



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Technická univerzita v Liberci

Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická

Fourierovy řady

Miroslav Brzezina, Jiří Veselý

Katedra aplikované matematiky

FP TU v Liberci

Liberec, 2013

- © doc. RNDr. Miroslav Brzezina, CSc.
- © doc. RNDr. Jiří Veselý, CSc.
- © Technická univerzita v Liberci,
čj. RE 104/13, schváleno rektorátem TUL dne 30.12.2013,
č. publikace: 55-104-13

ISBN 978 - 80 - 7494 - 036 - 1

Tento učební text vznikl jako pomůcka pro přípravu studentů Technické univerzity v Liberci k získání základních znalostí o funkcích komplexní proměnné a dovedností početního charakteru. Teoretická část textu poskytuje minimální nezbytné zázemí pro řešení konkrétních úloh, důraz je kladen na jejich praktické zvládnutí. Text je rozvinutím starších textů obou autorů a je doplněn řešenými příklady i příklady k samostatnému procvičování. Vznikl v rámci projektu 3P - Praxe pro praxi, reg. č. CZ 1.07/2.2.00/15.0097.

Všechna práva vyhrazena. Tento text ani žádná jeho část nesmí být reprodukována nebo šířena v žádné formě bez písemného souhlasu vydavatele.

Obsah

Trocha historie úvodem	1
1 Co budeme potřebovat	5
1.1 Přípravné úvahy	5
1.2 Komplexní čísla a funkce	5
1.3 Divergentní řady	9
1.4 Integrace	12
1.5 Prostory funkcí	15
1.6 Funkce s konečnou variací	17
1.7 Weierstrassova věta o aproximaci	20
1.8 Korovkinova věta	23
1.9 Skalární součin	25
2 Trigonometrické řady	27
2.1 Základní poznatky	27
2.2 Stejnoměrná konvergence	33
2.3 Které trigonometrické řady jsou Fourierovy ?	35
2.4 Fourierovy řady	37
3 Fourierovy řady	39
3.1 Proč jsou Fourierovy ?	39
3.2 Trigonometrické polynomy	42
3.3 Dirichletovo a Fejérové jádro	45
4 Bodová konvergence Fourierovy řady	51
4.1 Nejjednodušší případ	51
4.2 Fourierova řada spojitě funkce	55
4.3 Fejérová věta o sčítatelnosti	56
4.4 Konvergence Fourierovy řady	59
4.5 Dirichletova věta	65
4.6 Operace s Fourierovými řadami	69
5 Hilbertův prostor	73
5.1 Základní vlastnosti	73
6 Fourierova transformace	91
6.1 Fourierova transformace	91
6.2 Inverzní Fourierova transformace	95

6.3	Diskrétní Fourierova transformace	98
6.4	Rychlá Fourierova transformace	102
7	Ohlédnutí	107
7.1	Prehistorie	107
7.2	Historie	114
7.3	Některé další výsledky	118
	Literatura	121
	Věcný rejstřík	i
	Jmenný rejstřík	iii

Trocha historie úvodem

Chceme-li se naučit nějakou část matematiky a chceme-li porozumět jejímu vývoji, musíme se alespoň krátce seznámit s tím, jak vznikly její jednotlivé základní pojmy a jaká byla jejich role ještě před tím, než nabyly zásadního významu. Následující řádky popisují „prehistorii“ trigonometrických řad a mají spíše intuitivní a motivační charakter.

Začneme jednoduchým pozorováním. Ztotožníme-li zřejmým způsobem třírozměrný eukleidovský prostor $\mathbb{R}^3$ s prostorem trojic reálných čísel, je každý jeho prvek popsán lineární kombinací vektorů $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$. Např. $\mathbf{v} = (1, 3, -2)$ je lineární kombinací

$$\mathbf{v} = 1 \cdot \mathbf{e}_1 + 3 \cdot \mathbf{e}_2 - 2 \cdot \mathbf{e}_3.$$

Pokud bychom zvolili jinou bázi, mohl by být výpočet koeficientů pracnější. V tomto případě jsou to, jak snadno nahlédneme, skalární součiny $(\mathbf{v}, \mathbf{e}_k)$ pro $k = 1, 2, 3$. Zvlášť jednoduchá situace nastává v případě, že prvky báze jsou vzájemně ortogonální.

Co se stane, budeme-li pracovat s prostorem nekonečné dimenze? Snadno si rozmyslíme, že pak patrně nevystačíme s konečnými lineárními kombinacemi a že budeme muset sáhnout k práci s řadami. Z historického pohledu jde o poměrně starý problém, ve kterém byl příslušný nekonečněrozměrný prostor prostorem funkcí. Lineárně nezávislé prvky byly periodické funkce.

Velmi známá a často zmiňovaná práce [31] J. B. FOURIERA (1768–1830) rozhodně není prvním pramenem, ve kterém se objevila vyjádření funkcí pomocí součtů trigonometrických řad. Takových vyjádření pro jednoduché funkce bylo známo již několik desítek. K jejich odvození byly užívány různé, často poněkud komplikované metody, pro které bylo inspirací analogické zacházení s mocninnými řadami. Takto nalezené výsledky souvisely zpravidla s aplikacemi matematiky ve fyzice, jako např. při zkoumání chvění strun.

Velmi zhruba řečeno, budeme se zabývat řadami funkcí a jejich *konverencí*. Náš výklad přesto začneme v době, kdy se o konvergenci příliš nedbalo a kdy se o ní ani mnoho nevědělo. Tak např. L. EULER (1707–1783) v jedné ze svých prací postupoval takto: Do známého vzorce pro součet geometrické řady

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}, \quad |z| < 1, \quad (1)$$

dosadil za z výraz $e^{it} = \cos t + i \sin t$, $t \in (0, 2\pi)$. Po úpravě porovnáním reálných částí

obdržel rovnost

$$\sum_{k=0}^{\infty} \cos kt + i \sum_{k=0}^{\infty} \sin kt = \frac{1}{(1 - \cos t) - i \sin t} = \frac{1}{2} + i \frac{\sin t}{2 - 2 \cos t} \quad (2)$$

a porovnáním a úpravou reálných částí výrazů na obou stranách této rovnosti dostal vztah

$$\sum_{k=1}^{\infty} \cos kt = -\frac{1}{2}. \quad (3)$$

Čtenář jistě tuší, že dosazení e^{it} za z rozhodně není korektní, neboť $|e^{it}| = 1$, zatímco vzorec (1) platí jen pro $|z| < 1$. Skutečně, snadno se přesvědčíme, že první řada na levé straně (2) diverguje pro všechna $t \in \mathbb{R}$. To lze ukázat např. takto: Budeme předpokládat, že je splněna v bodě t *nutná* podmínka pro konvergenci řady $\lim_{k \rightarrow \infty} \cos kt = 0$. Potom je také $\lim_{k \rightarrow \infty} \cos^2 kt = 0$ a snadno zjistíme, že pro $k \rightarrow \infty$ odtud plyne jednak

$$\sin^2 kt = 1 - \cos^2 kt \rightarrow 1, \quad \text{a zároveň} \quad \sin^2 kt = \frac{1 - \cos 2kt}{2} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

Nalezený spor ukazuje, že řada (3) nekonverguje pro *žádné* $t \in \mathbb{R}$.

Pokud však budeme bezstarostně integrovat rovnici (3) „člen po členu“, dostaneme rovnost

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kt}{k} = -\frac{t}{2} + C_1,$$

a z ní dosazením $t = \pi/2$ obdržíme pomocí vzorce pro součet Leibnizovy řady $C_1 = \pi/2$. Dostaneme tak rovnost

$$\frac{\pi - t}{2} = \sin t + \frac{\sin 2t}{2} + \frac{\sin 3t}{3} + \dots. \quad (4)$$

Tu nacházíme v Eulerově *Diferenciálním počtu* z r. 1755 (viz [25]), psal o ní však již o rok dříve v dopise CH. GOLDBACHOVI (1690–1764). Původní Eulerovo odvození bylo složitější a lze je nalézt např. v [66]. Odvození, které jsme uvedli, se objevuje později u D. BERNOULLI (1700–1782) v pracích souvisejících s kmitáním strun z let 1771–1773. Bernoulli mj. patrně jako první poukázal na to, že (4) platí pro $t \in (0, 2\pi)$. Postupoval dokonce i dále: násobením každé strany rovnosti (-1) a další integrací „člen po členu“ odvodil vztah

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kt}{k^2} = \frac{t^2}{4} - \frac{\pi t}{2} - C_2. \quad (5)$$

Dosazením dvou hodnot $t = \pi/2$ a $t = \pi$ dostal rovnice

$$-\frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{1}{36} + \dots = -\frac{3\pi^2}{16} - C_2, \quad -1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \dots = -\frac{\pi^2}{4} - C_2,$$

z nichž druhou dělil 4 a porovnal obě pravé strany. Tak obdržel rovnici

$$-C_2 - \frac{3\pi^2}{4 \cdot 4} = -\frac{C_2}{4} - \frac{1}{4} \frac{\pi^2}{4},$$

ze které plyne $C_2 = -\pi^2/6$. Dosadíme-li nyní do (5) za C_2 nalezenou hodnotu a položíme $t = 0$, získáme *správný* výsledek ¹⁾

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}. \quad (6)$$

Povšimněme si ještě vzorců pro výpočet koeficientů v rozvoji funkce v trigonometrickou řadu. Ani ty se neobjevily ve Fourierově práci, k níž se ještě několikrát vrátíme, poprvé. Nyní si jen stručně připomeneme sled, ve kterém nabyly postupně důležité role. Cesta k integrálním vzorcům pro koeficienty řad byla v zásadě dvojí: vyplynuly jednak limitním přechodem z interpolačních vzorců při cestě od přibližných vyjádření k přesným hodnotám (zde vývoj ovlivnili zejména J. L. LAGRANGE (1736–1813) a A. CLAIRAUT (1713–1765)), jednak přímou cestou integrace řady člen po členu. Tuto druhou cestu sledovali J. D’ALEMBERT (1717–1783) a Euler. D’Alembert dospěl k takovým vyjádřením při studiu rozvoju funkcí $(1 - \cos nt)^{-s}$ r. 1754. Ve stejném roce Clairaut dospěl k představě, že „libovolná“ funkce f , dokonce i taková, kterou nelze vyjádřit algebraicky, se dá rozložit v řadu

$$f(t) = A_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos kt,$$

jejíž koeficienty lze určit pomocí vzorců

$$A_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(v) \cos kv \, dv, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Zde se však dostáváme bez hlubšího pohledu a přesnějšího výkladu zbytečně daleko. Proto historii „předfourierovských“ výzkumů trigonometrických řad uzavřeme. K dalšímu vývoji se podrobným komentářem vrátíme později.

* * * * *

Uvedenými ukázkami jsme chtěli čtenáři přiblížit, jak bezstarostně se s (trigonometrickými) řadami v 18. století zacházelo. Avšak ani v dalším století se situace dlouho nezlepšovala. A tak ještě r. 1826, čtyři roky po vydání Fourierovy *Analytické teorie tepla* [31] napsal N. H. ABEL (1802–1829) v dopise z Paříže svému bývalému učiteli: *Divergentní řady jsou ďábelským výmyslem a je ostudné zakládat na nich jakýkoli důkaz. Pomocí nich lze odvodit jakýkoli potřebný závěr, proto vedly k tolika klamným výsledkům a paradoxům. Stal jsem se k tomu všemu abnormálně pozorným, protože s výjimkou geometrické řady neexistuje v celé matematice snad jiná řada, jejíž součet by byl určen korektně. Jinak řečeno, v matematice mají nejdůležitější věci ty nejhorší základy. Je pravda, že výsledky jsou většinou správné, to je na tom nejděivnější.*

I když budeme výklad často doprovázet historickými poznámkami a příklady, nebudeme postupovat chronologicky. Pokud se čtenář zajímá hlouběji o historii, snadno se v literatuře dostane k systematictějšímu historickému výkladu; tato knížka by ho v tom měla povzbudit. Spolu s A. WEILEM (1906–1998) věříme, že s otázkou *Proč historie matematiky?* je takřka

¹⁾ Tuto řadu jako první sečetl r. 1736 Euler. V dnešní době existuje mnoho cest, jak součet této řady určit. Některé jsou velmi důmyslné a téměř elementární.

neoddělitelně spjata otázka *Proč matematika?* a že tuto otázku není třeba potenciálnímu čtenáři knížky zodpovídat, neboť jinak by patrně tuto knížku ani neotevřel.

Je tu ale ještě jeden silný důvod: málokterá část matematiky ovlivnila vývoj ostatních matematických disciplín více než právě *Fourierovy řady*. Na půdě jejich studia vznikla jemnější kriteria konvergence řad, daly podnět pro vytvoření Riemannova a částečně i Lebesgueova integrálu, a také i pro vznik Cantorovy teorie množin. Tento výčet zdaleka není úplný, nyní jde spíše jen o ilustrativní příklady. Podrobněji je tento vývoj popsán v Dodatku. A tak řada zdánlivě cizorodých poznatků a metod, známých čtenáři odjinud, které nám budou pomáhat při studiu teorie Fourierových řad, spíše naopak vděčí těmto řadám za svůj vznik nebo rozvoj.

Zmiňujeme-li se o tvůrcích jednotlivých pojmů či vět, zdaleka nejde o otázku zásluh nebo priorit. Jednotlivé osobnosti, jakkoli jsou jejich výsledky a práce významné, nejsou tím, nač by se měl čtenář při četbě tohoto textu soustředit. Jeho posláním je pokusit se přiblížit čtenáři jednu z nejkrásnějších partií klasické matematiky. Pokud při jeho četbě získá nejen pár základních matematických poznatků, ale pochopí i to, jak je celkový vývoj matematiky složitý a jaká je jeho role v kulturní historii lidstva, bude tím jeho hlavní cíl naplněn.

Kapitola 1

Co budeme potřebovat

V této kapitole připomínáme některé poznatky, které v dalším výkladu potřebujeme. Vyspělejšímu čtenáři bude stačit patrně jen náhled na její jednotlivé části; v případě potřeby se může k některé její části vrátit.

1.1 Přípravné úvahy

Z dále užívaných poznatků uvádíme podrobněji pouze ty, které považujeme za důležité, jde však spíše jen o některé úmluvy a stabilizaci označení.

Symbole $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ budeme po řadě užívat k označení oborů všech přirozených, celých, racionálních, reálných a komplexních čísel, přičemž $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Budeme předpokládat, že čtenář je již seznámen s některými matematickými poznatky, probíranými v základních kurzech matematické analýzy. Tak např. základní pojmy a tvrzení o metrických prostorech a (normovaných) lineárních prostorech budeme považovat za známé. K připomenutí stačí nahlédnout do vhodného učebního textu, např. do [78].

Patrně nejsložitějšími z používaných budou poznatky o stejnoměrné spojitosti, stejnoměrné konvergenci posloupností a řad funkcí, a o základních vlastnostech integrálů. Uspořádání látky je voleno tak, aby její podstatná část byla srozumitelná s pouhou znalostí integrálu z omezené spojitě funkce na omezeném intervalu, avšak k pochopení celé látky je znalost Lebesgueova integrálu nutná.

1.2 Komplexní čísla a funkce

Budeme užívat běžná standardní označení. Reálnou a imaginární část komplexního čísla z budeme značit $\operatorname{Re} z$ a $\operatorname{Im} z$; číslo komplexně sdružené k z značíme $\bar{z}$. Analogické označení používáme i pro funkce. Ve značné části textu budeme pracovat s funkcemi reálné proměnné, avšak mocninné řady uvažujeme vždy v komplexním oboru a předpokládáme, že čtenář zná jejich základní vlastnosti. Zejména připomínáme Moivreův vzorec

$$e^{ikt} = \cos kt + i \sin kt, \quad t \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad (1.1)$$

který může méně sběhlý čtenář považovat pro případ $k = 1$ též za definici e^{it} . Zřejmě je

$$|e^{it}| = (\cos^2 t + \sin^2 t)^{1/2} = 1.$$

Jestliže vyjadřujeme $z \neq 0$ v goniometrickém tvaru $z = re^{it}$, je $r > 0$ a t je reálné číslo. Všechna reálná t , pro která je $z = re^{it}$, tvoří množinu $\operatorname{Arg} z$ a rozdíl každých dvou prvků této množiny je celočíselný násobek čísla 2π . Funkce e^{it} proměnné t je na $\mathbb{R}$ nekonečněkrát diferencovatelná 2π -periodická funkce.

Často se budeme zabývat stejnoměrnou nebo lokálně stejnoměrnou konvergencí na množině A , pro které budeme užívat označení $\Rightarrow$ na A a podobně $\Rightarrow_{\text{loc}}$ na A . Ve druhém případě musíme mít samozřejmě k dispozici možnost definovat okolí bodů množiny A . Pro ε -okolí bodu z budeme užívat označení $U(z, \varepsilon)$. Připomeňme, že použitím Borelovy pokrývací věty snadno dokážeme, že lokálně stejnoměrná konvergence na lokálně kompaktním metrickém prostoru P (a tedy např. na $\mathbb{C}$) je ekvivalentní se stejnoměrnou konvergencí na všech kompaktních podmnožinách P ; proto bývá též někdy nazývána kompaktní konvergence.

Nutnou a postačující podmínku pro stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí $\{f_n\}$ popisuje následující tvrzení, označované běžně jako Bolzano-Cauchyho podmínka:

Lemma 1.2.1 (Cauchy 1853, Weierstrass 1861). *Posloupnost funkcí $\{f_n\}$ konverguje stejnoměrně na množině A , právě když*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists k \in \mathbb{N})(\forall m, n \geq k)(\forall x \in A)(|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon). \quad (1.2)$$

Nejjednodušším, avšak velmi důležitým kritériem pro stejnoměrnou konvergenci řad funkcí je tzv. Weierstrassův M-test:

Tvrzení 1.2.2 (Weierstrass). *Nechť $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ je řada funkcí definovaných na množině A a nechť $\sup\{|f_k(t)|; t \in A\} \leq M_k$, $k \in \mathbb{N}_0$. Jestliže platí $\sum_{k=0}^{\infty} M_k < \infty$, potom řada $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ konverguje stejnoměrně na A .*

Připomeňme, že toto kritérium stejnoměrné konvergence je důsledkem Bolzano-Cauchyho kritéria a odhadu, ve kterém pro $p, q \in \mathbb{N}$, $p < q$, levá strana následující nerovnosti konverguje pro $p \rightarrow \infty$ k 0:

$$\left| \sum_{k=p}^q f_k(t) \right| \leq \sum_{k=p}^q |f_k(t)| \leq \sum_{k=p}^q |M_k|.$$

M-test se uplatňuje mj. i při studiu mocninných řad. Jejich nejdůležitější vlastnosti shrneme do jediného tvrzení:

Tvrzení 1.2.3. *Ke každé mocninné řadě s (komplexními) koeficienty c_k o středu $z_0 = 0$ tvaru*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \quad (1.3)$$

existuje její poloměr konvergence R , $0 \leq R \leq +\infty$, tak, že platí

- (a) *jestliže je $R > 0$, potom v každém bodě z konvergenčního kruhu, tj. množiny $U(0, R) = \{z \in \mathbb{C}; |z| < R\}$, řada (1.3) konverguje absolutně a v $U(0, R)$ lokálně stejnoměrně k nekonečně diferencovatelné funkci;*
- (b) *v každém bodě $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{U(0, R)}$ řada (1.3) diverguje;*

(c) pokud je $R \in (0, \infty)$, v každém bodě ζ konvergenční kružnice

$$K(0, R) = \{z \in \mathbb{C}; |z| = R\}$$

nastane právě jedna ze tří možností: buď řada (1.3) konverguje v ζ absolutně a pak konverguje stejnoměrně v $K(0, R)$ a tato konvergence je ve všech bodech $K(0, R)$ absolutní, nebo konverguje v bodě ζ neabsolutně, nebo v něm diverguje. V těchto posledních dvou případech nastává v kterémkoli z ostatních bodů kružnice $K(0, R)$ vždy jeden ze dvou případů: řada v něm konverguje neabsolutně nebo diverguje.

Stejnoměrná konvergence je též nástrojem, který umožňuje záměnu limitních procesů; přitom tyto limity mohou být „schovány“ např. v derivování či integraci apod. Princip je popsán v následujícím tvrzení.

Věta 1.2.4 (Moore 1900, Osgood 1897). *Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval a $x_0 \in I$. Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost (komplexních) funkcí definovaných na množině $P = I \setminus \{x_0\}$. Jestliže platí*

$$(1) f_n \Rightarrow f \text{ na } P,$$

$$(2) f_n(x) \rightarrow a_n \text{ pro } x \rightarrow x_0 \text{ a pro všechna } n \in \mathbb{N},$$

potom existují (vlastní) limity $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ a $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ a jsou si rovny.

Důkaz. K $\varepsilon > 0$ existuje $k \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $m, n \geq k$, $m, n \in \mathbb{N}$, platí

$$x \in P \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon,$$

a tedy, po limitním přechodu $x \rightarrow x_0$, rovněž $|a_m - a_n| \leq \varepsilon$. Odtud dostáváme konvergenci posloupnosti $\{a_n\}$. Položme $\lim a_n = a$. Zřejmě platí

$$|f(x) - a| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - a_n| + |a_n - a|.$$

Nyní lze volbou $n \in \mathbb{N}$ dosáhnout toho, že první a třetí člen na pravé straně nerovnosti je odhadnut pro všechna $x \in P$ pomocí $\varepsilon/3$. Potom zvolíme $\delta > 0$ tak, že pro prstencové δ -okolí bodu x_0 v P platí

$$(x \in P_\delta) \Rightarrow |f_n(x) - a_n| < \varepsilon/3,$$

z čehož už lehce obdržíme dokazované tvrzení. □

Důsledek 1.2.5. *Nechť existuje $\delta > 0$ a bod $c \in \mathbb{R}$ tak, že*

$$(1) f_n(x) \rightarrow f_n(c) \text{ pro } x \rightarrow c_-, \text{ tj. } f_n \text{ jsou zleva spojitě v bodě } c,$$

$$(2) f_n \Rightarrow f \text{ na } (c - \delta, c).$$

Potom je také f zleva spojitá v bodě c a $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(c) = f(c)$; přitom konvergence f_n k funkci f je stejnoměrná na $(c - \delta, c]$.

Budeme potřebovat i „jemnější“ kritéria konvergence, která mají základ v jednoduchém, dnes standardním triku, pocházejícím od N. H. ABELA (1802–1829). Tato kritéria nám umožní zkoumat i neabsolutní konvergenci řad. Jejich použití bývá složitější, v mnoha případech je však nezbytné. Připomeneme proto *Abelovu parciální sumaci* podrobněji.

Lemma 1.2.6 (Abel 1826). *Nechť jsou dány posloupnosti komplexních čísel $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$, $\{v_k\}_{k=0}^{\infty}$ a čísla $p, q \in \mathbb{Z}$, $-1 \leq p < q$. Označme s_n částečné součty $s_n = \sum_{k=0}^n v_k$, $n \in \mathbb{N}_0$, a položíme $s_{-1} = 0$. Potom platí*

$$\sum_{k=p+1}^q u_k v_k = \sum_{k=p+1}^q s_k (u_k - u_{k+1}) + s_q u_{q+1} - s_p u_{p+1}. \quad (1.4)$$

Důkaz. Pro všechna $k \in \mathbb{N}$ zřejmě platí:

$$u_k v_k = u_k (s_k - s_{k-1}) = s_k (u_k - u_{k+1}) + s_k u_{k+1} - s_{k-1} u_k. \quad (1.5)$$

Všechny tyto nerovnosti pro $k = p+1, \dots, q$ sečteme a s ohledem na „teleskopičnost“ součtu je

$$\begin{aligned} (s_{p+1} u_{p+2} - s_p u_{p+1}) + (s_{p+2} u_{p+3} - s_{p+1} u_{p+2}) + \dots + (s_q u_{q+1} - s_{q-1} u_q) = \\ = s_q u_{q+1} - s_p u_{p+1}. \end{aligned}$$

Odtud obdržíme jednoduchou úpravou vzorec (1.4). □

Speciálně dostaneme pro nerostoucí posloupnost nezáporných reálných čísel $\{u_k\}$ a řadu $\sum v_k$, pro jejíž částečné součty s_n platí $|s_n| \leq M$, odhad

$$\left| \sum_{k=p+1}^q u_k v_k \right| \leq M(u_{p+1} - u_{q+1}) + M u_{q+1} + M u_{p+1} \leq 2M u_{p+1}. \quad (1.6)$$

Poznamenejme, že z (1.6) plyne i analogický odhad zbytku řady po p -tém členu, který budeme později ještě potřebovat:

$$\left| \sum_{k=p+1}^{\infty} u_k v_k \right| \leq 2M u_{p+1}. \quad (1.7)$$

Tvrzení 1.2.7 (Abel, Dirichlet). *Nechť $\{u_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ je monotonní posloupnost (reálných) funkcí a nechť $s_n(t) = \sum_{k=1}^n v_k(t)$ značí n -tý částečný součet řady (komplexních) funkcí na množině A . Potom řada funkcí*

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) v_k(t) \quad (1.8)$$

konverguje stejnoměrně na A , je-li splněna kterákoli z následujících podmínek:

- (a) (Abel) : řada $\sum_{k=1}^{\infty} v_k(t)$ konverguje stejnoměrně na množině A a posloupnost $\{u_k(t)\}$ je stejně omezená na A , tj. existuje $K > 0$ tak, že pro všechna $k \in \mathbb{N}$ a všechna $t \in A$ je

$$|u_k(t)| \leq K.$$

- (b) (Dirichlet) : posloupnost $\{u_k(t)\}$ je nerostoucí a konverguje stejnoměrně na množině A k 0 a řada $\sum_{k=1}^{\infty} v_k(t)$ má stejně omezené částečné součty na A , tj. existuje $M > 0$ tak, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a všechna $t \in A$ je

$$|s_n(t)| \leq M.$$

Důkaz. V obou případech stačí ověřit Bolzano-Cauchyho podmínku pro stejnoměrnou konvergenci řady (1.8). Nejprve to uděláme pro druhou z obou podmínek (Dirichletova podmínka); podle předpokladů k $\varepsilon > 0$ existuje $p \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $s > p$ je $0 \leq u_s(t) \leq \varepsilon/2M$. Potom podle (1.6) platí pro všechna $q > p$ a všechna $t \in A$

$$\left| \sum_{k=p+1}^q u_k(t)v_k(t) \right| \leq 2Mu_{p+1}(t) \leq \varepsilon,$$

což dokazuje stejnoměrnou konvergenci řady (1.8) na množině A pomocí Dirichletovy podmínky.

Nyní dokážeme stejnoměrnou konvergenci řady (1.8) na A pomocí Abelovy podmínky. Z předpokladů vyplývá, že existuje $\lim_{k \rightarrow \infty} u_k(t) = u(t)$ a že platí $|u(t)| \leq K$ pro všechna $t \in A$. Snadno nahlédneme, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} u(t)v_k(t)$ konverguje stejnoměrně na A . Stačí tedy dokázat stejnoměrnou konvergenci řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} (u_k(t) - u(t))v_k(t).$$

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že posloupnost funkcí $c_k = (u_k - u)$ je neklesající, jinak přejdeme k posloupnosti funkcí $-c_k$. Pro všechna $k \in \mathbb{N}$ zřejmě platí $|c_k| \leq 2K$. Ze stejnoměrné konvergence řady $\sum_{k=1}^{\infty} v_k(t)$ vyplývá, že k $\varepsilon > 0$ lze zvolit $p \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $q > p$ a všechna $t \in A$ je $\left| \sum_{k=p+1}^q v_k(t) \right| \leq \varepsilon/2K$. Pak však podle (1.6) snadno dostaneme odhad

$$\left| \sum_{k=p+1}^q c_k(t)v_k(t) \right| \leq (\varepsilon/2K) c_{p+1}(t) \leq \varepsilon;$$

tím je důkaz celého tvrzení dokončen. □

1.3 Divergentní řady

I když jsme se divergentními řadami podrobněji nezabývali, v tomto textu ukážeme, že se s nimi za určitých okolností smysluplně zacházet dá. Zhruba po r. 1821 došlo vlivem Cauchyho k zásadnímu útlumu zájmu o divergentní řady. K jeho obnovení přispěly práce E. CESÀRA (1859–1906) o násobení řad a v neposlední řadě též studium konvergence Fourierových řad spojitých funkcí. S příslušnými výsledky, publikovanými r. 1904 v [28] L. FEJÉREM (1880–1959), se čtenář bude mít možnost v tomto textu seznámit.

Ukažme si na jednom příkladu, jak se s divergentními řadami zacházelo a jak představy o tzv. sčitatelnosti postupně krystalizovaly. Číselná řada

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \tag{1.9}$$

zřejmě diverguje. Rozpaky a zmatek vzbuzovaly úvahy typu

$$\begin{aligned} 0 &= (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \\ &= 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots = 1. \end{aligned}$$

Některé z nich vedou k nějakému „součtu“ s , který se z různých důvodů zdál „rozumný“. Např. při dosazení $z = -1$ do vzorce pro součet geometrické řady

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots$$

dostaneme $s = 1/2$. Podobně označíme-li symbolem s předpokládaný součet této řady, je

$$s = (1 - 1 + 1 - \dots) = 1 - (1 - 1 + 1 - \dots) = 1 - s,$$

což dává stejný výsledek; jiné úvahy pravděpodobnostního charakteru, které vedly k témuž „součtu“, prezentoval např. G. W. LEIBNIZ (1646–1716). Viz též příklady v knize [33].

L. EULER, který byl v manipulaci s řadami skutečným mistrem, věřil, že každá řada má za „součet“ hodnotu takové funkce, z jejíhož rozvoje v mocninnou řadu vznikne číselná řada dosazením, bez ohledu na to, zda dosazujeme body z kruhu konvergence či z doplňku jeho uzávěru. Svě přesvědčení vyjadřoval těmito slovy: „*(...) každá řada musí mít určitou hodnotu. Abychom se vyrovnali se všemi při tom vznikajícími obtížemi, neměla by se tato hodnota nazývat součet. K tomuto označení se váže jeho chápání jakožto výsledku skutečného sčítání, což není možné u divergentních řad.*“ Na jiném místě píše: „*součet každé řady je hodnotou toho konečného výrazu, jehož rozvinutím příslušná řada vzniká*“ (1745). Toto je často nazýváno *Eulerův princip*.

Při zkoumání operací, které měly „zrychlovat“ konvergenci řad (poznamenejme, že pro svoji pomalou konvergenci se např. Leibnizova řada $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (2k+1)^{-1}$ o součtu $\pi/4$ k numerickému výpočtu hodnoty π vůbec nehodí), dospěl Euler i k metodě, kterou lze popsat takto: Je-li dána řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, utvoříme čísla b_k ,

$$b_0 = a_0, \quad b_k = a_0 + \binom{k}{1} a_1 + \binom{k}{2} a_2 + \dots + \binom{k}{k} a_k,$$

a za jakýsi zobecněný součet řady $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ považujeme hodnotu

$$\frac{1}{2} b_0 + \frac{1}{4} b_1 + \frac{1}{8} b_2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{2^{k+1}},$$

pokud ovšem řada v předcházející rovnosti vpravo konverguje. Metoda vychází z představy, že v mocninné řadě $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ hodnotě $x = 1$ odpovídá při transformaci

$$x = \frac{y}{1-y}, \quad \text{resp.} \quad y = \frac{x}{1+x}$$

hodnota $y = 1/2$. Dnes tento postup označujeme jako (E,1)-sčítací metodu.

Jakkoli se to může zdát začátečníkovi absurdní, je někdy potřeba pracovat i s divergentními řadami. V takovém případě se často užívají *sčítací metody*. Jsou to postupy, které *rozšiřují* pojem součtu řady v následujícím smyslu: pokud řada konverguje k součtu s , přiřazují jí jako „nový součet“ totéž číslo s ; taková sčítací metoda se nazývá *regulární*. Pokud se sčítací metodou zachovává součet řady s i v případě $s = \pm\infty$, nazývá se taková metoda *silně regulární*. Patrně nejznámější sčítací metodou je *metoda aritmetických průměrů*, založená na následujícím jednoduchém tvrzení:

Lemma 1.3.1. *Nechť je posloupnost (komplexních) čísel $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ konvergentní a platí $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = a$, pak také*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_k}{k+1} = a.$$

Důkaz. Stačí dokázat, že pro $z_k = (a_k - a)$ platí: Jestliže $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = 0$, pak je také $\lim_{k \rightarrow \infty} (z_0 + z_1 + \cdots + z_k)/(k+1) = 0$. K $\varepsilon > 0$ najdeme $m \in \mathbb{N}$ tak, že $|z_k| < \varepsilon$ pro všechna $k \geq m$. Pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k \geq m$ je pak

$$\begin{aligned} \left| \frac{z_0 + z_1 + \cdots + z_k}{k+1} \right| &\leq \left| \frac{z_0 + z_1 + \cdots + z_m}{k+1} \right| + \left| \frac{z_{m+1} + z_{m+2} + \cdots + z_k}{k+1} \right| \leq \\ &\leq \frac{|z_0| + |z_1| + \cdots + |z_m|}{k+1} + \frac{\varepsilon(k-m)}{k+1}. \end{aligned}$$

Nyní snadno najdeme $n \in \mathbb{N}$, $n \geq m$ tak, aby pro všechna $k \in \mathbb{N}$, $k > m$, byl první ze zlomků v předcházející nerovnosti na pravé straně menší než ε ; tím jsme odhadli průměr vlevo pro všechna $k \geq m$ hodnotou 2ε , čímž je tvrzení dokázáno. $\square$

Jestliže uplatníme přechod k posloupnosti průměrů na posloupnost částečných součtů řady, pak jejich limita je rovna součtu řady, pokud řada konverguje. Popsaný postup tedy dává regulární sčítací metodu. Ta skutečně netriviálně zobecňuje „normální součet“, protože takto sečteme i divergentní řadu $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$. Abychom sčítání pomocí sčítacích metod odlišili od součtu řady, připojujeme před znamení sumy nějaký znak. Popsaná metoda je pojmenována po Cesàrovi, proto užíváme znak (C)- $\sum$. Snadno zjistíme, že

$$(C)\text{-}\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k = \frac{1}{2}.$$

Jinou sčítací metodu obdržíme prostřednictvím chování mocninné řady, která konverguje na konvergenční kružnici. Konverguje-li mocninná řada (1.3) v bodě konvergenční kružnice $\zeta = Re^{i\vartheta}$, kde $R \in (0, \infty)$ a $\vartheta \in \mathbb{R}$, je součet f řady (1.3) spojitou funkcí vzhledem k úsečce spojující body 0 a ζ . Na tom je založena *Abelova sčítací metoda*, neboť důsledkem zmíněné spojitosti je regularita této metody. Platí totiž tvrzení:

Věta 1.3.2 (Abel 1826). *Nechť $\zeta \neq 0$ a řada $\sum a_n \zeta^n$ konverguje. Jestliže označíme $f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, pak pro $x \in \mathbb{R}$ platí*

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x\zeta) = f(\zeta).$$

Důkaz. Je-li $\zeta = Re^{i\varphi}$, lze násobením celé řady faktorem $Re^{-i\varphi}$ převést obecný případ na případ $\zeta = 1$. Potom $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = f(1)$ a stačí dokázat spojitost f pro $x \in \mathbb{R}$ v bodě 1 zleva. Ta vyplývá ze spojitosti částečných součtů s_n řady a ze stejnoměrné konvergence řady na úsečce $(0, 1]$ užitím Důsledku 1.2.5. Nyní již stačí dokázat stejnoměrnost konvergence s_n k f . Volbou $v_k(t) = a_k$ dostaneme řadu konstantních funkcí $\sum v_k$ stejnoměrně konvergentní na $(0, 1]$, zatímco $u_k(t) = t^n$, $t \in (0, 1]$ je nerostoucí posloupnost stejně omezených funkcí; proto podle Abelovy podmínky z Věty 1.2.7 řada konverguje k funkci f , která je spojitá vzhledem k intervalu $(0, 1]$. $\square$

Poznámka 1.3.3. Předcházející tvrzení je zajímavé v případě, kdy řada v bodě ζ *konverguje neabsolutně*, tj. leží-li bod ζ na konvergenční kružnici mocninné řady $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$. Při absolutní konvergenci jeho význam klesá, protože pak je f spojitá vzhledem k uzavěru kruhu $U(0, R)$. Pro sčítací metodu je podstatné, že příslušná *limita může existovat i v případě, že řada $\sum a_n \zeta^n$ diverguje*. Pro označení zobecněného součtu obdrženého touto metodou užíváme označení (A)- $\sum$: je tedy

$$(A)\text{-}\sum_{k=0}^{\infty} a_k := \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right),$$

pokud existuje vlastní (jednostranná) limita na pravé straně rovnosti. Poznamenejme na závěr, že dnes existují sčítací metody, pomocí kterých lze „téměř“ úvodní Eulerovy představy o „součtu“ mocninné řady realizovat: Velmi zhruba řečeno, mocninná řada lze sečíst k hodnotě funkce, pomocí níž je definována, v tzv. Mittag-Löfferově hvězdě, ne však všude v $\mathbb{C}$, kde je tato funkce konečná.

1.4 Integrace

První hlubší poznatky o integrálu jsou těsně spjaty s teorií Fourierových a trigonometrických řad. V době, ze které pocházejí první poznatky o (bodové) konvergenci Fourierových řad, byl k dispozici prakticky pouze integrál z funkce spojitě na omezeném uzavřeném intervalu a zacházelo se s ním v mnoha směrech spíše intuitivně než na podkladě rozvinuté teorie.

Vznik rozvinutější teorie je spojen se jménem B. RIEMANNA (1826–1866), který v práci [70], věnované trigonometrickým řadám, tzv. *Riemannův integrál* definoval. Již Weierstrass si uvědomoval, že tento integrál je nedostačující, avšak k dalšímu mezníku dospěl r. 1903 na základě mnoha dílčích výsledků H. L. LEBESGUE (1875–1941). Jím zavedený *Lebesgueův integrál* je dnes nepostradatelným nástrojem každého matematika. Některé základní poznatky o těchto integrálech připomeneme.

Riemann byl první, kdo zkoumal systém všech funkcí, pro které má běžná jím užívaná *součtová definice* integrálu $\int_a^b f$ smysl. Není příliš obtížné dokázat existenci Riemannova integrálu z každé funkce f spojitě na intervalu $[a, b]$ (využívá se stejnoměrná spojitost f a důkaz se prezentuje již v základním kurzu matematické analýzy). Užívá se přitom této jednoduché nutné a postačující podmínky: Riemannův integrál $\int_a^b f$ existuje, právě když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje takové dělení $D = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ intervalu $[a, b]$, pro které je rozdíl mezi horním součtem $S(f, D)$ a dolním součtem $s(f, D)$ libovolně malý. Označíme-li

$$m_k = \inf\{f(t); t \in [t_{k-1}, t_k]\}, \quad M_k = \sup\{f(t); t \in [t_{k-1}, t_k]\},$$

a χ_k charakteristickou funkci intervalu (t_{k-1}, t_k) , pak jsou funkce

$$g_D(t) = \sum_{k=1}^n m_k \chi_k(t), \quad G_D(t) = \sum_{k=1}^n M_k \chi_k(t), \quad t \in [a, b] \setminus D$$

definovány všude až na konečnou množinu D a jejich (Riemannovy) integrály jsou rovny právě součtům $s(f, D)$ a $S(f, D)$. V bodech množiny D existují jednostranné limity obou

těchto funkcí; rozšíříme-li g_D v těchto bodech menší z jednostranných limit v tomto bodě a G_D analogicky větší z těchto limit, hodnoty integrálů se nezmění a platí

$$g_D \leq f \leq G_D \quad \text{a} \quad \int_a^b g_D \leq \int_a^b f \leq \int_a^b G_D.$$

Takové funkce f , pro které lze $[a, b]$ rozložit na *konečný počet* disjunktních intervalů, na kterých je f konstantní, nazýváme *po částech konstantní*. Není obtížné nahlédnout, že popsaným postupem lze sestavit posloupnost funkcí $\{g_k\}$, které jsou po částech konstantní, s vlastností $g_k \Rightarrow f$ na $[a, b]$. Zřejmě pak platí i $\int_a^b g_k \rightarrow \int_a^b f$, a také

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b |g_k - f| = 0. \quad (1.10)$$

Obecněji, pro riemannovsky integrovatelnou funkci $f \in \mathcal{R}([a, b])$ lze sestavit analogicky posloupnost $\{g_k\}$ po částech konstantních funkcí tak, že opět platí (1.10). S těmito vlastnostmi Riemannova integrálu vystačíme.

Připojíme několik poznámek o Lebesgueově integrálu. V teorii Lebesgueova integrálu se pracuje s pojmem *skoro všude*, tedy všude až na množinu Lebesgueovy míry 0. Množiny Lebesgueovy míry 0 jsou takové množiny, které lze pokrýt *spočetně mnoha* otevřenými intervaly s libovolně malým součtem jejich délek. Podrobněji: množina $M \subset \mathbb{R}$ má Lebesgueovu míru 0, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existují otevřené intervaly $(a_k, b_k) \subset \mathbb{R}$ takové, že zároveň je

$$M \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k) \quad \text{a} \quad \sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k) < \varepsilon.$$

Je známo, že funkce f omezená na $[a, b]$ má Riemannův integrál na $[a, b]$, *právě když* je na $[a, b]$ skoro všude spojitá, tj. množina jejích bodů nespojitosti v $[a, b]$ má Lebesgueovu míru rovnou 0. Změníme-li funkci f na množině míry 0, nezmění se nic ani na existenci, ani na hodnotě Lebesgueova integrálu z f . Příkladem množin míry 0 jsou konečné a spočetné množiny. Lebesgueův integrál ze známé Dirichletovy funkce (charakteristické funkce množiny $\mathbb{Q}$) přes jakýkoli interval v $\mathbb{R}$ je roven 0, i když je nespojitá všude v $\mathbb{R}$.

A ještě malé upozornění: Lebesgueův integrál „pokrývá“ Riemannův, tedy kdykoli existuje Riemannův integrál z f , existuje i Lebesgueův integrál z f a jsou si rovny. Na druhé straně však „nepokrývá“ integrál Newtonův, i když ho často prostřednictvím Newtonova integrálu počítáme. Existuje-li integrál z f v Newtonově smyslu a současně *existuje* i Lebesgueův integrál z f , jsou si rovny. Důležitou roli mají v teorii Lebesgueova integrálu tzv. (lebesgueovsky) *měřitelné množiny*. Jsou to ty množiny v $\mathbb{R}$, kterým umíme přiřadit jejich *Lebesgueovu míru* (zatím jsme poznali pouze ty, které měly Lebesgueovu míru rovnou 0). Lebesgueovu míru množiny $M \subset \mathbb{R}$ si můžeme představit jako hodnotu Lebesgueova integrálu integrálu $\int_{-\infty}^{\infty} \chi_M$ z charakteristické funkce χ_M množiny M .

Velmi přirozený a u nás v České republice patrně nejčastěji užívaný přístup k vybudování teorie Lebesgueova integrálu je v jistém smyslu opačný: Nejprve se vybuduje *Lebesgueova míra*, což je nezáporná množinová funkce zobecňující délku intervalu, která je přitom definována na poměrně rozsáhlém systému množin. Tento systém je uzavřený na množinové operace sjednocení a průniku, a také doplňku (dokonce na sjednocení a průnik *spočetně mnoha* množin tohoto systému); tvoří totiž tzv. σ -algebru a jeho prvky jsou

právě již zmínené měřitelné množiny. Pomocí míry na této σ -algebře se pak v několika krocích zavede Lebesgueův integrál. Pokud by se čtenář chtěl hlouběji poučit o Lebesgueově integrálu, může sáhnout např. po textech [20], [42] nebo [71].

Množinu všech (lebesgueovsky) měřitelných funkcí definovaných (skoro všude) na měřitelné množině $M \subset \mathbb{R}^m$, pro něž je konečný integrál

$$\int_M |f(v)|^p d\mu(v), \quad (1.11)$$

značíme $\mathcal{L}^p(M)$. Toto označení však vyžaduje komentář. Změna funkce na podmnožině množiny M nulové míry neovlivní hodnotu jejího integrálu na M , proto můžeme pracovat s funkcemi, které na takové nulové podmnožině nejsou vůbec definovány. Protože však zavádíme pro funkce s konečným integrálem (1.11) pomocí rovnosti

$$\|f\|_p := \left(\int_M |f(v)|^p d\mu(v) \right)^{1/p} \quad (1.12)$$

normu, musíme uzavřít ještě další úmluvu: na množině těchto funkcí zavedeme pomocí rovnosti skoro všude ekvivalenci a prostor $\mathcal{L}^p(M)$ chápeme jako prostor těchto *tříd vzájemně ekvivalentních funkcí*. Tak dosáhneme toho, že nulovou normu má právě jen jediná třída funkcí, totiž funkcí, které jsou rovny nule skoro všude na M .

Tato množina je s obvyklými úmluvami o operacích (součet prvků $\mathcal{L}^p(M)$ i jejich násobky jsou definovány skoro všude na M a jsou to prvky $\mathcal{L}^p(M)$) a o třídách funkcí, které jsou si rovny skoro všude na M , normovaným lineárním prostorem, definujeme-li na něm normu pomocí rovnosti (1.12). Obecněji, v m -rozměrném prostoru $\mathbb{R}^m$ tvoří prostor spojitých funkcí s kompaktním nosičem $\mathcal{C}_k(\mathbb{R}^m)$ hustou podmnožinu prostoru $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m)$. Speciálně platí toto tvrzení:

Věta 1.4.1. *Je-li f reálná funkce z $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ nebo obecněji z $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$, pak existuje k libovolnému $\varepsilon > 0$ taková spojitá funkce g s kompaktním nosičem, že je*

$$\|f - g\|_p = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f - g|^p dt \right)^{1/p} < \varepsilon.$$

Uvedená aproximační věta patří ke standardním tvrzením, které se v teorii integrálu probírají; srv. [71], Věta 3.14¹⁾.

Prostor $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m)$ všech (tříd) lebesgueovsky integrovatelných funkcí na $\mathbb{R}^m$ lze interpretovat jako zúplnění prostoru $\mathcal{C}_k(\mathbb{R}^m)$; z tohoto zorného úhlu se jeví tvrzení předcházející věty jako velmi přirozené.

Trochu podrobněji pro jednorozměrný případ: Je-li $\mathcal{C}_k(\mathbb{R})$ systém všech spojitých funkcí na $\mathbb{R}$, které mají kompaktní nosič, lze systém $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ všech lebesgueovsky integrovatelných funkcí na $\mathbb{R}$ interpretovat jako zúplnění metrického prostoru $\mathcal{C}_k(\mathbb{R})$ v metrice

$$\rho(f, g) = \int |f(t) - g(t)| dt,$$

kde integrujeme přes libovolný kompaktní interval, který obsahuje oba nosiče funkcí f, g . Toto zároveň ukazuje jednu z mnoha cest, pomocí nichž se dá Lebesgueův integrál na $\mathbb{R}^1$ zavést. Podotýkáme, že se budeme dále výhradně zabývat Lebesgueovým integrálem vzhledem k „jednorozměrné“ Lebesgueově míře.

Podrobně je tato partie zpracována např. v [71] nebo v jiných textech věnovaných teorii míry a integrálu. Předpokládáme, že čtenář je s touto látkou obeznámen.

¹⁾ Pokud čtenář nezná tuto větu, může zvážit její vztah k Luzinově větě.

1.5 Prostory funkcí

V dalším textu se setkáme s více metrickými, resp. normovanými lineárními prostory. To je důvod, proč připomeneme některá tvrzení o metrických prostorech a o normovaných lineárních prostorech. Je-li K kompaktní metrický prostor, tvoří systém všech (reálných nebo komplexních) funkcí spojitých na K lineární prostor, který budeme značit $\mathcal{C}(K)$. Definujeme-li pro $f \in \mathcal{C}(K)$ obvyklým způsobem „supremovou“ normu

$$\|f\| := \sup\{|f(t)|; t \in K\}, \quad (1.13)$$

je prostor $\mathcal{C}(K)$ vzhledem k této normě *úplný* a je tedy Banachovým prostorem. Každá funkce $f \in \mathcal{C}(K)$ je na K omezená a je na K také stejnoměrně spojitá, tj. pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé dva body $x, y \in K$, jejichž vzdálenost je menší než δ , platí

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Je-li funkce f reálná, nabývá na K své nejmenší a největší hodnoty.

V předcházející části připomenuté normované lineární prostory $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ jsou jedním z často užívaných matematických nástrojů; my je nejvíce budeme potřebovat pro případ $p = 1$, kdy se horní index zpravidla vynechává a píše se stručněji pouze $\mathcal{L}(\mathbb{R})$.

Systém všech *spojitých* komplexních nebo reálných 2π -periodických funkcí na $\mathbb{R}$ budeme značit $\mathcal{C}(2\pi)$; je to zřejmě lineární prostor. Pokud to situace bude vyžadovat, výslovně upozorníme na to, že pracujeme pouze s reálnými funkcemi. Normu na tomto prostoru definujeme vzorcem

$$\|f\| := \sup\{|f(t)|; t \in \mathbb{R}\} = \sup\{|f(t)|; t \in [0, 2\pi]\}.$$

Je zřejmé, že supremum lze brát vzhledem k libovolnému intervalu o délce alespoň 2π . Podobně budeme v případě potřeby užívat označení $\mathcal{R}(2\pi)$ pro prostor 2π -periodických funkcí, které jsou lokálně *riemannovsky* integrovatelné na $\mathbb{R}$.

Dále budeme užívat označení $\mathcal{L}^p(2\pi)$ pro systém všech (lebesgueovsky) měřitelných 2π -periodických funkcí f lokálně integrovatelných na $\mathbb{R}$. Pro ně pak definujeme v případě $1 \leq p < \infty$ normu

$$\|f\|_p := \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p dt \right)^{1/p}. \quad (1.14)$$

Prostor (tříd) funkcí, který značíme $\mathcal{L}^p(2\pi)$, je *úplný* vzhledem k normě, zavedené v (1.14). Toto tvrzení platí pro všechna $p \in [1, \infty)$. Podrobněji opět viz [71].

Jsou-li X, Y normované lineární prostory, pak je lineární zobrazení $L: X \rightarrow Y$ spojitě, právě když je číslo

$$\|L\| := \sup\{\|Lx\|_Y; \|x\|_X \leq 1\}$$

konečné. Jak napovídá užití označení, lze takto definovat na prostoru všech spojitých lineárních zobrazení z X do Y normu, čímž opět vznikne normovaný lineární prostor. Snadno se dokáže, že pak je

$$\|L\| = \sup\{\|Lx\|; \|x\| < 1\} = \sup\{\|Lx\|; \|x\| = 1\} = \sup\{\|Lx\|/\|x\|; x \neq 0\}.$$

Zobrazení T obecného prostoru X do prostoru Y nazýváme často *operátor*. Jsou-li to např. prostory *reálných* funkcí a pro T z nerovnosti $f \geq 0$ vyplývá $Tf \geq 0$, pak říkáme, že *operátor T je nezáporný* (pojem je možno zavést i za obecnější situace).

Pokud jsou X a Y navíc lineární prostory, pak z nezápornosti omezeného lineárního operátoru $T: X \rightarrow Y$ vyplývá jeho monotonie, tj. pro $f, g \in X$, $f \leq g$, platí též $Tf \leq Tg$. Jestliže totiž pro $f, g \in X$ platí $f \leq g$, pak $g - f \geq 0$, takže je i $Tg - Tf = T(g - f) \geq 0$ a tvrzení platí. Za stejných předpokladů lze dokázat, že pro každou funkci $f \in X$ a každé $y \in Y$ je

$$|Tf(y)| \leq (T(|f|))(y). \quad (1.15)$$

K tomu stačí následující úvaha: libovolně zvolenou $f \in X$ vyjádříme jako rozdíl kladné a záporné části, tj. $f = f^+ - f^-$. Z monotonie T dostaneme

$$Tf = Tf^+ - Tf^- \leq Tf^+ + Tf^- = T(f^+ + f^-) = T(|f|).$$

Podobnou úvahou pro $-f$ dostaneme $-Tf = T(-f) \leq T(|f|)$, z čehož již snadno obdržíme $|Tf| = \sup\{Tf, -Tf\} \leq T(|f|)$; tím je nerovnost (1.15) dokázána.

Budeme též potřebovat jednoduchou variantu tvrzení, kterému se zpravidla říká princip stejnoměrné omezenosti. Je jedním ze základních tvrzení lineární funkcionální analýzy. K jeho důkazu budeme potřebovat jednu variantu Baireovy věty, kterou pouze připomeneme:

Věta 1.5.1 (Baire 1899). *Nechť (P, ρ) je úplný metrický prostor a nechť $\{G_k\}$ je posloupnost otevřených podmnožin prostoru P hustých v P . Potom je průnik $G := \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$ hustou podmnožinou P .*

Důkaz stručně připomeneme. Stačí dokázat, že pro libovolně zvolenou neprázdnou otevřenou množinu $U \subset P$ existuje $\zeta \in G \cap U$. Induktivně se sestrojí posloupnost uzavřených koulí $K_n \subset \bigcup_{k=1}^n (G_k \cap U)$ tak, že $\{K_n\}$ je neklesající posloupnost uzavřených množin s průměry $\text{diam}(K_n) \rightarrow 0$. Průnikem množin této posloupnosti je podle Cantorovy věty jednobodová množina $\{\zeta\}$; podrobněji viz [71], s. 113 nebo [32], s. 76.

Poznámka 1.5.2. Ač je následující věta téměř výhradně spojována se jmény S. BANACH a H. STEINHAUS, objevil ji H. L. LEBESGUE r. 1908 v souvislosti se studiem Fourierových řad. Banach a Steinhaus si uvědomili možnost jejího použití v daleko obecnějším kontextu. Jindy bývá nazývána (Banach-Steinhausův) *princip stejnoměrné omezenosti*. Ukazuje, že za určitých předpokladů „bodová omezenost“ lineárních funkcionálů dává stejnoměrnou omezenost jejich norem.

Označení 1.5.3. Je-li X normovaný lineární prostor, pak lineární prostor všech spojitých lineárních funkcionálů f na X , na kterém definujeme normu

$$\|f\| := \sup\{|f(x)|; x \in X, \|x\|_X \leq 1\}, \quad (1.16)$$

značíme X^* . Tento prostor X^* nazýváme *duální prostor k X* .

Věta 1.5.4 (Banach, Steinhaus 1927*). *Nechť X je Banachův prostor (tedy úplný normovaný lineární prostor). Nechť $L_n \in X^*$, $n \in \mathbb{N}$. Potom nastává právě jedna ze dvou možností:*

- (a) *existuje číslo $M < \infty$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $\|L_n\|_{X^*} < M$, nebo*
- (b) *množina $\{x \in X; \sup_n |L_n(x)| = \infty\}$ je množinou typu G_δ a je hustá v X .*

Důkaz Věty 1.5.1. Použijeme Baireovu větu. Pro každé $m \in \mathbb{N}$ položme

$$S_m = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{x \in X; |L_n x| \leq m\}.$$

Protože L_n jsou spojité, je S_m průnikem (spočetného) systému uzavřených množin; množiny S_m jsou proto uzavřené. Jejich doplňky $G_m = X \setminus S_m$ jsou otevřené množiny. Platí

$$X \setminus \bigcup_{m=1}^{\infty} S_m = \bigcap_{m=1}^{\infty} (X \setminus S_m) = \bigcap_{m=1}^{\infty} G_m,$$

a podle Baireovy věty nastane jedna ze dvou možností. Jestliže jsou všechny množiny G_m husté, je i jejich průnik podle Baireovy věty hustá množina v X a nastane případ (b).

Pokud tento případ nenastane, alespoň jedna z množin $G_m = X \setminus S_m$ není hustá, a tedy nějaká z množin S_m je „někde hustá“. Existují proto $x_0 \in X$, $r > 0$ a $k \in \mathbb{N}$ taková, že je

$$B(x_0, r) \subset S_k.$$

Zvolme libovolně nenulový prvek $x \in X$ a položme

$$z = x_0 + \frac{r}{2} \frac{x}{\|x\|}.$$

Je tedy $\|x_0 - z\| = r/2 < r$, a proto

$$|L_n z| < k \quad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N}.$$

Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ tedy platí

$$|L_n z| = \left| L_n \left(x_0 + \frac{r}{2} \frac{x}{\|x\|} \right) \right| = \left| L_n x_0 + \frac{r}{2\|x\|} L_n x \right| < k.$$

Pomocí trojúhelníkové nerovnosti odtud dostáváme

$$|L_n x|(r/2\|x\|) - |L_n x_0| \leq k,$$

a po úpravě obdržíme odhad

$$|L_n x| \leq \|x\|(2/r)(k + |L_n x_0|) \leq (4k/r)\|x\|.$$

Odhad platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a všechna $x \in X$, čímž je důkaz dokončen. $\square$

1.6 Funkce s konečnou variací

Systém všech monotónních funkcí na intervalu $[a, b]$ má jistou vadu: netvoří lineární prostor. Existuje však jednoduchá pomoc, budeme pracovat s prostorem, který všechny monotónní funkce obsahuje a je přitom mimořádně jednoduchý.

Definice 1.6.1. Nechť $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Pro komplexní funkci f definovanou na $[a, b]$ a dělení $D = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ intervalu $[a, b]$ klademe

$$V(f, D) := \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| .$$

Variací nebo *totální variací* funkce f na intervalu $[a, b]$ nazýváme číslo (ne nutně z $\mathbb{R}$, hodnota ∞ se připouští)

$$V_a^b f := \sup \{ V(f, D) ; D \in \mathcal{D}([a, b]) \} ,$$

kde $\mathcal{D}([a, b])$ je množina všech dělení D intervalu $[a, b]$. Je-li $V_a^b f < \infty$, říkáme, že f má *konečnou variaci* na $[a, b]$. Množinu všech funkcí s konečnou variací na $[a, b]$ značíme $BV([a, b])$.

Zřejmě je $V_a^b f \geq 0$. Doplňme ještě definici pro degenerovaný interval typu $[a, a]$: v tom případě klademe $V_a^a f = 0$. Standardní technika práce s děleními a supremem dává následující tvrzení:

Lemma 1.6.2. Nechť $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $c \in [a, b]$ a nechť f, g jsou komplexní funkce na $[a, b]$ a $\alpha \in \mathbb{C}$. Potom

$$(a) \quad V_a^b(f + g) \leq V_a^b f + V_a^b g ,$$

$$(b) \quad V_a^b f = V_a^c f + V_c^b f ,$$

$$(c) \quad V_a^b(\alpha f) = |\alpha| V_a^b f .$$

Důkaz. Protože se podobné úvahy provádějí např. v souvislosti s Riemannovým integrálem, důkaz pouze naznačíme. Je-li $D = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ dělení intervalu $[a, b]$, platí pro jeho intervaly dělení

$$|(f(x_k) + g(x_k)) - (f(x_{k-1}) + g(x_{k-1}))| \leq |f(x_k) - f(x_{k-1})| + |g(x_k) - g(x_{k-1})| ,$$

z čehož po sečtení a přechodu k supremu na pravé straně dostaneme

$$V(f + g, D) \leq V_a^b f + V_a^b g .$$

Dalším přechodem k supremu na levé straně dostaneme (a). Podobně (srovnejte s větami o Riemannově integrálu) se prací s děleními obsahujícími bod c dostane rovnost (b): Zvolme dělení $D = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ a ukažme, že je

$$V(f, D) \leq V_a^c f + V_c^b f ;$$

můžeme bez na újmy obecnosti předpokládat, že $\{c\} \subset D$, protože z platnosti předchozí nerovnosti pro zjemnění $\{c\} \cup D$ plyne jeho platnost i pro D . Položme dále $D \cap [a, c] = D_1$, $D \cap [c, b] = D_2$. Zřejmě

$$V(f, D) = V(f, D_1) + V(f, D_2) \leq V_a^c f + V_c^b f ,$$

z čehož obdržíme

$$V_a^b f \leq V_a^c f + V_c^b f.$$

K důkazu obrácené nerovnosti zvolme libovolně $\varepsilon > 0$ a taková dělení $D_1 \in \mathcal{D}([a, c])$, $D_2 \in \mathcal{D}([c, b])$ tak, aby

$$V(f, D_1) > V_a^c f - \varepsilon/2, \quad V(f, D_2) > V_c^b f - \varepsilon/2,$$

takže pro $D = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\} = D_1 \cup D_2$ dostaneme

$$V_a^b f \geq V(f, D) = V(f, D_1) + V(f, D_2) > V_a^c f - \varepsilon/2 + V_c^b f - \varepsilon/2,$$

a tudíž i

$$V_a^b f \geq V_a^c f + V_c^b f;$$

tím jsme dokončili důkaz části (b). Část tvrzení označená (c) je zřejmá. $\square$

Důsledek 1.6.3. *Systém $BV([a, b])$ tvoří vektorový prostor obsahující funkce monotónní na intervalu $[a, b]$. Lze na něm zavést normu např. rovností*

$$\|f\| := |f(a)| + V_a^b f \quad (1.17)$$

Definice 1.6.4. Pro funkci $f \in BV([a, b])$ zavedeme její *neurčitou variaci* (užíváme historický název, který není příliš šťastně zvolen) vzorcem

$$g(x) := V_a^x f, \quad x \in [a, b].$$

Věta 1.6.5 (Jordan 1881). *Funkce f je prvkem prostoru $BV([a, b])$, právě když existují neklesající funkce $f_j : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $j = 1, 2, 3, 4$ takové, že*

$$f = (f_1 - f_2) + i(f_3 - f_4). \quad (1.18)$$

Důkaz. Neklesající funkce $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ má konečnou variaci $V_a^b f = f(b) - f(a)$; proto stačí, s ohledem na předešlé tvrzení, nalézt pouze rozklad $f \in BV([a, b])$ do tvaru (1.18) s funkcemi $f_j \geq 0$ neklesajícími na $[a, b]$.

Předpokládejme nejprve, že f je reálná funkce z $BV([a, b])$ a že g je její neurčitá variace. Zřejmě je $g(b) < \infty$ a pro $a \leq x < y \leq b$ platí

$$0 \leq g(x) \leq g(x) + V_x^y f = g(y) \leq g(b),$$

takže g je nezáporná a neklesající na $[a, b]$. Položme $h = g - f$. Potom pro $a \leq x < y \leq b$ platí

$$h(y) - h(x) = g(y) - g(x) - (f(y) - f(x)) \geq V_x^y f - |f(y) - f(x)| \geq 0,$$

čímž je pro reálnou funkci f tvrzení dokázáno. Rozkladem na reálnou a imaginární část dostaneme tvrzení pro komplexní funkci f . $\square$

Poznámka 1.6.6. Důsledkem věty o existenci jednostranných limit funkce monotónní na $[a, b]$ ve všech bodech $x \in [a, b]$ je, že pro každou funkci $f \in BV([a, b])$ existují i jednostranné limity $f(x+)$, $f(x-)$ ve všech vnitřních bodech $x \in (a, b)$. Přitom množina bodů nespojitosti funkce f je (nejvýše) spočetná.

Položíme-li

$$\begin{aligned} t(x) &:= f(x+) - f(x), & x \in [a, b), \\ s(x) &:= f(x) - f(x-), & x \in (a, b], \end{aligned}$$

lze definovat

$$S(x) := \sum_{a \leq \alpha < x} t(\alpha) + \sum_{a < \alpha \leq x} s(\alpha) \quad (1.19)$$

a rozložit funkci $f \in BV([a, b])$ na součet

$$f(x) := C(x) + S(x),$$

kde C je spojitá funkce s konečnou variací a S je funkce skoků, která má spočetnou množinu bodů nespojitosti²⁾.

1.7 Weierstrassova věta o aproximaci

Tvrzení o stejnoměrné aproximaci spojitě funkce na intervalu $[a, b]$ polynomy je velmi důležité. O jeho historii a různých metodách jeho důkazu se lze poučit v [79] nebo v obsažnějším článku [68]. Weierstrassova věta je dokázána jiným způsobem např. v [78].

Nejprve dokážeme speciální případ Weierstrassovy věty o aproximaci *reálné* spojitě funkce f na intervalu $[0, 1]$. Použitý důkaz je založen na myšlence pocházející od S. N. BERNSTEINA (1880–1968). Ten definoval pro $f \in [0, 1]$ aproximující (Bernsteinovy) polynomy³⁾ $B_n f$:

$$B_n f : x \mapsto \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \quad x \in [0, 1]. \quad (1.20)$$

Budeme potřebovat toto pomocné tvrzení:

Lemma 1.7.1. *Nechť $f_k(t) = t^k$, $t \in [0, 1]$, pro $k = 0, 1, 2$. Potom Bernsteinovy polynomy $B_n f_k$ konvergují pro $n \rightarrow \infty$ k f_k stejnoměrně na intervalu $[0, 1]$.*

Důkaz. Rovnost $B_n f_0 = f_0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ plyne z binomické věty. Uvažme dále, že pro $1 \leq k \leq n$ je

$$\frac{k}{n} \binom{n}{k} = \frac{k}{n} \cdot \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} = \binom{n-1}{k-1}. \quad (1.21)$$

²⁾ Všechny nespojitosti funkce S jsou navíc nespojitostmi 1. druhu. Čtenáře, který se nesetkal se zobecněnými řadami, odkazujeme např. na [41].

³⁾ Užíváme obvyklé transkripce; jde však o ruského, resp. sovětského matematika, a v takových případech transkripce v literatuře značně kolísá.

Dosazením f_1 do (1.20) dostaneme pomocí rovnosti (1.21)

$$\begin{aligned} B_n f_1(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = x \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-k} = \\ &= x \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} x^j (1-x)^{(n-1)-j} = x \cdot 1 = f_1(x), \quad x \in [0, 1], \end{aligned}$$

takže platí $B_n f_1 = f_1$. Konečně pomocí (1.21) spočteme pro $1 \leq k \leq n$

$$\left(\frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} = \frac{k}{n} \binom{n-1}{k-1} = \frac{k-1}{n} \binom{n-1}{k-1} + \frac{1}{n} \binom{n-1}{k-1}; \quad (1.22)$$

první člen posledního součtu pro $2 \leq k \leq n$ ještě upravíme:

$$\frac{k-1}{n} \binom{n-1}{k-1} = \frac{n-1}{n} \frac{k-1}{n-1} \binom{n-1}{k-1} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \binom{n-2}{k-2}. \quad (1.23)$$

Po dosazení f_2 do (1.20) obdržíme pro všechna $x \in [0, 1]$

$$B_n f_2(x) = \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

a pomocí (1.22) a (1.23) jednoduchou úpravou postupně dostaneme

$$\begin{aligned} B_n f_2(x) &= \left(1 - \frac{1}{n}\right) \sum_{k=2}^n \binom{n-2}{k-2} x^k (1-x)^{n-k} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k} = \\ &= \left(1 - \frac{1}{n}\right) x^2 \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} x^j (1-x)^{(n-2)-j} + \frac{x}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} x^j (1-x)^{(n-1)-j} = \\ &= \left(1 - \frac{1}{n}\right) x^2 + \frac{x}{n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) f_2(x) + \frac{1}{n} f_1(x). \end{aligned}$$

Odtud plyne $B_n f_2 \rightrightarrows f_2$ na $[0, 1]$. □

Nyní již můžeme dokázat slíbený speciální případ Weierstrassovy věty:

Věta 1.7.2 (Bernstein 1912). *Pro každou $f \in \mathcal{C}([0, 1])$ platí*

$$B_n f \rightrightarrows f \text{ na } [0, 1].$$

Důkaz. Snadno nahlédneme, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $x \in [0, 1]$ platí (používáme postupů z Lemmatu 1.7.1)

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \\ &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} - 2x \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + x^2 = \\ &= \left(1 - \frac{1}{n}\right) x^2 + \frac{1}{n} x - 2x \cdot x + x^2 = \frac{x(1-x)}{n} \leq \frac{1}{4n}. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Nechť nyní je $n \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$ a $x \in [0, 1]$. Označme $F = F_x$ množinu všech takových $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, pro něž $|(k/n) - x| \geq \delta$ a použijme předcházející odhad (1.24). Potom postupně dostaneme

$$\sum_{k \in F} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{\delta^2} \sum_{k \in F} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{4n\delta^2}. \quad (1.25)$$

Je-li nyní $f \in \mathcal{C}([0, 1])$ a $\varepsilon > 0$, pak ze stejnoměrné spojitosti funkce f na intervalu $[0, 1]$ plyne existence takového $\delta > 0$, pro které $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$, jakmile $x, y \in [0, 1]$, $|x - y| < \delta$. Připomeňme, že s ohledem na důkaz Lemmatu 1.7.1 pro f_0 platí pro každé $n \in \mathbb{N}$ a každé $x \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} \left| f(x) - \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right| &= \left| \sum_{k=0}^n \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right| \leq \\ &\leq \sum_{k=0}^n \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}. \end{aligned}$$

Zvolme libovolně $x \in [0, 1]$ a označme $F = F_x$ množinu zavedenou v předchozím odstavci. Potom

$$\left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad k \notin F, \quad \text{a} \quad \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq 2\|f\|, \quad k \in F.$$

Odtud dostaneme odhad

$$\begin{aligned} |f(x) - B_n f(x)| &\leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k \notin F} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + 2\|f\| \sum_{k \in F} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \cdot 1 + 2\|f\| \cdot \frac{1}{4n\delta^2}, \end{aligned}$$

ze kterého již vyplývá, že pro všechna n , pro něž je $n > \|f\|/\varepsilon\delta^2$, platí $|f(x) - B_n f(x)| \leq \varepsilon$, a proto je $\|B_n f - f\| \leq \varepsilon$. $\square$

Poznámka 1.7.3. Tento relativně elementární důkaz je modifikací důkazu, který předložil r. 1912 v [9] Bernstein. Lemma 1.7.1 lze interpretovat „pravděpodobnostně“: Jde v něm o binomické rozdělení a rovnosti

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx, \quad \sum_{k=0}^n (k - nx)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx(1-x)$$

dávají jeho *střední hodnotu a rozptyl*. Na tomto místě není vůbec zřejmé, proč nelze místo polynomů $B_n f$ volit interpolační polynomy, nabývající v bodech k/n , $k = 0, \dots, n$, stejných hodnot jako f . Avšak právě Bernstein ukázal, že např. pro funkci $f(x) = |x|$ a interval $[-1, 1]$ tak dostaneme posloupnost polynomů, která k funkci f konverguje *pouze* ve třech bodech $-1, 0, 1$.

Nyní ukážeme, jak ze zdánlivě velmi speciálního znění Weierstrassovy věty pro interval $[0, 1]$ dostaneme její obvyklou verzi:

Věta 1.7.4 (Weierstrass, 1885). *Pro každou komplexní funkci $f \in \mathcal{C}([a, b])$ existuje posloupnost polynomů $\{P_n\}$ taková, že $\|f - P_n\| \rightarrow 0$ pro $n \rightarrow \infty$; funkce f je tedy limitou stejnoměrně konvergentní posloupnosti polynomů.*

Důkaz. Popíšeme nyní jednotlivá zjednodušení, umožňující obdržet Větu 1.7.4 z již dokázané Věty 1.7.2.

(a) Je-li f komplexní funkce na intervalu $[a, b]$, $f = f_1 + if_2$, kde

$$f_1(x) = \operatorname{Re} f(x), \quad f_2(x) = \operatorname{Im} f(x), \quad x \in [a, b],$$

a g_1, g_2 jsou reálné funkce na $[a, b]$ pro něž $|f_k - g_k| < \varepsilon$, $k = 1, 2$, pak

$$\|(f_1 + if_2) - (g_1 + ig_2)\| \leq \sqrt{(f_1 - g_1)^2 + (f_2 - g_2)^2} \leq \sqrt{2} \cdot \varepsilon < 2\varepsilon.$$

Funkce $g := g_1 + ig_2$ je (obecně komplexní) funkce, přičemž $\|f - g\| < 2\varepsilon$.

(b) Jsou-li g_1, g_2 polynomy s reálnými koeficienty, je $g_1 + ig_2$ opět polynom s komplexními koeficienty. Z uvedených dvou postřehů plyne, že stačí tvrzení stačí dokázat pro reálné spojitě funkce a polynomy s koeficienty z $\mathbb{R}$.

(c) Je-li $f \in \mathcal{C}([a, b])$, je

$$g(t) := f\left(a + \frac{b-a}{d-c}(t-c)\right), \quad t \in [c, d],$$

spojitá funkce na intervalu $[c, d]$. Jestliže je P takový polynom, pro který platí $|g(t) - P(t)| < \varepsilon$ pro všechna $t \in [c, d]$, potom pro funkci

$$Q(x) = P\left(c + \frac{d-c}{b-a}(x-a)\right), \quad x \in [a, b],$$

je

$$|f(x) - Q(x)| < \varepsilon, \quad x \in [a, b].$$

Přitom $Q(x) = P(c + (x-a)(d-c)/(b-a))$ je opět polynom v x .

Stačí tedy tvrzení dokázat pouze pro nějaký interval $[a, b]$. To jsme však již udělali pro interval $[0, 1]$ ve Větě 1.7.2. $\square$

1.8 Korovkinova věta

Weierstrassova věta má v teorii aproximace výlučné postavení. Uveďme citát z dnes již klasické učebnice [39]: *Pokud by bylo nutné označit jedinou větu v teorii aproximace jako důležitější než všechny ostatní, byla by to pravděpodobně Weierstrassova věta o aproximaci. Její vliv je pocítován nejen užíváním jistého nástroje analýzy, ale i mnohem hloubějším způsobem: slouží jako lákadlo pro matematiky, aby ji zobecňovali nebo hledali jiné její důkazy (Cheney (1966)). I samotný Bernsteinův důkaz věty posloužil jako odrazový můstek k dalším elegantním výsledkům.*

Následující elegantní tvrzení pochází od P. P. KOROVKINA (1913–1985) a bývá v literatuře nazýváno *věta o třech funkcích*:

Věta 1.8.1 (Korovkin (1953)). Jsou-li L_n , $n \in \mathbb{N}$, monotónní lineární zobrazení prostoru $\mathcal{C}([0, 1])$ do $\mathcal{C}([0, 1])$, pak jsou následující dvě podmínky ekvivalentní:

- (a) $L_n f \rightrightarrows f$ na $[0, 1]$ pro všechny funkce $f \in \mathcal{C}([0, 1])$,
- (b) $L_n f_j \rightrightarrows f_j$ na $[0, 1]$ pro funkce $f_j(x) = x^j$, $x \in [0, 1]$, $j = 0, 1, 2$.

Dokážeme jisté zobecnění této věty (srv. [62]), které nám umožní snadný přístup k dalším důležitým tvrzením. Nejdříve však připomeneme potřebné pojmy a zavedeme některá označení.

Označení 1.8.2. Nechť X značí kompaktní metrický prostor a $\mathcal{C}(X)$ Banachův prostor spojitých reálných funkcí na X se supremovou normou

$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)|; x \in X\}.$$

Pro $u \in \mathcal{C}(X)$ budeme značit $Z(u) := \{x \in X; u(x) = 0\}$.

Je-li $L : \mathcal{C}(X) \rightarrow \mathcal{C}(X)$ monotónní lineární operátor na $\mathcal{C}(X)$, potom pro všechna $x \in X$ z nerovnosti $|f(x)| \leq g(x)$, plyne nerovnost $-g(x) \leq f(x) \leq g(x)$. Z ní dostaneme

$$-Lg(x) \leq Lf(x) \leq Lg(x),$$

neboli nerovnost („základní odhad“)

$$|Lf(x)| \leq Lg(x), \quad x \in X. \quad (1.26)$$

Lemma 1.8.3. Je-li Y kompaktní metrický prostor a u, v nezáporné funkce z prostoru $\mathcal{C}(Y)$, pro něž je $Z(v) \subset Z(u)$, pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje takové $C = C(\varepsilon) > 0$, že pro všechna $y \in Y$ je

$$u(y) \leq \varepsilon + C v(y). \quad (1.27)$$

Důkaz. Je-li $K := \{y \in Y; u(y) \geq \varepsilon\}$, je K uzavřená a tedy kompaktní. Jestliže je $K = \emptyset$, nerovnost (1.27) je zřejmě splněna, můžeme tedy uvažovat pouze případ $K \neq \emptyset$. Pak ale $\min\{v(y); y \in K\} = m > 0$ a $\max\{u(y); y \in K\} = M < \infty$. Nyní stačí volit $C > 0$ tak, aby bylo $Cm > M$, tj. $C > M/m$. $\square$

Definice 1.8.4. Je-li $f \in \mathcal{C}(X)$, pak definujeme *diagonálu* $\Delta(f)$ funkce f rovností

$$\Delta(f) := \{(x, t) \in X \times X; f(x) = f(t)\}.$$

Je-li h nezáporná funkce z $\mathcal{C}(X \times X)$ taková, že $Z(h) \subset \Delta(f)$, nazývá se h *omezuující funkce* pro funkci f .

Je-li L nezáporný lineární operátor na $\mathcal{C}(X)$ a $h \in \mathcal{C}(X \times X)$, definujme pro každé $t \in X$

$$h_t(x) := h(x, t), \quad x \in X,$$

a pro h_t položíme $Lh_t(x) := L(h_t)(x)$, $x \in X$. Potom snadno dokážeme tvrzení:

Lemma 1.8.5. *Nechť X je kompaktní metrický prostor a nechť $f \in \mathcal{C}(X)$, přičemž h je omezující funkce pro f . Je-li $L_n : \mathcal{C}(X) \rightarrow \mathcal{C}(X)$ posloupnost nezáporných lineárních operátorů na $\mathcal{C}(X)$ taková, že*

- (a) $L_n 1 \rightrightarrows 1$ na X , a
- (b) $L_n h_t(t) \rightrightarrows 0$ na X ,

potom je $L_n f \rightrightarrows f$ na X .

Důkaz. Nechť pomocná funkce $u \in \mathcal{C}(X \times X)$ je definována předpisem

$$u(x, t) := |f(x) - f(t)|, \quad (x, t) \in X \times X.$$

Zřejmě je u nezáporná funkce a $Z(u) = \Delta(f)$. Protože je h omezující funkcí pro f , je $Z(h) \subset Z(u)$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Podle Lemmatu 1.8.3 najdeme $C > 0$ tak, aby

$$|f(x) - f(t)| = u(x, t) \leq \varepsilon + C h(x, t), \quad (x, t) \in X \times X.$$

Zvolme pevně $t \in X$ a uijíme základní odhad (1.26) pro nezáporné operátory L_n ; dostaneme tak:

$$|L_n f(x) - f(t) L_n 1(x)| \leq \varepsilon L_n 1(x) + C L_n h_t(x), \quad x \in X.$$

Nyní volíme $x = t$, a pomocí předcházející nerovnosti obdržíme jednoduchou úvahou

$$\begin{aligned} |L_n f(t) - f(t)| &= |L_n f(t) - f(t) L_n 1(t) + f(t) L_n 1(t) - f(t)| \leq \\ &\leq |L_n f(t) - f(t) L_n 1(t)| + |f(t)| |L_n 1(t) - 1| \leq \\ &\leq \varepsilon L_n 1(t) + C L_n h_t(t) + \|f\|_\infty |L_n 1(t) - 1|. \end{aligned}$$

Protože $C L_n h_t(t) \rightrightarrows 0$ na X a $\|f\|_\infty |L_n 1(t) - 1| \rightrightarrows 0$ na X , lze výraz v poslední nerovnosti vpravo při volbě vhodného $n \in \mathbb{N}$ odhadnout shora např. číslem 4ε , z čehož dostáváme $L_n f \rightrightarrows f$ na X . $\square$

Poznámka 1.8.6. Pro $f, g \in \mathcal{C}(X)$ a každé $\alpha \in \mathbb{R}$ platí inkluze

$$\Delta(f) \cap \Delta(g) \subset \Delta(f + g), \quad \Delta(f) \cup \Delta(g) \subset \Delta(f \cdot g), \quad \Delta(f) \subset \Delta(\alpha f),$$

takže pro každou nezápornou h tvoří systém všech funkcí $f \in \mathcal{C}(X)$, pro které je h omezující funkce, (*pod*) *algebru* v $\mathcal{C}(X)$. Proto lze podmínku $L_n 1 \rightrightarrows 1$ na X v Lemmatu 1.8.5 eventuálně nahradit podmínkou $L_n 1 \equiv 1$, $n \in \mathbb{N}$.

1.9 Skalární součin

V prostoru $\mathbb{R}^m$ je pro $u = [u_1, \dots, u_m]$, $v = [v_1, \dots, v_m]$, definován *skalární součin* předpisem

$$(u, v) := \sum_{k=1}^m u_k v_k.$$

Tento prostor je úplný a eukleidovská norma na tomto prostoru souvisí s tímto součinem tak, že je $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$. Pokud pracujeme s m -ticemi komplexních čísel, píšeme v předcházejícím vzorci $\overline{v_k}$ místo v_k .

V případě prostorů $\mathcal{L}^p([0, 2\pi])$ je pro nás velmi důležitý případ $p = 2$. I v tomto případě je norma generována skalárním součinem, který je pro komplexní funkce definován rovností

$$(f, g) := \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{g(t)} dt . \quad (1.28)$$

Pak pro odpovídající normu zřejmě platí rovnost $\|f\| = \sqrt{(f, f)}$. Funkce f, g , pro které $(f, g) = 0$, nazýváme (vzájemně) *ortogonální*. Důležitý je poznatek, že funkce $u_n(t) = e^{int}$, $n \in \mathbb{Z}$, jsou na intervalu $[-\pi, \pi]$ vzájemně ortogonální v následujícím smyslu: pro $m, n \in \mathbb{Z}$ platí

$$\begin{aligned} (u_m, u_n) &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{imt} \overline{e^{int}} dt = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)t} dt = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(m-n)t + i \sin(m-n)t) dt = \begin{cases} 0 & m \neq n, \\ 2\pi & m = n. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.29)$$

Popsaný poznatek stručně vyjadřujeme tvrzením, že funkce $\{u_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ tvoří na intervalu $[-\pi, \pi]$ *ortogonální systém*.

Podobně lze ukázat, že funkce $\{1, \cos kx, \sin kx\}_{k=1}^{\infty}$ jsou také vzájemně ortogonální např. na intervalu $[0, 2\pi]$, což jednoduše vyplývá ze vzorců, známých ze středoškolské látky

$$\begin{aligned} 2 \cos a \cdot \cos b &= \cos(a+b) + \cos(a-b), \\ 2 \cos a \cdot \sin b &= \sin(a+b) - \sin(a-b), \\ -2 \sin a \cdot \sin b &= \cos(a+b) - \cos(a-b); \end{aligned} \quad (1.30)$$

z nich obdržíme násobením faktorem $1/2$ a dosazením mt za a a nt za b po úpravě

$$\begin{aligned} \cos mt \cdot \cos nt &= (\cos(m+n)t + \cos(m-n)t)/2, \\ \cos mt \cdot \sin nt &= (\sin(m+n)t - \sin(m-n)t)/2, \\ \sin mt \cdot \sin nt &= (\cos(m-n)t - \cos(m+n)t)/2. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Odtud dostaneme integraci přes interval $[0, 2\pi]$ většinu vztahů, potřebných pro zdůvodnění ortogonality systému $\{1, \cos kx, \sin kx\}_{k=1}^{\infty}$; zbývající jsou triviální.

Kapitola 2

Trigonometrické řady

V této části se seznámíme s terminologií a jednoduchými vztahy, které budeme v dalším výkladu neustále používat. Z teorie integrálu vystačíme zatím prakticky jen s Riemannovým integrálem.

2.1 Základní poznatky

Základním objektem našeho výkladu je *trigonometrická řada*. Je to řada funkcí tvaru

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad (2.1)$$

kde proměnná x probíhá $\mathbb{R}$ a jejíž koeficienty $a_0, a_1, b_1, \dots$ jsou reálná čísla. Nemá valného smyslu vyšetřovat obecnější případ komplexních koeficientů, vždy lze totiž řadu rozložit na její reálnou a imaginární část a vyšetřovat je odděleně. Obě části jsou řadami typu (2.1) s reálnými koeficienty.

Dosadíme-li do trigonometrické řady za goniometrické funkce vyjádření plynoucí z Eulerových vzorců

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad (2.2)$$

dostaneme po úpravě

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k - ib_k}{2} e^{ikx} + \frac{a_k + ib_k}{2} e^{-ikx},$$

takže po označení

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}, \quad c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (2.3)$$

lze (2.1) formálně zapsat v „komplexním tvaru“ jako řadu

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}. \quad (2.4)$$

Podle obvyklé definice tato řada *konverguje*, pokud existuje vlastní limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}.$$

Jeví se tedy účelné studovat řady typu (2.4) s komplexními koeficienty c_k , $k \in \mathbb{Z}$ a případně z jejich chování odvozovat výsledky pro řady typu (2.1), nebo studovat přímo některé otázky pro řady (2.1) s reálnými koeficienty a_k , b_k , $k \in \mathbb{N}_0$, ($b_0 = 0$).

Dále je účelné definovat pro $n \in \mathbb{N}_0$ analogicky jako u polynomů

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad \text{resp.} \quad T_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}. \quad (2.5)$$

Tyto částečné součty se nazývají *trigonometrické polynomy*. Pro rozlišení někdy, jeví-li se to vhodné, dodáváme v prvním případě *v reálném tvaru* a ve druhém případě *v komplexním tvaru*. Trigonometrický polynom T_n je stupně *nejvýše n -tého*. Jestliže je $|a_n| + |b_n| > 0$, je T_n stupně *právě n -tého* (kromě případu, kdy jsou koeficienty vesměs rovny 0).

Pokud vyjadřujeme polynom typu (2.1) ve tvaru (2.4), platí pro reálné koeficienty a_k , b_k rovnosti

$$a_k = c_k + c_{-k}, \quad b_k = i(c_k - c_{-k}), \quad c_{-k} = \overline{c_k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.6)$$

Poznamenejme ještě, že řada (2.1) je reálnou částí mocninné řady

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - ib_k) z^k,$$

dosadíme-li do ní $z = e^{ix}$, tj. $z^k = (\cos kx + i \sin kx)$. Toho se často využívá při sčítání konkrétních trigonometrických řad.

Pokud trigonometrická řada konverguje alespoň v jednom bodě z $\mathbb{R}$ (jinak je vyšetřování jejího součtu nezajímavé), je tento součet 2π -periodická funkce. Proto budeme v dalším pracovat nejčastěji s 2π -periodickými funkcemi nebo funkcemi definovanými na intervalu délky 2π , které si představujeme periodicky rozšířené na $\mathbb{R}$. Trigonometrické polynomy jsou reálné nebo komplexní funkce z $\mathcal{C}(\mathbb{R})$, periodické s periodou 2π .

Pro (lineární) prostor všech spojitých 2π -periodických funkcí na $\mathbb{R}$ budeme užívat již zavedené označení $\mathcal{C}(2\pi)$. Podobně jsme zavedli (lineární) prostor $\mathcal{L}(2\pi)$ všech (tříd) lokálně lebesgueovsky integrovatelných 2π -periodických funkcí na $\mathbb{R}$ a (lineární) prostor $\mathcal{R}(2\pi)$ všech lokálně riemannovsky integrovatelných 2π -periodických funkcí na $\mathbb{R}$. Při použití označení $\subset\subset$ pro označení vztahu být podprostorem zřejmě platí

$$\mathcal{C}(2\pi) \subset\subset \mathcal{R}(2\pi) \subset\subset \mathcal{L}(2\pi).$$

Prostor $\mathcal{L}(2\pi)$ uvažujeme vždy s integrální normou, tj. pro $f \in \mathcal{L}(2\pi)$ klademe

$$\|f\| = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt, \quad (2.7)$$

zatímco na prostorech $\mathcal{C}(2\pi)$ nebo $\mathcal{R}(2\pi)$ můžeme kromě takto definované normy užívat též normu supremovou. V případě potřeby na to však vždy upozorníme.

Příklad 2.1.1. Protože je (používáme elementární poznatky z teorie funkcí komplexní proměnné)

$$\log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \cdots + (-1)^{k+1} \frac{z^k}{k} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{z^k}{k}$$

pro všechna $z \neq -1$, $|z| \leq 1$, platí pro všechna $t \in (-\pi, \pi)$

$$\log(1+e^{it}) = \log 2 \frac{e^{-it/2} + e^{it/2}}{2} e^{it/2} = \log\left(2 \cos \frac{t}{2}\right) + i \frac{t}{2}.$$

Odtud vyplývá porovnáním reálných a imaginárních částí

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\cos kt}{k} &= \cos t - \frac{\cos 2t}{2} + \frac{\cos 3t}{3} - \cdots = \log\left(2 \cos \frac{t}{2}\right), \\ \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\sin kt}{k} &= \sin t - \frac{\sin 2t}{2} + \frac{\sin 3t}{3} - \cdots = \frac{t}{2}. \end{aligned}$$

Avšak i rozvoj exponenciály (konvergentní v $\mathbb{C}$) může vést k zajímavým výsledkům: můžeme tak nalézt vzorce

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos kt}{k!} = e^{\cos t} \cos(\sin t), \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin kt}{k!} = e^{\cos t} \sin(\sin t).$$

Příklad 2.1.2. Jak jsme viděli již v úvodní části, trigonometrické řady nemusí konvergovat pro žádné $t \in \mathbb{R}$. Vskutku, z následujících dvou řad

$$\sum_{k=0}^{\infty} \cos kt, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \sin kt$$

první diverguje ve všech bodech z $\mathbb{R}$, protože pro žádné $t \in \mathbb{R}$ *neplatí* $\cos kt \rightarrow 0$.

Vyšetřeme ještě druhou řadu: pokud pro nějaké $t \in \mathbb{R}$ je $\sin kt \rightarrow 0$, pak také

$$\sin(k+1)t - \sin(k-1)t = 2 \sin t \cos kt \rightarrow 0.$$

Protože však $\{\cos kt\}_{k=0}^{\infty}$ nekonverguje pro žádné $t \in \mathbb{R}$, musí tedy být $\sin t = 0$, tj. $t = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. V těchto bodech však řada zřejmě konverguje k 0.

Jestliže trigonometrická řada

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}. \tag{2.8}$$

konverguje *stejněměrně* k součtu f , je tato funkce limitou stejněměrně konvergentní posloupnosti trigonometrických polynomů a je tedy spojitá. K její integraci přes libovolný uzavřený interval $[a, b] \subset \mathbb{R}$ postačí užití Newtonova nebo Riemannova integrálu. To je třeba mít na paměti: tvrzení formulujeme vždy pro Lebesgueův integrál a je na čtenáři, aby si uvědomil, za jaké situace vystačíme se „slabším“ Riemannovým integrálem.

Odvodíme jednoduchý vztah mezi funkcí f a koeficienty trigonometrické řady. V Kapitole 1 jsme ukázali, že definujeme-li skalární součin (komplexních) funkcí f, g na intervalu $[-\pi, \pi]$ pomocí vzorce

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{g(t)} dt, \quad (2.9)$$

platí (1.29) a funkce $u_n(x) = e^{inx}$, $n \in \mathbb{Z}$, jsou na intervalu $[-\pi, \pi]$ vzájemně ortogonální. Zvolme $m \in \mathbb{Z}$ a pro řadu (2.8) spočtěme součin (f, e^{imx}) . Je

$$\begin{aligned} (f, e^{imx}) &= \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}, e^{imx} \right) = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i(k-m)x} dx = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-m)x} dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (e^{ikx}, e^{imx}) = 2\pi c_m, \end{aligned}$$

z čehož dostaneme vzorec pro výpočet koeficientů pomocí součtu f

$$c_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-imx} dx, \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (2.10)$$

Stejněměrná konvergence řady (2.8) nám umožnila *zaměnit pořadí integrace a sčítání řady*, a tak integrovat „člen po členu“. S ohledem na (2.9) jsme tak získali explicitní vyjádření koeficientů c_m pomocí f vzorcem (2.10). To nás vede k následující definici:

Definice 2.1.3. Je-li $f \in \mathcal{L}(2\pi)$ a čísla c_m jsou pro funkci f a $m \in \mathbb{Z}$ definována vzorcem (2.10), nazýváme c_m *koeficienty Fourierovy řady funkce f (v komplexním tvaru)*. Často je pak značíme symbolem $\hat{f}(m)$. Jsou-li v trigonometrické řadě (2.8) definovány pro $f \in \mathcal{L}(2\pi)$ koeficienty c_m pomocí vzorce (2.10), nazýváme ji *Fourierovou řadou funkce f* a píšeme

$$f(t) \approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikt}. \quad (2.11)$$

Podobným způsobem lze postupovat přímo při studiu řady v trigonometrickém tvaru. Pomocí rovností (1.31) snadno zjistíme, že funkce $\{1, \cos kx, \sin kx\}_{k=1}^{\infty}$ jsou ortogonální na intervalu $[-\pi, \pi]$. Je

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx dx = \pi, \quad k \in \mathbb{N},$$

a pokud řada konverguje stejnoměrně a

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad (2.12)$$

lze vyjádřit analogicky a_k a b_k vzorci

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (2.13)$$

Speciálně dostáváme po dosazení za f s ohledem na ortogonalitu

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) 1 dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cdot 1 dx = \pi a_0,$$

což vysvětluje výhodu zápisu Fourierovy řady ve tvaru (2.12), neboť pak vzorec (2.13) pro a_k platí i pro $k = 0$.

Definice 2.1.4. Je-li $f \in \mathcal{L}(2\pi)$ a čísla a_k , $k \in \mathbb{N}_0$, b_k , $k \in \mathbb{N}$, jsou pro funkci f definována vzorcem (2.13), nazýváme a_k , b_k *koeficienty Fourierovy řady funkce f (v reálném tvaru)*. Obvykle je ze souvislosti patrné, s jakým tvarem Fourierovy řady pracujeme, proto koeficienty nazýváme stručněji *Fourierovy koeficienty*.

Poznámka 2.1.5. V dalším se budeme zabývat převážně řadami výše popsaných tvarů; je proto na místě si povšimnout, zda to nepřináší do našich úvah nějaká nepřirozená omezení.

Jestliže je lokálně integrovatelná funkce f též $2p$ -periodická s $p > 0$, nic podstatného se nemění. Např. v „reálném případě“ jsou koeficienty Fourierovy řady f definovány pro příslušná k vzorci

$$a_k = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \cos \frac{k\pi x}{p} dx, \quad b_k = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \sin \frac{k\pi x}{p} dx, \quad (2.14)$$

a Fourierova řada má pak tvar

$$f(t) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi t}{p} + b_k \sin \frac{k\pi t}{p} \right). \quad (2.15)$$

Posunutím se $2p$ -periodicita funkce nemění, tj. je-li funkce f $2p$ -periodická a $a \in \mathbb{R}$, je $2p$ -periodická i funkce

$$g(t) = f(t + a), \quad t \in \mathbb{R}$$

pro každé a . Jde-li nám o (lokální) chování periodické funkce f , lze posunutím dosáhnout např. toho, že studujeme chování „posunuté“ funkce v počátku.

K definici Fourierovy řady $2p$ -periodické funkce f stačí znát hodnoty f pouze na intervalu $[-p, p]$ a pokud řada konverguje, je její součet $2p$ -periodická funkce. Je proto pohodlné pracovat vždy s $2p$ -periodickými funkcemi a případně funkci, která je definována *pouze* na intervalu $(-p, p]$, nahradit jejím $2p$ -periodickým rozšířením na $\mathbb{R}$. Ve zřejmém smyslu analogicky pracujeme s funkcemi z $\mathcal{C}(2p)$, nebo z $\mathcal{L}(2p)$.

Následující lemma ukazuje, že integrál $2p$ -periodické funkce přes jakýkoli interval délky $2p$ dává stejný výsledek. Toho budeme dále využívat. Zacházíme-li pouze se spojitými funkcemi, vyplývá to jednoduše ze vztahu (derivujeme primitivní funkci k f)

$$\frac{d}{dx} \int_x^{x+2p} f(v) dv = f(x+2p) - f(x) = 0.$$

Obecnější případ je důsledkem tvrzení:

Lemma 2.1.6. Je-li $f \in \mathcal{L}(2p)$, potom pro reálná čísla $a < b$ a $n \in \mathbb{Z}$ platí rovnost

$$\int_a^b f(v) dv = \int_{a+2np}^{b+2np} f(v) dv, \quad \int_{-p}^p f(v) dv = \int_a^{a+2p} f(v) dv.$$

Důkaz. Je-li $f \in \mathcal{L}(2p)$, pak pro každá $a, b \in \mathbb{R}$ a každé $n \in \mathbb{Z}$ platí vzhledem k periodicitě f

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{a+2np}^{b+2np} f(x-2np) dx = \int_{a+2np}^{b+2np} f(v) dv.$$

Zvolme nyní libovolně $a \in \mathbb{R}$ a v již dokázané rovnosti položíme $n = 1$ a za a dosadíme $a - 2p$ a za b dosadíme a . Tak dostaneme druhou rovnost. $\square$

Předcházející lemma se mj. uplatňuje při výpočtu Fourierových koeficientů 2π -periodické funkce $f \in \mathcal{C}(2\pi)$, kde můžeme pracovat s Riemannovým integrálem. Na místě je však poznámka: Podle toho, jaký integrál používáme, se řídí i naše možnosti vytvořit Fourierovu řadu pro danou funkci. Funkce tedy nemusí mít Fourierův rozvoj, používáme-li pouze Riemannův integrál (viz níže).

Jedno důrazné upozornění: máme-li Fourierovu řadu funkce $f \in \mathcal{L}(2\pi)$, potom následující symbol $\approx$ ve vztahu

$$f(t) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

vyjadřuje *pouze to*, že c_k , resp. a_k a b_k jsou určeny pomocí vzorců (2.10) a (2.13) a je obecně „velice daleko“ od rovnosti pro všechna $t \in \mathbb{R}$. Prozradíme již nyní, že r. 1926 dokázal A. N. KOLMOGOROV (1903–1987), že existuje taková funkce $f \in \mathcal{L}(2\pi)$, jejíž Fourierova řada *diverguje* pro všechna $t \in \mathbb{R}$. Zatím pouze víme, že rovnost platí např. pro takové funkce $f \in \mathcal{C}(2\pi)$, jejichž Fourierova řada *konverguje stejnoměrně*.

Poznámka 2.1.7. Uvedeme ještě malý komentář k označení: Někdy se hodí 2π -periodické funkce interpretovat jako funkce na jednotkové kružnici $\mathcal{K} \subset \mathbb{C}$. Je-li F funkce na $\mathcal{K}$, potom funkce $f(t) = F(e^{it})$, $t \in \mathbb{R}$, je 2π -periodická funkce na $\mathbb{R}$. Poznamenáváme, že při přechodu od f k F definujeme F na $\mathcal{K}$ tak, že klademe $F(z) = f(t)$, kde $z = e^{it}$. Zde můžeme brát např. $t \in (-\pi, \pi]$, tj. $t = \arg z$, nebo obecně $t \in \text{Arg } z$, kde t je jakékoli reálné číslo, pro něž $z = e^{it}$. Je-li F spojitá na $\mathcal{K}$, je $f \in \mathcal{C}(2\pi)$. Někdy se pak píše $f \in \mathcal{C}(\mathbf{T})$ (volba označení souvisí s termínem *torus*). Funkce f a F se pak často ztotožňují, i když jde o podstatně rozdílné objekty. My budeme pracovat s funkcemi z $\mathcal{C}(2\pi)$ a označení s $\mathbf{T}$ se budeme vyhýbat (bývá interpretováno např. jako libovolný interval délky 2π , např. $[-\pi, \pi]$, nebo $[0, 2\pi]$ apod.).

S trigonometrickými a Fourierovými řadami je spojena řada vcelku přirozených otázek, jejichž řešení je někdy lehké, jindy však dosti složité. Na ty nejdůležitější se budeme snažit podat uspokojivé odpovědi. Poznamenejme na tomto místě, že přiřazení Fourierových koeficientů dané funkci závisí podstatně na užívaném integrálu: Pracujeme-li například se *spojitou funkcí* $f \in \mathcal{C}(2\pi)$, postačí nám ke spočtení jejích Fourierových koeficientů Riemannův integrál. Obecnější Lebesgueův integrál umožňuje přiřadit Fourierovu řadu i daleko obecnějším funkcím. Základními otázkami o Fourierových řadách jsou:

- (a) Je každá konvergentní trigonometrická řada zároveň Fourierovou řadou svého součtu?
- (b) Je-li pro f definována její Fourierova řada, musí tato řada v nějakých bodech konvergovat, a
- (c) jaký je vztah součtu této Fourierovy řady k funkci f ?

2.2 Stejnomořná konvergence

O stejnoměrné konvergenci trigonometrické řady se patrně nejsnáze rozhoduje pomocí Weierstrassova kritéria, pokud je lze použít. Jestliže trigonometrická řada v exponenciálním tvaru (2.8), obecně s komplexními koeficienty c_k , konverguje v nějakém bodě $t \in \mathbb{R}$ absolutně, pak

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k e^{ikt}| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n |c_k e^{ikt}| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n |c_k| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k| < \infty.$$

Odtud již plyne jednoduché tvrzení:

Lemma 2.2.1. *Konverguje-li řada (2.8) absolutně alespoň v jednom bodě $t \in \mathbb{R}$, konverguje absolutně a stejnoměrně na $\mathbb{R}$ a je Fourierovou řadou svého součtu.*

Stejně snadno ověříme, že trigonometrická řada v goniometrickém tvaru

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt),$$

s reálnými koeficienty a_k, b_k , pro kterou je splněna podmínka

$$\sum_{k=1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|) < \infty, \quad (2.16)$$

konverguje absolutně a stejnoměrně na $\mathbb{R}$. Při práci s tímto tvarem řady je však situace složitější než v Lemmatu 2.2.1, spokojíme se však pouze s již uvedeným příkladem: řada $\sum_{k=1}^{\infty} \sin kt$ z Poznámky 2.1.2 absolutně konverguje ve všech bodech $t = n\pi, n \in \mathbb{Z}$, a přesto ve všech ostatních bodech z $\mathbb{R}$ diverguje.

Příklad 2.2.2. Snadno nahlédneme, že řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin k!x$$

konverguje na husté množině v $\mathbb{R}$: je-li $x = 2\pi p/q, p, q \in \mathbb{Z}, q > 0$, potom $\sin k!x = 0$ pro všechna $k \geq q$ a řada konverguje absolutně na množině $2\pi\mathbb{Q}$ husté v $\mathbb{R}$. Čtenář nechť si povšimne, že koeficienty této řady nekonvergují k 0. Jak dále ukážeme, taková řada *není Fourierovou řadou* žádné funkce z $\mathcal{L}(2\pi)$.

Bez důkazu uveďme, že trigonometrická řada (2.12) splňuje podmínku (2.16), jestliže konverguje *absolutně* na množině $M \subset \mathbb{R}$, která má *kladnou* Lebesgueovu míru. Toto tvrzení dokázali r. 1912 A. DENJOY (1884–1974) a N. N. LUZIN (1883–1950). Pro Fourierovy řady platí různá další tvrzení o absolutní konvergenci; srv. [5] a [85].

Pokud by každá Fourierova řada konvergovala stejnoměrně nebo absolutně, bylo by vyšetřování jejich konvergence jednoduché. Zpravidla však vyžaduje nasazení kritérií pro neabsolutní konvergenci: Shrňme na tomto místě, co z Abel-Dirichletova kritéria pro konvergenci Fourierových řad jednoduše vyplývá.

Jestliže $\lim a_n = \lim b_n = 0$ a tato konvergence je monotónní (bez újmy na obecnosti je-li $a_n \searrow 0, b_n \searrow 0$), řada konverguje bodově všude s výjimkou bodů $x = 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$.

Konvergence je stejnoměrná na každém uzavřeném intervalu I , který neobsahuje body $2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Pokud pracujeme se „sinovou řadou“, tj. např. když koeficienty b_n jsou rovny až na konečně mnoho 0, pak tato řada konverguje bodově dokonce všude v $\mathbb{R}$.

Fourierovy koeficienty lze však počítat i pro nespojitě funkce z $\mathcal{L}(2\pi)$. Můžeme pro ně vytvořit jejich Fourierovy řady a zjišťovat, zda vůbec v nějakých bodech konvergují. *Nutnou podmínkou* pro konvergenci řady (2.8) v bodě $t \in \mathbb{R}$ je, aby $c_k e^{ikt} \rightarrow 0$ pro $|k| \rightarrow \infty$, neboli aby $|c_k| \rightarrow 0$ pro $|k| \rightarrow \infty$. Ukážeme, že tuto podmínku splňují Fourierovy koeficienty každé funkce $f \in \mathcal{L}(2\pi)$. Nejprve však použijeme další omezující předpoklady.

Věta 2.2.3 (Riemann, 1853). *Nechť $f \in \mathcal{R}([a, b])$. Potom*

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty, x \in \mathbb{R}} \int_a^b f(t) e^{-ixt} dt = 0.$$

Důkaz. V průběhu důkazu využijeme některých poznatků z teorie Riemannova integrálu. Je-li $f = \chi_{[a, b]}$ charakteristická funkce intervalu $[a, b]$, pak pro každé $x \neq 0$ platí

$$\left| \int_a^b f(t) e^{-ixt} dt \right| = \left| \int_a^b e^{-ixt} dt \right| = \left| \frac{1}{-ix} (e^{-ixb} - e^{-ixa}) \right| \leq \frac{2}{|x|}.$$

Odtud tvrzení vyplývá pro tuto konstantní funkci f . Zřejmě také platí pro konečné lineární kombinace takových funkcí, tedy i pro po částech konstantní funkce (snadno nahlédneme, že jak jsou definovány v koncových bodech „intervalů konstantnosti“ nehraje podstatnou roli). Označíme-li pro dělení

$$D = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$$

symbolem χ_k charakteristickou funkci intervalu $I_k = [x_{k-1}, x_k)$, $k = 1, \dots, n-1$ a χ_n charakteristickou funkci intervalu $I_n = [x_{n-1}, x_n]$, pak při standardním označení

$$m_k = \inf\{f(t); t \in I_k\}, \quad M_k = \sup\{f(t); t \in I_k\},$$

jsou dolní a horní součty pro $f \in \mathcal{R}([a, b])$ rovny integrálům po částech konstantních funkcí $\sum_k m_k \chi_k$, $\sum_k M_k \chi_k$. Nyní snadno nahlédneme, že každou spojitou, či obecněji každou Riemannovsky integrovatelnou funkci na intervalu $[a, b]$ lze stejnoměrně aproximovat po částech konstantními funkcemi, a že tvrzení tedy platí pro každou $f \in \mathcal{R}([a, b])$. $\square$

Důsledek 2.2.4. *Platí $\lim_{|k| \rightarrow \infty} \hat{f}(k) = 0$ pro každou funkci $f \in \mathcal{R}([-\pi, \pi])$. Pro Fourierovu řadu funkce $f \in \mathcal{R}([-\pi, \pi])$ ve tvaru (2.12) platí*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 0.$$

Následující tvrzení je zobecněním předcházejícího; běžně se označuje jako *Riemann-Lebesgueovo lemma* a popisuje Lebesgueovo zobecnění věty dokázané dříve Riemannem.

Věta 2.2.5 (Riemann 1853, Lebesgue 1903). *Nechť $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$. Potom*

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ixt} dt = 0.$$

Důkaz. Větší část práce na tomto důkazu jsme již odvedli při důkazu Věty 2.2.3. V každém případě však nyní musíme využít některých poznatků z teorie integrálu.

Je-li f spojitá funkce na $\mathbb{R}$, která má kompaktní nosič $\text{spt } f$ (připomeňme, že *nosič funkce* f definujeme jako uzávěr množiny $\{x \in \mathbb{R}; f(x) \neq 0\}$), potom je $\text{spt } f \subset [a, b]$ pro nějaký interval $[a, b]$ a tvrzení pro ni plyne z již dříve dokázané Věty 2.2.3. Systém všech spojitých funkcí s kompaktním nosičem v $\mathbb{R}$ tvoří lineární prostor $\mathcal{C}_k(\mathbb{R})$. Podle Věty 1.4.1 existuje k libovolnému $\varepsilon > 0$ taková spojitá funkce $g \in \mathcal{C}_k(\mathbb{R})$, že

$$\|f - g\|_p = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - g(t)|^p dt \right)^{1/p} < \varepsilon;$$

odtud již platnost dokazované věty snadno vyplýne standardní aproximační technikou. Pro $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ platí

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ixt} dt \right| &\leq \left| \int_{-\infty}^{\infty} (f(t) - g(t)) e^{-ixt} dt \right| + \left| \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-ixt} dt \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - g(t)| dt + \left| \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-ixt} dt \right|. \end{aligned}$$

Protože druhý z integrálů na pravé straně poslední nerovnosti pro $|x| \rightarrow \infty$ konverguje k 0 a v prvním lze volit g tak, aby první integrál byl odhadnut $\varepsilon/2$, je tvrzení dokázáno pro funkce z $\mathcal{L}(\mathbb{R})$. Rozkladem na reálnou a imaginární část dostaneme důkaz věty i pro „komplexní“ $\mathcal{L}(\mathbb{R})$. $\square$

2.3 Které trigonometrické řady jsou Fourierovy?

Nebudeme se podrobněji zabývat konvergencí trigonometrických řad, v tomto směru se spokojíme pouze s elementárními výsledky. Přirozenou otázkou je, zda každá (všude) konvergentní trigonometrická řada není již Fourierovou řadou. Odpověď je záporná a to nyní dokážeme. Začneme jednoduchým, avšak *důležitým* příkladem:

Příklad 2.3.1. Předpokládejme, že posloupnost $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ je nerostoucí a konverguje k 0. Dále nechť je posloupnost $\{kb_k\}$ omezená. Odhadneme pro všechna $t \in \mathbb{R}$ nezávisle na $n \in \mathbb{N}$ částečné součty řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kt. \quad (2.17)$$

Protože jde o součet periodických lichých funkcí, stačí se místo intervalu $[-\pi, \pi]$ omezit na interval $[0, \pi]$. V krajních bodech 0 a π jsou členy řady vesměs nulové, stačí proto odhadovat pouze pro $0 < t < \pi$.

Předpokládejme, že $|kb_k| < M < \infty$, $k \in \mathbb{N}$, a zvolme pevně $t \in (0, \pi)$. Označme m celou část $[\pi/t]$. Pro $1 < n \leq m$ platí pro částečný součet řady

$$\left| \sum_{k=1}^n b_k \sin kt \right| \leq \sum_{k=1}^n kb_k t \leq Mnt \leq M\pi.$$

Je-li $n > m$, stačí ještě provést odhad výrazu $\left| \sum_{k=m+1}^n b_k \sin kt \right|$. Ze vzorce (3.13) vyplývá

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=m+1}^n \sin kt \right| &= \left| \frac{\cos t/2 - \cos(n+1/2)t - \cos t/2 + \cos(m+3/2)t}{2 \sin t/2} \right| = \\ &= \left| \frac{-\cos(n+1/2)t + \cos(m+3/2)t}{2 \sin t/2} \right| \leq \frac{1}{|\sin(t/2)|}, \end{aligned}$$

z čehož použitím odhadu (1.6) dostaneme

$$\left| \sum_{k=m+1}^n b_k \sin kt \right| \leq \frac{2b_{m+1}}{|\sin t/2|} \leq \frac{2(m+1)b_{m+1}\pi}{(m+1)t} \leq 2M.$$

Z obou odhadů již vyplývá, že řada (2.17) má absolutní hodnoty částečných součtů odhadnutý konstantou $M(\pi + 2)$.

Nyní dokážeme ještě jedno poměrně jednoduché tvrzení o Fourierových koeficientech funkcí z $\mathcal{L}(2\pi)$.

Lemma 2.3.2. *Je-li $f \in \mathcal{L}(2\pi)$ a $\{b_k\}$, $k \in \mathbb{N}$, je posloupnost Fourierových koeficientů funkce f určené pomocí (2.13). Potom je řada $\sum_{k=1}^{\infty} b_k/k$ konvergentní.*

Důkaz. Položme $g_n(t) = \sum_{k=1}^n (\sin kt)/k$, $n \in \mathbb{N}$. Tyto funkce jsou trigonometrické polynomy a podle Abel-Dirichletova kritéria bodově konvergují k 2π -periodické funkci g . Protože podle Příkladu 2.3.1 existuje $0 < K < \infty$ takové, že je $|g_n| < K$ a $g_n(t)f(t) \rightarrow g(t)f(t)$, $t \in \mathbb{R}$, je $Kf(t)$, $t \in \mathbb{R}$, integrovatelnou majorantou $\{g_n f\}$ a podle Lebesgueovy věty o majorantě

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sum_{k=1}^n \frac{\sin kt}{k} dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k},$$

což jsme měli dokázat. □

Příklad 2.3.3 (důležitý). Trigonometrická řada

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin kx}{\log k}, \tag{2.18}$$

která konverguje všude v $\mathbb{R}$, je trigonometrickou řadou, která *není* Fourierovou řadou. Podle předcházejícího Lemmatu 2.3.2 by musela být řada $\sum_{k=1}^{\infty} b_k/k$, tj. řada

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \log k}$$

konvergentní. Tato řada však podle integrálního kritéria zřejmě diverguje (a tedy funkce f , která je součtem řady (2.18), není z $\mathcal{L}(2\pi)$).

Je možné, aby trigonometrická řada konvergovala stejnoměrně na $\mathbb{R}$, a přitom nebyla absolutně konvergentní? Ano, to ukazuje následující příklad:

Příklad 2.3.4. Trigonometrická řada

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin kx}{k \log k}$$

je *stejněměrně* konvergentní. Podle Lemmatu 2.3.2 jsou totiž částečné součty řady $\sum_{k=1}^{\infty} (\sin kx)/k$ stejně omezené na $\mathbb{R}$ a $1/\log k \rightarrow 0$; stejnoměrná konvergence je tedy důsledkem Dirichlet-Abelova kritéria. Kdyby vyšetřovaná řada konvergovala v nějakém bodě $x \in \mathbb{R} \setminus \{n\pi; n \in \mathbb{Z}\}$ *absolutně*, tj.

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{|\sin kx|}{k \log k} < \infty,$$

pak by konvergovala i jí majorizovaná řada $\sum_{k=2}^{\infty} (\sin^2 kx)/k \log k$, a tedy i řada

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1 - \cos 2kx}{k \log k}.$$

Na množině $\mathbb{R} \setminus \{n\pi; n \in \mathbb{Z}\}$ řada $\sum_{k=2}^{\infty} (\cos 2kx)/k \log k$ konverguje. Odtud však plyne, že by pak musela konvergovat i řada $\sum_{k=2}^{\infty} 1/k \log k$. Nalezený spor ukazuje, že vyšetřovaná řada *nekonverguje absolutně* v žádném bodě z $\mathbb{R} \setminus \{n\pi; n \in \mathbb{Z}\}$.

2.4 Fourierovy řady

Prostý náhled na vzorce (2.10) a (2.13) dává jednoduchý výsledek:

Lemma 2.4.1. *Pro každou funkci $f \in \mathcal{L}(2\pi)$ platí*

$$|\widehat{f}(k)| \leq \frac{1}{2\pi} \|f\|, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Důkaz. Snadno nahlédneme, že platí

$$|\widehat{f}(k)| \leq \sup_{k \in \mathbb{Z}} \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt \right| \leq \sup_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)| dt = \frac{1}{2\pi} \|f\|,$$

a že zobrazení $f \mapsto \widehat{f}(k)$ zobrazuje $\mathcal{L}(2\pi)$ do prostoru *omezených funkcí* na $\mathbb{Z}$. □

Z již dokázané Věty 2.2.5 dostaneme přesnější informaci. Její jednoduchý důsledek dává základní vlastnost koeficientů Fourierovy řady funkce z $\mathcal{L}(2\pi)$:

Důsledek 2.4.2. *Pro koeficienty Fourierovy řady funkce $f \in \mathcal{L}(2\pi)$ platí*

$$\widehat{f}(k) \rightarrow 0 \quad \text{pro} \quad |k| \rightarrow \infty \quad \text{a} \quad a_k \rightarrow 0, \quad b_k \rightarrow 0 \quad \text{pro} \quad k \rightarrow \infty.$$

Důkaz. S ohledem na vztahy mezi a_k , b_k a c_k stačí tvrzení zdůvodnit pouze pro $\widehat{f}(k) = c_k$. Pro tento případ je však důsledkem již dokázané Věty 2.2.5. □

Poznámka 2.4.3. Otázka, která trigonometrická řada je Fourierovou řadou, je značně delikátní. Jak je uvedeno v [73], zatímco řada $\sum_{k=2}^{\infty} \sin kt / \log k$ *není* Fourierovou řadou, řada $\sum_{k=2}^{\infty} \cos kt / \log k$ Fourierovou řadou *je*. Již r. 1875 dokázal P. D. G. DU BOIS-REYMOND (1831–1889), že je-li součet trigonometrické řady f riemannovsky integrovatelnou funkcí na intervalu $(-\pi, \pi)$, je tato řada Fourierovou řadou. Později r. 1912 dokázal analogický výsledek pro funkce z $\mathcal{L}(2\pi)$ CH. DE LA VALLÉE-POUSIN (1866–1962); přesněji: *Pokud trigonometrická řada konverguje bodově všude v $\mathbb{R}$ ke (konečné) funkci $f \in \mathcal{L}(2\pi)$, potom je tato řada Fourierovou řadou funkce f .*

O řadách podobného typu je známo obecnější tvrzení: *Jsou-li $\{a_k\}$ a $\{b_k\}$ klesající posloupnosti kladných čísel konvergující k 0 a*

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt, \quad g(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kt,$$

pak tyto řady jsou Fourierovými řadami, právě když $f, g \in \mathcal{L}(2\pi)$.

To, že mohou existovat všude konvergentní trigonometrické řady, které nejsou Fourierovými řadami, bylo chápáno jako jistý nedostatek Lebesgueova integrálu. Motivovalo to Denjoya k dalšímu zobecnování integrálu.

Kapitola 3

Fourierovy řady

V této kapitole si budeme všimnat již výhradně Fourierových řad, a to jak v reálném, tak i komplexním tvaru. Seznámíme se se základními vztahy a vzorci, které pro nás budou mít v dalším textu pomocný charakter.

3.1 Proč jsou Fourierovy ?

V období do vydání Fourierovy práce byl D. BERNOULLI (1700–1782) patrně jediný, kdo byl hluboce přesvědčen o možnosti vyjádření „jakýchkoli“ funkcí pomocí trigonometrických řad. K tomuto poznatku dospěl při vyšetřování chvění strun a při snaze k výsledkům nalézt uspokojivý matematický model. Soudobí matematici však žili v zajetí představ hrubě charakterizovatelných heslem „*spojitost = existence analytického vyjádření*“, kterému Bernoulliho přesvědčení hrubě odporovalo.

Všimněme si nyní podrobněji Fourierovy práce o šíření tepla [31], která měla velmi složitý osud. J. B. FOURIER (1768–1830) podal k posouzení pařížské akademii věd r. 1807 svůj *Mémoire* ... ; viz [29]. Vycházel z několika základních principů:

- (a) Prvotní příčiny jevů nejsou známy, ale jevy podléhají jednoduchým zákonitostem, které lze odhalit pozorováním.
- (b) Fyzikální problémy lze převést na problémy matematické a ty pak řešením dovést ke konečným (numerickým) výsledkům.
- (c) Matematika je stejně rozmanitá jako příroda.

V práci Fourier velmi úspěšně řešil nejen fyzikální, ale i matematické problémy. Od začátku výkladu ukazoval, že soudobé matematické nástroje a prostředky jsou nedostačující. Pro nás je zajímavá jen část matematického aparátu, který používal, a to podstatně více než problémy, které jím řešil. Práci posuzovali velmi známí matematici: P. S. LAPLACE (1749–1827), J. L. LAGRANGE (1736–1813), S. F. LACROIX (1765–1843) a G. MONGE (1746–1818). Posudek nebyl příznivý, ne však zcela odmítavý. I pro soudobé matematiky byla Fourierova práce natolik zajímavá, že se rozhodli její ústřední problém (vedení tepla) vyhlásit jako hlavní téma pro velkou cenu akademie pro r. 1912.

Prakticky stejné grémium pak práci, kterou Fourier podal po přepracování r. 1811, přisoudilo tuto cenu. Na druhé straně byla v posudku obsažena kritika Fourierovy přesnosti

a užítých metod. Práce *nebyla* publikována v memoárech pařížské akademie a objevila se v přepracované a rozšířené verzi až r. 1822.

Pro ilustraci uveďme trochu zjednodušeně jeden z problémů, kterým se Fourier zabýval. Šlo o popis vedení tepla v nekonečně tenké „obdélníkové“ desce. V $\mathbb{R}^2$ tuto oblast popíšeme jako množinu $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, -\pi/2 \leq y \leq \pi/2\}$. Hledaná funkce $z = z(x, y)$ na M měla vyhovovat podmínkám

$$\begin{aligned} f(y) = z(0, y), \quad y \in [-\pi/2, \pi/2] \text{ je sudá funkce, a} \\ z(x, -\pi/2) = z(x, \pi/2) = 0, \quad x \in (0, +\infty), \end{aligned}$$

a být řešením (Laplaceovy) rovnice, která popisuje ustálený stav

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0. \quad (3.1)$$

První a nejdůležitější případ, který řešil, byl $f(y) \equiv 1$. Fourier hledal řešení ve tvaru $z(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$ (tomuto způsobu řešení se říká *metoda separace proměnných*). Z rovnice (3.1) dostal

$$\varphi''(x)\psi(y) + \varphi(x)\psi''(y) = 0,$$

a za předpokladu, že obě derivace φ'' , ψ'' nenabývají hodnoty 0, rovnici

$$\frac{\varphi(x)}{\varphi''(x)} = -\frac{\psi(y)}{\psi''(y)}.$$

Levá strana předcházející rovnosti závisí pouze na x a pravá zase pouze na y , jsou proto konstantní (a nemění znamení). S ohledem na okrajové podmínky $\psi(-1) = \psi(1) = 0$ musí být

$$\frac{\varphi(x)}{\varphi''(x)} = c > 0, \quad \frac{\psi(y)}{\psi''(y)} = -c < 0.$$

Fourier nyní položil $c = 1/n^2$ a dostal pro každé $n \in \mathbb{N}$ obecná řešení

$$\varphi(x) = c_1 e^{-nx} + c_2 e^{nx}, \quad \psi(y) = c_3 \cos ny + c_4 \sin ny.$$

Protože hledaná funkce musí být sudá vzhledem k proměnné y , dostaneme $c_4 = 0$. Dále usoudil, že $c_2 = 0$, neboť s rostoucí vzdáleností od zdroje tepla musí teplota konvergovat k 0. Tak dospěl k vyjádření

$$z(x, y) = c e^{-nx} \cos ny, \quad (3.2)$$

kde konstanty c a n je třeba určit. „Obecné řešení“ popsal v analogii k obyčejným diferenciálním rovnicím jako „nekonečnou lineární kombinaci“

$$z(x, y) = a_1 e^{-n_1 x} \cos n_1 y + a_2 e^{-n_2 x} \cos n_2 y + a_3 e^{-n_3 x} \cos n_3 y + \dots$$

Okrajová podmínka $\psi(-\pi/2) = \psi(\pi/2) = 0$ je splněna pro $n_1 = 1, n_2 = 3, \dots$, a tak pro obecnou sudou f po dosazení $x = 0$ obdržel

$$f(y) = a_1 \cos \pi y + a_2 \cos 3\pi y + a_3 \cos 5\pi y + \dots, \quad (3.3)$$

což je vyjádření f pomocí Fourierovy řady.

Jeden detail. Fourier pro $f \equiv 1$ hledal koeficienty rozkladu poměrně komplikovaným způsobem, a to řešením „nekonečné soustavy rovnic o nekonečně mnoha neznámých“. Tuto soustavu obdržel postupným derivováním:

$$\begin{aligned} 1 &= a_1 \cos y + a_2 \cos 3y + a_3 \cos 5y + a_4 \cos 7y + \dots \\ 0 &= a_1 \sin y + 3a_2 \sin 3y + 5a_3 \sin 5y + 7a_4 \sin 7y + \dots \\ 0 &= a_1 \cos y + 3^2 a_2 \cos 3y + 5^2 a_3 \cos 5y + 7^2 a_4 \cos 7y + \dots \\ 0 &= a_1 \sin y + 3^3 a_2 \sin 3y + 5^3 a_3 \sin 5y + 7^3 a_4 \sin 7y + \dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Do této soustavy dosadil $y = 0$ a po složitém výpočtu dostal např. vyjádření a_1 pomocí nekonečného součinu tvaru

$$a_1 = \frac{3^2}{3^2 - 1^2} \cdot \frac{5^2}{5^2 - 1^2} \cdot \frac{7^2}{7^2 - 1^2} \cdot \frac{9^2}{9^2 - 1^2} \cdots ;$$

analogická vyjádření obdržel i pro $a_2, a_3, \dots$. Po zjednodušení dospěl k rovnosti

$$\frac{\pi}{4} = \cos y - \frac{1}{3} \cos 3y + \frac{1}{5} \cos 5y - \dots$$

Na tehdejší dobu předvedl Fourier neobyčejný výkon! CH. E. PICARD (1856–1941) o tom později napsal: *Byl to ve své době odvážný výzkum a my v něm nemusíme hledat přesnost žádanou v dnešní době. V každém případě bychom neměli zapomenout, že se Fourier jako první odvážil řešit nekonečnou soustavu rovnic o nekonečně mnoha neznámých. V analýze je mnoho problémů, které vedou na řešení takových soustav.* Poznamenejme, že Fourier zcela moderně definuje konvergenci funkčních řad, ale nezabývá se jí. U popsané řady její důkaz přenechává čtenáři a podotýká, že v intervalu $(\pi/2, 3\pi/2)$ konverguje k $-\pi/4$, atd. Na jiném místě konstatuje, že tato řada konverguje pomalu. Uvádí i obvyklé vzorce pro výpočet koeficientů řady pomocí integrálu, s nimiž se dále seznámíme.

Cvičení 3.1.1. Pomocí vztahu (4) z úvodní části odvoďte „eulerovsky“ pro všechna $x \in (0, \pi)$ formálně, bez hlubšího zdůvodnění, vyjádření

$$1 = \frac{4}{\pi} \left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} \cdots \right).$$

Podobně odvoďte pro všechna $x \in (\pi/2, \pi/2)$

$$1 = \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos x}{1} - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} \cdots \right).$$

Později, až budeme mít dokázanu tzv. Fejérovu větu, tyto vzorce dostaneme velmi jednoduše „zadarmo“.

Cvičení 3.1.2. Opakovanou integrací odvoďte ze vzorce (5) z úvodní části s dosazenou hodnotou $C_2 = \pi^2/6$ vzorec

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^4} = -\frac{x^4}{48} + \frac{\pi x^3}{12} - \frac{\pi^2 x^2}{4} + \frac{\pi^4}{90}, \quad (3.4)$$

ze kterého vyplývá $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-4} = \pi^4/90$. Hodnotu integrační konstanty určete obdobně jako při odvozování vzorce (5) dosazením $x = \pi/2$ a $x = \pi$.

Nyní ukážeme, že vzorec (4) z úvodní části je jednoduchým příkladem Fourierovy řady nespojitě funkce f , takže tato řada *nekonverguje stejnoměrně*; proto na ni úvahu o stejnoměrné konvergenci nemůžeme použít.

Příklad 3.1.3. Označme $f(x) = (\pi - x)/2$, $x \in (0, 2\pi)$, a spočtěme Fourierovy koeficienty funkce f , resp. jejího 2π -periodického rozšíření na $\mathbb{R}$. Pro $k = 0$ je zřejmé

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = 0,$$

protože f je lichá integrovatelná funkce. Pro $k \neq 0$ je

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\pi - t}{2} e^{-ikt} dt = \quad (3.5)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left. \frac{\pi - t}{2} \frac{e^{-ikt}}{-ik} \right|_{t=-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(-\frac{1}{2} \right) \left(\frac{e^{-ikt}}{-ik} \right) = \frac{1}{2ki}. \quad (3.6)$$

Protože $a_k = c_k + c_{-k} = 0$, $b_k = i(c_k - c_{-k}) = 1/k$, je

$$\frac{\pi - x}{2} \approx \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k},$$

ale to je zatím vše, co můžeme o řadě říci. Je však zřejmé, že ve všech bodech tvaru $x = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, je součet řady roven $f(x) = 0$.

3.2 Trigonometrické polynomy

V této části si blíže všimneme vlastností systému všech trigonometrických polynomů, zejména jejich vztahu k prostorům spojitých a integrovatelných funkcí. Pokusíme se rovněž pomocí srovnání ukázat, jak lze použitím vhodného zápisu pracovat výhodněji, pokud chceme „specifické“ tvrzení. Při prvním čtení lze tuto část vynechat zejména pokud čtenář již někdy absolvoval nějaký důkaz Weierstrassovy věty.

Lemma 3.2.1. *Součet a součin trigonometrických polynomů (tedy také i mocnina trigonometrického polynomu s exponentem $k \in \mathbb{N}_0$) je opět trigonometrický polynom. Systém $\mathcal{T}$ všech trigonometrických polynomů tvoří algebru. Posunutím o $a \in \mathbb{R}$ přejde trigonometrický polynom $T(t)$, $t \in \mathbb{R}$, opět v trigonometrický polynom $T(t + a)$, $t \in \mathbb{R}$.*

Důkaz. Pokud pracujeme s exponenciálním vyjádřením, je trigonometrický polynom konečnou lineární kombinací funkcí e^{ikt} tvaru $\sum_{k=-n}^n c_k e^{ikt}$ s komplexními koeficienty c_k . Odtud je tvrzení zřejmé, snad s výjimkou části o posunutí. Ta plyne z toho, že rovnost

$$c_k e^{ik(t+a)} = (c_k e^{ika}) \cdot e^{ikt}$$

aplikujeme na jednotlivé členy polynomu. □

Poznámka 3.2.2. Předcházející tvrzení platí i pro polynomy v „trigonometrickém tvaru“ s reálnými koeficienty a_k, b_k ; důkaz je opět snadný, stačí si uvědomit platnost vzorců ze středoškolské látky. Tvrzení o součinu si stačí rozmyslet pro dva činitele. To však vyplývá ze vzorců (1.29) a (1.31), které jsme již připomínali. Konečně tvrzení o posunutí je důsledkem součtových vzorců pro $\sin(t + a)$ a $\cos(t + a)$. Celkově je to patrně jednodušší než práce s podmínkou symetrie $c_{-k} = \overline{c_k}$ z (2.6).

Důsledek 3.2.3. *Systém $\mathcal{T}_n$ všech trigonometrických polynomů stupně nejvýše n -tého tvoří lineární podprostor prostoru $\mathcal{T}$; pokud značíme symbolem $\subset\subset$ vztah „být podprostorem lineárního prostoru“, je $\mathcal{T}_n \subset\subset \mathcal{T} \subset\subset \mathcal{C}(\mathbf{T})$.*

Budeme-li na prostoru $\mathcal{C}(2\pi)$ pracovat s normou, platí

$$\|f\| = \|f\|_\infty = \sup\{|f(t)|; t \in I\},$$

kde I je libovolný interval délky alespoň 2π . Při užití jiné normy to vždy explicitně uvedeme. Připomeňme, že pokud $f_n \in \mathcal{C}(2\pi)$ a posloupnost $\{f_n\}$ *stejněměrně konverguje k funkci f* , je nutně $f \in \mathcal{C}(2\pi)$. Platí též zřejmě inkluze

$$\mathcal{T} \subset\subset \mathcal{C}(2\pi) \subset\subset L_2(2\pi).$$

Další analogie mezi polynomy a trigonometrickými polynomy se týká stejnoměrné aproximace.

Poznámka 3.2.4. Obě věty, tj. klasickou o stejnoměrné aproximaci (komplexní) funkce na uzavřeném intervalu $[a, b]$ „obyčejnými“ polynomy i tu, kterou nyní dokážeme, publikoval Weierstrass v práci [82] z r. 1885. Věty nejsou nezávislé, z kterékoli z nich lze dokázat tu zbývající, avšak cesta od klasické k trigonometrické je trochu složitější. Později ji dostaneme jako důsledek tzv. Fejérových vět. Pro zajímavost uvedeme elementární poněkud pracný klasický důkaz.

Věta 3.2.5 (Weierstrass 1885). *Nechť $f \in \mathcal{C}(\mathbf{T})$ a nechť $\varepsilon > 0$. Potom existuje trigonometrický polynom T , pro který je $\|f - T\| < \varepsilon$.*

Důkaz. Budeme provádět elementární úvahy založené na vlastnostech trigonometrických polynomů, popsaných v Lemmatu 3.2.1. Nejprve dokážeme částečný výsledek, který nám pak pomůže dokázat obecné tvrzení: Ke každému $\varepsilon > 0$ a každé funkci $f \in \mathcal{C}([0, \pi])$ existuje trigonometrický polynom T , který je *sudou funkcí* a pro který je $|f(t) - T(t)| < \varepsilon$ pro všechna $t \in [0, \pi]$.

Funkce $x \mapsto f(\arccos x)$, $x \in [-1, 1]$ je spojitá, takže existuje takový polynom $\sum_{k=0}^n a_k x^k$ stupně $n \in \mathbb{N}$, pro nějž

$$\left| f(\arccos x) - \sum_{k=0}^n a_k x^k \right| < \varepsilon.$$

Položíme-li $x = \cos t$, dostaneme pro všechna $t \in [0, \pi]$

$$\left| f(t) - \sum_{k=0}^n a_k \cos^k t \right| < \varepsilon,$$

kde součet je zřejmě sudým trigonometrickým polynomem. Nyní již přejdeme k důkazu vyslovené věty: Je-li $f \in \mathcal{C}(2\pi)$, rozložíme ji na sudou a lichou část

$$f(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2} + \frac{f(t) - f(-t)}{2}.$$

Funkce $g_1(t) = (f(t) + f(-t))/2$ a $g_2(t) = \sin t \cdot (f(t) - f(-t))/2$ jsou obě sudé, a tak k danému $\varepsilon > 0$ existují trigonometrické polynomy T_1, T_2 tak, že

$$|g_k(t) - T_k(t)| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad k = 1, 2 \quad \text{a} \quad t \in [0, \pi].$$

Protože g_k i T_k , $k = 1, 2$, jsou sudé funkce, platí nerovnost i na intervalu $[-\pi, \pi]$. Tyto funkce jsou však i 2π -periodické, a tak nerovnost platí pro všechna $t \in \mathbb{R}$. Odtud vyplývá, že trigonometrické polynomy

$$T_3(t) = T_1(t) \sin^2 t \quad \text{a} \quad T_4(t) = T_2(t) \sin t$$

aproximují s přesností $\varepsilon/4$ funkce $g_1(t) \sin^2 t$ a $g_2(t) \sin t$, takže pro jejich součet

$$g_1(t) \sin^2 t + g_2(t) \sin t = f(t) \sin^2 t$$

dostáváme pro $T_5 = T_3 + T_4$ odhad

$$|f(t) \sin^2 t - T_5(t)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Připomeňme, že jsme v této úvaze pracovali s libovolnou funkcí $f \in \mathcal{C}(2\pi)$. Analogicky lze k libovolné 2π -periodické funkci $g : t \rightarrow f(t - \pi/2)$, $t \in \mathbb{R}$, nalézt trigonometrický polynom T_6 tak, že pro $T_7(t) = T_6(t + \pi/2)$

$$|f(t) \cos^2 t - T_7(t)| = |f(t) \cos^2 t - T_6(t + \pi/2)| = |g(t) \sin^2 t - T_6(t)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Konečně pro $T_8 = T_5 + T_7$ dostaneme pro všechna $t \in \mathbb{R}$

$$|f(t) - T_8(t)| = |f(t) (\sin^2 t + \cos^2 t) - T_5(t) - T_7(t)| < \varepsilon,$$

čímž je důkaz tvrzení dokončen. □

V další větě budeme silně využívat poznatků z teorie integrálu. Připomeňme, že z vlastností stejnoměrné konvergence a předcházející věty vyplývá hustota systému všech trigonometrických polynomů v prostoru $\mathcal{C}(2\pi)$ i v případě, že je uvažujeme jako podprostory $L_p(2\pi)$ s normou $\|\cdot\|$. Dokážeme však ještě více. Platí následující tvrzení.

Věta 3.2.6. *Nechť $1 \leq p < \infty$, $\varepsilon > 0$ a nechť $f \in L_p(2\pi)$. Potom existuje trigonometrický polynom T tak, že $\|f - T\|_p < \varepsilon$.*

Důkaz. Uvedeme stručný popis jednotlivých kroků důkazu. Uvědomíme si, že stačí nalézt spojitou funkci g na intervalu $[-\pi, \pi]$, pro kterou $g(-\pi) = g(\pi)$ a tuto funkci periodicky rozšířit s periodou 2π na $\mathbb{R}$. Tuto funkci g pak aproximujeme trigonometrickým polynomem T podle Věty 3.2.5 tak, aby např. platila nerovnost $\|g - T\|_p < \varepsilon/4$.

Funkci $f \in L_1(2\pi)$ nejprve aproximujeme *jednoduchou omezenou* funkcí g_1 tak, že

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - g_1(t)|^p dt = \|f - g_1\|_p^p < (\varepsilon/4)^p.$$

Funkci g_1 dále aproximujeme pomocí Luzinovy věty (srv. [71], Věta 2.23) a sestrojíme *spojitou funkci* g_2 s kompaktním nosičem tak, že množina

$$\{x \in [-\pi, \pi]; g_1(x) \neq g_2(x)\}$$

bude mít tak malou míru, aby platilo $\|g_1 - g_2\|_p < \varepsilon/4$. Konečně definujeme spojitou funkci g na intervalu $[-\pi, \pi]$ tak, že $g = g_2$ na $[-\pi, \pi - \delta]$, $0 < \delta < 2\pi$, a g je lineární na intervalu $[\pi - \delta, \pi]$, přičemž $g(\pi) = g(-\pi)$. Přitom použijeme možné volby δ k tomu, aby $\|g_2 - g\|_p < \varepsilon/4$. Zbytek je důsledkem trojúhelníkové nerovnosti. □

3.3 Dirichletovo a Fejérové jádro

V této části zavedeme funkce, které se nazývají obvykle Dirichletovo a Fejérové jádro, a shrneme jejich vlastnosti, které budeme v dalším výkladu potřebovat. Jak ukážeme později, Fejérové jádro má „lepší“ vlastnosti.

Hodnotu *částečného součtu* prvních $n + 1$ členů Fourierovy řady v bodě $x \in \mathbb{R}$ budeme značit $s_n(f, x)$, tj.

$$s_n(f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}. \quad (3.7)$$

Budeme se snažit najít podmínky, které zaručí pro dostatečně širokou třídu funkcí f konvergenci $s_n(f, x)$, dle možnosti přímo k hodnotě $f(x)$, a to nejen ve smyslu obyčejné konvergence, ale i ve smyslu jednoduchých sčítacích metod. Proto bude pro nás důležité vyjádřit $s_n(f, x)$ v takové formě, abychom mohli s $s_n(f, x)$ jednoduše pracovat. Zavedeme proto dvě důležité funkce (*jádra*), které nám takové elegantní vyjádření $s_n(f, x)$ umožní. Budeme pracovat s *Dirichletovým jádrem* D_n a *Fejérovým jádrem* K_n . Označíme-li pro $n \in \mathbb{N}$

$$D_n(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=-n}^n e^{ikt}, \quad (3.8)$$

lze částečný součet $s_n(f, x)$ Fourierovy řady funkce f v bodě x vyjádřit ve tvaru

$$\begin{aligned} s_n(f, x) &= \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} = \sum_{k=-n}^n \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt \right) e^{ikx} = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(t) \frac{1}{2} \sum_{k=-n}^n e^{ik(x-t)} \right) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t) dt, \end{aligned}$$

takže platí vzorec

$$s_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t) dt. \quad (3.9)$$

Podobně pro vyjádření průměrů posloupnosti částečných součtů zavedeme označení $\sigma_n(f, x) = 1/(n+1) \sum_{k=0}^n s_k(f, x)$. Snadno nahlédneme, že

$$\sigma_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) K_n(x-t) dt, \quad (3.10)$$

kde jádro K_n je vyjádřeno pomocí jader D_n vzorcem

$$K_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(x). \quad (3.11)$$

Právě „zprůměrování“ je příčinou podstatně odlišných vlastností obou jader. Všimneme si nejprve vyjádření Dirichletova jádra, avšak před tím uvedeme několik poznámek.

Poznámky 3.3.1. (a) Znovu připomínáme, že pojem Fourierovy řady je *podstatně spjat s užívaným integrálem*. Při použití Lebesgueova integrálu můžeme Fourierovu řadu vytvořit pro podstatně širší třídu funkcí f , neboť koeficienty a_k , b_k a c_k jsou definovány právě pomocí integrálu, jehož existence závisí na f .

(b) Velikost periody není příliš podstatná: můžeme analogicky pracovat též se systémem funkcí $\{1, \sin(2k\pi x), \cos(2k\pi x)\}$, $k \in \mathbb{Z}$, které jsou 1-periodické, nebo pro $l > 0$ s funkcemi $\{1, \sin(2k\pi x/l), \cos(2k\pi x/l)\}$, $k \in \mathbb{Z}$, které mají periodu l .

(c) Existují-li integrály definující Fourierovy koeficienty f , pak pro *sudou* funkci f platí $b_k = 0$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$ a podobně pro *lichou* funkci f je $a_k = 0$ pro všechna $k \in \mathbb{N}_0$. To hraje roli například při formulaci příkladů typu: „... rozvedte v sinovou řadu funkci f “ nebo „... rozvedte v kosinovou řadu“, apod. S takovými formulacemi, které je třeba chápat jako jisté licence, umožňující stručnější vyjádření, se čtenář setká zejména při formulaci příkladů a cvičení.

(d) Budeme užívat označení $\widehat{f}(k)$ pro c_k , $k \in \mathbb{Z}$; je z něj patrné, s jakou funkcí pracujeme a později vede ke zvýraznění formální souvislosti s Fourierovou transformací funkce f

$$\widehat{f}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-itx} dt, \quad x \in (0, \infty).$$

Pro snadné vyjádření Dirichletova a Fejérová jádra se nám budou hodit některé elementární vzorce. Z Moivreovy věty vyplývá pro všechna $n \in \mathbb{N}$ rovnost

$$\sum_{k=1}^n e^{ikx} = \sum_{k=1}^n \cos kx + i \sum_{k=1}^n \sin kx;$$

snadno nahlédneme, že také

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n e^{ikx} &= \frac{e^{ix} + e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} \frac{e^{-ix/2}}{e^{-ix/2}} = -\frac{e^{ix/2} - e^{i(n+1/2)x}}{e^{ix/2} - e^{-ix/2}} = \\ &= \frac{[\cos(n+1/2)x + i \sin(n+1/2)x] - [\cos x/2 + i \sin x/2]}{2i \sin x/2} = \\ &= \frac{[\sin(n+1/2)x - \sin x/2] + i [\cos x/2 - \cos(n+1/2)x]}{2 \sin x/2}. \end{aligned}$$

Odtud dostaneme vzorce

$$C_n(x) := \sum_{k=1}^n \cos kx = \frac{\sin(n+1/2)x - \sin x/2}{2 \sin x/2}, \quad (3.12)$$

$$S_n(x) := \sum_{k=1}^n \sin kx = \frac{\cos x/2 - \cos(n+1/2)x}{2 \sin x/2}, \quad (3.13)$$

které platí pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{2n\pi; n \in \mathbb{Z}\}$, resp. kratčeji $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ (poslední „součin“ chápeme „množinově“).

Důsledek 3.3.2. Z (3.12), (3.13) plynou pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ odhady

$$\left| \sum_{k=1}^n \cos kx \right| \leq \frac{1}{|\sin(x/2)|}, \quad \left| \sum_{k=1}^n \sin kx \right| \leq \frac{1}{|\sin(x/2)|}. \quad (3.14)$$

Je vhodné si povšimnout, že druhý ze součtů je pro *každé* $x \in \mathbb{R}$ omezený nezávisle na $n \in \mathbb{N}_0$: pro $x = 2\pi k$ jsou totiž částečné součty řady $\sum_{k=1}^{\infty} \sin kx$ vesměs rovny 0. Odhad je

závislý na x , stejnoměrný odhad vzhledem k $x \in \mathbb{R}$ nalézt nelze. Na druhé straně však na každém kompaktním intervalu I neobsahujícím násobek $m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$, lze součty odhadnout nezávisle na $x \in I$. Podle Věty 1.2.7 za předpokladu, že nerostoucí posloupnosti $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ konvergují k 0, je konvergence řad $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$ a $\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$ na každém takovém intervalu I stejnoměrná.

V dalším budeme mnohokrát používat vyjádření z následujícího tvrzení:

Lemma 3.3.3 (Dirichletovo jádro). *Dirichletovo jádro D_n , $n \in \mathbb{N}_0$, má následující vlastnosti:*

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad D_n(x) &= \frac{1}{2} \left(1 + \sum_{k=1}^n (e^{ikx} + e^{-ikx}) \right) = \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kx \right) = \\ &= \frac{\sin(n + 1/2)x}{2 \sin x/2} = (1/2) (\sin(nx) \cdot \cotg(x/2) + \cos(nx)), \end{aligned}$$

přičemž vyjádření na druhém řádku mají smysl pouze pro $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$,

$$\text{(b)} \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x) dx = 1,$$

$$\text{(c)} \quad D_n(x) = D_n(-x) \text{ pro všechna } x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z},$$

$$\text{(d)} \quad D_n(x) \leq \frac{2n+1}{2} \text{ pro všechna } x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z},$$

$$\text{(e)} \quad |D_n(x)| \leq \frac{\pi}{2x}, \quad x \in (0, \pi].$$

Důkaz. První dvě rovnosti v (a) plynou z definice jádra (3.8) a Eulerových vzorců (2.2). Z tohoto vyjádření též vidíme, že D_n jsou vesměs sudé funkce, platí tedy (c).

Vyjádření na druhém řádku v (a) dostaneme úpravou ze vzorce (3.12) nebo z druhé rovnosti v (1.30) dosazením $(k + 1/2)x$ za m a $(k - 1/2)x$ za n . Dostaneme tak pro volbu $k = 1, 2, \dots, n$ rovnosti

$$\sin\left(k + \frac{1}{2}\right)x - \sin\left(k - \frac{1}{2}\right)x = 2 \cos(kx) \sin \frac{x}{2}$$

a jejich sečtením spolu s využitím „teleskopičnosti“ součtu vzorec

$$\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x - \sin \frac{x}{2} = \sin \frac{x}{2} \left(2 \sum_{k=1}^n \cos kx \right).$$

Levou stranu ještě upravíme pomocí druhé rovnosti v (1.30) a po další jednoduché úpravě obdržíme s přihlédnutím k již odvozenému vyjádření D_n

$$\sin\left(k + \frac{1}{2}\right)x = 2 \sin \frac{x}{2} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kx \right) = 2 \sin \frac{x}{2} D_n(x). \quad (3.15)$$

To již pro $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ dává třetí rovnost. Další rovnost dostaneme z (3.15) rozepsáním levé strany pomocí součtového vzorce pro funkci sinus a úpravou, ovšem opět pouze pro $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

Konstantní funkce $f \equiv 1$ je prvkem trigonometrického systému, jehož prvky jsou vzájemně ortogonální. Odtud plyne

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{2} = 1$$

pro všechna $n \geq 0$; tím jsme dokázali rovnost v (b). Odhad v (d) vyplývá z „kosinového“ vyjádření D_n v (a). Konečně snadno nahlédneme, že funkce $\sin$ je na intervalu $[0, \pi/2]$ konkávní, takže je na tomto intervalu zdola odhadnuta funkcí $2x/\pi$. Proto je

$$\sin \frac{x}{2} \geq \left(\frac{2x}{\pi} \right) / 2 = \frac{x}{\pi}, \quad x \in (0, \pi], \quad (3.16)$$

z čehož už snadno obdržíme

$$\left| \frac{\sin((n+1/2)x)}{2 \sin(x/2)} \right| \leq \frac{1}{2 \cdot x/\pi} = \frac{\pi}{2x}. \quad (3.17)$$

Tím jsou všechna tvrzení lemmatu dokázána. $\square$

Cvičení 3.3.4. Odvoďte analogicky z odhadů (3.14) jako jednoduchý důsledek tyto odhady:

$$|S_n(x)| \leq \pi/2x, \quad x \in (0, \pi], \quad \text{a} \quad |D_n(x)| \leq \pi/2x, \quad x \in (0, \pi], \quad (3.18)$$

kteřé nám i v dalším budou užitečné.

Příklad 3.3.5. Ukážeme si, jak odvodit tvar Dirichletova jádra z vyjádření

$$s_n(f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

a vzorců pro Fourierovy koeficienty (2.12). Po dosazení dostáváme

$$\begin{aligned} s_n(f, x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot 1 dt + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt \right) \cos kx + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt dt \right) \sin kx = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n (\cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx) \right) dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(x-t) \right) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t) dt, \end{aligned}$$

což dává již odvozený vzorec.

Lemma 3.3.6 (Fejérové jádro). Fejérové jádro K_n , $n \in \mathbb{N}_0$, má následující vlastnosti:

$$(a) \quad K_n(x) = \frac{1}{2} \sum_{j=-n}^n \left(1 - \frac{|j|}{n+1} \right) e^{ijx} = \frac{2}{(n+1)} \left(\frac{\sin((n+1)x/2)}{2 \sin(x/2)} \right)^2,$$

kde druhá rovnost platí pouze pro $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$,

$$(b) \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(x) dx = 1,$$

$$(c) \quad K_n(x) = K_n(-x) \text{ pro všechna } x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$$

$$(d) \quad 0 \leq K_n(x) \leq \frac{n+1}{2} \text{ pro všechna } x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$$

$$(e) \quad 0 \leq K_n(x) \leq \frac{\pi^2}{2(n+1)x^2}, \quad x \in (0, \pi].$$

Důkaz. Z definice Dirichletova jádra plyne pro $n \geq 0$

$$(n+1)K_n(x) = \sum_{k=0}^n D_k(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2} \sum_{j=-k}^k e^{ijx} = \frac{1}{2} \sum_{k=-n}^n (n+1-|k|) e^{ikx},$$

což dává první část (a). Poslední rovnost nejsnáze nahlédneme z následujícího schematického rozpisu výrazu za první sumou:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(e^{i0x} + \right. \\ & \quad e^{i0x} + e^{i1x} + e^{-i1x} + \\ & \quad e^{i0x} + e^{i1x} + e^{-i1x} + e^{i2x} + e^{-i2x} + \\ & \quad \vdots \\ & \quad \left. e^{i0x} + e^{i1x} + e^{-i1x} + e^{i2x} + e^{-i2x} + \dots + e^{inx} + e^{-inx} \right); \end{aligned}$$

zde se vyskytuje e^{i0x} v prvním sloupci $(n+1)$ -krát, e^{ix} a e^{-ix} je obsaženo ve druhém a třetím sloupci n -krát, atd., až konečně e^{inx} a e^{-inx} jsou v posledních dvou sloupcích jedenkrát. Toto schema činí poslední rovnost velmi názornou.

Pro důkaz druhé rovnosti v (a) vyjdeme z vyjádření (3.11), z něhož plyne

$$(n+1)K_n(x) = \sum_{k=0}^n D_n(x); \quad (3.19)$$

dosadíme-li za $D_k(x)$, $k = 0, \dots, n$, „sinová“ vyjádření z Lemmatu 3.3.3, dostaneme po vynásobení vzniklé rovnosti faktorem $2 \sin^2(x/2)$

$$2(n+1)\sin^2(x/2)K_n(x) = \sum_{k=0}^n \sin((k+1/2)x) \sin(x/2).$$

Součiny, které sčítáme na pravé straně předcházející rovnosti, upravíme pomocí třetího vzorce v (1.30) na tvar, ve kterém využijeme teleskopičnosti konečného součtu. Tak postupně dostaneme

$$\sum_{k=0}^n \frac{\cos kx - \cos(k+1)x}{2} = \frac{1 - \cos((n+1)x)}{2} = \sin^2\left((n+1)\frac{x}{2}\right),$$

z čehož jednoduchou úpravou plyne zbytek (a) a zároveň též i (c).

Rovnost (b) plyne z definice K_n a z Tvzení 3.3.3 (b). Z vyjádření Dirichletova jádra dostáváme z Tvzení 3.3.3 (a) „hrubým“ odhadem $|D_k(x)| \leq (2k+1)/2$, takže pro nezáporné Fejérovovo jádro $K_n(x)$ je

$$(n+1)K_n(x) = \sum_{k=0}^n D_n(x) \leq \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n (2k+1) = \frac{(n+1)^2}{2};$$

odtud již snadno plyne (d). Protože jsme pro $x \in (0, \pi]$ odvodili odhad (3.16), dostáváme jeho užitím

$$0 \leq K_n(x) \leq \left(\frac{\pi}{x}\right)^2 \frac{1}{2(n+1)}, \quad 0 < x \leq \pi.$$

Tím jsou všechny výše uvedené vlastnosti jádra K_n dokázány. $\square$

Poznámka 3.3.7. Některá vyjádření jader budí podezření, že mohou být obě jádra v okolí bodů, které vylučujeme („nulové body jmenovatelů“), neomezená. Vyjádření pomocí kosinů v Lemmatu 3.3.3 a vyjádření K_n pomocí D_n však ukazují, že obě jádra lze ve skutečnosti spojitě rozšířit na $\mathbb{R}$.

Často se proto uzavírá úmluva (někdy i mlčky!), že se za jádra považují právě tato spojitá rozšíření i v případě vyjádření, ve kterých jsme body tvaru $2\pi\mathbb{Z}$ vyloučili. Poznamenejme ještě, že *všechny* tvary jader nebudeme využívat, uvedli jsme je zejména proto, aby čtenář viděl, jak se výpočty v oblasti teorie Fourierových řad provádějí. Podotýkáme, že různá vyjádření nejsou samoučelná, při provádění výpočtů může být jiný tvar jádra velmi užitečný.

Tím uzavřeme přípravné úvahy pro vyšetření bodové konvergence Fourierovy řady. Budeme se jí věnovat v následující kapitole. Z historického hlediska šlo o relativně složitý problém, který vyžadoval vytvoření nového aparátu pro vyšetřování konvergence *neabsolutně konvergentních* řad. Konvergenční kritéria pro tento typ konvergence se objevila o něco později než kritéria pro absolutní konvergenci a jejich aplikace je o trochu složitější.

Kapitola 4

Bodová konvergence Fourierovy řady

V této kapitole si podrobněji všimneme otázek konvergence Fourierovy řady a dokážeme některá tvrzení o její bodové konvergenci.

4.1 Nejjednodušší případ

Připomeňme, že pro funkci $f \in \mathcal{L}(2\pi)$ jsme již dokázali, že platí

$$|\widehat{f}(k)| \rightarrow 0 \quad \text{pro} \quad |k| \rightarrow +\infty.$$

Tvrzení 2.2.5, ze kterého jsme tento poznatek odvodili, ač bývá „skromně“ nazýváno Riemann-Lebesgueovo lemma, je ve skutečnosti velmi důležitým a silným tvrzením. V jeho Důsledku 2.4.2 je totiž již obsažen klíč k elegantnímu důkazu bodové konvergence Fourierovy řady. Dokážeme jednoduchou variantu takového tvrzení, důkaz však lze dále bez relativní ztráty jednoduchosti zobecňovat; srv. [38]. Důkaz je proti klasickému kratší a umožňuje jiný pohled na problematiku konvergence Fourierových řad, ale je zejména při prvním studiu této problematiky „méně průhledný“.

Tvrzení 4.1.1. *Nechť $f \in \mathcal{L}(2\pi)$ a nechť $t \in \mathbb{R}$ je takový bod, ve kterém má f vlastní derivaci $f'(t)$. Potom pro částečné součty Fourierovy řady platí*

$$s_n(f, t) \rightarrow f(t) \quad \text{pro} \quad n \rightarrow +\infty.$$

Důkaz. Budeme pracovat s exponenciálním tvarem Fourierovy řady. Jestliže funkce f je z $\mathcal{L}(2\pi)$ a $\widehat{f}(k)$ její k -tý Fourierův koeficient, definujeme pro $m, n \in \mathbb{N}$

$$s_{m,n}(f, t) := \sum_{k=-n}^m \widehat{f}(k) e^{ikt};$$

tak jen nepatrně zobecňujeme „symetrické součty“ a dokážeme tedy o trochu více, totiž že

$$s_{m,n}(f, t) \rightarrow f(t) \quad \text{pro} \quad m, n \rightarrow +\infty.$$

Rozmyslíme si důkaz pro $t = 0$ a $f(t) = 0$, který díky této volbě bude formálně velmi jednoduchý. Tato redukce je bez ztráty obecnosti možná díky tomu, že závislost $s_n(f, t)$ na

funkcích je lineární, a že po posunutí je vzniklá funkce opět z $\mathcal{L}(2\pi)$. Protože nyní platí $f(0) = 0$ a $f'(0)$ je vlastní, existuje pro funkci

$$g(x) = \frac{f(x)}{e^{ix} - 1} = -i \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \frac{ix}{e^{ix} - 1} \quad (4.1)$$

konečná $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ a g je tudíž v okolí bodu 0 omezená. Proto leží g také v $\mathcal{L}(\mathbb{R})$. Jelikož je $f(x) = (e^{ix} - 1)g(x) = e^{ix}g(x) - g(x)$, snadno nahlédneme, že pro Fourierovy koeficienty funkce f platí

$$\widehat{f}(k) = \widehat{g}(k - 1) - \widehat{g}(k). \quad (4.2)$$

Odtud však vidíme, že Fourierova řada funkce f je ve zřejmém smyslu *teleskopická*. Proto platí podle Důsledku 2.4.2

$$s_{m,n}(f, 0) = \sum_{k=-n}^m \widehat{f}(k) = \widehat{g}(-n - 1) - \widehat{g}(m) \rightarrow 0 = f(0) \quad \text{pro } m, n \rightarrow +\infty,$$

čímž je důkaz dokončen. $\square$

Poznámky 4.1.2. 1. Již předcházející Tvzení 4.1.1 nám umožňuje v jednoduchých případech rozhodnout o bodové konvergenci Fourierovy řady. Tak např. Fourierova řada funkce z Příkladu 3.1.3 konverguje k této funkci ve všech bodech $\mathbb{R}$ a vzorec (4) z úvodní kapitoly platí pro všechna $t \in (0, 2\pi)$.

2. Ze vztahu (4.1) je zřejmé, že pro omezenost funkce g v okolí nulových bodů jmenovatele stačí omezenost

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}, \quad \text{resp.} \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

v nějakém okolí bodu 0, resp. x_0 .

Příklady 4.1.3. 1. Položíme-li $f(x) = x$, $x \in (-\pi, \pi)$, je 2π -periodické rozšíření f_1 této funkce definováno na $\mathbb{R} \setminus \{x; x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ a je to lichá funkce, ležící v $\mathcal{L}(2\pi)$. Proto bude platit pro Fourierovy koeficienty f_1 rovnost $a_k = 0$, $k \in \mathbb{N}_0$, zatímco pro $k \in \mathbb{N}$ je

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \sin kx \, dx = -\frac{2}{\pi} \frac{x \cos kx}{k} \Big|_{x=0}^\pi + \frac{2}{k\pi} \int_0^\pi \cos kx \, dx = \frac{2(-1)^{k+1}}{k}.$$

Proto, vzhledem k diferencovatelnosti f_1 na $\mathbb{R} \setminus \{x; x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, platí na této množině

$$f_1(t) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \sin kt}{k} = 2 \left(\frac{\sin t}{1} - \frac{\sin 2t}{2} + \frac{\sin 3t}{3} - \dots \right).$$

Snadno též nahlédneme, že ve zbývajících bodech $t \in \mathbb{R}$ konverguje tato řada z definice k 0.

2. Podobně při analogickém označení, ale již trochu rychleji, pro funkci $f(x) = x^2$, $x \in (-\pi, \pi)$ a její 2π -periodické rozšíření f_1 dostaneme

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 \, dx = \frac{2x^3}{3\pi} \Big|_{x=0}^\pi = \frac{2\pi^2}{3},$$

a pro ostatní k , tj. $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 \cos kx \, dx = \frac{2x^2 \sin kx}{k\pi} \Big|_{x=0}^\pi - \frac{4}{k\pi} \int_0^\pi x \sin kx \, dx = \\ &= \frac{4x \cos kx}{k} \Big|_{x=0}^\pi - \frac{1}{k} \int_0^\pi \cos kx \, dx = (-1)^k \frac{4}{k^2}. \end{aligned}$$

Proto platí pro $t \neq \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

$$f_1(t) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos kx}{k^2} = \frac{\pi^2}{3} - 4 \left(\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \dots \right). \quad (4.3)$$

Protože rovnost (4.3) platí pro $t = 0$, dostaneme jako vedlejší výsledek vzorec pro součet zajímavé číselné řady

$$G = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}; \quad (4.4)$$

řada v (4.4) konverguje absolutně. Označme

$$E = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \quad \text{a} \quad F = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}. \quad (4.5)$$

Snadno zjistíme pomocí elementárních operací s řadami, že platí $E = F + E/4$, tj. $F = 3E/4$, a $G = F - E/4 = E/2$; z těchto vztahů pak snadno obdržíme pro řady z (4.5)

$$E = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{a} \quad F = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}. \quad (4.6)$$

3. Je-li f definována na intervalu $(0, \pi)$, lze ji rozšířit na interval $(-\pi, \pi)$ různým způsobem. Tak lze získat různé rozvoje f na intervalu $(0, \pi)$. Je-li toto rozšíření sudou funkcí na intervalu $(-\pi, \pi)$, jsou koeficienty b_k tohoto rozvoje vesměs rovny 0, je-li toto rozšíření lichou funkcí na $(-\pi, \pi)$, jsou rovny 0 všechny koeficienty a_k . Toho se často používá.

Jednu z těchto možností jsme vyšetřili v předcházejícím příkladu, porovnáme ji proto s případem lichého rozšíření a určíme ještě Fourierův rozvoj funkce $f_1(x) = x^2 \operatorname{sgn} x$, $x \in (-\pi, \pi)$. Snadno spočteme

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 \sin kx \, dx = \dots = \frac{2(-1)^{k+1}\pi}{k} + \frac{4((-1)^k - 1)}{\pi k^3}.$$

Proto platí pro $t \neq \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} f_1(t) &= 2\pi \left(\frac{\sin t}{1} - \frac{\sin 2t}{2} + \frac{\sin 3t}{3} - \dots \right) - \\ &\quad - \frac{8}{\pi} \left(\frac{\sin t}{1^3} + \frac{\sin 3t}{3^3} + \frac{\sin 5t}{5^3} + \dots \right); \end{aligned} \quad (4.7)$$

srovnajte „názorná vyjádření“ obou rozvojů (4.3) a (4.7). Pro body nespojitosti funkce f_1 , které jsou tvaru $t = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, vidíme, že Fourierův rozvoj f_1 v těchto bodech konverguje k 0, což je průměr limit $f_1(t+) = \lim_{x \rightarrow t+} f_1(x)$ a $f_1(t-) = \lim_{x \rightarrow t-} f_1(x)$.

4. Vrátime se ještě jednou k funkci $f(x) = x^2$ a nalezneme Fourierův rozvoj funkce f_1 , což bude 2π -periodické rozšíření restrikce $f|_{[0,2\pi)}$. Snadno opět spočteme

$$a_0 = \frac{8\pi^2}{3}, \quad a_k = \frac{4}{k^2}, \quad b_k = -\frac{4\pi}{k},$$

z čehož dostaneme pro $t \neq \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \frac{4\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kt}{k^2} - 4\pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kt}{k} = \\ &= \frac{4\pi^2}{3} + 4 \left(\frac{\cos t}{1^2} + \frac{\cos 2t}{2^2} + \frac{\cos 3t}{3^2} + \dots \right) - \\ &\quad - 4\pi \left(\frac{\sin t}{1} + \frac{\sin 2t}{2} + \frac{\sin 3t}{3} + \dots \right); \end{aligned} \quad (4.8)$$

srovnajte nalezené vyjádření s rozvoji (4.3) a (4.7). Snadno též nahlédneme, že v bodech $t = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, je součet řady $2\pi^2$ a je opět průměrem jednostranných limit funkce f_1 v těchto bodech. Dosazením $t = 0$ dostaneme vztah

$$2\pi^2 = \frac{4\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2},$$

ze kterého pomocí úpravou opět dostaneme první rovnost v (4.6).

Poznámka 4.1.4. Poznamenejme, že v předchozích příkladech jsme pomocí již dokázaného jednoduchého Tvrzení 4.1.1 odvodili všechny poznatky zmíněné v úvodní kapitole, kde jsme je odvodili intuitivními nekorektními postupy tak, jak k nim dospěli matematici v 18. stol.

Příklad 4.1.5. Někdy vede vyjádření Fourierovou řadou k „teoretičtějším“ výsledkům. Funkce $\cos zx$ je sudou funkcí proměnné $x \in \mathbb{R}$ pro každé reálné z . V jejím vyjádření Fourierovou řadou budou koeficienty b_k vesměs nulové. Dále snadno spočteme

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos zx \, dx = \frac{2}{\pi} \frac{\sin zx}{z} \Big|_{x=0}^{\pi} = \frac{2 \sin \pi z}{\pi z}.$$

Pro $k \in \mathbb{N}$ dostaneme postupně

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos zx \cos kx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\cos(z+k)x + \cos(z-k)x) \, dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin(z+k)x}{z+k} + \frac{\sin(z-k)x}{z-k} \right) \Big|_{x=0}^{\pi} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin(\pi z + k\pi)}{z+k} + \frac{\sin(\pi z - k\pi)}{z-k} \right) = \\ &= (-1)^k \frac{2z \sin \pi z}{\pi(z^2 - k^2)}. \end{aligned}$$

Po všechna $x \in \mathbb{R}$ tedy platí rovnost

$$\cos zx = \frac{2z \sin \pi z}{\pi} \left(\frac{1}{2z^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2 - z^2} \right). \quad (4.9)$$

Položíme-li nyní $x = \pi$ a dělíme-li výrazem $\sin \pi z$, dostaneme známý vzorec rozkladu funkce $\cotg \pi z, z \neq k\pi, k \in \mathbb{N}$:

$$\cotg \pi z = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{k^2 - z^2} \right). \quad (4.10)$$

Poznámka 4.1.6. I když dále budeme dokazovat tvrzení se slabšími předpoklady, všimneme si ještě na okamžik vlivu předpokladů *silnějších*. Předpokládejme například, že $f \in \mathcal{C}(2\pi)$ má spojitou druhou derivaci f'' . Pak použití metody per partes dává

$$\begin{aligned}\pi a_k &= \frac{1}{k} f(t) \sin kt \Big|_{t=0}^{2\pi} - \frac{1}{k} \int_0^{2\pi} f'(t) \sin kt \, dt = \\ &= \frac{1}{k^2} f'(t) \cos kt \Big|_{t=0}^{2\pi} - \frac{1}{k^2} \int_0^{2\pi} f''(t) \cos kt \, dt ;\end{aligned}$$

je-li $M = \max \{|f''(t)|; t \in \mathbb{R}\}$, dostaneme odtud $|a_k| \leq 2M/k^2$. Analogicky lze stejně snadno odhadnout $|b_k| \leq 2M/k^2$, takže je

$$|a_k \cos kt + b_k \sin kt| \leq 4M/k^2, \quad t \in \mathbb{R},$$

a Fourierova řada pro f konverguje k f stejnoměrně a „dost rychle“. Čtenář jistě snadno toto pozorování zobecní.

4.2 Fourierova řada spojité funkce

Čtenář, povzbuzený úspěchem při vcelku snadném získání pozitivních výsledků, může snadno načrtnout další plán postupu: funguje-li popsaná technika v bodech, ve kterých má funkce rozvíjená ve Fourierovu řadu, vlastní derivaci, mohli bychom nyní analogický výsledek o bodové konvergenci dokázat pro funkce z $\mathcal{C}(2\pi)$. Jde však o těžký a, jak dále ukážeme, i neřešitelný problém. Platí totiž následující tvrzení:

Věta 4.2.1 (du Bois-Reymond 1876). *Existuje taková funkce $f \in \mathcal{C}(2\pi)$, jejíž Fourierova řada diverguje alespoň v jednom bodě.*

Poznámka 4.2.2. Původní a současně první důkaz této věty, který podal P. DU BOIS-REYMOND (1831–1899), byl konstruktivní. I když původní důkaz byl zjednodušen a byly nalezeny přístupnější konstruktivní důkazy, použijeme *existenční důkaz*, založený na tzv. Banach-Steinhausově větě. Ta vyplývá z Baireovy věty, kterou nejdříve připomeneme.

Důkaz Věty 4.2.1. Využijeme poznatky z teorie metrických prostorů a Větu 1.5.4. Nejprve si uvědomíme, že $\mathcal{C}(2\pi)$ je úplný normovaný lineární prostor, protože supremová norma dává stejnoměrnou konvergenci. Budeme pracovat s Dirichletovým jádrem D_n . Z vyjádření (3.9) částečného součtu $s_n(f, x)$ Fourierovy řady funkce f v bodě x plyne, že $s_n(f, x)$ je v závislosti na $f \in \mathcal{C}(2\pi)$ spojitý lineární funkcionál na $\mathcal{C}(2\pi)$.

Zvolme dále $x = 0$ a odhadněme normu lineárního funkcionálu $L_n f = s_n(f, 0)$ na prostoru $\mathcal{C}(2\pi)$. Snadno odůvodníme

$$\|L_n\| = \sup \left\{ \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(-t) \, dt \right| ; \|f\| \leq 1 \right\} \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| \, dt = \|D_n\|_1.$$

V tomto odhadu platí ve skutečnosti rovnost, protože funkci $\operatorname{sgn} D_n(t)$, pro kterou hodnota L_n je rovna $\|D_n\|_1$, lze libovolně přesně aproximovat spojitými funkcemi (ovšem v normě $\mathcal{L}(2\pi)$, nikoliv supremové!). Dostaneme tedy $\|L_n\| = \|D_n\|_1$. Nyní normu $\|D_n\|_1$ odhadneme zdola: z nerovnosti $|\sin(t/2)| \leq t/2$, $t \in (0, \infty)$, plyne (integrand je sudá funkce)

$$\|D_n\|_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin((n+1/2)t)}{2 \sin t/2} \right| \, dt \geq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |\sin((n+1/2)t)| \frac{dt}{t}.$$

V posledním integrálu v předcházejícím vztahu provedeme nejprve substituci $v = (n + 1/2)t$ a obdržený integrál pak budeme dále odhadovat:

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_0^{(n+1/2)\pi} |\sin v| \cdot \frac{n+1/2}{v} \cdot \frac{dv}{n+1/2} &> \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin v|}{v} dv \geq \\ &\geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k\pi} \int_0^\pi |\sin v| dv = \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

Z divergence harmonické řady dostáváme $\|L_n\| = \|D_n\|_1 \rightarrow +\infty$ pro $n \rightarrow \infty$, takže normy $\|L_n\|$ nejsou stejně omezené. Připomeňme, že za L_n byly zvoleny částečné součty $s_n(f, 0)$; existuje tedy $f \in \mathcal{C}(2\pi)$, pro níž Fourierova řada v bodě 0 diverguje (a dokonce je takových funkcí „hodně“, neboť tvoří hustou množinu v $\mathcal{C}(2\pi)$). $\square$

Poznámka 4.2.3. (a) Vyslovili jsme pouze velmi jednoduchou verzi Banach-Stainhausovy věty; tuto větu není obtížné dále zobecnit.

(b) Celkem snadno lze „špatnou množinu“, pro jejíž body Fourierova řada diverguje, dále zvětšovat v tomto smyslu: lze najít $f \in \mathcal{C}(2\pi)$, pro kterou Fourierova řada diverguje ve více bodech, např. v bodech nekonečné podmnožiny intervalu $[0, 2\pi]$. Tato množina může být dokonce hustá typu G_δ v intervalu $[0, 2\pi]$ a proto nemusí být spočetná, protože hustá G_δ -množina v úplném metrickém prostoru je 2. kategorie (srovnejte např. s [32] nebo s [71]).

(c) Dnes víme, že Fourierova řada funkce $f \in \mathcal{C}(2\pi)$ nemůže divergovat např. ve všech bodech *nedegenerovaného* intervalu: konverguje totiž *skoro všude* ve smyslu Lebesgueovy míry. Tento výsledek, který je řešením velmi dlouho neřešeného problému, náleží L. CARLESONOVI (*1928). Na druhé straně již r. 1926 dokázal A. N. KOLMOGOROV (1903–1987), že existuje funkce z $\mathcal{L}(2\pi)$, jejíž Fourierova řada diverguje *ve všech bodech* $\mathbb{R}$. K těmto otázkám se ještě vrátíme.

4.3 Fejérová věta o sčítatelnosti

V této části dokážeme tvrzení, které ukáže cestu, jak se s problémem možné divergence Fourierovy řady funkce $f \in \mathcal{C}(2\pi)$ vyrovnat. Pro nás bude v další části výkladu vodítkem pro důkaz modernější verze tvrzení, které je sice starší, avšak trochu složitější; srv. se 13. částí (tj. 2.13) této kapitoly.

Budeme velmi často pracovat s jednostrannými limity vyšetřovaných funkcí; pro ně budeme užívat standardní označení

$$f(x+) := \lim_{t \rightarrow x+} f(t), \quad f(x-) := \lim_{t \rightarrow x-} f(t).$$

Věta 4.3.1 (Fejér 1904). *Nechť funkce f je z $\mathcal{L}(2\pi)$ a nechť v (pevně zvoleném) bodě $x \in \mathbb{R}$ existují (konečné) jednostranné limity $f(x+)$, $f(x-)$. Potom platí*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(f, x) = (C) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx} = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

Je-li navíc funkce f spojitá, průměry

$$\sigma_n(f, x) = \sum_{k=-n}^n \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) \hat{f}(k) e^{ikx}$$

konvergují k $f(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Důkaz. Pro fixované x ze znění věty položíme

$$s(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

Dále si uvědomíme, že jednoduchou substitucí dostaneme

$$\sigma_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) K_n(x-t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) K_n(t) dt.$$

S ohledem na vlastnost (b) z Lemmatu 3.3.6 platí (dokonce pro jakékoli číslo $z \in \mathbb{C}$ na místě $s(x)$)

$$\sigma_n(f, x) - s(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) K_n(t) dt - \frac{s(x)}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t) dt.$$

Rozdíl vyjádříme jediným integrálem a ten pak vyjádříme jako součet dvou integrálů přes intervaly $(-\pi, 0)$ a $(0, \pi)$; první ještě jednoduchou substitucí převedeme na integrál přes interval $(0, \pi)$ a součet vyjádříme jediným integrálem. Dostaneme

$$\sigma_n(f, x) - s(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x+t) + f(x-t) - 2s(x)] K_n(t) dt.$$

Výraz v poslední hranaté závorce označíme $\Phi(x, t)$. Z předchozího dostaneme pro $0 < \delta < \pi$

$$|\sigma_n(f, x) - s(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{\delta} |\Phi(x, t)| K_n(t) dt + \int_{\delta}^{\pi} |\Phi(x, t)| K_n(t) dt \right).$$

Platí

$$|\Phi(x, t)| \leq |f(x+t) - f(x+)| + |f(x-t) - f(x-)|;$$

to nám umožní odhad: Volme $\varepsilon > 0$ libovolně a pak zvolme δ , $0 < \delta < \pi$ tak, aby pro všechna t , $0 < t < \delta$, platilo

$$|\Phi(x, t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Snadno odhadneme první z integrálů

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} |\Phi(x, t)| K_n(t) dt \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} \frac{\varepsilon}{2} K_n(t) dt < \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t) dt = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dále z Lemmatu 3.3.6 (e) postupně dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{\pi} |\Phi(x, t)| K_n(t) dt &\leq \frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{\pi} |\Phi(x, t)| \frac{\pi^2}{2(n+1)t^2} dt \leq \\ &\leq \frac{\pi^2}{2(n+1)} \frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{\pi} |f(x+t) + f(x-t) - 2s(x)| \frac{1}{t^2} dt \leq \\ &\leq \frac{\pi}{2(n+1)} \frac{2\pi}{\delta^2} (\|f\|_1 + |s(x)|) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

pro $n \rightarrow \infty$. Odtud plyne možnost odhadu druhého integrálu rovněž pomocí $\varepsilon/2$ pro všechna $n \geq m$. Pro tato n je tedy

$$|\sigma_n(f, x) - s(x)| < \varepsilon.$$

Poslední vzorec plyne z vyjádření Fejérova jádra. □

Poznámka 4.3.2. Odhady v předchozím důkazu „fungují“ i pro případ, že f je spojitá na nějakém intervalu $[a, b]$ (výjimečně předpokládáme *oboustrannou spojitost* i v koncových bodech a, b). Pak lze tyto odhady provést nezávisle na $x \in [a, b]$ a konvergence je stejnoměrná na $[a, b]$. Dokážeme toto tvrzení jiným způsobem pro formálně jednodušší případ $f \in \mathcal{C}(2\pi)$; ponecháme čtenáři k rozmyšlení, jak lze obdržet tvrzení pro obecný interval $[a, b]$.

Věta 4.3.3 (Fejér 1904). *Nechť funkce f je z $\mathcal{C}(2\pi)$. Potom*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(f, x) = (C) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx} = f(x),$$

přičemž tato konvergence je stejnoměrná, tj. $\sigma_n(f, \cdot) \rightrightarrows f$ na $\mathbb{R}$.

Důkaz. Připomeňme nejprve, že ze vzorce (3.10) a z Lemmatu 3.3.6 vyplývá vyjádření

$$\sigma_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \frac{2}{(n+1)} \left(\frac{\sin((n+1)(x-u))}{2 \sin((x-u)/2)} \right)^2 du. \quad (4.11)$$

Definujme operátory $L_n : f \mapsto \sigma_n(f, \cdot)$ na $\mathcal{C}(2\pi)$. Z (4.11) vidíme, že tyto operátory jsou *nezáporné* lineární operátory na $\mathcal{C}(2\pi)$, protože $L_n f \in \mathcal{C}(2\pi)$ pro každou $f \in \mathcal{C}(2\pi)$; funkce $L_n(f)$ jsou totiž trigonometrickými polynomy. Nyní stačí dokázat, že

$$\sigma_n(f, x) \rightrightarrows f(x) \text{ na } [-\pi, \pi],$$

což vzhledem k periodicitě dává již požadované tvrzení. Pro důkaz této stejnoměrné konvergence použijeme Lemma 1.8.5. Z Lemmatu 3.3.6 vyplývá

$$L_n 1(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(u) du = 1,$$

takže podmínka $L_n 1 \rightrightarrows 1$ na $[-\pi, \pi]$ je splněna. Pro $[x, t] \in [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$ definujeme

$$h(x, t) = 1 - \cos(x - t) = 2 \sin^2((x - t)/2).$$

Zřejmě je $h(x, t) \geq 0$ a $Z(h) = \{x \in [-\pi, \pi]; \sin((x - t)/2) = 0\}$ je množina těch $[x, t]$, pro něž $x - t = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, přičemž tato množina je podmnožinou diagonály $\Delta(f)$ pro každou funkci $f \in \mathcal{C}([-\pi, \pi])$, pro niž $f(-\pi) = f(\pi)$. Proto je h omezující funkce pro každou takovou funkci f . Pak je s přihlédnutím k (4.11)

$$\begin{aligned} L_n h_t(x) &= \frac{2}{\pi(n+1)} \int_{-\pi}^{\pi} 2 \sin^2((u - t)/2) \left(\frac{\sin((n+1)(x - u))}{2 \sin((x - u)/2)} \right)^2 du \\ &= \frac{1}{\pi(n+1)} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2((n+1)(x - u)) du \leq \frac{2\pi}{\pi(n+1)} = \frac{2}{n+1}, \end{aligned}$$

a tedy pro $n \rightarrow \infty$ je $L_n h_t(t) \rightrightarrows 0$ na $[-\pi, \pi]$, což dává potřebné předpoklady k aplikaci Lemmatu 1.8.5. Z něj dostáváme $L_n f \rightrightarrows f$ na $[-\pi, \pi]$ pro všechny uvažované funkce f . $\square$

Poznámka 4.3.4. Jak jsme již ukázali, samotný předpoklad $f \in \mathcal{C}(2\pi)$ neumožňuje dokázat ani bodovou konvergenci její Fourierovy řady. Otázka jak „velká“ může být množina těch $x \in \mathbb{R}$, v nichž řada diverguje, zůstávala po dlouhou dobu otevřeným problémem. L. CARLESON r. 1966

dokázal, že například nemůže obsahovat žádný nede degenerovaný interval. Jeho odpověď na zmíněnou otázku byla jen vedlejším výsledkem, dokázal totiž obecnější tvrzení: pro každou funkci $f \in \mathcal{L}_2(2\pi)$ konverguje její Fourierova řada skoro všude v $\mathbb{R}$. Tento výsledek později rozšířil R. A. HUNT a Carlesonovou metodou dokázal, že i Fourierova řada každé funkce $f \in \mathcal{L}_p(2\pi)$ s $1 < p < \infty$ konverguje skoro všude v $\mathbb{R}$.

Je snadné nahlédnout, že Fourierovy koeficienty Dirichletovy funkce rozšířené z intervalu $(0, 2\pi]$ periodicky s periodou 2π na $\mathbb{R}$ (pozor, toto rozšíření není Dirichletova funkce na $\mathbb{R}$!) jsou tytéž jako pro funkci rovnou identicky 0. Součet příslušné Fourierovy řady je rovněž identicky nulová funkce, která se od rozvíjené Dirichletovy funkce (je v $\mathcal{L}_p(2\pi)$ pro všechna $p \in [1, \infty)$) liší na množině Lebesgueovy míry 0; tato množina je hustá v $\mathbb{R}$.

Důsledek 4.3.5 (Weierstrass 1885). *Pro každé $\varepsilon > 0$ a pro každou funkci $f \in \mathcal{C}(2\pi)$ existuje trigonometrický polynom T takový, že pro všechna $x \in \mathbb{R}$ je*

$$|f(x) - T(x)| < \varepsilon.$$

Tvrzení z tohoto Důsledku 4.3.5 plyne z Fejérové věty: Dokázali jsem, že $\sigma_n(f, \cdot) \rightrightarrows f$ na $\mathbb{R}$ a $\sigma_n(f, \cdot)$ jsou trigonometrickými polynomy.

4.4 Konvergence Fourierovy řady

O důkaz bodové konvergence Fourierovy řady se pokusili L. A. CAUCHY (1789–1857) a S. D. POISSON (1781–1840), avšak jejich důkazy nebyly uspokojivé. První skutečný důkaz takového tvrzení pro *po částech monotónní funkci s konečně mnoha nespojitostmi 1. druhu (jednostranné limity funkce v těchto bodech existují)* $f \in \mathcal{C}(2\pi)$ podal r. 1829 P. G. L. DIRICHLET (1805–1859). Popisoval tyto funkce pomocí množiny lokálních extrémů a věřil, že jeho důkaz bude možno přizpůsobit obecnější situaci. Dokážeme o trochu obecnější tvrzení, avšak dříve dokážeme tzv. *Riemannův lokalizační princip*. K tomu budeme potřebovat dvojici technických lemmat.

První tvrzení, které nyní budeme dokazovat, je jistým vylepšením již dříve dokázaného Riemann–Lebesgueova lemmatu:

Lemma 4.4.1. *Nechť $f, g \in \mathcal{L}(2\pi)$, přičemž funkce g je omezená na $\mathbb{R}$. Potom*

$$\lim_{|n| \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) g(t) e^{int} dt = 0 \quad (4.12)$$

stejněměrně vzhledem k $x \in \mathbb{R}$.

Poznámka 4.4.2. Funkce $t \mapsto f(x-t)g(t)$ je z $\mathcal{L}(2\pi)$, takže Důsledek 2.4.2 nám dává *bodovou* konvergenci, tj. pro každé $x \in \mathbb{R}$; přínosem dokazovaného Lemmatu 4.4.1 je tedy stejnoměrnost této konvergence.

Důkaz. Zvolme číslo M tak, aby $|g(t)| \leq M < \infty$ pro všechna $t \in \mathbb{R}$. Ve Větě 3.2.6 jsme dokázali pomocí látky z teorie integrálu, že pro $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$, je nejenom $\mathcal{T} \subset \mathcal{L}^2(2\pi)$, ale že $\mathcal{T}$ je i *hustý podprostor* $\mathcal{L}^p(2\pi)$, speciálně i pro $p = 1$ ¹⁾. Odtud plyne existence

¹⁾ Jde o hustotu v prostoru $\mathcal{L}(2\pi)$ s integrální metrikou, definovanou pomocí normy prostoru $\mathcal{L}(2\pi)$.

trigonometrického polynomu T takového, že pro všechna $n \in \mathbb{Z}$ a všechna x platí

$$\begin{aligned} & \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)e^{int} dt - \int_{-\pi}^{\pi} T(x-t)g(t)e^{int} dt \right| \leq \\ & \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - T(x-t)| \cdot |g(t)| |e^{int}| dt \leq \\ & \leq M \int_{-\pi}^{\pi} |f(u) - T(u)| du = M \|f - T\|, \end{aligned}$$

přičemž výraz vpravo můžeme volbou T udělat menší než $\varepsilon/2$ pro zvolené ε (použili jsme omezení $|g(t)| \leq M$ a rovnosti $|e^{int}| = 1$).

Protože je

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)e^{int} dt \right| & \leq \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)e^{int} dt - \int_{-\pi}^{\pi} T(x-t)g(t)e^{int} dt \right| + \\ & + \left| \int_{-\pi}^{\pi} T(x-t)g(t)e^{int} dt \right|, \end{aligned}$$

stačí ukázat, že rovněž výraz

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} T(x-t)g(t)e^{int} dt \right| \quad (4.13)$$

umíme volbou dostatečně velké hodnoty $|n|$ udělat také menší než $\varepsilon/2$. Předpokládejme, že T je stupně m , tj.

$$T(t) = \sum_{k=-m}^m c_k e^{ikt}.$$

Výraz v (4.13) postupně odhadneme:

$$\begin{aligned} & \left| \int_{-\pi}^{\pi} T(x-t)g(t)e^{int} dt \right| = \\ & = \left| \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k=-m}^m c_k e^{ik(x-t)} \right) g(t) e^{int} dt \right| \leq \sum_{k=-m}^m |c_k| \cdot |e^{ikx}| \cdot \left| \int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{-i(k-n)t} dt \right| = \\ & = \sum_{k=-m}^m |c_k| \left| \int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{-i(k-n)t} dt \right| = \sum_{k=-m}^m |c_k| |\widehat{g}(k-n)|. \end{aligned}$$

Jelikož podle Důsledku 2.4.2 jde o konečnou lineární kombinaci posloupností konvergujících k 0, tento výraz pro $|n| \rightarrow \infty$ také konverguje k 0; lze ho tedy pro velká $|n|$ odhadnout pomocí $\varepsilon/2$, což spolu s předchozím odhadem dává žádané tvrzení. $\square$

Důsledek 4.4.3. *Nechť $f, g \in \mathcal{L}(2\pi)$, přičemž funkce g je omezená na $\mathbb{R}$. Potom*

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t) \cos nt dt \rightrightarrows 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t) \sin nt dt \rightrightarrows 0, \quad (4.14)$$

přičemž tato konvergence je stejnoměrná vzhledem k $x \in \mathbb{R}$.

Díky zavedení Dirichletova jádra v (3.9) lze n -tý částečný součet $s_n(f, x)$ Fourierovy řady funkce $f \in \mathcal{L}(2\pi)$ v bodě x zapsat ve tvaru

$$s_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_n(t) dt . \quad (4.15)$$

Ukážeme, že s *malou chybou* lze tento integrál zjednodušit. Přesněji, platí následující lemma:

Lemma 4.4.4. *Nechť funkce $f \in \mathcal{L}(2\pi)$ a číslo $0 < \delta \leq \pi$ jsou pevně zvoleny. Potom*

$$s_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} (f(x-t) + f(x+t)) \frac{\sin nt}{t} dt + \varepsilon_n(x) , \quad (4.16)$$

kde funkce ε_n definované vztahem (4.16) závisejí na volbě f a δ , avšak vzhledem k proměnné x je

$$\varepsilon_n(x) \Rightarrow 0 \quad \text{na } \mathbb{R} . \quad (4.17)$$

Speciálně je $\varepsilon'_n \rightarrow 0$ pro

$$1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\delta} \frac{\sin nt}{t} dt + \varepsilon'_n , \quad (4.18)$$

kde ε'_n závisejí na δ a jsou určeny rovností (4.18).

Důkaz. Budeme postupně několikrát užívat předcházejícího tvrzení. Předně podle Tvrzení 3.3.3 (a) platí

$$s_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \frac{1}{2} \cotg\left(\frac{t}{2}\right) \sin nt dt + \alpha_n(x) ,$$

kde

$$\alpha_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \cos(nt) dt ,$$

což opět plyne z téhož tvrzení. Dále platí

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} \cotg\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{1}{t} \right) = 0 ,$$

což dokážeme např. užitím Taylorových rozvojų funkcí: pro $t \rightarrow 0$ je

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cotg\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{1}{t} &= \frac{t \cos(t/2) - 2 \sin(t/2)}{2t \sin(t/2)} = \frac{t + o(t^2) - t + o(t^2)}{t^2 + o(t^2)} = \\ &= \frac{o(t^2)}{t^2 + o(t^2)} = \frac{o(t^2)/t^2}{1 + o(t^2)/t^2} \rightarrow 0 . \end{aligned}$$

Označme nyní $g_1(t)$ limitovanou funkci pro $0 < |t| < \pi$, $g_1(0) = g_1(\pi) = 0$, rozšířenou 2π -periodicky na $\mathbb{R}$. Je to omezená funkce z $\mathcal{L}(2\pi)$, která je s výjimkou lichých násobků π dokonce spojitá. Je tedy

$$s_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \frac{\sin nt}{t} dt + \beta_n(x) + \alpha_n(x) ,$$

kde

$$\beta_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) g_1(t) \sin nt \, dt .$$

Konečně (δ je pevně zvoleno) položíme g_2 rovno 2π -periodické funkci na $\mathbb{R}$, která vznikne jako 2π -periodické rozšíření funkce

$$g_2(t) = \begin{cases} t^{-1} & \text{pro } \delta \leq |t| < \pi, \\ 0 & \text{pro } |t| < \delta, \text{ a } t = \pi \end{cases}$$

na $\mathbb{R}$. Platí tedy konečně

$$s_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} f(x-t) \frac{\sin(nt)}{t} \, dt + \gamma_n(x) + \beta_n(x) + \alpha_n(x),$$

kde

$$\gamma_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) g_2(t) \sin(nt) \, dt$$

a $g_2 \in \mathcal{P}(2\pi)$. Protože $\alpha_n(x) + \beta_n(x) + \gamma_n(x) \rightarrow 0$ pro $|n| \rightarrow \infty$ podle dříve uvedeného Lemmatu 4.4.1, lze tento součet označit $\varepsilon_n(x)$ a tvrzení je dokázáno, neboť zbytek je důsledkem rozdělení intervalu $(-\delta, \delta)$ na intervaly $(-\delta, 0)$ a $(0, \delta)$. $\square$

Tím máme připraveno vše pro tzv. *Riemannův lokalizační princip*. Tím se rozumí následující tvrzení:

Věta 4.4.5 (Riemannův lokalizační princip). *Předpokládejme, že jsou dány funkce $f_1, f_2 \in \mathcal{L}(2\pi)$ a nechť*

$$f_1(x) = f_2(x), \quad x \in I \subset \mathbb{R},$$

kde I je neprázdný otevřený interval v $\mathbb{R}$. Potom pro částečné součty Fourierových řad platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |s_n(f_1, x) - s_n(f_2, x)| = 0$$

pro všechna $x \in I$. Tato konvergence je lokálně stejnoměrná na I (tj. stejnoměrná na každém uzavřeném $J \subset I$).

Důkaz. Zvolme uzavřený neprázdný interval $J \subset I$. Pak zvolíme δ , $0 < \delta < \pi$, a to tak, aby bod $x + t$ ležel v I pro každé $x \in J$ a každé t , $0 < |t| \leq \delta$. Definujeme-li $f = f_1 - f_2$, dostáváme v (4.16) nulový integrál, takže platí

$$s_n(f, x) = s_n(f_1, x) - s_n(f_2, x) = \varepsilon_n(x) \rightarrow 0$$

stejně pro všechna $x \in J$. $\square$

Poznámka 4.4.6. Riemannův lokalizační princip ukazuje, že o konvergenci Fourierovy řady rozhoduje „lokální chování“ rozvíjené funkce a v jakém smyslu: změnou funkce ve „vzdálených“ bodech lze samozřejmě dosáhnout změny koeficientů, nikoli však konvergence ve vyšetřovaném bodě, pokud Fourierova řada v tomto bodě diverguje.

Pro bodovou konvergenci Fourierových řad existuje celá řada kritérií. Předtím, než se dostaneme ke kritériu pro nás nejdůležitějšímu, budeme muset zavést některé další pojmy. Pro některá tato potřeba téměř nevzniká, s těmi se proto seznámíme nejdříve.

Věta 4.4.7. *Nechť jsou dány funkce $f \in \mathcal{L}(2\pi)$, číslo δ , $0 < \delta \leq \pi$, a množina $X \subset \mathbb{R}$. Položme*

$$\Phi(x, t) = f(x + t) + f(x - t) - 2f(x). \quad (4.19)$$

Předpokládejme, že pro všechna $x \in X$ je

$$|f(x)| \leq M < \infty.$$

Potom pro částečné součty Fourierovy řady platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(f, x) = f(x) \text{ stejnoměrně na } X,$$

právě když platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\delta \frac{\Phi(x, t)}{t} \sin nt \, dt = 0 \quad (4.20)$$

stejnoměrně na množině X .

Důkaz. Z (4.15) a (4.16) plyne

$$\begin{aligned} s_n(f, x) - f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\delta (f(x+t) + f(x-t)) \frac{\sin nt}{t} \, dt + \varepsilon_n(x) - \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \int_0^\delta 2f(x) \frac{\sin nt}{t} \, dt - \varepsilon'_n f(x) = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\delta \frac{\Phi(x, t)}{t} \sin nt \, dt + (\varepsilon_n(x) - \varepsilon'_n f(x)). \end{aligned}$$

Jelikož $|f(x)| \leq M < \infty$, $x \in X$, konverguje výraz v závorce stejnoměrně k 0 na X . Proto $s_n(f, x) \Rightarrow f(x)$ na X , právě když platí

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\delta \frac{\Phi(x, t)}{t} \sin nt \, dt \Rightarrow 0 \text{ na } X;$$

tím je tvrzení dokázáno. □

Věta 4.4.8 (Dini 1872). *Nechť funkce f je z $\mathcal{L}(2\pi)$ a nechť $x_0 \in \mathbb{R}$. Nechť dále existuje δ , $0 < \delta \leq \pi$ tak, že*

$$\int_0^\delta \frac{|\Phi(x_0, t)|}{t} \, dt < \infty \quad (4.21)$$

(kde funkce Φ je určena vzorcem (4.19)). Potom je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(f, x_0) = f(x_0),$$

tj. Fourierova řada funkce f konverguje k f v bodě x_0 .

Důkaz. Volme $X = \{x_0\}$. Pak z (4.21) a Riemann-Lebesgueova lemmatu, aplikovaného na funkci g ,

$$g(t) = \begin{cases} \Phi(x_0, t)/t & \text{pro } 0 < t < \delta, \\ 0 & \text{všude jinde,} \end{cases}$$

dává (4.21) informaci o tom, že $g \in L_1(\mathbb{R})$ a tedy pro $n \rightarrow \infty$

$$\int_0^\delta \frac{\Phi(x_0, t)}{t} \sin nt \, dt \rightarrow 0$$

na $X = \{x_0\}$, takže z předešlého dostáváme tvrzení. $\square$

Důsledek 4.4.9. (a) Je-li $f \in \mathcal{P}(2\pi)$, $x_0 \in \mathbb{R}$ a platí

$$|f(x_0 + t) - f(x_0)| \leq M |t|^\alpha, \quad 0 < |t| < \delta,$$

pro jistá α, δ, M , $0 < \alpha, \delta, M < \infty$, která nezávisí na t , pak pro $n \rightarrow \infty$ je

$$s_n(f, x_0) \rightarrow f(x_0).$$

Je totiž

$$\frac{|\Phi(x_0, t)|}{t} \leq 2Mt^{\alpha-1}, \quad 0 < t < \delta.$$

Speciálně to platí pro funkce, kterým se u nás často říká *α -hölдеровské funkce* a které vyhovují nerovnosti

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq M |x - y|^\alpha.$$

Poznamenejme, že v souvislosti s Fourierovými řadami se jimi pro $0 < \alpha \leq 1$ zabýval r. 1864 R. LIPSCHITZ (1832–1903); třídy těchto funkcí se uplatnily při řešení mnoha matematických problémů. Lipschitz tak byl první, kdo se dokázal zbavit omezujících předpokladů, vyskytujících se v Dirichletově kritériu (konečnost množin bodů, v nichž se nabývá extrémů, konečnost množiny bodů nespojitosti). Přispěl také k položení základu k teorii nekonečných množin, na který navázal G. CANTOR (1845–1920).

(b) Je-li $f \in \mathcal{P}(2\pi)$, $x_0 \in \mathbb{R}$ a existují (vlastní) $f'_+(x_0)$, $f'_-(x_0)$, pak pro $n \rightarrow \infty$ je

$$s_n(f, x_0) \rightarrow f(x_0).$$

K tomu stačí volit $\alpha = 1$ a $M < \infty$ tak, že

$$\max\{f'_+(x_0), f'_-(x_0)\} < M,$$

a užít toho, co jsme již ukázali v předchozím bodě (a). Speciálně to platí „v intervalu konvexity“ funkce f .

4.5 Dirichletova věta

Pokusíme se částečně objasnit, jak P. G. L. DIRICHLET (1805 – 1859) dospěl r. 1829 k první významnější větě o bodové konvergenci Fourierovy řady. Dirichlet byl velmi talentovaný německý matematik (výjimečně to zdůrazňujeme, bývá totiž někdy kvůli křestním jménům považován za Francouze), který v 17 letech odešel studovat do Paříže. Zde se seznámil se soudobou francouzskou matematikou a mnoha významnými matematiky. V Paříži se setkal mj. i s Abelem, ale také s Fourierem, jehož práce o (Fourierových) řadách ho zaujaly. Svoji práci publikoval ve 23 letech.

Předpokládejme nejprve, že $f \in \mathcal{C}(2\pi)$. V přípravných úvahách je vhodné si uvědomit, že ve Fourierově době byly představy o integrálu ještě velmi mlhavé. Upozorníme vždy, kde a jaké předpoklady hrají svoji důležitou roli.

Budeme opět pracovat s Dirichletovým jádrem D_n ; viz Tvzení 3.3.3. Pomocí něj lze částečný součet $s_n(f, x)$ Fourierovy řady funkce f v bodě x vyjádřit ve tvaru (potřebujeme tedy zaručit existenci příslušného integrálu a pro druhou rovnost potřebujeme 2π -periodicitu f)

$$s_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(t) \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}(x-t)\right)}{2 \sin\left(\frac{x-t}{2}\right)} dt.$$

Integrál rozdělíme na integrál přes interval $(x-\pi, x)$ a na integrál přes interval $(x, x+\pi)$. V prvním provedeme substituci $t = x-2u$, ve druhém substituci $t = x+2u$. Dostaneme tak vyjádření

$$s_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(x-2u) \frac{\sin(2n+1)u}{2 \sin u} du + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(x+2u) \frac{\sin(2n+1)u}{2 \sin u} du.$$

Až dosud lze shrnout „přirozené nároky“ na předpoklady tak, že pro určení koeficientů potřebujeme *integrabilitu* f k výpočtu integrálů, jimiž jsou definovány Fourierovy koeficienty; využili jsme také periodicitu f při posunu integračního oboru a také jsme prováděli substituci. Nějakou formu věty o substituci čtenář patrně zná, patrně pro Lebesgueův integrál. Vyjádření lze ještě upravit:

$$s_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} (f(x-2u) + f(x+2u)) \frac{\sin(2n+1)u}{2 \sin u} du. \quad (4.22)$$

Je dobré si povšimnout, že výraz nezávisí na hodnotě $f(x)$, závisí však globálně na hodnotách f v celém intervalu $(x-\pi, x+\pi)$. Přitom bychom rádi dokázali, že

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(f, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n^-(x) + f_n^+(x)),$$

kde $f_n^-(x)$ je „polovina“ integrálu (4.22) bez $f(x+2u)$ a $f_n^+(x)$ je „druhá polovina“ integrálu (4.22) bez $f(x-2u)$. Až sem prakticky došel i Fourier, avšak Dirichlet dospěl dále: povšiml si, že „příspěvek k hodnotě integrálů“ závisí *podstatně více* na chování f v blízkosti x , nežli na chování v bodech vzdálenějších. Dirichlet si také jako první uvědomil, jak je nutno pracovat s nespojitými funkcemi. V nepřesné rovině lze jeho úvahu popsat, např. pro $f_n^+(x)$, takto:

$$\begin{aligned} f_n^+(x) &\approx \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/(2n+1)} f(x+2u) \frac{\sin((2n+1)u)}{\sin(u)} du \approx \\ &\approx \frac{1}{\pi} \frac{\pi}{2} f\left(x + \frac{\pi}{2n+1}\right) = \frac{1}{2} f\left(x + \frac{\pi}{2n+1}\right). \end{aligned}$$

Pro velká n jsou tyto hodnoty blízké $f(x+) = \lim_{t \rightarrow x+} f(t)$, pokud tato limita existuje. Další Dirichletova úvaha spočívala v tom, že chtěl mít eventuální nespojitosti „oddělené“ (po částech spojitá funkce) a také „kontrolu“ nad znamením $f(t) - f(x)$ (funkce po částech monotónní). Připomínáme, že slovním spojením „po částech“ se opět myslí existence takového dělení $D = \{-\pi = x_0 < \dots < x_m = \pi\}$ intervalu $[-\pi, \pi]$, že vyšetřovaná funkce je spojitě rozšiřitelná na každý dělicí interval $[x_{r-1}, x_r]$, $r = 1, \dots, m$ a je na něm monotónní. Dospěl tak posléze k tvrzení:

Věta 4.5.1 (Dirichlet 1829). *Nechť je funkce f omezená, po částech spojitá a po částech monotónní na intervalu $[-\pi, \pi]$. Předpokládejme dále, že f je 2π -periodická na $\mathbb{R}$ a že platí*

$$f(t) = \frac{f(t+) + f(t-)}{2}$$

pro všechna $t \in \mathbb{R}$. Jsou-li čísla a_k, b_k Fourierovými koeficienty f , tj. platí (2.13) pro všechna $k \in \mathbb{N}_0$ a definitoricky dle úmluvy $b_0 = 0$, pak platí rovnost

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

pro všechna $t \in \mathbb{R}$, neboli Fourierova řada funkce f konverguje k f .

Předcházející poněkud filozofický výklad má nejenom motivační charakter, ale měl by čtenáři napomoci se zorientovat, k čemu a jakými prostředky se pomocí níže uvedených lemmat chceme dostat. Dospějeme k obecnějšímu a elegantnějšímu tvrzení, než je Věta 4.5.1, bez předchozího výkladu by však mohlo být obtížné roli jednotlivých předpokladů pochopit.

Historická poznámka 4.5.2. Kritické hodnocení vývoje pro některé matematické oblasti dodnes chybí, ale to není případ Fourierových řad nebo obecněji *harmonické analýzy*; viz např. článek [86], nebo knihy [1] a [66]. Jim jsou poplatné historické komentáře v tomto textu. Zhodnoťme ještě Dirichletův výsledek pohledem [66].

Jestliže považujeme Dirichletovo kritérium a jeho důkaz za první dostatečně přesné s ohledem na dnešní měřítka, je třeba se zmínit i o jejich drobných nedostacích. Jak jsme viděli, je předpoklad „monotonie po částech“ (tedy v intervalech nějakého dělení) zbytečně silný. Totéž lze říci o předpokladu konečnosti množiny bodů nespojitosti. Omezenost je naopak přirozená vzhledem k použitému integrálu. Někdy se uvádí, že Dirichlet byl přesvědčen, že jeho důkaz „projde“ i v případě, že počet intervalů monotonie je nekonečný, avšak dle [66] měl Dirichlet na mysli *jiný* důkaz (psal o tom v dopise K. F. Gaussovi). Bohužel však Dirichlet nikdy žádný další důkaz nepublikoval, a tak prvním, kdo se dokázal zmíněného technického předpokladu zbavit, byl patrně Lipschitz (viz ještě níže).

Dalším nedostatkem, který byl v Dirichletově práci shledán, byl fakt, že použil výsledek

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}, \quad (4.23)$$

který nedokazoval. Dirichlet si však byl patrně vědom této slabiny, neboť v později publikovaném důkaze tuto pasáž předělal. My si tohoto integrálu všimneme podrobněji.

Příklad 4.5.3. K výpočtu hodnoty integrálu (4.23) nestačí zcela elementární úvahy. Nejde o integrál, který by existoval v Riemannově smyslu, neboť integrujeme přes neomezený interval $(0, \infty)$. Mohli bychom ho vyšetřovat jako nevlastní Riemannův integrál nebo integrál Newtonův,

avšak primitivní funkci F k funkci $(\sin t)/t$ na intervalu $(0, \infty)$ nelze vyjádřit pomocí „elementárních funkcí“. Přesto není obtížné zdůvodnit, že obě limity $\lim_{t \rightarrow 0+} F(t)$ a $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t)$ existují a jsou vlastní. Odtud plyne existence $M \in \mathbb{R}$ takového, že $|F| < M$. Pro libovolnou dvojici čísel a, b , $0 \leq a < b \leq \infty$ tedy platí

$$\left| \int_a^b \frac{\sin t}{t} dt \right| \leq 2M. \quad (4.24)$$

Integrál (4.23) patří k těm, na nichž se často ilustruje existence Newtonova integrálu i v případě, že integrál nekonverguje absolutně, a tedy neexistuje v Lebesgueově smyslu. K důkazu existence Newtonova integrálu v (4.23) můžeme ostatně použít Dirichletovo kritérium; jde o standardní ilustrativní příklad. Poznamenejme ještě, že odhad (4.24) lze vcelku snadno zpřesnit: vyjádříme-li integrál v (4.23) jako součet integrálů přes intervaly $(k\pi, (k+1)\pi)$, $k = 0, 1, \dots$, jde o řadu se střídavými znaménky, přičemž absolutní hodnoty jejích členů konvergují *monotónně* k 0. Stačí tedy nalézt odhad prvního členu řady.

Tvrzení 4.5.4. *Nechť $f \in \text{BV}(2\pi)$. Potom platí*

$$|n\hat{f}(n)| \leq \frac{1}{4}V_0^{2\pi}f$$

pro všechna $n \in \mathbb{Z}$.

Důkaz. Odhad zřejmě platí pro $n = 0$. Nechť $k, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$. Potom substitucí $u = t + k\pi/n$ dostaneme

$$\begin{aligned} \hat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(u) e^{-inu} du = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(t + \frac{k\pi}{n}\right) e^{-int} e^{-ink\pi/n} dt \\ &= \frac{(-1)^k}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(t + \frac{k\pi}{n}\right) e^{-int} dt. \end{aligned}$$

Odtud dostaneme sečtením s obdobnou rovností pro $k-1$

$$2\hat{f}(n) = \frac{(-1)^k}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[f\left(t + \frac{k\pi}{n}\right) - f\left(t + \frac{(k-1)\pi}{n}\right) \right] e^{-int} dt.$$

Nyní volbou vhodných k dostaneme $2|n|$ rovnic, které sečteme a upravíme na tvar

$$4|n\hat{f}(n)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{2|n|} \left| f\left(t + \frac{k\pi}{n}\right) - f\left(t + \frac{(k-1)\pi}{n}\right) \right| dt.$$

Integrand je shora odhadnut číslem $V_0^{2\pi}f$, z čehož plyne dokazované tvrzení. $\square$

Věta 4.5.5 (Dirichlet 1829, Jordan 1881). *Nechť $f \in \mathcal{L}(2\pi)$ a nechť $[a, b]$ je nedege-nerovaný interval v $\mathbb{R}$ takový, že $f \in \text{BV}([a, b])$. Potom pro všechna $x \in (a, b)$ platí*

$$s(f, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(f, x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}. \quad (4.25)$$

Je-li navíc $I \subset (a, b)$ uzavřený interval a $f \in \mathcal{C}([a, b])$, potom

$$s_n(f, \cdot) \rightrightarrows f \quad \text{na } I.$$

Speciálně pro spojitou funkci $f \in \text{BV}(2\pi)$ dostáváme $s_n(f, \cdot) \rightrightarrows f$ na $\mathbb{R}$.

Důkaz. Díky Větě 1.6.5 můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že funkce f je neklesající na $[a, b]$. Zvolme libovolně $\varepsilon > 0$. Dále zvolme $x \in (a, b)$ a položíme

$$2s(x) := f(x+) + f(x-);$$

z Věty 1.6.5 vyplývá, že tyto limity existují pro každé $x \in (a, b)$. Též je

$$f(x+t) + f(x-t) - 2s(x) = [f(x+t) - f(x+)] + [f(x-t) - f(x-)], \quad (4.26)$$

kde v hranatých závorkách na pravé straně rovnosti při libovolně, avšak pevně zvoleném x , stojí monotónní funkce v proměnné t , jejichž limita pro $t \rightarrow 0+$ je rovna 0. Zvolme nyní δ , $0 < \delta < \pi$, tak, aby jednak $\{x+t; |t| < \delta\} \subset (a, b)$ a zároveň aby pro všechna tato t platilo

$$|f(x+t) - f(x+)| < \varepsilon, \quad |f(x-t) - f(x-)| < \varepsilon; \quad (4.27)$$

tento moment volby δ označme $(*)$. Ve Větě 4.4.4 jsme dokázali rovnost (4.16)

$$s_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\delta (f(x-t) + f(x+t)) \frac{\sin nt}{t} dt + \varepsilon_n(x),$$

kde funkce ε_n závisely pouze na volbě f a δ , $0 < \delta \leq \pi$, a pro $n \rightarrow \infty$ platilo $\varepsilon_n(x) \rightarrow 0$ na $\mathbb{R}$. Speciálně z rovnosti (4.18), tj.

$$1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\delta \frac{\sin nt}{t} dt + \varepsilon'_n,$$

kde pro $n \rightarrow \infty$ je $\varepsilon'_n \rightarrow 0$, dostaneme

$$s(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\delta 2s(x) \frac{\sin nt}{t} dt + \varepsilon'_n. \quad (4.28)$$

Z obou rovností (4.16), (4.28) tak dostáváme

$$\begin{aligned} |s_n(f, x) - s(x)| &\leq \left| \frac{1}{\pi} \int_0^\delta (f(x+t) - f(x+)) \frac{\sin nt}{t} dt \right| + \\ &+ \left| \frac{1}{\pi} \int_0^\delta (f(x-t) - f(x-)) \frac{\sin nt}{t} dt \right| + \varepsilon_n^*(x), \end{aligned} \quad (4.29)$$

přičemž $\varepsilon_n^*(x) \rightarrow 0$ pro $n \rightarrow \infty$. Důkaz nyní dokončíme tak, že ukážeme, jak lze odhadnout oba výrazy na pravé straně nerovnosti v závislosti na zvoleném $\varepsilon > 0$.

Odhad integrálů provedeme pomocí druhé věty o střední hodnotě integrálního počtu: viz např. [41], Věta 101. Její elementární verzi jsme použili v souvislosti s Dirichlet-Abelovým kritériem pro konvergenci integrálů; viz [78], Věta 10.6.6. Ve znění pro Lebesgueův integrál v [41] říká:

Věta. *Nechť $f \in L_1((c, d))$ a nechť g je konečná monotónní na $[c, d] \subset \mathbb{R}$. Potom existuje $\zeta \in [c, d]$ tak, že platí*

$$\int_c^d f(t)g(t) dt = g(c) \int_c^\zeta f(t) dt + g(d) \int_\zeta^d f(t) dt. \quad (4.30)$$

Větu použijeme v intervalu $[0, \delta]$ a na každý integrál v (4.29) zvlášť. Zde se ukazuje klíčovým odhad pro integrál z funkce $(\sin t)/t$. Pro vhodně zvolené ζ , $0 < \zeta < \delta$, platí podle (4.30)

$$\begin{aligned} & \int_0^\delta (f(x+t) - f(x+)) \frac{\sin nt}{t} dt = \\ & = 0 \cdot \int_0^\zeta \frac{\sin nt}{t} dt + ((f(x+\delta) - f(x+)) \cdot \int_\zeta^\delta \frac{\sin nt}{t} dt, \end{aligned}$$

a protože první člen v rovnosti vpravo je nulový, dostaneme

$$\left| \int_0^\delta (f(x+t) - f(x+)) \frac{\sin nt}{t} dt \right| \leq |f(x+\delta) - f(x+)| \cdot \left| \int_\zeta^\delta \frac{\sin nt}{t} dt \right|.$$

Zcela analogicky s vhodným $0 < \zeta' < \delta$ dostaneme

$$\begin{aligned} & - \int_0^\delta (f(x-) - f(x-t)) \frac{\sin nt}{t} dt = \\ & = -0 \cdot \int_0^{\zeta'} \frac{\sin nt}{t} dt - ((f(x-) - f(x-\delta_1)) \cdot \int_{\zeta'}^\delta \frac{\sin nt}{t} dt, \end{aligned}$$

z čehož získáme podobný odhad

$$\left| \int_0^\delta (f(x-t) - f(x-)) \frac{\sin nt}{t} dt \right| \leq |f(x-\delta) - f(x-)| \cdot \left| \int_{\zeta'}^\delta \frac{\sin nt}{t} dt \right|.$$

Z rovnosti (4.29) a obou provedených odhadů získáme odhad

$$|s_n(f, x) - s(x)| \leq 4\pi\varepsilon + \varepsilon_n^*, \quad (4.31)$$

z čehož již plyne dokazované tvrzení pro bodovou konvergenci v (a, b) .

Jestliže je funkce f navíc spojitá v $[a, b]$, je na tomto intervalu i *stejněměrně spojitá*. Proto v okamžiku volby δ , který jsme označili (*), lze volit toto δ tak, že je $|f(t) - f(t')| < \varepsilon$, jakmile $|t - t'| < \delta$, $t, t' \in [a, b]$; toto δ lze volit tak, že $\{x+t; x \in I, |t| < \delta\} \subset (a, b)$. Tím dosáhneme stejnoměrnosti vzhledem k $x \in I$ ve vztahu (4.31) a dokážeme i druhou část tvrzení. $\square$

4.6 Operace s Fourierovými řadami

Není obtížné si uvědomit, že zobrazení $f \rightarrow \hat{f}$ je lineární, zkoumáme-li je ve vhodném kontextu; alespoň pro jeden speciální případ se k tomuto problému ještě vrátíme. Jde však o jiný problém: lze, eventuálně za jakých okolností, Fourierovu řadu derivovat nebo integrovat „člen po členu“? Motivací k této otázce je srovnání s mocninnými řadami, kde výsledek je vcelku jednoduchý a obecně známý. Derivováním se konvergence Fourierovy řady „značně zhoršuje“, což ukážeme na historickém Weierstrassově příkladu spojitě nediferencovatelné funkce.

Již jsme se zmínili o rozdílu mezi funkcemi, které lze vyjádřit jako součty mocninných a trigonometrických řad. Připojme ještě jednu historickou ukázkou: K. WEIERSTRASS

(1815–1897) sestrojil spojitou funkci, o které dokázal, že nemá derivaci v žádném bodě $\mathbb{R}$. Zatímco funkce, které jsou (lokálně) *součtem mocninné řady*, jsou všude nekonečně diferencovatelné, tato „patologická“ funkce je definována je součtem speciální *Fourierovy řady*. Pro Fourierovy řady je tato ukázka málo významná, ukazuje však jejich řádově podstatnější složitost.

Ukázku uvedeme delším citátem z Weierstrassovy práce [81], v níž je tato řada popsána ²⁾. Weierstrassův zájem o spojitě nikde diferencovatelné funkce souvisel s jeho přednáškami.

Donedávna se obecně věřilo, že jednoznačná spojitá funkce reálné proměnné má derivaci, jejíž hodnota není definována nebo je nekonečná pouze v některých izolovaných bodech. Dokonce ani v pracích Gausse, Cauchyho, Dirichleta, matematiků zvyklých silně kritizovat vše z jejich oboru, nenalezneme, alespoň pokud vím, známku jiného mínění ³⁾. Jak jsem se dozvěděl od posluchačů, Riemann byl první, kdo vyjádřil přesvědčení (r. 1861, nebo snad ještě dříve), že toto tvrzení neplatí např. pro funkci vyjádřenou nekonečnou řadou

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2 x)}{n^2}.$$

Riemann bohužel důkaz nepublikoval a zdá se, že nebyl zachován ani v jeho poznámkách ani formou ústního podání. Tím více je mi líto, že jsem se ani jedenkrát s jistotou nedozvěděl, jak přesně se Riemann o tomto příkladu vyjádřil. Matematici, kteří se po seznámení s touto Riemannovou domněnkou problémem zabývali, byli (přinejmenším většina z nich) toho názoru, že stačí dokázat existenci funkce, pro kterou v libovolně malém intervalu existuje bod, v němž není funkce diferencovatelná. Že existuje funkce s touto vlastností ⁴⁾ se dokáže velice snadno, a proto věřím, že Riemann měl na mysli takovou funkci, která nemá v žádném bodě derivaci. Důkaz toho, že uvažovaná trigonometrická řada definuje takovou funkci, se mi zatím zdá poněkud těžký; je však lehké sestřit spojitou funkci reálné proměnné x , pro kterou lze dokázat jednoduchými prostředky, že nemá v žádném bodě derivaci.

Weierstrass definuje tuto funkci jako součet řady (označení je nepodstatně modifikováno)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \cos(b^k \pi x), \quad (4.32)$$

kde $0 < a < 1$ a b je liché číslo takové, že $ab > 1 + 3\pi/2$. Idea Weierstrassova důkazu je taková: pro libovolný bod $x_0 \in \mathbb{R}$ a každé $\delta > 0$ je „diferenční podíl“

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

neomezený na $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Volba $0 < a < 1$ zaručuje stejnoměrnou konvergenci řady (4.32). Parametr b „zajišťuje“ potřebnou neomezenost. Jsme tedy vedeni k vyšetřování výrazu

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k \frac{\cos(b^k \pi x) - \cos(b^k \pi x_0)}{x - x_0},$$

přičemž princip „triku“ je založen na tom, že

²⁾ Weierstrass o ní referoval v Berlínské akademii r. 1872, poprvé se objevila v tisku r. 1875.

³⁾ Zde má Weierstrass na mysli všeobecné akceptování tvrzení, které r. 1806 „dokázal“ A.-M. AMPÈRE (1775–1836), a to že spojitá funkce má derivaci všude až na konečnou množinu.

⁴⁾ Komentář: Již taková funkce poslouží jako protipříklad k uvedené „Ampèrově větě“. Takovou funkci mohl Riemann snadno sestřit jako „neurčitý integrál“ k funkci nespojitě v bodech husté podmnožiny intervalu $[a, b]$; takovou funkcí je např. tzv. Riemannova funkce.

(a) pro dané b a x_0 a $n \in \mathbb{N}$ vždy existuje $m \in \mathbb{N}$ tak, že

$$1 \leq |m - b^n x_0| < 3/2, \quad (4.33)$$

(b) a pro x_1 , pro něž $b^n x_1 = m$, mají $\cos(b^n \pi x_1)$ a $\cos(b^n \pi x_0)$ opačná znaménka.

Pomocí součtového vzorce pro $\cos$ snadno dostaneme

$$\begin{aligned} \cos(b^n \pi x_1) - \cos(b^n \pi x_0) &= \cos(\pi m) - \cos(\pi m + \pi(b^n x_0 - m)) = \\ &= (-1)^m [1 + \cos(\pi(b^n x_0 - m - 1))], \end{aligned}$$

přičemž pro člen v hranaté závorce platí

$$1 + \cos(\pi(b^n x_0 - m - 1)) \geq 1.$$

Jestliže je b *liché* celé číslo a $k > m$, potom

$$\begin{aligned} \cos(b^k \pi x_1) - \cos(b^k \pi x_0) &= \cos(b^{k-n} \pi m) - \cos(b^k \pi x_0) = \\ &= (-1)^m [1 + \cos(b^{k-n} \pi(b^n x_0 - m - 1))], \end{aligned}$$

přičemž nyní pro člen v hranaté závorce platí

$$1 + \cos(b^{k-n} \pi(b^n x_0 - m - 1)) \geq 0.$$

Ze čtyř předcházejících rovností vyplývá, že sčítanci ve vyjádření

$$\sum_{k=n}^{\infty} a^k (\cos(b^k \pi x_1) - \cos(b^k \pi x_0))$$

mají stejné znaménko a n -tý sčítanec má absolutní hodnotu alespoň a^n , takže je

$$\left| \sum_{k=n}^{\infty} a^k \frac{\cos(b^k \pi x) - \cos(b^k \pi x_0)}{x - x_0} \right| \geq \frac{a^n}{|x_1 - x_0|}.$$

Nahradíme-li m v rovnosti (4.33) výrazem $b^n x_1$, dostaneme

$$|x_1 - x_0| \leq \frac{3}{2b^n}. \quad (4.34)$$

Zvolíme-li dostatečně velké n tak, že $3/2b^n < \delta$, je x_1 v intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Odhad shora pro $|x_1 - x_0|$ dává spolu s rovnicí (4.34)

$$\left| \sum_{k=n}^{\infty} a^k \frac{\cos(b^k \pi x) - \cos(b^k \pi x_0)}{x - x_0} \right| \geq \frac{2}{3}(ab)^n.$$

Pokud je ab větší než 1, můžeme najít x_1 , pro které je zbytek řady tak velký, jak budeme chtít. Tím však ještě nejsme hotovi: Musíme ještě ukázat, že prvních n sčítanců řady se nemůže zrušit se součtem zbytku. Proto potřebujeme shora odhadnout shora výraz

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} a^k \frac{\cos(b^k \pi x) - \cos(b^k \pi x_0)}{x - x_0} \right|.$$

Z Lagrangeovy věty o přírůstku plyne existence x_2 , ležícího mezi body x_0 a x_1 , pro něž

$$\frac{\cos(b^k \pi x) - \cos(b^k \pi x_0)}{x - x_0} = -b^k \pi \sin(b^k \pi x_2),$$

takže lze vyšetřovaný součet odhadnout absolutní hodnotu každého jeho členu hodnotou $b^k\pi$, z čehož dostaneme

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} a^k \frac{\cos(b^k \pi x) - \cos(b^k \pi x_0)}{x - x_0} \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} (ab)^k \pi = \pi \frac{(ab)^n - 1}{ab - 1} < \pi \frac{(ab)^n}{ab - 1}.$$

Jestliže zvolíme ab tak, aby $\pi/(ab - 1) < 2/3$, neboli platí-li $ab > 1 + 3\pi/2$, pak

$$\left| \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \right| = \left| \frac{1}{x_1 - x_0} \sum_{k=0}^{\infty} a^k [\cos(b^k \pi x) - \cos(b^k \pi x_0)] \right| > (ab)^n \left(\frac{2}{3} - \frac{\pi}{ab - 1} \right),$$

a s ohledem na $ab > 1$ a možnost volby n odtud plyne potřebná neomezenost diferenčního podílu v okolí bodu x_0 .

Závěr je vcelku jednoduchý: Při vhodné volbě parametrů je Weierstrassova funkce, definovaná jako součet *stejněměrně konvergentní* trigonometrické řady, Fourierovou řadou. Přitom je Fourierovou řadou funkce, jejíž derivace neexistuje v žádném bodě $x \in \mathbb{R}$. Počítat tedy Fourierův rozvoj derivace funkce derivováním její Fourierovy řady *bez dalších dodatečných předpokladů* je beznadějně. Je to zřejmě možné, ověříme-li např. (lokálně) stejnoměrnou konvergenci řady obdržené derivováním „člen po členu“.

Kapitola 5

Hilbertův prostor

5.1 Základní vlastnosti

Prostor X se skalárním součinem je strukturou na *lineárním prostoru* s „nejsilnějšími“ axiomy. Je to *normovaný* lineární prostor, v němž je norma definována pomocí tzv. *skalárního součinu*. Proto v něm můžeme využívat všech poznatků, se kterými jsme se v rámci metrických prostorů nebo normovaných lineárních prostorů seznámili. Skalární součin umožňuje zavést v prostoru se skalárním součinem navíc kolmost (ortogonalitu) prvků. Je-li tento prostor navíc úplný, budeme ho nazývat Hilbertův prostor. D. HILBERT (1862–1943) položil základy studia této struktury. Vznik teorie abstraktního Hilbertova prostoru se však klade až do r. 1927 a je spojován se jménem J. VON NEUMANN (1903–1957). Látka o Hilbertově prostoru patří do tzv. *funkcionální analýzy* a je vykládána v mnoha učebnicích věnovaných této abstraktní části analýzy. Stručný výklad nejdůležitějších výsledků lze nalézt např. v [53] nebo [52].

Definice 5.1.1. Necht X je lineární prostor nad tělesem K reálných nebo komplexních čísel s binární operací $(\cdot, \cdot)$, která má následující vlastnosti:

Pro všechna $x, y, z \in X$ a všechna $\alpha, \beta \in K$ platí

- $$\begin{aligned} (1) \quad (x, x) &\geq 0, & (2) \quad (x, x) &= 0, \text{ právě když } x = 0, \\ (3) \quad (x, y) &= \overline{(y, x)}, & (4) \quad (\alpha x + \beta y, z) &= \alpha(x, z) + \beta(y, z). \end{aligned}$$

Pak říkáme, že dvojice X spolu s $(\cdot, \cdot)$ tvoří *prostor se skalárním součinem* (někdy též *unitární prostor*). Operaci $(\cdot, \cdot)$ nazýváme *skalární součin na X* ¹⁾.

Položíme $\|x\| := \sqrt{(x, x)}$, $x \in X$, a ukážeme, že takto definovaná funkce je opravdu *norma* na X , jak to odpovídá použitému označení běžnému v teorii normovaných lineárních prostorů. Skutečně, přímo z vlastností skalárního součinu a definice normy plyne, že pro všechna $x \in X$ je $\|x\| \geq 0$, přičemž $\|x\| = 0$, právě když $x = 0$. Pro všechna $x \in X$ a $\alpha \in K$ je též $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$. K důkazu trojúhelníkové nerovnosti pro normu dokážeme lemma:

Lemma 5.1.2 (Schwarzova nerovnost). *Je-li X prostor se skalárním součinem, pak pro všechna $x, y \in X$ platí*

$$|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\| ; \tag{5.1}$$

rovnost v (5.1) nastává, právě když jsou prvky $x, y \in X$ lineárně závislé.

¹⁾ Jde o další licenci, logičtěji by bylo říkat *skalární součin na $X \times X$* .

Důkaz. Pro $x = 0$ nebo $y = 0$ platí v (5.1) dokonce rovnost a x, y jsou lineárně závislé. Nerovnost rovněž triviálně platí pro $(x, y) = 0$. Při $y \neq 0, x \in X$ a $\alpha \in \mathbb{C}$ je

$$0 \leq (x - \alpha y, x - \alpha y) = \|x\|^2 - \alpha(y, x) - \bar{\alpha}(x, y) + \alpha\bar{\alpha}\|y\|^2. \quad (5.2)$$

Volme $\alpha = (x, x)/(y, x)$ a dosadíme do předchozí rovnosti; tak dostaneme

$$0 \leq \|x\|^2 - \|x\|^2 - \|x\|^2 + \frac{\|x\|^4}{|(y, x)|^2} \|y\|^2, \quad (5.3)$$

z čehož již plyne (5.1). Jestliže platí v (5.1) rovnost, platí postupně v (5.3) a také v (5.2), tedy $x - \alpha y = 0$, neboli $x = \alpha y$ a x, y jsou lineárně závislé. Abychom ukázali, že v (5.1) nastává rovnost, právě když jsou x, y lineárně závislé, zbývá vyšetřit případ nenulových závislých x, y . Pak existuje $\beta \in \mathbb{C}$ tak, že $x = \beta y$, a je

$$|(x, y)| = |(\beta y, y)| = |\beta| \cdot |(y, y)| = \|\beta y\| \cdot \|y\| = \|x\| \cdot \|y\|,$$

a tedy v (5.1) platí rovnost. Tím je důkaz tvrzení dokončen. $\square$

Lemma 5.1.3 (trojúhelníková nerovnost). *Je-li X prostor se skalárním součinem a položíme-li $\|x\| := \sqrt{(x, x)}$, $x \in X$, pak pro každé dva prvky $x, y \in X$ platí*

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x \pm y\| \leq \|x\| + \|y\|. \quad (5.4)$$

Důkaz. Podle (5.1) platí

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= |(x + y, x + y)| \leq (x, x) + |(x, y)| + |(y, x)| + (y, y) \leq \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2, \end{aligned}$$

z čehož dostaneme odmocněním

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|. \quad (5.5)$$

Uvažme dále, že platí $\|x\| = \|x + y - y\| \leq \|x + y\| + \|y\|$, a tedy $\|x\| - \|y\| \leq \|x + y\|$. Ze symetrie dostáváme stejný odhad pro $\|y\| - \|x\|$ a spojením obou

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x + y\|; \quad (5.6)$$

nyní stačí ještě uvážit, že $\|y\| = \|-y\|$. Tím je trojúhelníková nerovnost (5.4) dokázána. $\square$

Důsledek 5.1.4. *Funkce $x \mapsto \|x\| := \sqrt{(x, x)}$, $x \in X$, definuje na X normu.*

Definice 5.1.5. Prostor se skalárním součinem, který je vzhledem k normě tímto součinem generované úplný, nazýváme *Hilbertův prostor*.

Příklad 5.1.6. Nejjednodušším příkladem Hilbertova prostoru je konečněrozměrný prostor l_2^m uspořádaných m -tic reálných nebo komplexních čísel, jestliže definujeme pro $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ skalární součin vztahem

$$(x, y) = \sum_{k=1}^m x_k \overline{y_k}.$$

Snadno se ukáže, že součin má potřebné vlastnosti z Definice 5.1.1. Proto platí Cauchyho nerovnost

$$\left| \sum_{k=1}^m x_k \overline{y_k} \right| \leq \left(\sum_{k=1}^m |x_k|^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{k=1}^m |y_k|^2 \right)^{1/2}. \quad (5.7)$$

Úplnost prostoru l_2^m je důsledkem úplnosti $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$, protože konvergence v tomto lineárním prostoru je konvergencí „po souřadnicích“.

Cvičení 5.1.7. Jedna z výhod práce s ortonormální bázemi spočívá v jednoduchém vyjádření koeficientů lineární kombinace: Je-li $\{x_k\}_{k=1}^n$ báze prostoru se skalárním součinem X , pak lze každý prvek $x \in X$ vyjádřit jednoznačně ve tvaru lineární kombinace

$$x = \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k.$$

Je-li tato báze navíc ortogonální nebo dokonce ortonormální, je toto vyjádření velmi jednoduché, koeficienty lineární kombinace α_k snadno určíme. Je

$$x = \sum_{k=1}^n \frac{(x, x_k)}{\|x_k\|^2} x_k, \quad \text{resp.} \quad x = \sum_{k=1}^n (x, x_k) x_k.$$

Odkud to vyplývá?

Historická poznámka 5.1.8. Existují tvary nerovnosti (5.1), spojované s několika jmény; to má následující kořeny: L. A. CAUCHY (1789–1858) odvodil r. 1821 nerovnost (5.7), která je Schwarzovou nerovností (5.1) v konkrétním Hilbertově prostoru. V. JA. BUNJAKOVSKIJ (1804–1889) dokázal integrální variantu nerovnosti r. 1859. Nezávisle na něm k ní dospěl r. 1875 také H. A. SCHWARZ (1843–1921), který ji pak zobecnil r. 1885 i pro případ vícerozměrného integrálu.

Cvičení 5.1.9 (Cauchy 1821*). Nechtě $x_k, y_k, k = 1, \dots, m$, jsou nezáporná čísla. Dokažte přímo (bez odvolání na Schwarzovu nerovnost), že pak platí

$$\sum_{k=1}^m x_k y_k \leq \left(\sum_{k=1}^m x_k^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{k=1}^m y_k^2 \right)^{1/2}. \quad (5.8)$$

Návod: Pro $\|y\| = 0$ tvrzení platí. Zvolte libovolně $x, \alpha \in \mathbb{R}$ a $y \neq 0$. Potom z nerovnosti $\sum_{k=1}^m (x_k + \alpha y_k)^2 \geq 0$, plyne, že pro diskriminant kvadratické rovnice s neznámou α

$$\sum_{k=1}^m x_k^2 + 2\alpha \sum_{k=1}^m x_k y_k + \alpha^2 \sum_{k=1}^m y_k^2 = 0$$

musí být nekladný.

Příklad 5.1.10 (důležitý). Označme symbolem l_2 systém všech posloupností $x = \{x_k\}$ reálných nebo komplexních čísel $x_k, k \in \mathbb{N}$, pro něž platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty. \quad (5.9)$$

Snadno lze nahlédnout, že l_2 je vzhledem k přirozeným definicím sčítání „člen po členu“ a násobení skalárem „člen po členu“ lineární prostor: pro každé $x \in l_2$ zřejmě platí rovnost $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha x_k|^2 = |\alpha|^2 \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2$, z níž plyne $\alpha x \in l_2$. Pro libovolná dvě čísla a, b vyplývá snadno z nerovnosti $(|a| - |b|)^2 \geq 0$ jednoduchý odhad $2|a||b| \leq |a|^2 + |b|^2$, takže

$$|a + b|^2 \leq |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 \leq 2(|a|^2 + |b|^2) . \quad (5.10)$$

Aplikujeme-li nerovnost (5.10) na x_k, y_k a sečteme pro všechna $k \in \mathbb{N}$, dostaneme

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^2 \leq 2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^2 \right) < \infty ,$$

což dokazuje, že prostor l_2 je uzavřený vzhledem ke sčítání. Chceme-li ukázat, že

$$(x, y) := x_1 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_2} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}$$

definuje na l_2 skalární součin, stačí dokázat jeho konečnost pro každé dva prvky $x, y \in l_2$. K tomu stačí dokázat následující lemma.

Lemma 5.1.11. *Pro každé dvě posloupnosti $x, y \in l_2$ platí nerovnost*

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k} \right| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^2 \right)^{1/2} . \quad (5.11)$$

Důkaz. Stačí uvážit, že podle (5.7) platí nerovnost s konečnými součty pro každé $m \in \mathbb{N}$. V nerovnosti (5.7) přejdeme k suprému přes všechna $m \in \mathbb{N}$ nejprve na pravé straně, a tak dostaneme na pravé straně nekonečné řady; pak uděláme totéž na levé straně, a obdržíme nerovnost (5.11). $\square$

Omezení (5.9) zaručuje, že pracujeme pouze s posloupnostmi, pro které jsou příslušný skalární součin a odpovídající norma konečné. Protože již víme, že l_2 je prostor se skalárním součinem, je přirozené se ptát, zda je tento prostor úplný, tj. zda je Hilbertovým prostorem. To se většinou dokazuje v daleko obecnějším kontextu, není však obtížné to dokázat přímo z definice.

Věta 5.1.12. *Prostor l_2 je úplný a je tedy Hilbertovým prostorem.*

Důkaz. Pro práci s posloupnostmi prvků z l_2 zavedeme další index n pro „celou posloupnost“ a místo $x_n = \{x_{n1}, x_{n2}, \dots\}$ budeme psát pomocí dvojíhých indexů $\{x_{nk}\}$. Pro cauchyovskou posloupnost $\{x_n\}$ prvků (posloupností) $x_n \in l_2$ platí: ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $p \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $m, n \geq p$

$$\|x_m - x_n\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_{mk} - x_{nk}|^2 \right)^{1/2} < \varepsilon . \quad (5.12)$$

Protože sčítáme nezáporná čísla, platí pak i $|x_{mk} - x_{nk}| < \varepsilon$ pro každé $k \in \mathbb{N}$ a tak $\{x_{nk}\}_{n=1}^{\infty}$ je pro každé $k \in \mathbb{N}$ cauchyovská posloupnost. Tyto posloupnosti „indexované parametrem k “ konvergují stejnoměrně vzhledem ke $k \in \mathbb{N}$ k nějaké posloupnosti $x_0 = \{x_{0k}\}$. Vzhledem ke stejnoměrnosti v $k \in \mathbb{N}$ lze zaměnit v (5.12) limitní přechod pro $n \rightarrow \infty$ se sčítáním

řady vzhledem ke sčítacímu indexu k , a tak „limitovat vzhledem k n “ za znamením sumy. Dostaneme tak podle varianty Věty 15.3.3 z [78] z (5.12) odhad $\|x_m - x_0\| \leq \varepsilon$. Ukažme ještě, že tato posloupnost x_0 leží v prostoru l_2 . Pro čtverec normy x_0 platí odhad

$$\|x_0\|^2 \leq \|x_0 - x_n + x_n\|^2 \leq 2(\|x_0 - x_n\|^2 + \|x_n\|^2),$$

což dává $x_0 \in l_2$. □

Poznámka 5.1.13. Čtenář patrně zná obecnou větu o zúplnění metrických prostorů. Uvedme bez důkazu, že každý prostor se skalárním součinem lze zúplnit a že toto zúplnění je Hilbertovým prostorem: tak lze každý unitární prostor X vnořit „přirozeným způsobem“ do nějakého Hilbertova prostoru H , který není „příliš veliký“, takže pro něj platí $\overline{X} = H$.

Příklad 5.1.14. Nyní máme k dispozici jeden velmi důležitý příklad Hilbertova prostoru, který *nemá* konečnou dimenzi. Je možné, že je pouze speciálním případem obecnější situace, se kterou jste se již setkali. Uvedeme bez důkazů některá další důležitá fakta, navazující na látku z teorie míry a integrálu, která později použijeme. Týkají se prostorů $\mathcal{L}_2$. Budeme pracovat s prostorem (tříd) funkcí, pro které je pro $-\infty < a < b < \infty$

$$\|f\|_2^2 := \int_a^b |f(t)|^2 dt < \infty. \quad (5.13)$$

Označíme $\mathcal{L}_2((a, b))$ prostor tříd reálných (resp. komplexních) funkcí definovaných λ -skoro všude na (a, b) , pro něž platí (5.13). Zde pracujeme s *třídami funkcí* podle rovnosti λ -skoro všude, kde λ je Lebesgueova míra v $\mathbb{R}$, běžně se však nerozlišuje mezi těmito třídami a funkcemi, které je reprezentují. Tento prostor je vzhledem ke skalárnímu součinu definovanému pomocí

$$(f, g) := \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt \quad (5.14)$$

prostorem se skalárním součinem. Tzv. *Hölderova nerovnost* má pro tento speciální případ tvar

$$\int_a^b |f(t)g(t)| dt \leq \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} \cdot \left(\int_a^b |g(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Pro další výklad je zejména podstatné, že $\mathcal{L}_2((a, b))$ je Hilbertův prostor, tj. že je *úplný*. Toto tvrzení, které je mimořádně důležité, dokazovat nebudeme. Poznamenáváme, že právě v něm hraje prominentní roli Lebesgueův integrál.

Poznámka 5.1.15. Předchozí závěrečnou větu ještě okomentujeme: Lze zkonstruovat posloupnost funkcí $\{f_k\}$, které jsou (R)-integrovatelné na intervalu $[0, 1]$, a posloupnost $\{f_k\}$ je Cauchyovská vzhledem ke vzdálenosti

$$\|f_n - f_k\|_2 = \left((\mathcal{R}) \int |f_n(t) - f_k(t)|^2 dt \right)^{1/2}, \quad \text{tj.} \quad \lim_{n, k \rightarrow \infty} (\mathcal{R}) \int |f_n(t) - f_k(t)|^2 dt = 0,$$

avšak *neexistuje žádná Riemannovsky integrovatelná funkce f na $[0, 1]$, pro kterou by platilo*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\mathcal{R}) \int |f_k(t) - f(t)|^2 dt = 0.$$

Jinak řečeno, Riemannův integrál nám nestačí, neboť lineární prostor $\mathcal{R}([0, 1])$ v takto zavedené normě *není úplný*.

Shrňme tedy všechny tyto připomenuté (a nedokázané) poznatky do následujícího tvrzení:

Věta 5.1.16. *Prostor $\mathcal{L}_2((a, b))$ je úplný, separabilní a je to vzhledem ke skalárnímu součinu definovanému pomocí (5.14) Hilbertův prostor.*

K uvedeným příkladům se ještě vrátíme, nyní dokážeme několik obecných tvrzení o Hilbertových prostorech.

Lemma 5.1.17. *Nechť H je Hilbertův prostor, $y_0 \in H$. Zobrazení $x \mapsto (x, y_0)$, $x \mapsto (y_0, x)$, $x \mapsto \|x\|$ jsou (při pevně zvoleném y_0) stejnoměrně spojitá na H . Zobrazení $[x, y] \mapsto (x, y)$, kde dvojici $[x, y]$ přiřazujeme hodnotu skalárního součinu (x, y) , je spojitě zobrazení $H \times H$ do $\mathbb{C}$ (resp. $\mathbb{R}$).*

Důkaz. Začneme se stejnoměrnou spojitostí všech tří zobrazení z první části tvrzení na jednou. Snadno užitím (5.1) dostaneme odhady

$$|(x, y_0) - (x_0, y_0)| \leq \|y_0\| \|x - x_0\|, \quad |(y_0, x) - (y_0, x_0)| \leq \|y_0\| \|x - x_0\|;$$

z trojúhelníkové nerovnosti dostaneme

$$|\|x\| - \|x_0\|| \leq \|x - x_0\|.$$

Z těchto nerovností vyplývá stejnoměrná spojitost všech tří zkoumaných zobrazení (zobrazení jsou dokonce lipschitzovská). Nakonec dokážeme spojitost skalárního součinu. Snadno ověříme přímým výpočtem

$$\begin{aligned} (x - x_0, y - y_0) &= (x, y) - (x, y_0) - (x_0, y) + (x_0, y_0) = \\ &= (x, y) - (x_0, y_0) - (x - x_0, y_0) - (x_0, y - y_0), \end{aligned}$$

z čehož dostaneme pomocí (5.1) a již odvozených nerovností

$$|(x, y) - (x_0, y_0)| \leq \|x - x_0\| \|y - y_0\| + \|x_0\| \|y - y_0\| + \|y_0\| \|x - x_0\|,$$

a tedy i první část tvrzení. □

Tvrzení 5.1.18. *V Hilbertově prostoru H platí pro každou dvojici prvků $x, y \in H$*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \quad (5.15)$$

Důkaz. Stačí sečíst rovnosti

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y), \\ \|x - y\|^2 &= (x, x) - (x, y) - (y, x) + (y, y), \end{aligned}$$

a po úpravě dostaneme okamžitě (5.15). □

Poznámka 5.1.19. Je zajímavé, že tímto vztahem je „hilbertovská norma“ plně charakterizována. Každou normu s právě popsányými vlastnostmi lze generovat pomocí vhodného skalárního součinu. Např. jde-li o normovaný lineární prostor nad $\mathbb{R}$, stačí položit (předchozí rovnosti nyní odečteme)

$$(x, y) := \frac{\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2}{4}.$$

V „komplexním případě“ je to trochu složitější; tento fakt však nebudeme v dalším k ničemu potřebovat, je však užitečné ho znát. Geometricky je podmínka (5.15) zajímavá a bývá nazývána *rovnoběžníkové pravidlo*. Doporučujeme čtenáři načrtnout si obrázek a uvážit, co víme v rovnoběžníku o vztahu čtverců délek všech jeho stran a čtverců úhlopříček. Konečně stojí za povšimnutí, že podmínka se ověřuje v (maximálně) dvourozměrném podprostoru generovaném prvky x, y . Je-li tedy *každý* nejvýše dvourozměrný podprostor *úplného* normovaného lineárního prostoru Hilbertovým prostorem, je také celý prostor Hilbertovým prostorem.

Věta 5.1.20. *Nechť M je neprázdná, konvexní a uzavřená podmnožina Hilbertova prostoru H . Potom pro každé $x \in H$ existuje právě jedno $y \in M$ tak, že $\|x - y\| = \text{dist}(x, M)$.*

Důkaz. Existuje posloupnost $\{y_n\} \in M$ tak, že $\|x - y_n\| \rightarrow d := \text{dist}(x, M)$. Potom z (5.15) plyne vzhledem k $\|y_m - y_n\| = \|(y_m - x) - (y_n - x)\|$ odhad

$$\begin{aligned} \|(y_n - x) - (y_m - x)\|^2 &= 2(\|y_n - x\|^2 + \|y_m - x\|^2) - \|y_n + y_m - 2x\|^2 = \\ &= 2(\|y_n - x\|^2 + \|y_m - x\|^2) - 4\left\|\frac{y_n + y_m}{2} - x\right\|^2 \leq \\ &\leq 2(\|y_m - x\|^2 + \|y_n - x\|^2) - 4d^2, \end{aligned}$$

z něhož plyne, že posloupnost $\{y_n\}$ je cauchyovská. Označme její limitu y ; je $y_n \rightarrow y$, $y \in M$ a $\|x - y\| = d$. Pokud by existovaly dva prvky y, z s touto vlastností, musela by podle předcházející úvahy být též cauchyovská posloupnost $\{y, z, y, z, \dots\}$. Musela by tedy být i konvergentní, z čehož již plyne $y = z$. $\square$

Poznámka 5.1.21. Vidíme, že existuje právě jeden bod y v M , který je „bod x nejblíže“. Je tedy jeho *metrickou projekcí* na M . Bude zároveň i jeho ortogonální projekcí na M , pokud bude M podprostorem H ; tento pojem zavedeme níže. Vektor $(y - x)$ je totiž kolmý na každý vektor podprostoru H .

Označení 5.1.22. Jestliže pro $x, y \in H$ platí $(x, y) = 0$, říkáme, že x, y jsou *ortogonální*; píšeme pak $x \perp y$. Jestliže pro všechna $x \in A, y \in B$ je $x \perp y$, píšeme $A \perp B$ a množiny A, B nazýváme též *ortogonální*. Množinu *všech* $y \in H$, pro které je $y \perp A$ (tak zkráceně zapisujeme $\{y\} \perp A$), značíme $A^\perp$; podobně píšeme $x^\perp$ místo $\{x\}^\perp$.

Poznámka 5.1.23 (důležitá). Z linearity skalárního součinu a jeho spojitosti plyne, že pro každé $x \in H$ platí:

$$(1) \ x^\perp \text{ je lineární podprostor } H \quad \text{a} \quad (2) \ x^\perp \text{ je uzavřený.}$$

Odtud jednoduše plyne následující tvrzení:

Důsledek 5.1.24. *Množina $M^\perp = \bigcap_{x \in M} x^\perp$ je uzavřený podprostor H pro každou množinu $M \subset H$.*

Věta 5.1.25. *Nechť M je uzavřený lineární podprostor v H . Potom existuje dvojice lineárních zobrazení P, Q*

$$P : H \rightarrow M, \quad Q : H \rightarrow M^\perp \quad (5.16)$$

takových, že pro všechna $x \in H$ platí:

- (1) $x = Px + Qx$;
- (2) $x \in M \implies Px = x, Qx = 0$;
- (3) $x \in M^\perp \implies Px = 0, Qx = x$;
- (4) zobrazení P, Q jsou určena jednoznačně;
- (5) $\|x - Px\| = \text{dist}(x, M)$;
- (6) $\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|Qx\|^2$.

Důkaz. Je-li $x \in H$, je $x + M := \{x + y; y \in M\}$ konvexní uzavřená množina. Položme $Qx := z$ pro to $z \in x + M$, pro jehož normu platí

$$\|z\| = \|z - 0\| = \text{dist}(0, x + M) = \text{dist}(x, M);$$

Věta 5.1.20 zaručuje existenci a jednoznačnost takového prvku z . Dále definujme Px rovností $Px := x - Qx$. Pak zřejmě platí rovnost (1). Z $Qx \in x + M$ plyne $Px = x - Qx \in M$, a tedy $P : H \rightarrow M$.

Ukažme, že $(Qx, y) = 0$ pro všechna $y \in M$; to ale stačí ukázat pro ta y , pro něž $\|y\| = 1$. Z definice $Qx = z$ plyne pro každý skalár α

$$\|z\|^2 = (z, z) \leq \|z - \alpha y\|^2, \quad \text{a tedy} \quad 0 \leq -\alpha(y, z) - \bar{\alpha}(z, y) + |\alpha|^2.$$

Dosadíme $\alpha = (z, y)$, z čehož po úpravě obdržíme $0 \leq -|(z, y)|^2$. Odtud již vyplývá rovnost $(z, y) = (Qx, y) = 0$. Tím jsme ověřili, že zobrazení P, Q zobrazují H dle (5.16). Zřejmě též platí (2) a (3).

Rozložme $x \in H$ na součet $x = x_1 + x_2$, kde $x_1 \in M, x_2 \in M^\perp$. Potom je

$$Px + Qx = x_1 + x_2, \quad \text{resp.} \quad Px - x_1 = x_2 - Qx.$$

Pak ale $Px - x_1 \in M, x_2 - Qx \in M^\perp$ a

$$(Px - x_1, x_2 - Qx) = (Px, x_2) + (x_1, Qx) - (x_1, x_2) - (Px, Qx) = 0,$$

a tedy $Px = x_1, Qx = x_2$; tím je dokázána jednoznačnost. Použitím analogické úvahy o rozkladu pro lineární kombinaci $\alpha x + \beta y$ dostaneme linearitu P, Q : Je

$$\begin{aligned} \alpha x + \beta y &= P(\alpha x + \beta y) + Q(\alpha x + \beta y), \\ x &= Px + Qx, \quad y = Py + Qy, \end{aligned}$$

a tedy

$$P(\alpha x + \beta y) - \alpha Px - \beta Py = \alpha Qx + \beta Qy - Q(\alpha x + \beta y).$$

Odtud již plyne linearita obou zobrazení.

Konečně zbývá zdůvodnit poslední rovnost tvrzení, která je opět důsledkem ortogonalit:

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \|Px + Qx\|^2 = (Px + Qx, Px + Qx) = \\ &= \|Px\|^2 + (Px, Qx) + (Qx, Px) + \|Qx\|^2 = \|Px\|^2 + \|Qx\|^2. \end{aligned}$$

Tím je důkaz celého tvrzení dokončen. □

Poznámky 5.1.26. (1) Předcházející tvrzení lze zobecnit na konečný počet vzájemně ortogonálních uzavřených podprostorů H .

(2) Pokud je $M \neq H$, pak existuje nenulové $z \in H$, $z \perp M$, neboť pro $x \in H \setminus M$ je $x = y + z$ a $z \neq 0$. Prostor $M^\perp$ je tedy netriviálním podprostorem H .

(3) Lineární zobrazení A lineárního prostoru X do X , pro které platí

$$A^2(x) = (A \circ A)(x) = Ax \text{ pro všechna } x \in X,$$

se nazývají *projekce* (na $A(X)$). Zobrazení P, Q jsou zřejmě (speciální) projekce a nazývají se *ortogonální projekce* prostoru H na M a $M^\perp$.

Definice 5.1.27. Řekneme, že $\{x_\alpha; \alpha \in A\}$ je *ortonormální systém* (též: *ortonormální množina*), pokud

$$\|x_\alpha\| = 1 \text{ pro všechna } \alpha \in A$$

a vektory x_α jsou *po dvou ortogonální*, tj. použijeme-li Kroneckerova symbolu $\delta_{\alpha\beta} = 1$ pro $\alpha = \beta$ a $\delta_{\alpha\beta} = 0$ pro $\alpha \neq \beta$, platí rovnost

$$(x_\alpha, x_\beta) = \delta_{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta \in A.$$

Definice 5.1.28. Maximální ortonormální množinu v Hilbertově prostoru H nazýváme *ortonormální báze Hilbertova prostoru*. Podrobněji: Je to taková ortonormální množina $B \subset H$, pro kterou platí: je-li B_1 ortonormální množina v H , $B \subset B_1$, potom $B = B_1$.

Dvouslovný název *ortonormální báze*, se kterým v Hilbertově prostoru budeme pracovat, je „nedělitelný“. Báze lineárního prostoru ²⁾ a ortonormální báze jsou podstatně rozdílné pojmy. Každý ortonormální systém $\{x_k\}$ je tvořen lineárně nezávislými vektory. Je-li totiž $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0$, potom postupným násobením prvky $x_1, \dots, x_n$ dostaneme sérii rovností $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$. Podstatný rozdíl se však projeví v nekonečněrozměrném prostoru.

Následující látka spadá do algebry, proto se omezíme jen na její popis. Vzniká přirozená otázka, jak lze ortonormální systém v nějakém Hilbertově prostoru H získat. Každý konečný lineárně nezávislý systém A prvků unitárního prostoru lze nahradit ortonormálním systémem B tak, aby pro jejich lineární obaly platila rovnost $\text{Lin}[A] = \text{Lin}[B]$. To se prakticky provádí pomocí tzv. *Gram-Schmidtova ortogonalizačního procesu*. Při něm se postupně z báze H sestavuje ortonormální systém, přičemž každý krok procesu přímo souvisí s konstrukcí, se kterou jsme se setkali ve Větě 5.1.25 a se kterou budeme ještě pracovat.

Je-li např. $\{y_k\}$ nekonečná posloupnost lineárně nezávislých prvků H a jsou-li již nalezeny ortonormální prvky $x_1, \dots, x_n$ tak, že platí rovnost

$$\text{Lin}[x_1, \dots, x_n] = \text{Lin}[y_1, \dots, y_n],$$

pak sestavíme k y_{n+1} prvky y a z podle Věty 5.1.25, kde je

$$y = \sum_{k=1}^n (x, x_k) x_k, \quad z = x - y,$$

²⁾ Někdy se užívá pro rozlišení širšího názvu *lineární báze* nebo *Hamelova báze*.

a položíme $x_{n+1} = z/\|z\|$. O lineární bázi platí toto důležité tvrzení: *V každém lineárním prostoru X existuje (lineární) báze, což je podle definice taková množina A lineárně nezávislých prvků, pro kterou lineární obal $\text{Lin}[A]$ je roven X . Každý lineárně nezávislý systém lze doplnit na bázi.*

Důkaz existence báze A se provádí např. pomocí Zornova lemmatu či podobného aparátu. Poznamenejme, že báze A je *maximální množinou* lineárně nezávislých prvků v následujícím smyslu: Pokud existuje $A_1 \subset X$, $A \subset A_1$ a A_1 je lineárně nezávislá, pak $A = A_1$.

Tvrzení 5.1.29. *Každou ortonormální množinu $B \subset H$ lze doplnit na maximální ortonormální množinu, tj. ortonormální bázi.*

Tato věta se dokazuje podobně jako věta o existenci báze lineárního prostoru na základě Zornova lemmatu nebo některého jiného tvrzení s ním ekvivalentního (jsou to tvrzení ekvivalentní axiomu výběru). Ani tuto větu dokazovat nebudeme.

Je vhodné si uvědomit, že v „algebraickém“ případě pracujeme s *konečnými lineárními kombinacemi* bez jakékoli topologie, ve druhém využíváme i topologické vlastnosti prostoru. Vágně řečeno, pracujeme s *nekonečnými* lineárními kombinacemi. Proto též obecně dimenze prostoru H , tj. mohutnost jeho báze, může být větší než mohutnost jeho ortonormální báze. Uvědomte si rozdíl mezi

$$\text{Lin}[A] = H \quad \text{a} \quad \overline{\text{Lin}[A]} = H.$$

V $\mathbb{R}^m$ je ortonormální báze zároveň bází, avšak např. v „reálném“ l_2 tvoří vektory $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, \dots)$, ... maximální ortonormální množinu B . Lineární obal $\text{Lin}[B]$ této množiny je však tvořen pouze takovými posloupnostmi $x = (x_1, x_2, \dots)$, pro něž je $\{k \in \mathbb{N}; x_k \neq 0\}$ *konečná množina*. Všechny takové posloupnosti tvoří lineární podprostor prostoru l_2 , který je *vlastním podprostorem* l_2 . Naproti tomu pro každé $x \in l_2$ je

$$x = (x_1, x_2, \dots) = \sum_1^\infty x_k \mathbf{e}_k, \quad x \in l_2.$$

V tomto případě ortonormální báze B není (lineární) bází l_2 .

Poznámka 5.1.30. Promyslete si následující zobecnění: Je-li A libovolná množina, uvažujte charakteristické funkce φ_U jejích podmnožin U . Potom charakteristické funkce jednobodových množin jsou zřejmě lineárně nezávislé a jejich lineární obal tvoří prostor charakteristických funkcí *konečných* podmnožin A . V lineárním prostoru X všech charakteristických funkcí podmnožin A umíme pracovat bez obtíží (nemáme potíže s operacemi), ty nastanou při snaze o definici skalárního součinu. Zamyslete se nad problémy, které bychom museli řešit, pokud bychom definovali „přirozeně“ pro charakteristické funkce množin $U, V \subset A$ skalární součin

$$(\varphi_U, \chi_V) := \sum_{t \in A} \varphi_U(t) \varphi_V(t).$$

Tento problém vyřešíme tím, že se omezíme na speciální případ *separabilních* Hilbertových prostorů, dříve však dokážeme ještě jedno důležité tvrzení, které platí obecně.

Věta 5.1.31 (Rieszova věta o reprezentaci). *Je-li f spojitý lineární funkcionál na Hilbertově prostoru H , pak existuje právě jeden prvek $y_f \in H$ tak, že pro všechna $x \in H$ platí*

$$f(x) = (x, y_f).$$

Důkaz. Je-li $f \equiv 0$, položíme $y_f = 0$. V opačném případě je

$$M = \{x \in H; f(x) = 0\}$$

uzavřený podprostor H , přičemž $M^\perp \neq \emptyset$ (neboť $M \neq H$). Zvolme $z \in M^\perp$, $\|z\| = 1$ a položíme

$$u = f(x)z - f(z)x.$$

Protože je $f(u) = f(x)f(z) - f(z)f(x) = 0$, je $u \in M$ a $(u, z) = 0$. Odtud vyplývá $(u, z) = f(x)(z, z) - f(z)(x, z) = 0$, z čehož dostaneme

$$f(x) = f(x)(z, z) = f(z)(x, z) = (x, \overline{f(z)z}).$$

Stačí tedy položit $y_f = \overline{f(z)z}$. Jednoznačnost se dokáže jednoduše: Pokud existují dva prvky y, y' s popsanou vlastností, pak pro všechna $x \in H$ platí

$$0 = (x, y) - (x, y') = (x, y - y'),$$

tedy i $(y - y', y - y') = 0$. Odtud plyne $y = y'$, čímž je důkaz dokončen. $\square$

Lemma 5.1.32. *Nechť je prostor H separabilní a nechť A je ortonormální systém v H . Potom je systém A spočetný³⁾.*

Důkaz. Jestliže $\|x\| = \|y\| = 1$ a $x \perp y$, pak

$$(x - y, x - y) = (x, x) - (x, y) - (y, x) + (y, y) = 2,$$

a tedy $\delta := \|x - y\| = \sqrt{2}$. Protože existuje *spočetná* S taková, že $\overline{S} = H$, lze pro každé $x \in A$ zvolit takové $z_x \in S$, že $\|x - z_x\| < \delta/3$. Pro různá $x, y \in A$ je

$$\delta = \|x - y\| \leq \|x - z_x\| + \|z_x - z_y\| + \|z_y - y\| < 2\delta/3 + \|z_x - z_y\|,$$

a tedy $\|z_x - z_y\| > \delta/3$ a zobrazení $x \mapsto z_x$ je prosté. Jelikož existuje prosté zobrazení množiny A do S , je množina A spočetná. $\square$

Úmluva 5.1.33. Budeme pracovat s ortonormálními systémy vektorů v Hilbertově prostoru H ; všude v dalším výkladu *budeme bez upozornění předpokládat, že tento prostor H je separabilní*. Hilbertův prostor nemusí být separabilní, tím se však, jak jsme již viděli, některé úvahy zkomplikují. I když jde o komplikaci pouze technického rázu, vyhneme se jí.

Lemma 5.1.34. *Nechť $\{x_k; k = 1, \dots, n\}$ je ortonormální systém v Hilbertově prostoru H . Potom pro libovolné skaláry $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ z pole příslušného k H platí*

$$\left\| x - \sum_{k=1}^n (x, x_k) x_k \right\| \leq \left\| x - \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k \right\|.$$

³⁾ Tedy konečný nebo nekonečný spočetný, lze ho tedy indexovat prvky $\mathbb{N}$, případně $\mathbb{Z}$.

Důkaz. Dokážeme, že platí

$$\left\| x - \sum_{k=1}^n (x, x_k) x_k \right\|^2 + \sum_{k=1}^n |\alpha_k - (x, x_k)|^2 = \left\| x - \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k \right\|^2.$$

Spočteme nejprve

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |\alpha_k - (x, x_k)|^2 &= \sum_{k=1}^n (\alpha_k - (x, x_k)) \overline{(\alpha_k - (x, x_k))} = \\ &= \sum_{k=1}^n (|\alpha_k|^2 - \alpha_k \overline{(x, x_k)} - \overline{\alpha_k} (x, x_k) + |(x, x_k)|^2) = \\ &= \sum_{k=1}^n (|\alpha_k|^2 - \alpha_k (x_k, x) - \overline{\alpha_k} (x, x_k) + |(x, x_k)|^2). \end{aligned}$$

Nyní již snadno dostaneme rovnost

$$\begin{aligned} \left\| x - \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k \right\|^2 &= \left(x - \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k, x - \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k \right) = \\ &= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n \alpha_k (x_k, x) - \sum_{k=1}^n \overline{\alpha_k} (x, x_k) + \sum_{k=1}^n |\alpha_k|^2 = \\ &= \|x\|^2 + \sum_{k=1}^n |\alpha_k - (x, x_k)|^2 - \sum_{k=1}^n |(x, x_k)|^2. \end{aligned}$$

Druhý člen ve výrazu na pravé straně rovnosti je nezáporný a nabývá hodnoty 0, právě když platí

$$\alpha_k = (x, x_k), \quad k = 1, \dots, n. \quad (5.17)$$

Zbytek je zřejmý. $\square$

Definice 5.1.35. Je-li $\{x_k; k \in \mathbb{N}\} = \{x_k\}$ ortonormální systém v Hilbertově prostoru H , pak číslům (x, x_k) říkáme *Fourierovy koeficienty* vzhledem k systému $\{x_k; k \in \mathbb{N}\}$. Budeme je značit

$$\widehat{x}(k) = (x, x_k), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Důsledek 5.1.36 (Besselova nerovnost). *Nechť $\{x_k\}$ je ortonormální systém v (separabilním) Hilbertově prostoru H a nechť $x \in H$ a $\widehat{x}(k) = (x, x_k)$. Potom platí*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\widehat{x}(k)|^2 \leq \|x\|^2. \quad (5.18)$$

Důkaz. K (5.18) dospějeme takto: je-li H Hilbertův prostor a $\{x_k; k = 1, \dots, n\}$ je ortonormální systém v H , odvodili jsme pro každé $x \in H$

$$\left\| x - \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k \right\|^2 = \|x\|^2 + \sum_{k=1}^n |\alpha_k - (x, x_k)|^2 - \sum_{k=1}^n |(x, x_k)|^2.$$

Odtud dostáváme volbou Fourierových koeficientů na místě α_k

$$\sum_{k=1}^n |(x, x_k)|^2 = \|x\|^2 - \|x - \sum_{k=1}^n (x, x_k) x_k\|^2, \quad \text{a tedy} \quad \sum_{k=1}^n |(x, x_k)|^2 \leq \|x\|^2.$$

Přechodem k suprému na levé straně plyne odtud (5.18). $\square$

Cvičení 5.1.37. Ukažte, že i v kontextu Hilbertových prostorů platí Riemann-Lebesgueovo lemma: Nechť je $\{x_k\}$ ortonormální systém v Hilbertově prostoru H a nechť $x \in H$. Potom

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (x, x_k) = 0.$$

Návod: Vyjděte z Besselovy nerovnosti.

Poznámka 5.1.38 (důležitá). Vzhledem k tomu, že máme k dispozici pojem konvergence v Hilbertově prostoru, lze snadno definovat součet řady prvků H . Víme totiž, jak definovat $y_m := \sum_{k=1}^m x_k$ a kdy $y_n \rightarrow y$. Můžeme tedy zacházet s řadami v H , aniž budeme budovat rozsáhlejší teorii. Budou nás zajímat řady speciálního tvaru. Je-li $B = \{x_k\}$ ortonormální množina v H a konverguje-li řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k$$

k $y \in H$, pak pro $y_m = \sum_{k=1}^m \alpha_k x_k$ je zřejmě $\alpha_k = (y_m, x_k)$ a

$$\|y_m\|^2 = \sum_{k=1}^m |(y_m, x_k)|^2 = \sum_{k=1}^m |\alpha_k|^2.$$

Odtud plyne, že pokud řada konverguje k y , musí platit

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 = \|y\|^2,$$

neboli v Besselově nerovnosti nastává rovnost a posloupnost $\{\alpha_k\}$ je prvkem l_2 . Snadno též nahlédneme, že při daném ortonormálním systému $\{x_k\}$ je prvek $\sum_{k=1}^{\infty} (x, x_k) x_k$ jednoznačně určen pomocí $\hat{x} : k \mapsto (x, x_k)$, $k \in \mathbb{N}$.

Rovnost $\hat{x}(k) = (x, x_k)$ definuje spojitý lineární funkcionál na H , a proto je zobrazení $F : H \rightarrow l_2$, přiřazující $x \mapsto \hat{x}$, lineární. Z nerovnosti

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\hat{x}(k) - \hat{y}(k)|^2 \leq \|x - y\|^2$$

plyne, že toto zobrazení F je spojitě.

Důležitou otázkou je zkoumat, zda a kdy je v předchozím kontextu F zobrazením na l_2 a izometrií. Důkaz následující věty se zdá lehký jen proto, že pracujeme s úplným prostorem.

Věta 5.1.39 (F. Riesz, Fischer 1907). *Nechť $\{x_k\} \subset H$ je ortonormální systém a nechť $\varphi(k) \in l_2$. Potom existuje $y \in H$ tak, že je $\varphi = \widehat{y}$, řada $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi(k)x_k$ konverguje v H a platí*

$$\|y\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi(k)|^2 \right)^{1/2}.$$

Důkaz. Označme $y_n := \sum_{k=1}^n \varphi(k)x_k$. Potom pro $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$, platí

$$\|y_m - y_n\|^2 = \left(\sum_{k=n+1}^m \varphi(k)x_k, \sum_{k=n+1}^m \varphi(k)x_k \right) = \sum_{k=n+1}^m |\varphi(k)|^2.$$

Protože však řada $\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi(k)|^2$ konverguje, je poslední součet v předchozím vztahu libovolně malý pro všechna $m > n$, jakmile je $n \in \mathbb{N}$ dostatečně velké. Je tedy $\{y_n\}$ Cauchyovská posloupnost, která v úplném prostoru H konverguje k nějakému $y \in H$, čímž je důkaz dokončen; zde jde prakticky o odhad zbytkem konvergentní řady po n -tém členu. $\square$

Dokázali jsme tedy, že s ohledem na úplnost H je zobrazení $F : H \rightarrow l_2$ vždy na. Nás samozřejmě nejvíce zajímá, kdy lze každé $x \in H$ v separabilním (nekonečněrozměrném) Hilbertově prostoru vyjádřit pomocí určité ortonormální množiny $D = \{x_k\}$, a to ve tvaru

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} (x, x_k) x_k,$$

což je *Fourierova řada* v H vzhledem k ortonormální množině D .

Na závěr naše poznatky shrneme do jediné věty a uvedeme je do vzájemné souvislosti. Pak si již jen uvědomíme, co odtud z vybudované abstraktní teorie dostaneme pro „klasické“ Fourierovy řady.

Věta 5.1.40. *Nechť $B := \{w_k\} \subset H$ je ortonormální v H . Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

- (a) B je ortonormální báze Hilbertova prostoru H ;
- (b) všechny konečné lineární kombinace prvků z B tvoří hustou podmnožinu H , tj. $\overline{\text{Lin}[B]} = H$;
- (c) jestliže pro všechna w_k , $k \in \mathbb{N}$, platí $(x, w_k) = 0$, pak $x = 0$;
- (d) pro všechna $x \in H$ je $x = \sum_{k=1}^{\infty} (x, w_k) w_k$;
- (e) pro všechna $x, y \in H$ je

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{x}(k) \overline{\widehat{y}(k)};$$

- (f) pro všechna $x \in H$ platí tzv. Parsevalova rovnost

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\widehat{x}(k)|^2. \quad (5.19)$$

Důkaz. Dokážeme postupně sérii implikací $(a) \Rightarrow \dots \Rightarrow (f) \Rightarrow (a)$.

$(a) \Rightarrow (b)$:

Zřejmě je $\text{Lin}[B]$ lineární podprostor H , a proto je $\overline{\text{Lin}[B]}$ uzavřený lineární podprostor H , neboť snadno ověříme, že

$$x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y \Rightarrow x_n + y_n \rightarrow x + y, \dots;$$

operace sčítání a násobení skalárem jsou ve zřejmém smyslu spojité „na H “. Při $\overline{\text{Lin}[B]} \neq H$ je $\overline{\text{Lin}[B]}^\perp$ netriviální, a tedy B není maximální, což dává ekvivalentní výrok $\text{non}(b) \Rightarrow \text{non}(a)$.

$(b) \Rightarrow (c)$:

Jestliže platí $(x, w_k) = 0$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$, je i $(x, y) = 0$ pro každé $y \in \text{Lin}[B]$ a ze spojitosti skalárního součinu i pro každé $y \in \overline{\text{Lin}[B]} = H$, tedy je i $(x, x) = 0$ a $x = 0$.

$(c) \Rightarrow (d)$:

Pro každé $w_l \in B$ a každé $x \in H$ dostáváme

$$\begin{aligned} \left(x - \sum_{k=1}^{\infty} (x, w_k) w_k, w_l \right) &= (x, w_l) - \sum_{k=1}^{\infty} (x, w_k) (w_k, w_l) = \\ &= (x, w_l) - (x, w_l) = 0, \end{aligned}$$

což dává potřebné tvrzení.

$(d) \Rightarrow (e)$:

Pro každé dva prvky $x, y \in H$ dostáváme

$$\begin{aligned} (x, y) &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} (x, w_k) w_k, \sum_{l=1}^{\infty} (y, w_l) w_l \right) = \\ &= \sum_{[k,l]} (x, w_k) (w_k, w_l) \overline{(y, w_l)} = \sum_{m=1}^{\infty} (x, w_m) \overline{(y, w_m)}. \end{aligned}$$

$(e) \Rightarrow (f)$:

Nyní stačí do tvaru z (e) dosadit $x = y$.

$(f) \Rightarrow (a)$:

Budeme postupovat sporem: Předpokládejme, že existuje nenulové $z \in H \setminus B$, $\|z\| = 1$. Uvažujme ortonormální množinu $B_1 = B \cup \{z\}$. Pomocí (f) a Besselovy nerovnosti dostaneme

$$\|z\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(z, w_k)|^2 < \sum_{k=1}^{\infty} |(z, w_k)|^2 + |(z, z)|^2 = \|z\|^2.$$

Nalezený spor ukazuje, že B je maximální.

Tím je důkaz „kolečka implikací“ a tedy i tvrzení věty dokončen. $\square$

Příklad 5.1.41. Teorii, se kterou jsme se seznámili, lze aplikovat na klasický případ Fourierových řad. Je však nutná jistá opatrnost související s tím, že jsme používali některá označení ve dvojím významu (např. Fourierovy koeficienty apod.). V dalším budeme užívat označení $\mathcal{L}_p(2\pi)$ pro 2π -periodické funkce z prostoru (tříd) funkcí $\mathcal{L}_p$, tj. funkcí s konvergentním Lebesgueovým integrálem na intervalu $(-\pi, \pi)$.

Systém funkcí $\{1, \cos kx, \sin kx\}_{k=1}^{\infty}$ je tvořen funkcemi v $\mathcal{L}_2(2\pi)$, které jsou ortogonální; tyto funkce však nejsou ortonormální. Odpovídající ortonormální systém je (pracujeme s normou z $\mathcal{L}_2(2\pi)$!)

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}} \right\}_{k=1}^{\infty}.$$

Protože trigonometrické polynomy tvoří hustou podmnožinu $\mathcal{L}_2(2\pi)$, je splněna podmínka (b) z Věty 5.1.40, a tedy i kterákoli z podmínek téže věty.

Pro Fourierovy koeficienty ve smyslu teorie Hilbertových prostorů platí např.

$$\left(f, \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt,$$

takže odpovídající koeficient a_k v „klasické teorii“ je roven tomuto číslu až na faktor $1/\sqrt{\pi}$. Obdobný vztah platí i pro ostatní koeficienty; připomeňme ještě, že „absolutní člen“ jsme v klasické teorii psali ve tvaru $a_0/2$.

Pro funkci z $\mathcal{L}_2(2\pi)$ tak dostaneme rovnost (a je reálné číslo)

$$\int_a^{a+2\pi} |f(t)|^2 \, dt = \pi \left(\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2) \right), \quad (5.20)$$

kteřá je pouze přepisem Parsevalovy rovnosti (5.19) z podmínky (f) z Věty 5.1.40. Tuto rovnost lze využít například k výpočtu normy funkce f v $\mathcal{L}_2(2\pi)$, známe-li její Fourierovy koeficienty a umíme sečíst řadu na pravé straně rovnosti (5.20), nebo k sečtení hodnoty téže řady v případě, že naopak známe hodnotu integrálu v (5.20) vlevo.

Označíme-li $a'_k, b'_k, k \in \mathbb{N}_0$ Fourierovy koeficienty funkce $g \in \mathcal{L}_2(2\pi)$ a budeme-li předpokládat, že obě funkce f, g jsou reálné, můžeme pro ně odvodit vzorec

$$\int_a^{a+2\pi} f(t) g(t) \, dt = \pi \left(\frac{a_0 a'_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k a'_k + b_k b'_k) \right).$$

Čtenář si již vcelku snadno „přeloží“ další výsledky.

Pro funkce z $\mathcal{L}_2(2\pi)$ vychází tedy celá teorie velmi elegantně a jejich Fourierovy řady konvergují bodově skoro všude ve smyslu Lebesgueovy míry. Výše popsanými prostředky však přesnější informaci o množině bodů, v níž řada konverguje, nemáme. Tu při výlučném použití teorie Hilbertových prostorů získat nemůžeme.

Příklad 5.1.42 (Legendreovy polynomy). Výše probraná teorie však dává jistou informaci např. pro různé systémy ortogonálních polynomů. V obecné poloze jde o vyšetřování systémů funkcí, jejichž skalární součin je definován vzorcem

$$(f, g) = \int_a^b V(t) f(t) \overline{g(t)} \, dt,$$

kde $(a, b) \subset \mathbb{R}$ je jistý interval a V je kladná (a konečná) funkce na (a, b) ; ta se nazývá *váha*. Pro přiblížení těchto speciálních tříd si blíže všimneme ortogonálních polynomů, které se nazývají *Legendreovy polynomy*. V tom případě je (a, b) omezený interval v $\mathbb{R}$ a váha V je identicky rovna 1. Podrobnější informaci nalezne zvědavý čtenář v [41].

Označíme hledané Legendreovy polynomy symbolem P_n , kde n je stupeň polynomu P_n . Zřejmě lze P_n zapsat jako n -tou derivaci polynomu Q_n , který je stupně $2n$. Potom pro každý polynom R stupně nižšího než n platí (užíváme metodu *per partes*)

$$\begin{aligned} \int_a^b P_n(t)R(t) dt &= \int_a^b Q_n^{(n)}(t)R(t) dt = \\ &= [Q_n^{(n-1)}(t)R(t) - Q_n^{(n-2)}(t)R'(t) + \dots \pm Q_n(t)R^{(n-1)}(t)]_{t=a}^b. \end{aligned}$$

Z podmínky ortogonality plyne, že by tento výraz měl být roven 0. To nastane například tehdy, jestliže bude mít polynom Q_n za n -násobné kořeny krajní body a, b . Definujeme tedy $Q_n(t) = A_n(t-a)^n(t-b)^n$, kde dle zvyku klademe $A_n = 1/(2^n n!)$, takže

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} ((t-a)(t-b))^n.$$

Platí

$$\begin{aligned} \int_a^b P_n^2(t) dt &= \int_a^b Q_n^{(n)}(t)Q_n^{(n)}(t) dt = \\ &= [Q_n^{(n)}Q_n^{(n-1)} - Q_n^{(n+1)}Q_n^{(n-2)} + \dots \pm Q_n^{(2n-1)}Q_n]_a^b \pm \int_a^b Q_n^{(2n)}(t)Q_n(t) dt. \end{aligned}$$

Závorka je rovna 0, takže vpravo zbude poslední integrál, který je roven

$$\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \int_a^b (t-a)^n(t-b)^n dt.$$

Další n -násobná aplikace metody per-partes dá

$$\int_a^b P_n^2(t) dt = \frac{(b-a)^{2n+1}}{2^{2n}(2n+1)}.$$

Položíme-li $(a, b) = (-1, 1)$ a ponecháme-li všechno ostatní označení, dostaneme

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} ((x^2-1)^n), \quad \int_{-1}^1 P_n^2(t) dt = \frac{2}{2n+1}.$$

Pro tyto polynomy lze odvodit různé rekurentní formule; srv. např. [41], Věty 212 a 213:

$$(n+1)P_{n+1}(t) - (2n+1)tP_n(t) + nP_{n-1}(t) = 0,$$

odkud vyplývá

$$P_0(t) = 1, \quad P_1(t) = t, \quad P_2(t) = \frac{3t^2}{2} - \frac{1}{2}, \quad P_3(t) = \frac{5t^3}{2} - \frac{3}{2}t, \quad \dots$$

Legendreovy polynomy splňují pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ diferenciální rovnici

$$(1-t^2)P_n''(t) - 2tP_n'(t) + n(n+1)P_n(t) = 0.$$

Příklad 5.1.43 (Čebyševovy polynomy). Tyto polynomy tvoří rovněž ortogonální systém v $(-1, 1)$ vzhledem k váze $V(t) = (1 - t^2)^{-1/2}$. Přístup k nim je různý. Jsou to například polynomy s koeficientem 1 u „nejvyšší mocniny“ x^n , které nejlépe aproximují v suprémové normě identicky nulovou funkci na intervalu $[-1, 1]$. Lze je vyjádřit vzorcem

$$T_0(t) = 1, \quad T_n(t) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos t).$$

Jiný přístup k ortogonálním polynomům je možný přes tzv. *vytvorující funkce*.

Kapitola 6

Fourierova transformace

V této kapitole se budeme zabývat výhradně Fourierovou transformací. Funkce, se kterými budeme pracovat, jsou *komplexní funkce* reálné proměnné. Při výkladu se však dostáváme na tenký led: V této kapitole již vůbec s Riemannovým integrálem nevystačíme např. proto, že obecně potřebujeme integrovat přes *neomezený* interval.

6.1 Fourierova transformace

Jestliže má $f \in \mathcal{C}(2\pi)$ konečnou variaci na každém $[a, b] \subset \mathbb{R}$, pak $\{c_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$,

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt, \quad k \in \mathbb{Z},$$

je omezená posloupnost, $c_k \rightarrow 0$ pro $|k| \rightarrow \infty$ a pro každé $x \in \mathbb{R}$ je

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}.$$

Nejjednodušší zobecnění tohoto vyjádření se týká periodicity: pro $2p$ -periodickou funkci $f \in \mathcal{C}(2p)$ s lokálně konečnou variací platí pro $p > 0$

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik\frac{\pi x}{p}} \left(\frac{1}{2p} \int_{-p}^p f(t) e^{-ik\frac{\pi t}{p}} dt \right).$$

Na základě *velmi intuitivní úvahy* o roztažení intervalu $(-p, p)$ na $\mathbb{R}$ a o nahrazení součtu integrálem se můžeme dostat ke vztahu¹⁾

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{-itv} dv \right) dt, \quad (6.1)$$

který má alespoň zdánlivě některé výhody: analogií $\widehat{f}(k)$ je nyní *funkce* $\widehat{f}$, vztah mezi f a $\widehat{f}$ je „symetričtější“ a periodicity f se tak zbavíme. Vůbec nic jsme *nedokázali*, ale stručný popis této úvahy nám poslouží jako vodítko pro další postup.

¹⁾ Podrobně viz začátek Kapitoly 8 v [53] a ještě podrobněji odstavec 5.4 v [4].

Je-li $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}) = \mathcal{L}_1$, lze definovat

$$\widehat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{-itv} dv, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (6.2)$$

protože integrál vpravo konverguje pro všechna $t \in \mathbb{R}$. Funkci $\widehat{f}$ budeme nazývat *Fourierovým obrazem* nebo *Fourierovou transformací* funkce f . Připomínáme, že stále ztotožňujeme f s třídou funkcí g měřitelných na $\mathbb{R}$, pro něž $f = g$ skoro všude na $\mathbb{R}$, tj. s prvky prostoru $\mathcal{L}_1$. Zobrazení $f \rightarrow \widehat{f}$ také nazýváme *Fourierova transformace*. Všimneme si nejprve jeho základních vlastností ²⁾.

Tyto vlastnosti jsou důsledkem translační invariance Lebesgueovy míry a toho, že (komplexní) exponenciála vyhovuje funkcionální rovnici

$$\varphi(s+t) = \varphi(s) \cdot \varphi(t), \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Využíváme také poznatků z teorie míry a integrálu. Výklad v jiných učebnicích se může nepodstatně lišit např. v tom, jak naložíme s faktorem $1/2\pi$, tyto odlišnosti však nejsou podstatné.

Připomeňme, že pracujeme s normou

$$\|f\|_p = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^p dt \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

a že konvoluce funkcí $f, g \in \mathcal{L}_1$ je definována vzorcem

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y) dy.$$

Základní vlastnosti Fourierovy transformace popisuje tvrzení:

Věta 6.1.1 (vlastnosti Fourierovy transformace). *Nechť $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}, f \in \mathcal{L}_1$. Potom platí:*

- (a) Je-li $g(x) = f(x) e^{i\alpha x}$, pak $\widehat{g}(t) = \widehat{f}(t - \alpha)$.
- (b) Je-li $g(x) = f(x - \alpha)$, pak $\widehat{g}(t) = \widehat{f}(t) e^{-i\alpha t}$.
- (c) Je-li $g \in \mathcal{L}_1$ a $h = f * g$, pak $\widehat{h}(t) = \widehat{f}(t) \cdot \widehat{g}(t)$.
- (d) Je-li $g(x) = \overline{f(-x)}$, pak $\widehat{g}(t) = \overline{\widehat{f}(t)}$.
- (e) Je-li $g(x) = f(x/\lambda)$, $\lambda > 0$, pak $\widehat{g}(t) = \lambda \widehat{f}(\lambda t)$.
- (f) Je-li $g(x) = -ixf(x) \in \mathcal{L}_1$, potom $\widehat{f}$ má derivaci a $\widehat{g}(t) = (\widehat{f})'(t)$.

²⁾ Zmínili jsme větší symetrii vztahu mezi f a $\widehat{f}$. Je možné faktor $1/2\pi$ v (6.1) „rozdělit“ a vložit faktor $1/\sqrt{2\pi}$ do definice $\widehat{f}$ a dosáhnout tak ještě větší symetrie, ale to je vcelku nepodstatné.

Důkaz. Většinu z uvedených vlastností lze ověřit triviálním výpočtem. Ukážeme si to na dvou méně zřejmých z nich: užitím Fubiniovy věty dostaneme v (c)

$$\begin{aligned}\widehat{h}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itv} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(v-u) g(u) du \right) dv = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(u) e^{-itu} du \int_{-\infty}^{\infty} f(v-u) e^{-it(v-u)} dv = \widehat{g}(t) \cdot \widehat{f}(t).\end{aligned}$$

Podobně pro $s \neq t$ dostaneme v (f) dosazením

$$\frac{\widehat{f}(s) - \widehat{f}(t)}{s - t} = \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{-itv} \left(\frac{e^{-i(s-t)v} - 1}{s - t} \right) dv.$$

Pro $u \neq 0$ dostaneme elementárními úpravami odhad

$$\left| \frac{e^{-ivu} - 1}{u} \right| \leq \frac{|\cos vu - i \sin vu - 1|}{|u|} \leq |v|.$$

Z něj a z předpokladů plyne možnost použít Lebesgueovu větu o dominované konvergenci a dostat tak limitním přechodem pro $s \rightarrow t$

$$(\widehat{f})'(t) = - \int_{-\infty}^{\infty} iv f(v) e^{-itv} dv = -i t \widehat{f}(t).$$

□

Využijeme-li vlastnost (b) z Věty 6.1.1, dostaneme jako Fourierův obraz funkce

$$\frac{f(x+\alpha) - f(x)}{\alpha}$$

funkci

$$\widehat{f}(t) \frac{e^{i\alpha t} - 1}{\alpha}.$$

To nás přivádí na myšlenku, že bychom jako Fourierův obraz f' mohli obdržet funkci $it\widehat{f}(t)$. Pro funkci f , pro kterou $f, f' \in \mathcal{L}_1$ a f je primitivní funkcí k f' , dostaneme tento vztah pomocí *metody per partes*

$$\begin{aligned}(\widehat{f'})(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(v) e^{-itv} dv = \\ &= f(t) e^{-itv} \Big|_{t=-\infty}^{\infty} + it \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{-itv} dv = it \widehat{f}(t).\end{aligned}\tag{6.3}$$

V dalším využijeme následující lemma:

Lemma 6.1.2. Označíme-li pro funkci f a $y \in \mathbb{R}$

$$f_y(x) = f(x - y), \quad x \in \mathbb{R},$$

pak pro $f \in L_p$ je zobrazení $y \mapsto f_y$ stejnoměrně spojité zobrazení $\mathbb{R}$ do L_p .

Důkaz. Z teorie Lebesgueova integrálu je známo, že k funkci f a číslu $\varepsilon > 0$ lze nalézt spojitou funkci g s nosičem v intervalu $[-a, a]$, $a > 0$, tak, že $\|f - g\|_p < \varepsilon$. Ze stejnoměrné spojitosti g na $\mathbb{R}$ dostaneme pro libovolně zvolené $\varepsilon > 0$ takové $\delta_\varepsilon = \delta$, pro něž

$$|s - t| < \delta \Rightarrow |g(s) - g(t)| < (3a)^{-1/p} \varepsilon.$$

Odtud plyne

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(x - s) - g(x - t)|^p dx \leq (3a)^{-1} \varepsilon^p (2a + \delta) < \varepsilon^p,$$

a tedy i $\|g_s - g_t\|_p < \varepsilon$. Dále je

$$\|f_s - f_t\|_p \leq \|f_s - g_s\|_p + \|g_s - g_t\|_p + \|g_t - f_t\|_p < 3\varepsilon,$$

což již dává dokazované tvrzení. $\square$

Přímo z definice Fourierovy transformace dostaneme odhad

$$|\widehat{f}(t)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(v)| e^{-itv} dv \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(v)| dv = \|f\|_1.$$

Méně je již zřejmé následující tvrzení:

Věta 6.1.3. *Fourierova transformace zobrazuje prostor $\mathcal{L}_1$ do prostoru $\mathcal{C}_0$ všech funkcí g spojitých na $\mathbb{R}$, pro něž je*

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} g(x) = 0.$$

Důkaz. Snadno nahlédneme, že

$$|\widehat{f}(t_n) - \widehat{f}(t)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(v)| |e^{-it_n v} - e^{-itv}| dv.$$

Integrand vpravo je majorizován funkcí $2|f|$ a pro každé $v \in \mathbb{R}$ konverguje k 0 pro $t_n \rightarrow t$. Pomocí Lebesgueovy věty o dominované konvergenci plyne odtud spojitost funkce $\widehat{f}$. Z definice

$$\widehat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{-itv} dv \tag{6.4}$$

a ze vztahu $e^{\pi i} = -1$ snadno obdržíme obdobně jako v důkazu Tvrzení 4.5.4

$$\widehat{f}(t) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{-it(v+\pi/t)} dv = - \int_{-\infty}^{\infty} f\left(v - \frac{\pi}{t}\right) e^{-itv} dv. \tag{6.5}$$

Sečtením (6.4) s (6.5) dostaneme

$$2\widehat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(f(v) - f\left(v - \frac{\pi}{t}\right)\right) e^{-itv} dv,$$

z čehož již snadno vyplývá

$$2|\widehat{f}(t)| \leq \|f - f_{\pi/t}\|_1 \rightarrow 0$$

pro $t \rightarrow \pm\infty$. Tím je důkaz dokončen. $\square$

Příklad 6.1.4 (důležitý). Připomeňme si vztah z Věty 6.1.1 (f) a dále rovnost (6.3), která platí v případě $f' \in \mathcal{L}_1$:

$$(\widehat{f})'(t) = -it\widehat{f(t)}, \quad \widehat{(f')}(t) = it\widehat{f(t)}.$$

Využijeme je pro určení Fourierova obrazu funkce $f(x) = e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$. Pro ni zřejmě platí $f'(x) = -2xf(x) = 2i \cdot ix f(x)$, z čehož plyne

$$\widehat{f'}(t) = 2i \cdot it\widehat{f(t)}.$$

Z této rovnosti dostaneme

$$it\widehat{f(t)} = -2i(\widehat{f})'(t),$$

takže $\widehat{f}$ je řešením jednoduché diferenciální rovnice

$$y' = -\frac{x}{2}y.$$

Obecné řešení této rovnice je tvaru $y = Ce^{-x^2/4}$. Je tedy

$$\widehat{f(t)} = Ce^{-t^2/4} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2} e^{-itv} dv,$$

z čehož dostaneme $C = \widehat{f(0)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2} dv = \sqrt{\pi}$. Z nalezeného vzorce dostaneme podle Věty 6.1.1 (e)

$$\widehat{e^{-x^2/a}} = \sqrt{\pi a} e^{-at^2/4}$$

a volbou $a = 2$ dospějeme k funkci $f(x) = e^{-x^2/2}$, pro kterou platí $\widehat{f} = \sqrt{2\pi} \cdot f$.

6.2 Inverzní Fourierova transformace

Všimneme si krátce *inverzní Fourierovy transformace* $\widehat{f} \mapsto f$. Zde je třeba si uvědomit, že pro $f \in \mathcal{L}_1$ je sice $\widehat{f} \in \mathcal{C}_0$, avšak obecně neplatí $\widehat{f} \in \mathcal{L}_1$. Pokud bychom chtěli postupovat při hledání inverzního zobrazení mechanicky a použili úvodní intuitivní úvahy, dostaneme se do obtíží:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f(t)} e^{ixt} dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} dt \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{-itv} dv = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) dv \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x-v)t} dt \end{aligned}$$

nedává dobrý smysl, protože poslední z integrálů neexistuje. Musíme tedy postupovat opatrněji.

Snadno spočteme, že pro $f, g \in \mathcal{L}_1$ je

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f(t)} g(t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{-itv} dv \right) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(v) dv \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-ivt} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \widehat{g(v)} dv. \end{aligned}$$

Nyní za g zvolíme $e^{ixt}g(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Tak dostaneme pomocí Věty 6.1.1 (a)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(t)g(t) e^{ixt} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(v)\widehat{g}(v-x) dv .$$

Opět užijeme Větu 6.1.1 a dostaneme

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(t)e^{ixt}g(-t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(v)\widehat{g}(x-v) dv .$$

Konečně užitím Věty 6.1.1 dostaneme pro $g(t) = \Phi(at)$ vzorec

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(t) e^{ixt} \Phi(-at) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \frac{1}{a} \widehat{\Phi}\left(\frac{x-v}{a}\right) dv .$$

Zbytek úvahy, vedoucí k inverzní Fourierově transformaci, spočívá v šikovné volbě funkce Φ . Budeme ji volit s co „nejhezčími“ vlastnostmi:

$$\Phi \in \mathcal{L}_1, \Phi \text{ spojitá a omezená}, \Phi(0) = 1, \widehat{\Phi} \in \mathcal{L}_1. \quad (6.6)$$

Takové funkce existují, jednu z nich jsme našli v Příkladu 4.34. Tak dostaneme nejprve v obecném tvaru tvrzení:

Věta 6.2.1. *Nechť funkce Φ vyhovuje podmínkám (6.6). Předpokládejme dále, že $f \in \mathcal{L}_1$. Potom pro $a \rightarrow 0$ platí*

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \left| f(x) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(t) e^{ixt} \Phi(-at) dt \right| dx = 0 ,$$

tj. funkce

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(t) e^{ixt} \Phi(-at) dt = (f * \widehat{\Phi}_a)(x)$$

konverguje pro $a \rightarrow 0$ v normě $\|\cdot\|_1$ k funkci f . Zde $\widehat{\Phi}_a(x) = \frac{1}{a} \widehat{\Phi}\left(\frac{x}{a}\right)$.

Nežli přistoupíme k důkazu tohoto tvrzení, připomeneme úvahu, kterou jsme již jednou dělali v souvislosti s Weierstrassovou větou o aproximaci. Rozšíříme-li např. funkci $f \in \mathcal{C}([a, b])$ spojitě se zachováním označení f na celou reálnou osu $\mathbb{R}$ tak, aby byla množina $\{x \in \mathbb{R}; |f(x)| > 0\}$ omezená (funkcím s touto vlastností se často říká *spojité funkce s kompaktním nosičem*; tyto funkce tvoří lineární prostor $\mathcal{C}_k(\mathbb{R})$), a chápeme-li konvoluci $f * \Phi$ funkce f s jádrem Φ , tj.

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \Phi(x-t) dt$$

jako zobrazení do $\mathcal{C}_k(\mathbb{R})$, je přirozené se ptát, zda existuje takové jádro Φ , pro které by toto zobrazení bylo identitou na $\mathcal{C}_k(\mathbb{R})$. Prozradíme, že odpověď je negativní, avšak lze nalézt taková jádra Φ_k , pro která platí $f * \Phi_k \rightarrow f$ pro $k \rightarrow \infty$. S podobnou problematikou jsme se setkali již vícekrát (připomeňme podobnost s problematikou funkcí z $\mathcal{C}(2\pi)$ a Fejérovými jádry K_n), proto si jí všimneme za poněkud obecnějších předpokladů podrobněji.

Věta 6.2.2. *Nechť Φ_k je posloupnost funkcí z $\mathcal{L}_1$ taková, že :*

- (a) $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_k(t) dt = c$ existuje;
- (b) $\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_k(t)| dt \leq M < \infty$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$;
- (c) pro všechna $\delta > 0$ je

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\{t; |t| \geq \delta\}} |\Phi_k(t)| dt = 0.$$

Potom pro všechny funkce $f \in \mathcal{C}_k(\mathbb{R})$ platí

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|f * \Phi_k - cf\| = 0, \quad (6.7)$$

kde $\|\cdot\|$ je supremová norma na $\mathbb{R}$. Analogické tvrzení platí pro konvergenci v L_p , tj. pro každou funkci $f \in L_p$, $1 \leq p < \infty$, je

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|f * \Phi_k - cf\|_p = 0. \quad (6.8)$$

Důkaz. Označme $c_k := \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_k(t) dt$. Následující úvaha se často provádí v souvislosti s Weierstrassovou větou; srv. s Landauovým důkazem této věty v [78], s. 406. Zřejmě

$$(f * \Phi_k)(x) - c_k f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (f(x-y) - f(x)) \Phi_k(y) dy.$$

Funkce $f \in \mathcal{C}_k(\mathbb{R})$ je na $\mathbb{R}$ omezená a stejnoměrně spojitá, takže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$, pro které z $|x-y| < \delta$ vyplývá $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Platí

$$\|f * \Phi_k - c_k f\| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y) - f(x)| \cdot |\Phi_k(y)| dy. \quad (6.9)$$

Integrál v předcházejícím odhadu rozdělíme na integrály přes množiny

$$A := \{y \in \mathbb{R}; |y| < \delta\}, \quad B := \{y \in \mathbb{R}; |y| \geq \delta\}.$$

První z absolutních hodnot v integrandu v (6.9) je na A odhadnuta číslem ε a na B hodnotou $2\|f\|$. Odtud dostaneme $\|f * \Phi_k - c_k f\| \rightarrow 0$. Konečně (6.7) je důsledkem nerovnosti $\|f * \Phi_k - cf\| \leq \|f * \Phi_k - c_k f\| + |c - c_k| \cdot \|f\|$.

K důkazu (6.8) použijeme toho, že prostor $\mathcal{C}_k(\mathbb{R})$ je hustým podprostorem prostoru L_p pro všechna $1 \leq p < \infty$. Je-li dána funkce $f \in L_p$ a zvolíme-li $\varepsilon > 0$, nalezneme nejprve $g \in \mathcal{C}_k(\mathbb{R})$ tak, že $\|f - g\|_p < \varepsilon$. Potom

$$\|f * \Phi_k - g * \Phi_k\|_p \leq \varepsilon \|\Phi_k\|_1 \leq M\varepsilon$$

nezávisle na $k \in \mathbb{N}$. Zvolíme ještě interval $[a, b]$ tak, že g se anuluje všude mimo tento interval. Pak volbou $n \in \mathbb{N}$ lze dosáhnout toho, že pro všechna $k \geq n$ je

$$\|g * \Phi_k - g\|_{\infty} \leq \varepsilon,$$

z čehož dostaneme

$$\|g * \Phi_k - g\|_p \leq \varepsilon(b - a).$$

Pokud nyní použijeme odvozených dílčích odhadů, pak pro všechna $k \geq n$ je

$$\begin{aligned} \|f * \Phi_k - f\|_p &\leq \|f * \Phi_k - g * \Phi_k\|_p + \|g * \Phi_k - g\|_p + \|g - f\|_p \leq \\ &\leq \varepsilon M + \varepsilon(b - a) + \varepsilon, \end{aligned}$$

z čehož už snadno plyne (6.8). $\square$

Důkaz Věty 6.2.1. Podle předcházejícího lemmatu dostáváme

$$f * \widehat{\Phi}_a \rightarrow cf$$

v $\mathcal{L}_1$, kde $c = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\Phi}(t) dt$. Zbývá dokázat, že toto c nezávisí na volbě Φ , což provedeme v průběhu důkazu následujícího tvrzení: $\square$

Věta 6.2.3. *Nechť $f \in \mathcal{L}_1$ a také $\widehat{f} \in \mathcal{L}_1$. Potom f je skoro všude rovna spojitě funkci. Předpokládejme tedy, že f je spojitá. Pak pro všechna $x \in \mathbb{R}$*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(t) e^{ixt} dt.$$

Důkaz. Z Věty 6.2.2 a z Lebesgueovy věty o dominované konvergenci (f je omezená a spojitá) dostaneme

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(t) e^{ixt} \Phi(-at) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(t) e^{ixt} dt$$

(je $\Phi(0) = 1$). Pro skoro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí

$$cf(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(t) e^{itx} dt.$$

Odtud ale vidíme, že ve skutečnosti c nezávisí na konkrétní volbě Φ . Položíme-li

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(t) e^{itx} dt,$$

dostáváme $F(x) = (1/2\pi) \cdot \widehat{\widehat{f}}(-x)$ a přitom $F = f$ skoro všude v $\mathbb{R}$, což dává tvrzení věty. $\square$

Důsledek 6.2.4. *Je-li $f \in \mathcal{L}_1$ a $\widehat{f} \equiv 0$, potom $f = 0$ s.v. v $\mathbb{R}$.*

6.3 Diskrétní Fourierova transformace

Již od svého vzniku souvisely Fourierovy řady v oblasti fyziky s akustikou. Nemělo by nás proto překvapit, že aplikace této teorie mají často fyzikální charakter i terminologii. V této části se dostáváme k věcem, které jsou v praxi velice užitečné a bez nichž si dnes život

neumíme představit. Je to dokonce takové, že si za mnoha věcmi již ani jejich matematickou podstatu neuvědomujeme. Abychom uvedli nějaké příklady, které se týkají látky tohoto textu, stačí zmínit například tomograf, fotografické aparáty dnes téměř bez výjimky používající formát souborů *.jpg nebo různá digitální akustická zařízení podporující audioformát MP3.

V praxi je obtížné ze vzorce (6.2), tj. vzorce

$$\widehat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{-itv} dv, \quad t \in \mathbb{R},$$

určit $\widehat{f}$ (umíme to spíše jen ve speciálních případech), a tak se uchylujeme k vhodné náhražce, která „nepřesnost“ kompenzuje daleko snazším způsobem použití. Princip spočívá v nahrazení oboru integrace $(-\infty, \infty)$ omezeným intervalem $[a, b]$ a pak též integrálu z f přes $[a, b]$ integrálním součtem pro nějaké jeho ekvidistantní dělení. Přitom je samozřejmě vhodné minimalizovat možnou chybu. A tak provádíme přiřazení obdobné, jako při konstrukci Fourierovy řady, avšak místo „dvojstranné“ posloupností koeficientů $\{c_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ přiřazujeme pouze *konečnou*, a tedy i diskretní množinu N hodnot (je $N \in \mathbb{N}$), pomocí které získáváme *modifikovaný* Fourierův obraz:

$$\widehat{f}(t) \approx \sum_{k=0}^{N-1} f(v_k) e^{-itv_k} (v_k - v_{k-1}). \quad (6.10)$$

To je cesta k *diskretní Fourierově transformaci* Df (krátce DFT) funkce f : její výsledek Df je popsán výrazem na pravé straně rovnice (6.10). Označení užitečné při objasnění souvislostí a cesty k Df ještě trochu změníme a zjednodušíme.

Zároveň ještě prozradíme, čemu se budeme věnovat v další části této kapitoly. Výpočet Df na první pohled vyžaduje cosi jako maticový počet, ale naše matice není zcela obecná matice. Vyskytují se v ní určité pravidelnosti. Metoda výpočtu, která jich využívá, se nazývá *rychlá Fourierova transformace*. Běžně užívaná zkratka je odvozena od anglického názvu **F**ast **F**ourier **T**ransform – je to tedy FFT a *ne* RFT z českého **R**ychlá **F**ourierova **T**ransformace.

Budeme tedy předpokládat, že $a < 0 < b$, $N \in \mathbb{N}$, a že je zvoleno ekvidistantní dělení intervalu $[a, b]$, $a = v_0 < v_1 < \dots < v_N = b$ tak, že je $(v_k - v_{k-1}) = (b - a)/N = \Delta v$, $k = 1, \dots, N$. Budeme proto mít $v_k = a + k\Delta v$, $k = 0, \dots, N$. Položme

$$\phi(t) = \sum_{k=0}^{N-1} f(v_k) e^{-itv_k} \Delta v = e^{-ita} \sum_{k=0}^{N-1} f(v_k) e^{-itk(b-a)/N} \Delta v, \quad (6.11)$$

kde ϕ je funkce nahrazující $\widehat{f}$. Položme ještě pro $n \in \mathbb{Z}$

$$t_n = \frac{2\pi n}{b-a}, \quad \text{neboli} \quad t_n(b-a) = 2\pi n$$

a soustředíme se na tyto body. Po dosazení do (6.11) dostaneme

$$\phi(t_n) = e^{-iat_n} \sum_{k=0}^{N-1} f(v_k) e^{-it_n k(b-a)/N} \Delta v = e^{-iat_n} \sum_{k=0}^{N-1} f(v_k) e^{-i2\pi n k/N} \Delta v.$$

Zanedbejme násobení členů v součtu faktorem $e^{-iat_n} \Delta v$ a soustředme naši pozornost na N -periodickou komplexní funkci na $\mathbb{Z}$

$$Df(n) = \sum_{k=0}^{N-1} f(v_k) e^{-i2\pi nk/N}.$$

Položíme-li ještě $w = e^{2\pi i/N}$, můžeme $Df : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$ zapsat stručněji ve tvaru

$$Df(n) = \sum_{k=0}^{N-1} f(v_k) w^{-nk}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (6.12)$$

Zapomeňme nyní na fakt, že Df vznikla z funkce f . Pracujeme totiž pouze s jejími n hodnotami $(f(0), f(1), \dots, f(N-1)) \in \mathbb{C}^N$. Nejlépe by bylo použít poznatků z teorie grup, ale můžeme zvolit i jinou představu. Budeme pracovat s N -periodickými funkcemi f na $\mathbb{Z}$, tj. s funkcemi na $\mathbb{Z}$, pro které je

$$f(k + nN) = f(k), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Dosáhneme tak analogie s 2π -periodickými funkcemi, s nimiž jsme v tomto textu zacházeli již mnohokrát. Je např. zřejmé, že každá taková funkce je určena konečně mnoha hodnotami, neboť $f(0) = f(nN)$, $f(1) = f(1+nN)$, $\dots$, $f(N-1) = f(nN-1)$, $n \in \mathbb{N}$. Formálně každému prvku množiny $\{k + nN; n \in \mathbb{Z}\}$, $k \in 0, 1, \dots, N-1$, je přiřazeno totéž číslo, zobrazujeme tedy vlastně množinu $\mathbb{Z}_N$ *zbytkových tříd* modulo N .

Každé funkci f definované na $\mathbb{Z}_N$, tj. $f : \mathbb{Z}_N \longrightarrow \mathbb{C}$, přiřazujeme její DFT

$$Df(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(k) e^{-2\pi i nk/N} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(k) e^{-k \cdot n \cdot 2\pi i/N}, \quad n \in \mathbb{Z}_N. \quad (6.13)$$

Faktor $1/N$ před sumou někdy zaměňujeme za $1/\sqrt{N}$. Nejde o žádnou zásadní změnu: má to podobnou roli jakou má $1/2\pi$ nebo $1/\sqrt{2\pi}$ u Fourierovy transformace, ovlivňuje pouze to, jak moc je inverzní transformace k DFT formálně podobná DFT. Proto ho v popisu vynecháváme.

Představíme-li si f a Df jako vektory

$$f = \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ \vdots \\ f(N-1) \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad Df = \begin{pmatrix} Df(0) \\ Df(1) \\ \vdots \\ Df(N-1) \end{pmatrix},$$

můžeme vztah (6.13) přepsat „maticově“. Položíme-li

$$M_N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{-1 \cdot 2\pi i/N} & e^{-1 \cdot 2 \cdot 2\pi i/N} & \dots & e^{-1 \cdot (N-1) \cdot 2\pi i/N} \\ 1 & e^{-2 \cdot 2\pi i/N} & e^{-2 \cdot 2 \cdot 2\pi i/N} & \dots & e^{-2 \cdot (N-1) \cdot 2\pi i/N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & e^{-(N-1) \cdot 2\pi i/N} & e^{-(N-1) \cdot 2 \cdot 2\pi i/N} & \dots & e^{-(N-1)^2 \cdot 2\pi i/N} \end{pmatrix},$$

lze (6.13) (až na zmíněný faktor) zapsat ve tvaru

$$Df = M_N f.$$

Jestliže ještě označíme $w = e^{2\pi i/N}$, je možno zápis matice dále zjednodušit (např. ve třetím řádku v posledním sloupci je $e^{-2(N-1) \cdot 2\pi i/N} = e^{(-2\pi i/N) \cdot (N+N-2)} = 1 \cdot \overline{w}^{N-2}$) a psát

$$M_N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \overline{w} & \overline{w}^2 & \dots & \overline{w}^{N-1} \\ 1 & \overline{w}^2 & \overline{w}^4 & \dots & \overline{w}^{N-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \overline{w}^{N-1} & \overline{w}^{N-2} & \dots & \overline{w} \end{pmatrix}.$$

Z maticového vyjádření vidíme, že pracujeme s *lineárním zobrazením*, nebo, jak se též často říká, s *lineárním operátorem*.

Tak jako o Fourierově transformaci můžeme i pro DFT dokázat řadu tvrzení. My si uvedeme jen ta základní a důkazy vynecháme. Čtenář je může nalézt např. v [4]; tato knížka byla pro nás předlohou k vyložení podstaty DFT.

Tvrzení 6.3.1 (Základní vlastnosti DFT). Označíme-li n nezávisle proměnnou ve funkci f a je-li $k \in \mathbb{Z}$ pevně zvoleno, pak pro $f : \mathbb{Z}_N \rightarrow \mathbb{C}$ platí:

- (a) Časový posun f vede k násobku Df : Posunuté funkci odpovídá násobek, tj. schematicky

$$f(n-k) \longrightarrow Df(n) \cdot e^{-2\pi i k n / N}.$$

- (b) Efekt frekvenčního posunu – schematicky

$$f(n) e^{2\pi i k / N} \longrightarrow Df(n-k).$$

- (c) Modulace; schematický popis

$$f(n) \cos 2\pi k n / N \longrightarrow \frac{1}{2} [Df(n-k) + Df(n+k)].$$

Příklad 6.3.2. Nechť $f : \mathbb{Z}_4 \rightarrow \mathbb{C}$ je konstantní a $f(0) = f(1) = f(2) = f(3) = 1$. Potom

$$Df = M_4 f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Příklad 6.3.3. Předešlý příklad zobecníme a spočteme Df pro obecnou $f : \mathbb{Z}_4 \rightarrow \mathbb{C}$: Pro $f = (f(0), f(1), f(2), f(3))$ je

$$Df = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ f(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(0) + f(1) + f(2) + f(3) \\ f(0) - if(1) - f(2) + if(3) \\ f(0) - f(1) + f(2) - f(3) \\ f(0) + if(1) - f(2) - if(3) \end{pmatrix} \quad (6.14)$$

Spokojíme se pouze s uvedenými ukázkami, nežli však problematiku DFT opustíme, zformulujeme tvrzení o inverzním zobrazení; dokazovat ho opět nebudeme.

Tvrzení 6.3.4. *Nechť je dána $f : \mathbb{Z}_N \rightarrow \mathbb{C}$, $w = e^{2\pi i/N}$ s DFT*

$$Df(n) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) e^{-2\pi i n k / N} = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) w^{-nk}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Potom platí

$$f(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Df(k) e^{2\pi i n k / N} = \sum_{k=0}^{N-1} Df(k) w^{nk}.$$

Vše má jeden háček. Při rozsáhlých úlohách by byl výpočet DFT časově velmi náročný, a to je právě moment, který vedl k dalšímu vývoji. Jak se uvádí v [4], obrázek barevné televize pracuje s přenosem objemu dat řádově megabyte/sec. Pro výpočet $Df = M_N f$, $f \in \mathbb{C}^N$, je zapotřebí N^2 násobení a $N(N-1)$ sčítání, což je vskutku impozantní objem výpočtů. Naštěstí však existuje algoritmus, který nám pomůže tento hrozivý počet výpočtů zredukovat. Je jím rychlá Fourierova transformace (FFT).

6.4 Rychlá Fourierova transformace

Pro inspiraci k dalšímu výkladu se vrátíme na samotný začátek tohoto textu. Jde nám o to, jak DFT rychle provést, a tak budeme zkoumat operace s řadami. U číselných řad jsme zavedli částečně přirozeně a přitom poněkud složitě jejich násobení. Pro dvojici řad

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad \text{a} \quad t = \sum_{\ell=0}^{\infty} b_{\ell} \quad (6.15)$$

jsme za jejich *Cauchyho součin* považovali řadu

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m, \quad \text{kde} \quad c_m = \sum_{k=0}^m a_k b_{\ell-k} = a_0 b_m + a_1 b_{m-1} + \cdots + a_m b_0. \quad (6.16)$$

Členy c_m jsou konečné součty vznikající jako koeficienty mocninné řady

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \right) \cdot \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} b_{\ell} z^{\ell} \right),$$

pokud seskupíme vždy členy obsahující stejnou mocninu z^m , tj. členy $a_k b_{\ell} z^k z^{\ell}$, pro které je $k + \ell = m$. Tento startovní bod má však jistá úskalí. Pokud řady v (6.15) konvergují absolutně, řada v (6.16) konverguje také absolutně k součtu $s \cdot t$, pokud však řady v (6.15) pouze konvergují, může řada v (6.16) divergovat.

Předpokládejme proto, že každá řada obsahuje pouze konečný počet *nenulových členů*, tj. že vlastně pracujeme s polynomy a že $a_k = b_{\ell} = 0$ pro $k, \ell \geq N$, kde $N \in \mathbb{N}$ je pevně zvoleno. Potom tyto polynomy

$$p(z) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k z^k \quad \text{a} \quad q(z) = \sum_{\ell=0}^{N-1} b_{\ell} z^{\ell}$$

jsou stupně nejvýše $(N - 1)$ a jejich součin je stupně nejvýše $2(N - 1)$. K určení všech $2N - 1$ koeficientů „součinného polynomu“ pq je zapotřebí $n \cdot n$ násobení, avšak s ohledem na komutativitu jich stačí spočítat pouze část. I přesto je potřebný čas k výpočtu součinu tímto způsobem úměrný N^2 .

Připomeňme, že polynom stupně nejvýše n -tého je jednoznačně určen svými hodnotami v $n + 1$ různých bodech (to je poznatek, který by měl být známý z algebry). Tyto hodnoty se snadno spočítají. S ohledem na řešený problém hledání polynomu $h = pq$ bychom tedy mohli zvolit $n > 2N + 1$ různých bodů $x_1, x_2, \dots, x_n$, v těchto bodech spočítat hodnoty $p(x_1), p(x_2), \dots, p(x_n)$ a $q(x_1), q(x_2), \dots, q(x_n)$, pak určit hodnoty $h(x_k) = p(x_k) \cdot q(x_k)$, $k = 1, 2, \dots, n$. Ty jednoznačně určují polynom h a tedy i jeho koeficienty. Úspěch tohoto plánu závisí na tom, jak rychle v závislosti na n jsme schopni (pokud to rychleji, než při naivním postupu „hrubou silou“) nalézt koeficienty polynomu h .

Algoritmus tzv. *rychlé Fourierovy transformace* (FFT) je patrně nejzajímavějším algoritmem objeveným v minulém století. Na konci předchozího odstavce jsme se zmínili o DFT a jejích nárocích na potřebný počet operací. FFT je „úspornější“. Počet operací je v tom případě řádově roven při $N = 2^k$ „jen“ $N \log_2 N$. Je to velký rozdíl? Tak např. při $N = 2^{15} = 32\,768$ je

$$N^2 \approx 10^9 \quad \text{a} \quad 30 \cdot 2^{15} \approx 10^6,$$

takže při užití FFT budeme k výpočtu potřebovat asi *tisíckrát* méně operací – to už je opravdu velká úspora. Pro zajímavost: při práci s analýzou obrazů nebo se studiem audiozáznamu, což jsou typické oblasti použití DFT, je jistě podstatné, trvá-li výpočet 3 minuty nebo déle než 2 dny.

V této téměř již závěrečné části textu se pokusíme přiblížit čtenáři základ FFT. Nepůjde ani o budování teorie, ale spíše o popis její hlavní myšlenky. Výklad budeme ilustrovat na jednoduchém příkladu. Poznámky k historii FFT si ponecháme až na závěr poslední kapitoly textu.

Idea FFT je vlastně jednoduše postižitelná: proces celého výpočtu se rozdělí na dílčí méně rozsáhlé podprocesy. Pro speciální případ, kdy pracujeme s $N = 2^k$, je to trochu jednodušší na popis. Tehdy totiž „podprocesy vznikají půlením“; to však vyžaduje podrobnější popis. Jako pomůcku zavedeme „sudou“ a „lichou“ část $f \in \mathbb{C}^N$.

Je-li $f \in \mathbb{C}^N$, definujeme její *sudou část* f_s a *lichou část* f_ℓ vztahy

$$f_s = (f(0), f(2), \dots, f(N-2)) \quad \text{a} \quad f_\ell = (f(1), f(3), \dots, f(N-1)).$$

Podstata algoritmu FFT je v opakovaném rozkládání funkce $f \in \mathbb{C}^N$ na sudou a lichou část podle schématu:

$$\begin{array}{cccccccc} & & & & f & & & \\ & & & & & & & \\ & & f_s & & & & f_\ell & \\ & f_{ss} & & f_{s\ell} & & f_{\ell s} & & f_{\ell\ell} \\ f_{sss} & f_{ssl} & f_{sls} & f_{s\ell\ell} & f_{\ell ss} & f_{\ell s\ell} & f_{\ell\ell s} & f_{\ell\ell\ell} \end{array}$$

Schéma ukazuje, že $f \in \mathbb{C}^N$ (v prvním řádku) se rozloží na f_s a f_ℓ (ve druhém řádku) a každá z těchto funkcí se opět rozloží, a to funkce f_s na f_{ss} a $f_{s\ell}$ a funkce f_ℓ na $f_{\ell s}$ a $f_{\ell\ell}$ (ve třetím řádku), atd. Ve čtvrtém řádku je již 8 funkcí, v pátém 16, ...

Počty složek vektorů v jednotlivých řádcích se stále snižují - pro ty „krátké“ spočteme DFT a z nich potom „složíme“ Df . Nejlépe si uvědomíme, jak se postupuje, když si ukážeme jednoduchý příklad. Je převzat opět z [4]. V Příkladu 6.3.3 jsme určili v (6.14) Df , jejíž vyjádření lehce upravíme:

$$Df = \begin{pmatrix} f(0) + f(1) + f(2) + f(3) \\ f(0) - if(1) - f(2) + if(3) \\ f(0) - f(1) + f(2) - f(3) \\ f(0) + if(1) - f(2) - if(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f(0) + f(2)) + (f(1) + f(3)) \\ (f(0) - f(2)) - i(f(1) - f(3)) \\ (f(0) + f(2)) - (f(1) + f(3)) \\ (f(0) - f(2)) + i(f(1) - f(3)) \end{pmatrix},$$

Máme vlastně každý prvek sloupečku složen ze dvou sčítanců reprezentovaných závorkami. Rozepíšeme-li vyjádření po složkách, dostaneme

$$\begin{aligned} Df(0) &= (f(0) + f(2)) + (f(1) + f(3)), \\ Df(1) &= (f(0) - f(2)) - i(f(1) - f(3)), \\ Df(2) &= (f(0) + f(2)) - (f(1) + f(3)), \\ Df(3) &= (f(0) - f(2)) + i(f(1) - f(3)) \end{aligned}$$

a vidíme, že k určení Df musíme určit dva sčítance $f_s = (f(0), f(2))$ a $f_\ell = (f(1), f(3))$ a provést jednoduché operace s jejich složkami. Je

$$\begin{aligned} Df_s &= M_2 f_s = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(0) \\ f(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(0) + f(2) \\ f(0) - f(2) \end{pmatrix}, \\ Df_\ell &= M_2 f_\ell = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(1) \\ f(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(1) + f(3) \\ f(1) - f(3) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Přepíšeme toto vyjádření do tvaru

$$\begin{aligned} Df_s(0) &= f(0) + f(2), & Df_s(1) &= f(0) - f(2), \\ Df_\ell(1) &= f(1) + f(3), & Df_\ell(3) &= f(1) - f(3), \end{aligned}$$

a dosadíme do „rozepsané“ rovnice (6.1). Dostaneme tak

$$\begin{aligned} Df(0) &= Df_s(0) + Df_\ell(0), \\ Df(1) &= Df_s(1) - iDf_\ell(1), \\ Df(2) &= Df_s(2) - Df_\ell(0), \\ Df(3) &= Df_s(3) + iDf_\ell(0). \end{aligned}$$

Příklad ukázal princip metody; doporučujeme čtenáři, aby si ho prošel vícekrát a uvědomil si, kde je jednoduchost důsledkem malého rozsahu úlohy a které kroky se pravděpodobně zkomplikují při „větším“ N . Připomínáme, že jsme pracovali se speciálním N (přirozená mocnina čísla 2), což také přispívá ke zjednodušení situace. Důkaz se provádí indukcí podle exponentu mocniny. Tvzení „o efektivitě“ *pro tento jednodušší případ* přesně zformulujeme, ale dokazovat ho nebudeme.

Tvrzení 6.4.1 (o efektivitě FFT). *Rychlá Fourierova transformace (FFT) vyžaduje pro $f \in \mathbb{C}^N$, $N = 2^k$, k určení Df celkem $2N \log_2 2 = 2^{k+1} \cdot k$ násobení.*

Důkaz. Jak jsme již poznamenali, důkaz indukci neprovedeme, avšak pro větší srozumitelnost ukážeme alespoň první indukční krok. Pro $k = 1$ a $f \in \mathbb{C}^2$ je

$$Df = M_2 f = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(0) + f(1) \\ f(0) - f(1) \end{pmatrix},$$

což vyžaduje provést čtyři operace násobení. Protože je $2 \cdot 2^1 \log_2 2 = 4$, je tím první indukční krok proveden. $\square$

Poznámky 6.4.2. 1. Čtenář by si měl povšimnout, že v popsaném kroku jsme počítali i ta násobení, kdy jedním z činitelů byla 1. Pokud bychom násobení číslem 1 nepočítali, byl by odhad počtu nutných operací násobení ještě příznivější: $(N/2) \log_2 N$. V jistém smyslu jsou tři čtvrtiny započítaných operací „zbytečné“.

2. Pro FFT je klíčový vztah mezi Df a Df_s , Df_ℓ . Popíšme alespoň stručně úpravy v popísané situaci: dostaneme

$$\begin{aligned} Df(n) &= Df_s(n) + \overline{w_N}^n Df_\ell(n), & 0 \leq n \leq N/2 - 1, \\ Df(N/2 + n) &= Df_s(n) - \overline{w_N}^n Df_\ell(n), & 0 \leq n \leq N/2 - 1. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Algoritmus opakuje „štěpení“ tak dlouho, až dospějeme k dvourozměrným vektorům. Pro názornost popíšme proceduru pro $N = 8$. Je-li

$$f = (f(0), f(1), f(2), \dots, f(7)),$$

pak

$$f_s = ((f(0), f(2), f(4), f(6))) \quad \text{a} \quad f_\ell = ((f(1), f(3), f(5), f(7))).$$

Po dalším rozkladu dostaneme

$$f_{ss} = (f(0), f(4)), \quad f_{s\ell} = (f(2), f(6)), \quad f_{\ell s} = (f(1), f(5)), \quad f_{\ell\ell} = (f(3), f(7)).$$

Spočteme $Df_{ss} = M_2 f_{ss}$ a $Df_{s\ell} = M_2 f_{s\ell}$ a odtud s využitím (6.17) spočteme Df_s . Podobně z $Df_{\ell s}$ a $Df_{\ell\ell}$ určíme Df_ℓ . Pak užijeme Df_s a Df_ℓ a pomocí (6.17) určíme Df .

3. Pokusili jsme se vyložit *princip* FFT, zdaleka však nejde o podrobný a plnohodnotný výklad. Ten přesahuje rámec tohoto textu. Čtenář by si však na základě předvedených výpočtů mohl utvořit obrázek o tom, co FFT je a jak se používá. Viz ještě následující příklad.

Příklad 6.4.3. Máme spočítat DFT pro $f \in C^8$. Uděláme to nyní trochu podrobněji. Nejprve aplikujeme transformaci

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

na dvojice

$$f_{ss} = (f(0), f(4)), \quad f_{s\ell} = (f(2), f(6)) \quad \text{a} \quad f_{\ell s} = (f(1), f(5)), \quad f_{\ell\ell} = (f(3), f(7)).$$

Dostaneme tak postupně

$$\begin{aligned} Df_{ss} &= \begin{pmatrix} f(0) + f(4) \\ f(0) - f(4) \end{pmatrix}, & Df_{s\ell} &= \begin{pmatrix} f(2) + f(6) \\ f(2) - f(6) \end{pmatrix}, \\ Df_{s\ell} &= \begin{pmatrix} f(1) + f(5) \\ f(1) - f(5) \end{pmatrix}, & Df_{\ell\ell} &= \begin{pmatrix} f(3) + f(7) \\ f(3) - f(7) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nyní použijeme vztah (6.17) a spočteme Df_s a Df_ℓ :

$$\begin{aligned} Df_s(n) &= Df_{ss}(n) + \overline{w_4}^n Df_{s\ell}(n), \quad 0 \leq n \leq 1, \\ Df_s(n+2) &= Df_{ss}(n) - \overline{w_4}^n Df_{s\ell}(n), \quad 0 \leq n \leq 1. \end{aligned}$$

Protože v našem případě je $w_4 = e^{2\pi i/4} = e^{\pi i/2} = i$, dostaneme

$$Df_s = \begin{pmatrix} (f(0) + f(4)) + (f(2) + f(6)) \\ (f(0) - f(4)) - i(f(2) - f(6)) \\ (f(0) + f(4)) - (f(2) + f(6)) \\ (f(0) - f(4)) + i(f(2) - f(6)) \end{pmatrix}$$

a

$$Df_\ell = \begin{pmatrix} (f(1) + f(5)) + (f(3) + f(7)) \\ (f(1) - f(5)) - i(f(3) - f(7)) \\ (f(1) + f(5)) - (f(3) + f(7)) \\ (f(1) - f(5)) + i(f(3) - f(7)) \end{pmatrix}.$$

Nyní opět užijeme vztah (6.17) a spočteme Df :

$$\begin{aligned} Df(n) &= Df_s(n) + \overline{w_8}^n Df_\ell(n), \quad 0 \leq n \leq 3, \\ Df(n+4) &= Df_s(n) - \overline{w_8}^n Df_\ell(n), \quad 0 \leq n \leq 3. \end{aligned}$$

Protože je $w_8 = e^{2\pi i/8}$, dostaneme tak pro Df vyjádření

$$Df = \begin{pmatrix} (f(0) + f(4)) + (f(2) + f(6)) + (f(1) + f(5)) + (f(3) + f(7)) \\ (f(0) - f(4)) + i(f(2) - f(6)) + e^{-2\pi i/8} (f(1) - f(5)) - i(f(3) - f(7)) \\ (f(0) + f(4)) - (f(2) + f(6)) + e^{-4\pi i/8} (f(1) + f(5)) - (f(3) + f(7)) \\ (f(0) + f(4)) + i(f(2) - f(6)) + e^{-6\pi i/8} (f(1) - f(5)) + i(f(3) - f(7)) \\ (f(0) + f(4)) + (f(2) + f(6)) - (f(1) + f(5)) + (f(3) + f(7)) \\ (f(0) - f(4)) + i(f(2) - f(6)) - e^{-2\pi i/8} (f(1) - f(5)) - i(f(3) - f(7)) \\ (f(0) + f(4)) - (f(2) + f(6)) - e^{-4\pi i/8} (f(1) + f(5)) - (f(3) + f(7)) \\ (f(0) + f(4)) + i(f(2) - f(6)) - e^{-6\pi i/8} (f(1) - f(5)) + i(f(3) - f(7)) \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že roste pouze *formální* náročnost zápisu, samotný výpočet se sestává z velmi jednoduchých úkonů.

Kapitola 7

Ohlédnutí

V předchozím textu jsme se nevyhýbali historickým ukázkám. Nyní se je pokusíme zkompletovat uceleným pohledem na vše, co jsme do tohoto textu zařadili. Trigonometrické řady velmi podstatně ovlivnily celý další vývoj matematiky.

Velmi stručně se zmíníme o Fourierově životě. JEAN BAPTIST JOSEPH FOURIER se narodil 21. března 1768 v Auxerre. Rodina žila na venkově, kde byl Fourierův otec krejčím. Měl tři děti z prvního manželství a třináct z druhého manželství, mezi nimiž byl Joseph druhým v pořadí. Joseph v deseti letech osiřel, naštěstí pro něj bylo však již objeveno jeho velké (a všestranné) nadání.

Navštěvoval Vojenskou školu v Auxerre vedenou benediktiny, kde se učil živým jazykům (zejména němčině) i latině a také zacházení s mapami. Prošel také solidním fyzickým tréninkem. Z knih ÉTIENNA BÉZOUTA (1730–1783) a ALEXISE CLAUDA CLAIRAUTA (1713–1765) se učil matematiku a byl nejen nadaný, ale i mimořádně pilný. Školu ukončil jako čtrnáctiletý. Vzděláním byl předurčen k vojenské či církevní kariéře, ale cestu k té vojenské mu neumožňoval prostý původ, i když se za něj ADRIEN-MARIE LEGENDRE (1752–1833) silně přimlouval. Proto vstoupil mezi benediktiny do opatství Saint-Benoit ve Fleury jako novic a učitel matematiky.

Po dvouletém pobytu v řádu v relativní izolaci opustil Fleury v souladu s dekretem Národního shromáždění a vrátil se jako učitel na vojenskou školu v Auxerre. V prosinci r. 1789 předložil ve svých 21 letech Akademii věd memoár o algebraických rovnicích, který posuzovali Monge, Legendre a Cousin. Prožíval bouřlivý čas v revolučním období, kdy byl postupně několikrát uvězněn a osvobozen. V prosinci r. 1794 byl vybrán pro další vzdělávání na nově vzniklé *École Normale*, kde o 1500 studentů pečovala hrstka učitelů, mezi nimiž byli např. vynikající matematici Lagrange, Laplace a Monge.

Budeme s malými odbočkami postupovat chronologicky, avšak zcela důsledně to vzhledem k velkému počtu souvisejících problémů není možné. Kromě již zavedeného označení $\mathcal{C}(2\pi)$ pro prostor všech 2π -periodických funkcí spojitých na $\mathbb{R}$, které jsme již užívali, použijeme ještě další označení, která postupně popíšeme v dalším textu.

7.1 Prehistorie

Nejedna knížka o Fourierových řadách připomíná, že 21. prosince 1807 předložil Fourier Francouzské akademii práci, v níž mj. tvrdil, že lze *každou funkci* definovanou na omezeném intervalu vyjádřit nekonečnou řadou v sinech a kosinech; srv. [13] či [54]. Jistá neobvyklost

uvedení takového údaje v ryze matematických knížkách svědčí o mimořádném významu práce: ač vyšla v modifikované podobě tiskem až r. 1822 (viz [31]), znamenala ve vývoji matematiky významný předěl.

Pokusme se Fourierův přínos popsat podrobněji. V části 417 práce [31] píše: „*Obecně funkce $f(x)$ reprezentuje pořadí hodnot či souřadnic, každá z nichž je libovolná . . . Nepředpokládáme, že tyto hodnoty jsou řízeny nějakým společným zákonem; následují jedna po druhé jakýmkoli způsobem a každá z nich je dána jedinečným způsobem.*“ Takové obecné pojetí funkce se sice sporadicky objevovalo i před Fourierem, mnohem častěji však šlo o *funkci definovanou nějakým analytickým výrazem*. Pro Fouriera šlo o totéž. O kus dále v části 418 říká: „*A tak neexistuje funkce $f(x)$ nebo její část, kterou by nebylo možno vyjádřit nějakou trigonometrickou řadou*“; srv. [19]. V této obecnosti samozřejmě Fourierovo tvrzení není pravdivé a teprve o dost později jeden ze dvou Fourierových žáků PIERRE GUSTAV LEJEUNE-DIRICHLET (1805–1859) r. 1829 dokázal konvergenci Fourierovy řady pro relativně širokou třídu funkcí. Proto také právě jeho jméno bývá spojováno se změnou pohledu na *pojem funkce*.

R. 1747 JEAN LE ROND D’ALEMBERT (1717–1783) popsal řešení problému kmitající struny. Funkce, s nimiž pracoval, musely vyhovovat různým podmínkám, ale mj. musely být reálně analytické. Užívá přitom termín *spojité funkce*, kterým se tehdy tyto funkce označovaly. R. 1750 řeší stejný problém LEONHARD EULER (1707–1783) a dospívá k podobným výsledkům, ukazuje se však, že pod funkcí si představuje něco jiného: z dnešního hlediska bychom patrně popsali jím užívané funkce jako po částech reálně analytické (mluví ovšem o spojitých, nespojitých a smíšených funkcích). V takovém pojetí je např. funkce $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$, nespojitá v bodě 0.

Zde však jsme na velmi tenkém ledě, neboť se v našich úvahách mísí naše *představy* o tom, jak tehdy byl pojem funkce chápán, se současným stavem našich znalostí tohoto pojmu. Nic však nevíme o tom, jak se Euler vyrovnal např. s tím, že v rovnosti (7.1) se hodnoty výrazů na levé a pravé straně rovnosti shodují na intervalu $(0, 2\pi)$, ne však mimo tento interval. Na druhé straně víme, že když DANIEL BERNOULLI (1700–1782) popsal r. 1753 řešení problému kmitající struny ve tvaru trigonometrické řady, Euler tento výsledek zpochybnil: nemohl se smířit s představou, že (zhruba řečeno) *libovolná funkce* může být součtem této řady.

Velmi vágní chápání pojmu funkce působilo matematikům značné obtíže. Není tedy divu, že v souvislosti s vyjadřováním funkcí pomocí součtů trigonometrických řad vznikly mezi předními matematiky té doby diskuse a spory. Podrobněji je to rozebráno např. v článku [63] nebo v knize [12].

Vraťme se ještě o pár desítek let zpět a podívejme se na trigonometrické řady detailněji. Různé trigonometrické identity byly známy již velice dávno. Tak například vzorce typu

$$\begin{aligned}\cos^2 x &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x, & \cos^3 x &= \frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos 3x, \\ \sin^3 x &= \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x, & \sin^4 x &= \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x,\end{aligned}$$

které jsou z Eulerovy knihy *Introductio in analysin infinitorum*, nepovažujeme za trigonometrické řady (některé se objevují i dříve). Jde jednak o *konečné* součty, a v době jejich objevení nebylo známo nic o souvislosti s nějakým „integrálním“ vyjádřením koeficientů. Přesto však došlo k postupnému objevování (nekonečných) trigonometrických řad včetně jejich součtů ještě poměrně dlouho před Fourierem. Používané postupy byly velmi často z dnešního hlediska nekorektní a nalezená vyjádření se z hlediska konvergence ani nezkoumala.

Tomu předcházelo analogické zacházení s mocninnými řadami, které najdeme v hojném počtu již u „otců“ infinitezimálního počtu. Ti je také užívali zprvu bez patřičného teoretického zázemí. Tak např. JAMES GREGORY (1638–1675) znal již řadu rozvoju funkcí v mocninné řady, stejně tak jako později ISAAC NEWTON (1642–1727) nebo GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646–1716). Skutečné virtuozity v manipulaci s řadami dosáhl Euler. U něj pak nacházíme zárodky toho, co dalo směr pozdějšímu bádání mnoha matematiků, a to nejen v oblasti mocninných řad, ale i u řad *trigonometrických*. Pokusíme se čtenáře přesvědčit, že vývoj znalostí o trigonometrických řadách ovlivnil nebyvalým způsobem vývoj *celé matematiky*. Srovnání chování mocninných řad a Fourierových řad je věnován článek [2].

O mocninných řadách se zmíníme jen okrajově: připomeneme, že to byl právě Euler, kdo je *chtěl sčítat* i mimo oblast jejich konvergence. Pokud s nimi on a případně jeho vrstevníci zacházeli, intuitivně se většinou vyhýbali chybným závěrům. Trvalo však ještě řadu let, nežli se podařilo tyto podněty rigorózně podložit matematickými poznatky. Situace s mocninnými řadami však byla velmi speciální: funkce, které jsou součtem mocninných řad s reálnými koeficienty a jsou definovány na nějakém intervalu (a, b) , jsou „*nejcivilizovanějšími příslušníky matematického společenství, majícími derivace všech řádů*“ (E. B. van Vleck, 1914)). Trigonometrické řady naopak umožňují vyjádření *patologických členů* tohoto společenství, jakými jsou např. spojité funkce nemající v žádném bodě derivaci.

V oblasti práce s trigonometrickými řadami nechyběly od začátku přirozené problémy, avšak jejich řešení bylo o mnoho těžší, neboť přirozenou formou konvergence trigonometrických řad je konvergence *neabsolutní*. Připomeňme často citovaný názor NIELSE HENRIKA ABELA (1802–1829), který r. 1826 psal svému učiteli „... *s výjimkou geometrické řady neexistuje v celé matematice snad jiná řada, jejíž součet by byl určen korektně. Jinak řečeno, v matematice mají nejdůležitější věci ty nejhorší základy. Je pravda, že výsledky jsou většinou správné, to je na tom nejděivnější.*“ Dlužno říci, že to bylo právě v době, kdy se konvergence řad intenzivně zkoumala: většinu standardních kritérií pro *absolutní konvergenci*, která známe ze základních kurzů analýzy, již LOUIS AUGUSTIN CAUCHY (1789–1857) dokázal, avšak o neabsolutní konvergenci toho ještě mnoho známo nebylo. Cauchy v učebnici [16] podal z dnešního hlediska přesné definice řady pojmů a dokázal věty, které se v základním kurzu analýzy s drobnými změnami vykládají dodnes, přesto však v [16] nalezneme i tvrzení, že *součet řady spojitých funkcí je spojitá funkce*.

Abel také popsal matematickou atmosféru Paříže: „*Cauchy je bláznivý a nic se s ním nedá dělat, ačkoli je v tomto okamžiku jediným matematikem, který ví, jak se matematika musí dělat. Jeho práce jsou výborné, píše však strašně zmateně. Nejdřív jsem nechápal skoro nic, ale teď to jde lépe. Cauchy nyní uveřejňuje řadu publikací pod názvem „Cvičení z matematiky“. Kupuj si je a horlivě je čtu. Od začátku roku se objevilo už devět svazků. Cauchy je zapálený a bigotní katolík. Je to zvláštní u matematika. Navíc je dnes jediný, kdo dělá čistou matematiku. Poisson, Fourier, Ampère apod. se nezabývají ničím jiným než magnetismem a jinými fyzikálními věcmi. Laplace stěží píše něco nového. Poslední věc, kterou napsal, je dodatek k „Teorii pravděpodobnosti“ ... Všichni pracují sami a bez zájmu o jiné. Všichni chtějí učit a nikdo se sám učit nechce. Všude vládne absolutní egoismus.“¹⁾*

V [14] uvádí HEINRICH BURKHARDT (1861–1914) řadu myšlenkových zdrojů pro trigonometrické řady; výčet je velmi podrobný a je doveden cca do r. 1850. My se omezíme jen na několik nejdůležitějších momentů vývoje.

¹⁾ Obě uvedené ukázky z Abelovy korespondence jsou přeloženy z angličtiny z knihy [12].

U Eulera se objevuje poprvé vztah, se kterým jsme se seznámili v Úvodu, tj.

$$\frac{\pi - t}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kt}{k}, \quad (7.1)$$

konvergenci řady však Euler nezkoumal. Na jiném místě u něj nalezneme i vzorce

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(v) \cos kv \, dv, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(v) \sin kv \, dv \quad (7.2)$$

a dokonce i vyjádření Dirichletova jádra. Jde však spíše o náhodně se vyskytující vzorec nežli vyjádření něčeho, co hraje roli ve vyjádření částečných součtů Fourierovy řady. Vyjádření integrály ve vzorci (7.2) se však vyskytují již r. 1754 u ALEXISE CLAUDA CLAIRAUTA (1713–1765), a tak jistá „pověra“, že jejich autorem je Fourier, není zcela na místě. Máme-li Fourierovu řadu funkce f , tj. trigonometrickou řadu, jejíž koeficienty a_{k-1} , b_k jsou pro všechna $k \in \mathbb{N}$ dány vzorcí (7.2), nazýváme tuto řadu *Fourierovou řadou*, nebo též *Fourierovým rozvojem* funkce f . Řada v (7.1) se někdy uvádí jako první historicky známý Fourierův rozvoj.

Abelův postřeh z citovaného dopisu, že se řada matematiků zabývá tím, co se někdy označuje jako matematická fyzika, byl správný. Fourierovu práci [29] z r. 1907 posuzovala komise, jejímiž členy byli velcí matematici té doby JOSEPH LOUIS LAGRANGE (1736–1813), PIERRE SIMON LAPLACE (1749–1827), GASPARD MONGE (1746–1818) a SYLVESTRE FRANÇOIS LACROIX (1765–1843). Zamítavé stanovisko komise formuloval SIMEON DENIS POISSON (1781–1840).

Vraťme se k Fourierově práci a všimněme si některých příkladů. Pro funkci $f(t) = 1$, $t \in [-1, 1]$, našel Fourier vyjádření

$$\cos \frac{\pi t}{2} - \frac{1}{3} \cos \frac{3\pi t}{2} + \frac{1}{5} \cos \frac{5\pi t}{2} - \frac{1}{7} \cos \frac{7\pi t}{2} + \dots$$

a pro funkci $f(t) = -1$, $t \in (-\pi, 0)$, $f(t) = 1$, $t \in (0, \pi)$, vyjádření tvaru

$$\frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)t}{2k-1}.$$

Protože v prvním případě *absolutní hodnoty* koeficientů tvoří řadu $1 + 1/3 + \dots$ divergentní $k \rightarrow \infty$, mohla by tato řada (z dnešního hlediska) konvergovat pouze neabsolutně; ve druhém případě dokonce sama řada z koeficientů diverguje. Konvergence těchto řad *nebyla* v práci dokázána a z hlediska tehdejších představ byla více než nejasná. Je známo, že v komisi, která Fourierovy výsledky hodnotila, bylo zvláště Lagrangeovo stanovisko zcela neochvějné a velmi negativní. Zamítavé stanovisko komise formulované Poissonem bylo z velké části poplatné tomu, že užití trigonometrických řad k řešení problému se stále zdálo podezřelé.

Fourier na připomínky reagoval dopisem, který poslal *Institutu* a osobně i Lagrangeovi. Když byla Institutem vypsána v r. 1811 soutěž, ve které bylo úkolem *podat matematickou teorii zákonů šíření tepla a srovnat výsledky této teorie s přesnými experimenty*, Fourier se jí zúčastnil a vyhrál ji, nicméně i tato práce byla předmětem značné kritiky. Vedle uznání jejího novátorského přínosu se v posudku píše, že „... způsob, kterým autor dospívá ke svým rovnicím není bez obtíží ...“ a také, že „... jeho analýza (...) zůstává něco dlužna obecnosti a přesnosti“. Tato práce nebyla opět uveřejněna a vyšla prakticky beze

změn teprve r. 1824, kdy Fourier již byl sekretářem Akademie. Jakkoli by se mohlo z dalšího výkladu zdát, že Fourierovy zásluhy jsou malé, není to pravda: již jsme se o nich podrobněji zmínili v předchozím textu na začátku Kapitoly 3 a zvědavějšího čtenáře odkazujeme na práce [12] nebo [66].

Všimněme si nyní blíže éry těsně po uveřejnění Fourierovy práce. Označme $\mathcal{R}(2\pi)$ lineární prostor všech 2π -periodických lokálně *riemannovsky* integrovatelných funkcí a $\mathcal{L}(2\pi)$ lineární prostor všech 2π -periodických lokálně *lebesgueovsky* integrovatelných funkcí na $\mathbb{R}$. Každé funkci f z těchto prostorů lze přiřadit v závislosti na užívaném integrálu její Fourierův rozvoj. Získáme tak řadu, se kterou se vynoří široký okruh přirozených otázek (o některých jsme se již dříve zmínili podrobněji):

- (1) Konverguje tento rozvoj k funkci f ?
- (2) Pokud konverguje všude k funkci g , co lze říci o velikosti množiny

$$\{t \in \mathbb{R}; g(t) \neq f(t)\}?$$

- (3) Může trigonometrická řada konvergovat k funkci f a přitom nebýt Fourierovou řadou funkce f ?
- (4) Lze nějak funkce, které jsou součtem trigonometrické řady a nejsou součtem Fourierovy řady, charakterizovat?

Hledání odpovědí na tyto a další otázky bylo „hnacím motorem“ matematiky po téměř dvě stě let.

R. 1821 se Cauchy rozhodl publikovat sérii přednášek, které konal pro studenty *École Polytechnique*. Na této škole Cauchy dříve studoval (mezi jeho učiteli byli Poisson, Lacroix a také ANDRÉ MARIE AMPÈRE (1775–1836)). Cauchyho kniha [16] se stala jakýmsi manifestem moderní analýzy a podstatně ovlivnila vývoj matematiky. Cauchy v ní integruje spojitě funkce a i když „jeho integrál“ není zdaleka tak obecný, jeho hodnoty se shodují s hodnotami Riemannova integrálu těchto funkcí. Poznamenejme, že některé podobné myšlenky lze nalézt již u BERNARDA BOLZANA (1781–1848), avšak ty vývoj matematiky prakticky neovlivnily.

Jak Poisson, tak i Cauchy se pokusili dokázat tvrzení o konvergenci Fourierových řad. Dospěli k nim shodně při vyšetřování Laplaceovy rovnice. Poisson v práci z r. 1820 navazuje na Lagrangeovu práci o kmitání strun, v jeho důkazu konvergence Fourierových řad je však poměrně průhledná chyba („důkaz kruhem“). Cauchy, který nebyl s Poissonovým důkazem spokojen, publikoval nový důkaz v práci z r. 1827, avšak i v něm byla nalezena chyba, na kterou poukázal nový mladý muž na této scéně: PIERRE GUSTAV LEJEUNE-DIRICHLET (1805–1859).

S Fourierovými myšlenkami se Dirichlet seznámil během svého pařížského pobytu v letech 1822–1826. V té době studoval práce CARLA FRIEDRICHA GAUSSE (1777–1855), zejména jeho *Disquisitiones arithmeticae* a poslouchal např. přednášky Fouriera, Laplace, Lacroix, Legendra a Poissona. Zejména vlivem Fouriera a Gausse se zabýval matematickou fyzikou: s jeho jménem je dodnes spojen tzv. Dirichletův princip. Jeho pozornosti přirozeně neunikl problém konvergence Fourierových řad.

Nynější přístup k Dirichlet-Jordanově větě je z velké části poplatný Dirichletovu postupu. Dirichlet jím dokázal, že Fourierova řada funkce 2π -periodické funkce f konverguje k f , pokud je f po částech hladká a má na každém omezeném intervalu konečný počet

(lokálních) maxim a minim (to odpovídá funkci, která je po částech monotónní). Ve skutečnosti dokázal Dirichlet více: Připouštěl u funkce f i konečně mnoho bodů nespojitosti t prvního druhu a dokázal, že v nich Fourierova řada konverguje k průměru limit zprava a zleva, tj. k hodnotě $(f(t+) + f(t-))/2$.

Dirichlet věřil, že jeho předpoklady jsou zbytečně restriktivní, ale zlepšit tvrzení již nedokázal; v tomto názoru ho podpořil v jednom dopise i Gauss. Prozradíme již nyní, že obecnější tvrzení se podařilo dokázat CAMILLU JORDANOVÍ (1838–1922) až r. 1881; při této příležitosti je vhodné připomenout, že za pojem *funkce s konečnou variací* vděčíme nejen Jordanovu studiu křivek, ale i Fourierových řad (viz [34]). Dlužno říci, že však pod vlivem Dirichletovým došlo především ke změně obsahu pojmu funkce. Zde uvedeme jen odkaz na práce [63] a [12], kde čtenář najde podrobnější a přesnější výklad, a ukázkou „nové“ definice (dle [63]): říká, že y je funkcí proměnné x , definovanou na intervalu $a < x < b$, jestliže každé hodnotě proměnné x v tomto intervalu odpovídá určitá hodnota proměnné y . *Také není důležité, jakým způsobem je toto přiřazení popsáno.* V této podobě se v kurzech kalkulu užívá prakticky i dnes.

Fourier nespécifikuje integrál, který používá. Jeho představě odpovídá pojetí integrálu jako „plochy pod grafem“. Toto pojetí bylo však neudržitelné: jiné chápání funkce vyžadovalo *zpřesnění pojmu integrálu*. Vděčíme za něj v první etapě GEORGU FRIEDRICHOVÍ BERNHARDU RIEMANNOVI (1826–1866) a později HENRI LÉONU LEBESGUEOVI (1821–1881). Náhled na vzorce (7.2) okamžitě ukazuje, jak třída funkcí, pro které lze rozvoj ve Fourierovu řadu nalézt, závisí na integrálu, který máme k dispozici. Vývoj teorie integrálu se udál pod přímým vlivem teorie Fourierových řad: Riemann „svůj“ integrál definoval v práci [70], která je považována za *základní práci o Fourierových řadách*.

Pokud se v úvahách pohybujeme pouze v prostoru $\mathcal{C}(2\pi)$, je základním problémem otázka, zda pro všechny $f \in \mathcal{C}(2\pi)$ konverguje Fourierova řada funkce f ve všech bodech k f . Nejen Dirichlet, ale i Riemann, CARL WEIERSTRASS (1815–1897) a RICHARD DEDEKIND (1831–1916) věřili v její kladné řešení: hledal se „lepší“ důkaz. Překvapivé řešení bylo nalezeno teprve až r. 1873, kdy PAUL DAVID GUSTAV DU BOIS REYMOND (1831–1889) publikoval poměrně komplikovaný příklad funkce $f \in \mathcal{C}(2\pi)$, jejíž Fourierova řada nekonvergovala v jednom bodě $x \in \mathbb{R}$. Později byly publikovány jednodušší příklady. Podrobnější výklad o divergenci Fourierových řad funkcí z $\mathcal{C}(2\pi)$ může čtenář nalézt v [76].

Obraťme nyní pozornost k nespojitým funkcím. Snadno nahlédneme, že s nimi pracoval již Dirichlet, bodů nespojitostí však bylo pouze konečně mnoho a byly to body nespojitosti prvního druhu, ve kterých existují vlastní *různé* jednostranné limity. Neměl proto obtíže s jejich integrací. Navíc měl k dispozici hladkost funkce, i když jen na konečně mnoha dělicích intervalech intervalu délky 2π : můžeme se jí nějak zbavit?

Z Riemannových výsledků vyplynulo, že lze přiřadit Fourierovu řadu všem *omezeným* 2π -periodickým funkcím, které jsou ve smyslu Lebesgueovy míry spojitě skoro všude; to je známá nutná a postačující podmínka existence Riemannova integrálu. Pro tyto funkce jsou však analogické další otázky složitější. V každém případě je nutno zacházet se složitějšími množinami a tak není divu, že teorie trigonometrických řad souvisí se vznikem *teorie množin*.

Některé složité otázky pro trigonometrické řady Riemann úspěšně vyřešil. Ukázal například, že konvergence Fourierovy řady funkce f v bodě $t \in \mathbb{R}$ závisí pouze na chování f v okolí bodu t (princip lokalizace). Uvědomil si také, že trigonometrická řada s omezenými posloupnostmi koeficientů po integraci „člen po členu“ konverguje absolutně. Dnes

víme, že se konvergence řady zlepší: je totiž po dvojí integraci zřejmě stejnoměrná. A tak trigonometrické řady přispěly podstatně i ke studiu *stejněměrné konvergence*.

Jedním z Weierstrassových žáků, který se hodně zasloužil o prozkoumání *stejněměrné konvergence*, byl EDUARD HEINRICH HEINE (1821–1881). Jemu náleží mj. i výsledek, že Fourierova řada funkce $f \in \mathcal{C}(2\pi)$, která je na každém omezeném intervalu po částech monotónní, konverguje k f stejnoměrně. Tento poznatek je z r. 1870 z práce [36] o trigonometrických řadách. Pro tyto a i pro poněkud obecnější funkce (takové, že jsou součtem po částech stejnoměrně konvergentní trigonometrické řady na $[0, 2\pi]$) dokazoval jednoznačnost vyjádření Fourierovou řadou. Jde v podstatě o problém, kdy z rovnosti

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) = 0 \quad (7.3)$$

vyplývá $a_0 = a_k = b_k = 0$, $k \in \mathbb{N}$. Pokud tato rovnost platí všude v $[0, 2\pi]$ s výjimkou konečné množiny P a konvergence je na $[0, 2\pi] \setminus P$ stejnoměrná, Heine jednoznačnost dokázal. Heine poznamenává, že k předpokladům v problému ho přivedl GEORG FERDINAND LUDWIG PHILIPP CANTOR (1845–1918). Ten se ve stejné době intenzivně zabýval problémy jednoznačnosti vyjádření funkce trigonometrickými řadami (srv. [15]).

Znalosti o množinách (jejich teorie nebyla ještě konstituována) byly velmi omezené. Tak např. RUDOLF OTTO SIGISMUND LIPSCHITZ (1832–1903) se domníval, že pro nikde husté množiny $A \subset \mathbb{R}$ platí, že jejich derivace A' (množina hromadných bodů A) je konečná. Přesto dospěl k cennému výsledku: zhruba řečeno, nahradil r. 1864 ve svojí doktorské práci Dirichletem použitou podmínku „po částech monotónní“ podmínkou „po částech lipschitzovská“. Uvažoval i o možnostech zobecnění integrálu, neznal však Riemannovu zásadní práci [70], která byla vydána později, až po Riemannově smrti (byla to v podstatě Riemannova habilitační přednáška z r. 1854).

Fourier se svojí prací nepřímou postaral o nastolení problémů dvojího typu (problémy teprve v pozdější době začaly záviset ještě na používaném integrálu). Šlo o pravdivost tvrzení:

(A) Je-li funkce f omezená 2π -periodická funkce, která je součtem trigonometrické řady, pak je tato řada její Fourierovou řadou.

(B) Řadu funkcí lze integrovat „člen po členu“, tj. obecně platí rovnost

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(t) dt . \quad (7.4)$$

Fourier věřil v platnost tvrzení (B) a užíval rovnost (7.4) k důkazu tvrzení (A). Teprve však na konci 19. stol. bylo známo, že např. $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)$ nemusí být riemannovsky integrovatelná funkce, i když jsou všechny v rovnosti vystupující funkce stejně omezené. Na druhé straně se ukazuje, že „závada leží v použitém integrálu“: jsou-li u_n , $n \in \mathbb{N}$, a f stejně omezené lebesgueovsky integrovatelné funkce, rovnost (7.4) platí, chápeme-li integrály v Lebesgueově smyslu. V dnešní době je zcela běžné užití stejnoměrné konvergence, které se užívá např. při integraci řad, když se odvozují vzorce pro Fourierovy koeficienty (na této úrovni vystačíme s jakýmkoli integrálem). A tak její zavedení a vstup do širšího povědomí byly do značné míry ovlivněny Fourierovými řadami. Připomeňme v této souvislosti,

že např. spojitá nikde diferencovatelná funkce, kterou Weierstrass sestrojil a prezentoval oficiálně r. 1872, má tvar součtu stejnoměrně konvergentní Fourierovy řady.

Vraťme se k Jordanovu zlepšení Dirichletova výsledku o bodové konvergenci Fourierovy řady. Zavedením funkcí s konečnou variací se dokázal elegantně zbavit u vyšetřované funkce monotonie po částech: funkce mohla mít již nekonečně mnoho lokálních maxim a minim. Na druhé straně je taková funkce *rozdílem dvou nezáporných neklesajících funkcí*, má tedy „automaticky“ pouze spočetně mnoho nespojitostí prvního druhu a má také skoro všude v Lebesgueově smyslu (vlastní) derivaci. Zde jsme se tedy od hladkosti studované funkce příliš nevzdálili. Za zmínku stojí i fakt, že stále stačí pracovat s Riemannovým integrálem (důkaz existence Riemannova integrálu z funkce monotónní na $[a, b]$ je lehký). Přesto se již v 19. století objevovaly pokusy o jeho zobecnění (např. u Lipschitze nebo Weierstrasse). Skutečným řešením však byl úspěšný pokus, vedoucí k dnes patrně nejpoužívanějšímu integrálu, za který vdčíme Lebesgueovi. Z hlediska Fourierových řad je na něm zajímavé to, že jím lze integrovat i neomezené a „hodně nespojitě“ funkce.

7.2 Historie

Ne náhodou je spojen zlom v historii Fourierových řad s počátkem 20. století. V té době dozrál proces modernizace integrálu, pro kterou je dnes téměř synonymem jméno HENRI LEÓNA LEBESGUEA (1875–1941). Lebesgue úspěšně završil postupný vývoj a ve své disertační práci [56] v roce 1902 definoval integrál, který je dnes v matematické analýze základním nástrojem.

Je-li $f \in \mathcal{L}(2\pi)$, lze pro ni *Lebesgueovým* integrálem pomocí vzorců (7.2) spočítat Fourierovy koeficienty a vytvořit Fourierův rozvoj funkce f . Protože však změna funkce f na množině $M \subset [0, 2\pi]$ se projeví různě na koeficientech, je vhodné si uvědomit, co můžeme očekávat. Liší-li se dvě funkce $f, g \in \mathcal{C}(2\pi)$ v jediném bodě, pak obsahuje množina M , na které se liší, nutně i nějaký interval a lze pro ně proto intuitivně očekávat i různé hodnoty koeficientů v (7.2). Jakmile začneme pracovat s funkcemi $f, g \in \mathcal{R}(2\pi)$, mají tyto funkce stejné hodnoty koeficientů v (7.2), i když se liší na jakékoli *konečné* množině M (Riemannův integrál z každé charakteristické funkce konečné množiny je roven 0). To však může nastat i pro *některé* nekonečné spočetné množiny M , ale může se i stát, že liší-li se dvě funkce na *spočetné* podmnožině intervalu, Riemannův integrál z jedné na tomto intervalu bude existovat a z druhé nikoli; to je jeho velkou nevýhodou. Zatímco tedy Riemannův integrál v popsaném smyslu „necítí“ změnu na konečné množině (co do existence i hodnoty), obecnější Lebesgueův integrál funkce $f \in \mathcal{L}(2\pi)$ „necítí“ změnu i na nekonečných spočetných množinách a obecněji na jakékoli množině $M \subset [0, 2\pi]$, která má Lebesgueovu míru 0.

Vraťme se však ještě k problému konvergence Fourierovy řady pro funkce z prostoru $\mathcal{C}(2\pi)$. Již jsme prozradili, že existuje funkce z $\mathcal{C}(2\pi)$, jejíž Fourierova řada diverguje. Množina $M \subset \mathbb{R}$, na níž tento jev nastane, může být nejen nekonečná, ale dokonce i *hustá* v $\mathbb{R}$, neboli $M \cap (a, b) \neq \emptyset$ pro každý interval $(a, b) \subset \mathbb{R}$. Tato divergence je jistým kazem na kráse, lze ji však napravit. Roku 1900 publikoval LIPÓT FEJÉR (1880–1959) článek [27], který znamenal zlom. Inspirován při berlínském pobytu HERMANDEM AMANDUSEM SCHWARZEM (1843–1921) ukázal, že „součtem“ Fourierovy řady funkce $f \in \mathcal{C}(2\pi)$ je tato funkce f , pokud však řadu *sčítáme Cesàrovou sčítací metodou*. Tuto metodu zpopularizoval ERNESTO CESÀRO (1859–1906) svými výzkumy součinů (neabsolutně) konvergentních

řad. Fejérovi jeho výsledek přinesl slávu mezi matematiky a zároveň „definitivně vrátil do matematiky“ studium divergentních řad a sčítacích metod; vrátíme se k němu ještě jednou podrobněji. Pro zestručnění vyjádření budeme v takovém případě o Fourierově řadě, resp. obecněji o řadě říkat, že *je sčítatelná k hodnotě $f(x)$ nebo funkci f* . Pokud bude řeč o jiné sčítací metodě, budeme to muset explicitně zmínit.

Lebesgueův integrál umožnil přiřadit Fourierovu řadu daleko širší třídě funkcí, a tak nepřekvapí *vzájemný veliký vliv*. Není překvapivé, že Fourierovy řady měly obrovský vliv na rozvoj *teorie integrálu*, a ani to, že Lebesgue brzy po publikaci své zásadní práce o integrálu obrátil svoji pozornost k Fourierovým řadám. Zabýval se jimi v období 1902–1910 a výsledky, které zmiňujeme, otiskl v knize [59] již roku 1906. Bylo přirozené se ptát, nakolik lze zobecnit výsledky, obdržené pomocí Riemannova integrálu, pro tuto novou situaci. Tomu odpovídá i terminologie: Pro snazší rozlišení kontextu mluvíme např. o *Riemannově lemmatu* a *Riemann-Lebesgueově lemmatu* apod.

Pomocí Lebesgueova integrálu lze přiřadit Fourierovu řadu každé funkci $f \in \mathcal{L}(2\pi)$. V oblasti otázek, týkajících se konvergence, je přirozené se ptát, kdy Fourierova řada (někdy pro zvýraznění kontextu Fourier-Lebesgueova řada) funkce $f \in \mathcal{L}(2\pi)$ konverguje a zda konverguje k funkci f . V roce 1923 dokázal ANDREJ NIKOLAJEVIČ KOLMOGOROV (1903–1987), že existuje funkce $f \in \mathcal{L}(2\pi)$, jejíž Fourierova řada *diverguje* všude v $\mathbb{R} \setminus M$, kde M má Lebesgueovu míru $\lambda(M)$ rovnou 0, a v roce 1926 výsledek ještě vylepšil tím, že ukázal, že existuje $f \in \mathcal{L}(2\pi)$, jejíž Fourierova řada *diverguje všude* v $\mathbb{R}$.

Funkce v Kolmogorovově příkladu nebyla omezená, avšak JÓZEF MARCINKIEWICZ (1910–1940) v roce 1936 dokázal, že lze sestavit *omezenou funkci* $f \in \mathcal{L}(2\pi)$, jejíž Fourierova řada všude v $\mathbb{R}$ diverguje. Mnozí matematici očekávali, že se podaří najít takovou *spojitou* funkci, tj. z $\mathcal{C}(2\pi)$, se všude divergentní Fourierovou řadou, ale tato očekávání se nenaplnila. LENNART CARLESON (*1928) roku 1966 dokázal, že Fourierova řada funkce $f \in \mathcal{L}_2(2\pi)$ konverguje skoro všude v $\mathbb{R}$ (tedy až na množinu nulové míry). Protože je zřejmě $\mathcal{C}(2\pi) \subset \mathcal{L}_2(2\pi)$, konverguje Fourierova řada každé funkce z $\mathcal{C}(2\pi)$ skoro všude v $\mathbb{R}$.²⁾ O dva roky později dokázali JEAN-PIERRE KAHANE (*1926) a YITZHAK KATZNELSON (*1934), že ke *každé* množině $M \subset [0, 2\pi]$ nulové Lebesgueovy míry existuje dokonce funkce $f \in \mathcal{C}(2\pi)$, jejíž Fourierova řada diverguje ve všech bodech M modulo 2π . Je ale dobré si již nyní uvědomit, že asi bude pronikavý rozdíl mezi chováním Fourierových řad funkcí z $\mathcal{L}_p(2\pi)$ pro $p = 1$ a $p > 1$.

Již jsme se zmínili o Fejérově výsledku. Nyní si ho všimneme podrobněji, k čemuž potřebujeme několik základních informací o sčítacích metodách. Vlastnost limity aritmetických průměrů, tj. že pro posloupnost $\{d_k\}_{k=0}^\infty$ platí implikace

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d_k = D \in \mathbb{R} \quad \implies \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_0 + d_1 + \cdots + d_n}{n+1} = D, \quad (7.5)$$

dokázal Cauchy roku 1821 ve [16], její původ však sahá až k DANIELOVI BERNOULLI (1700–1782), který o ní publikoval práci roku 1771. Ještě před ním se touto vlastností zabýval roku 1768 i d’Alembert. Brzy poté se objevily první práce, které položily základ k soustavnému studiu sčítacích metod: r. 1882 v [37] pracoval OTTO LUDWIG HÖLDER (1859–1937) s iterovanými aritmetickými průměry. Pro řadu $\sum_{k=0}^\infty a_k$ položil

²⁾ Poznamenejme ještě, že roku 1968 rozšířil tento Carlesonův výsledek RICHARD ALLEN HUNT (1937–2009) i na funkce z $\mathcal{L}_p(2\pi)$ pro všechna $p > 1$.

$s_n := \sum_{k=0}^n a_k$ a dále rekurentně $s_n^{(1)} = s_n$,

$$s_n^{(\ell+1)} = \frac{s_0^{(\ell)} + s_1^{(\ell)} + \cdots + s_n^{(\ell)}}{n+1}, \quad n, \ell \in \mathbb{N}.$$

Pak definoval (použijeme soudobé označení) pro $k \in \mathbb{N}$

$$(H, k)\text{-}\sum_{k=0}^{\infty} a_k := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n^{(k)} = A,$$

pokud existuje vlastní limita A . V tom případě říkáme, že řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ je sčítatelná Hölderovou metodou řádu k , a to k hodnotě A . O něco později se objevila jiná (tzv. Riemannova) sčítací metoda, která má ke sčítání Fourierových řad podstatně užší vztah. Pak však divergentní řady na dlouhou dobu z matematiky zcela vymizely. Ačkoli právě Cauchy dokázal implikaci (7.5), zároveň svojí velkou autoritou a studiem konvergentních řad přispěl k tomu, že divergentní řady se po dalších asi 60 let v matematice prakticky neužívaly. V té souvislosti uvedeme jeden citát. V [16] Cauchy píše: *Musel jsem vyjít z předpokladů zdánlivě trochu tvrdých, např. že divergentní řady nemají součet.*

Již dříve jsme se zmínili o Cesàrovi. On byl autorem první podstatné aplikace sčítací metody založené na vzorci (7.5) a příslušná práce vyšla v roce 1890. Týkala se tzv. Cauchyho součinu řad. Jestliže řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergují, avšak nikoli absolutně, pak jejich *Cauchyho součin*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k, \quad \text{kde} \quad c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_k b_0, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

nemusí konvergovat. Cesàro dokázal, že i když částečné součty s_n řady $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ divergují, limita jejich aritmetických průměrů existuje. Podrobněji: Označíme pro řadu $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ částečné součty $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$ a definujeme

$$(C)\text{-}\sum_{k=0}^{\infty} a_k := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n+1},$$

pokud vlastní limita vpravo existuje. Cesàro dokázal, že když $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = A$ a $\sum_{k=0}^{\infty} b_k = B$, pak pro částečné součty s_n jejich Cauchyho součinu $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ platí

$$(C)\text{-}\sum_{k=0}^{\infty} c_k = AB.$$

Podobně jako u Hölderovy metody lze definovat cesàrovské sčítací metody (C, k) vyšších řádů. Nebudeme je popisovat, jsou totiž jen technicky jiné, než metody (H, k) , ale co do efektivity jsou s nimi ekvivalentní. Potřebujeme v podstatě jen metodu $(C, 1) \equiv (H, 1)$ a budeme užívat k jejímu označení pouze symbol (C) .

Jednotlivé výsledky, které jsme dnes zvyklí chápat v rámci sčítacích metod, se však objevovaly již dříve. Tak např. již u Leibnize najdeme tvrzení, které lze v zavedeném označení vyjádřit takto: jestliže

$$(C)\text{-}\sum_{k=0}^{\infty} a_k = A, \quad \text{pak} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = A. \quad (7.6)$$

Toto tvrzení, které je formálně zobecněním tzv. *Abelovy věty* z r. 1826, Leibniz nedokázal; to provedl teprve r. 1880 FERDINAND GEORG FROBENIUS (1849–1917). Ten ho také modifikoval a dal mu následující formu:

Je-li $\{s_n\}$ posloupnost, pro kterou $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = A \in \mathbb{R}$, pak

$$\lim_{x \rightarrow 1-} (1-x)(s_0 + s_1x + s_2x^2 + \cdots) = A.$$

Jestliže označíme pro řadu $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$

$$(A)\text{-}\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{x \rightarrow 1-} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = A,$$

pokud existuje konečná limita A výrazu vpravo, dostaneme definici abelovského součtu řady a popis Abelovy sčítací metody. Potom vztah (7.6) říká, že Abelova sčítací metoda je v podstatě *silnější* než Cesàrova metoda (C). Jak se zdá, idea využití aritmetických průměrů pro sčítací metody možná tedy náleží Leibnizovi a Frobenius dokázal patrně jako první korektně vztah mezi Cesàrovou a Abelovou sčítací metodou. Poznamenejme, že Abelova metoda je silnější než všechny (C,k) metody, $k \in \mathbb{N}$.

Vraťme se nyní zpět k otázce konvergence Fourierových řad. Jak již bylo řečeno, divergence Fourierovy řady pro některé funkce z $\mathcal{C}(2\pi)$ byla chápána jako jistý estetický nedostatek, který odstranil Fejér, když dokázal, že *Fourierova řada každé funkce $f \in \mathcal{C}(2\pi)$ je v každém bodě $x \in \mathbb{R}$ (cesàrovsky) sčítatelná k hodnotě $f(x)$ a že dokonce $\sigma(f, x) \Rightarrow f(x)$ na $\mathbb{R}$* , tj. že tato konvergence je stejnoměrná.

Příslušný průměr prvních $(n+1)$ částečných součtů Fourierovy řady funkce f lze vyjádřit ve tvaru

$$\begin{aligned} \sigma_n(f, x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) K_n(x-t) dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(t) \frac{1}{n+1} \left[\frac{\sin\left(\frac{1}{2}(n+1)(x-t)\right)}{2 \sin\left(\frac{x-t}{2}\right)} \right]^2 dt. \end{aligned}$$

Hlavní rozdíl mezi *Dirichletovými jádry* D_n a *Fejérovými jádry* K_n spočívá ve faktu, že Fejérova jádra jsou pro všechna $n \in \mathbb{N}$ *nezáporné* funkce. To nám umožnilo použít k důkazu Korovkinovu větu a dokázat relativně jednoduše, že konvergence je stejnoměrná.

Z hlediska Fejérova výsledku bylo žádoucí zjistit, jak je to s divergencí Fourierových řad funkcí z $\mathcal{L}(2\pi)$. Možná trochu překvapivý výsledek říká, že ač taková Fourierova řada funkce f může divergovat *všude* v $\mathbb{R}$, je sčítatelná s. v. (*skoro všude*, tj. s výjimkou množiny Lebesgueovy míry 0) v $\mathbb{R}$ k funkci f . To dokázal Lebesgue v [58] roku 1905. S ohledem na necitlivost Lebesgueova integrálu vzhledem ke změnám integrované funkce na množině míry 0 lepší výsledek nelze očekávat. Je patrně dobré připomenout, že ve zmíněných tvrzeních lze sčítatelnost chápat i jinak a Cesàrovu sčítací metodu nahradit Abelovou sčítací metodou, protože ta je silnější (viz zmíněný Frobeniův výsledek v (7.6)). Připomeňme ještě, že trigonometrická řada může konvergovat k funkci f všude v $\mathbb{R}$ a přitom tato řada není Fourierovou řadou f .

Můžeme nějak popsat body, ve kterých je Fourierova řada funkce $f \in \mathcal{L}(2\pi)$ sčítatelná? To nastane například ve všech bodech $x \in \mathbb{R}$, ve kterých je funkce f *spojitá*, a řada je pak sčítatelná k $f(x)$.

7.3 Některé další výsledky

Obraťme se nyní k jinému aspektu teorie trigonometrických řad, a to k jejich vlivu na rozvoj teorie množin. Množinu $E \subset (0, 2\pi)$ nazveme *U-množinou* (*množina jednoznačnosti*), pokud platí: konverguje-li trigonometrická řada mimo množinu E k 0, má všechny koeficienty rovny 0.

Podobně množinu $E \subset (0, 2\pi)$ nazveme *M-množinou* (*množina nejednoznačnosti*), pokud platí: existuje trigonometrická řada konvergentní mimo E k 0, která nemá všechny koeficienty rovny 0.

Co lze o množinách tohoto typu říci? WILLIAM HENRY YOUNG (1863–1942) a FELIX BERNSTEIN (1878–1956) dokázali už před více než sto lety, že každá spočetná množina je *U-množina*, že každá *U-množina* má míru 0 a že každá *M-množina* má kladnou míru. Po nějakou dobu se věřilo, že množiny míry 0 jsou vždy *U-množinami*. Pak však DIMITRIJ JEVGENIEVIČ MENŠOV (1892–1988) v roce 1916 ukázal, že to tak *není*! To vedlo k dalším velmi jemným problémům, které formuloval NIKOLAJ NIKOLAEVICH LUZIN (1883–1950) kolem roku 1920. Tento vývoj však již nebudeme dále sledovat, daleko překračuje rámec tohoto textu.

Vrátíme se krátce ke snáze popsateľným problémům. Již víme, že pokud trigonometrická řada konverguje k funkci f stejnoměrně, je také Fourierovou řadou f . Má-li trigonometrická řada standardní tvar

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad (7.7)$$

stačí pro její stejnoměrnou konvergenci splnění podmínky

$$\sum_{k=1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|) < \infty, \quad (7.8)$$

avšak jen málo Fourierových řad má absolutně konvergentní řady koeficientů, a tudíž i spojitý součet. V ideálním případě by např. každá všude konvergentní trigonometrická řada byla Fourierovou řadou svého součtu. To však, jak jsme si již řekli, *neplatí*! Bez důkazu uveďme, že trigonometrická řada (7.7) splňuje podmínku (7.8), jestliže konverguje *absolutně* na množině $M \subset \mathbb{R}$ *kladné* Lebesgueovy míry. Toto tvrzení dokázali roku 1912 ARNAUD DENJOY (1884–1974) a Luzin.

R. 1906 využil PIERRE JOSEPH LOUIS FATOU (1878–1929) větu o integraci Fourierovy řady člen po členu a našel trigonometrickou řadu (srv. Příklad 2.3.3), která konverguje všude v $\mathbb{R}$ a není přitom Fourierovou řadou svého součtu (a to ještě na každém uzavřeném intervalu neobsahujícím celistvý násobek čísla 2π konverguje stejnoměrně!).

A zde je naopak pozitivní výsledek: V roce 1912 CHARLES DE LA VALLÉE-POUSIN (1866–1962) obdržel tento výsledek pro funkce z $\mathcal{L}(2\pi)$: *Pokud konverguje trigonometrická řada bodově ke všude konečné funkci $f \in \mathcal{L}(2\pi)$, je její Fourierovou řadou.* Jsou známy i další výsledky tohoto typu (srv. s Poznámkou 2.4.3). Tento výsledek se zdál v jistém smyslu neuspokojivý, a tak se hledal „lepší“ integrál než Lebesgueův, který by se s tímto problémem vyrovnal lépe. Platí zde však jistá vyváženost: získáme-li integrál s lepším vztahem k Fourierovým řadám, pak tento integrál ztratí některé typické vlastnosti integrálu. Podrobněji tuto otázku probírat nebudeme.

Kdybychom chtěli zcela vyčerpat vazby teorie trigonometrických řad na jiná odvětví matematiky, byl by to prakticky nedostižný cíl. Je však na místě se o některých alespoň krátce zmínit. Začneme např. u *teorie aproximace*. Aproximace funkcí pomocí ortogonálních polynomů různých typů má kořeny v teorii Fourierových řad (Hermitovy polynomy, Laguerrovy polynomy apod.). Weierstrassovy dvě věty o aproximaci klasickými polynomy a trigonometrickými polynomy z r. 1885 spolu úzce souvisejí a jednu lze dokázat z druhé. Dokonce se ukazuje, že všechny ingredience možného jednoduchého důkazu její „trigonometrické verze“ byly známy už Heinemu v roce 1870, avšak na tento alternativní důkaz pomocí Fourierových řad upozornil teprve roku 1892 český matematik MATYÁŠ LERCH (1860–1922).

Mnoho výsledků, které v dnešní době tvoří součást *funkcionální analýzy*, má svůj předobraz v tvrzeních o trigonometrických nebo Fourierových řadách. Sahá to od dílčích vět jako je Riesz-Fischerova věta z r. 1907 přes nekonečné báze (Schauderova báze), až po celé části funkcionální analýzy jako je např. partie o Hilbertových prostorech; ty v axiomatizované abstraktní podobě zavedl JOHN VON NEUMANN (1903–1957). Dnešní častá formulace Riesz-Fischerovy věty jako věty o úplnosti prostoru $\mathcal{L}_2(M)$ nebo $\mathcal{L}_2(2\pi)$ je tak trochu zavádějící: v roce 1907 Hilbertův prostor ve své abstraktní podobě nebyl známý, ortonormální systémy byly souborem několika příkladů, úplnost byla neznámým pojmem a prostor $\mathcal{L}_2(M)$ byl neznámým pojmem. Přesto věta o jeho úplnosti je podstatou Riesz-Fischerovy věty a zmíněné pojmy se z ní postupně vyvinuly. Naopak funkcionální analýza ovlivnila Fourierovy řady, např. dnes již standardní důkaz existence spojitě funkce s divergentní Fourierovou řadou se vede přes Banach-Steinhausovu větu (princip stejnoměrné omezenosti; viz Věta 1.5.4). Připomeňme ještě, že vznik Riemannova integrálu byl úzce svázán s trigonometrickými řadami a že u Lebesgueova integrálu má jeho vztah k Fourierovým řadám trochu jiný charakter: byl na ně bezprostředně po svém vzniku aplikován (Lebesgue, Fejér). viz [86].

Vztah Fouriera k Fourierově transformaci je možná bezprostřednější než je tomu u Fourierových řad. Ty, jak jsme již zmínili, byly používány dávno před vznikem [29]. Naproti tomu Fourier byl jedním z prvních, kdo vyšetřoval související integrál (dalšími byli Cauchy a Poisson). V souvislosti s řešením rovnice pro vedení tepla vyšetřoval postupně výrazy

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-kq_n^2 t} \cos q_n x \rightsquigarrow \int_0^{\infty} Q(q) e^{-kq^2 t} \cos qx \, dq$$

a pak při vyšetřování koeficientů rozvoje přešel k vyšetřování podobného integrálu

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \Phi(x) \cos nx \, dx \rightsquigarrow \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} F(x) \cos qx \, dx .$$

Schematické vyjádření je jen náznakem Fourierova poněkud heuristického přístupu. Podrobněji viz [47], vol. 2, s. 679. V práci z r. 1811 [30] (vydána 1824) dospěl Fourier dokonce i vyjádřením

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} u(t) \cos(xt) \, dt \quad \text{a} \quad u(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \cos(xt) \, dx ;$$

pracoval tedy vlastně s reálnou částí transformace reálné funkce. První rovnost, která je z hlediska našeho výkladu zajímavá, se někdy nazývá *kosinová transformace*.

Dosud uvedené příklady by neměly čtenáře svést k domněnce, že jsou vesměs „teoretické“: zde je vhodné zmínit *rychlou Fourierovu transformaci a wavelety*. Aniž bychom zacházeli do detailů uvedeme výstižný citát: *Rychlá Fourierova transformace je nejcennějším numerickým algoritmem naší doby* (G. Strang, 1993). Ten velmi přiléhavě charakterizuje význam FFT. Její využití je mnohostranné a sahá od numerických metod přes složité technické výpočty až po aplikace v medicíně: řada složitých vyšetřovacích aparatur typu počítačové tomografie nebo magnetické rezonance silně závisí na jejím použití.

Na první pohled se zdá, že přes diskretizaci se dostaneme od Fourierovy transformace k DFT a že ta pak patrně vedla i k objevu FFT. Historie však ukazuje, že kořeny FFT můžeme hledat již u Gausse; podrobněji viz [35]. Existuje více způsobů, jak FFT „udělat více či méně přirozenou“, zvolený způsob je jen jednou z možných cest.

O užitečnosti waveletů svědčí jejich využití ke skladování obrovských databází otisků prstů v F.B.I. nebo při filtraci rušivých signálů a rozeznávání lidské řeči. Jejich význam ilustrujeme posledním citátem: . . . *wavelety jsou bezpochyby vzrušujícím názorným pojmem. Tento pojem přinesl s sebou nový způsob myšlení* . . . Doufáme, že čtenář bude i na základě vybraných ukázek z historie souhlasit, že to stejně nebo dokonce mnohonásobně více platí i o Fourierových řadách.

Literatura

- [1] Ash J. M. (ed.): *Studies in harmonic analysis*, Proceedings of the Conference “A survey of harmonic analysis” held at DePaul University, Chicago, Ill., June 29–July 2, 1974, MAA Studies in Mathematics **13**, Mathematical Association of America, Washington, D. C., 1976.
- [2] Askey R., Haimo D. T.: *Similarities between Fourier and power series*, Amer. Math. Monthly **103** (1996), s. 297–304.
- [3] Banach S., Steinhaus H.: *Sur le principe de la condensation de singularités*, Fund. Math. **9** (1927), s. 50–61.
- [4] Bachman G., Narici L., Beckenstein E.: *Fourier and Wavelet Analysis*, Springer, New York, 2000.
- [5] Bari N. K.: *Trigonometričeskije rjady*, GIFML, Moskva, 1961.
- [6] Bauer H.: *Aproximace a abstraktní hranice*, Pokroky mat. fyz. astronom. **26** (1981), s. 305–326.
- [7] Bečvař J., Fuchs E. (ed.): *Historie matematiky I*, JČMF, Brno, 1994, (sborník semináře Historie matematiky, Jevíčko 1993).
- [8] Berg Chr.: *Fourier analysis*, <http://www.math.ku.dk/kurser/2009-10/blok1/fouan/fouan.pdf>, Københavns University, København, 2009.
- [9] Bernštejn N. S.: *Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités*, Comm. Soc. Math. Kharkov Society **13** (1912), s. 1–2.
- [10] Bohman H.: *On approximation of continuous and of analytic functions*, Ark. Math. **2** (1952), s. 43–56.
- [11] Borel É.: *Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynômes*, Gauthier–Villars, Paris, 1905.
- [12] Bottazzini U.: *The higher calculus: Real and complex analysis from Euler to Weierstrass*, Springer, New York, 1986.
- [13] Bressoud D.: *A radical approach to real analysis*, The Mathematical Association of America, Washington, 1994.
- [14] Burkhardt H.: *Trigonometrische Reihen und Integrale*, obsaženo v: *Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen*, Bd. II A 12, Teubner, Leipzig, 1904.

- [15] Cantor G.: *Beweis, das eine für jeden reellen Wert von x durch eine trigonometrische Reihe gegebene Funktion $f(x)$ sich nur auf eine einzige Weise in dieser Form darstellen lässt*, J. Reine Angew. Math. **72** (1870), s. 139–142,
- [16] Cauchy A.: *Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnic* (1821, Paris), obsaženo v: *Oeuvres complètes d'Augustin Cauchy* (1882–1974), Gauthier-Villars et fils, Paris.
- [17] Cesáro E.: *Sur la multiplication des séries*, Bull. Sci. Math. **14** (1890), s. 114–120.
- [18] Cooley J. W., Tukey, J. W.: *An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series*, Math. Comput. **19** (1965), s. 297–301,
- [19] Coppel W. A.: *J. B. Fourier – On the occasion of his two hundredth birthday*, Amer. Math. Monthly **76** (1969), s. 468–483.
- [20] Černý I.: *Úvod do inteligentního kalkulu 2. 1000 příkladů z pokročilejší analýzy*, Academia, Praha, 2005.
- [21] Dauben J. W.: *Georg Cantor. His mathematics and philosophy of the infinite*, Harward Univ. Press, Cambridge, MA, 1979.
- [22] Dirichlet P. G. L.: *Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre les limites données*, obsaženo v: *Werke 1*, , Berlin, s. 117–132, Journal reine angew. Math. 1829.
- [23] Edwards R.: *Fourier series – a modern introduction*, Springer, New York, 1979. (Existuje ruský překlad: *Rjady Fur'je v sovremennom izložennii*, Mir, Moskva 1985).
- [24] Edwards C. H.: *The historical development of the calculus*, Springer, New York, 1979.
- [25] Euler L.: *Institutiones calculi differentialis cum eius usu in analysi finitorum ac doctrina serierum*, Academiae imperialis scientiarum Petropolitanae, Petropavlovsk, 1755.
- [26] Feinerman R. P., Newman D. J.: *Polynomial approximation*, William & Wilkins, Baltimore, 1974.
- [27] Fejér L.: *Sur les fonctions bornées et intégrables*, C. R. Acad. Sci. Paris **131** (1900), s. 984–987,
- [28] Fejér L.: *Untersuchungen über Fourierische Reihen*, Math. Ann. **58** (1904), s. 51–69,
- [29] Fourier J. B. J.: *Mémoire sur la propagation de la chaleur dans les corps solides* (nepublikováno), pro *Institute de France*, Paris, podáno 21. prosince 1807.
- [30] Fourier J. B. J.: *Mémoire sur la propagation de la chaleur*, revidovaná verze *Mémoiru* (1807) přihlášená do soutěže o *Grand prix de mathématique* pro r. 1812; byla podána r. 1811, Paris, 1824.
- [31] Fourier J. B. J.: *Théorie analytique de la chaleur*, Didot, Paris, 1822.
- [32] Goffman C., Pedrik G.: *First course in functional analysis*, Prentice Hall International, Inc., London, 1965.
- [33] Hardy G. H.: *Divergent series*, Oxford University Press, New York, 1956.
- [34] Hawkins T.: *Lebesgue's Theory of integration. Its origins and development*, University of Wisconsin Press, Madison, 1970.

- [35] Heideman M. T., Johnson D. H., Burrus C. S.: *Gauss and the history of the Fast Fourier transform*, IEEE ASSP Magazine, Oct. 1984 (1984), s. 14–21.
- [36] Heine E.: *Über trigonometrischen Reihen*, J. Reine Angew. Math. **71** (1870), s. 353–365,
- [37] Hölder O.: *Grenzwerte von Reihen an der Convergengzgrenze*, Math. Ann. **20** (1882), s. 535–549.
- [38] Chernoff P. R.: *Pointwise convergence of Fourier series*, Amer. Math. Monthly **87** (1980), s. 399–400.
- [39] Cheney E. W.: *Introduction to approximation theory*, McGraw-Hill, Inc., New York, 1966.
- [40] Jackson D.: *The convergence of Fourier series*, Amer. Math. Monthly **41** (1934), s. 67–84.
- [41] Jarník V.: *Diferenciální počet II*, Academia, Praha, 1953, 1956, 1976.
- [42] Jarník V.: *Integrální počet II*, Academia, Praha, 1955, 1976, 1984.
- [43] Jones F.: *Lebesgue integration on Euclidean space*, Jones and Barlett Pub., Boston, 1993.
- [44] Kahane J-P.: *Baire's category theorem and trigonometric series*, Journal d'Analyse mathématique (**80**), 2000. s. 143–182,
- [45] Kahane J-P., Lemarié-Rieusset P-G.: *Fourier series and wavelets*, Gordon and Breach Pub., 1995.
- [46] Katz V. J.: *The calculus of trigonometric functions*, Historia Math. **14** (1987), s. 311–324.
- [47] Kline M.: *Mathematical thoughts from ancient to modern time*, Oxford University Press, New York, Oxford, 1990.
- [48] Korovkin P. P.: *O schodimosti linějnych položitel'nych operatorov v prostranstve nepreryvnyh funkcij*, Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.) **90** (1953), s. 961–964.
- [49] Korovkin P. P.: *Linějnyje operatory i teorija približenija*, Fizmatgiz, Moscow, 1959, (angl. překlad: *Linear operators and approximation theory*, Gordon and Breach, New York, 1960).
- [50] Körner T. W.: *Fourier analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1988, (další vydání 1990, 1992).
- [51] Kroll W.: *Zwei Perlen der elementaren Analysis*, Praxis der Mathematik **37** (1995), s. 109–115.
- [52] Kufner A.: *Geometrie Hilbertova prostoru*, SNTL, Praha, 1973.
- [53] Kufner A., Kadlec J.: *Fourierovy řady*, Academia, Praha, 1969.
- [54] Lasser R.: *Introduction to Fourier series*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1996.
- [55] Lebesgue H.: *Sur l'approximation des fonctions*, Bull. Sci. Math. (2. sér.) **22** (1898), s. 278–287.
- [56] Lebesgue H.: *Intégrale, longueur, aire* (Thèse), Annali Mat. Pura e Appl. (**3**) **7** (1902), s. 231–259.

- [57] Lebesgue H.: *Sur les séries trigonométriques*, Ann. scient. l'École norm. **(3) 20** (1903), s. 453–485,
- [58] Lebesgue H.: *Sur la convergence des séries de Fourier*, Mathematische Annalen **61** (1905), s. 271–277,
- [59] Lebesgue H.: *Leçons sur les séries trigonométriques professées au Collège de France*, Geuthier-Villars, Paris, 1906.
- [60] Laugwitz D.: *Bernhard Riemann, 1826 – 1866: turning points in the conception of mathematics*, Birkhäuser Boston, Boston, 1996, 1999. (Kniha vyšla původně v němčině r. 1966.).
- [61] Lerch M.: *Sur un point de la théorie des fonctions génératrices d'Abel*, Acta Math. **27** (1903), s. 339–351.
- [62] Lomelí H. E., García C. L.: *Variations on a Theorem of Korovkin*, Amer. Math. Monthly **113** (2006), s. 744–750.
- [63] Luzin N.: *Function: Part I and II*, Amer. Math. Monthly **105** (1998), s. 59–67, 263–270.
- [64] Natanson I. P.: *Teorija funkcij dejstviteľnoj peremennoj*, GITTL, Moskva, 1953.
- [65] von Neumann J.: *Mathematische Begründung der Quantenmechanik*, Göttingen Nachr. (1927), s. 1–57.
- [66] Paplauskas A. B.: *Trigonometričeskije rjady*, Nauka, Moskva, 1966.
- [67] Picard E.: *Sur la représentation approchée des fonctions*, C. R. Heb. Séances Acad. Sci. Paris **112** (1891), s. 183–186.
- [68] Pinkus A.: *Weierstrass and approximation theory*, J. Approx. Theory **107** (2000), s. 1–66.
- [69] Riemann B.: *Gesammelte mathematische Werke* (2 Aufl.), Leipzig, 1892.
- [70] Riemann B.: *Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe*, Gesammelte Werke, Göttingen, **13** (1867), (47 str., Göttingenský bibliografický server).
- [71] Rudin W.: *Analýza v reálném a komplexním oboru*, Academia, Praha, 1977, 2003.
- [72] Runge C.: *Über die Darstellung willkürlicher Funktionen (Auszug eines Briefes an Herrn G. Mittag-Leffler)*, Acta Math. **7** (1885), s. 387–392. (navazuje na článek téhož autora z Acta Math. **6**.).
- [73] Stromberg K. R.: *An introduction to classical real analysis*, Wadsworth, Inc., Belmont, CA, 1981.
- [74] Struik D. J.: *Dějiny matematiky*, Orbis, Praha, 1963, (existuje v angličtině, v ruštině a v němčině).
- [75] Siegmund-Schultze R.: *Der Beweis des Weierstraßschen Approximationssatzes 1885 vor dem Hintergrund der Entwicklung der Fourieranalysis*, Hist. Math. **15** (1988), s. 299–310.
- [76] Štěpánek F.: *130 let divergentních trigonometrických Fourierových řad*, Pokroky MFA **49** (2004), s. 53–60, 122 – 128.
- [77] Taylor A. E.: *Differentiation of Fourier series and integrals*, Amer. Math. Monthly **51** (1944), s. 19–25.

- [78] Veselý J.: *Matematická analýza pro učitele*, Matfyzpress, Praha, 2001.
- [79] Veselý J.: *Základy matematické analýzy I, II*, Matfyzpress, Praha, 2004, 2009.
- [80] Veselý J.: *Weierstrassova věta o aproximaci*, Pokroky MFA **47** (2002), s. 181–190.
- [81] Weierstrass K.: *Über continuirliche Funktionen eines reellen Arguments, die für keinen Werth des letzteren einen bestimmten Differentialquotienten besitzen* (Gelesen Akad. Wiss. 18. Juli 1872), Berlin, 1872. (Na základě Weierstrassova dopisu publikoval r. 1875 tento příklad P. D. Du Bois-Reymond).).
- [82] Weierstrass K.: *Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Funktionen reeller Argumente* (původně v *Sitzungsberichte Königl. Akad. Wiss.*, 633–639, 789–805), Mathematische Werke von Karl Weierstrass Mayer & Müller, Berlin, 1903. s. 1–37,
- [83] Weiss G. L.: *Harmonic Analysis*, obsaženo v: MAA Studies in Mathematics, Vol. 3, Washington, 1965, s. 124–178.
- [84] Wiener N.: *The Fourier integral and certain of its applications*, Cambridge University Press, New York, 1933. (Existuje ruský překlad: *Intěgral Furje i někotoryje jeho priloženija*, GIFML, Moskva 1963.).
- [85] Zygmund A.: *Trigonometric series*, Cambridge University Press, Cambridge, 1959. (Existuje ruský překlad: *Trigonometričeskije rjady*, Mir, Moskva 1965.).
- [86] Zygmund A.: *Notes on the history of Fourier series*, obsaženo v: *Studies in Harmonic Analysis*, MAA Studies in Mathematics, Vol. 13, Washington, 1976, s. 1–19.
- [87] Zygmund A.: *The role of Fourier series in the development of analysis*, *Historia mathematica* (**2**), 1975, s. 591–594,

Věcný rejstřík

- Abelova
 - parciální sumace, 8
 - sčítací metoda, 11
- aproximace, 44, 119
- báze, 82
 - Hamelova, 81
 - lineární, 81
 - ortonormální, 81
 - Schauderova, 119
- Cauchyho součin, 102, 116
- DFT, 99
- diagonála, 24
- diskrétní
 - Fourierova transformace, 99
- divergence
 - Fourierovy řady, 56, 112
- Eulerův princip, 10
- FFT, 99, 120
- Fourierova
 - transformace, 91
 - transformace inverzní, 95
 - řada, 30, 86
- Fourierovy
 - koefficienty, 30, 31, 84, 108
- Fourierův
 - život, 107
- funkce, 108
 - hölderovská, 64
 - integrovatelná, 65
 - jednoduchá, 44
 - lichá, 46
 - omezující, 24
 - po částech konstantní, 13
 - po částech monotónní, 59
 - s konečnou variací, 112
 - spojitá, 44
 - sudá, 46
 - vytvorující, 90
- Gram-Schmidtův proces, 81
- harmonická analýza, 66
- integrace
 - člen po členu, 30
- integrál
 - Lebesgueův, 12, 113
 - Riemannův, 12, 112
 - součtová definice, 12
- izometrie, 85
- jádro, 45
 - Dirichletovo, 45
 - Fejérov, 45
- koefficienty
 - Fourierovy, 84
- kombinace lineární, 82
- konvergence, 1
 - absolutní, 33
 - bodová, 51, 59
 - Fourierovy řady, 108
 - monotónní, 67
 - neabsolutní, 12
 - stejnoměrná, 42
 - řady, 28
 - řady funkcí, 6
 - řady stejnoměrná, 29
- Lebesgueova míra, 13
- Legendreovy polynomy, 89
- lemma
 - Riemann-Lebesgueovo, 34
- lichá část, 103
- lineární kombinace, 82
- maximální
 - ortonormální množina, 81
 - systém, 82
- měřitelné množiny, 13
- metoda
 - aritmetických průměrů, 10
 - per partes, 89, 93
 - regulární, 10
 - silně regulární, 10
 - sčítací, 10
- metrická projekce, 79
- množina
 - jednoznačnosti, 118
 - ortonormální, 81
- množiny měřitelné, 13
- nejbližší prvek, 79

- nerovnost
 - Besselova, 85
 - Cauchyova, 75
 - Hölderova, 77
 - Schwarzova, 73
- nezáporný
 - lineární operátor, 58
- norma, 73
- nosič funkce, 35
- omezenost
 - bodová, 16
 - stejnoměrná, 16
- operátor, 16
- ortogonalita, 26, 73
- ortogonalizační
 - proces, 81
- ortogonální
 - projekce, 81
 - prvky, 79
 - systém, 26
- ortonormální
 - báze, 81, 82
 - systém, 81
- podprostor
 - hustý, 59
- pojmem funkce, 108
- polynomy
 - Čebyševovy, 90
 - Legendreovy, 89
- princip
 - lokalizace, 59, 62, 112
 - stejněměrné omezenosti, 16
- projekce, 79
 - metrická, 79
 - ortogonální, 81
- prostor
 - duální, 16
 - Hilbertův, 73, 74
 - normovaný lineární, 73
 - separabilní, 82
 - unitární, 73
 - úplný, 15, 77
- prvky ortogonální, 79
- první Fourierova řada, 110
- Riemannovo lemma, 115
- Riemannův
 - lokalizační princip, 62
- Rieszova věta
 - o reprezentaci, 82
- rovnoběžníkové pravidlo, 79
- rozptyl, 22
- řada
 - Fourierova, 70
 - mocninná, 70
 - sčítatelná, 117
 - teleskopická, 52
 - trigonometrická, 27, 28
- separace proměnných, 40
- skalární součin, 25, 73
- skoro všude, 13
- součet řady, 10
- součin
 - skalární, 73
- součin skalární, 25
- spojitost, 39, 58
 - stejnoměrná, 69
- stejněměrná konvergence
 - a záměna limit, 7
- střední hodnota, 22
- sudá část, 103
- systém
 - ortonormální, 81
- sčítací metoda
 - Cesàrova, 114
 - Hölderova, 116
- teorie množin, 113
- totální variace, 18
- transformace
 - Fourierova, 91
- trigonometrická
 - řada, 28, 109
- trigonometrický
 - polynom, 28
- třídy funkcí, 77
- variace, 18
 - konečná, 18
 - neurčitá, 19
- váha, 89
- věta
 - Abelova, 117
 - Banach-Steinhausova, 16, 119
 - Korovkinova, 23, 117
 - o třech funkcích, 23
 - Riesz-Fischerova, 119
 - Rieszova, 82
 - Weierstrassova, 23
- wavelety, 120

Jmenný rejstřík

Abel, 3, 7, 8, 109
d'Alembert, 3, 108
Ampère, 70, 111
Ash, 121
Askey, 121

Bachman, 121
Banach, 16, 121
Bari, 121
Bauer, 121
Beckenstein, 121
Berg, 121
Bernoulli D., 2, 39, 108
Bernstein, 20, 118
Bernštejn, 121
Bečvář, 121
Bohman, 121
du Bois-Reymond, 38, 55, 112
Bolzano, 111
Borel, 121
Bottazzini, 121
Bressoud, 121
Bunjakovskij, 75
Burkhard, 109
Burkhardt, 121
Burrus, 122
Bwernoulli D., 115
Bézout, 107

Cantor, 64, 113, 122
Carleson, 56, 58, 115
Cauchy, 6, 59, 75, 109, 122
Cesàro, 9, 114, 122
Cheney, 123
Chernoff, 123
Clairaut, 3, 107, 110
Cooley, 122
Coppel, 122

Černý, 122

Dauben, 122
Dedekind, 112
Denjoy, 33, 118
Dirichlet, 59, 65, 108, 111, 122

Edwards, 122
Euler, 1, 10, 108, 122

Fatou, 118
Feinerman, 122
Fejér, 9, 114, 122
Fourier, 1, 39, 107, 122
Frobenius, 117
Fuchs, 121

García, 124
Gauss, 111
Goffman, 122
Goldbach, 2
Gregory, 109

Haimo, 121
Hardy, 122
Hawkins, 122
Heideman, 122
Heine, 113, 123
Hilbert, 73
Hölder, 115, 123
Hunt, 59, 115

Jackson, 123
Jarník, 123
Johnson, 122
Jones, 123
Jordan, 112

Kadlec, 123
Kahane, 115, 123
Katz, 123
Katznelson, 115
Kline, 123
Kolmogorov, 32, 56, 115
Körner, 123
Korovkin, 23, 123
Kroll, 123
Kufner, 123

Lacroix, 39, 110, 111
Lagrange, 3, 39, 110
Laplace, 39, 110
Lasser, 123
Laugwitz, 124
Lebesgue, 12, 16, 112, 114, 123, 124
Legendre, 107
Leibniz, 10, 109

Lemarié-Rieusset, 123
Lerch, 119, 124
Lipschitz, 64, 113
Lomelí, 124
Luzin, 33, 118, 124

Marcinkiewicz, 115
Menšov, 118
Monge, 39, 110
Moore, 7

Narici, 121
Natanson, 124
Neumann, 124
von Neumann, 73, 119
Newman, 122
Newton, 109

Osgood, 7

Paplauskas, 124
Pedrik, 122
Picard, 41, 124
Pinkus, 124
Poisson, 59, 110, 111

Riemann, 12, 112, 124
Rudin, 124
Runge, 124

Schwarz, 75, 114
Siegmond-Schultze, 124
Steinhaus, 16, 121
Stromberg, 124
Struik, 124

Štěpánek, 124

Taylor, 124
Tukey, 122

de la Vallée-Pousin, 38, 118
Veselý, 124, 125

Weierstrass, 6, 69, 112, 125
Weil, 3
Weiss, 125
Wiener, 125

Young, 118

Zygmund, 125