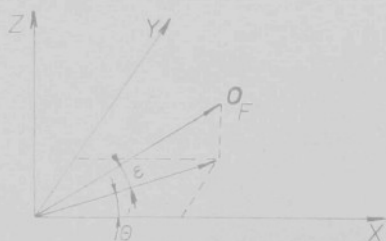
$$R(O_Z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cos \delta_p \\ 0 & 0 & -\sin \delta_p \\ -\cos \delta_p & \sin \delta_p & 0 \end{pmatrix} \quad (5.20)$$

Po dosažení rovnic (5.19), (5.20) do (2.11) dostaneme:

$$A_{O_Z}^\varphi = \begin{pmatrix} \cos^2 \delta_p \cos \varphi + \sin^2 \delta_p & -\sin \delta_p \cos \delta_p \cos \varphi + \sin \delta_p \cos \delta_p & \\ -\cos \delta_p \sin \delta_p \cos \varphi + \cos \delta_p \sin \delta_p & \sin^2 \delta_p \cos \varphi + \cos^2 \delta_p & \\ -\cos \delta_p \sin \varphi & \sin \delta_p \sin \varphi & \\ \cos \delta_p \sin \varphi & & \\ -\sin \delta_p \sin \varphi & & \\ \cos \varphi & & \end{pmatrix} \quad (5.21)$$

Určení tenzoru otočení při obecné poloze osy frézy O_F , která je daná jednotkovým vektorem (obr.12):

$$O_F = O_F (\cos \varepsilon \cos \theta, \cos \varepsilon \sin \theta, \sin \theta). \quad (5.22)$$



obr.12

$$O_F \cdot O_F = \begin{pmatrix} \cos^2 \varepsilon \cos^2 \theta & ; & \cos^2 \varepsilon \cos \theta \sin \theta & ; & \cos \varepsilon \cos \theta \sin \theta \\ \cos^2 \varepsilon \cos \theta \sin \theta & ; & \cos^2 \varepsilon \sin^2 \theta & ; & \cos \varepsilon \sin^2 \theta \\ \cos \varepsilon \cos \theta \sin \theta & ; & \cos \varepsilon \sin^2 \theta & ; & \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (5.23)$$

$$R(O_F) = \begin{pmatrix} 0 & ; & -\sin \theta & ; & \cos \varepsilon \sin \theta \\ \sin \theta & ; & 0 & ; & -\cos \varepsilon \cos \theta \\ -\cos \varepsilon \sin \theta & ; & \cos \varepsilon \cos \theta & ; & 0 \end{pmatrix} \quad (5.24)$$

Po dosazení (5.23) a (5.24) do (2.11) a po úpravě:

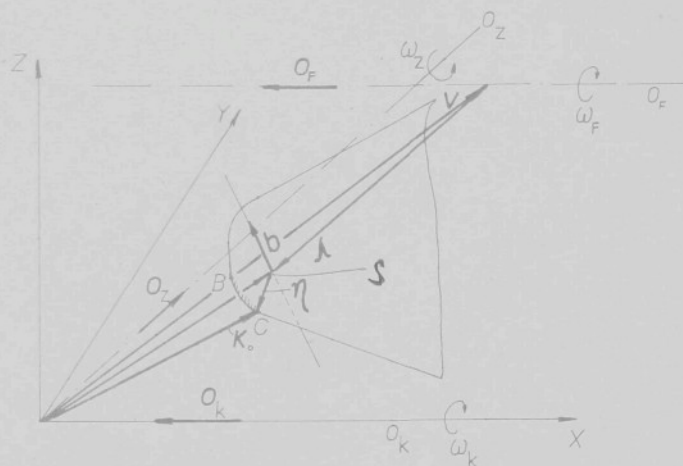
$$A_{O_F}^{u^2} = \begin{pmatrix} \cos u^2 + 2\cos^2 \varepsilon \cos^2 \theta \sin^2 \frac{u^2}{2} & ; & 2\cos^2 \varepsilon \cos \theta \sin \theta \sin^2 \frac{u^2}{2} - \\ \sin \theta \sin u^2 + 2\cos^2 \varepsilon \cos \theta \sin \theta \sin^2 \frac{u^2}{2} & ; & \cos u^2 + \\ 2\cos \varepsilon \cos \theta \sin \theta \sin^2 \frac{u^2}{2} - \cos \varepsilon \sin \theta \sin u^2 & ; & 2\cos \varepsilon \sin^2 \theta \sin^2 u \\ \sin \theta \sin u^2 & ; & 2\cos \varepsilon \cos \theta \sin^2 \frac{u^2}{2} + \cos \varepsilon \sin \theta \sin u^2 \\ 2\cos^2 \varepsilon \sin^2 \theta \sin^2 \frac{u^2}{2} & ; & 2\cos \varepsilon \sin^2 \theta \sin^2 \frac{u^2}{2} \cos \varepsilon \cos \theta \sin^2 u^2 \\ + \cos \varepsilon \cos \theta \sin u^2 & ; & \cos^2 \theta \cos u^2 + \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad \dots (5.25)$$

Když je osa frézy rovnoběžná s osou λ , t.j. vektor O_F má souřadnice (1, 0, 0) neboli úhly θ , ε jsou rovny nule, potom z rovnice (5.25) dostaneme jednoduchý vztah:

$$A_{O_F}^{u^2} = \begin{pmatrix} 1 & ; & 0 & ; & 0 \\ 0 & ; & \cos u^2 & ; & -\sin u^2 \\ 0 & ; & \sin u^2 & ; & \cos u^2 \end{pmatrix} \quad (5.26)$$

Což je případ otáčení v rovině.

B - Oblouková část



obr.13

Co se týká řešení souřadnic boku zubu pro obloukovou část nože, je situace složitější tím, že parametr u^1 už není explicitně vyjádřitelný. Oblouk BC (obr.13) má střed S, který má jednotkovou binormálu b a zároveň osu části kružnice BC. Tensor otočení kolem osy b je A_b^t .

t je parametr otočení bodu na kružnici kolem středu S

η je vektor k bodu kružnice ze středu S

V je vektor z počátku souřadnic k bodu ležícímu na ose O_F

K_0 je vektor od počátku souřadnic k bodu ostří na obloukové části nože; λ je vektor od bodu ležícího na ose O_K ke středu S. Plocha nástroje vytvořená pohybem ostří (obdobně jako přímkové ostří AB) je vyjádřena :

$$K = A_{O_Z}^{\varphi} A_{O_K}^{p\varphi} (V + A_{O_F}^{u^2} [A_b^t \eta + \lambda]). \quad (5.27)$$

Platí:

$$[K_t, K_u^2, K_\varphi] = 0 \quad (5.28)$$

$$K_t = \frac{\partial K}{\partial t} = A_{O_Z}^{\varphi} A_{O_K}^{p\varphi} A_{O_F}^{u^2} (b \times A_b^t) \eta \quad (5.29)$$

$$K_t = A_{O_Z}^{\varphi} A_{O_K}^{p\varphi} A_{O_F}^{u^2} R(b) A_b^t \eta \quad (5.30)$$

$$K_u^2 = \frac{\partial K}{\partial u^2} = A_{O_Z}^{\varphi} A_{O_K}^{p\varphi} R(O_F) A_{O_F}^{u^2} (A_b^t \eta + \lambda) \quad (5.31)$$

$$K_{\varphi} = \frac{\partial K}{\partial \varphi} = O_Z \times A_{O_Z}^{\varphi} A_{O_K}^{p\varphi} (V + A_{O_F}^{u^2} [A_b^t \eta + \lambda]) +$$

$$p A_{O_Z}^{\varphi} O_K \times A_{O_Z}^{\varphi} A_{O_K}^{p\varphi} (V + A_{O_F}^{u^2} [A_b^t \eta + \lambda])$$

$$K_{\varphi} = R(O_Z + p A_{O_Z}^{\varphi} O_K) A_{O_Z}^{\varphi} A_{O_K}^{p\varphi} (V + A_{O_F}^{u^2} [A_b^t \eta + \lambda]). \quad (5.32)$$

Dosadíme (5.30), (5.31) a (5.32) do (5.28). Parametr t nelze však nyní vyjádřit jako u^1 z rovnice (5.14) explicitně. Jeho hodnotu je možno najít pouze pomocí samočinného počítače za použití následujících úprav.

V rovnicích (5.30), (5.31) a (5.32) považujeme za pevné a známé hodnoty φ a u^1 . Potom jediným neznámým parametrem je t .

$$K_t = B A_b^t \eta \quad (5.33)$$

$$\text{kde} \quad B = A_{O_Z}^{\varphi} A_{O_K}^{p\varphi} A_{O_F}^{u^2} R(b). \quad (5.34)$$

$$K_u^2 = D(A_b^t \eta + \lambda) \quad (5.35)$$

$$D = A_{0z}^{\varphi} A_{0k}^{p\varphi} R(0) A_{0F}^{u^2} \quad (5.36)$$

$$K_{\varphi} = F + L(A_b^t \eta + \Lambda) \quad (5.37)$$

$$F = R(0_z + p A_{0z}^{\varphi} 0_k) A_{0z}^{\varphi} A_{0k}^{p\varphi} V \quad (5.38)$$

$$L = R(0_z + p A_{0z}^{\varphi} 0_k) A_{0z}^{\varphi} A_{0k}^{p\varphi} A_{0F}^{u^2} \quad (5.39)$$

Z rovnic (5.33), (5.35), (5.37) lze získat:

$$K_t = B [(I - b_{\bullet} b) \cos t + R(b) \sin t + b_{\bullet} b] \eta \quad (5.40)$$

$$K_t = M \cos t + N \sin t + O, \quad (5.41)$$

$$\text{kde} \quad M = B [(I - b_{\bullet} b)] \eta \quad (5.42)$$

$$N = BR(b) \eta \quad (5.43)$$

$$O = B b_{\bullet} b \eta. \quad (5.44)$$

$$K_u^2 = D [(I - b_{\bullet} b) \cos t + R(b) \sin t + b_{\bullet} b] (\eta + \Lambda) \quad (5.45)$$

$$K_u^2 = P \cos t + Q \sin t + R, \quad (5.46)$$

$$\text{kde} \quad P = D (I - b_{\bullet} b) (\eta + \Lambda) \quad (5.47)$$

$$Q = DR(b) (\eta + \Lambda) \quad (5.48)$$

$$R = D b_{\bullet} b (\eta + \Lambda). \quad (5.49)$$

$$K_{\varphi} = F + L [(I - b_{\bullet} b) \cos t + R(b) \sin t + b_{\bullet} b] (\eta + \Lambda)$$

$$K_{\varphi} = S \cos t + U \sin t + V \quad (5.50)$$

$$S = L(1 - b_0 b)(\eta + \lambda) \quad (5.51)$$

$$U = LR(b)(\eta + \lambda) \quad (5.52)$$

$$V = F + L b_0 b(\eta + \lambda) \quad (5.53)$$

Za použití rovnic (5.41), (5.46), (5.50) určíme determinant:

$$\det [M \cos t + N \sin t + O; P \cos t + Q \sin t + R; \\ S \cos t + U \sin t + V] = 0 \quad (5.54)$$

$$\begin{aligned} & \cos^3 t [M, P, S] + \cos t \sin^2 t [M, Q, U] + \cos t [M, R, P] + \\ & \cos^2 t \sin t [N, P, S] + \sin t [N, R, V] + \cos^2 t [O, P, S] + \\ & \sin^2 t [O, Q, U] + [O, R, V] + \cos t \sin^2 t [N, P, U] + \\ & \cos t [O, P, V] + \cos^2 t \sin t [M, Q, S] + \sin^3 t [N, Q, U] + \\ & \sin t [O, Q, V] + \cos^2 t [M, R, S] + \sin^2 t [N, R, U] + \\ & \cos t \sin^2 t [N, Q, S] + \cos t [O, R, S] + \cos^2 t \sin t [M, P, U] + \\ & \sin t [N, O, U] + \cos^2 t [M, P, V] + \sin^2 t [N, Q, V] + \\ & \cos t \sin t [M, Q, V] + \cos t \sin t [M, R, U] + \cos t \sin t [N, P, V] \\ & + \cos t \sin t [O, Q, S] + \cos t \sin t [N, R, S] + \\ & \cos t \sin t [O, P, U] = 0 \end{aligned} \quad (5.55)$$

Po úpravě:

$$\begin{aligned} & \cos^3 t [M, P, S] + \sin^3 t [N, Q, U] + \cos^2 t \sin t ([N, P, S] + \\ & [M, O, S] + [M, P, U]) + \sin^2 t \cos t ([M, Q, U] + \\ & [N, P, U] + [N, Q, S]) + \cos^2 t ([O, P, S] + [M, R, S] \\ & + [M, P, V]) + \sin^2 t ([O, Q, U] + [N, R, U] + \\ & [N, Q, V]) + \cos t ([M, R, V] + [O, P, V] + [O, R, S]) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{sint} ([N, R, V] + [O, Q, V] + [O, R, U]) + \\ & \text{sintcost} ([M, Q, V] + [M, R, U] + [N, P, V] + \\ & [O, P, U] + [O, Q, S] + [N, R, S] + [O, R, V]) = 0 \end{aligned}$$

Neboli:

$$f(t) = a \cos^3 t + b \sin^3 t + d \cos^2 t \text{sint} + e \sin^2 t \text{cost} + f \cos^2 t + g \sin^2 t + k \text{cost} + l \text{sint} + m \text{costsint} + h, \quad (5.56)$$

$$\text{kde } a = [M, P, S]$$

$$b = [N, O, U]$$

$$d = [N, P, S] + [M, Q, S] + [M, P, U]$$

$$e = [M, Q, U] + [N, P, U] + [N, Q, S]$$

$$f = [O, P, S] + [M, R, S] + [M, P, V]$$

$$g = [O, Q, U] + [N, R, U] + [N, Q, V]$$

$$k = [M, R, V] + [O, P, V] + [O, R, S]$$

$$l = [N, R, V] + [O, Q, V] + [O, R, U]$$

$$h = [O, R, V]$$

$$m = [M, O, V] \cdot [M, R, U] \cdot [N, P, V] \cdot [O, P, U] \cdot [O, Q, S] \cdot [N, R, S]$$

Rovnice (5.56) je transcendentní vzhledem k neznámé t ! Koeficienty $a, b, d, e, f, g, k, l, m$ jsou konstantní.

Parametr t lze určit např. pomocí metody půlení intervalu nebo metody sečen (regula falsi) a nebo Newtonovou metodou s počátečním odhadem kořenu.

$$t_{i+1} = t_i - \frac{f(t_i)}{f'(t_i)} \quad (5.57)$$

t_{i+1} je nové přesnější řešení (nová aproximace)

t_i je staré řešení (stará aproximace).

Pokud není známa počáteční hodnota řešení (první aproximace), lze použít metody Bing-Vieta, Bernoulliho nebo Lobačevského... Poslední vypočítanou hodnotu nové aproximace považujeme za přesnou hodnotu t , tedy:

$$t = t(u^2, \varphi). \quad (5.58)$$

Po dosažení t z rovnice (5.56) do (5.27), dostaneme rovnici boku zubu vytvořeného obloukovou částí ostří nože:

$$K = A_{0z}^{\varphi} A_{0k}^{p\varphi} (V + A_{0f}^{u^2} [A_b^{t(\varphi, u^2)} \eta + \lambda]). \quad (5.59)$$

Z výše uvedených vztahů je videt, jak složité matematické vztahy vznikají při řešení těchto problémů. Ještě složitější případ nastane když osy kolébky a součásti jsou mimoběžné. Formální postup při řešení je tentýž jako při různoběžných osách a plocha nástroje je pak dána rovnicí (5.25). Lze však očekávat větší komplikace při numerickém řešení, náročnější program pro počítač a obtížnější stenovení vstupních hodnot, odpovídajících výrobě.

Nyní můžeme podle předcházejících kapitol najít tenzor plochy, její křivosti, tečny, normály. Podrobně to už zde nebudeme provádět. Tenzor plochy má obecnější použití a proto uvedeme aspoň stručný výsledek.

Podle (4.15) a (5.16) resp. (5.17), (5.59) má tenzor plochy boku zubu tvar:

$$h_{ij} = n K_{ij} \quad (5.60)$$

$$n = \frac{\frac{\partial K}{\partial \varphi} \times \frac{\partial K}{\partial u^2}}{\frac{\partial K}{\partial \varphi} \times \frac{\partial K}{\partial u^2}} \quad (5.61)$$

$$K = \frac{\partial K}{\partial u^i \partial u^j} \quad (5.62)$$

Pro plochu vytvořenou přímkovou částí ostří pletí:

$$K_{11} = \frac{\partial K}{\partial \varphi \partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi} (R(O_z + p A_{0z}^{\varphi} O_k) A_{0z}^{\varphi} A_{0k}^{p\varphi} (V + u^1(u^2, \varphi) A_{0f}^{u^2} \eta) +$$

$$+ A_{O_Z}^{\varphi} A_{O_K}^{p\varphi} \frac{\partial u^1(u^2, \varphi)}{\partial \varphi} A_{O_F}^{u^2} \eta) \quad (5.63)$$

$$K_{22} = \frac{\partial K}{\partial u^2 \partial u^2} = \frac{\partial}{\partial u^2} \left(A_{O_Z}^{\varphi} A_{O_K}^{p\varphi} \frac{\partial u^1(u^2, \varphi)}{\partial u^2} A_{O_F}^u \eta + A_{O_Z}^{\varphi} A_{O_K}^{p\varphi} u^1(u^2, \varphi) R(O_F) \cdot \right. \\ \left. \cdot A_{O_F}^{u^2} \eta \right) \quad (5.64)$$

$$K_{12} = K_{21} = \frac{\partial}{\partial u^1} \left(R(O_Z + p A_{O_Z}^{\varphi} O_K) A_{O_Z}^{\varphi} A_{O_K}^{p\varphi} (V + u^1(u^2, \varphi) A_{O_F}^{u^2} \eta + \right. \\ \left. + A_{O_Z}^{\varphi} A_{O_K}^{p\varphi} \frac{\partial u^1(u^2, \varphi)}{\partial \varphi} A_{O_F}^{u^2} \eta) \right) \quad (5.65)$$

$$\frac{\partial K}{\partial \varphi} \times \frac{\partial K}{\partial \varphi} = \left(R(O_Z + p A_{O_Z}^{\varphi} O_K) A_{O_Z}^{\varphi} A_{O_K}^{p\varphi} (V + u^1(u^2, \varphi) A_{O_F}^{u^2} \eta + \right. \\ \left. + A_{O_Z}^{\varphi} A_{O_K}^{p\varphi} \frac{\partial u^1(u^2, \varphi)}{\partial \varphi} A_{O_F}^{u^2} \eta) \right) \times \\ \times \left(A_{O_Z}^{\varphi} A_{O_K}^{p\varphi} \frac{\partial u^1(u^2, \varphi)}{\partial u^2} A_{O_F}^{u^2} \eta + A_{O_Z}^{\varphi} A_{O_K}^{p\varphi} u^1(u^2, \varphi) R(O_F) A_{O_F}^{u^2} \eta \right), \quad (5.66)$$

kde $u^1(u^2, \varphi)$ je dáno vztahem (5.14).

rovnice (5.63), (5.64), (5.65), (5.66) není možno získat jednoduchou algebraickou derivací. Proto derivujeme metodou přírůstku elementu argumentu, která je použitelná pro počítač.

$$\frac{\partial K}{\partial \varphi} = \lim_{\Delta \varphi \rightarrow 0} \frac{K(\varphi + \Delta \varphi) - K(\varphi)}{\Delta \varphi} \quad (5.67)$$

$$\frac{\partial K}{\partial u^2} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{K(u^2 + \Delta u^2) - K(u^2)}{\Delta u^2} \quad (5.68)$$

Potom rovnici (5.63) lze přepsat na tvar:

$$\begin{aligned} K_{11} = & \left[R(O_Z + p A_{O_Z}^{\varphi \Delta \varphi} O_K) A_{O_Z}^{\varphi + \Delta \varphi} A_{O_K}^{p(\varphi + \Delta \varphi)} (V + u^1(u^2, \varphi + \Delta \varphi)) A_{O_F}^{u^2} \eta + \right. \\ & \left. + A_{O_Z}^{\varphi + \Delta \varphi} A_{O_K}^{p(\varphi + \Delta \varphi)} u^1(u^2, \varphi + \Delta \varphi) A_{O_F}^{u^2} \eta \right] - \\ & - \left[R(O_Z + p A_{O_Z}^{\varphi} O_K) A_{O_Z}^{\varphi} A_{O_K}^{p\varphi} (V + u^1(u^2, \varphi)) A_{O_F}^{u^2} \eta + \right. \\ & \left. + A_{O_Z}^{\varphi} A_{O_K}^{p\varphi} u^1(u^2, \varphi) A_{O_F}^{u^2} \eta \right] \frac{1}{\Delta \varphi} \quad (5.69) \end{aligned}$$

Podobně se to provede pro ostatní derivace. Tento způsob derivace platný všeobecně pro řešení podřezání zubu, sledování přesnosti převodu u ozubení Oerlikon, Klingelnberg.... V omezeném rozsahu práce není možno rozřešit všechny úlohy do detailu.

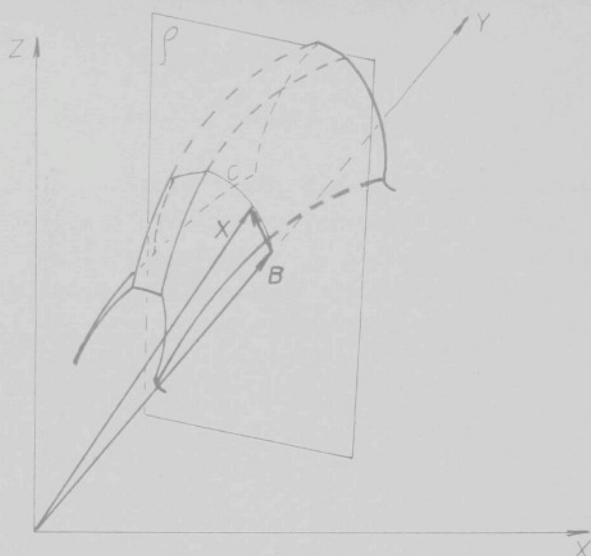
5.1.3 Křivky boku zubu příčného řezu kolem Gleason

Pro různé účely bývá někdy vhodné stanovit řezy bokem zubu. Jednoduchý případ je obr. 14, kdy rovina ρ je kolmá na vektor B v jeho koncovém bodě. Rovnice roviny ρ má tvar:

$$(X - B) \cdot B = 0 \quad (5.70)$$

Vektor X má koncový bod na křivce c , která je průsečnicí roviny ρ s obálkou boku zubu. Proto obalovou plochu dosadíme za vektor X . rovnice (5.70) má nyní tvar

$$\left[A_{O_Z}^{\varphi} A_{O_K}^{p\varphi} (V + u^1(u^2, \varphi)) A_{O_F}^{u^2} \eta - B \right] \cdot B = 0 \quad (5.71)$$



obr.14

Neboli:

$$A_{0Z}^{\varphi} A_{0K}^{p\varphi} V.B + A_{0Z}^{\varphi} A_{0K}^{p\varphi} u^1(u^2, \varphi) A_{0F}^{u^2} \eta B - B.B = 0$$

$$A_{0Z}^{\varphi} A_{0K}^{p\varphi} V.B + A_{0Z}^{\varphi} A_{0K}^{p\varphi} A_{0F}^{u^2} \eta B u^1(u^2, \varphi) - B.B = 0.$$

... (5.72)

Rovnice (5.72) je skalární funkcí dvou skalárních proměnných φ a u^2 . Parametr φ lze považovat za pevný; potom rovnice (5.72) má tvar:

$$h(u^2, \varphi) = a(\varphi) + b(u^2, \varphi) u^1(u^2, \varphi) - c = 0, \quad (5.73)$$

kde $a(\varphi) = A_{0Z}^{\varphi} A_{0K}^{p\varphi} V.B$

$$b(u^2, \varphi) = A_{0Z}^{\varphi} A_{0K}^{p\varphi} A_{0F}^{u^2} \eta B$$

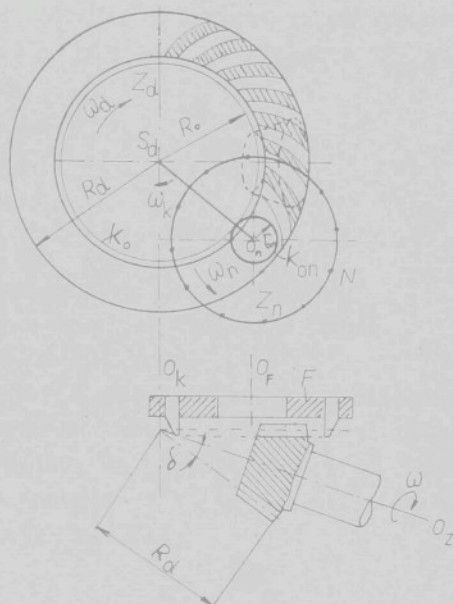
$$c = B.B$$

$u^1(u^2, \varphi)$ je dáno rovnicí (5.14).

Řešením rovnice (5.73) určíme u^2 opět pomocí Newtonovy metody při pevně zvoleném φ . Z (5.14) je možno určit u^1 a body křivky c příčného řezu. Způsob řešení je platný pro jakýkoliv druh kola, ať je válcové nebo kuželové s šikmými či se zakřivenými zuby, ať jde o jednoduchý nebo složitý způsob výroby.

5.2 Kuželová kola se zakřivenými zuby Oerlikon

5.2.1 Princip práce a kinematické závislosti při výrobě



obr.15

Nástrojem pro výrobu kol je nožová hlava F s noži s přímkovými profily, uloženými na obvodě hlavy (obr.15). Zuby na kolech se však neobrábějí dělicím způsobem jako u kol Gleason, nýbrž spojitým způsobem po celém obvodě frézovaného kola Z s postupným zavalováním do stále větší hloubky. Stroj koná stále plynulé otáčivé pohyby až do zhotovení jednoho obráběného kola. Ploché kolo (Z_d) (myšlené výrobní kolo) je fixováno na kolébce a je v záběru s obráběným kolem. Frézovací hlava F má různé nožové skupiny s vnitřním nebo

vnějším ostřím (viz. [L.6] , [L.27]). Epicykloida vznikne odvalením myšlené kružnice K_{on} , která má poloměr $r_{on} = m_n Z_n / 2$ (m_n je modul kola v normálním řezu, Z_n je počet nožů frézovací hlavy) po kružnici K_o o poloměru $R_o = Z_d \cdot m_n / 2$ (kde Z_d je počet zubů plochého kola). Skutečná výroba kuželových kol Cerlikon je založena na těchto kinematických vazbách :

1 - Předpokládejme, že osa O_n je pevná, a že frézovací hlava F se otáčí kolem středu O_n a unáší kružnici K_o , rotující kolem středu S_d . Pak relativní pohyb frézovací hlavy- plochého kola je stejný jako když se kružnice K_{on} valí po K_o . Musí platit vztah:

$$\frac{\omega_d}{\omega_n} = \frac{Z_n}{Z_d} = \frac{r_{on}}{R_o} \quad (5.74)$$

ω_d je úhlová rychlost plochého kola

ω_n je úhlová rychlost frézovací hlavy

Z_n je počet skupin nožů.

K rotujícímu plochému kolu a nástroji přiložíme roztečný kužel frézovaného obrobku. Jeho úhlová rychlost ω plyne z podmínky valení na plochem kole (ω_d) nebo ze zákona záběru zubů obráběného kola Z s plochým kolem Z_d - též s počtem nožových skupin Z_n . tedy:

$$\frac{\omega}{\omega_d} = \frac{Z_d}{Z} \quad (5.75)$$

$$\frac{\omega}{\omega_n} = \frac{Z_n}{Z} \quad (5.76)$$

V současném záběru jsou tři tělesa - frézovací hlava, ploché kolo a frézované kolo - pro něž platí:

$$\omega : \omega_n : \omega_d = \frac{1}{Z} : \frac{1}{Z_n} : \frac{1}{Z_d} \quad (5.77)$$

rovnice (5.77) popisuje případ, kdy osa frézy je nehybná, tj. unášec $S_d O_n$ je v klidu. Potom se na kole neodvalují zuby

základního kola v té formě, v jaké je na něm vytvářejí
nože frézy při předstevě, že ostří frézy (řezná část) by
zanechalo stopu. Zuby na základním kole jsou ve skutečnosti
vytvářeny přetržitým způsobem tak, jak ostří za sebou
přicházejí do záběru! Tuto nepříjemnost lze odstranit tím,
že unášeci, tj. kolébce v níž je fréza, přidělíme přídatnou
úhlovou rychlost ω_k (kolébka). Se zřetelem na přídatný
pohyb kolébky (při zachování úhlové rychlosti frézy ω_n)
bude úhlová rychlost plochého kola dána součtem $\omega_d + \omega_k$.
Úhlovou rychlost součásti při stojící kolébce lze vyjádřit:

$$\frac{\omega}{\omega_d} = \frac{Z_d}{Z} = \frac{R}{R_d} = \frac{R_d}{R_d \sin \delta} = \frac{1}{\sin \delta}$$

$$\omega = \frac{\omega_d}{\sin \delta}$$

(5.78)

δ je úhel roztečného kužele.

Úhlová rychlost součásti při otáčející se kolébce má rovnici:

$$\omega = \frac{\omega_d + \omega_k}{\sin \delta}$$

(5.79)

$$\omega_d = \frac{\omega Z}{Z_d} = \frac{\omega_n Z_n}{Z_d}$$

(5.80)

ale $Z_d = \frac{Z}{\sin \delta}$ (5.81)

Dosažením rovnic (5.81) a (5.80) do (5.79) máme:

$$\omega = \frac{\frac{\omega_n Z_n}{Z_d} + \omega_k}{\sin \delta} = \frac{\frac{\omega_n Z_n}{Z \sin \delta} + \omega_k}{\sin \delta}$$

$$\omega = \frac{\omega_n Z_n}{Z} + \frac{\omega_k}{\sin \delta} \quad (5.82)$$

Tím je vytvořena kinematická vazba mezi otáčkami frézovací hlavy, kolébky a obráběného kola. Pracovní odvalovací pohyb se tedy skládá ze tří nepřetržitých pohybů:

- 1 - Řezný pohyb frézovací hlavy ω_n, Z_n .
- 2 - Dělicí pohyb obráběného kola ω, Z .
- 3 - Otáčivý pohyb plochého kola, který zpětně působí přes diferenciální převod na otáčivý pohyb kolébky (ω_k).

Úhlová rychlost kolébky ω_k je malá při obrábění a určuje rychlost posuvu do záběru, kdežto pohyb frézovací hlavy vytváří řeznou rychlost. Úhlové rychlosti ω_n, ω jsou dosti velké, kdežto ω_k je velmi malá. Při této rychlosti opíše kolébka během výroby celého kola úhel $20 \pm 30^\circ$.

Tento zde podaný princip práce a kinematická vazba nám vytvořily základ pro teoretické vytváření boku zubu kuželových kol Cerlikon.

5.2.2 Obalové plochy boku zubu při odvalu s profilem nástroje

Zavedeme toto označení:

O_z je jednotkový vektor osy součásti O_z

O_k je jednotkový vektor osy kolébky O_k

O_F je jednotkový vektor osy frézovací hlavy O_F

Definujme další tyto rovnice:

$$\tilde{p} = \frac{Z}{Z_n} \quad (5.83)$$

$$p = \frac{\omega_n}{\omega} \quad (5.84)$$

$$q = \frac{\omega_k}{\omega} \quad (5.85)$$

Z : počet zubů obráběného kola

Z_n : počet zubů frézy (počet nožových skupin)

ω_n : úhlová rychlost frézovací hlavy

ω : úhlová rychlost součásti (obrábeného kola)

Z rovnice (5.82) máme:

$$\omega Z \sin \delta = \omega_n Z_n \sin \delta + \omega_k Z$$

neboli:

$$\frac{\omega Z \sin \delta}{\omega \cdot Z_n} = \frac{\omega_n Z_n}{\omega Z_n} \sin \delta + \frac{\omega_k Z}{\omega Z_n} \quad (5.86)$$

Podle (5.83), (5.84), (5.85) a (5.86) lze napsat:

$$\tilde{p} \cdot \sin \delta = p \cdot \sin \delta + q \cdot \tilde{p}$$

Odtud:

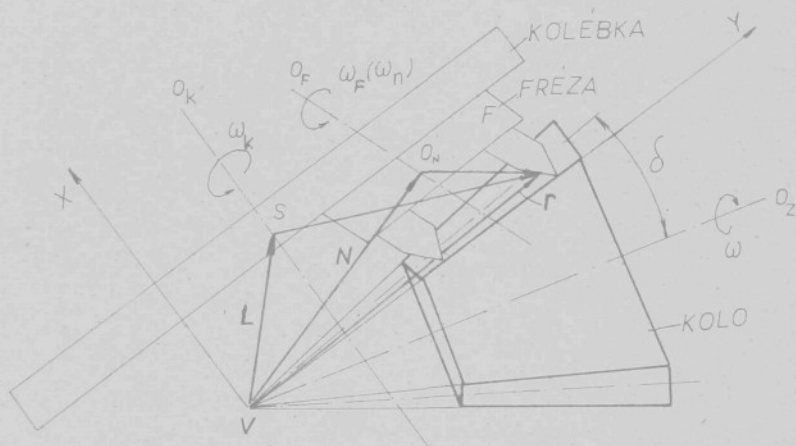
$$p = \tilde{p} \cdot (\sin \delta - q) \frac{1}{\sin \delta}$$

neboli:

$$p = \tilde{p} \cdot \left(1 - \frac{q}{\sin \delta} \right) \quad (5.87)$$

Snažíme se, aby (počet nožových skupin) počet zubů nástroje Z_n byl nesoudělný s počtem zubů obráběného kola. To proto, aby nůž po otočení frézovací hlavy o jednu otáčku nezapadal do stejné mezery. Bok zubu lze vyšetřit pomocí každého nože, patřícího do jedné skupiny vnějšího nebo vnitřního ostří (konkávní nebo konvexní bok zubu). Vnitřní a vnější nože jsou rovnoměrně uloženy na obvodu frézovací hlavy. Pro normální

způsob výroby kuželového kola Oerlikon je osa frézy O_F rovnoběžná s osou kolébky O_K a osa obráběného kola protíná osu kolébky O_K . Pro výrobu hypoidního kola s modifikací pak osy součástí, kolébky a frézovací hlavy jsou mimoběžné. To si vyžaduje obecný přístup k řešení. Na obrázku 16 je nakreslena poloha obráběného kola, kolébky a frézy. Osa frézy



obr.16

O_F se také otáčí kolem osy O_K unášečem $S_d n$ úhlovou rychlostí ω_k . Na obr.17 je znázorněn tvar nože, který se skládá ze dvou částí: přímkové ostří AB a obloukové ostří BC. (Podrobně to už bylo vysvětleno v kapitole 5.12) Řezná hrana AB hraje hlavní roli při obrábění. Přestože část BC de facto nemá velký vliv na povrch zubu, budeme se i dále zabývat

na osu X; osa Y ať je kolmá na rovinu XZ (obr.16). Postupně provedeme řešení části AB a BC.

A - Bok zubu obráběný přímkovým ostřím nože

Vektorová rovnice řezné části AB v základní poloze je (obr.16, 17):

$$r_1 = r + st \quad (5.88)$$

t je parametr na ostří

r je vektor libovolného bodu A ostří AB vzhledem k počátku souřadnic V

S je směrový vektor řezné části AB.

Platí:

$$S = B - A$$

$$r = A - V.$$

Aby bylo reálné obrábění, musí parametr t splnit podmínku:

$$0 \leq t \leq 1. \quad (5.89)$$

Předpokládejme, že úhel otočení součásti od základní polohy je φ . Potom bod B vektoru $O_N B$ vykoná trajektorii:

$$T_F = A_{O_F}^{p(2k\pi + \varphi)} (r + st) - N. \quad (5.90)$$

N je vektor od počátku souřadnic k bodu O_N , který leží na ose frézy O_F .

Počet otáček obráběného kola

označíme k. Zde je nutno upozornit na to, že ostří AB při prodloužení neprotíná osu frézovací hlavy O_F jak to bylo u případu kola Gleason (kapitola 5.1). Kdyby tomu tak bylo, pak rovnici (5.90) lze napsat:

$$T_F = A_{O_F}^{p(2k\pi + \varphi)} st_1, \quad (5.91)$$

kde t_1 je parametr na řezné hraně.

Řešení však provedeme obecně podle rovnice (5.90).

Aby tentýž nůž zapadl do teže mezery, kterou vytvořil v první fázi obrábění, musí se předcházející trajektorie bodu ostří nože na frézovací hlavě zpětně otáčet s tenzorem otočení:

$$T_{FZ} = A_{O_F}^{-\tilde{p}2k\pi} \quad (5.92a)$$

Plocha nástroje vztažená nyní k souřadnicím X_1Z je vyjádřena:

$$T_{NF} = N + A_{O_F}^{p(2k\pi + \varphi)} A_{O_F}^{-\tilde{p}2k\pi} (r + st - N). \quad (5.92b)$$

Tatáž trajektorie svázaná nyní s pohybem kolébky kolem osy O_k úhlovou rychlostí ω_k má rovnici:

$$T_k = L + A_{O_k}^{q(2k\pi + \varphi)} [N + A_{O_F}^{p(2k\pi + \varphi)} A_{O_F}^{-\tilde{p}2k\pi} (r + st - N) - L], \quad (5.93)$$

kde L je vektor od počátku souřadnic k bodu K , který leží na ose kolébky O_k ,

$A_{O_k}^{q(2k\pi + \varphi)}$ je tenzor otočení kolem osy O_k

Rovnice plochy nástroje, která se valí kolem obráběné součásti s tenzorem otočení $A_{O_Z}^\varphi$, má tvar:

$$K = A_{O_Z}^\varphi \left\{ L + A_{O_k}^{q(2k\pi + \varphi)} [N + A_{O_F}^{p(2k\pi + \varphi)} A_{O_F}^{-\tilde{p}2k\pi} (r + st - N) - L] \right\}. \quad (5.94)$$

Podmínky pro určení obalové plochy (plochy zubu) zní:

$$\left[K_t, K_\varphi, K_{k+1} - K_k \right] = 0. \quad (5.95)$$

Z této rovnice určíme:

$$t = t(k, \varphi) \quad (5.96)$$

a po dosazení (5.96) do (5.94) dostaneme souřadnici boku zubu kola Oerlikon.

Upravíme vztah:

$$\begin{aligned} p(2k\pi + \varphi) - \tilde{p} \cdot 2k\pi &= 2k\pi(p - \tilde{p}) + p\varphi = \\ p\varphi + 2k\pi(\tilde{p} - \frac{\tilde{p} \cdot q}{\sin \delta} - \tilde{p}) &= \\ p\varphi - \frac{\tilde{p} \cdot q}{\sin \delta} \cdot 2k\pi &= \\ p\varphi - m \cdot 2k\pi, \end{aligned} \quad (5.97)$$

$$\text{kde } m = \frac{q \cdot \tilde{p}}{\sin \delta}.$$

Rovnici (5.94) lze napsat:

$$K = A_{O_Z}^\varphi \left\{ L + A_{O_K}^{q(2k\pi + \varphi)} \left[N + A_{O_F}^{p\varphi - m2k\pi} (r + st - N) - L \right] \right\}. \quad (5.98)$$

Potom:

$$K_t = \frac{\partial K}{\partial t} = A_{O_Z}^\varphi A_{O_K}^{q(2k\pi + \varphi)} A_{O_F}^{p\varphi - m2k\pi} s = P \quad (5.99)$$

$$\begin{aligned}
 K_{\varphi} = \frac{\partial K}{\partial \varphi} = & \left(A_{O_Z}^{\varphi} \right)' \left\{ L + A_{O_K}^{q(2k\pi + \varphi)} \left[N + A_{O_F}^{p\varphi - m2k\pi} (r + st - N) - L \right] \right\} + \\
 & + A_{O_Z}^{\varphi} \left\{ L + \left(A_{O_K}^{q(2k\pi + \varphi)} \right)' \left[N + A_{O_F}^{p\varphi - 2km\pi} (r + st - N) - L \right] \right\} + \\
 & + A_{O_Z}^{\varphi} \left\{ L + A_{O_K}^{q(2k\pi + \varphi)} \left[N + \left(A_{O_F}^{p\varphi - 2km\pi} \right)' (r + st - N) - L \right] \right\},
 \end{aligned}$$

kde:

$$\begin{aligned}
 \left(A_{O_Z}^{\varphi} \right)' &= \left((I - O_Z \bullet O_Z) \cos \varphi + R(O_Z) \sin \varphi + O_Z \bullet O_Z \right)'_{\varphi} = \\
 &= - (I - O_Z \bullet O_Z) \sin \varphi + R(O_Z) \cos \varphi, \quad (5.99a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left(A_{O_K}^{q(2k\pi + \varphi)} \right)'_{\varphi} &= \left(A_{O_K}^{2k\pi q} \quad A_{O_K}^{q\varphi} \right)'_{\varphi} = \\
 &= q A_{O_Z}^{2k\pi q} \cdot \left[- (I - O_Z \bullet O_Z) \sin q\varphi + R(O_Z) \cos q\varphi \right], \quad (5.99b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left(A_{O_F}^{p\varphi - 2km\pi} \right)'_{\varphi} &= \left(A_{O_F}^{p\varphi} \quad A_{O_F}^{-2km\pi} \right)'_{\varphi} = \\
 &= p A_{O_F}^{-2km\pi} \left[(O_Z \bullet O_Z - I) \sin p\varphi + R(O_F) \cos p\varphi \right]. \quad (5.99c)
 \end{aligned}$$

Máme po úpravě:

$$\begin{aligned}
 K_{\varphi} = & \left[\left(A_{0Z} \right)'_{\varphi} A_{0K} \begin{matrix} q(\varphi+2k\pi) \\ p\varphi-2km\pi \end{matrix} A_{0F} s + A_{0Z} \left(A_{0K} \right)'_{\varphi} \begin{matrix} q(\varphi+2k\pi) \\ p\varphi-2km\pi \end{matrix} A_{0F} s \right] t + \\
 & + \left(A_{0Z} \right)'_{\varphi} \left\{ L + A_{0K} \begin{matrix} q(\varphi+2k\pi) \\ p\varphi-2km\pi \end{matrix} [N + A_{0F} (r-N) - L] \right\} + \\
 & + A_{0Z} \left\{ L + \left(A_{0K} \right)'_{\varphi} \begin{matrix} q(\varphi+2k\pi) \\ p\varphi-2km\pi \end{matrix} [N + A_{0F} (r-N) - L] \right\} + \\
 & + A_{0Z} \left\{ L + A_{0K} \begin{matrix} q(\varphi+2k\pi) \\ p\varphi-2km\pi \end{matrix} \left[N + \left(A_{0F} \right)'_{\varphi} (r-N) - L \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Neboli při pevných parametrech φ a k lze vyjádřit funkci K_{φ} v závislosti na parametru t :

$$K_{\varphi} = Bt + C, \quad (5.100)$$

kde

$$\begin{aligned}
 B = & \left(A_{0Z} \right)'_{\varphi} A_{0K} \begin{matrix} q(\varphi+2k\pi) \\ p\varphi-2km\pi \end{matrix} A_{0F} s + A_{0Z} \left(A_{0K} \right)'_{\varphi} \begin{matrix} q(\varphi+2k\pi) \\ p\varphi-2km\pi \end{matrix} A_{0F} s + \\
 & + A_{0Z} A_{0K} \begin{matrix} q(\varphi+2k\pi) \\ p\varphi-2km\pi \end{matrix} \left(A_{0F} \right)'_{\varphi} s
 \end{aligned} \quad (5.101)$$

$$\begin{aligned}
 C = & \left(A_{o_z} \right)'_{\varphi} \left\{ L + A_{o_k}^{q(\varphi+2k\pi)} \left[N + A_{o_F}^{p\varphi-2km\pi} (r-N) - L \right] \right\} + \\
 & + A_{o_z}^{\varphi} \left\{ L + \left(A_{o_k}^{q(\varphi+2k\pi)} \right)'_{\varphi} \left[N + A_{o_F}^{p\varphi-2km\pi} (r-N) - L \right] \right\} + \\
 & + A_{o_z}^{\varphi} \left\{ L + A_{o_k}^{q(\varphi+2k\pi)} N + \left(A_{o_F}^{p\varphi-2km\pi} \right)'_{\varphi} (r-N) - L \right\}. \quad (5.102)
 \end{aligned}$$

Charakteristika na obrobené ozubené ploše mezi $k+1$ -tou a k -tou otáčkou:

$$\begin{aligned}
 K_{k+1} - K_k = & A_{o_z}^{\varphi} \left\{ L + A_{o_k}^{q(\varphi+2(k+1)\pi)} \left[N + A_{o_F}^{p\varphi-2(k+1)m\pi} (r+st-N) - L \right] \right\} - \\
 & A_{o_z}^{\varphi} \left\{ L + A_{o_k}^{q(\varphi+2k\pi)} \left[N + A_{o_F}^{p\varphi-2km\pi} (r+st-N) - L \right] \right\} = \\
 = & \left(A_{o_z}^{\varphi} A_{o_k}^{q(\varphi+2(k+1)\pi)} A_{o_F}^{p\varphi-2(k+1)m\pi} A_{o_z}^{\varphi} A_{o_k}^{q(\varphi+2k\pi)} A_{o_F}^{p\varphi-2km\pi} \right) st + \\
 & + A_{o_z}^{\varphi} A_{o_k}^{q(\varphi+2(k+1)\pi)} \left[N + A_{o_F}^{p\varphi-m(k+1)2\pi} (r-N) - L \right] - \\
 & - A_{o_z}^{\varphi} A_{o_k}^{q(\varphi+2k\pi)} \left[N + A_{o_F}^{p\varphi-2km\pi} (r-N) - L \right]
 \end{aligned}$$

Při pevných parametrech φ , k lze vyjádřit funkci $K_{k+1} - K_k$:

$$K_{k+1} - K_k = Dt + E, \quad (5.103)$$

$$D = \begin{pmatrix} \varphi & q(\varphi+2(k+1)\pi & p\varphi-2m(k+1)\pi & \varphi & q(\varphi+2k\pi) & p\varphi-2km\pi \\ A_{0z} & A_{0k} & A_{0F} & -A_{0z} & A_{0k} & A_{0F} \end{pmatrix} s \quad \dots(5.104)$$

$$E = A_{0z}^{\varphi} A_{0k}^{q(\varphi+(k+1)\pi} \left[N + A_{0F}^{p\varphi-2m(k+1)} (r-N) - L \right] -$$

$$- A_{0z}^{\varphi} A_{0k}^{q(\varphi+2k\pi)} \left[N + A_{0F}^{p\varphi-2km\pi} (r-N) - L \right] \quad (5.105)$$

Dosadíme-li rovnice (5.99), (5.100), ((5.103) do rovnice (5.95) dostaneme determinant:

$$[P, B.t + C, D.t + E] = 0. \quad (5.106)$$

Rozepíšeme rovnici (5.106):

$$t^2 [P, B, D] + t [P, B, E] + t [P, C, D] + [P, C, E] = 0$$

$$t^2 [P, B, D] + t \{ [P, B, E] + [P, C, D] \} + [P, C, E] = 0.$$

Neboli:

$$at^2 + bt + c = 0, \quad (5.107)$$

kde a, b, c jsou konstantní koeficienty definované determinanty a mající hodnoty:

$$a = \det [P, B, D] \quad (5.108)$$

$$b = \det [P, B, E] + \det [P, C, D] \quad (5.109)$$

$$c = \det [P, C, E] . \quad (5.110)$$

Parametr t má hodnoty:

$$t_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} . \quad (5.111)$$

Jsou zde dva kořeny. Reálné obrábění charakterizuje však pouze hodnota $t \in \langle 0, 1 \rangle$. Leží-li t mimo tento interval je jím popsáno obrábění bodem nástroje, ležícím mimo řeznou hranu AB, což nedává skutečnou obálku, ale fiktivní plochu. Pokud $t_1 < 0$ a $t_2 > 1$, pak $t = t_2$, tj. obrábí se špičkou nože. Jestli $t_1 > 1$ a $t_2 > 1$ potom ^{za} platnou hodnotu parametru t považujeme ^{tu} t_1 , t_2 , která je bližší k špičce nože. Jedná se rovněž o práci vykonanou špičkou ostří.

Případy, kdy $t \notin \langle 0, 1 \rangle$ jsou jeďnom vyjimečné a objevují se pouze při krajních hodnotách úhlu φ a otáček k .

Po zpětném dosazení rovnice (5.111) do (5.94) udává tato rovnice souřadnice boku zubu Cerlikon:

$$K = A_{O_Z}^{\varphi} \left\{ L + A_{O_K}^{q(\varphi+2k\pi)} \left[N + A_{O_F}^{p\varphi-2km\pi} \left(r + \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot s - N \right) - L \right] \right\} \quad \dots(5.112)$$

$$K = A_{O_Z}^{\varphi} \left\{ L + A_{O_K}^{q(\varphi+2k\pi)} \left[N + A_{O_F}^{p\varphi+2km\pi} \left(r + t(\varphi, k)s - N \right) - L \right] \right\} . \quad \dots(5.113)$$

Úplně analogickou analýzou jako v části A pouze s tou změnou, že rovnici přímkového ostří (5.88) nahradíme rovnicí obloukové části ostří (5.114), dostaneme rovnici nástroje, po kterém se valí součást:

$$K = A_{O_Z}^{\varphi} \left\{ L + A_{O_K}^{q(\varphi+2k\pi)} \left[N + A_{O_F}^{p\varphi-2km\pi} \left(s + A_b^t (r-s) - N \right) - L \right] \right\}. \quad \dots(5.115)$$

Podmínka obálky bude:

$$\left[K_t, K_{\varphi}, K_{k+1} - K_k \right] = 0. \quad (5.116)$$

Řešení ^{je} zde - jak se později ukáže - mnohem komplikovanější, ale přesto se nakonec podaří upravit rovnici (5.116) na řešitelný tvar.

Postupně derivujeme:

$$K_t = \frac{\partial K}{\partial t} = A_{O_Z}^{\varphi} A_{O_K}^{q(\varphi+2k\pi)} A_{O_F}^{p\varphi-2km\pi} \left(A_b^t \right)' (r-s), \quad (5.117)$$

kde

$$\left(A_b^t \right)' = - (I - b \cdot b) \sin t + R(b) \cos t.$$

Potom lze napsat:

$$K_t = A_{O_Z}^{\varphi} A_{O_K}^{q(\varphi+2k\pi)} A_{O_F}^{p\varphi-2km\pi} [(b \cdot b - I) \sin t + R(b) \cos t] (r-s).$$

I při pevném φ a k potom vyjádříme K_k jako funkci parametru t :

$$K_t = D \sin t + E \cos t, \quad (5.118)$$

kde

$$D = \begin{matrix} \varphi & q(\varphi+2k\pi) & p\varphi-2km\pi \\ A_{o_z} & A_{o_k} & A_{o_F} \end{matrix} (b \cdot b - I)(r-s) \quad (5.119)$$

$$E = \begin{matrix} \varphi & q(\varphi+2k\pi) & p\varphi-2km\pi \\ A_{o_z} & A_{o_k} & A_{o_F} \end{matrix} R(b)(r-s). \quad (5.120)$$

Parciální derivace podle parametru φ :

$$\begin{aligned} K_\varphi = & \left(A_{o_z}^\varphi \right)'_{\varphi} \left\{ L + \begin{matrix} q(\varphi+2k\pi) & p\varphi-2km\pi \\ A_{o_k} & A_{o_F} \end{matrix} (s + A_b^t(r-s) - N) - L \right\} + \\ & + A_{o_z}^\varphi \left\{ L + \left(A_{o_k}^{q(\varphi+2k\pi)} \right)'_{\varphi} \left[N + A_{o_F}^{p\varphi-2km\pi} (s + A_b^t(r-s) - N) - L \right] \right\} + \\ & + A_{o_z}^\varphi \left\{ L + A_{o_k}^{q(\varphi+2k\pi)} \left[N + \left(A_{o_F}^{p\varphi-2km\pi} \right)'_{\varphi} (s + A_b^t(r-s) - N) - L \right] \right\}. \end{aligned}$$

Derivace $\left(A_{o_z}^\varphi \right)', \left(A_{o_k}^{q(\varphi+2k\pi)} \right)', \left(A_{o_F}^{p\varphi-2km\pi} \right)'$ byly provedeny na základě rovnic (5.99a), (5.99b) a (5.99c).

Upravíme:

$$\begin{aligned} K_\varphi = & \left[\left(A_{o_z}^\varphi \right)'_{\varphi} A_{o_k}^{q(\varphi+2k\pi)} A_{o_F}^{p\varphi-2km\pi} + A_{o_z}^\varphi \left(A_{o_k}^{q(\varphi+2k\pi)} \right)'_{\varphi} A_{o_F}^{p\varphi-2km\pi} \right. \\ & + A_{o_z}^\varphi A_{o_k}^{q(\varphi+2k\pi)} \left(A_{o_F}^{p\varphi-2km\pi} \right)'_{\varphi} \left. \right] A_b^t(r-s) + \\ & + \left(A_{o_z}^\varphi \right)'_{\varphi} \left\{ L + A_{o_k}^{q(\varphi+2k\pi)} \left[N + A_{o_F}^{p\varphi-2km\pi} (s - N) - L \right] \right\} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + A_{0z}^{\varphi} \left\{ L + \left(A_{0k}^{q(\varphi+2k\pi)} \right)' \left[N + A_{0F}^{p\varphi-2km\pi} (s-N) - L \right] \right\} + \\
 & + A_{0z}^{\varphi} \left\{ L + A_{0k}^{q(\varphi+2k\pi)} \left[N + \left(A_{0F}^{p\varphi-2km\pi} \right)' (s-N) - L \right] \right\} = \\
 & = \left[\left(A_{0z}^{\varphi} \right)' A_{0k}^{q(\varphi+2k\pi)} A_{0F}^{p\varphi-2km\pi} + A_{0z}^{\varphi} \left(A_{0k}^{q(\varphi+2k\pi)} \right)' A_{0F}^{p\varphi-2km\pi} \right. \\
 & \left. + A_{0z}^{\varphi} A_{0k}^{q(\varphi+2k\pi)} \left(A_{0F}^{p\varphi-2km\pi} \right)' \right] [(I-b)b \cos t + R(b) \sin t + b_e b] (r-s) + C,
 \end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned}
 C = & \left(A_{0z}^{\varphi} \right)' \left\{ L + A_{0k}^{q(\varphi+2k\pi)} \left[N + A_{0F}^{p\varphi-2km\pi} (s-N) - L \right] \right\} + \\
 & A_{0z}^{\varphi} \left\{ L + \left(A_{0k}^{q(\varphi+2k\pi)} \right)' \left[N + A_{0F}^{p\varphi-2km\pi} (s-N) - L \right] \right\} + \\
 & A_{0z}^{\varphi} \left\{ L + A_{0k}^{q(\varphi+2k\pi)} \left[N + \left(A_{0F}^{p\varphi-2km\pi} \right)' (s-N) - L \right] \right\}. \quad (5.121)
 \end{aligned}$$

Označíme-li dále vektory (při určitých pevných φ a k):

$$\begin{aligned}
 B = & \left(A_{0z}^{\varphi} \right)' A_{0k}^{q(\varphi+2k\pi)} A_{0F}^{p\varphi-2km\pi} + A_{0z}^{\varphi} \left(A_{0k}^{q(\varphi+2k\pi)} \right)' A_{0F}^{p\varphi-2km\pi} \\
 & A_{0z}^{\varphi} A_{0k}^{q(\varphi+2k\pi)} \left(A_{0F}^{p\varphi-2km\pi} \right)' \quad (5.122)
 \end{aligned}$$

$$F = B (I - b \cdot b) (r - s) \quad (5.123)$$

$$M = BR(b) (r - s) \quad (5.124)$$

$$H = B b \cdot b (r - s), \quad (5.125)$$

potom rovnici pro K_φ lze napsat:

$$K_\varphi = F \cos t + M \sin t + H \quad (5.126)$$

Výpočet derivace podle k :

$$\begin{aligned} K_{k+1} - K_k &= A_{0_z}^\varphi \left\{ L + A_{0_k}^{q(\varphi+2(k+1)\pi)} [N - A_{0_F}^{p\varphi-2m(k+1)\pi} (s + \right. \\ &+ A_b^t (-N))] \left. - A_{0_z}^\varphi \left\{ L + A_{0_k}^{q(\varphi+2k\pi)} [N - A_{0_F}^{p\varphi-2km\pi} (s + A_b^t (r-s) - N) - L] \right\} = \right. \\ &= A_{0_z}^\varphi A_{0_k}^{q(\varphi+2(k+1)\pi)} A_{0_F}^{p\varphi-2m(k+1)\pi} - A_{0_z}^\varphi A_{0_k}^{q(\varphi+2k\pi)} A_{0_F}^{p\varphi-2km\pi} A_b^t (r-s) + \\ &+ A_{0_z}^\varphi \left\{ L + A_{0_k}^{q(\varphi+2(k+1)\pi)} [N - A_{0_F}^{p\varphi-2m(k+1)\pi} (s - N) - L] \right\} r \\ &- A_{0_z}^\varphi \left\{ L + A_{0_k}^{q(\varphi+2k\pi)} [N - A_{0_F}^{p\varphi-2km\pi} (s - N) - L] \right\}. \end{aligned} \quad (5.127)$$

Označíme-li vektory (při pevných φ a k):

$$P = \begin{matrix} \varphi & q(\varphi+2(k+1)\pi) & p\varphi-2m(k+1)\pi & \varphi & q(\varphi+2k\pi) & p\varphi-2km\pi \\ A_{o_z} & A_{o_k} & A_{o_F} & -A_{o_z} & A_{o_k} & A_{o_F} \end{matrix} \quad (5.128)$$

$$Q = A_{o_z}^{\varphi} \left\{ L + A_{o_k}^{q(\varphi+2(k+1)\pi)} \left[N + A_{o_F}^{p\varphi-2m(k+1)\pi} (s-N) - L \right] \right\}$$

$$A_{o_z}^{\varphi} \left\{ L + A_{o_k}^{q(\varphi+2k\pi)} \left[N + A_{o_F}^{p\varphi-2km\pi} (s-N) - L \right] \right\}, \quad (5.129)$$

potom se rovnice (5.127) redukuje na tvar:

$$K_{k+1} - K_k = P[(I - b_* b) \cos t + R(b) \sin t + b_* b] \cdot (r - s) + Q.$$

Po úpravě na jednodušší tvar:

$$K_{k+1} - K_k = R \cos t + W \sin t + V, \quad (5.130)$$

kde vektory R , W , V jsou definovány rovnicemi:

$$R = P(I - b_* b)(r - s) \quad (5.131)$$

$$W = PR(b)(r - s) \quad (5.132)$$

$$V = Pb_* b(r - s) + Q. \quad (5.133)$$

Po dosazení rovnic (5.118), (5.126), (5.130) do rovnice (5.116) dostaneme :

$$\det [D \sin t + E \cos t; F \cos t + M \sin t + H; R \cos t + W \sin t + V] = 0.$$

Dále rozepíšeme:

$$\begin{aligned} & \sin^3 t [D, M, V] + \sin t \cos^2 t [D, F, R] + \sin t [D, H, V] \\ & + \cos^3 t [E, F, R] + \cos t \sin^2 t [E, M, V] + \cos t [E, H, V] \\ & + \sin^2 t \cos t [D, M, R] + \sin t \cos^2 t [E, M, R] + \\ & \sin t \cos t [D, H, R] + \cos^2 t [E, H, R] + \sin^2 t \cos t [D, F, W] \\ & + \sin^2 t [D, H, W] + \cos^2 t [E, F, V] + \cos t \sin t [E, M, V] \\ & + \cos^2 t \sin t [E, F, W] + \sin^2 t [D, M, V] + \\ & \cos t \sin t [E, H, W] + \sin t \cos t [D, F, V] = 0. \end{aligned}$$

Po úpravě:

$$\begin{aligned} & \cos^3 t [E, F, R] + \sin^3 t [D, M, W] + \\ & \cos^2 t \sin t \{ [D, F, R] + [E, F, W] + [E, M, R] \} + \\ & \sin^2 t \cos t \{ [D, F, W] + [D, M, R] + [E, M, W] \} + \\ & \cos^2 t \{ [E, F, W] + [E, H, R] \} + \\ & \sin^2 t \{ [D, H, W] + [D, M, V] \} + \\ & \sin t \cos t \{ [D, F, W] + [E, M, V] + [E, H, W] + \\ & \quad [D, H, R] \} + \\ & \sin t [D, H, V] + \cos t [E, H, W] = 0. \end{aligned} \quad (5.134)$$

Místo determinantů zavedeme tyto konstantní koeficienty:

$$a = [E, F, R] \quad (5.135)$$

$$b = [D, M, W] \quad (5.136)$$

$$c = [D, F, R] + [E, F, W] + [E, M, R] \quad (5.137)$$

$$d = [D, F, W] + [D, M, R] + [E, M, N] \quad (5.138)$$

$$e = [E, F, W] + [E, H, R] \quad (5.139)$$

$$f = [D, H, W] + [D, M, V] \quad (5.140)$$

$$g = [D, F, W] + [E, M, V] + [E, H, W] + \\ + [D, H, R] \quad (5.141)$$

$$h = [D, H, V] \quad (5.142)$$

$$j = [E, H, W] \quad (5.143)$$

Vztah (5.134) je nyní transcendentní rovnicí vzhledem k jedno-parametrické proměnné t :

$$y(t) \equiv a \cos^3 t + b \sin^3 t + c \sin t \cos^2 t + d \cos t \sin^2 t + e \cos^2 t + \\ + f \sin^2 t + g \sin t \cos t + h \sin t + j \cos t = 0. \quad (5.143)$$

Čili:

$$t = t(\varphi, k). \quad (5.144)$$

Po dosazení tohoto t do rovnice (5.115) získáme souřadnice boku vyrobeného zubu kola Oerlikon. Všechny konstanty a, b, c, e, f, g, h, j jsou určeny rovnicemi (5.135) až (5.142) a vektory $D, E, C, B, F, M, H, P, Q, R, W, V$ jsou definovány rovnicemi (5.119) až (5.133). (tedy jsou to konstanty a vektory z výpočtů determinantů souborů tří známých vektorů po redukci různých vektorových a tenzorových operatorů). Tato úloha je řešitelná prakticky pouze za použití

semočinného počítače. Vhodným sestavením programu lze získat i další praktické výsledky a informace potřebné pro různé technické výzkumy.

Co se týká ostatních charakteristik a vlastností povrchů jako jsou třeba druhý základní tenzor plochy, normály, křivosti atd., lze je získat analogicky jako při řešení kola Gleason, neboť byly obecně uvedeny v předcházejících kapitolách. Jedná se pouze o konkretizování obecných matematických formulí a proto je zde nebudeme rozvádět. To platí jak pro část A, tak pro část B.

Tím byly dokončeny nejpodstatnější kapitoly o vytváření povrchů boku ~~z~~bu prostorového ozubení při obrábění odvalovacím způsobem.

6. teorie podřezání při výrobě prostorových kuželových kol

Bylo provedeno studium boku zubu kuželových kol se zakřivenými zuby typu Gleason a Gerlikon. Omezili^{se} jsme na případ, kdy hmotný profil přímkového ostří vytvoří regulární plochu boku zubu, tj. φ -křivka ani u^2 -křivka nemá žádný bod vratu; z toho plyne, že neexistuje hrana vratu (geometrické místo bodu vratu). Pokud hmotný profil nástroje vytvoří při práci dvě plochy, které mají tzv. společnou hranu vratu, potom plocha nástroje protíná hotovou obalovou plochu poblíž její hrany vratu. Tento jev v teorii i praxi ozubených kol je běžně nazýván podřezání (podřezování).

Podřezání má nevýhodu v tom, že zmenší trvání záběru a sníží ohybnou pevnost zeslabením v patě zubu. Má však i své výhody a to u broušených a částečně i u ševingovaných ozubení. Brousící a ševingovací nástroje mají totiž možnost výběhu a to umožňuje odstranění příčiny vzniku vrubu, který může vzniknout vyběhnutím nástroje při broušení nepodřezaného zubu. Přirozené podřezání vzniká u kol s malým počtem zubů a malými korekcemi. Abychom dosáhli výběhu pro obrábění (broušení) u kol s větším počtem zubů a kladně korigovaných, provádí se umělé podřezání pomocí tzv. protuberance na nástroji, která vytvoří místo pro výběh bez škodlivého podřiznutí.

Pro rovinné ozubení už existuje řada prací, které se zabývají výzkumem kritérií a parametrů podřezání ([L.12], [L.47], [L.18]). O prostorovém ozubení jsou víceméně pouze zmínky v některé literatuře. To je pravděpodobně z důvodu, že po výrobě kuželových kol nejsou známy plochy boku zubu, a že je obtížné a náročné najít kritérium podmínky existence podřezání apod.

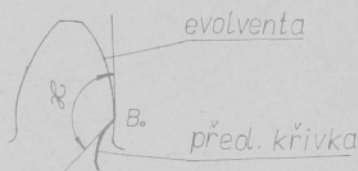
Samozřejmě lze namítnout, že v matematické literatuře [L.2], [L.19], [L.46] zabývající se diferenciální geometrií křivek a ploch je teorie používána v této práci již k dispozici, že jí stačí pouze aplikovat. To je však pravděpodobně kámen úrazu, neboť, jak se ukazuje, plocha boku zubu (obalová plocha) je tak složitá, že vztahy, které matematická teorie odvodila, nejsou explicitně vyjádřitelné a dokonce není možno je použít.

Pro obtíže spojené s řešením těchto problémů se řada autorů těmto otázkám vyhnula, neboť studium podřezání prostorového ozubení vyžaduje zvláštní metodu.

Pro plynulost výkladu uvedeme zde stručně přehled problémů při zkoumání podřezání rovinného ozubení.

6.1 Podřezání rovinného ozubení

S patním přechodem souvisí i podřezání zubů, které je charakterizováno tím, že rozhraní mezi evolvcentou a přechodovou křivkou nemá společnou tečnu (tečnou rovinu) (obr.19) a tečny



obr. 19

k oběma křivkám svírají tupý úhel $\mathcal{R}$.

Na obr.20 lze sledovat, jakým způsobem vzniká podřiznutí. Označme důležité body související s dalším výkladem:

E je bod vrátu evolventy.

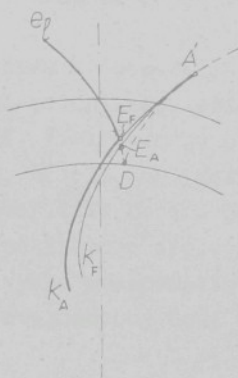
B_0 je rozhraní mezi evolventou a přechodovou křivkou.

A_0 je rozhraní mezi přímkovou částí nástroje a zaohlením jeho hlavy.

C je rozhraní mezi přechodovou křivkou a patní kružnicí.

V nakreslené poloze se přímkový bok hřbenového nástroje dotýká evolventního profilu na roztečném válci r ve výrobním

čáře. Čili podřezání postupuje zeshora dolů od bodu E k bodu A_2 . Současně se však tvoří od zdola přechodová křivka jako obálka zaoblení hlavy hřebene, která seřízne ještě část profilu zubu (obr.21), tj křivka K_F .



obr.21

K_A je trajektorie krajního bodu A_0 pro nezaoblený hřeben.

K_F je skutečná přechodová křivka pro zaoblený hřeben.

E_A , E_F jsou průsečíky K_A , K_F s evolventou e_1 . Jejich vzdálenost je nepatrná, v běžných případech lze očekávat diferenci řádu stotisíciny milimetru, a proto můžeme hledaný zlom E_F řešit jako průsečík evolventy e s trochoidou bodu E_A místo s křivkou K_F .

Z těchto úvah lze odvodit kritérium podřezání a stanovit matematické vztahy a závislosti. Tato úloha je již v literatuře vyřešena. V práci [18] byly do detailu rozebrány, např. vztahy (11), (12), udávající parametry, které ovlivňují podřezání. Při nezměněných rozměrech frézy lze změnit počet zubů, úhel záběru a poloměr patní kružnice. Při změně rozměrů kola a frézy lze změnit: počet zubů, úhel záběru, poloměr patní kružnice, normální modul, nor-

mální úhel záběru, poloměr zaoblení frézy, poloměr valivé kružnice. Tyto parametry jsou totiž hlavní proměnné ve vzorcích (11), (12) a pomocí nich lze vypočítat parametry v libovolném bodě frézy. Na jejich základě lze určit upravený profil frézy.

Zde je třeba vyzdvihnout faktory, rozhodující o vzniku podřezávání, kterých pak využijeme i při řešení podřezání prostorového ozubení :

Leží-li bod A_z nad bodem E (obr.20), tj. ve směru k valivému bodu, podřezání nevznikne; leží-li bod A_z pod bodem E, nastává podřezání. Výsledkem je profilem nástroje prořtá hotová plocha zubu, neboli úhel mezi přechodovou křivkou a bokem zubu je tupý, čili řečeno jinak: křivky mají průsečík, ve kterém neexistuje společná tečna. Použijeme-li terminologie obvyklé v matematice, řekneme, že na křivce boku zubu leží dvojnásobný bod; nebo jinak: není to Jordanova křivka.

.1)

Podíváme-li se zpětně na obr.20, vidíme, že přímka p je realizována ostřím nástroje s hmotou po jedné straně. Nastávají zde tyto poměry:

- 1 - Nesáhá-li ostří k bodu G, neodvalí se evolventa e_0 až k bodu vratu B_0 .
- 2 - Končí-li ostří právě v bodě G, vyrobíme neporušenou evolventu právě až k bodu vratu.
- 3 - Přesahuje-li ostří za bod G (končí-li např. v bodě A) vyrobíme evolventu nejprve až k bodu vratu, ale v dalších fázích odvalování nechtěně odřízneme část hotové evolventy nad bodem vratu B trochoidou K_A bodu A_0 .

6.2 Podřezání u prostorového ozubení

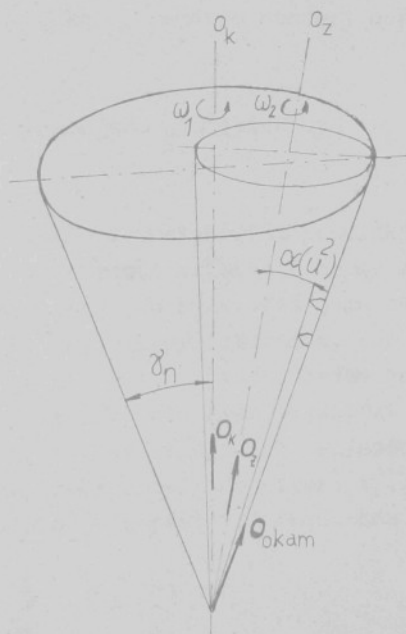
6.2.1 Nutná podmínka podřezání

Hovořili jsme o jevu „prořáté hotové obálky“ u podřezání rovinných ozubení. I zde při stanovení podmínky podřiznutí kola Gleason resp. Oerlikon musíme tento jev brát v úvahu.

Nechť teoretický kužel součásti (kola) má jednotkový vektor osy O_z a nechť teoretický kužel nástroje (kolébky) má jednotkový vektor osy O_k .

Nechť jednotková osa okamžitého otáčení kužele součásti a nástroje je O_{okam} . Jev „prořáté hotové obálky“ zde nastane tehdy, když profil nože proniká do teoretického profilu kužele součásti (obr.22), tj. platí nerovnost:

$$\alpha(u^2) \leq \gamma_n, \quad (6.1)$$



obr.22

kde $\alpha(u^2)$ je úhel mezi osou kolébky a rovinou špiček nože,

u^2 je úhel pootočení nože,

γ_n je úhel mezi osou kolébky a okamžitou osou otáčení, a kde dále platí:

$$\cos \gamma_n = O_k \cdot O_{\text{okam}} \quad (6.2)$$

$$O_{\text{okam}} = O_z \cdot \omega_2 \pm O_k \cdot \omega_1$$

Znaménko plus platí pro vnější valení, tj. úhlové rychlosti ω_1 , ω_2 jsou protisměrné. Znaménko minus platí pro vnitřní valení (úhlové rychlosti kolébky a součásti jsou ve stejném směru). Je třeba upozornit na to, že u normálního způsobu výroby kole Gleason je úhel $\alpha = 90^\circ$, protože rovina špiček nože vždy prochází vrcholem obráběného kola a je kolmá na osu kolébky. U ostetních všeobecných případů je úhel α funkcí parametru otočení nože u^2 .

6.2.2 Postačující podmínka podřezání

Záležitost vyšetření postačující podmínky podřezání je ekvivalentní s vyšetřením existence hrany vratu (resp. bodu vratu) plochy boku zubu kola. Již jsme se zmínili o bodech vratu u kol s rovinným ozubením. Zde se pokusím ukázat možnosti vzniku vratu u prostorového ozubení a najít optimální metodu, jak lze tuto hranu vyšetřit a najít mezní hodnoty parametrů ovlivňujících podřezání zubu.

Jsou-li plochy zubu určeny rovnicemi (5.17), (5.59), (5.113), (5.115), lze je napsat v jednoduchém tvaru:

$$K = K(\varphi, u^2), \quad (6.4)$$

platí pro Gleason

$$K = K(\varphi, k), \quad (6.5)$$

platí pro Oerlikon.

Parametry φ , u^2 , k nyní mohou být funkcí další proměnné t ; lze je tedy napsat $\varphi(t)$, $u^2(t)$, $k(t)$ a rovnice (6.4), (6.5) přejdou do tvaru:

$$K = K(\varphi(t), u^2(t)) = K(t) \quad (6.6)$$

resp.

$$K = K(\varphi(t), k(t)) = K(t). \quad (6.7)$$

Křivky $K(t)$ vyhovují singulárním bodům tehdy, když při $t = t_0$ platí:

$$\dot{K}(t_0) = 0 \quad (6.8)$$

$$\ddot{K}(t_0) = \frac{d^2 K}{dt^2} \quad (6.9)$$

Za předpokladu, že $\ddot{K} = \frac{d^2 K}{dt^2} \neq 0$, potom podle Taylorovy formule lze napsat:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{K(t_0 + \Delta t) - K(t_0)}{\frac{1}{2}(\Delta t)^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \Phi_2(t_0, \Delta t) = K(t_0), \quad (6.10)$$

neboli nějaký vektor $\overline{K_0 K}$ dvou bodů K_0 a K křivky $K(t_0)$ pomocí Taylorovy formule je dán rovnicí:

$$\overline{K_0 K} = K(t_0 + \Delta t) - K(t_0) = \frac{(\Delta t)^2}{2} \ddot{K}(t_0) + \frac{(\Delta t)^3}{6} \Phi_3(t_0, \Delta t).$$

Ukazuje se, že u prvního členu na pravé straně této rovnice, se při malém přírůstku Δt (který určuje průmět do tečny vektoru $\overline{K_0 K}$ posunutého na tečnu $\dot{K}(t_0)$ nezmění znaménko při změně znaménka přírůstku Δt . Křivka se stále

pohybuje po jedné straně plochy až se v bodě $t = t_0$ pohyb zastaví (má nulovou rychlost) a začíná přecházet na druhou stranu plochy. Bod, který má tuto vlastnost se nazývá bodem vrátu. Takový bod nazýváme charakteristickým bodem druhého řádu. Tedy hrana vrátu je křivka opsaná charakteristickým bodem druhého řádu. V bodu vrátu (charakteristický bod druhého řádu; dvojnásobný bod křivky) se nejen změní smysl pohybu, ale také zde má křivka nulovou křivost.

Nyní lze stanovit parametry φ_0 , u_0^2 bodu vrátu křivky. Podle rovnice (6.8) musí platit podmínka:

$$\frac{\partial K(k_x(u^1(u^2, \varphi), u^2, \varphi), k_y, k_z)}{\partial \varphi} = 0 \quad (6.11)$$

$$\frac{\partial K(k_x(u^1(u^2, \varphi), u^2, \varphi), k_y, k_z)}{\partial u^2} = 0 \quad (6.12)$$

Rovnice (6.11) a (6.12) musí platit současně pro takové hodnoty φ_0 a u_0^2 , které vyhovují 6 složkovým rovnicím:

$$\frac{\partial k_x(u^2, \varphi)}{\partial \varphi} = 0 \quad (6.13a)$$

$$\frac{\partial k_y(u^2, \varphi)}{\partial \varphi} = 0 \quad (6.13b)$$

$$\frac{\partial k_z(u^2, \varphi)}{\partial \varphi} = 0 \quad (6.13c)$$

$$\frac{\partial k_x(u^2, \varphi)}{\partial u^2} = 0 \quad (6.13d)$$

$$\frac{\partial k_y(u^2, \varphi)}{\partial u^2} = 0 \quad (6.13e)$$

$$\frac{\partial K_z(\varphi, u^2)}{\partial u^2} = 0. \quad (6.13f)$$

Lze provést další alternativu řešení hrany vratu:

Podle [2], [19], [46] všech vektorovou rovnici (5.5) lze napsat stručně ve tvaru:

$$K_x = K_x(u^1, u^2, \varphi)$$

$$K_y = K_y(u^1, u^2, \varphi)$$

$$K_z = K_z(u^1, u^2, \varphi).$$

Je-li možno explicitně vyjádřit parametry u^1, u^2 jako funkce souřadnic K_x, K_y, K_z , potom rovnici (5.5) lze napsat:

$$f = f(K_x, K_y, K_z, \varphi) = 0.$$

Tři soumězné plochy φ se protínají v charakteristickém bodě, jehož souřadnice vyhovují těmto rovnicím:

$$f(K_x, K_y, K_z, \varphi) = 0 \quad (6.13g)$$

$$f_{\varphi}(K_x, K_y, K_z, \varphi) = 0 \quad (6.13h)$$

$$f_{\varphi\varphi}(K_x, K_y, K_z, \varphi) = 0. \quad (6.13i)$$

Splní-li parametr φ současně podmínky (6.13g), (6.13h), (6.13i) pak je to charakteristický bod druhého řádu, jehož geometrickým místem je hrana vratu. Tato alternativa nalezne své uplatnění prakticky pouze u rovinného ozubení. Teorie podřezání rovinného ozubení je v naší obecné teorii implicitně obsažena.

Řešení rovnic (6.13a) až (6.13f) a (6.13g) až (6.13i) je velmi obtížné. Vyžaduje to velmi náročnou logickou analýzu při sestavení programu pro počítač a lze očekávat,

že výsledky někdy nebudou přijatelně konvergentní (při špatném odhadu počátečních hodnot kořenů pro numerické řešení). To vyplývá z toho, že všechny naše rovnice nejsou ani explicitní ani implicitní, a že nelze derivovat normálním algebraickým způsobem. Proto zavedu další dvě metody, které považuji za nejvhodnější pro aplikaci v technické praxi.

- 1 - Metoda: zkoumání křivky řezu v určité vzdálenosti od osy součásti

Tato metoda se mi zdá nejlépe srozumitelná a nejpraktičtější. Výsledky se za použití výpočtu pomocí číslicového počítače dosáhnou rychleji a jednodušším způsobem než kteroukoliv jinou metodou, uvedenou v této práci.

Na obr.23 je rovina ζ ve vzdálenosti ρ od vrcholu kužele součásti a kolmá na osu O_z , mající jednotkový vektor O_z .

Rovnici (5.17) nyní napíšeme v jednoduchém tvaru.

$$K = K(\varphi, u^2). \quad (6.14)$$

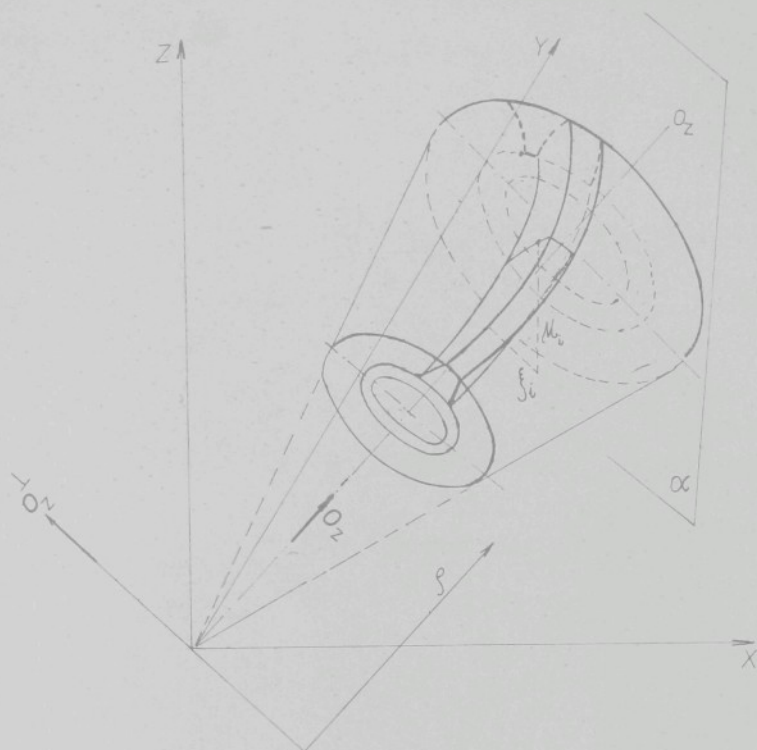
Křivky boku zubu v rovině řezu ve vzdálenosti ρ musí splnit podmínku:

$$K(\varphi, u^2) \cdot O_z - \rho = 0 \quad (6.15)$$

neboli:

$$\left[A_{O_z}^{\varphi} A_{O_k}^{\rho\varphi} (V + u^1(u^2, \varphi) A_{O_F}^{u^2} \eta) \right] \cdot O_z = 0. \quad (6.16)$$

Abychom dostali křivku řezu, musíme řešit rovnici



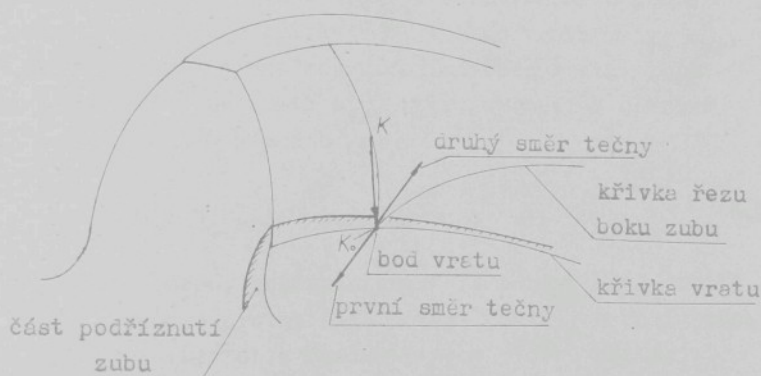
obr.23

(6.16) pro neznámý parametr u^2 při pevném parametru φ . Neznámý parametr u^2 je obsažen v tenzoru otočení $A_{0F}^{u^2}$ a ve vztahu pro určení parametru u^1 z rovnice (5.14). Z rovnice (6.16) je také vidět, že kořen u^2 lze dostat pomocí numerické metody [35], kterou jsem uvedl v kapitole (5.1.2) pro rovnici (5.57). Ukázalo se, že u^2 velmi rychle a bez obtíží konverguje. Souřadnice křivky řezu označíme ξ_i, μ_i a jejich rovnice jsou:

$$\xi_i = -K(u^2, \varphi) \cdot O_z^\perp \quad (6.17)$$

$$\mu_i = K_z(u^2, \varphi) \quad (6.18)$$

neboli: $f_i = f_i(\xi_i, \mathcal{U}_i).$ (6.19)



obr.24

Na základě křivky f_i se souřadnicemi ξ_i a $\mathcal{U}_i$ lze teď nalézt bod vřetu velmi snadno. V každém bodě na křivce řezu (obr.24) je možno sestrojít tečny ($\Delta\varphi = \varphi_{i+1} - \varphi_i$):

$$t_{i-1} = \frac{\partial f}{\partial \varphi} = \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \frac{f_i(u_i^1(u_i^2, \varphi_i), u_i^2, \varphi_i) - f_{i-1}(u_{i-1}^1(u_{i-1}^2, \varphi_{i-1}), u_{i-1}^2, \varphi_{i-1})}{\varphi_i - \varphi_{i-1}} \dots (6.20)$$

$$t_{i-2} = \frac{\partial f_i}{\partial \varphi} = \lim_{\varphi_{i-1} - \varphi_{i-2}} \frac{f_{i-1}(u_{i-1}^1(u_{i-1}^2, \varphi_{i-1}), u_{i-1}^2, \varphi_{i-1}) - f_{i-2}(u_{i-2}^1(u_{i-2}^2, \varphi_{i-2}), u_{i-2}^2, \varphi_{i-2})}{\varphi_{i-1} - \varphi_{i-2}} \dots (6.21)$$

V bodě vratu se změní směr pohybu, proto se u tečny t_{i-1} a t_{i-2} změní směrový vektor. Znamená to, že složky vektoru tečny z rovnic (6.20), (6.21) mají opačná znaménka při přechodu přes bod vratu. Neboli hodnoty složek $\{f_i$ a $\{K_i$ funkce f_i se blíží k nule při pohybu k bodu vratu a vzdalují se od nuly při pohybu od bodu vratu. Označme nyní hodnoty parametrů křivky f_i v bodě vratu φ_{vr} , u_{vr}^2 , u_{vr}^1 . Ostří nože má polohu odpovídající bodu vratu. Tuto polohu udává právě parametr u_{vr}^1 , který vychází z rovnice (5.14) a ve stručném zázpisu je:

$$u_{vr}^1 = u_{vr}^1(\varphi_{vr}, u_{vr}^2). \quad (6.22)$$

Jak bylo řečeno, podřezání nastane tehdy, když profil nože v jisté poloze protne část hotové obálky, neboli jedna z hotových charakteristik obálky protne plochu nástroje. Ovšem pokud úhel φ a u^2 přesahuje φ_{vr} , u_{vr}^2 , pak nechtěně odřízneme hotovou část vyrobeného zubu. Rozeberme si vliv parametru u^1 .

Maximální regulární interval řezného ostří je při parametru $u^1 = 1$, ($0 \leq u^1 \leq 1$).

a - Leží-li u_{vr}^1 v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, potom profil nože protíná hotový zub a k podřezání dojde. Aby se zabránilo podřezání při výrobě ozubení, musí být hodnoty $\varphi_{max} = \varphi_{vr}$ a $u_{max}^2 = u_{vr}^2$. Vzniku podřezání lze zabránit také tím, že vyrobíme ostří nože tak, aby špička nože skončila práci v bodě vratu u_{vr}^1 , nebo změnou úhlové rychlosti součásti a kolébky podle kriteria nutné podmínky podřezávání.

b - Leží-li u_{vr}^1 mimo interval $\langle 0, 1 \rangle$, pak k podřezání dojít nemůže a ani hotový zub není vyroben až ke křivce vratu.

c - Je-li parametr $u_{vr}^1 = 1$, potom obrobený zub je ukončený na hranici vratu a začne podřezávání, pokračuje-li výroba dále.

Při určení t_i může nastat takový případ, že jedna složka toho vektoru nezmění znaménko; potom směr tečny v bodě vratu je rovnoběžný s jednou ze dvou os souřadnic křivky řezu, tj. jedna ze dvou složek tečny nemá opačná znaménka při přechodu přes bod vratu. To však nemá žádný vliv na existenci bodu vratu, poněvadž složky tečny se musí vždy blížit k nule při pobytu k bodu vratu a pak se vzdalují od nuly při pohybu od bodu vratu. Tento jev vzniká současně pro složky tečen z rovnic (6.20) a (6.21).

Pro nás je důležitější hranice podřezání, kterou najdeme pomocí průsečíku trajektorie špičky nože s křivkou řezu příslušného úhlu φ a u^2 . Špička nože má parametr na ostří $u^1 = 1$.

Řešíme rovnici:

$$A_{O_Z}^{\varphi} A_{O_K}^{p\varphi} (V + A_{O_F}^{u^2} \eta) \cdot O_Z = 0 \quad (6.23)$$

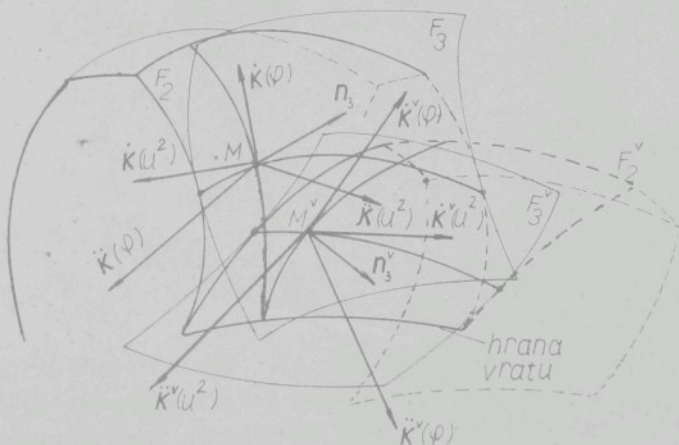
pro každé pevné φ najdeme úhel u^2 tak, aby byla splněna rovnice (6.23) (metoda řešení parametru u^2 je jako dříve). Souřadnice trajektorie nože označíme f_i^n , $\{ \}_i^n$, $\mathcal{M}_i^n$. Z rovnic (6.17), (6.18) a (6.19) je potom možno kreslit křivku dráhy špičky nože. Průsečík dvou křivek f_i a f_i^n určuje souřadnice boku počátku podřezání.

Pokud nůž má obloukovou část ostří nebo protuberanci, potom podřezání se zvětší o hodnotu, která je řešením rovnice (5.59). Tato rovnice dává souřadnice obálky křivky řezu, která protíná křivku obálky vytvořenou přímkovou částí ostří. Leží-li parametr u_{vr}^1 mimo interval $\langle 0, 1 \rangle$, potom musíme zkoumat, při jakých parametrech u^2, φ, t na obloukovém ostří vznikne hrana vratu resp. podřezání. Toho dosáhneme, když znovu vyšetříme rovnice tečen (6.20), (6.21) - s tou změnou, že parametrem $t(\varphi, u^2)$ nahradíme parametr $u^1(u^2, \varphi)$ - za podmínky, kterou jsem uvedl na stranách 82 a 83. Hranice podřezání je opět průsečík křivky obálky obloukové části ostří od okamžiku vzniku parametrů bodu vratu a křivky obálky řezu vytvořené přímkovým a obloukovým ostřím před okamžikem vzniku parametrů bodu vratu.

Výsledky nám dávají hloubku a začátek podřiznutí, parametry bodu vratu, parametry stroje, nástroje a součásti např. u^1, u^2, φ , kde podřezávání začíná i jiné informace pro praktické použití. Očekává se, že číslicový počítač má i kreslicí zařízení, které nám zobrazuje po výpočtu přímo křivky a řešené body. Příklady a výsledky uvedeme později. Nyní přejdeme k jiné metodě, která je matematicky přesnější ale méně názorná.

2 - Metoda zkoumání pomocí Dupinovy indikatrix (Gaussovy křivosti)

Podstata této metody spočívá v tom, že body na charakteristice změny vlastnosti při přechodu přes hranu vratu. Indikatrix nepodřiznutého zubu charakterizuje eliptický nebo hyperbolický bod. Při pohybu po ploše zubu se charakter plochy nezmění. Jde-li o zub s podřiznutím, změní se charakter plochy zubu při přechodu přes hranu vratu např. z eliptického na hyperbolický a nebo opačně. Znovu zde používáme vztahů (4.46), (4.48) a (4.15).



obr.25

Obr.25 ukazuje polohy ploch F_2 , F_3 a polohy ploch po přechodu přes hranu vratu F_2^V a F_3^V (součást a nástroj).

$\ddot{K}(u^2)$ je druhá derivace rovnice plochy obálky podle parametru u^2

$\dot{K}(\varphi)$ je druhá derivace rovnice plochy obálky podle parametru φ

$\dot{K}(\varphi), \dot{K}(u^2)$ jsou první derivace rovnice plochy obálky podle parametrů φ a u^2 .

Podobný význam mají i vektory $K^V(\varphi), K^V(u^2), K^V(\varphi), K^V(u^2)$. n_3 a n_3^V jsou normální vektory plochy F_3 a F_3^V v bodě na charakteristice.

Podle rovnice (4.15) určíme jednotkové vektory a vektory X_{ij} .

$$n_3^o = \frac{K_{u^1} \times K_{u^2}}{|K_{u^1} \times K_{u^2}|} \quad (6.24)$$

$$n_3^{ov} = \frac{K_{u^1}^V \times K_{u^2}^V}{|K_{u^1}^V \times K_{u^2}^V|} \quad (6.25)$$

Vektory K_{u^1} , K_{u^2} jsou z rovnic (5.8) a (5.9):

$$K_{u^1} = A_{o_z}^\varphi A_{o_k}^{p\varphi} A_{o_F}^{u^2} \eta$$

$$K_{u^2} = u^1 A_{o_z}^\varphi A_{o_k}^{p\varphi} R(o_F) A_{o_F}^{u^2} \eta$$

Co se týká určení vektorů X_{ij} nelze zde derivovat analyticky ale je nutno derivovat pomocí numerické metody (to bylo provedeno dříve) na základě toho, že jsou už vypočteny souřadnice boku zubu příslušejícího každému pevnému

úhlu $\varphi \approx u^2$. Označíme-li souřadnice bodů na ploše zubu jako $K_{r,k}$; kde r je ekvivalent okamžité velikosti úhlu φ a k je ekvivalent okamžité velikosti úhlu u^2 . Lze napsat:

$$\ddot{K}(\varphi) = \frac{K_{r+2,k+1} - 2K_{r+1,k+1} + K_{r,k+1}}{\varphi_{r+2,k+1} - 2\varphi_{r+1,k+1} + \varphi_{r,k+1}} \quad (6.26)$$

$$\ddot{K}(u^2) = \frac{K_{r+1,k} - 2K_{r+1,k+1} + K_{r+1,k+2}}{u_{r+1,k+2} - 2u_{r+1,k+1} + u_{r+1,k}} \quad (6.27)$$

$$\ddot{K}(u^2, \varphi) = \frac{K_{r+2,k+2} + K_{r+1,k+1} - K_{r+1,k+1} - K_{r+1,k+2}}{\varphi_{r+2,k+2} - \varphi_{r+2,k+1} + u_{r+1,k+1}^2 - u_{r+1,k+2}^2} \quad (6.28)$$

Souřadnice tenzoru plochy:

$$h_{11} = (K_{u^1} \times K_{u^2}) \ddot{K}(\varphi) = \det [K_{u^1}, K_{u^2}, \ddot{K}(\varphi)] \quad (6.29)$$

$$h_{12} = (K_{u^1} \times K_{u^2}) \ddot{K}(\varphi, u^2) = \det [K_{u^1}, K_{u^2}, \ddot{K}(\varphi, u^2)] \quad (6.30)$$

$$h_{22} = (K_{u^1} \times K_{u^2}) \ddot{K}(u^2) = \det [K_{u^1}, K_{u^2}, \ddot{K}(u^2)] \quad (6.31)$$

Vyšetříme vztah:

$$S^1 = h_{11} \cdot h_{22} - h_{12}^2 \quad (6.32)$$

Existují-li dvě čísla S^1 a S^{1+1} taková, že splní podmínku z rovnic (4.46) a (4.48), potom mezi S^1 a S^{1+1} existuje

takové číslo S^i , které odpovídá parametrům φ a u^2 bodu vratu. Číslo S^i volíme jako střední hodnotu čísel S^i a S^{i+1} . Čím je pole souřadnic (síť křivek na ploše) hustší, tím přesněji lze bod vratu určit. Pro nás je důležitější, že počáteční hranici podřezání lze určit analyticky. Ostatní úvahy jsou stejné jako u první metody.

6.2.3 Analytické určení počáteční hranice podřezání

Hranice podřezání je tam, kde trajektorie špičky nástroje protíná plochu boku zubu. Takovou průsečnici lze formulovat takto:

$$K_n(1, \hat{u}^2, \hat{\varphi}) = K_{ob}(\varphi, u^2) \quad (6.33)$$

platí pro kolo Gleason.

Nebo:

$$K_n(1, \hat{k}, \hat{\varphi}) = K_{ob}(k, \varphi) \quad (6.34)$$

platí pro kolo Oerlikon.

Kde:

K_n je plocha nástroje vytvořená pohybem špičky nože,

K_{ob} je plocha obálky obrobku,

$\hat{u}^1 = 1$; $\hat{t} = 1$ určuje špičku ostří nože,

$\hat{\varphi}$, $\hat{u}^2$ parametry odpovídající nástroji,

φ , u^2 parametry odpovídající součásti (vyráběnému kolu).

Úlohu budeme řešit konkrétně pro kolo Gleason. Pro kolo Oerlikon je analogický postup, jenom místo parametrů u^1 , φ , u^2 budou t , φ , k a funkce K_n , K_{ob} mají jiné vyjádření, které bylo uvedeno v předcházejících kapitolách. Plocha nástroje opsaná hrotem ostří $u^1 = 1$ je

$$K_n(1, \hat{u}^2, \hat{\varphi}) = A_{OZ}^{\hat{\varphi}} A_{OK}^{p\hat{\varphi}} (V + A_{OF}^{\hat{u}^2} \eta) \quad (6.35)$$

Plocha obálky (plocha boku zubu) má tvar

$$K_{ob}(u^2, \varphi) = A_{0z}^{\varphi} A_{0k}^{p\varphi} (V + u^1(u^2, \varphi) A_{0f}^{u^2} \eta). \quad (6.36)$$

Podle rovnice (6.33) lze napsat:

$$\Phi = \hat{A}_{0z}^{\hat{\varphi}} A_{0k}^{p\hat{\varphi}} (V + \hat{A}_{0f}^{\hat{u}^2} \eta) - A_{0z}^{\varphi} A_{0k}^{p\varphi} (V + u^1(u^2, \varphi) A_{0f}^{u^2} \eta) = 0. \quad \dots(6.37)$$

Vektorová rovnice (6.37) dává soustavu tří složkových transcendentních rovnic o čtyřech neznámých. zvolíme pevný parametr $\hat{u}^2$; potom pro tři neznámé $\hat{\varphi}$, φ , u^2 lze stručně rovnici (6.37) napsat:

$$\Phi = \Phi(v_1(\hat{\varphi}, \varphi, u^2), v_2(\hat{\varphi}, \varphi, u^2), v_3(\hat{\varphi}, \varphi, u^2)) = 0. \quad (6.38)$$

Řešení soustavy (6.38) provedeme pomocí modifikované Newtonovy metody (s odhadem počáteční polohy kořenů), jejíž stručný princip je tento:

Mějme obecnou soustavu nelineárních rovnic:

$$\begin{aligned} v_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ v_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ \vdots & \\ v_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \end{aligned} \quad (6.39)$$

kterou lze psát ve vektorovém tvaru:

$$\Phi(X) = 0. \quad (6.40)$$

Předpokládejme dále, že známe p -tou aproximací řešení soustavy (6.39):

$$X^{(p)} = x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \dots, x_n^{(p)}, \quad (6.41)$$

kteřá se od přesného řešení liší o chybu $\varepsilon^{(p)}$

$$X = X^{(p)} + \varepsilon^{(p)}. \quad (6.42)$$

Po dosazení (6.42) do rovnice (6.40) lze psát:

$$\phi(X^{(p)} + \varepsilon^{(p)}) = \phi(X^{(p)}) + \phi'(X^{(p)}) \cdot \varepsilon^{(p)} = 0, \quad (6.43)$$

kde

$$\phi'(X^{(p)}) = W(X^{(p)}) = \frac{\partial \phi}{\partial X}. \quad (6.44)$$

S použitím (6.44) lze napsat rovnici (6.43) jako:

$$\phi(X^{(p)}) + W(X^{(p)}) \cdot \varepsilon^{(p)} = 0.$$

Chyba p -té aproximace pak:

$$\varepsilon^{(p)} = -W^{-1}(X^{(p)}) \cdot \phi(X^{(p)}),$$

kde W^{-1} je inverzní matice k matici W , potom můžeme $(p+1)$ aproximaci vyjádřit v tomto tvaru:

$$X^{(p+1)} = X^{(p)} - W^{-1}(X^{(p)}) \cdot \phi(X^{(p)}) \quad (6.45)$$

pro $p = 0, 1, 2, \dots$

Pořadí (6.5) máme řešení rovnice (6.36):

$$V_n = V_{n-1} - W^{-1}(V_0) \Phi(V_{n-1}), \quad (6.46)$$

kde

$$V_n = V_n \begin{pmatrix} \hat{\varphi} \\ \varphi \\ u^2 \end{pmatrix}$$

jsou kořeny v n-tém kroku,

$$V_{n-1} = V_{n-1} \begin{pmatrix} \hat{\varphi} \\ \varphi \\ u^2 \end{pmatrix}$$

jsou kořeny v (n-1)-tém kroku,

$W^{-1}(V_0)$ je inverzní matice v bodě počátečního odhadu

$$W^{-1}(V_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_1}{\partial \hat{\varphi}} & \frac{\partial V_1}{\partial \varphi} & \frac{\partial V_1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial V_2}{\partial \hat{\varphi}} & \frac{\partial V_2}{\partial \varphi} & \frac{\partial V_2}{\partial u^2} \\ \frac{\partial V_3}{\partial \hat{\varphi}} & \frac{\partial V_3}{\partial \varphi} & \frac{\partial V_3}{\partial u^2} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial \hat{\varphi}} & \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} & \frac{\partial \Phi}{\partial u^2} \end{pmatrix}_{\hat{\varphi}_0, \varphi_0, u_0^2} \quad (6.47)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = R(O_Z + p A_{O_Z K}^{\varphi}) A_{O_Z}^{\varphi} A_{O_K}^{p\varphi} (V + A_{O_F}^{u^2} \eta) \quad (6.48)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = \frac{\Phi(\varphi + \Delta\varphi) - \Phi(\varphi)}{\Delta\varphi} =$$

$$\frac{A_{O_Z}^{\varphi + \Delta\varphi} A_{O_K}^{p(\varphi + \Delta\varphi)} (V + u^2(\varphi + \Delta\varphi, u^2) A_{O_F}^{u^2} \eta) - A_{O_Z}^{\varphi} A_{O_K}^{p\varphi} (V + u^2(\varphi, u^2) A_{O_F}^{u^2} \eta)}{\Delta\varphi} \quad (6.49)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u^2} = \frac{\Phi(u^2 + \Delta u^2, \varphi) - \Phi(u^2)}{\Delta u^2} =$$

$$= A_{O_Z}^{\varphi} A_{O_K}^{p\varphi} (V + u^1(\varphi, u^2 + \Delta u^2) A_{O_F}^{u^2 + \Delta u^2} \eta) - A_{O_Z}^{\varphi} A_{O_K}^{p\varphi} (V + u^1(u^2, \varphi) A_{O_F}^{u^2} \eta) \quad (6.50)$$

$$\begin{pmatrix} \hat{\varphi}_n \\ \varphi_n \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_{n-1} \\ \varphi_{n-1} \\ u_{n-1} \end{pmatrix} - W^{-1} \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_0 \\ \varphi_0 \\ u_0 \end{pmatrix} \cdot \Phi \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_{n-1} \\ \varphi_{n-1} \\ u_{n-1} \end{pmatrix} \quad (6.51)$$

Platí-li

$$\|V_n - V_{n-1}\| < \varepsilon, \quad (6.52)$$

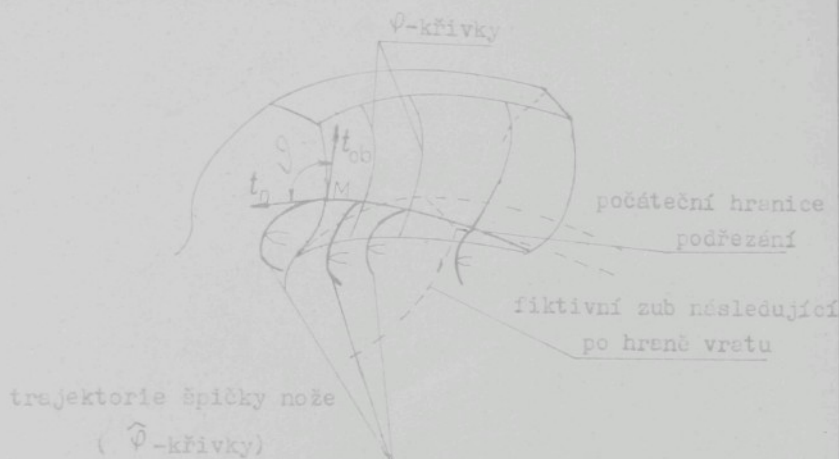
potom $V_n = V_n \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_n \\ \varphi_n \\ u_n \end{pmatrix}$ je řešením (6.37).

Soustavu (6.37) lze řešit jinými metodami jako např.:
Cremenovou, Gaussovou, Jakobiho, Gause-Seidelovou a pod. [L.35].

6.2.4 Stanovení úhlu mezi φ -parametrickou křivkou plochy zubu a trajektorií nože

Obrázek 26 ukazuje tvar plochy zubu, fiktivní zub ze hřebenovratu, křivky trajektorie špičky nože ($\hat{\varphi}$ -křivky) a φ -parametrické křivky na ploše zubu. V bodě M na hranici podřezání stanovíme úhel ϑ mezi φ -křivkou a $\hat{\varphi}$ -křivkou. Lze napsat:

$$\cos \vartheta = \frac{t_n \cdot t_{ob}}{|t_n| \cdot |t_{ob}|}, \quad (6.53)$$



obr.26

neboli:

$$\cos \theta = \frac{\varepsilon_{ij} \cdot du^i dv^j}{\varepsilon_{ik} \cdot du^k du^l \varepsilon_{mn} \cdot dv^m dv^n}, \quad (6.54)$$

kde du^i , du^j jsou tečné vektory sestavené k oběma křivkám v jejich společném bodě M, k, l jsou parametrické φ a $\hat{\varphi}$ -křivky,

$$\varepsilon_{ij} = \phi_i \cdot \phi_j$$

$$\phi_i = \frac{\partial \phi}{\partial u_i} \quad (6.55)$$

$$\phi_j = \frac{\partial \phi}{\partial v_j} \quad (6.56)$$

Předpokládáme, že křivky ϕ a $\hat{\phi}$ jsou parametrickými křivkami následující plochy (při zvrácení $u^2, \hat{u}^2$):

$$\phi = A_{0Z}^{\hat{\phi}} A_{0K}^{p\hat{\phi}} (V + A_{0F}^{\hat{u}^2} \eta) - A_{0Z}^{\phi} A_{0K}^{p\phi} (V + A_{0F}^{u^2} \eta) \quad (6.57)$$

Potom lze napsat:

$$(du^1, du^2) = (1, 0),$$

$$(dv^1, dv^2) = (0, 1).$$

Úhel ϑ je dán vztahem:

$$\cos \vartheta = \frac{\varepsilon_{12}}{\varepsilon_{11} \cdot \varepsilon_{22}} \quad (6.58)$$

$$\varepsilon_{12} = \phi_1 \cdot \phi_2 \quad (6.59)$$

$$\varepsilon_{11} = \phi_1 \cdot \phi_1 \quad (6.60)$$

$$\varepsilon_{22} = \phi_2 \cdot \phi_2 \quad (6.61)$$

Podle (6.57) máme:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{\partial}{\partial \hat{\phi}} (A_{0Z}^{\hat{\phi}} A_{0K}^{p\hat{\phi}} (V + A_{0F}^{\hat{u}^2} \eta)) = \\ &= R(O_Z + p A_{0Z}^{\hat{\phi}} O_K) A_{0Z}^{\hat{\phi}} A_{0K}^{p\hat{\phi}} (V + A_{0F}^{\hat{u}^2} \eta) \end{aligned} \quad (6.62)$$

$$\phi_2 = \frac{\partial}{\partial \phi} (A_{0Z}^{\phi} A_{0K}^{p\phi} (V + A_{0F}^{u^2} \eta)) \quad (6.63)$$

Po dosazení hodnot $\hat{\phi}, \phi, u^2, \hat{u}^2$ z řešení rovnice (6.51) dostaneme úhel mezi ϕ -křivkou plochy zubu a trajektorií nože. Je-li úhel $\vartheta \neq 180^\circ$, pomáhá nám tento úhel znovu

kontrolovat správnost zjištěného podřezání. Jinak lze tento úhel stanovit metodou zkoumání řezu, když křivka řezu a trajektorie nože leží v rovině řezu.

Co se týká podřezání u nože s protuberancí, kritérium je stejné jako u uvedené metody. Liší se jenom plochou nástroje, která je vyjádřena rovnicí (5.27). Hranice podřezání se zde málo liší od podřezání vytvořeného špičkou nože.

Uvedená teorie výzkumu podřezání platí nejen pro kolo Gleason ale i pro kolo Oerlikon, Klingelnberg nebo jiné druhy ozubení. V této práci⁵² však jimi nebudeme zabývat.

7. Stanovení rozdílu mezi teoretickým a skutečným převodovým poměrem při záběru prostorových ploch s aplikací na kuželová kola

Určení rozdílu mezi teoretickým a skutečným poměrem převodu při záběru ozubených kol má velmi významný důsledek. Především lze podle něho zjistit optimální pásmo dotyku, případně je možno změnit geometrické řezné parametry a kinematické vazby stroje, nástroje a součástí tak, aby plochy zubu měly optimální převodový poměr.

Teoreticky lze popsat plochy, které vytvářejí řezné hrany dvou nástrojů při výrobě spoluzabírajících kol rovnicemi:

$$X_1 = X_1(u^1, u^2) \quad (7.1)$$

$$X_2 = X_2(u^3, u^4) \quad (7.2)$$

Tomu odpovídající obalové plochy součástí mají rovnice:

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= K_1(u^1, u^2, \varphi) \\ [K_{1u^1}, K_{1u^2}, K_{1\varphi}] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.3)$$

$$\left. \begin{aligned} K_2 &= K_2(u^3, u^4, \psi) \\ [K_{2u^3}, K_{2u^4}, K_{2\psi}] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.4)$$

Dvě spoluzabírající plochy pak mají rovnice

$$r_1 = r_1(u^1, u^2, \varphi, \delta) \quad (7.5)$$

$$r_2 = r_2(u^3, u^4, \psi, \theta) \quad (7.6)$$

V pevné souřadnicové soustavě platí pro bod záběru

$$n_1^\circ = n_2^\circ \quad (7.7)$$

$\vec{n}_1^0$ a $\vec{n}_2^0$ jsou jednotkové vektory.

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_2 \quad (7.8)$$

Kde u^1, u^3 jsou parametry řezných hran,
 u^2, u^4 jsou parametry otočení nástrojů,
 φ, ψ jsou úhly otočení kol při výrobě,
 δ, θ jsou úhly otočení kol při záběru.
 Podle rovnic (7.7) a (7.8) potom máme soustavu

$$\vec{n}^0 = \vec{n}^0 \quad (7.9)$$

$$\vec{r}_1(u^1, u^2, \varphi, \delta) = \vec{r}_2(u^3, u^4, \psi, \theta) \quad (7.10)$$

$$\begin{bmatrix} K_{1u} & K_{1u^2} & K_{1\varphi} \end{bmatrix} = 0 \quad (7.11)$$

$$\begin{bmatrix} K_{2u^3} & K_{2u^4} & K_{2\psi} \end{bmatrix} = 0, \quad (7.12)$$

kterou tvoří šest složkových rovnic o osmi neznámých ($u^1, u^2, u^3, u^4, \varphi, \delta, \psi, \theta$). Volíme jeden pevný parametr např. δ a chceme v každém bodě záběru určit tuto hlavní závislost:

$$\theta = f(\delta). \quad (7.13)$$

Okamžitý skutečný převodový poměr pak je

$$i_{21} = \frac{d\theta}{d\delta}. \quad (7.14)$$

teoretický převodový poměr:

$$i_{20} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{z_1}{z_2} \quad (7.15)$$

z_1, z_2 jsou počty zubů spoluzubírajících kol.
 Poměrný rozdíl mezi skutečným a teoretickým převodem pak je

dán rovnicí:

$$\varepsilon = \frac{i_{21} - i_{20}}{i_{20}} \quad (7.16)$$

Tím jsme provedli řešení pro každý bod záběru. Nyní je budeme aplikovat na kuželová kola Gleason. Pro ostatní ozubení platí podobná metoda studia s použitím konkrétních ploch nástroje nebo součástí.

V kapitole (5.1.2) jsme dostali rovnici boku zubu kola 1 (např. pastorek):

$$K_1 = A_{0z_p}^{\varphi} A_{0k_p}^{p_1\varphi} (V_p + u^1(u^2, \varphi) A_{0F_p}^{u^2} \eta_p) \quad (7.17)$$

a plochy kola 2 (např. tsilířové kolo):

$$K_2 = A_{0z_t}^{\psi} A_{0k_t}^{p_2\psi} (V_t + u^3(u^4, \psi) A_{0F_t}^{u^4} \eta_t) \quad (7.18)$$

V pevně zvolené souřadnicové soustavě mají spoluzabírající plochy rovnice ve tvaru:

$$r_1 = A_{0_1}^{\delta} A_{0z_p}^{\varphi} A_{0k_p}^{p_1\varphi} (V_p + u^1(u^2, \varphi) A_{0F_p}^{u^2} \eta_p) \quad (7.19)$$

$$r_2 = A_{0_2}^{\theta} A_{0z_t}^{\psi} A_{0k_t}^{p_2\psi} (V_t + u^3(u^4, \psi) A_{0F_t}^{u^4} \eta_t) \quad (7.20)$$

Jednotkové normály:

$$n_1^{\circ} = \frac{\partial r_1}{\partial \varphi} \times \frac{\partial r_1}{\partial u^2} \cdot \frac{1}{\left| \frac{\partial r_1}{\partial \varphi} \times \frac{\partial r_1}{\partial u^2} \right|} \quad (7.21)$$

$$n_2^0 = \frac{\partial r_2}{\partial \psi} \times \frac{\partial r_2}{\partial u^4} \cdot \frac{1}{\left| \frac{\partial r_2}{\partial \psi} \times \frac{\partial r_2}{\partial u^4} \right|} \quad (7.22)$$

Podle (7.9) potom

$$\frac{\partial r_1}{\partial \psi} \times \frac{\partial r_1}{\partial u^2} \cdot \frac{1}{\left| \frac{\partial r_1}{\partial \psi} \times \frac{\partial r_1}{\partial u^2} \right|} = \frac{\partial r_2}{\partial \psi} \times \frac{\partial r_2}{\partial u^4} \cdot \frac{1}{\left| \frac{\partial r_2}{\partial \psi} \times \frac{\partial r_2}{\partial u^4} \right|} \quad (7.23)$$

Podle rovnice (7.10) platí:

$$A_{o_1}^{\delta} A_{o_{z_p}}^{\varphi} A_{o_{k_p}}^{p_i \varphi} (V_p + u^1(u^2, \varphi) A_{o_{F_p}}^{u^2} \eta) = A_{o_2}^{\theta} A_{o_{z_t}}^{\psi} A_{o_{k_t}}^{p_i \psi} (V_t + u^3(u^4, \psi) A_{o_{F_t}}^{u^4} \eta), \quad \dots (7.24)$$

neboli

$$A_{o_1}^{\delta} A_{o_{z_p}}^{\varphi} A_{o_{k_p}}^{p_i \varphi} (V_p + u^1(u^2, \varphi) A_{o_{F_p}}^{u^2} \eta) - A_{o_2}^{\theta} A_{o_{z_t}}^{\psi} A_{o_{k_t}}^{p_i \psi} (V_t + u^3(u^4, \psi) A_{o_{F_t}}^{u^4} \eta) = 0, \quad \dots (7.25)$$

kde lze $u^3(u^4, \psi)$, $u^1(u^2, \varphi)$ vyjádřit podle (5.14):

$$u^1 = \frac{\det \left[A_{o_{z_p}}^{\varphi} A_{o_{k_p}}^{p_i \varphi} A_{o_{F_p}}^{u^2} \eta; A_{o_{z_p}}^{\varphi} A_{o_{k_p}}^{p_i \varphi} R(O) A_{o_{F_p}}^{u^2} \eta; R(O + p_1 A_{o_{z_p}}^{\varphi} O_{k_p}) A_{o_{z_p}}^{\varphi} A_{o_{k_p}}^{p_i \varphi} V_p \right]}{\det \left[A_{o_{z_p}}^{\varphi} A_{o_{k_p}}^{p_i \varphi} A_{o_{F_p}}^{u^2} \eta; A_{o_{z_p}}^{\varphi} A_{o_{k_p}}^{p_i \varphi} R(O) A_{o_{F_p}}^{u^2} \eta; R(O + p_1 A_{o_{z_p}}^{\varphi} O_{k_p}) A_{o_{z_p}}^{\varphi} A_{o_{k_p}}^{p_i \varphi} V_p \right]} \quad \dots (7.26)$$

$$u^3 = \frac{\det \left[A_{o_{z_t}}^{\psi} A_{o_{k_t}}^{p_i \psi} A_{o_{F_t}}^{u^4} \eta; A_{o_{z_t}}^{\psi} A_{o_{k_t}}^{p_i \psi} R(O) A_{o_{F_t}}^{u^4} \eta; R(O + p_2 A_{o_{z_t}}^{\psi} O_{k_t}) A_{o_{z_t}}^{\psi} A_{o_{k_t}}^{p_i \psi} V_t \right]}{\det \left[A_{o_{z_t}}^{\psi} A_{o_{k_t}}^{p_i \psi} A_{o_{F_t}}^{u^4} \eta; A_{o_{z_t}}^{\psi} A_{o_{k_t}}^{p_i \psi} R(O) A_{o_{F_t}}^{u^4} \eta; R(O + p_2 A_{o_{z_t}}^{\psi} O_{k_t}) A_{o_{z_t}}^{\psi} A_{o_{k_t}}^{p_i \psi} V_t \right]} \quad \dots (7.27)$$

Chceme-li vyšetřit rozdíl převodu na celé ploše boku zubu, potom je potřeba měnit σ v celém rozsahu uhlu při záběru dvou kol. Teoretické výpočtové body plochy zubu pastorku s talířového kola lze získat dosazením vyřešených hodnot do rovnice (5.16). Souřadnice bodů záběru dostaneme dosazením kořenů do rovnic (7.19) nebo (7.20) (pro pastorek nebo talířové kolo). Metoda řešení soustavy rovnic (7.23), (7.25) je stejná jako v kapitole (6.2.2). Zde ji už nebudu opakovat. Možná, že určení inverzní matice W^{-1} bude komplikovanější a méně přesné. To však nevádí, neboť tato matice nehraje rozhodující roli pro numerické řešení, neboť má vliv jen na rychlost konvergence.

Na základě této teorie je možno upravit parametry různých nástrojů tak, aby skutečný převod se co nejvíce přiblížil teoretickému převodovému poměru. Použitá metoda platí bezezměny i pro kola Oerlikon.

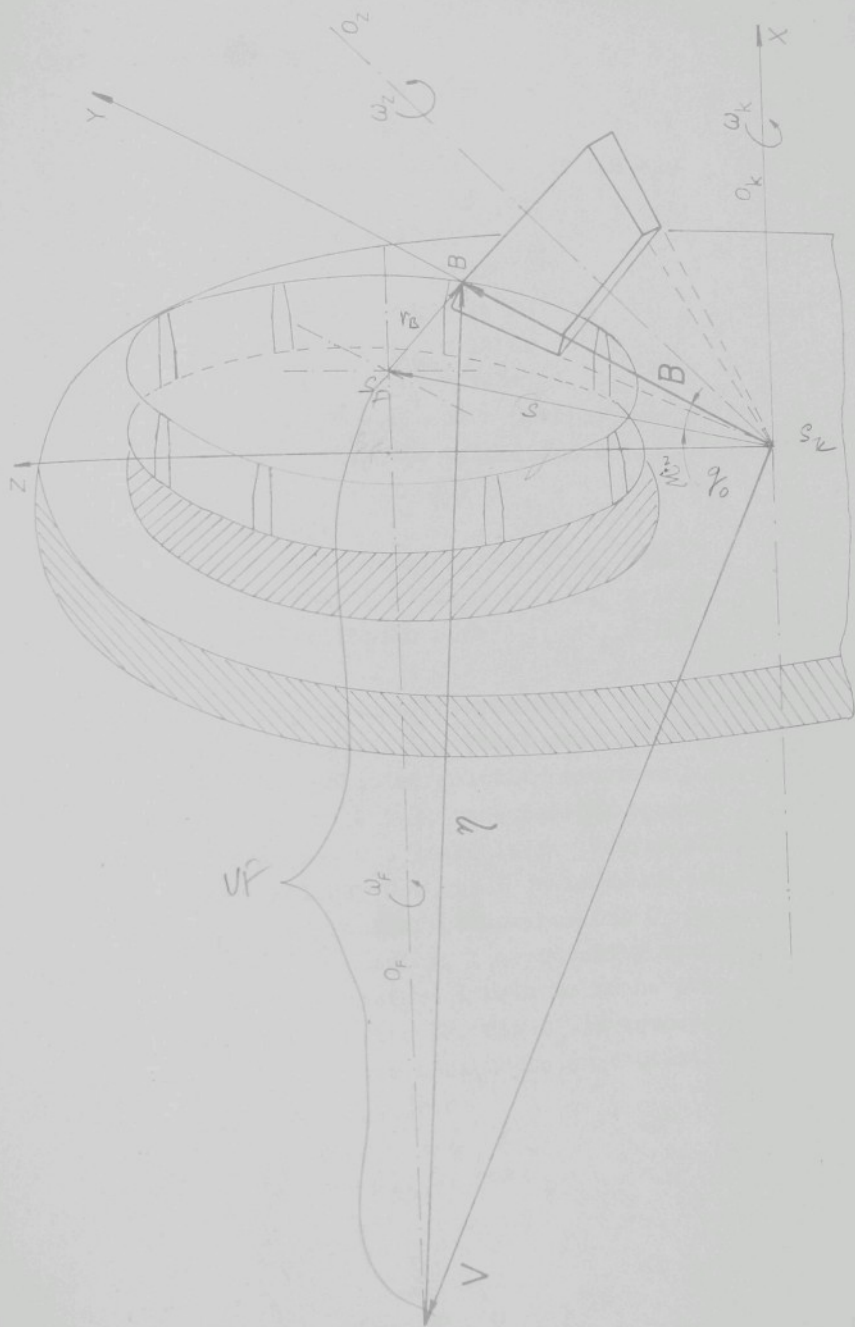
8. Určení vstupních údajů pro rovnici obalových ploch

V této kapitole chci ukázat možnosti určit potřebné vektory pro plochy boku zubu. Je pravda, že způsobů určení těchto vektorů je několik a že souřadnice bodů plochy zubu nebo křivky řezu lze stanovit pro jakékoliv polohy součástí, nástroje nebo kolébky. Někdy se např. stanoví pomocí tzv. „výpočtového bodu“, který je možno zvolit za střední bod zubu plochého kola. Zde je vhodné, když výpočet provedeme od počáteční polohy dotyku kola s nožem, případně zkoumáme křivky na ploše zubu v libovolném řezu. Je třeba dbát na to, zda se obrábění vykonává vnitřním nebo vnějším nožem (konvexní nebo konkávní bok zubu); práce se může konat od paty zubu k hlavě nebo naopak. Má to velký vliv na přesnost určení některých vektorů, např. u kola Gleason jsou to vektory V , η ; u kola Oerlikon vektory L , N , A , B . Samozřejmě by bylo nejlepší tyto vektory změřit, jenže model, na kterém by bylo možné měření provést, neexistuje a měření je velmi pracné! Proto nezbyvá nic jiného než vycházet z polohy součástí-nástroje-kolébky a geometrických řezných parametrů. Při změně těchto údajů se změní parametrické křivky plochy zubu, křivosti křivky na ploše zubu, převod, podřezání apod. I to je však dobré k tomu, že můžeme zkoumat vliv geometrických úhlů α , β , γ na tyto řešené problémy. Vždy se musí vycházet ze skutečných údajů, aby určené vektory byly v souladu s technickými výkresy (konstrukčními a technologickými). Nyní ukážu jeden příklad stanovení vektorů V , η a dalších vstupních hodnot při výrobě kola Gleason vnitřním ostrím při obrábění z paty ke hlavě.

Na obr. 27 je případ výroby kuželového kola Gleason číslo 138.1.32.04-1 v Hrádku nad Nisou, kdy byly zjištěny tyto údaje:

- Údaje pro pastorek:

Úhel pootočení obráběného kola k dokončení jednoho boku zubu $\varphi = 23^\circ$



obr.27

Čelní modul	$m_{ce} = 9$
Úhel záběru	$\alpha_n = 14^{\circ}30'$
Střední úhel spirály	$\beta_s = 28^{\circ}56'$
Délka povrsky hlavového kužele	$R_{de} = 206,469$
Vnější průměr hlavový	$d_n = 137,889$
Výška hlavy zubu	$h_n = 10,89$
Výška paty zubu	$h_p = 6,102$
Úhel roztečného kužele	$\delta_r = 16^{\circ}28'$
Úhel hlavového kužele	$\delta_h = 19^{\circ}29'$
Úhel patního kužele	$\delta_p = 14^{\circ}47'$
Úhel mezi površkami roztečného a patního kužele	$\vartheta_p = 1^{\circ}41'$
Poměr počtu zubů pastorku a talířového kola	$Z_1/Z_2 = 13/44$

- Údaje pro nástroj:

Jmenovitý průměr frézovací hlavy	$\phi d_F = 12''$
Jmenovitý průměr vnějšího nože	$\phi d_v = 11,81''$
Jmenovitý průměr vnitřního nože	$\phi d_i = 12,19''$

Ostatní údaje jsou jeřnom informativní. Uvedené hodnoty také nepoužijeme všechny, jen ty, které jsou uvedeny v následujících vztazích. Nyní se pokusíme položit soustavu souřadnic. Jak bylo řečeno v kapitole 5.1, bude počátek systému XYZ průsečíkem osy O_k a osy O_z , která leží v rovině XY. Osa X je totožná s osou kolébky O_k , osa Y je kolmá na osu X a leží v rovině XO_z , tj. prochází patou zubu. Osa O_z je kolmá na rovinu XY a tvoří s osami X, Y pravotočivý systém. V n.p. Hrádku nad Nisou se nastavují nože kolmo na patu zubu, tj. osa O_F je kolmá na rovinu ZY. Osa O_k je rovnoběžná s osou O_F a rovina špiček nože prochází vrcholem součásti. Jednotkové vektory os O_z , O_k , O_F , jsou:

$$O_z = O_z (\cos \delta_p, 0, \cos \delta_p) \quad (8.1)$$

$$O_k = O_k (1, 0, 0) \quad (8.2)$$

$$O_F = O_F (1, 0, 0) \quad (8.3)$$

Poznámka: Složky jednotkových vektorů os O_z , O_k , O_F

v obecné poloze jsou určeny rovnicí (8.2) kap. 5.
B je bod dotyku špičky nože se součástí (kolem) při počátku obrábění. Vektor V je popsán rovnicí:

$$V = S + O_F \cdot VF \quad (8.4)$$

$$VS = r_n \cdot \tan \alpha_{in} \quad (8.5)$$

$$\alpha_{in} = \alpha_n + \Delta\alpha \quad (8.6)$$

$$\tan \Delta\alpha = \tan \vartheta_p \cdot \sin \beta_s, \quad (8.7)$$

kde α_n je úhel záběru kola

α_{in} je vnitřní úhel nože

$\Delta\alpha$ je úhel korekce.

Vztahy (8.6) a (8.7) byly odvozeny v [1.27]. Někdy je úhel $\Delta\alpha$ přímo dán v technickém výrobním listu.

Poněkud obtížněji půjce odvodit vektor S , tj. určit počáteční polohu bodu S vzhledem k soustavě XYZ, kdy počáteční bod obrábění je na vnějším věnci kola (obr.28).

Pro odvození dalších vzorců je potřeba vyjít z plochého kola nakresleného na obrázku 28. Pro lepší přehled zavedeme místo R_{de} označení A_o a místo β zavedeme ψ . Máme:

$$H = A - r_n \sin \psi \quad (8.8)$$

$$V = r_n \cos \psi \quad (8.9)$$

Dále platí:

$$\frac{CB}{OC} = \frac{CF_o}{CF_s} \rightarrow OC = \frac{CF_s \cdot CB}{CF_o} \quad (8.10)$$

$$CB = 2 \cdot r_n \sin \psi - A$$

$$OC = \frac{A}{A_o} (2 \cdot r_n \sin \psi - A) \quad (8.11)$$

Podobným odvozením dostaneme pro vnitřní úhel spirály

$$\sin \psi_1 = \frac{1}{2r_n} \left(A_1 + \frac{A_2}{A_1} (2r_n \sin \psi - A) \right) . \quad (8.14)$$

Tedy souřadnice vektoru S při obrábění z vnějšího vence kužele k vnitřnímu venci:

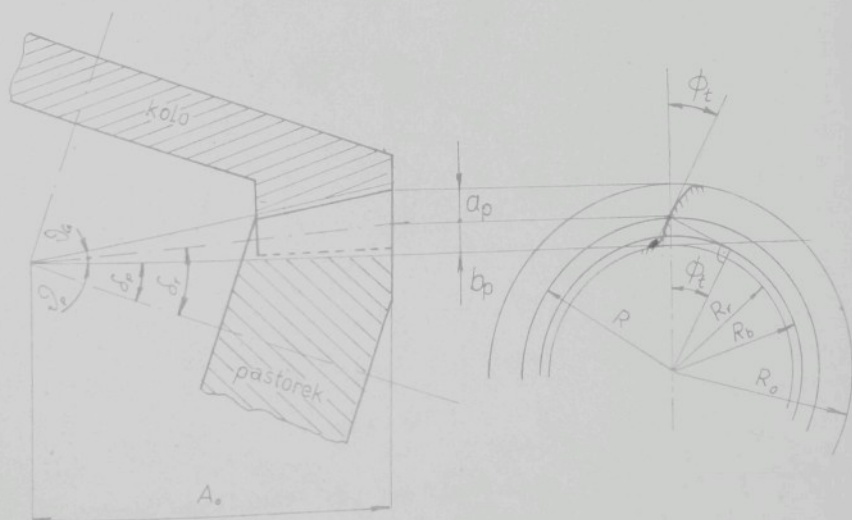
$$V_0 = r_n \cos \psi_0 \quad (8.16)$$

$$H_0 = A_0 - r_n \sin \psi_0 . \quad (8.17)$$

Úhel mezi vektory S a osou Y :

$$\operatorname{tg} q_0 = \frac{V_0}{H_0} . \quad (8.18)$$

Je třeba si uvědomit, že vzorce (8.16), (8.17) a (8.18) platí pro okamžik, kdy celá soustava je vztažena k roztečnému kuželi. Bod S kolébky má při obrábění z hlavy nebo z paty jiný úhel q_0 , který závisí ještě na profilu zubu (obr.29).



obr. 29

Platí:

$$R = A_o \operatorname{tg} \delta_r \quad (8.19)$$

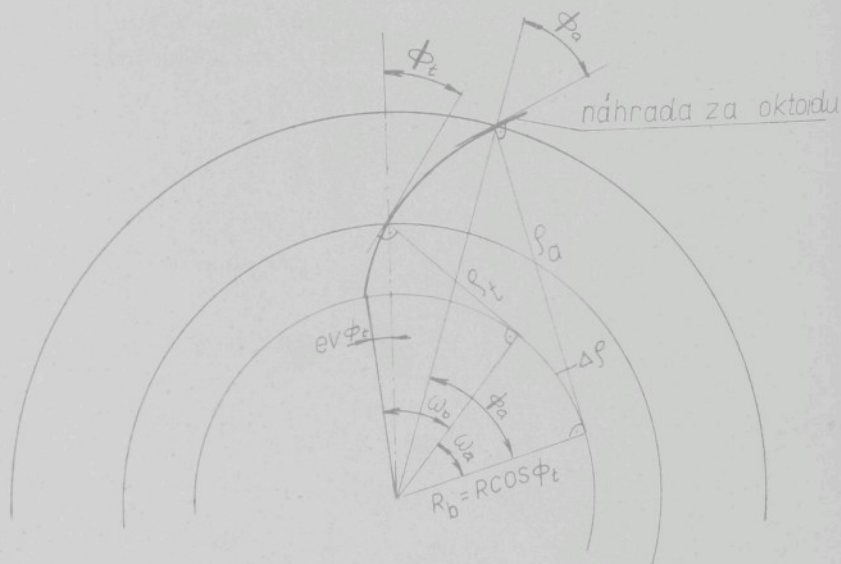
$$\operatorname{tg} \phi_t = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \psi_o} \quad (8.20)$$

$$R_D = R \cos \phi_t \quad (8.21)$$

$$E_o = R + s_p \quad (8.22)$$

$$R_r = R - b_p, \quad (8.23)$$

kde α je úhel záběru ozubení.



obr.30

Chceme-li najít úhel ϕ_s na hlavě nebo ϕ_b na patě, potom je možno nahradit oktoidu evolventou (obr.30), čímž se

dopustíme jen velmi nepatrné odchylky. Správnost tohoto výpočtu byla prokázána i při řešení mezní polohy odvalu pro vyšetření výběhové křivky od nástroje a součásti v n.p. Hrádek nad Nisou. Takové nahrazení nemusíme však užít, lze-li stanovit vektory $\mathbf{V}$ a $\boldsymbol{\eta}$ jinou metodou nebo když je lze odměřit. Úhel hlavy zubu (při obrábění z hlavy)

$$\cos \phi_a = \frac{\cos \phi_t}{1 + \frac{2a_p \cos \sigma_r}{m_{ce} Z_1}} \quad (8.24)$$

m_{ce} je modul ozubení

Z_1 je počet zubů pastorku

σ_r je úhel roztečného kužele.

Úhel otočení pastorku v čelní rovině (obr.30) (při obrábění z paty)

$$\Delta f = f_a - f_t \quad (8.25)$$

$$f_a = \operatorname{tg} \phi_a \cdot R_b \quad (8.26)$$

$$f_t = \operatorname{tg} \phi_t \cdot R_b \quad (8.27)$$

$$\operatorname{arc} \omega_a = \frac{\Delta f}{R_b} = \operatorname{tg} \phi_a - \operatorname{tg} \phi_t \quad (8.28)$$

$$\omega_a^o = \frac{180}{\pi} (\operatorname{tg} \phi_a - \operatorname{tg} \phi_t). \quad (8.29)$$

Úhel otočení pastorku v čelní rovině při obrábění z paty:

$$\omega_b = \frac{180}{\pi} \operatorname{ev} \phi_t + \phi_t = \frac{180}{\pi} (\operatorname{tg} \phi_t - \operatorname{arc} \phi_t) + \phi_t \quad (8.30)$$

Nyní najdeme úhel otočení kolébky odpovídající otočení součásti o úhel ω_a nebo ω_b .

Počet zubů plochého kola

$$Z_c = \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2} \quad (8.31)$$

Počet zubů výrobního kola pro frézování metodou FRAED - SLITTING:

$$Z_v = Z_c \left[1 \pm \frac{\text{Htg } \alpha}{V \cos \psi} (\text{tg } \vartheta_p + \text{tg } \vartheta_g) \right] \quad (8.32)$$

H, V jsou z rovnic (8.8), (8.9)

ϑ_p , ϑ_g jsou patní úhly pastorku a kola (obr.31)

Znaménko plus platí pro vnitřní nože; znaménko minus pro vnější nože.

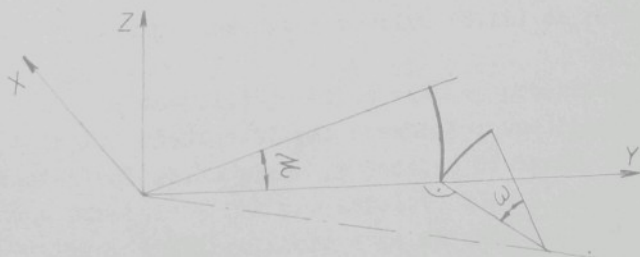
Poznámka: Při frézování metodou SPREAD-BLALE nebo SINGLE-SIDE použije se místo hodnoty Z_v hodnota Z_c .

Počet zubů v čelní rovině:

$$Z_N = \frac{Z_1}{\cos \sigma_r} \quad (8.33)$$

Úhel pootočení kolébky v závislosti na pootočení pastorku (obr.31):

$$\mathcal{M} = \frac{Z_N}{Z_v} \cdot \omega \quad (8.34)$$



obr.31

Odtud najdeme krajní polohy odvalu kolébky:

$$\tau = q_0 \pm M. \quad (8.35)$$

Podle skutečné situace rozhodujeme o výběru znaménka plus nebo minus.

Složky vektoru S nyní určíme

$$S = S(0; \left[\sqrt{(A-r_n \sin \psi)^2 + r_n^2 \cos^2 \psi} \cos \tau; \sqrt{(A-r_n \sin \psi)^2 + r_n^2 \cos^2 \psi} \sin \tau \right]. \quad \dots (8.36)$$

Vektor V má nyní rovnici:

$$V = V(0; \sqrt{(A-r_n \sin \psi)^2 + r_n^2 \cos^2 \psi} \cos \tau; \sqrt{(A-r_n \sin \psi)^2 + r_n^2 \cos^2 \psi} \sin \tau) + r_n \operatorname{tg} \alpha_{en} (1; 0; 0)$$

$$V = V(r_n \operatorname{tg} \alpha_{en}; \sqrt{(A-r_n \sin \psi)^2 + r_n^2 \cos^2 \psi} \cos \tau; \sqrt{(A-r_n \sin \psi)^2 + r_n^2 \cos^2 \psi} \sin \tau) \quad (8.37)$$

$$B = (0; A_0; 0)$$

$$\eta = B - V = (-r_n \operatorname{tg} \alpha_{en}; A_0 - \sqrt{(A-r_n \sin \psi)^2 + r_n^2 \cos^2 \psi} \cos \tau; - \sqrt{(A-r_n \sin \psi)^2 + r_n^2 \cos^2 \psi} \sin \tau), \quad (8.38)$$

kde pro τ musíme dosadit z rovnice (8.16) do rovnice (8.35).

Tím jsme odvodili potřebné vektory pro určení plochy zuba a jejích vlastností při ohrábění z vnějšího vence. Při ohrábění z vnitřního vence je podobné odvození. Platí zde společné pravidlo - jak pro kuželové kolo Gleason, tak pro kolo Cerlikon a Klingelnberg - že všechny potřebné vektory

jsou závislé na parametrech kola, nože (řezné uhly, počet zubů, uhly spirály...), takže při změně těchto parametrů dojde i k změnám závislých hodnot. Tím můžeme sestavit různé závislosti a určit optimální podmínky. Jak bylo řečeno, potřebné vektory lze změnit nebo stanovit jinou cestou. To, co bylo uvedeno v této kapitole, je ukázka, jak lze k tomuto cíli také dojít. Navíc způsob volby „výpočtového bodu“ (z hlavy nebo z paty), který jsem zde používal, není jediný. Proto také určení vstupních veličin provedených zde pro matematicky odvozené vztahy není jediné. Avšak myslím, že tento „výpočtový bod“ je velmi vhodný, neboť lze získat kontinuální řešení všech problémů vyskytujících se na celé ploše zubu. Snad je účelné zde poznamenat, že velikost parametru u^2 otočení frézy je přibližně dána rovnicí

$$\sin \frac{u^2}{2} \approx \frac{b}{r_n},$$

kde b je šířka zubu

r_n je poloměr frézovací hlavy.

Úhel u^2 může nabývat libovolných hodnot z intervalu úhlu otočení nástroje. U metody zkoumání křivek řezu odpovídá hodnota u^2 příslušné hodnotě φ a určité vzdálenosti radiálního řezu od vrcholu kola.

Konkrétní hodnoty souřadnic vektorů z předcházejícího příkladu po výpočtu budou:

$$V = (-50,0 ; 20 ; 16,0)$$

$$\eta = (50,84 ; 0,0 ; -15,8)$$

$$\varphi = -60^\circ + 32^\circ$$

$$p = -0,25.$$

Jednotkové vektory os pro příklad na obr. 27 jsou dány rovnicemi (8.1) až (8.3). Souřadnice boku zubu a souřadnice křivky řezu, vypočtené pomocí samočinného počítače budou uvedeny v tabulce a nakresleny na grafu.

9. Blokové schéma a program výpočtu pro kolo Gleason

9.1 Blokové schéma

K usnadnění programování samočinného počítače je možno sestavit blokové schéma, které udává algoritmus práce. Základní tenzory otočení při výzkumu kola Gleason a Oerlikon jsou stejné; proto lze očekávat, že blokové schéma bude mít hodně podobných částí. Není třeba vytvořit blokové schéma popisující krok po kroku práci programu, poněvadž to není účelné ani nutné. Stačí nakreslit pouze zjednodušené schéma, sloužící k snadnější orientaci v programu. Je nutno upozornit na to, že hlavní program obsahuje 14 jednoduchých podprogramů, které byly buď samostatně sestaveny v této práci nebo některé převzaty z práce [32]. Těchto 14 podprogramů lze použít pro výpočty kol Gleason, Oerlikon nebo pro jiné součásti získané rotačním způsobem obrábění.

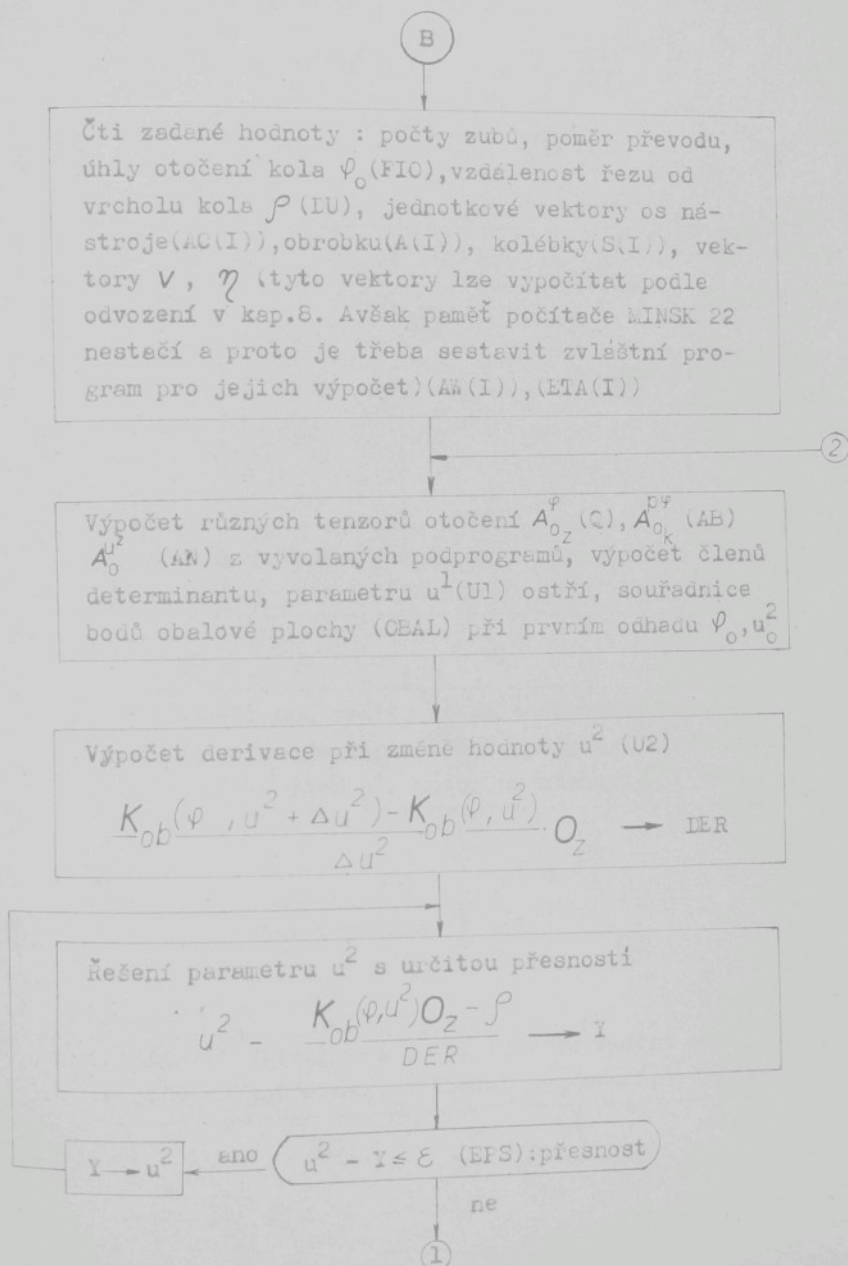
Význam zkrácených názvů podprogramů je následující:

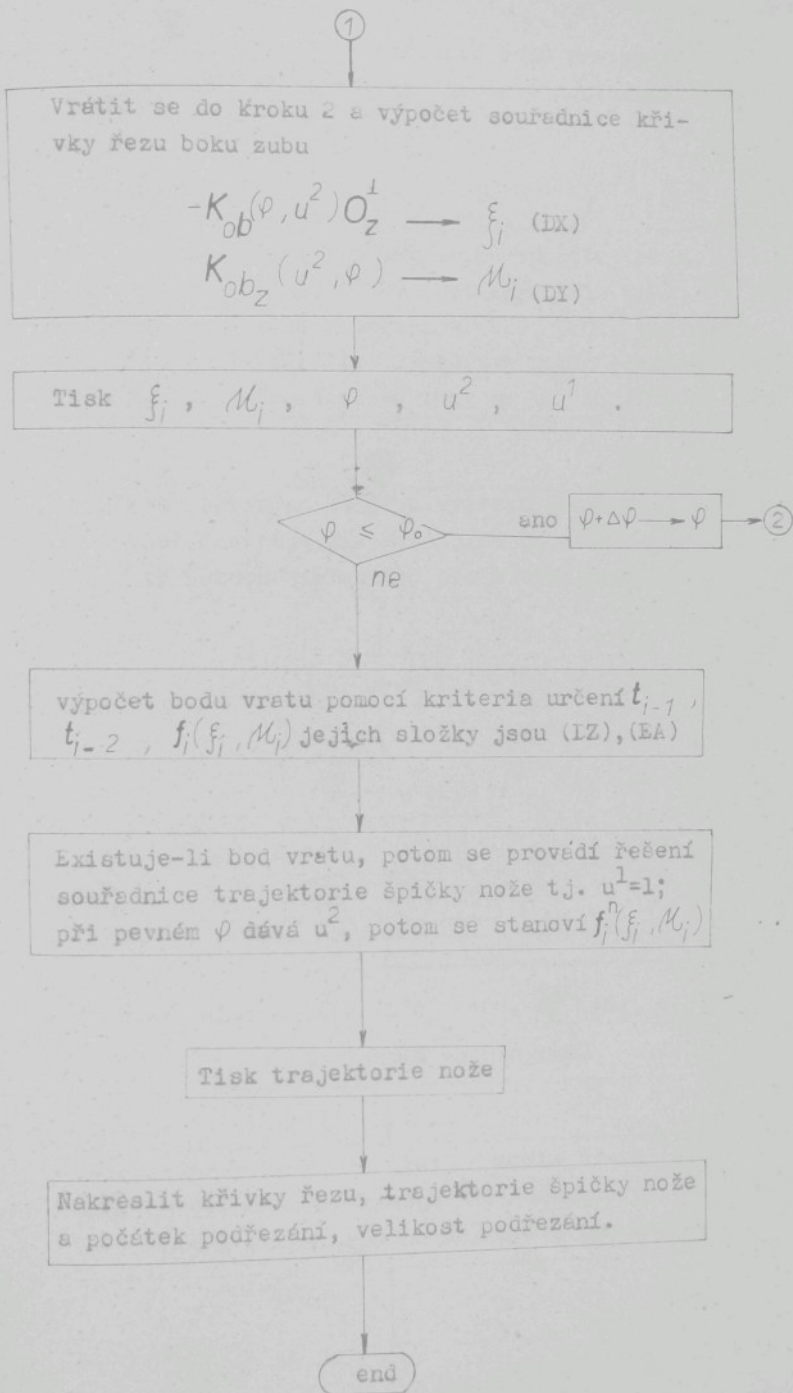
TEMZ : výpočet tenzoru otočení
DIA : dyadický součin dvou vektorů
SOM : součet matic
NAM : násobení matic
NAK : násobení matice s konstantou
NAV : násobení matice s vektorem
SEV : sečtení dvou vektorů
DET : výpočet determinantu
VEK : násobení vektoru s konstantou
ODM : odečtení dvou matic
ANZ : výpočet antisymetrického tenzoru
MIE : sestavení determinantu
INVER: řešení inverzní matice
SKAV : skalární součin dvou vektorů.
Označení některých důležitých veličin v hlavním programu :
Q : tenzor otočení
AB : tenzor otočení
AN : tenzor otočení
OBAL : souřadnice boku zubu

U1 : parametr na ostří nože v jednoc^tkové délce
FFI : úhel otočení obrobku
UU2 : úhel otočení nástroje
DX,DY : souřadnice bodů křivky radiálního řezu boku zubu
TRAJX,TRAJY : souřadnice trajektorie špičky nože

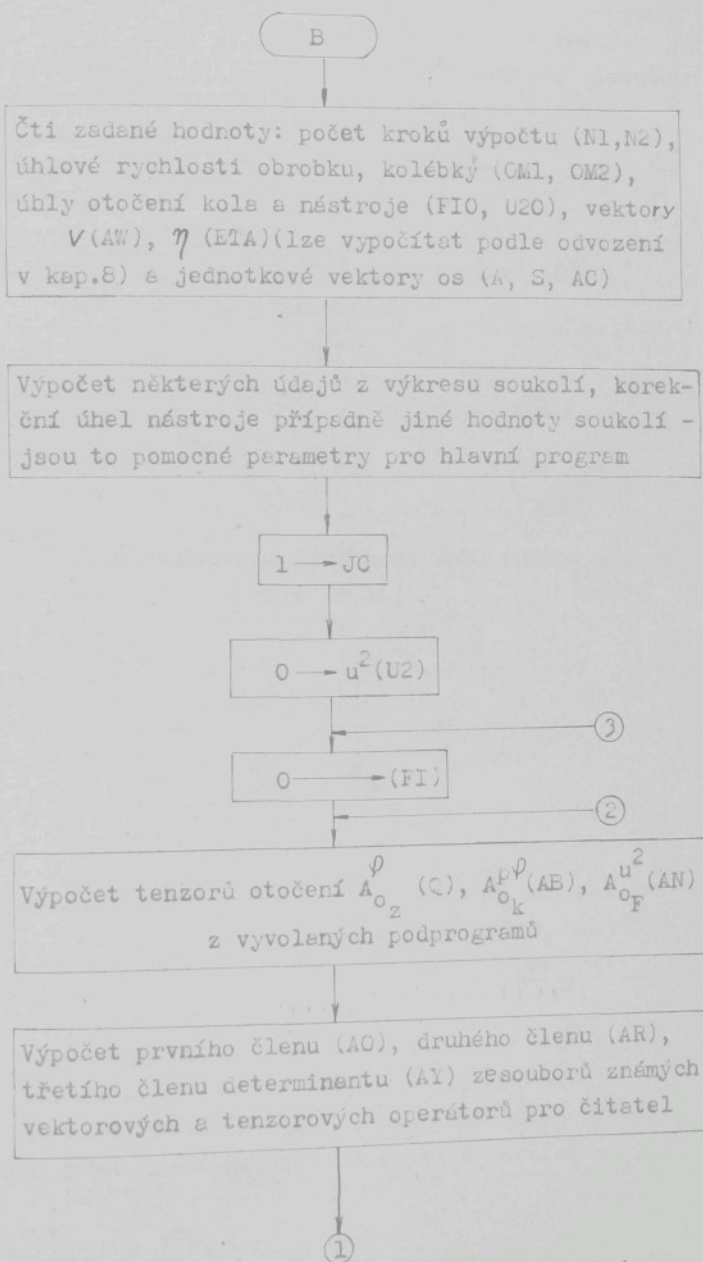
Význam ostatních označení je vysvětlen v blokovém schématu nebo ve formátové specifikaci v programu. Počet podprogramů není jen 14 ale dle rozsahu práce lze vytvořit další. Uvedeme postupně zjednodušená bloková schémata. V každém rámečku je napsaný text, který vysvětluje proces programování (v závorce jsou názvy užité v programu).

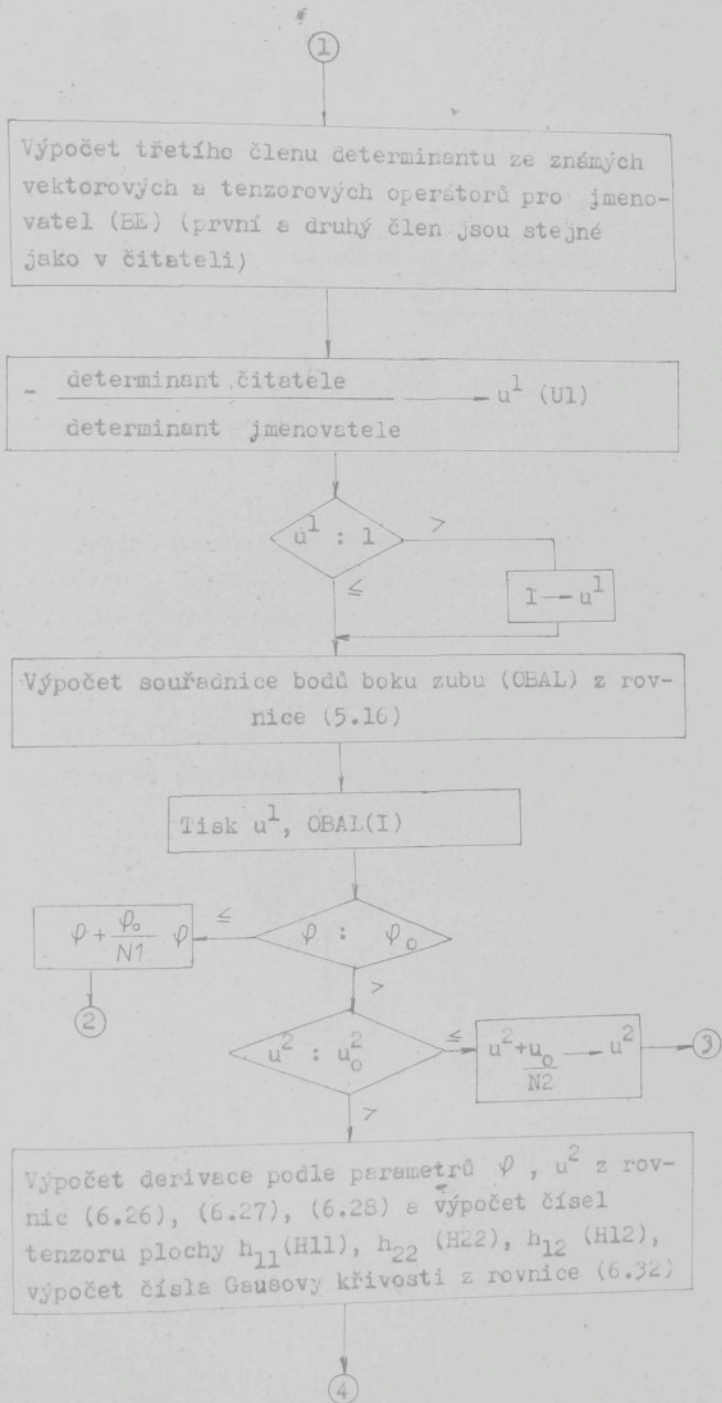
Blokové schéma pro výpočet souřadnice křivky radiálního řezu s určením parametrů vřetu stroje, nástroje, obrobku a počátku podřezání

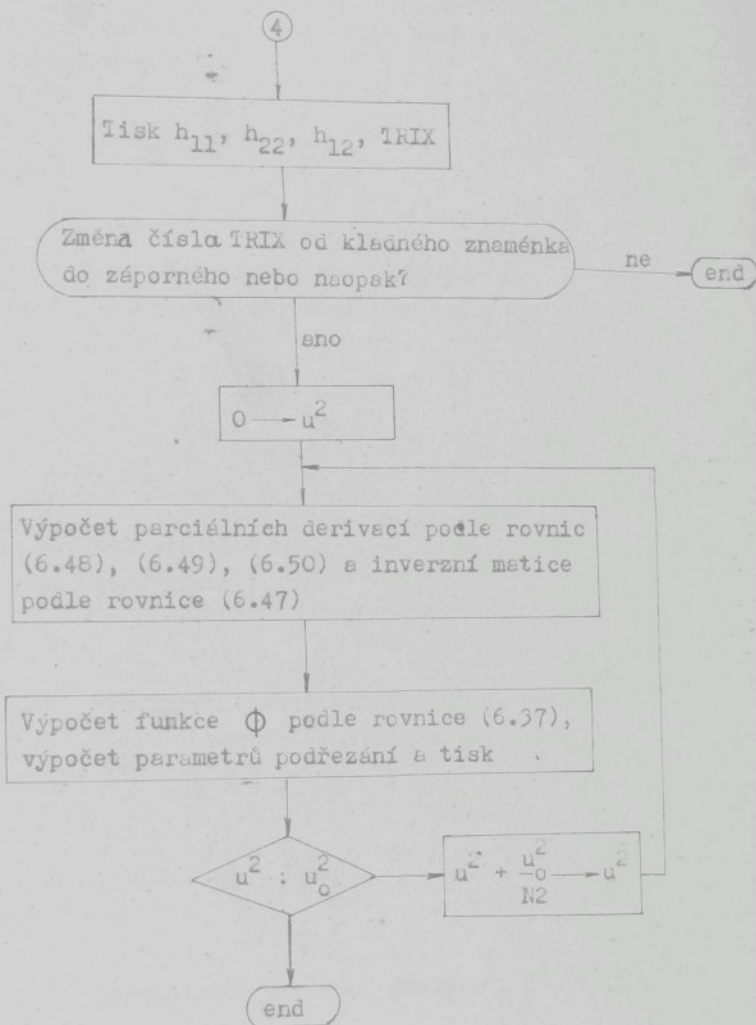




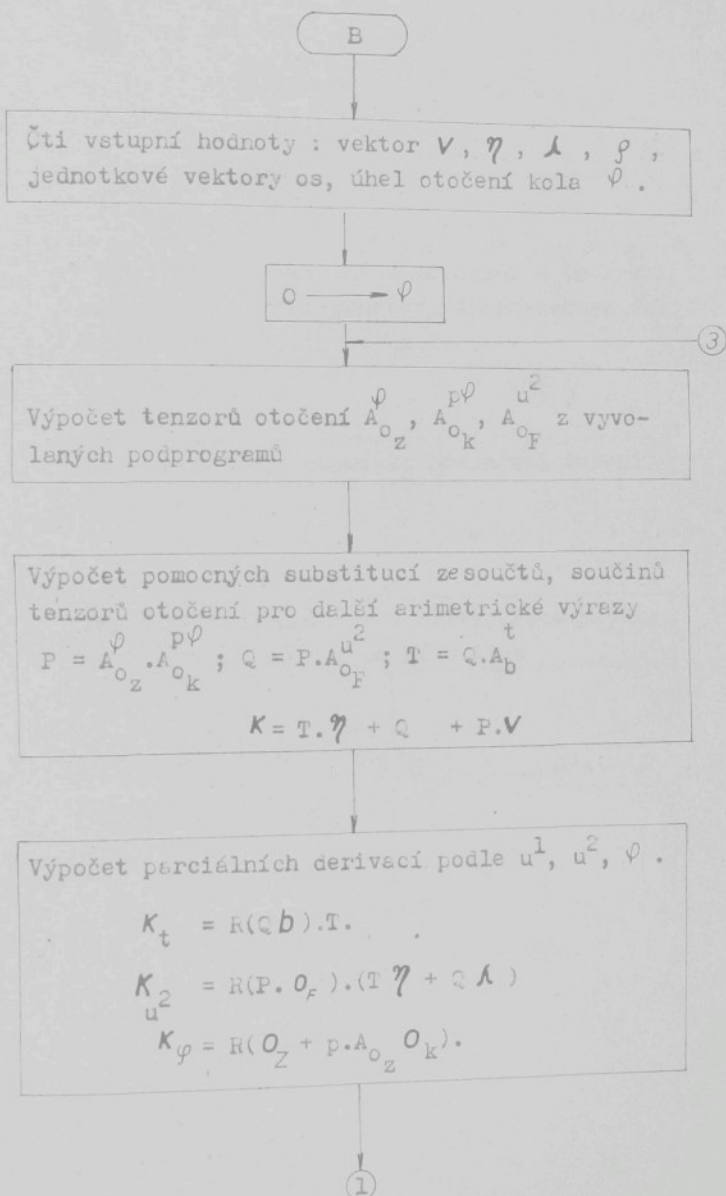
Blokové schéma pro výpočet souřadnic bodů parametrické křivky plochy zubu se stanovením hranice podřezání

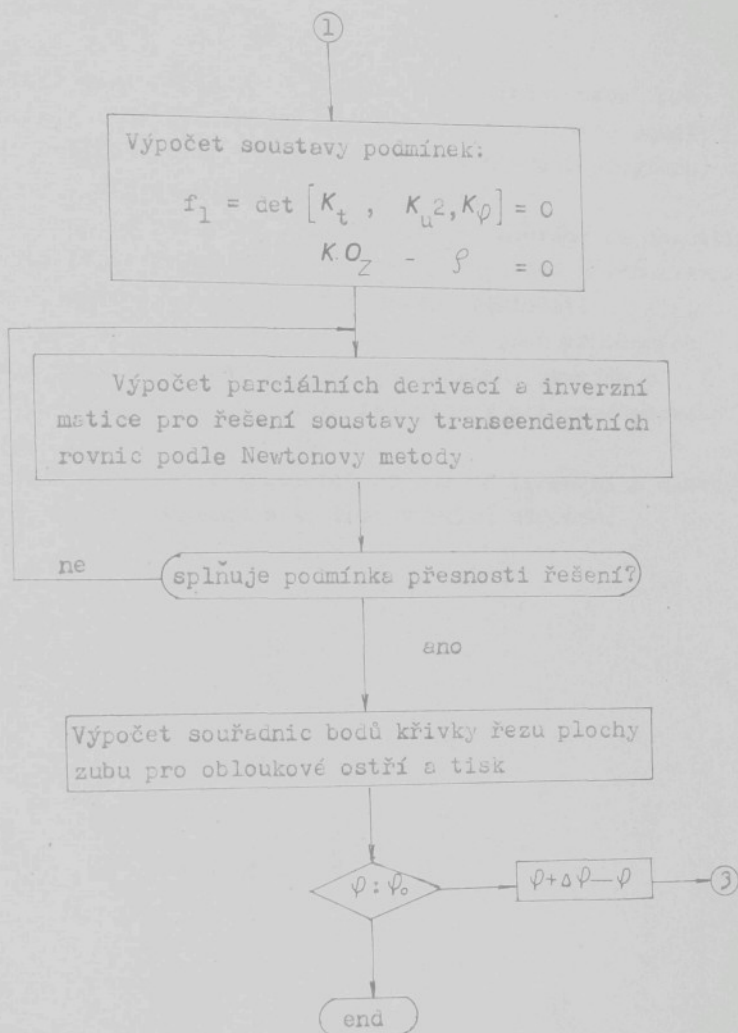






Blokové schéma pro výpočet souřadnic bodů křivky v radiálním řezu obloukové části ostří





9.2 Poznámky k programu

Program je sestaven v jazyku FEL-FORTRAN, neboť pro rozsáhlost a komplikovanost programu nebylo vhodné použít ALGOLu. Bylo by totiž nutné použít segmentování programu, čímž by se jeho složitost ještě zvýšila.

Všechny podprogramy byly samostatně nahrány na magnetickou pásku, takže se na ně lze odvolávat i v každém novém hlavním programu, aniž by je bylo nutno znovu překládat.

O tom, že v programu užíváme jiných jmen proměnných než jsme použili v teoretických kapitolách, jsme se už zmínili. Je to totiž prakticky nezbytné z programátorského hlediska.

Chtěl bych ještě upozornit na to, že formální a hlavně logické ladění programu bylo časově velmi náročné.

9.3 Příklady

Pro ilustraci uvedu několik příkladů výpočtu řešených problémů pomocí číslicového počítače (souřadnice bodů parametrických křivek boku zubu, souřadnice bodů křivky řezu, bodu vrátu, velikosti počátku podřezání).

Je možno konstatovat, že vektory V a η , které závisí na mnoha parametrech nástroje, stroje a obrobku, mají velký vliv na tyto vypočtené hodnoty. Stačí nepatrná změna vektorů

V , η a může dojít k velké změně těchto zkoumaných veličin. Proto parametry ve vzorcích (8.4) až (8.38) pro určení vektorů V , η jako je poloměr frézovací hlavy, úhel nože, střední úhel spirály kola, vnější úhel spirály, roztečné úhly kola, úhel záberu, čelní modul, úhlové rychlosti obrobku, kolébky atd., jsou rozhodující faktory. Postupně měníme-li hodnoty jednotlivých veličin, můžeme dostat různé tvary křivky řezu boku zubu, hodnoty podřezání atd. a lze zkoumat velikost vlivu těchto proměn. To má velký význam při dalším studiu ozubení.

Vstupní hodnoty souřadnic (v centimetrech z důvodu pro přehled programu) pro první příklad jsou:

$$V = (-50,0 ; 20,0 ; 16,0)$$

$$\eta = (51,84 ; 0,0 ; -16,2)$$

$$p = -0,25$$

Úhel otočení kolébky : $\varphi = (-60^\circ \div 32^\circ)$

Vzdálenost radiálního řezu od vrcholu kola: $\rho = 18,0$

Jednotkové vektory os:

$$O_z = (0,255 ; 0,967 ; 0,0)$$

$$O_k = (1,00 ; 0,0 ; 0,0)$$

$$O_F = (1,00 ; 0,0 ; 0,0)$$

Výsledky jsou uvedené v tabulce I a křivky jsou znázorněné na obr. 32.

U druhého příkladu necháme všechny zadané hodnoty veličin stejné, změníme jen málo souřadnice vektoru η . Výsledky jsou zaznamenány v tabulce II a křivky jsou nakresleny na obr. 33.

$$\eta = (50,84 ; 0,0 ; -15,8)$$

φ	u^2	u^1	$\mathcal{M}_i$	ξ_i	DZ	EA	TRAJX	TRAJY
-60,0	-4,7241	1,0001	-5,6204	-0,3189	-0,1780	-0,6203	-5,6270	-0,3245
-56,0	-4,8703	0,9982	-5,4424	-0,1771	-0,1702	-0,1184	-5,3627	-0,1174
-52,0	-5,0030	0,9963	-5,2722	-0,0587	-0,1602	-0,0967	-5,0999	0,0536
-48,0	-5,1222	0,9945	-5,1119	0,0380	-0,1480	-0,0767	-4,8420	0,1907
-44,0	-5,2273	0,9927	-4,9628	0,1148	-0,1340	-0,0587	-4,5923	0,2946
-40,0	-5,3187	0,9909	-4,8298	0,1735	-0,1181	-0,0429	-4,3537	0,3673
-36,0	-5,3962	0,9891	-4,7111	0,2164	-0,1007	-0,0293	-4,1291	0,4107
-32,0	-5,5459	0,9873	-4,6109	0,2458	-0,0821	-0,0181	-3,9211	0,4271
-28,0	-5,5085	0,9856	-4,5288	0,2639	-0,0623	-0,0095	-3,7322	0,4188
-24,0	-5,5432	0,9838	-4,4664	0,2734	-0,0417	-0,0035	-3,5647	0,3886
-20,0	-5,5632	0,9821	-4,4247	0,2770	-0,0205	-0,0003	-3,4201	0,3391
-16,0	-5,5685	0,9803	-4,4041	0,2774	0,0008	0,00009	-3,3009	0,2732
-12,0	-5,5587	0,9786	-4,4050	0,2773	0,0223	-0,0022	-3,2079	0,1841
- 8,0	-5,5338	0,9768	-4,4273	0,2795	0,0435	-0,0075	-3,1424	0,1049
- 4,0	-5,4933	0,9751	-4,4709	0,2871	0,0642	-0,0155	-3,1053	0,0089
0,0	-5,4372	0,9733	-4,5352	0,3026	0,0841	-0,0264	-3,0971	-0,0906
4,0	-5,3650	0,9715	-4,6193	0,3290	0,1028	-0,0399	-3,1181	-0,1904
8,0	-5,2764	0,9697	-4,7222	0,3690	0,1202	-0,0561	-3,1682	-0,2869
12,0	-5,1712	0,9679	-4,8424	0,4252	0,1359	-0,0749	-3,2470	-0,3769
16,0	-5,0489	0,9661	-4,9784	0,5001	0,1497	-0,0960	-3,3539	-0,4570
20,0	-4,9093	0,9643	-5,1281	0,5961	0,1613	-0,1193	-3,4879	-0,5238
24,0	-4,7518	0,9624	-5,2895	0,7155	0,1705	-0,1447	-3,6478	-0,5742
28,0	-4,5761	0,9605	-5,4600	0,8602	0,1771	-0,1719	-3,8318	-0,6051
32,0	-4,3817	0,9586	-5,6372	1,0322	0,1807	-0,2007	-4,0382	-0,6134

TAB. I

DZ, EA jsou složky tečen.

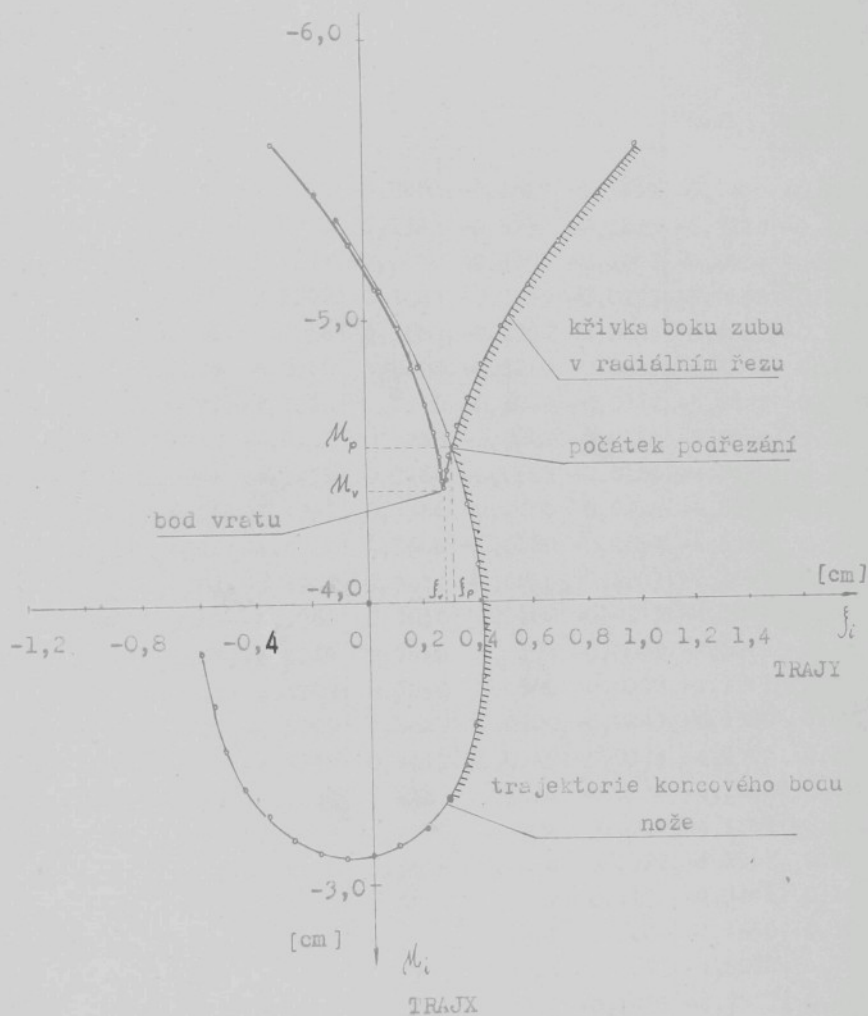
TRAJX, TRAJY jsou souřadnice koncového bodu nože.

Souřadnice bodu vratu $\mathcal{M}_v = -4,4041$; $\xi_v = 0,2774$

Parametry stroje, obrobku a nástroje v bodě vratu:

$$\psi_{vr} = -4,0^\circ ; \varphi_{vr} = -16,0^\circ ; u_{vr}^2 = 5,5683^\circ ; u_{vr}^1 = 0,98038$$

Souřadnice začátku podřezání $\mathcal{M}_p = -4,5625$; $\xi_p = 0,305$.



obr. 32

TAB. II

φ	u^2	u^1	$\mathcal{M}_i$	ξ_i	DZ	EA	TRAJX	TRAJY
-60,0	-4,6892	1,0201	-5,6837	-0,2601	-0,1827	-0,5961	-6,5490	-0,9953
-56,0	-4,8417	1,0182	-5,5010	-0,1142	-0,1752	-0,1223	-6,3224	-0,7270
-52,0	-4,9806	1,0163	-5,3257	-0,0080	-0,1655	-0,1002	-6,0936	-0,4921
-48,0	-5,1058	1,0146	-5,1602	0,1083	-0,1535	-0,0799	-5,8658	-0,2896
-44,0	-5,2172	1,0126	-5,0066	0,1882	-0,1397	-0,0615	-5,6421	-0,1183
-40,0	-5,3147	1,0108	-4,8669	0,2498	-0,1240	-0,0452	-5,4254	0,0233
-36,0	-5,3981	1,0090	-4,7428	0,2950	-0,1068	-0,0312	-5,2182	0,1370
-32,0	-5,4673	1,0072	-4,6360	0,3263	-0,0882	-0,0196	-5,0234	0,2248
-28,0	-5,5221	1,0054	-4,5477	0,3460	-0,0685	-0,0106	-4,8430	0,2880
-24,0	-5,5625	1,0036	-4,4791	0,3566	-0,0480	-0,0042	-4,6794	0,3312
-20,0	-5,5882	1,0018	-4,4310	0,3608	-0,0269	-0,0054	-4,5344	0,3545
-16,0	-5,5991	1,0001	-4,4041	0,3614	-0,0055	0,0034	-4,4097	0,3614
-12,0	-5,5949	0,9983	-4,3986	0,3610	0,0160	-0,0015	-4,3066	0,3546
-8,0	-5,5754	0,9665	-4,4146	0,3626	0,0372	-0,0063	-4,2265	0,3370
-4,0	-5,5404	0,9947	-4,4519	0,3690	0,0580	-0,0139	-4,1701	0,3115
0,0	-5,4895	0,9929	-4,5099	0,3829	0,0780	-0,0243	-4,1380	0,2812
4,0	-5,4226	0,9911	-4,5879	0,4073	0,0969	-0,0374	-4,1306	0,2491
8,0	-5,4226	0,9893	-4,6849	0,4448	0,1144	-0,0532	-4,1480	0,2182
12,0	-5,2392	0,9875	-4,7994	0,4980	0,1304	-0,0715	-4,1899	0,1917
16,0	-5,1220	0,9856	-4,9298	0,5696	0,1444	-0,0922	-4,2557	0,1727
20,0	-4,9873	0,9838	-5,0742	0,6619	0,1563	-0,1152	-4,3446	0,1640
24,0	-4,8348	0,9819	-5,2306	0,7771	0,1658	-0,1402	-4,4556	0,1688
28,0	-4,6639	0,9800	-5,3964	0,9173	0,1727	-0,1671	-4,5872	0,1897
32,0	-4,4743	0,9781	-5,5692	1,0845	0,1767	-0,1956	-4,7377	0,2297

Souřadnice bodu vratu $\mathcal{M}_v = -4,3966$; $\xi_v = 0,3610$ (obr.33)

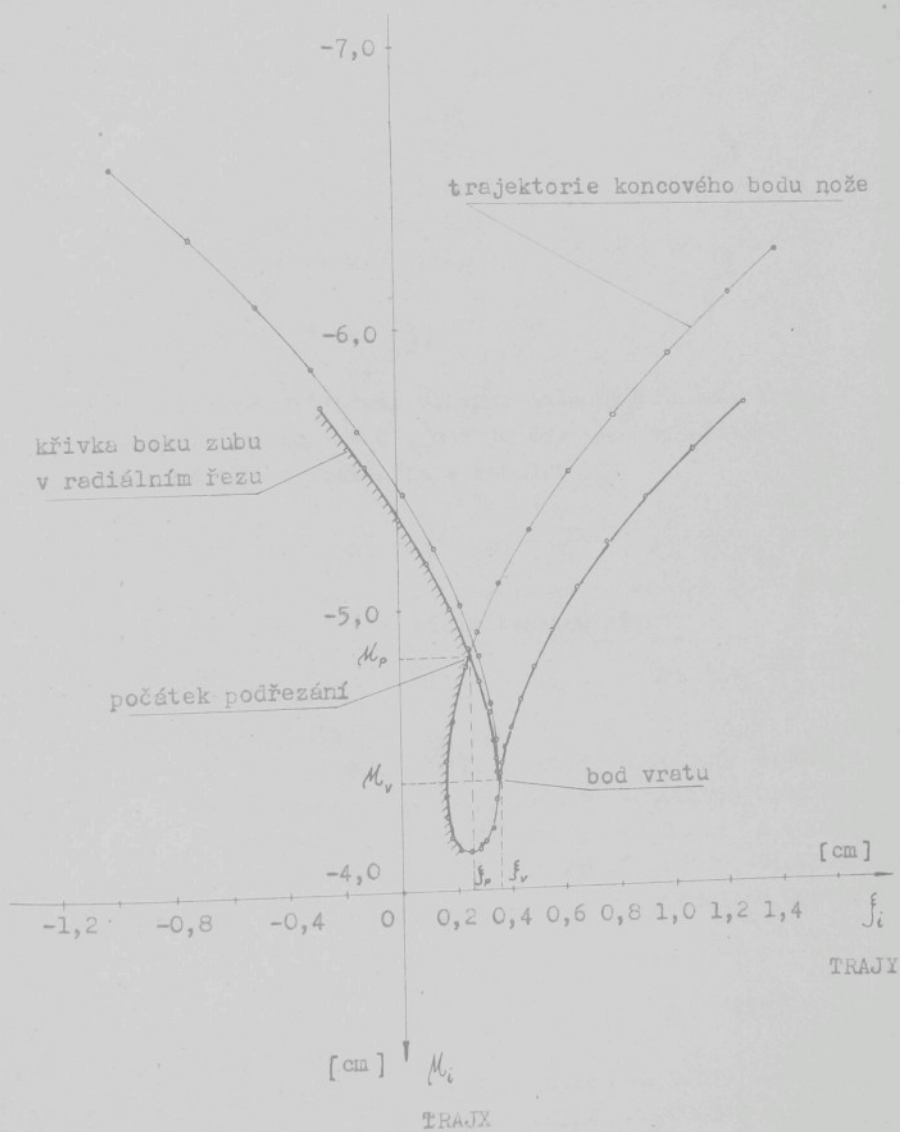
Parametry obrobku, stroje a nástroje v bodě vratu:

$$\varphi_{vr} = -12^\circ ; \psi_{vr} = -3,0^\circ ; u_{vr}^2 = -5,5949^\circ ; u_{vr}^1 = 0,9983$$

Souřadnice začátku podřezání :

$$\mathcal{M}_p = -4,8375 ; \xi_p = 0,265.$$

Je zřetelné vidět rozdíl mezi obrázky 32 a 33.



obr. 33

Na dvou následujících příkladech bych chtěl ukázat vybrané části z výpočtu souřadnic bodů parametrické křivky na ploše zubu, kriteria vratu jsou podle metody Gausovy křivosti.

Hodnoty pro třetí příklad jsou:

$$V = (-7,0 ; 6,0 ; 0,5)$$

$$\eta = (9,0 ; 0,0 ; -0,5)$$

$$O_Z = (0,25 ; 0,97 ; 0,0)$$

$$O_K = (1,0 ; 0,0 ; 0,0)$$

$$O_F = (0,0 ; 0,0 ; -1,0)$$

$$p = -0,5$$

$$u^2 = 0,0^\circ \pm 20^\circ$$

$$\varphi = -7,0^\circ \pm 5,0^\circ$$

(Zde byly záměrně vytvořeny vstupní hodnoty tak, aby hrana vratu vznikla okolo $\varphi = 0^\circ$, což je dokázáno výpočtem).

Část výsledku je zaznamenána v tabulce III

Tabulka III

$u^2 = 0,0^\circ$							
φ	souřadnice boku			čísle tenzoru plochy			TRIX (S^i)
	K_x	K_y	K_z	h_{11}	h_{22}	h_{12}	
-7,0	-1,5630	5,9886	0,19563				
-5,0	-1,5501	5,9992	0,19630	0,03171	0,06224	-0,00125	0,001972
-3,0	-1,5412	5,9964	0,19652	0,02067	0,06218	-0,00073	0,001285
-1,0	-1,5364	5,9990	0,19645	0,00958	0,06213	-0,00022	0,000595
1,0	-1,5355	6,0007	0,19642	-0,00153	0,06206	0,00029	-0,000095
3,0	-1,5387	6,0015	0,19670	-0,01266	0,06200	0,00081	-0,000785
5,0	-1,5458	6,0015	0,19762				
$u^2 = 2^\circ 51'$							
-7,0	-1,4915	5,7119	0,19130				
-5,0	-1,4791	5,7163	0,19201	0,03079	0,06329	-0,00139	0,001947
-3,0	-1,4704	5,7118	0,19219	0,02030	0,06324	-0,00084	0,001283
-1,0	-1,4656	5,7226	0,19213	0,00978	0,06319	-0,00030	0,000618
1,0	-1,4646	5,7246	0,19210	-0,00078	0,06313	0,00024	-0,000049
3,0	-1,4675	5,7257	0,19236	-0,01136	0,06306	0,00078	-0,000717
5,0	-1,4742	5,7260	0,19319				

(Pokračování tabulky III)

$$u^2 = 5^{\circ}42'$$

-7,0	-1,4178	5,4266	0,18605				
-5,0	-1,4058	5,4310	0,18675	0,29670	0,06454	-0,00152	0,001918
-3,0	-1,3974	5,4347	0,18695	0,01985	0,06450	-0,00095	0,001297
-1,0	-1,3926	5,4376	0,18690	0,00989	0,06444	-0,00038	0,000637
1,0	-1,3915	5,4397	0,18187	-0,00090	0,06439	0,00019	-0,000060
3,0	-1,3941	5,4411	0,18710	-0,01009	0,06433	0,00076	-0,000650
5,0	-1,4003	5,4418	0,18787				

Vidíme, že podle rovnice (6.32) číslo S^i změní znaménko při přechodu od $\psi = -1$ do $\psi = +1$. Tato poloha odpovídá všem parametrům bodu vratu stroje, nástroje a kola.

Vstupní hodnoty pro čtvrtý příklad jsou stejné jako v prvním příkladě. Část výsledku je uvedena v tabulce IV.

Tabulka IV

$$u^2 = -1^{\circ}26'$$

	Souřadnice boku			čísle tenzoru plochy			TRIX(S^i)
	K_x	K_y	K_z	h_{11}	h_{22}	h_{12}	
-30	0,4793	19,6450	0,1838				
-23	0,5821	19,6280	0,1994	-7,22841	75,09720	1,59260	-545,370449
-16	0,6199	19,6158	0,2010	-0,07128	74,77650	0,09823	-6,295320
-9	0,5913	19,6089	0,2044	7,16662	74,47425	0,46087	533,516407
-2	0,4976	19,6067	0,2250	14,46822	74,19167	0,02978	1073,423347
5	0,3429	19,6080	0,2784	21,81650	73,92820	0,31128	1612,759414
12	0,1343	19,6108	0,3784				

$$u^2 = 2^{\circ}51'$$

-30	0,5226	20,8455	0,1898				
-23	0,6267	20,8228	0,2044	-8,03989	75,24380	-2,5728	-611,57130
-16	0,6624	20,8056	0,2052	-0,66570	74,89998	-1,8166	-53,162088
-9	0,6284	20,7940	0,2086	6,82686	74,57654	1,1560	507,787429
-2	0,5262	20,7875	0,2309	14,41886	74,27363	0,5911	1070,59139
5	0,3604	20,7846	0,2880	22,09361	73,99151	-0,1220	1634,724456
12	0,1383	20,7833	0,3950				

Zde číslo S^1 změni znaménko mezi $\varphi = -16^\circ$ a $\varphi = -9^\circ$. Avšak číslo $S^1 = -6,295320$ (při $\varphi = -16^\circ$) a $s^1 = 523,5164$ (při $\varphi = -9^\circ$), což je značný skok, protože byl rozdělen celý rozsah úhlu otočení kola pro výpočet na velké kroky (7°). Stačí proto uvažovat o změně $\Delta\varphi$ od hodnoty -16° , kdy může dojít ke změně čísla S^1 od záporné hodnoty ($-6,2953$) do kladné hodnoty. To je důvod k vysvětlení toho, proč je bod vrstu v prvním příkladě u metody zkoumání křivky radiálního řezu $\varphi = -16^\circ$, a proč se zde (zkoumání podle Dupinovy indikatrix) φ odchylí od -16° (pro stejné vstupní hodnoty). Navíc je nutné si uvědomit, že metoda zkoumání řezu má vzdálenost od vrcholu obráběného kola $\rho = 18$ (cm), kdežto zde začátek obrábění je ve vzdálenosti $A_0 = 20,46$ (cm) od vrcholu obráběného kola. Proto parametry vrstu nemohou být úplně totožné.

Nakonec lze ještě provést tento závěr: Tam, kde číslo S^1 změni znaménko, změni se i znaménka složek tenzoru plochy a to buď u jednoho nebo u dvou ze tří čísel h_{11} , h_{12} , h_{22} . Proto pro normální jednoduché plochy lze provést kritérium hrany vrstu pomocí výpočtu h_{11} , aniž bychom museli vypočítat h_{22} , h_{12} a S^1 . To však neplatí pro obecné komplikované zborcené plochy (např. kanálové plochy ohnuté).

Zde nejsou nakresleny křivky boku zubu, neboť jsou velmi nepřehledné, jak bylo uvedeno v kap. 6.2.2. Mimo jiné tato metoda má ještě výhodu v tom, že lze použít tenzor plochy pro jiné účely např. stanovení křivosti plochy pro určení optimálního profilu nástroje apod.

10. Závěr

V předložené kandidátské práci jsem se snažil dosáhnout těchto nejdůležitějších výsledků:

V kapitole 2 je to především nalezení vztahu (2.11) pro tenzor otočení pohybujícího se bodu obecné plochy. Tento vzorec a členy (2.5), (2.8) jsou velmi důležité pro stanovení vlastností rotačního pohybu při obrábění. Parametr φ v tomto vzorci hraje rozhodující roli při kombinaci současných pohybů a dává systém buď parametrických křivek ploch nebo křivek řezu, potřebný v dalších kapitolách této práce. Plochy nástroje nebo součásti jsou určeny funkcí tenzoru otočení s dalšími proměnnými. V této kapitole je také věnována pozornost vlastnostem tenzoru otočení jako je např. : derivace tenzoru, reciproké, antisymetrické nebo transponované tenzory.

V kapitole 3 je uvedena teorie vytváření obalových ploch součásti případně nástroje. Podmínka k vytváření obalové plochy je dána rovnicí (3.12), v níž je dán parametr $u^1 = u^1(\varphi, u^2)$. Rovnice obálky pro rotační pohyb kolem různoběžných os je (3.20), která má tři složky K_x, K_y, K_z . Zde jsou rovněž podobně popsány některé členy tenzoru otočení. V další části této kapitoly je odvozená rovnice obalové plochy (3.26) při rotačním pohybu kolem mimoběžných os. Jediný, ale podstatný rozdíl proti případu předchozímu je, že u tohoto pohybu je potřeba přičíst jeden vektor mezi osami. Jinak rovnice (3.26) přejde v rovnici (3.20) při degeneraci vektoru L . Kapitola 3 je základem pro hledání plochy boku zubů při výrobě ozubených soukolí. Je to velmi výhodné, neboť můžeme najít souřadnice boku zubu pro každý pevný parametr otočení obrobku φ nebo nástroje u^2 . Tyto body představují síť na ploše, která odpovídá různým parametrům řezné geometrie nože. Potom je možno změnit vstupní hodnoty tak, aby bylo vyhověno předepsaným požadavkům. V dnešní době už existuje takový přístroj, kterým lze změřit tři souřadnice obecného bodu. Toho lze použít pro srovnání s našimi výpočtovými body na ploše a lze hledat příčinu odchylky.

Tepelným zpracováním dochází k deformaci ozubení. Zlepšení technologie lze dosáhnout tím, že srovnáním souřadnic

zjištěných měření na zakaleném kole s vypočtenými souřadnicemi zvolíme parametry nastavení stroje a nástroje tak, aby po kalení bylo kolo správné.

Při výzkumu otázky podřezání, sledování přesnosti poměru převodu a stanovení křivosti plochy se nelze obejít bez vyřešení toho problému.

V kapitole 4 byly zpracované vlastnosti obrobené plochy - obalové plochy. Zde jsou zavedeny takové známé pojmy jako normála obalové plochy (4.5), tečná rovina obalové plochy (4.7), ale rovněž jsou uvedeny vztahy pro popis vnitřní geometrie plochy jako je tenzor plochy (druhý základní tenzor plochy) (4.13), stanovení různých křivostí, zkoumání Dupinovy indikatrix, které jsou dané rovnicemi (4.46), (4.47), (4.48), (4.49). Jak se ukáže později, slouží tato kapitola s kapitolou 3 jako celek při studiu vzniku hrany vrátu, počátku podřezání a další problematiky.

Celá kapitola 5 obsahuje aplikaci na kuželová kola Gleason, Oerlikon případně i Klingelberg. Základem pro tuto aplikaci jsou dvě předcházející kapitoly. Řešení bylo vždy provedeno pro různé části profilu nástroje např. u kola Gleason je plocha nástroje vytvořeného přímkovým ostřím a je dána rovnicí (5.3), kde u^1 je parametr na ostří pro-
bíhající interval $\langle 0,1 \rangle$ a definovaný rovnicí (5.14), kdežto parametr pro obloukovou část ostří je dán řešením rovnice (5.56). Plochy zubu pak jsou určeny rovnicemi (5.17) a (5.59). Podobně bylo vyšetřeno kolo Oerlikon. U toho druhu ozubení je mnohem komplikovanější způsob stanovení plochy zubu (rovnice (5.94), (5.113), (5.115)), neboť kinematika pohybu stroje, nástroje a součástí při výrobě ozubení je složitá a osy stroje, nástroje, obrobku jsou mimoběžné. Rovnice jsou nesmírně složité, ale po úpravě a s určitými předpoklady, byly převedeny do poměrně jednoduchého tvaru. Tato kapitola je také věnována řešení křivky příčného řezu (radiálního řezu) plochy zubu - rovnice (5.72). Pomocí této křivky lze pak nejlépe určit kriteria podřezání.

Další odstavce je věnován teorii podřezání u kuželových

kol. Je pojednáno i o rovinných případech ozubení, kde je tento problém poměrně jednoduchý a je již prakticky vyřešen v dostupné literatuře. Mnohem komplikovanější problém vzniká u prostorových ozubení, kde se musí pracovat s prostorovými plochami a jejich vnitřní geometrií, aby bylo možno dojít k nutným a postačujícím podmínkám pro vznik hrany eventuálně křivky vratu. Nutnou podmínku podřezání udává rovnice (6.1). Existují některá matematická kritéria pro postačující podmínku vzniku hrany vratu u ploch popsaných jednoduchými implicitními nebo explicitními rovnicemi.

Naše rovnice plochy zubu jsou však parametrické a složité; proto zde prakticky není možno hovořit jen o charakteristických bodech druhého řádu nebo o zastavení pohybu, nebo provést řešení normálním způsobem. Celá záležitost závisí na vlastnostech vnitřní geometrie ploch při různých pohybech.

Nejjednodušší a nejnázornější výsledky jak pro body vratu tak pro počátek podřiznutí byly získány pomocí metody zkoumání křivek libovolného řezu, který je v určité vzdálenosti od vrcholu kola. Po vyřešení rovnice (6.16) lze dostat souřadnice křivky $\{x_i, y_i\}$ z rovnic (6.17), (6.18) a tečny t_{i-1}, t_{i-2} z rovnic (6.20), (6.21). Trajektorie koncového bodu ostří nože získáme z rovnice (6.23) při parametru $u^1=1$. Z grafického znázornění průsečíku křivky řezu a trajektorie nože lze zjistit míru podřezání a parametry stroje, nástroje a obrobku při vzniku bodu vratu i začátku podřezání.

Dalším kritériem pro tento problém je diskriminant S^1 druhého základního tenzoru plochy h_{ij} z rovnice (6.32). Určení počáteční hranice podřezání provedeme řešením rovnice (6.37) Newtonovou metodou.

Kapitola 7 je věnována sledování přesnosti převodového poměru při záběru dvou kuželových kol. Okamžitý skutečný převodový poměr i_{21} dává rovnice (7.14) po řešení soustavy rovnic (7.9), (7.10), (7.11), (7.12). Příčina odchylky skutečného a teoretického převodového poměru je např. sklonění frézovací hlavy při výrobě soukolí (tj. nesplnění podmínky obtisku dvou kol), nebo změna parametrů nástroje apod.

Kapitola 8 obsahuje metodu stanovení potřebných údajů k řešení problémů z předcházejících kapitol. Jsou zde např. způsoby zpracování vektorů V , L , N , A , B , η , jednotkových vektorů os, položení os souřadnic, počáteční úhel osy frézovací hlavy na kolébce s osou X atd. Jak bylo řečeno, metod stanovení potřebných údajů je několik a tyto údaje lze i měřit.

Závěrečná kapitola 9 uvádí blokové schémata programu na samočinný počítač v systému FEL-FORTRAN a praktické vypočtené příklady. Je zde popsán algoritmus, některé poznámky o programování, tabulky vypočtených parametrů, grafy, případně podrobné vysvětlení.

Jednotlivé kapitoly této práce na sebe spojitě navazují. Práce dává obecný tenzor otočení pro každý rotační pohyb. Jím lze po kombinaci s jednoduchými pohyby vyšetřit tvar plochy obrobku po obrábění, nebo na základě známého tvaru obrobku vyšetřit optimální profil nástrojů jako jsou tvarové frézy a tvarové nože. Tak lze zlepšovat konstrukci a technologii výroby a zkvalitnit přesnost funkčních součástí.

Aplikace této teorie na kuželová kola je velmi výhodná. Nejen že lze sledovat přesnost bodů povrchu zubů po výrobě teoreticky, ale lze i stanovit počáteční hranici a míru podřezání, což je prakticky velmi důležité, protože je možno podřeznutí úplně eliminovat nebo připustit pouze jeho definovanou hodnotu podle technických požadavků. Stanovení přesnosti převodového poměru nám zaručuje optimální seřízení stroje, nástroje pro optimální záběr. Navíc pak řešení pomocí samočinného počítače velice usnadňuje výpočet (a vzhledem k složitým vztahům by bylo „ruční“ řešení bez počítače vůbec prakticky nemožné).

Problematika je velmi rozsáhlá. Domnívám se, že je možné pomocí této teorie např. vyšetřovat vliv otupení nože na plochy zubů; vliv otupení nože na přesnost převodu; optimální profil tvarové frézy; vliv postavení stroje, nástroje, obrobku na kvalitu profilu součástí i další otázky.

Na závěr bych chtěl srdečně poděkovat mému školiteli prof. Ing. Jaroslavu Braskému, CSc. za jeho péči a vedení v mé práci a rovněž děkuji všem, kteří mi pomáhali při řešení této práce.

Literatura

- [1] Long, B. I.: Základy teorie vytvoření obalových ploch vznikajících při pohybu nástroje a obrobku.
Kandidátské minimum, VŠST, Liberec 1975.
- [2] Budinsky, B.: Základy diferenciální geometrie s technickými aplikacemi.
Praha, SMIL 1970.
- [3] Kilčevský, N. A.: Elementy tenzornogo isčislenija i ego priloženija k mechanike.
Moskva, 1954.
- [4] Pachová, ZS.-Fréy, T.: Vektorová a tenzorová analýza.
Praha, SMIL 1964.
- [5] Rosenberg, J.: Příspěvek k teorii obecné kinematické dvojice s aplikací na hypoidní převody.
Plzeň, VŠSE, 1969.
- [6] Litvin, F. L.: Teorie zubčatých zaceplení.
Moskva, 1968.
- [7] Kabatov, N. F.: Koničeské kolela s krugovými zubjemi.
Moskva, 1966.
- [8] Šejvl, M.: Charakteristika na kuželové nástrojové ploše.
Plzeň, VŠSE, 1966.
- [9] : Mechanika mešin - vypusk 45.
Moskva, 1974.
- [10] Bobrov, V. F.: Osnovy teorii rezenija metalov.
Moskva, 1975.
- [11] Bolek, A.: Části strojů II.
Praha, NČAV 1963.

- [12] Šejvl, M.: Teorie a výpočty ozubených kol.
Praha, SMIL 1957.
- [13] Vulgskov, E. V.: Zubčatye peredaci: ulučennymi svojstvami.
Moskva, 1974.
- [14] Buckingham, E.: Analytical mechanics of gears.
Cambridge, 1949.
- [15] Korotkin, B. V.: Točnost zacepleniya pjatno kontakta
koničeských koles s bočkopbreznymi zubjemi.
Stanki i instrument, N^o2 1968.
- [16] Ševeleva, G. I.: Algoritm číselnnogo rasčeta obrabaty-
vajejmoj poverchnosti.
Stanki i instrument, N^o8 1969.
- [17] Suchý, M.: Příspěvek k problémům geometrie hypoidních
soukolí.
Praha, VUMV 1975.
- [18] Fischer, H.: Zahnflusausrundungskurven an Stirnrädern.
Maschinenmarkt, Nr.46.1970.
- [19] Finikov, G. P.: Differenciálnaja geometrija.
Moskva, 1955.
- [20] Hlavaty, V.: Diferenciální geometrie křivek a ploch
a tenzorový počet.
Praha, 1937.
- [21] Koldin, M. I.: Zubčatye i červjačnye peredači.
Leningrad, 1974.
- [22] Rodin, P. R.: Osnovy teorie proektirovaniya režušich
instrumentov.
Moskva, 1960.

- [23] Šejvl, M.: Aplikovaná kinematika na prostorové převody.
Plzeň, 1967.
- [24] Schmidmeyer, J.: Maticový počet a jeho použití v technice.
Praha, SMIL 1974.
- [25] Liukšin, B.C.: Teorijs vintovych poverchnostej v proek-
tirovaniju režušich instrumentov.
Moskva, 1968.
- [26] Krume, W.: Klingelnberg Spiralkegelräder.
Berlin/Haidelberg/New York 1967.
- [27] Švec, S.: Konstrukce nástrojů pro výrobu ozubení
kuželových kol.
Praha, SMIL 1968.
- [28] Kedrinskii, V. N.: Stanki dlja narezanijs koničeskych
zubčatych koles.
Moskva, 1958.
- [29] Cvis, IU. V.: Profilirovanie režušego obkatnogo instrumenta.
Moskva, 1961.
- [30] Rodin, F.R.: Voprosy teorii režušich instrumentov.
Disertašija DRSc., Odessa, 1961.
- [31] Angot, A.: Užité matematika pro elektrotechnické inženýry.
Praha, SMIL 1971.
- [32] Olehla, M.: Použití Fortranu v praxi.
Liberec, VČST, 1972.
- [33] Vogel, J.: Programování v jazyku Fortran.
Praha, SMIL 1972.
- [34] Vlček, J.: Řešení ekonomických úloh na samočinných počítačích
Praha, SMIL 1965.

- [35] Demidovič, B. P.: Základy numerické matematiky.
Praha, SNTL 1966.
- [36] Garaž, J.: Základy vektorového počtu.
Bratislava, SVTL 1957.
- [37] Muninov, N. A.: Metody kibernetiki v issledovanii obrabotki metallov rezeniem.
Taškent, 1975.
- [38] Výroba spirálových kuželových a hypoidních soukolí Oerlicon.
Symposium Hradec n.L., 11/1975.
- [39] Vysoce výkonné odvalovací frézy pro výkonné frézovací stroje.
Symposium Martin, 5/1976.
- [40] Pažák, A.: Určení záběrové číslu obalových zavítokových súkolí.
Plzeň, 1969.
- [41] Grekoussis, R.: Relativ Geschwindigkeiten und Pressungen bei Hypoidgetrieben.
Antriebstechnik, Nor. 11, 10/1971.
- [42] Bess, I. A.: Profilovanie červáčnych frez dlja obrobotki zubčatých kol s podrezom u nožki zuba.
Stenki i instrument, N°5, 1970.
- [43] Hřílčka, P.: Zásady konstrukce tvaru kuželových a hypoidních ozubených talířových kol s pastorků.
Automobil, 9/1962.
- [44] Grubin, A. M.: Zuboreznyj instrument, 1. část.
Moskva, 1946.

- [45] Mišarin, IU. A.: Meždunarodnaja konferencija po zubčatym peredačam.
Moskva, 1962.
- [46] Hostinský, B.: Diferenciální geometrie křivek a ploch.
Praha, 1950.
- [47] Suchý, M.: Převody.
Praha, ČVUT, 1972.
- [48] Hypoidní převody- teorie a praxe.
Plzeň, 1974.
- [49] Kudrjasev, V.N.: Zubčatye peredači.
Moskva, 1955.
- [50] Klepal, V.: Kuželová kola se spirálními eloidními zuby.
Praha, 1962.
- [51] Bureš, J.: Kuželová kola s obloukovým ozubením Gleason.
Praha, SMTL 1962.
- [52] Růžička, V.: Kontrola ozubených kol.
Praha, SMTL 1957.
- [53] Raševskij, P.K.: Rimanova geometrija i tenzornij analiz.
Moskva, 1967.
- [54] Příkrýl, Z.: Technologie obrábění.
Praha, SMTL 1967.
- [55] Egorov, F. D.: Raboty po differencialnoj geometrii.
Moskva, 1970.
- [56] Eisenhart, L.P.: An introduction to differential geometry with use of the tensor calculus.
Princeton, 1947.

Obsah

1.	Úvod	1
2.	Základní vztahy a vlastnosti tenzoru otočení rotačních pohybů	3
2.1	Charakteristika problému řešení	3
2.2	Tenzor otočení a jeho vlastnosti	3
3.	Teorie vytvoření obalové plochy součásti (nástroje)	6
3.1	Obecné formulace	6
3.2	Povrchy součástí (nástroje) vytvořené profilem nástroje (součásti)	8
3.2.1	Obalové plochy vytvořené rotačními pohyby kolem dvou různoběžných os	9
3.2.2	Obalové plochy vytvořené rotačními pohyby kolem dvou mimoběžných os	12
4.	Vlastnosti obrobené plochy součásti (nástroje)	15
4.1	Charakteristika a parametrické křivky	15
4.2	Normála obalové plochy	16
4.3	Tečná rovina obalové plochy	17
4.4	Odvození druhého základního tenzoru plochy	17
4.4.1	Tenzor plochy určené parametricky	18
4.4.2	Tenzor plochy určený skalární funkcí vektorového argumentu	19
4.4.3	Stanovení křivosti plochy součásti (nástroje)	21
5.	Vytvoření povrchu boku zubu kuželových kol	26
5.1	Kuželová kola s kruhově zakřivenými zuby Gleason ..	26
5.1.1	Princip práce a kinematická vazba součástí - kolébky - nástroje	26
5.1.2	Rozbor profilu nástroje a plocha boku zubu	27
5.1.3	Křivky boku zubu příčného řezu kolem Gleason	43
5.2	Kuželová kola se zakřivenými zuby Oerlikon	46
5.2.1	Princip práce a kinematické závislosti při výrobě .	46
5.2.2	Obalové plochy boku zubu při odvalu s profilem nástroje	49
6.	Teorie podřezání při výrobě prostorových kuželových kol	70
6.1	Podřezání rovinného ozubení	71
6.2	Podřezání u prostorového ozubení	75

6.2.1	Nutná podmínka podřezání	75
6.2.2	Postačující podmínka podřezání	76
6.2.3	Analytické určení počáteční hranice podřezání ..	88
6.2.4	Stanovení úhlu mezi φ -parametrickou křivkou plochy zubu a trajektorií nože	92
7.	Stanovení rozdílu mezi teoretickým a skutečným převodovým poměrem při záběru prostorových ploch s aplikací na kuželové kola	96
8.	Určení vstupních údajů pro rovnici obelových ploch	101
9.	Blokové schéma a program výpočtu pro kolo Gleason	112
9.1	Blokové schéma	112
9.2	Poznámky k programu	121
9.3	Příklady	122
10.	Závěr	130
	Literatura	134
	Obsah	139