Technická univerzita v Liberci

FAKULTA PEDAGOGICKÁ

Katedra: Aplikované informatiky

Studijní program: 3. stupeň

Kombinace: matematika – informatika

VÝUKOVÉ PROGRAMY Z NUMERICKÉ MATEMATIKY

EDUCATION SOFTWARE OF NUMERICAL MATHEMATIC

UNTERRICHTSPROGRAMME IN DER NUMERISCHEN MATHEMATIK

Diplomová práce: DP/KAI/5/7790/005

Autor:
Martin PECKA

Podpis:

Adresa:
Zahradní 1738
470 01, Česká Lípa

Vedoucí práce: **RNDr. Petr Kolář**

Konzultant: **RNDr. Martina Šimůnková, Ph. D.**

Počet

stran	slov	obrázků	tabulek	příloh
60	10 343	11	0	5

V Liberci dne: 16. 5. 2005

Prohlášení

Byl jsem seznámen s tím, že se na mou diplomovou práci plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. o právu autorském, zejména § 60 – školní dílo.

Beru na vědomí, že Technická univerzita v Liberci (TUL) nezasahuje do mých autorských práv užitím mé diplomové práce pro vnitřní potřebu TUL.

Užiji-li diplomovou práci nebo poskytnu-li licenci k jejímu využití, jsem si vědom povinnosti informovat o této skutečnosti TUL; v tomto případě má TUL právo ode mne požadovat úhradu nákladů, které vynaložila na vytvoření díla, až do jejich skutečné výše.

Diplomovou práci jsem vypracoval samostatně s použitím uvedené literatury a na základě konzultací s vedoucím diplomové práce a konzultantem.

Autor:

Martin PECKA

Adresa:

Zahradní 1738

470 01, Česká Lípa

Podpis:

Datum:

Poděkování

Chtěl bych tímto poděkovat za pomoc a vstřícný přístup vedoucímu diplomové práce RNDr. Petru Kolářovi a konzultantce RNDr. Martině Šimůnkové, Ph. D. Dále bych chtěl poděkovat mé rodině, která mě během mých studii podporovala.

Obsah

ANOTACE

Diplomová práce se zabývá vytvořením výukových materiálů z numerické matematiky pro řešení nelineárních rovnic a soustav lineárních algebraických rovnic.

Tyto materiály by měly v budoucnu sloužit jako pomocný materiál k výuce těchto metod na vysokých a středních školách.

Výukový materiál byl vytvořen v tabulkovém procesoru MS Excel. Uživatel se při práci s ním může seznámit jak s výukovými texty k jednotlivým numerickým metodám, tak i s názornými příklady výpočtu jednotlivých metod. Zmíněné výukové texty jsou také součástí mé diplomové práce.

Dále je součástí práce menší průzkum, zda a v jaké míře jsou numerické metody vyučovány na naších středních školách a jsou-li vůbec středoškolští učitelé matematiky či informatiky s danými metodami obeznámeni.

SUMMARY

My thesis deals with creation of teaching materials regarding numeric mathematics for solving of nonlinear equations and sets of linear algebraic equations.

These materials should serve as an auxiliary material for teaching of the methods mentioned above at high schools and universities.

The teaching materials have been created with spreadsheet program MS Excel. User can familiarize him- or herself both with tutorials regarding particular numeric methods and with calculation illustrations of the particular methods. The mentioned tutorials are a part of my thesis as well.

Further, there is a small survey being a part of my thesis indicating whether the numeric methods are taught, and to what extent, at our high schools and whether high school teachers of mathematics and computer science are familiarized with the given methods.

ANNOTATION

Meine Diplomarbeit beschäftigt sich mit der Bildung der Unterrichts-materialien in der numerischen Mathematik für die Lösung der unlinear Gleichungen und der Systeme der linearen algebraischen Gleichungen.

Diese Materialien sollten in Zukunft als ein Hilfsmittel für Unterricht dieser Methoden an den Hoch- und Mittelschulen dienen.

Dieses Unterrichtsmaterial wurde im Tabellenprozessor MS Excel gebildet. Der Verwender kann bei der Arbeit mit ihm sowohl die Unterrichtstexte zu den einzelnen numerischen Methoden, als auch Anschauungsbeispiele der Ausrechnung der einzelnen Methoden kennen lernen. Die erwähnten Unterrichtstexte sind auch ein teil meiner Diplomarbeit.

Weiter ist ein Teil meiner Arbeit auch eine kleinere Untersuchung, ob und in welchem Maße die numerischen Methoden an unseren Mittelschulen unterrichtet werden und ob die Mathematik- und Informatikmittelschullehrer mit diesen Methoden bekannt gemacht sind.

1. Úvod

Cílem mé diplomové práce nazvané ***Výukové programy z numerické matematiky*** je vytvoření názorného studijního materiálu pro výuku numerické matematiky. Zaměřil jsem se především na nejčastěji vyučované celky, a to na teorii matic a metody řešení nelineárních algebraických rovnic a soustav lineárních algebraických rovnic. Při tvorbě výukového materiálu jsem postupoval dvěma poněkud odlišnými směry. Jednak jsem vytvořil psaný studijní text a jednak interaktivní výukový program. Obě části spolu souvisí, je možné je při výuce používat společně, ale lze je také použít nezávisle na sobě.

V posledních letech došlo k jistému nárůstu množství literatury věnované numerické matematice, přesto se ale domnívám, že počet děl a rozšíření této literatury je stále nedostatečné. Mnoho z nově vzniklých děl jsou skripta, která byla vydána pouze pro potřeby jednotlivých univerzit a jejich rozšíření v celorepublikovém měřítku je minimální. Existují i dobrá a obsáhlá díla jako [1], [3], [13], která vznikla již před mnoha lety, ale tato díla i přes svou nespornou kvalitu nemohou vzhledem k rozsáhlosti nejrůznějších metod numerické matematiky obsáhnout vše. Ve většině literatury věnované numerické matematice, která byla vydaná na našem území, navíc chybí příklady dostatečně vysvětlující danou metodu. Pokud je mi známo, tak žádná sbírka příkladu na toto téma ani neexistuje, proto bylo druhou částí této práce vytvoření programů, které by uživateli mohly předvést dostatečné množství příkladů i s názorným výkladem metody. Tyto programy jsem vytvořil v tabulkovém procesoru MS Excel. Každá metoda je nejdřív názorně vyložena a na teoretický výklad ihned navazují příklady, u kterých má uživatel možnost sledovat řešení úlohy v jednotlivých krocích od zadání úlohy až ke konečnému výsledku.

Kromě vytvoření studijního textu a výukového programu jsem se ve své práci v krátkosti věnoval historickému vývoji týkajícímu se rozvoje numerické matematiky. Jedna z úvodních kapitol je také věnována problémům, které vznikají při řešení úloh pomocí numerické matematiky, například zdrojům chyb a jejich šíření při výpočtu.

V závěru práce popisuji vytvořené výukové programy a jejich možné použití v praxi. Jako součást své diplomové práce jsem provedl průzkum mezi učiteli středních škol. Cílem tohoto průzkumu bylo zjistit, zda se numerická matematika učí na našich středních školách, pokud ano, v jakém rozsahu, a zda jsou sami učitelé středních škol s některými metodami numerické matematiky obeznámeni. Prozkoumal jsem i sylaby přednášek pro učitelské studium na různých vysokých školách a zjišťoval jsem, v jakém rozsahu ta která vysoká škola výuku numerické matematiky zařazuje.

Věnuji se výuce numerické matematiky z různých úhlů pohledu, přičemž těžištěm mé diplomové práce je interaktivní výukový program a s ním související studijní text.

2. Historie

Teorie matic a determinantů patří mezi velmi stará matematická odvětví. Její počátky lze nalézt již v 2. století př.n.l. v čínském textu *„Devět kapitol o matematickém umění“* V tomto díle jsou uvedeny první známé příklady maticových metod. Některé stopy sahají až do 4. století př.n.l. V dalších staletích jako by se na toto téma zapomnělo a muselo uběhnout velmi mnoho času, než se matematikové k tomuto tématu znovu vrátili.

Řada standardních výsledků elementární teorie matic vznikla dlouho před tím, než se matice staly předmětem matematického výzkumu. **Cardan** ve svém díle *"Ars Magna" z* roku 1595 uvedl pravidlo pro řešení soustavy dvou lineárních rovnic, Cardanovo pravidlo pro řešení soustav o dvou lineárních rovnicích odpovídá Cramerovu pravidlu, ale Cardan neučinil poslední krok a k definici determinantu nedospěl. Matematik **de Witt** ve své práci *"Elements of curves"*, publikované jako část komentářů k latinské verzi **Descartesovy** *"Géométrie" z* roku 1660, ukázal, jak transformace os mění tvar dané rovnice na kanonický tvar. Šlo v podstatě o diagonalizaci symetrické matice, ale de Witt v těchto termínech neuvažoval.

Myšlenka determinantu se objevila téměř ve stejné době jak v Japonsku, tak v Evropě. V roce 1683 **Seki** napsal práci *"Metody řešení nepodobných problémů"*, která obsahuje maticové metody zapsané jako tabulky přesně stejným způsobem, jako tomu bylo u čínských matematiků. Aniž **Seki** použil pojmu determinant, konstruoval determinanty a vypracoval obecné metody počítání příkladů na jejich základě a používal je na řešení rovnic. V Evropě se determinant poprvé objevil také v roce 1683. V tomto roce **Gottfried Wilhelm von Leibniz** popsal v dopise adresovaném **de l'Hopitalovi** podmínky řešitelnosti soustavy rovnic způsobem, který odpovídá podmínce, že matice koeficientů soustavy lineárních rovnic má determinant rovný nule.

Leibniz pro určité kombinační součty členů determinantu použil termín *"resultant"*. Pro tyto resultanty dokázal různá pravidla, z nichž jedno odpovídá Cramerovu pravidlu. Leibniz také věděl, že lze provést rozvoj determinantu podle určitého sloupce. Tento rozvoj se dnes nazývá Laplaceův rozvoj. Leibniz studoval nejen soustavy rovnic, ale také koeficienty systémů kvadratických forem, které přirozeným způsobem vedou k teorii matic.

Ve 30. letech 18. století **Colin Maclaurin** napsal své *"Pojednání o algebře"*, které bylo publikováno až v roce 1748, dva roky po jeho smrti. Tato práce obsahuje první publikované výsledky o determinantech, především Cramerovo pravidlo pro čtvercové matice řádu 2 a 3. **Cramer** ve své práci *"Úvod do analýzy algebraických křivek"* z roku 1750 publikoval obecné pravidlo pro matice typu (n,n), ve své práci studoval rovnici křivky na ploše procházející předem zadanými body. Cramerovo pravidlo se objevilo bez důkazu v dodatku jeho práce.

V roce 1764 **Bezout** popsal metody výpočtu determinantů, které upřesnil v roce 1771 **Vandermonde.** V roce 1771 **Pierre Simon Laplace** tvrdil, že metody popsané Cramerem a Bezoutem jsou nepraktické. Ve své práci o drahách vnitřních planet se zabýval řešením soustav lineárních rovnic, které počítal s použitím determinantů.

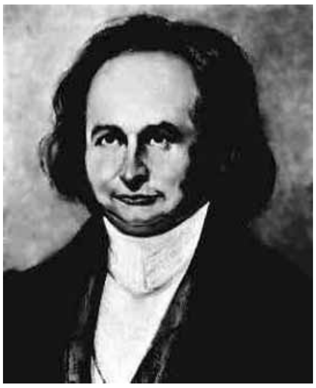
Termín **"determinant"** poprvé použil **Johan Carl Friedrich Gauss** ve své práci z roku 1801 *"Disquisitiones arithmeticae"* o kvadratických formách. Tento termín použil proto, že determinant určuje (angl. *"determine"*) vlastnosti kvadratické formy. Koncept ale ještě neodpovídal dnešní definici determinantu. Ve stejné práci Gauss uspořádal koeficienty kvadratické formy do pravoúhlých polí. Popsal také maticové násobení a inverzi matice, ale nedosáhl ještě konceptu maticové algebry.

V roce 1812 **Augustin Louis Cauchy** použil determinant v dnešním smyslu. Cauchyho práce je nejúplnější první prací o determinantech. Cauchy shrnul všechny dřívější výsledky a přidal k nim své vlastní. V této práci je také dokázána věta o součinu determinantů. Je třeba poznamenat, že **Cauchy** své výsledky nezobecnil a determinanty a maticemi se zabýval jen v kontextu své práce.

Současníkem těchto dvou významných matematiků byl i **Carl Gustav Jakob Jacobi**. Celkový postoj tohoto vědce k matematice vystihuje jeho myšlenka z dopisu J. Fourierovi: *„Jediným cílem vědy je čest lidského ducha a z tohoto pohledu mají problémy teorie čísel stejnou cenu jako otázky systému světa.“* V r. 1825 představil článek týkající se iterační metody na Berlínské univerzitě, kde však nepovažovali jeho výsledky za hodnotné a odmítli mu je publikovat. O několik desítek let později, v době, kdy již měl za sebou řadu dalších publikací, se mu však podařilo, aby byl tento článek publikován, a tím byl dán základ mnoha iteračním metodám. V publikaci *O tvorbě a vlastnostech determinantů* (r. 1841) uvedl funkcionální determinant dnes nazývaný ***jacobián***, zavedl dvojité indexy pro práci s prvky matic a ukázal význam determinantů. Jacobi definoval determinant algoritmickým způsobem a jeho výsledky bylo možno aplikovat jak na čísla tak na funkce.

V roce 1841 publikoval **Arthur Cayley** svůj první příspěvek k teorii determinantů. Ve své práci použil dvě vertikální čáry na každé straně pole čísel označující determinant. Tento symbol se používá standardně dodnes. V roce 1850 použil **Sylvester** jako první termín "matice". Sylvester matici definoval jako zkrácené uspořádání výrazů a prohlásil, že může vést k různým determinantům. Po návratu ze Spojených států amerických do Anglie v roce 1851 se Sylvester stal právníkem a setkal se svým kolegou Cayleym. Cayley brzy pochopil význam konceptu matic a v roce 1853 publikoval článek o inverzních maticích.

V roce 1858 **Cayley** publikoval práci *"Memoár o teorii matic",* která obsahuje první abstraktní definici matice. Cayley popsal maticovou algebru a definoval sčítání matic, násobení matic, násobení matice skalárem a inverzní matici. Popsal také přesnou konstrukci inverzní matice pomocí jejího determinantu.



Obr. 1: Carl Gustav Jacobi

Obr. 2: Friedrich Gauss

Obr. 3: Artur Cayley

V roce 1878 **Ferdinand Georg Frobenius** napsal důležitou práci o maticích *"O lineárních substitucích a bilineárních formách"*. Frobenius zřejmě Cayleyho práci nestudoval a ve svém článku, který se zabývá koeficienty forem, termín matice nepoužívá. Frobenius dokázal důležité výsledky o kanonických maticích jako reprezentacích ekvivalence tříd matic.

Axiomatická definice determinantu, kterou **Karl Theodor Wilhelm Weierstrass** používal na svých přednáškách, byla publikována v jeho práci *"O teorii determinantů"* vydané v roce 1903 až po jeho smrti. V roce 1903 byly publikovány Kroneckerovy přednášky o determinantech, rovněž po autorově smrti. Tyto dvě práce položily solidní základy teorie determinantů. Teorie matic byla přijata o něco později. V roce 1907 publikoval **Bocher** důležitou práci *"Úvod do vyšší algebry"*. Ve 30. letech 20. století napsali důležité práce **Turnbull** a **Alexander Aitken**. V roce 1955 publikoval **Mirsky** knihu *"Úvod do lineární algebry"*, která zpřístupnila teorii matic všem studentům matematiky. O historii novějších metod se dostupná literatura nezmiňuje.

Zpřístupněním teorie matic a determinantů byl dán dobrý základ pro rozvoj numerických metod, kterými se zabývá tato diplomová práce. Největšího rozvoje však numerické metody dosáhly až v důsledku rychlého rozvoje výpočetní techniky. S její pomocí můžeme řešit některé problémy, o kterých by se nám před sto lety mohlo jen zdát. Vezměme v úvahu například fakt, že ještě před vznikem počítačů dokázal Angličan **Shanks** spočítat číslo π na 707 míst, což byl na svou dobu úctyhodný výkon, při kterém ale strávil mnoho měsíců výpočtů. V roce 1949 při použití počítače ENIAC (Electronic Numerical Integrator and Computer) bylo číslo π po 70 hodinách výpočtů vypočítáno jen na 2000 míst a přitom dnešní počítače, jež se vyskytují běžně v domácnostech dokážou vypočítat číslo π na 1 milión míst za méně než jednu minutu. Více o historii čísla π viz [12].

Numerická matematika nachází uplatnění v mnoha oborech lidské činnosti, velké uplatnění má v přírodních a technických vědách, ale proniká třeba i do takových odvětví jako je psychologie. Bez výpočetní techniky a numerických metod by nebylo možné předvídat počasí v takové míře jako je nyní, avšak i v nynější době je na předpovědi počasí potřeba nejmodernějších superpočítačů.

3. Základy lineární algebry

V této kapitole se budu věnovat základním pojmům lineární algebry. Konkrétně vektorům, maticím a operacím s nimi.

3.1. Vektory

Kapitolu věnovanou vektorům začnu definicí tohoto pojmu, dále se stručně zmíním o základních operacích s vektory a o jejich vlastnostech.

Definice:

Nechť n je pevně zvolené přirozené číslo. Pak ***n*-členným komplexním vektorem** $a = (a_1,a_2,...,a_n)$ rozumíme uspořádanou n-tici komplexních čísel $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$. Všechny tyto n-členné vektory (tj. množina všech uspořádaných n-tic komplexních čísel) tvoří tzv. ***n*-rozměrný vektorový prostor V_n** (nad oborem komplexních čísel).

Vektory $a = (a_1,a_2,...,a_n)$, $b = (b_1,b_2,...,b_n)$ se sobě rovnají právě tehdy, když $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, ..., $a_n = b_n$.

Součtem vektorů $a = (a_1,a_2,...,a_n)$, $b = (b_1,b_2,...,b_n)$ nazýváme vektor $a+b = (a_1+b_1,a_2+b_1, ...,a_n+b_n)$.

Součinem vektoru $a = (a_1,a_2,...,a_n)$ s číslem λ nazýváme vektor $\lambda a = (\lambda a_1,\lambda a_2,...,\lambda a_n)$.

Nechť a, b jsou vektory a λ je reálné číslo pak platí následující pravidla:

1. $a+b = b+a$ – komutativnost

2. $(a+b)+c = a+(b+c)$ – asociativnost

3. $\lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b$ – distributivnost

4. $a+0 = a$ – existence nulového prvku (nulový vektor) 0 = (0,0,….,0)

5. $a+(-a) = 0$ – existence symetrického prvku

Říkáme, že vektory $a_1, a_2, ..., a_n$ jsou **lineárně závislé**, existují-li taková komplexní čísla $c_1, c_2, ..., c_k$, z nichž aspoň jedno je různé od nuly, že platí $c_1a_1+c_2a_2+....+c_ka_k = 0$. Nejsou-li vektory lineárně závislé, říkáme, že jsou **lineárně nezávislé**.

Říkáme, že soustava $\{a_1,...,a_k\}$ vektorů má **hodnost *h***, jestliže mezi vektory $a_1, ..., a_k$ existuje h lineárně nezávislých vektorů, ale každých $h+1$ vektorů z $a_1, ..., a_k$ jsou již vektory lineárně závislé (h pak je maximální počet lineárně nezávislých vektorů dané soustavy). Každá soustava n-členných vektorů má hodnost $h \leq n$.

Hodnost soustavy n-členných vektorů se nezmění:

1) Zaměníme-li pořadí vektorů v soustavě.

2) Vynásobíme-li jeden vektor soustavy nenulovým číslem.

3) Přičteme-li k jednomu vektoru lineární kombinaci ostatních vektorů.

4) Vynecháme-li vektor, který je lineární kombinací ostatních vektorů soustavy.

3.2. Matice

Maticí *A* typu *(m,n)* nazýváme schéma mn reálných, resp. komplexních čísel $a_{11}, a_{12}, ..., a_{mn}$ sestavených v m řádcích a n sloupcích:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Je-li $m = n$, pak A se nazývá **čtvercová matice *m*-tého stupně**. Prvky $a_{11}, a_{22}, a_{33}....$ tvoří tzv. **hlavní diagonálu** a prvky $a_{1n}, a_{2\,n-1}, a_{3\,n-2}....$tzv. **vedlejší diagonálu** matice A.

3.2.1. Operace s maticemi

3.2.1.1. Sčítání dvou matic *A + B = C*

Součtem dvou matic *A*,*B* stejného typu *(m,n)* nazýváme matici *C* typu *(m,n)*, jejíž každý prvek c_{ij} je roven součtu stejnolehlých prvků a_{ij}, b_{ij} matic *A*,*B*.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Pro sčítání matic platí:

a) *Komutativní zákon:* $A + B = B + A$.

b) *Asociativní zákon:* $(A + B) + C = A + (B + C)$.

3.2.1.2. Odčítání dvou matic *A – B = C*

Rozdílem dvou matic *A*,*B* stejného typu *(m,n)* nazýváme matici *C* typu *(m,n)*, jejíž každý prvek c_{ij} je roven rozdílu stejnolehlých prvků a_{ij}, b_{ij} matic *A,B*.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \cdots & a_{1n}-b_{1n} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \cdots & a_{2n}-b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & \cdots & a_{mn}-b_{mn} \end{pmatrix}$$

3.2.1.3. Násobení matice skalárem *λA = B*

Matici λA, kde λ je reálné číslo, nazýváme reálným λ-násobkem matice *A* a rozumíme jím matici *B* stejného typu, jejíž každý prvek b_{ij} je roven λ-násobku stejnolehlého prvku a_{ij} matice *A* ($b_{ij} = \lambda a_{ij}$).

$$\lambda \bullet \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

Pro násobení matic skalárem platí:

a) *Distributivní zákon pro násobení matice skalárem vzhledem ke sčítání skalárů:* $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.

b) *Distributivní zákon pro násobení matice skalárem vzhledem ke sčítání matic:* $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$.

c) *Asociativní zákon pro násobení matice skalárem vzhledem k násobení skalárů:* $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A=\alpha\beta A$.

3.2.1.4. Násobení dvou matic *A•B=C*

Mějme matice A typu *(m,n)* a matici B typu *(n,p)*, přičemž matice A má přesně tolik sloupců jako má matice B řádků. Součinem těchto matic nazveme matici C typu *(m,p)*, jejíž každý prvek c_{ij} je skalární součin i-tého řádku matice A a j-tého sloupce matice B ($c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$).

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{2} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{kn} \\ \sum_{k=1}^{n} a_{2k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{2k}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{2k}b_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{mk}b_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{mk}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{mk}b_{kn} \end{pmatrix}$$

Pro násobení matic platí:

a) *Násobení matic není komutativní.*

b) *Asociativní zákon pro násobení matic:* $(AB)C=A(BC)=ABC$. *(Matice A je typu (m,n), matice B typu (n,p) a matice C typu (p,q).)*

c) *Distributivní zákon vzhledem ke sčítání matic:* $(A+B)C=AC+BC$.

3.2.1.5. Násobení matice a vektoru *Ax*

Násobení matice a vektoru se provádí stejně jako násobení dvou matic, neboť sloupcový vektor se dá považovat za matici typu *(n,1)*, výsledkem je opět sloupcový vektor.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix};.....y_i=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k$$

Více o operacích s maticemi se můžete dočíst např..v [12] str.184 - 189

3.2.2. Hodnost matic

Hodnost matice A – značíme $h(A)$ je maximální počet lineárně nezávislých řádků, resp. sloupců matice A.

Hodnost matice A se nezmění:

1. Vynásobíme-li jeden řádek (sloupec) nenulovým číslem.

2. Zaměníme-li pořadí řádků (sloupců) v matici.

3. Přičteme-li k jednomu řádku lineární kombinaci ostatních řádků.

4. Vynecháme-li řádek, který je lineární kombinací ostatních řádků matice.

5. Přidáme-li k matici A řádek, který je lineární kombinací ostatních řádků matice.

Pro hodnost h matice A typu (m,n) platí: $h \leq min(m,n)$.

Nechť A je čtvercová matice typu (m,m):

a) Je-li $h(A) = m$, říkáme, že matice A je **regulární.**

b) Je-li $h(A) < m$, říkáme, že matice A je **singulární.**

3.2.3. Výpočet determinantu matice

Determinantem *n*-tého stupně matice *A* nazýváme číslo $D = \sum (-1)^r a_{1k_1} a_{2k_2} .....a_{nk_n}$, které získáme jako součet všech permutací, viz [10], str. 48, $(k_1,k_2,k_3,...,k_n)$ čísel 1,2,…n a kde r udává počet inverzí v permutaci $(k_1,k_2,k_3,...,k_n)$.

Determinant vypočítáme podle následujícího vzorce:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^r a_{1k_1} a_{2k_2} ....a_{nk_n} \ .$$

Pro determinant stupně 2. a 3. lze použít **Sarrusovo pravidlo**:

a) Determinant matice typu *(2,2)*

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

b) Determinant matice typu *(3,3)*

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Determinant se rovná nule, je-li jeden z jeho řádků lineární kombinací ostatních řádků.

Rozvoj podle řádku (obdobně možno i podle sloupce) slouží k výpočtu determinantu matice řádu n pomocí výpočtu n determinantů matic řádu $n-1$. K tomu se zavádí tzv. **subdeterminant matice *A*** příslušný prvku a_{ij}, který vyjadřuje determinant matice vzniklé z matice A odstraněním i-tého řádku a j-tého sloupce.

Vlastnosti determinantů:

1. Hodnota determinantu se nezmění:

a) Zaměníme-li v něm řádky za sloupce (tzn., že determinant matice A se rovná determinantu transponované matice A^T).

b) Přičteme-li k jednomu řádku lineární kombinaci ostatních řádků.

2. Determinant matice se rovná nule:

a) Má-li čtvercová matice dva řádky stejné.

b) Je-li jeden řádek matice lineární kombinací ostatních řádků.

3. Zaměníme-li dva řádky, nebo dva sloupce, pak se determinant vzniklé matice rovná - *detA*

4. Násobíme-li jeden řádek matice A reálným číslem α, potom je determinant vzniklé matice roven $\alpha.detA$.

5. Má-li matice pod nebo nad hlavní diagonálou samé 0, pak se determinant rovná svému hlavnímu členu.

3.2.4. Speciální typy matic

Nulovou maticí rozumíme takovou matici, ve které jsou všechny její prvky rovny nule ($a_{ij} = 0$).

Jednotkovou maticí nazýváme čtvercovou matici, jejíž všechny prvky na hlavní diagonále jsou rovny 1 a všechny ostatní prvky jsou rovny 0. Jednotková matice se obvykle značí ***E***.

Transponovanou maticí k matici $A = (a_{ij})$ typu (m,n) rozumíme matici $A^T = (b_{ij})$ typu (n,m), pro jejíž prvky platí $b_{ij} = a_{ji}$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \longrightarrow A^T = \begin{pmatrix} b_{11} = a_{11} & b_{12} = a_{21} & \cdots & b_{1n} = a_{m1} \\ b_{21} = a_{12} & b_{22} = a_{22} & \cdots & b_{2n} = a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} = a_{1n} & b_{m2} = a_{2n} & \cdots & b_{mn} = a_{mn} \end{pmatrix}$$

Inverzní maticí k čtvercové matici A n-tého stupně nazýváme čtvercovou matici A^{-1} n-tého stupně, pro niž platí $AA^{-1} = A^{-1}A = E$, kde E je jednotková matice. K matici A existuje inverzní matice A^{-1} tehdy a jen tehdy, je-li A regulární.

Matice A je **symetrická** platí-li $A^T = A$, tj. $a_{ij} = a_{ji}$

Čtvercovou matici A typu (n,n) nazveme **diagonálně dominantní**, je-li splněna alespoň jedna ze soustav nerovností:

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1; j\neq i}^{n} |a_{ij}| \ldots i = 1,2,\ldots.n$$

$$|a_{jj}| > \sum_{i=1; i\neq j}^{n} |a_{ij}| \ldots j = 1,2,\ldots.n$$

Horní (pravou), resp. **dolní** (levou) **trojúhelníkovou maticí** nazýváme čtvercovou matici A, právě když pod (resp. nad) všemi prvky a_{ii} jsou samé nuly.

Matici tvořenou jedním řádkem, tj matici typu $(1,n)$ nazýváme **řádkovou maticí**, nebo n-rozměrným vektorem.

Matici tvořenou jedním sloupcem tj matici typu $(m,1)$ nazýváme **sloupcovou matici,** nebo m-rozměrným transponovaným vektorem.

3.2.5. Absolutní hodnota matice

Jsou-li A a B matice stejného typu, znamená nerovnost $A \leq B$, že platí $a_{ij} \leq b_{ij}$, pro všechna i,j.

Absolutní hodnotou matice A budeme nazývat matici $|A| = (|a_{ij}|)$, kde $|a_{ij}|$ jsou absolutní hodnotu prvků matice A.

Jsou-li A a B matice, pro které má smysl operace sčítání a násobení a α je číslo, pak platí:

1. $|A+B| \leq |A| + |B|$
2. $|AB| \leq |A| \cdot |B|$
3. $|\alpha B| \leq |\alpha||A|$

3.3. Normy matic a vektorů

3.3.1. Normy matic

Čtvercové matici A přiradíme číslo $||A||$, které bude v jistém smyslu mírou její velikosti. Tomuto číslu říkáme **norma matice *A***. Existuje nekonečně možností jak tuto normu matice definovat.

Normou matice *A* nazýváme reálné číslo $||A||$, které splňuje následující podmínky:

1) $\|A\| \geq 0$, kde $||A|| = 0$, právě když *A* je nulová matice

2) $\|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\|$ α je libovolné číslo

3) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ trojúhelníková nerovnost

4) $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ Schwarzova nerovnost

A,B jsou matice, pro které mají operace sčítání a násobení smysl

Je-li *m* přirozené číslo, pak pro čtvercovou matici *A* platí nerovnost:

$$\|A^m\| \leq \|A\|^m$$

Některé nejpoužívanější normy jsou:

Řádková norma $\|A\|_R = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$

Sloupcová norma $\|A\|_S = \max\limits_{1 \leq j \leq n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$

Euklidovská norma $\|A\|_E = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2}$

3.3.2. Normy vektorů

Vektor *x* chápeme jako matici typu *(n,1)*, normy pro něj vypadají tedy takto:

Řádková norma $\|x\|_R = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

Sloupcová norma $\|x\|_S = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$

Euklidovská norma $\|x\|_E = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^2}$

4. Základy teorie chyb

Numerické odpovědi na problémy jsou obvykle zatíženy chybami, které vznikají již v matematické formulaci problému a dále pak těmi, které jsou způsobeny při hledání řešení numerickou cestou.

4.1. Nejčastější zdroje chyb

1) Chyby metody. Někdy není možné řešit úlohu v přesné formulaci. Nehledáme řešení problému, který byl původně formulován, ale řešení nějaké aproximace z důvodu obtížnosti nebo nemožnosti řešení formulovaného problému. Výsledek aproximace je však blízký původnímu řešení.

2) Chyby zbytkové. Vznikají nahrazení procesu nekonečného charakteru procesem konečným. V praxi se pak zastavujeme u jistého členu, který považujeme za přibližné řešení. Toto přerušení způsobí chybu. Např. při součtu nekonečné řady je výpočet ukončen dosažením předem stanovené přesnosti.

3) Chyby vstupních údajů. Tyto chyby jsou způsobeny nepřesností meřících přístrojů a tím, že se v matematických formulích vyskytují číselné parametry, jejichž hodnotu lze určit jen přibližně. Např. fyzikální konstanty.

4) Chyby zaokrouhlovací. Ne vždy lze provést aritmetické výpočty s úplnou přesností. Většina čísel má nekonečné dekadické vyjádření, které musí být zaokrouhleno. Ale i v případě, kdy lze vstupní údaje úlohy vyjádřit přesně konečným dekadickým vyjádřením, můžeme dělením získat čísla, která je nutno zaokrouhlit, a násobení může dávat více desetinných míst, než lze rozumně podržet.

4.2. Absolutní a relativní chyba

V úvodu kapitoly jsem již vyjmenoval možné zdroje chyb, jež způsobují, že při numerickém výpočtu pracujeme stále s čísly, která jsou aproximacemi přesných čísel. Proto je účelné zavést vhodná označení, aby bylo možné chování chyb sledovat.

Aproximací čísla A se nazývá číslo a, které se od čísla A liší dostatečně málo, aby mohlo při výpočtech nahradit číslo A (místo termínu aproximace čísla A se někdy užívá také termínu přiblížení čísla A nebo přibližná hodnota čísla A). Víme-li, že $a < A$, říkáme, že a je aproximací čísla A zdola, je-li $a > A$ nazýváme a aproximací shora.

Rozdíl mezi přesnou hodnotou A a aproximací a se nazývá **chyba** a zapisujeme ji Δa, tzn., že platí:

$$A = a + \Delta a.$$

Chybu Δa dělíme také na:

a) kladnou $A > a$

b) zápornou $A < a$

Většinou ale nevíme, zda je daná chyba kladná či záporná, proto zavádíme pojem **absolutní chyba** aproximovaného čísla $\Delta = |\Delta a|$.

Absolutní chybou aproximace a nazýváme rozdíl mezi přesným číslem A a aproximací a, tj.

$$\Delta = |A - a|.$$

K výpočtu absolutní chyby podle vzorce je třeba znát číslo A. Toto číslo však většinou neznámé, a proto je vhodné zavést její **horní odhad** (dále jen odhad).

Odhadem absolutní chyby nazveme číslo $\varepsilon(a) \geq 0,$ pro které platí:

$$|A - a| \leq \varepsilon(a).$$

Relativní chybou δ aproximace a nazýváme hodnotu podílu absolutní chyby Δ a absolutní hodnoty příslušného přesného čísla A:

$$\delta = \frac{\Delta}{|A|}.$$

Podobně jako u absolutní chyby zavedeme pojem **odhad relativní chyby**.

Odhadem relativní chyby přibližného čísla a se nazývá libovolné číslo δ_a, které není menší než relativní chyba čísla a, tedy:

$$\delta_a \leq \delta .$$

4.3. Šíření chyb při výpočtu

Při numerickém výpočtu se provádí posloupnost početních operací a je zcela přirozené, že se chyby zpracovávaných čísel projeví v chybě výsledku. K jejímu odhadu je nutné znát odhady chyb výsledků základních početních úkonů.

Chyba aritmetických operací:

Do aritmetické operace vstupují dva operandy s určitými chybami. Provede se operace, v jejímž výsledku se projeví chyby operandů, a jako součást operace následuje zaokrouhlení výsledku na t míst. Každá aritmetická operace je tedy doprovázena zaokrouhlováním.

Nechť a je aproximace čísla A, b je aproximace čísla B a:

1) Je-li $c = a + b$ aproximace **součtu** $C = A + B$, potom

$$C = a + \Delta a + b + \Delta b = c + \Delta c ,$$

kde:

$$\Delta c = \Delta a + \Delta b \text{ a platí } |\Delta c| \leq |\Delta a| + |\Delta b| \leq \varepsilon_a + \varepsilon_b .$$

2) Je-li $d = a - b$ aproximace **rozdílu** $D = A - B$, potom

$$D = a + \Delta a - b - \Delta b = d + \Delta d ,$$

kde:

$$\Delta d = \Delta a - \Delta b \text{ a platí } |\Delta d| \le |\Delta a| + |\Delta b| \le \varepsilon_a + \varepsilon_b .$$

3) je-li $e = a.b$ aproximace **součinu** $E = A.B$, potom

$$E = (a + \Delta a)(b + \Delta b) = ab + a\Delta b + b\Delta a + \Delta a\Delta b = e + \Delta e ;$$

klademe:

$$\Delta e \approx a\Delta b + b\Delta a \text{ (tedy člen } \Delta a\Delta b \text{ nebereme v úvahu)}$$

a platí:

$$|\Delta e| < |a|\varepsilon_b + |b|\varepsilon_a \text{ nebo } |\Delta e| \approx |a|\varepsilon_b + |b|\varepsilon_a .$$

($|\Delta e|$ je menší nebo přibližně rovno)

4) je-li $f = \dfrac{a}{b}$ aproximace **podílu** $F = \dfrac{A}{B}$, potom

$$F = \frac{a + \Delta a}{b + \Delta b} = f + \Delta f ,$$

kde:

$$\Delta f = \frac{b\Delta a - a\Delta b}{b(b + \Delta b)} \approx \frac{b\Delta a - a\Delta b}{b^2}$$

a platí:

$$|\Delta f| < \frac{|b|\varepsilon_a + |a|\varepsilon_b}{|b|^2} \text{ nebo } |\Delta f| \approx \frac{|b|\varepsilon_a + |a|\varepsilon_b}{|b|^2} .$$

($|\Delta e|$ je menší nebo přibližně rovno)

4.4. Numerická stabilita

Jakákoliv chyba může mít vliv na konečný výsledek, tento vliv však může být velmi rozdílný u různých numerických metod. Podle toho, jaký vliv má chyba na výsledek rozdělujeme metody do dvou kategorii, a to na metody stabilní a nestabilní. **Nestabilní metodou** (algoritmem) nazveme takovou metodu, kde se relativně malé chyby v jednotlivých krocích výpočtu postupně akumulují tak, že dojde ke katastrofální ztrátě přesnosti numerického řešení úlohy. Naproti tomu nazveme **stabilní metodou** takovou metodu, kde chyba výsledku roste s počtem kroků *n* nejvýše lineárně.

Nestabilita algoritmu vzniká v důsledku akumulace zaokrouhlovacích chyb. Typicky se objevuje v rekurzivních algoritmech. Nestabilita metod může vznikat i v důsledku akumulace chyby metody. Např. často se objevuje při numerickém řešení počátečního problému pro obyčejné a parciální diferenciální rovnice.

4.5. Podmíněnost úloh a algoritmů

Může se stát, že přesto, že je metoda stabilní, tak při zadání specifických vstupních údajů může dojít k podstatné chybě v konečném výsledku. Proto je v mnoha úlohách důležité před vlastním řešením zjistit, jaký vliv mají vstupní údaje na výsledek.

Říkáme, že úloha je **dobře podmíněná**, jestliže malá změna ve vstupních datech vyvolá malou změnu řešení. Je-li $y + \Delta y$ řešením úlohy odpovídající vstupním datům $x + \Delta x$, potom číslo:

$$C_p = \frac{\delta(y)}{\delta(x)} = \frac{\dfrac{|\Delta y|}{|y|}}{\dfrac{|\Delta x|}{|x|}}$$

nazýváme **číslem podmíněnosti úlohy**.

Když $C_p \approx 1$, je úloha velmi dobře podmíněná. Pro velká C_p jde o úlohu špatně podmíněnou.

5. Řešení soustav lineárních algebraických rovnic

V této kapitole se budu věnovat soustavám lineárních rovnic, podmínkám jejich řešitelnosti a způsobům jejich řešení.

Soustavou *m* lineárních rovnic o ***n*** **neznámých** $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nazýváme soustavu:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots.. & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots.. & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots.. & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Řešením soustavy se nazývá každá taková uspořádaná n-tice komplexních čísel $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots.\alpha_n)$, tj. n-členný vektor, pro který platí, že při dosazení čísel $\alpha_1,\alpha_2, \ldots., \alpha_n$ za neznámé $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jsou všechny rovnice soustavy splněny.

Je-li $b_i = 0$ pro všechna $i = 1, 2, \ldots, m$ tak soustavu nazýváme **homogenní** soustavou rovnic. Je-li alespoň jedno z čísel b_i různé od nuly, pak soustavu nazýváme **nehomogenní** soustavou lineárních rovnic.

Maticí soustavy nazýváme matici A, kde každý řádek reprezentuje jednu rovnici soustavy a každý sloupec jednu proměnnou:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Rozšířenou maticí soustavy nazýváme matici:

$$B = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Ekvivalentními soustavami lineárních rovnic nazýváme takové dvě soustavy lineárních rovnic, pro které platí, že každé řešení první soustavy je zároveň řešením druhé soustavy a naopak.

Úpravy, které převádějí jednu soustavu lineárních algebraických rovnic na soustavu s ní ekvivalentní, se nazývají **ekvivalentní úpravy**.

Ekvivalentní úpravy

1. Libovolná záměna pořadí rovnic.
2. Vynásobení jedné rovnice libovolným, ale nenulovým číslem.
3. Přičtení libovolného násobku jedné rovnice soustavy k jiné libovolné rovnici.
4. Vynechání rovnice, která je násobkem jiné rovnice.
5. Vynechání rovnici, která je lineární kombinací ostatních rovnic.
6. Přidání rovnice, která vznikne lineární kombinací ostatních rovnic

O řešitelnosti a počtu řešení soustavy lineárních rovnic vypovídá Frobeniova věta.

Frobeniova věta o řešitelnosti soustavy:

Soustava je řešitelná tehdy a jen tehdy, je-li hodnost matice soustavy rovna hodnosti rozšířené matice soustavy.

Dále platí:

1) Je-li $h(A) < h(B)$, potom soustava nemá řešení.

2) Je-li $h(A) = h(B) = n$ (n je počet neznámých), pak má soustava právě jedno řešení.

3) Je-li $h(A) = h(B) < n$ (n je počet neznámých), pak má soustava nekonečně mnoho řešení.

Matice koeficientů, se kterými se setkáme v praxi, patří většinou k jedné ze dvou kategorií:

a) **Plné matice**, ale ne příliš velké. Plnou maticí rozumíme takovou matici, která má velmi málo nulových prvků a ne příliš velkou maticí rozumíme matici jejíž řád je nejvýše asi tak 30. Matice tohoto typu se používají k řešení problémů v různých odvětvích – ať už je to matematika, fyzika, technika, atd.

b) **Řídké matice**, ale mnohdy velmi velké. Řídká matice na rozdíl od výše uvedené má málo nenulových prvků. Velmi velkou maticí míníme řádu 100 nebo většího. Matice tohoto typu vznikají obvykle při numerickém řešení parciálních diferenciálních rovnic.

Jak se často říká, tak numerická, matematika je uměním i vědou. Uměním v tom smyslu, že je velmi důležité umět se rozhodnout, jakou metodu máme na řešení daného problému použít. Neboť zvolíme-li si metodu špatnou, tak její výsledek může být zatížen nejrůznějšími chybami. Navíc výpočet výsledku může být velmi zdlouhavý, či dokonce nerealizovatelný. Proto dobrý výběr metody je půl úspěchu při řešení numerického problému.

Důležitý výběr metody nastává taky při řešení soustav algebraických rovnic s plnou, nebo řídkou maticí. Obecně pro řešení plných matic je výhodnější využít přímé metody, kdežto pro řešení matic druhé kategorie se častěji používá iteračních metod. Oba typy těchto metod představím v následujících kapitolách.

Podmíněnost soustavy

V praxi se setkáváme s tím, že koeficienty soustavy rovnic $Ax = b$ jsou zatíženy chybami, tyto chyby se mohou projevit v různé míře na konečném výsledku.

Zkusme si to ukázat na jednoduchém přikladu, kdy řešíme dvě soustavy rovnic o dvou neznámých, jejichž zadání se liší jen velmi nepatrně:

a) $$\begin{array}{ccccc} 3x & + & 6y & = & 9 \\ 3x & + & 6{,}001 & = & 9{,}001 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & x & = & 1 \\ & & y & = & 1 \end{array}$$

b) $$\begin{array}{ccccc} 3x & + & 6y & = & 9 \\ 3x & + & 5{,}999 & = & 9{,}003 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & x & = & 9 \\ & & y & = & -3 \end{array}$$

Jak vidíme zadání těchto soustav se liší sice jen nepatrně, a to v koeficient a_{22} o 0,002 a v koeficientu b_2 o 0,002 a přitom tento drobný rozdíl způsobil, že obě soustavy mají úplně odlišné řešení. Pokud by druhá soustava reprezentovala naměřené hodnoty první soustavy, tak výsledek tohoto výpočtu by byl v praxi zcela nepoužitelný. Proto se zavádí pojem špatně a dobře podmíněná matice soustavy, který vypovídá o tom, jaký vliv má drobná chyba v měření na konečný výsledek.

Matici soustavy nazýváme **dobře podmíněnou**, jestliže relativně malé změny v koeficientech způsobí relativně malé změny v řešení. Matice se nazývá **špatně podmíněná**, jestliže relativně malé změny v koeficientech způsobí relativně velké změny v řešení.

Více o podmíněnosti matic se můžete dočíst v [1] str. 433-444.

5.1. Přímé metody

Metodu řešení soustavy $Ax = b$ (s regulární maticí) řádu n, která vede k přesnému řešení (nebereme-li v úvahu vliv zaokrouhlovacích chyb) po konečném počtu kroků, nazýváme **přímou metodou**. Základním principem přímých metod je eliminace neznámých. Pro plné matice jsou přímé metody většinou nejefektivnější.

5.1.1. Gaussova eliminační metoda

Princip této eliminace spočívá v převodu soustavy $Ax = b$ na ekvivalentní soustavu, jejíž matice je horní trojúhelníková. (tzn. že všechny prvky pod hlavní diagonálou jsou nulové). Použité operace jsou vynásobení rovnice (tj. řádku soustavy rovnic) nenulovým číslem a přičtení této rovnice k rovnici jiné. Konečný výpočet neznámých z trojúhelníkové matice nazýváme **zpětný chod**.

Uvažujme soustavu n rovnic pro n neznámých ve tvaru:

$$(1) \qquad \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & \dots & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & a_{1,n+1} \\ a_{21}x_1 & \dots & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & a_{2,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}x_1 & \dots & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{nn}x_n & = & a_{n,n+1} \end{array},$$

kde jsme pro jednoduchost značení položili $b_j = a_{j,n+1}$. Dále předpokládáme, že matice A je regulární. Nechť $a_{11} \neq 0$, pak přičtením vhodných násobků první rovnice ke zbývajícím $n-1$ rovnicím vyloučíme z těchto rovnic neznámou x_1. Těmito vhodnými násobky jsou čísla:

$$m_{i1} = -\frac{a_{ij}}{a_{11}}; i = 2,3,\dots,n ,$$

a nazýváme je **multiplikátory 1. fáze eliminace**.

Nyní dostáváme první redukovanou soustavu:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & \dots & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & a_{1,n+1} \\ & & a_{22}^{(1)}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}^{(1)}x_n & = & a_{2,n+1}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & a_{n2}^{(1)}x_2 & + & \dots & + & a_{nn}^{(1)}x_n & = & a_{n,n+1}^{(1)} \end{array},$$

kde, jak vidíme, se první rovnice nemění a ostatní prvky jsme z původní soustavy získali takto:

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} + m_{i1}a_{1j}; i = 2,3,\dots,n; j = 2,3,\dots,n,n+1.$$

V druhé fázi eliminace předpokládáme, že $a_{22}^{(1)} \neq 0$, a vyloučíme neznámou x_2 ze zbývajících *n-2* rovnic redukované soustavy tím, že druhou rovnici redukované soustavy vynásobíme multiplikátory:

$$m_{i2} = -\frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}; i = 3,4,\dots,n,$$

a postupně přičteme tento násobek druhé rovnice ke zbývajícím *n-3* rovnicím. a dostaneme tak druhou redukovanou soustavu:

$$\begin{array}{ccccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & a_{1,n+1} \\ & & a_{22}^{(1)}x_2 & + & a_{23}^{(1)}x_3 & + & \dots & + & a_{2n}^{(1)}x_n & = & a_{2,n+1}^{(1)} \\ & & & & a_{33}^{(2)}x_3 & + & \dots & + & a_{3n}^{(2)}x_n & = & a_{3,n+1}^{(2)} \\ & & & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & a_{n3}^{(2)}x_3 & + & & + & a_{nn}^{(2)}x_n & = & a_{n,n+1}^{(2)} \end{array},$$

kde:

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} + m_{i2}a_{2j}^{(1)}; i = 3,4,\dots,n; j = 3,4,\dots,n,n+1.$$

Dále pokračujeme analogickým způsobem, až po *n-1* krocích získáme konečnou redukovanou soustavu s trojúhelníkovou maticí ve tvaru:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & a_{1,n+1} \\
 & & a_{22}^{(1)}x_2 & + & a_{23}^{(1)}x_3 & + & \dots & + & a_{2n}^{(1)}x_n & = & a_{2,n+1}^{(1)} \\
 & & & & a_{33}^{(2)}x_3 & + & \dots & + & a_{3n}^{(2)}x_n & = & a_{3,n+1}^{(2)} \\
 & & & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 & & & & & & & & a_{nn}^{(n-1)}x_n & = & a_{n,n+1}^{(n-1)}
\end{array}.$$

Tím je soustava převedena na trojúhelníkový tvar a její řešení můžeme snadno spočítat podle vzorce:

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}^{(i-1)}}\left(a_{i,n+1}^{(i-1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i-1)} x_j\right), \text{ pro } i = n,\dots,1 .$$

Gaussova eliminace je nejvíce používaná metoda pro tzv. „ruční řešení malých soustav“. Hodí se ale také k počítačovému řešení soustavy až o tisících rovnic. Výpočet však neproběhne korektně, je-li některé z čísel $a_{11}, a_{22}^{(1)}, a_{33}^{(2)}$.....rovno 0.

Pro řešení soustavy metodou Gaussovy eliminace matice řadu n je potřeba:

$$\frac{1}{3}n^3 + n^2 - \frac{1}{3}n \approx \frac{1}{3}n^3 \text{ - násobení a dělení,}$$

$$\frac{1}{3}n^3 + n^2 - \frac{1}{3}n \approx \frac{1}{3}n^3 \text{ - sčítání.}$$

5.1.2. Gaussova metoda s výběrem hlavních prvků

Jak jsem již řekl, Gaussovu eliminační metodu nelze použít, jestliže je některé z čísel $a_{11}, a_{22}^{(1)}, a_{33}^{(2)}$.....rovno nule. Pokud by však bylo některé z těchto čísel velmi malé, může to mít díky chybám při zaokrouhlování během výpočtu fatální dopad na konečný výsledek. Abychom snížili vliv zaokrouhlovacích chyb, je vhodné vybrat za hlavní prvky matice takové prvky, které mají co největší absolutní hodnotu, neboť tím dosáhneme toho, že pro všechny multiplikátory bude platit nerovnost $|m_{ij}| \le 1$ a jak víme, násobení malými čísly chyby spíše zmenšuje.

5.1.2.1. Gaussova metoda s úplným výběrem hlavního prvku

Uvažujme soustavu n rovnic pro n neznámých ve tvaru: (1) a určíme hlavní prvek, tzn. že najdeme prvek a_{pq} s indexy p,q, $1 \leq p \leq n$ a $1 \leq q \leq n$ tak, aby:

$$|a_{ij}| \leq |a_{pq}| \quad i,j = 1,2,\ldots,n.$$

Vybrali jsme tedy prvek s maximální absolutní hodnotou. Je-li takových prvků více, můžeme vzít kterýkoliv z nich. Prvek a_{pq} nazýváme **hlavní prvkem**, p-tou rovnici soustavy **hlavní rovnicí** a neznámou x_q **hlavní neznámou**. Nyní pomocí hlavní rovnice vyloučíme neznámou x_q ze všech ostatních rovnic. K tomu stačí od i-té rovnice odečíst m_{iq}-násobek hlavní rovnice, kde:

$$m_{iq} = \frac{a_{iq}}{a_{pq}},\ i = 1,2,\ldots,n;\ i \neq q.$$

Tím jsme vyloučili neznámou x_q z ostatních rovnic. Vynecháme-li hlavní rovnici, získáme soustavu n-1 rovnic o n-1 neznámých. Ze soustavy n-1 rovnic o n-1 neznámých vybereme další hlavní prvek a vyloučíme další hlavní neznámou, vynecháním další hlavní rovnice dostaneme soustavu n-2 rovnic o n-2 neznámých. Takto bychom postupovali dále, až bychom po n-1 krocích získali soustavu ekvivalentní se zadanou soustavou. Tato soustava sice není trojúhelníková, ale vhodným přerovnáním řádků bychom z ní mohli trojúhelníkovou soustavu vytvořit, a proto k dořešení této soustavy použijeme opět zpětný chod.

5.1.2.2. Gaussova metoda se sloupcovým výběrem hlavního prvku

Jedná se o podobný postup jako u metody s výběrem úplného hlavního prvku. V k-té fázi eliminace ($k = 1,2,\ \ldots,\ n$-1) vybíráme za hlavní prvek takový prvek, který má největší absolutní hodnotu z těch prvků k-tého sloupce patřícím zbývajícím n-k+1 řádkům, které do k-té fáze nebyly hlavními řádky. Výsledkem je opět matice, ze které můžeme vhodnou záměnou řádků vytvořit matici trojúhelníkovou.

5.1.2.3. Gaussova metoda s řádkovým výběrem hlavního prvku

V k-té fázi eliminace ($k = 1,2, \ldots, n\text{-}1$) vybíráme za hlavní prvek takový prvek, který má největší absolutní hodnotu z těch prvků k-tého řádku patřícím zbývajícím $n\text{-}k\text{+}1$ sloupcům, které do k-té fáze nebyly hlavními sloupci. Výsledkem je opět matice, ze které můžeme vhodnou záměnou řádků vytvořit matici trojúhelníkovou.

5.1.3. Choleského rozklad

Je-li matice A typu *(m,m)* symetrická a pozitivně definitní matice *(pozn. pozitivně definitní je taková matice A, pro kterou platí* $x^TAx > 0$ *pro každý nenulový vektor x.)*. Potom existuje právě jedna horní trojúhelníková matice R typu *(m,m)*, jejíž všechny diagonální prvky jsou kladné, taková, že $A = R^TR$., tedy:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \overline{r}_{12} & r_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \overline{r}_{13} & \overline{r}_{23} & r_{33} & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \overline{r}_{1m} & \overline{r}_{2m} & \cdots & \cdots & r_{mm} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} r_{11} & a_{12} & r_{13} & \cdots & r_{1m} \\ 0 & r_{22} & r_{23} & \cdots & r_{2m} \\ 0 & 0 & r_{33} & & r_{3m} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & r_{mm} \end{pmatrix}.$$

Matice R se nazývá Choleského rozklad matice A.

Prvky matice R se počítají postupně pro $r = 1,2, \ldots, n$ podle vzorců:

$$r_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} |\, r_{ki}\,|^2} \quad ;$$

$$r_{ij} = (a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} r_{ki} r_{kj}) / r_{ii} \,.$$

Řešení soustavy rovnic pomocí Choleského rozkladu

Tento postup použijeme tehdy, máme-li řešit lineární soustavu rovnic s pozitivně definitivní maticí. (Řešíme soustavu ve tvaru $Ax = b$)

1. Matici A rozložíme na součin R^TR viz. předchozí odstavec.

2. Substituce $A = R^TR$ a $Ax = b \rightarrow R^TRx = b$.

3. Substituce $y = Rx$ a $R^TRx = \mathrm{b} \rightarrow R^Ty = b$.

4. Řešíme soustavu $y = Rx$.

Řešení soustavy jsme pomocí Choleského rozkladu převedli na postupné řešení soustav $R^T y = b$ a $Rx = y$.

Někdo by mohl namítnout, k čemu nám je Choleského rozklad, když nyní musíme řešit místo soustavy jedné soustavy dvě. Důvod je prostý: sice nyní musíme řešit dvě soustavy rovnic místo jedné, ale obě tyto soustavy jsou soustavy s trojúhelníkovou maticí a jejich řešení je tedy snadné.

5.1.4. LU rozklad

Princip metody ***LU* rozkladu** spočívá v rozkladu matice soustavy A na součin **dolní trojúhelníkové matice *L*** a **horní trojúhelníkové matice *U***, přičemž $A = LU$. A následně místo řešení původní soustavy $Ax = b$ ($LUx = b$), řešíme dvě trojúhelníkové soustavy $Ly = b$ a $Ux = y$.

Nyní ukážu, že jednotlivé kroky Gaussovy eliminační metody lze také chápat jako provedení jistých maticových operací. Při Gaussově eliminaci se převádí výchozí soustava na ekvivalentní soustavu s trojúhelníkovou maticí.

Při eliminaci neznámé x_1 ze soustavy:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & \dots & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & a_{1,n+1} \\ a_{21}x_1 & \dots & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & a_{2,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}x_1 & \dots & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{nn}x_n & = & a_{n,n+1} \end{array}$$

jsme odečítali m_{i1}-násobky prvního řádku matice A od řádku i-tého ($m_{i1} = -\dfrac{a_{ij}}{a_{11}}; i = 2,3,\dots,n$). Tentýž výsledek dostaneme, když matici A vynásobíme zleva maticí:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -m_{31} & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -m_{n1} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dále odstraníme neznámou x_2 ze třetí až n-té rovnice tím, že ji vynásobíme zleva, tentokrát maticí:

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -m_{32} & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & -m_{n2} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Analogicky bychom pokračovali dále, až po *n-1* krocích bychom dostali horní trojúhelníkovou matici *U*, kde $U = M_3 M_2 M_1 A$, totožnou s maticí, kterou bychom získali Gaussovou eliminaci.

Z toho pak plyne, že $A = M_1^{-1} M_2^{-1} M_3^{-1} U$ substitucí $L = M_1^{-1} M_2^{-1} M_3^{-1}$, kde *L* je dolní trojúhelníková matice se dostaneme k vztahu $A = LU$. Nyní tedy řešíme soustavu $LUx = b$, kterou můžeme řešit jako dvě soustavy $Ly = b$ a $Ux = y$.

Výpočetní složitost je přibližně stejná jako u Gaussovy eliminace $\approx \frac{1}{3} n^3$ - sčítacích operací tak i násobících a dělících operací.

Nejvýznamnější využití této metody je hlavně při řešení soustavy rovnic s různými pravými stranami, kdy nemusíme znovu provádět rozklad na dolní a horní trojúhelníkovou matici, ale rovnou můžeme soustavu řešit zpětným chodem, kde na každou další pravou stranu je potřeba $\approx n^2$ násobících operací a *n(n-1)* sčítacích operací.

5.1.5. Cramerovo pravidlo

Soustava *n* lineárních rovnic o *n* neznámých (1). s nenulovým determinantem soustavy, má právě jedno řešení ($x_1, \dots, x_n$), kde $x_i=D_i/D$; přitom *Di* je determinant, který vznikne z *D* tím, že v něm *i*-tý sloupec nahradíme sloupcem pravých stran rovnic (1).

Vzhledem k složitosti výpočtu determinantů vyšších řádů se Cramerovo pravidlo v praxi nepoužívá. Např. jen pro výpočet matice řádu 20 by bylo potřeba spočítat 21 determinantů řádu 20 což je 21*19*20! násobení (tedy cca $9{,}70 \cdot 10^{20}$ násobících operací) – na což by nestačila ani dnešní výpočetní technika.

5.2. Iterační metody

Iterace je metoda, která opakovanou aplikací postupu dosahuje stále přesnějších výsledků. Nejčastěji se používá pro řídké matice. V této kapitole se budu věnovat popisu a rozboru iterace, konkrétně popíšu tři metody iteračního postupu, jsou to prostá iterace, dále pak metody Jacobiova a Gaussova-Seidelova.

5.2.1. Prostá iterace

První z iteračních metod, kterým se budu věnovat, je **prostá iterace**.

Soustava n rovnic o n neznámých je zapsána ve tvaru:

$$
(2) \qquad \begin{array}{ccccccccccc}
x_1 & = & b_{11}x_1 & + & b_{12}x_2 & + & \cdots & + & b_{1n}x_n & + & d_1 \\
x_2 & = & b_{21}x_1 & + & b_{22}x_2 & + & \cdots & + & b_{2n}x_n & + & d_2 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
x_n & = & b_{n1}x_1 & + & b_{n2}x_2 & + & \cdots & + & b_{nn}x_n & + & d_n
\end{array} .
$$

Soustavu (2) můžeme také zapsat jako maticovou rovnici:

$$x = Bx + d \ .$$

Nechť $x^{(0)}$ je libovolný (sloupcový) vektor prostoru V_n. Definujme posloupnost vektorů $x^{(1)}$, $x^{(2)}, \ldots\ldots$předpisem:

$$x^{(k+1)} = B\,x^{(k)} + d \qquad k = 0,1\ldots\ldots,$$

což můžeme přepsat do tvaru:

$$(3) \qquad x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j^k + d_i \ .$$

Tyto vzorce definují tzv. prostý iterační proces příslušející k soustavě (2). Vektor $x^{(k)}$ se nazývá k-tou iterací, speciálně nulté iteraci říkáme počáteční. Iteračním krokem myslíme přechod od jedné iterace k iteraci následující.

Vytvořená iterační posloupnost může být buď konvergentní, nebo divergentní. Přitom konvergencí zde rozumíme konvergenci po souřadnicích. Je-li posloupnost iterací konvergentní, pak její limita bude jistě řešením soustavy (2). Je-li divergentní, nelze řešení prostou iterační metodou získat.

Postačující podmínka pro konvergenci iteračního procesu

Definujme tři čísla α_1, α_2, α_3 předpisem:

(4)

1. $\alpha_1 = \max \sum_{j=0}^{n} |b_{ij}| ....1 \leq i \leq n$;

2. $\alpha_2 = \max \sum_{i=0}^{n} |b_{ij}| ....1 \leq j \leq n$;

3. $\alpha_3 = (\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} b_{ij}^2)^{1/2}$.

Věta: Je-li některé z čísel α_1, α_2, α_3 menší než jedna, pak platí:

1. Soustava (2) má právě jedno řešení.

2. Posloupnost iterací definovaná vztahy (3) je při každé výchozí iteraci konvergentní a její limitou je řešení soustavy (2).

Důkaz: Viz. [2], str. 146.

5.2.2. Jacobiova iterační metoda

Další iterační metodou je **Jacobiova iterace**, která spočívá ve vytvoření Jacobiovy matice, ze zadané soustavy rovnic, která je vhodná k následnému iterování.

Soustavy $Ax = b$ (se čtvercovou regulární maticí) musíme nějakým způsobem převést na tvar $x = Bx + d$, který je vhodný pro iterování. Jeden z nejčastěji používaných principů je tento:

Z i-té rovnice soustavy $Ax = b$ za předpokladu že $a_{ii} \neq 0$ vypočteme i-tou neznámou, $i = 1,2,\ldots,n$. Tak získáme ekvivalentní soustavu ve tvaru:

$$
\begin{array}{cccccccc}
x_1 & = & & -\dfrac{a_{12}}{a_{11}}x_2 & -\dfrac{a_{13}}{a_{11}}x_3 & \cdots & -\dfrac{a_{1n}}{a_{11}}x_n & +\dfrac{b_1}{a_{11}} \\
x_2 & = & -\dfrac{a_{21}}{a_{22}}x_1 & & -\dfrac{a_{23}}{a_{22}}x_3 & \cdots & -\dfrac{a_{2n}}{a_{22}}x_n & +\dfrac{b_2}{a_{22}} \\
x_3 & \cdots & -\dfrac{a_{31}}{a_{33}}x_1 & -\dfrac{a_{32}}{a_{33}}x_2 & & \cdots & -\dfrac{a_{3n}}{a_{33}}x_n & +\dfrac{b_3}{a_{33}} \\
\vdots & = & \vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots \\
x_n & & -\dfrac{a_{n1}}{a_{nn}}x_1 & -\dfrac{a_{n2}}{a_{nn}}x_2 & -\dfrac{a_{n3}}{a_{nn}}x_3 & \cdots & & +\dfrac{b_n}{a_{nn}}
\end{array}.
$$

Matici B nazveme **Jacobiovou maticí příslušející matici A** a její tvar je:

$$
B = \begin{pmatrix}
0 & -\dfrac{a_{12}}{a_{11}} & -\dfrac{a_{13}}{a_{11}} & \cdots & -\dfrac{a_{1n}}{a_{11}} \\
-\dfrac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & -\dfrac{a_{23}}{a_{22}} & \cdots & -\dfrac{a_{2n}}{a_{22}} \\
-\dfrac{a_{31}}{a_{33}} & -\dfrac{a_{32}}{a_{33}} & 0 & \cdots & -\dfrac{a_{3n}}{a_{33}} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
-\dfrac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\dfrac{a_{n2}}{a_{nn}} & -\dfrac{a_{n3}}{a_{nn}} & \cdots & 0
\end{pmatrix}.
$$

Tím jsme původní soustavu převedli do tvaru, který už dokážeme řešit přímou iterací.

Postačující podmínka pro konvergenci iteračního procesu:

Je-li matice A diagonálně dominantní (viz. 3.2.4.), je Jacobiův iterační proces konvergentní.

Důkaz: Viz. [2], str. 148.

5.2.3. Gaussova-Seidelova metoda

Poslední z metod, kterým se budu věnovat, je tzv. **GS metoda**. Tato metoda vychází z podobné myšlenky jako metoda Jacobiova (postup vytvoření matice vhodné k iteraci je stejný jako v Jacobiově metodě), jediný rozdíl spočívá v tom, že při postupném výpočtu složek vektoru $x^{(k+1)}$ se užívají ty jeho složky, které už byly vypočteny, ihned k výpočtu dalších složek. Výpočet probíhá podle následujícího vzorce:

$$(5)\qquad x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j^{(k)} + d_i \text{ , kde } i=1,2,\ldots,n.$$

Postačující podmínka pro konvergenci iteračního procesu:

Věta: Je-li některé z čísel α_1, α_2, α_3 definované v (4) menší než jedna, pak platí:

1. Soustava (2) má právě jedno řešení.

2. Posloupnost iterací definovaná vztahy (4) je při každé výchozí iteraci konvergentní a její limitou je řešení soustavy (2).

Důkaz: Viz [2], str. 151-152.

5.2.4. Srovnání jednotlivých iteračních metod

Hlavní otázkou každé iterační metody je konvergence. V porovnání s prostou iterační metodou bývá často Gaussova-Seidelova metoda výhodnější, i když to není pravda obecně. Pro některé soustavy může dokonce GS metoda divergovat, přestože prostá iterační metoda konverguje.

Metoda GS je v porovnání s Jacobiovou metodou šetrnější na paměť počítače, neboť každá nově vypočtená souřadnice může nahradit souřadnici předchozí, zatímco v předchozí iterační metodě je v průběhu přechodu od iterace x^k k iteraci $x^{(k+1)}$ stále zapotřebí všech souřadnic vektoru $x^{(k)}$.

6. Řešení algebraických rovnic o jedné neznámé

V této kapitole se budu zabývat některými z numerických metod pro řešení nelineárních algebraických rovnic o jedné neznámé.

Algebraickou rovnicí n-tého stupně nazýváme rovnici:

$$a_0\, x^n + a_1\, x^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \ldots\ldots a_0 \neq 0,$$

kde $a_0, a_1, \ldots\ldots, a_n$ jsou reálná, resp. komplexní čísla.

Kořenem rovnice $f(x) = 0$ nazýváme takové číslo α, pro něž platí:

$$f(\alpha) = \sum_{i=0}^{n} a_i\, \alpha^{n-1} = 0\,.$$

Algebraická rovnice n-tého stupně

$$f(x) = a_0\, x^n + a_1\, x^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \ldots\ldots a_0 \neq 0$$

s reálnými (resp. komplexními) koeficienty $a_0, a_1, \ldots\ldots, a_n$ má právě n (obecně komplexních) kořenů, počítáme-li každý s příslušnou násobností.

Descartova věta:

Počet kladných kořenů rovnice $f(x) = 0$ je buď roven počtu znaménkových změn v posloupnosti $a_0, a_1, \ldots\ldots, a_n$, nebo je o sudý počet menší.

6.1. Odhady polohy kořenů algebraických rovnic

Hledat všechny kořeny na celé reálné ose by bylo velmi složité, existují však některé odhady, díky nímž můžeme podstatně omezit interval, ve kterém se všechny reálné kořeny nalézají, a to budeme pro některé numerické metody potřebovat.

Mějme algebraickou rovnici $f(x) = a_0\, x^n + a_1\, x^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \ldots\ldots a_0 > 0$ a α je množina všech reálných kořenů $\alpha = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Označme:

a_i ….. nejmenší záporný koeficient

a_r ….. první záporný koeficient

a_s ….. největší kladný koeficient před prvním záporným koeficientem

A ….. největší koeficient v absolutní hodnotě $A = \max\{|a_0|, |a_1|, ..., |a_n|\}$

Pak pro každý reálný kořen α této rovnice platí:

a) $\alpha < 1 + \dfrac{A}{|a_0|}$

b) $\alpha < 1 + \dfrac{|a_i|}{a_0}$ Maclarinův odhad

c) $\alpha < 1 + \sqrt[r]{\dfrac{|a_i|}{a_0}}$ Lagrangeův odhad

d) $\alpha < 1 + \sqrt[r-s]{\dfrac{|a_i|}{a_s}}$ Tillotův odhad

Pro zpřesnění odhadů se často také používají substitutce:

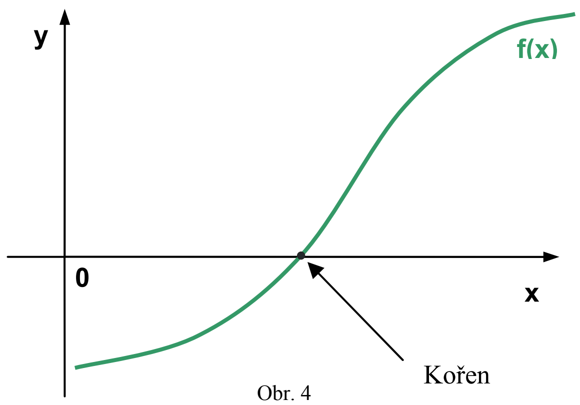
$$x = -x;\ x = \frac{1}{x};\ x = -\frac{1}{x}.$$

Po provedení substituce můžeme provést znovu odhady již s upravenou rovnicí a zpětnou substitucí získáme nové, častokrát lepší odhady.

Důležitým pojmem je i **separace kořene**, tj. určení intervalu $< a,b >$, v němž leží jediný kořen. Separací se však v této práci zaobírat nebudu pokud se o ní někdo chce dozvědět více tak například v [7] str. 23-28.

6.2. Grafické řešení

Nechť $f(x) = 0$ je nelineární rovnice s neznámou x. Kořenem rovnice je graficky x-ová souřadnice průsečíku grafu funkce $f(x)$ s osou x (viz Obr. 4). Určit kořen tímto způsobem je sice názorné, ale nepřesné a pomalé. Grafické řešení se většinou v praxi využívá k hrubému odhadu intervalu, kde se nalézá kořen dané rovnice a následně k přesnému výpočtu se užije některá z numerických metod.



Obr. 4

6.3. Numerické řešení rovnice

Vyjádřit kořen rovnice přesně vzorcem lze pouze ve speciálních případech – např. lineární nebo kvadratická rovnice. V ostatních případech je k získání kořenu potřeba použít některou z mnoha numerických metod.

Při numerickém řešení rovnice o jedné neznámé se ke skutečné hodnotě kořenu rovnice postupně přibližujeme. Většinou ji sice nedosáhneme, ale teoreticky se k ní můžeme přiblížit s libovolnou přesností, kterou si předem určíme.

Přibližnou metodou pro řešení rovnice $f(x) = 0$ budeme rozumět algoritmus postupného výpočtu posloupnosti aproximací tj. platí:

$$\lim_{k \to \infty} x_k = \xi ,$$

kde ξ je kořen rovnice. Za přibližnou hodnotu kořene považujeme aproximaci x_k při některém konkrétním k.

Každá numerická metoda vychází z určitého počátečního řešení, které je postupně upřesňováno.

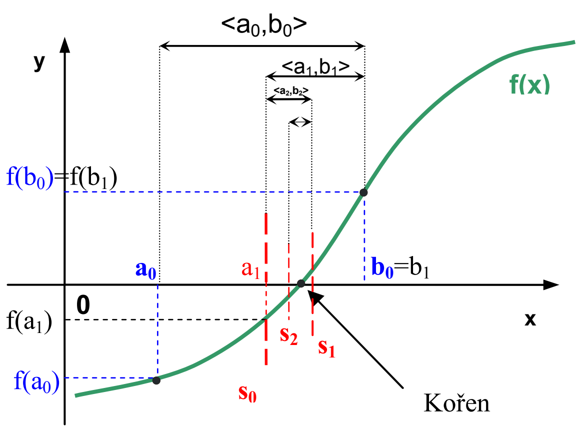
Počáteční řešení může být zadáno:

1. Intervalem, v němž leží hledaný kořen.

2. Přibližnou hodnotou kořene.

6.3.1. Metoda půlení intervalu

Předpokládejme, že v intervalu $<a,b>$ leží právě jeden kořen rovnice $f(x)=0$ (tzn. $f(a)f(b)<0$). Polohu kořene ξ lze zpřesnit rozpůlením intervalu a zjištěním, ve které části intervalu kořen leží. Zmenšený interval, v němž leží kořen, lze znovu rozpůlit, a tak pokračovat dále (viz Obr. 5). Střed posledního sestrojeného intervalu, nebo některý z jeho krajních bodů lze považovat za aproximaci kořene.



Obr. 5

Definujme posloupnost intervalů $<a_n,b_n>$, $n=0,1,2\ldots$.. předpisem:

1. $<a_0,b_0> = <a,b>$;

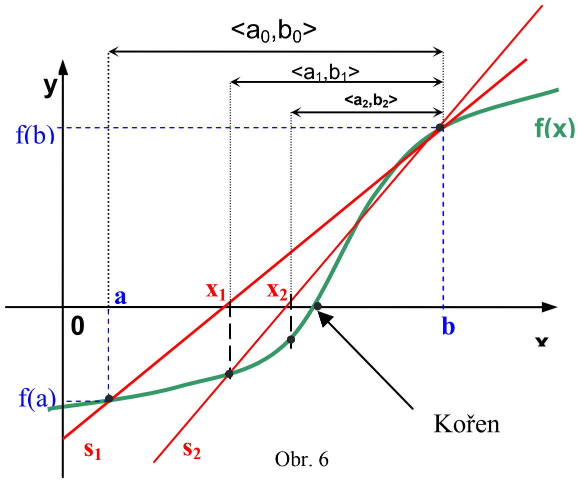
2. Nechť je již definován interval $<a_n,b_n>$, přičemž $f(a_n)f(b_n)<0$.

Nechť s_n je střed intervalu $<a_n,b_n>$ ($s_n=\dfrac{(a_n+b_n)}{2}$). Je-li $f(s_n)=0$, je kořen nalezen a algoritmus končí. Je-li $f(s_n)\neq 0$, vybereme z intervalů $<a_n,s_n>;<s_n,b_n>$ ten, v jehož koncových bodech má funkce *f(x)* různá znaménka a označíme jej $<a_{n+1},b_{n+1}>$.

Není-li tedy po konečném počtu kroků nalezen kořen, vznikne nekonečná posloupnost intervalů $< a_n, b_n >$.

6.3.2. Metoda regula falsi

Metodu získáme obměnou algoritmu půlení intervalu. Místo středu intervalu $< a_k, b_k >$ hledáme průsečík x_k spojnice bodů $[a_k, f(a_k)]$, $[b_k, f(b_k)]$ s osou x (viz Obr. 6).



Obr. 6

Hlavní myšlenkou této metody je, že místo rovnice $f(x) = 0$ řešíme jednodušší rovnici $g(x) = 0$.

Předpokládejme, že $f(a)f(b) < 0$, definujme funkci g předpisem:

$$g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Grafem funkce g je sečna vedená body $[a_k, f(a_k)]$, $[b_k, f(b_k)]$. Výpočtem zjistíme, že pro kořen x_1 rovnice $g(x) = 0$ platí:

$$x_1 = a - f(a)\frac{b - a}{f(b) - f(a)},$$

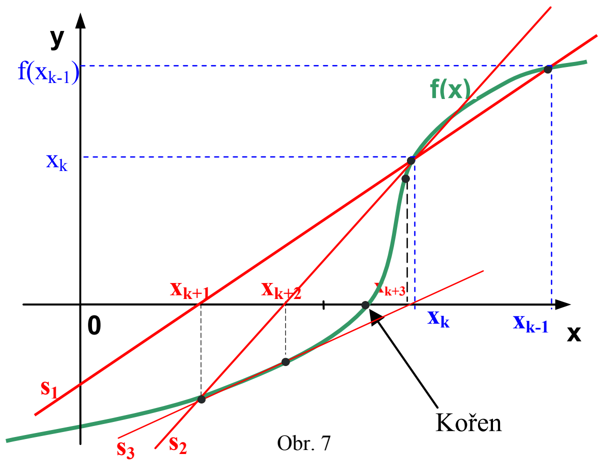
nebo také:

$$x_1 = b - f(b)\frac{b-a}{f(b)-f(a)}.$$

Z intervalů $< a, x_1 >; < x_1, b >$ vezmeme ten, v jehož koncových bodech mají funkční hodnoty funkce f opačná znaménka (je-li náhodou $f(x_1) = 0$, je kořen nalezen). Vybraný interval označme $< a_1, b_1 >$ a předchozí postup znovu opakujme. Získáme tak číslo x_2 a není-li $f(x_2) = 0$, určíme interval $< a_2, b_2 >$ atd.

6.3.3. Metoda sečen

Tato metoda vychází z metody regula falsi. Na rozdíl od ní však upouští od požadavku, aby funkce f měla v krajních bodech intervalu, který se užívá ke konstrukci další aproximace, opačná znaménka (viz Obr. 7).



Obr. 7

Předpokládáme, že $x_k \neq x_{k-1}$ jsou dobré aproximace jednoduchého kořene α rovnice $f(x) = 0$. Funkci nahradíme lineární funkcí g:

$$g(x) = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}(x - x_k) + f(x_k),$$

kde g je lineární interpolační polynom určený hodnotami $[x_{k-1}, f(x_{k-1})]$, $[x_k, f(x_k)]$ a místo rovnice $f(x) = 0$ řešíme rovnici $g(x) = 0$. Kořen x_{k+1} této rovnice je určen:

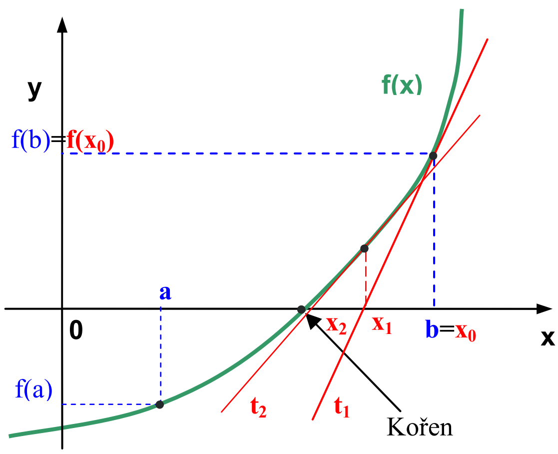
$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}.$$

a považujeme jej za aproximaci kořene α rovnice $f(x) = 0$.

Pokud x_0, x_1 nebudou dobré aproximace kořene α, nemusí metoda sečen vůbec konvergovat. Proto je nutné kombinovat ji s některou jinou metodou např. metodou regula falsi, která je konstruována na podobném principu.

6.3.4. Metoda tečen

Často se setkáme též s názvem Newtonova metoda. Newtonova metodu tečen řadíme k iteračním metodám a jak už název napovídá, využívá k nalezení kořenů rovnice tečny, a to tím způsobem, že křivku v okolí kořene nahradíme tečnou v bodě $[x_i, f(x_i)]$ a průsečíkem této tečny s osou x vznikne nová aproximace kořene (viz. obr. 8).



Obr. 8

Rovnici *f(x)* lze řešit Newtonovou metodou, právě když uvnitř intervalu $< a,b >$ leží právě jeden izolovaný kořen.

Je-li funkce f spojitá v intervalu $< a,b >$, $f(a)f(b) < 0$ a existuji-li v daném intervalu spojité a nenulové derivace $f'(x)$ a $f''(x)$, které nemění v zadaném intervalu znaménka, pak rovnice $f(x) = 0$ má v intervalu (a,b)

jediný kořen α. Za x_0 pak zvolíme ten z krajních bodů z intervalu $< a, b >$, pro který $f(x_0) f''(x_0) > 0$.

K výpočtu Newtonovy metody využíváme vztah:

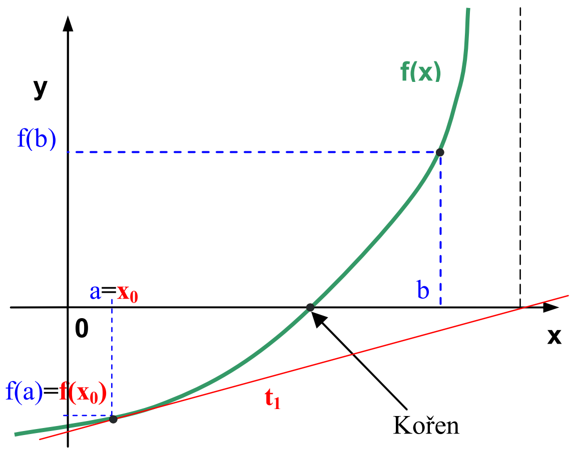
$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)},$$

který odvodíme na základě Taylorovy věty:

$$0 = f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(\xi)(x - x_0).$$

Odvození tohoto vztahu v [2] str. 98, či [4] str. 137-138.

Volba počáteční aproximace je velmi důležitá a je podstatnou podmínkou pro konvergenci Newtonovy metody. Hlavní vliv na tuto volbu má skutečnost, zda je zadaná funkce v daném intervalu konvexní či konkávní. Pokud je funkce konvexní, musíme volit výchozí aproximaci nad očekávaným kořenem a přibližovat se ke kořenu shora, naproti tomu u konkávní funkce volíme výchozí aproximaci pod kořenem a přibližujeme se k němu zdola. (musí tedy platit, že $f'(x_0) f''(x_0) > 0$). Pokud bychom tak nepostupovali, mohlo by se stát, že některá aproximace se nebude nalézat v intervalu $< a, b >$ (viz. obr. 9).



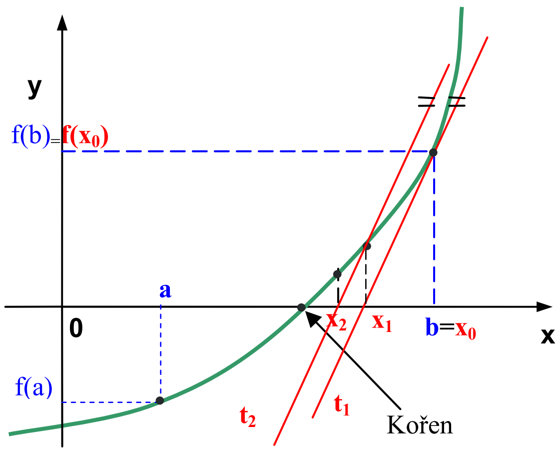
Obr. 9

Newtonova metoda tečen má různé modifikace. Jednou z nich je například **Whittakorova metoda.**

V každém iteračním kroku Newtonovy metody je potřeba vypočítat hodnotu funkce f a je její derivace v bodě x_i. Náročný může být zejména výpočet hodnoty $f'(x_i)$. V některých případech si však tuto práci můžeme ulehčit, a to tehdy, pokud se derivace mění jen minimálně, potom můžeme pro následující kroky iterace používat derivaci z prvního kroku, tzn. že budeme nyní používat vzorce:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_0)}.$$

V porovnání s Newtonovou metodou tedy nahrazujeme tečny ke grafu v bodech $[x_i, f(x_i)]$ přímkami rovnoběžnými s tečnou ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě $[x_0, f(x_0)]$ (viz. obr. 7).



Obr. 10

V této metodě tedy potřebujeme pro výpočet jednotlivých aproximací mnohem méně operací, než při použití Newtonovy metody, ale počet aproximací, než dojde k nalezení výsledku je v porovnání s Newtonovou metodou větší.

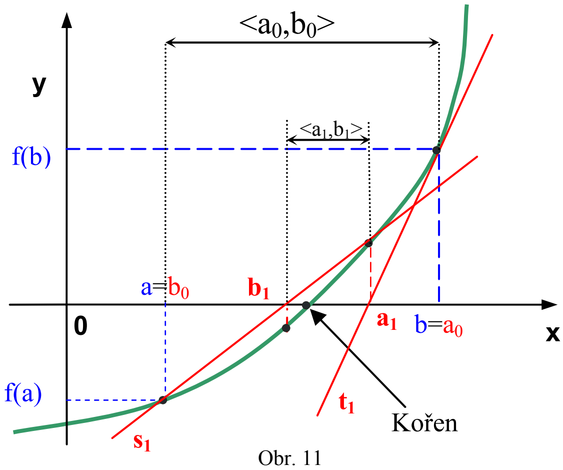
Jedna z dalších modifikací Newtonovy metody je taková, že derivaci měníme pouze jednou během dvou kroků. Vyjádření vzorcem je:

$$x_{2i+1} = x_{2i} - \frac{f(x_{2i})}{f'(x_{2i})};$$

$$x_{2i+2} = x_{2i+1} - \frac{f(x_{2i+1})}{f'(x_{2i})}.$$

6.3.5. Kombinovaná metoda

Jak už název napovídá, tato metoda bude kombinací některých z dříve popsaných metod, a to metody tečen a metody regula falsi.



Obr. 11

Podmínky pro řešitelnost pomocí této metody jsou stejné jako u metody tečen, tj. že funkce f je spojitá v intervalu $< a,b >$, $f(a)f(b) < 0$ a existují derivace $f'(x)$ a $f''(x)$ spojité a nenulové v intervalu $< a,b >$.

Vezměme interval $< a,b >$ a ten z krajních bodů intervalu, pro který platí $f(a_0)f''(a_0) > 0$ označíme a_0 a druhý krajní bod označíme b_0. Nyní veďme tečnu ke grafu funkce f bodem $[a_0, f(a_0)]$ a průsečík tečny s osou x označme a_1, tzn. že:

$$a_1 = a_0 - \frac{f(a_0)}{f'(a_0)}.$$

Souřadnici b_1 vypočteme jako průsečík osy x se sečnou procházející body $[a_1, f(a_1)]$, $[b_0, f(b_0)]$, tzn. že:

$$b_1 = \frac{b_0 f(a_1) - a_1 f(b_0)}{f(a_1) - f(b_0)}.$$

Nyní jsme vytvořili zúžený interval $< a_1, b_1 >$, ve kterém se nachází kořen rovnice, a dále bychom pokračovali analogicky. Z předchozích vzorců můžeme odvodit obecné vzorce:

$$a_{k+1} = a_k - \frac{f(a_k)}{f'(a_k)};$$

$$b_{k+1} = \frac{b_0 f(a_{k+1}) - a_{k+1} f(b_k)}{f(a_{k+1}) - f(b_k)}.$$

Výhodou této metody je, že hledané řešení je aproximováno současně zdola i shora.

Kombinovaná metoda konverguje vždy, když jsou splněny postačující podmínky konvergence metody regula falsi a metody tečen.

7. Popis výukových programů

V rámci diplomové práce byl vytvořen interaktivní program, který může být použit při výuce numerické matematiky. Samotné výukové programy se skládají ze čtyř souborů vytvořených v tabulkovém procesoru MS Excel, které jsou uloženy na CD přiloženém k této diplomové práci.

V každém z těchto souborů je vyložena nová látka, většina z ní je obsažena i ve studijním textu, který je také součástí této diplomové práci. Na teoretický výklad navazují konkrétní interaktivní příklady (například viz. Příloha č. 3). U každého z těchto příkladů má uživatel určitou možnost měnit zadání v barevně označených buňkách a sledovat jednotlivé kroky výpočtu až ke konečnému výsledku, který je obvykle v buňce označené červenou barvou. Takže soubory mohou sloužit jako učebnice - uživatel může nastudovat danou metodu teoreticky a zároveň cvičebnice či sbírka příkladů - uživatel zde má možnost změnit zadání jednotlivých příkladu a sledovat průběh výpočtu nebo využít dané příklady ke kontrole vlastních výpočtů. Při tomto využití programu uživatel jistě ocení, že může na první pohled vidět, kde on sám udělal chybu a svůj postup opravit.

Všechny příklady jsou vytvořeny pomocí základních funkcí, aby jejich význam dokázal pochopit i uživatel, který má jen základní znalosti fungování programu MS Excel. Nejčastěji se zde vyskytuje přiřazení (=), podmínka (*KDYŽ*), logické operátory (*NEBO, A*), absolutní hodnota (*ABS*), aritmetické operátory (+, -, /, ^), relační operátory (=,>,<,>=,<=,<>) a zřetězení textu (*&*), zaokrouhlení (*ZAOKROUHLIT(čislo;číslice)*) a další. Tedy příkazy, které leckdy ovládá žák již na základní škole. V příkladech jsou navíc použity hypertextové odkazy, které v některých případech výpočtu odkazují na odpovídající text výkladu. V každém příkladu od zadaní až po konečný výsledek provází v každém kroku výpočtu uživatele poznámky, aby mu usnadnili pochopit postup řešení úlohy.

Cílem prvního souboru s názvem **Základy lineární algebry** je uživatele seznámit se základními pojmy lineární algebry, jako je: vektor, matice, determinant, hodnost matice, operace s vektory a s maticemi. Tento soubor by se určitě mohl využít při výuce matematiky na středních školách, doplněný v některých případech ještě o podrobnější výklad učitele. Věřím, že hodiny s použitím tohoto souboru by byly pro žáky zpestřením. Na druhou stranu nepředpokládám, že by tento soubor plně využil každý učitel matematiky. Pro učitele matematiky s jinou aprobací, než je informatika, by mohla být problémem samotná práce s programem. Nejlépe by tento soubor určitě využili učitele kombinace matematika-informatika, kteří by mohli zkombinovat výuku matematiky (Algebra) a informatiky (MS Excel). Žáci by v průběhu výuky této látky v matematice mohli pracovat s daným souborem a na konci by se naučili vytvářet podobné soubory sami. Myslím si, že pro žáky by to bylo něco zajímavého a navíc by se naučili, že programy, pokud je umí ovládat, se mnohdy stanou pomocníkem i tam, kde bychom to neočekávali.

Dále by tento soubor mohl najít velké uplatnění pro studenty vysokých škol, pro něž by měl soubor spíše sloužit k osvěžení učiva či doplnění mezer ze střední školy a především jako cvičebnice příkladů s funkcí opravy jimi spočtených úloh.

V druhém souboru nazvaném **Rovnice o jedné neznámé** jsou uživateli vyloženy metody řešení nelineárních algebraických rovnic o jedné neznámé. Výklad postupuje od základních pojmů (jako je algebraická rovnice, kořen rovnice) ke složitějším (Descartova věta). Doví se zde, jak provést docela přesný „odhad“ intervalu, v kterém se nalézají všechna reálná řešení rovnice. Pak jsou zde vysvětleny metody užívané k řešení nelineárních algebraických rovnic a to *metoda půlení intervalu*, *metoda regula falsi*, *metoda sečen*, *metoda tečen* a *kombinovaná metoda*. U každé této metody dochází před vlastním řešením ke kontrole, zda zadané údaje splňují postačující podmínky pro konvergenci dané metody.

Třetí a čtvrtý soubor obsahují metody řešení soustav lineárních algebraických rovnic. Tuto látku bylo kvůli velkému rozsahu nutno rozdělit do dvou částí **Soustavy rovnic – přímé metody** a **Soustavy rovnic – iterační metody**. V každém z těchto souboru je jeden list věnovaný základním pojmům potřebným při řešení soustav algebraických rovnic a problémům, které se mohou při řešení vyskytnout. V souboru **Soustavy rovnic – přímé metody** jsou vysvětleny metody: *Gaussova eliminace, Choleského rozklad, LU rozklad* a *Cramerovo pravidlo* a jako „bonus“ řešení soustav pomocí inverzní matice. V souboru **Soustavy rovnic – iterační metody** jsou popsány iterační metody:

Prostá iterace, Jacobiova iterační metoda, Gaussova- Seidlova metoda. Vše je samozřejmě doplněno příklady, ve kterých je možné měnit vstupní hodnoty v barevně označených buňkách a sledovat změny v řešení úlohy. Některé metody, ať už přímé nebo iterační, pochopí uživatel nejlépe až při sledování konkrétního řešení úlohy. Sám vidí, jak se pracuje s jednotlivými hodnotami a jak jednotlivá konkrétní změna ovlivní výsledné řešení.

Tyto soubory by uplatnění na střední školách nacházely jen velmi zřídka, ale pro studenty vysokých škol mohou být neocenitelnou pomocí, zvláště při pochopení jednotlivých metod. Ovšem ani použití souborů pro nadané studenty se nebráním, určitě se mohou hodit jako ukázka toho, že matematika jde dále, než jen na hranici osnov.

8. Výuka numerické matematiky

Tuto kapitolu zabývající se hodnocením výuky numerické matematiky jsem rozdělil do dvou částí. Hodnotil jsem jednak její výuku na středních školách a jednak její výuku z hlediska budoucích učitelů matematiky a informatiky.

8.1. Výuka numerické matematiky na VŠ Pedagogických

Numerická matematika nepatří na učitelských oborech vysokých škol mezi standardně zařazované celky. Pokud už jsou kapitoly z numerické matematiky vůbec zařazeny, jedná se spíše o volitelné nebo nepovinné semináře, nebo jsou součástí některého dalšího předmětu, většinou Algebry a aritmetiky.

Pouze jediná vysoká škola, a to Univerzita HK zařazuje numerickou matematiku jako povinnou na učitelském studiu matematiky i informatiky, jak pro základní, tak pro střední školu. Ovšem v celkovém pohledu se jedná o výjimku. Jihočeská univerzita v ČB vyučuje numerickou matematiku jako samostatný povinný předmět na učitelství matematiky, ale informatiky nikoliv. Naopak Univerzita JEP v Ústí nad Labem vyučuje numerickou matematiku jako samostatný volitelný předmět pouze na učitelském studiu informatiky, budoucí učitelé matematiky mají tento celek pouze jako součást předmětu Algebra a aritmetika, a to pouze některé numerické metody řešení rovnic.

Na ostatních vysokých školách je numerická matematika zařazovaná minimálně. Numerická matematika je zařazována spíše pro učitele středních škol, což je naprosto logické, protože na základních školách se nevyučuje vůbec. Masarykova univerzita v Brně numerickou matematiku nezařazuje vůbec, a to ani jako součást jiného předmětu. Univerzita Palackého v Olomouci na oboru informatika také ne, pouze na oboru matematika jsou jako součást předmětu Algebra 3 probírány metody půlení intervalu a metody sečen a tečen. Podobně je na tom Ostravská univerzita, kde je numerická matematika volitelný předmět pro budoucí učitele matematiky. Technická univerzita Liberec nevyučuje numerickou matematiku učitele matematiky a učitele informatiky pro základní školu, ale pro učitele informatiky pro střední školu je tento předmět povinný.

Na Univerzitě Karlově v Praze je numerická matematika součást jiných vyučovaných předmětů.

Po prozkoumání sylabů přednášek pedagogických fakult jednotlivých vysokých škol (viz Příloha č. 1 a Příloha č. 2) a po provedení malého průzkumu mezi učitele na středních školách (viz dotazníky na přiloženém CD) jsem došel k závěru, že budoucí učitelé nejsou na výuku numerické matematiky v podstatě připraveni. Těžko budou vyučovat něco, co sami neslyšeli.

8.2. Výuka numerické matematiky na SŠ

Podle „Generalizovaného učebního plánu“ není výuka numerické matematiky povinná. Je probírána na různých seminářích v naprosto odlišném rozsahu. Náplň seminářů se liší škola od školy, dokonce jsou značné rozdíly i mezi semináři vyučovanými různými učiteli na jedné škole. Obecně lze říci, že nejčastěji se v rámci hodin matematiky vyučuje Gaussova eliminační metoda. V rámci informatiky se kromě této metody vyučují také matice a determinanty.

Učitelé s aprobací matematika-informatika mohou vhodně zkombinovat výuku numerické matematiky v obou předmětech ideálním způsobem podle svého uvážení. Učitelé, kteří mají jinou aprobaci v kombinaci s matematikou, zařazují většinou jen část učiva, někdy pouze ve formě stručného seznámení se s danou problematikou. Je to dáno částečně i tím, že hodinová dotace matematiky je většinou 12-16 hodin (celkový počet za 4 roky studia), je nutné tedy pečlivě vybírat, které celky budou zařazeny a v jakém rozsahu. Přednost potom mají logicky ty kapitoly, které se vyskytují v požadavcích k přijímacímu řízení na vysoké školy. Učitelé informatiky tedy nemohou spoléhat na to, že žáci znají matematickou část problému z hodin matematiky a nemohou tedy navazovat na probrané učivo. Pokud chtějí probírat např. matice, musí buďto látku kompletně vyložit sami nebo se dohodnout s učitelem matematiky o propojení látky obou předmětů.

9. Závěr

Ve své diplomové práci jsem se věnoval problematice výuky numerické matematiky. Vytvořil jsem názorný studijní materiál, který se dá vhodně využít při výuce této oblasti matematiky. Napsal jsem studijní text a v návaznosti na něj jsem vytvořil interaktivní výukový program. Oba celky spolu úzce souvisí, je možné je při výuce používat jak společně tak odděleně nezávisle na sobě.

Vzhledem k tomu, že i přes poněkud rostoucí množství literatury věnované numerické matematice, stále chybí sbírky příkladů, ať už procvičovacích nebo dostatečně vysvětlujících danou metodu, považuji vytvoření programu za velký přínos. Sestavil jsem soubory, které jsou věnovány jednotlivým metodám numerické matematiky. Každá metoda je nejdříve názorně teoreticky vysvětlena a na výklad navazují příklady, u kterých má uživatel možnost sledovat řešení úlohy postupně v jednotlivých na sebe navazujících krocích od zadání úlohy až ke konečnému výsledku.

Těžištěm mé diplomové práce je tento interaktivní výukový program a s ním související studijní text. Kromě toho jsem se ve své práci věnoval i historickému vývoji numerické matematiky a problémům, které vznikají při řešení úloh - zdroje chyb a jejich šíření. Součástí mé diplomové práce je i průzkum, který jsem provedl mezi učiteli středních škol. Cílem tohoto průzkumu bylo zjistit rozsah výuky numerické matematiky.

Domnívám se, že jsem úkoly mě zadané beze zbytku splnil a že mnou vytvořený studijní text i program budou učitelům a jejich studentům k užitku.

10. LITERATURA

[1] Ralston, A.: Základy numerické matematiky. Praha, Academia 1978.

[2] Nekvinda, M. – Šrubař, J. – Vild, J.: Úvod do numerické matematiky. Praha, SNTL 1976.

[3] Vitásek, E.: Numerické metody. Praha, SNTL 1987.

[4] Míka, S.: Numerické metody algebry. Praha, SNTL 1982.

[5] Polák, J.: Přehled středoškolské matematiky. Praha, Prométheus 1981.

[6] Černá, M. – Machlický, M. – Vogel, J. – Zlatník, Č.: Základy numerické matematiky a programování. Praha, SNTL 1987.

[7] Hejkrlíková, R.: Numerické řešení rovnic a jejich soustav, Ústí n. L., Pedagogická fakulta UJEP v Ústí n. L 1997.

[8] Tesařík, B.: C.G.J.Jacobi - spoluzakladatel moderní matematiky. MFI - časopis pro výuku na základních a středních školách, ročník 14 (2005), č. 7.

[9] Folta, J.: Dějiny matematiky a fyziky v obrazech (šestý soubor). Praha, Jednota československých matematiků a fyziků 1988.

[10] Rektorys, K. a spolupracovníci: Přehled užité matematiky. Praha, SNTL 1981.

[11] Jochen, H.: Matematické vzorce. Praha, Mladá fronta 1996.

[12] Beckmann, P.: Historie čísla π. Praha, Akademia 1998.

[13] Děmidovič, B. P. – Maron I. A.: Základy numerické matematiky. Praha, SNTL 1966.

[14] Schmidtmayer, J.: Maticový počet a jeho použití v technice. Praha, SNTL 1967.

[15] Učební dokumenty pro gymnázia. Praha, Fortuna 1999.

[16] http://home.pf.jcu.cz/~novakp08/Matematika/Historie.htm

[17] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk

[18] http://en.wikipedia.org

11. Přílohy

Příloha č. 1 – str. 61

Přehled výuky numerické matematiky na VŠ pedagogických.

Příloha č. 2 – str. 62. -66

Sylaby předmětu numerická matematika na VŠ pedagogických

Příloha č. 3 – str. 67

Ukázka jednoho z mnoha příkladů vytvořených v MS Excel.

Příloha č. 4 – str. 68

Dotazník určený pro učitele středních škol.

Příloha č. 5 – str. 69

Obsah přiloženého CD.

Přehled výuky numerické matematiky na VŠ pedagogických

Výuka numerické matematiky na Pedagogických fakultách v oboru Matematika

Univerzita	Učitelství pro	
	ZŠ	SŠ
TU Liberec	Nevyučuje se	Nevyučuje se
Univerzita J.E. Purkyně v Ústí nad Labem	Nevyučuje se [1]	Nevyučuje se [2]
Západočeská univerzita v Plzni	Nevyučuje se	Volitelný
Univerzita Palackého v Olomouci	Nevyučuje se [3]	-
Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích	Povinný	Povinný
Ostravská univerzita v Ostravě	Volitelný	-
Univerzita Hradec Králové	Povinný	Povinný
Masarykova univerzita v Brně	Nevyučuje se	-
Univerzita Karlova v Praze	-	Volitelný

[1] součástí předmětu Algebra a aritmetika 1 – Některé metody numerického řešení rovnic
[2] součástí předmětu Algebra a aritmetika 2 – Některé metody numerického řešení rovnic
[3] součástí předmětu Algebry 3 – Numerické řešení algebraických rovnic – metoda půlení intervalu, tečen a tětiv

Výuka numerické matematiky na Pedagogických fakultách v oboru Informatika

Univerzita	Učitelství pro	
	ZŠ	SŠ
TU Liberec	Nevyučuje se	Povinný
Univerzita J. E. Purkyně v Ústí nad Labem	-	Povinný
Západočeská univerzita v Plzni	Volitelný	Povinný
Univerzita Palackého v Olomouci	Nevyučuje se	-
Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích	Nevyučuje se	Nevyučuje se
Ostravská univerzita v Ostravě	Nevyučuje se	-
Univerzita Hradec Králové	Povinný	Povinný
Masarykova univerzita v Brně	Nevyučuje se	-
Univerzita Karlova v Praze	-	Volitelný

Příloha č. 2

Sylaby předmětu numerická matematika na VŠ pedagogických

Univerzita: **TU Liberec**
Studijní program: **Učitelství pro SŠ – *obor informatika*** - Povinný předmět
Předmět: **Numerické metody**

Obsah předmětu

Metrické a normované prostory, Banachova věta o pevném bodě. Přehled základních numerických metod. Přímé a iterační metody pro řešení soustav lineárních (nelineárních) rovnic. Interpolace funkcí polynomy. Numerické řešení Cauchyovy úlohy a okrajové úlohy

Požadavky na studenta

Porozumění problematice a schopnost aplikovat dané metody na řešení konkrétních problémů.

Přehled probírané látky

Přednášky:
1. Metrické prostory:
Metrické a normované prostory, příklady. Základní topologické pojmy, konvergence. Banachův prostor, Banachova věta o pevném bodě, lineární zobrazení na Banachových prostorech, norma zobrazení.
2. Numerické metody lineární algebry:
a) Přímé metody pro řešení soustav lineárních rovnic. Gaussova eliminace pro třídiagonální soustavy. Podmíněnost soustavy, odhad chyby.
b) Iterační metody, normy a spektrální poloměr matic. Prostá, Jacobiho a Gauss-Seidelova iterační metoda. Podmínky konvergence.
3. Nelineární rovnice a jejich soustavy:
a) Metoda prostých iterací, metoda sečen a Newtonova metoda tečen.
b) Zobecněná metoda tečen a Newtonova-Kantorovičova metoda pro soustavy nelineárních rovnic.
4. Interpolace:
a) Formulace problému, uzly interpolace, interpolace polynomy, existence a jednoznačnost interpolačního polynomu.
b) Interpolace pomocí spline (kubický), různé typy okrajových podmínek.
c) Aproximace pomocí metody nejmenších čtverců.
5. Numerická integrace (k samostatnému nastudování):
Kvadraturní formule, stupeň přesnosti a odhad chyby kvadraturní formule. Obdélníkové, lichoběžníkové a Simpsonovo pravidlo.
6. Řešení obyčejných diferenciálních rovnic:
a) Cauchyova úloha pro rovnici 1. řádu a pro soustavu v normálním tvaru (Cauchyova úloha pro rovnici n - tého řádu).
b) Princip jednokrokových metod typu Runge-Kutty, konvergence metod.
c) Řešení okrajových úloh pro obyčejnou lineární diferenciální rovnici druhého řádu.
7. Numerické řešení úloh matematické fyziky:
a) Klasifikace lineárních parciálních diferenciálních rovnic druhého řádu dvou nezávislých proměnných.
b) Formulace základních úloh pro rovnice matematické fyziky (Laplaceova, Poissonova rovnice, rovnice vedení tepla a vlnová rovnice). Formulace Cauchyovy a smíšené úlohy.
c) Princip metody sítí pro řešení jednotlivých typů okrajových a počátečních úloh.

Literatura

Doporučená: *1. Nekvinda, M.- Šrubař, J.- Vild, J.: Úvod do numerické matematiky, Praha 1976. 2. Benda,J. - Černá,R.: Numerická matematika, ČVUT, skriptum 1994. 3. Dont, M. - Něničková, A. - Opic, B.: Numerické metody a matematická statistika - úlohy, ČVUT, Praha 1984. 4. Brzezina, M. - Dvořák, M. - Kalousek, Z. - Salač, P. - Staněk, J. - Šimůnková, M.: Matematika IV, Skriptum TUL, Liberec 1996. 5.*

Univerzita: **Západočeská univerzita v Plzní**
Studijní program: **Učitelství pro SŠ – *obor matematika*** - Volitelný předmět
Předmět: **Software numerických metod**

Obsah předmětu
Pojem algoritmu. Algoritmizace matem. úloh. Zákl. pojmy z lin. algebry. Přímé metody řešení soustav lin. - Gaussova metoda, trojúhelníková metoda, upravené metody. Iterační metody - Gauss - Seidlova metoda, Jacobiho metoda, metoda největšího spadu, relaxační metody.Základní pojmy z matematické analýzy. Metody na hledání kořenů polynomů. Metoda půl. intervalů, metoda sečen, Newtonova metoda. Modifikace Mem. derivování a integrování.
Požadavky na studenta
Přehled probírané látky
Pojem algoritmu. Algoritmizace matem. úloh. Zákl. pojmy z lin. algebry. Přímé metody řešení soustav lin. - Gaussova metoda, trojúhelníková metoda, upravené metody. Iterační metody - Gauss - Seidlova metoda, Jacobiho metoda, metoda největšího spadu, relaxační metody.Základní pojmy z matematické analýzy. Metody na hledání kořenů polynomů. Metoda půl. intervalů, metoda sečen, Newtonova metoda. Modifikace Mem. derivování a integrování.
Literatura
Doporučená: • *Ralston*,

Univerzita: **Jihočeská v Českých Budějovicích**
Studijní program: **Učitelství pro ZŠ– *obor matematika*** – povinný předmět
Studijní program: **Učitelství pro SŠ – *obor matematika* –** povinný předmět
Předmět: **Numerické metody**

Obsah předmětu
Algoritmus, chyby a nepřesnosti, základy intervalové analýzy, stabilita a podmíněnost, řešení soustav lineárních rovnic (přímé a iterační metody), výpočet vlastních čísel, řešení rovnic (metode bisekce, Newtonova, sečen), aproximace funkcí, interpolace, metoda nejmenších čtverců, výpočet integrálu, řešení počáteční úlohy, užití MAPLE V.
Požadavky na studenta
1 test v semestru, domácí práce, zkouška.
Přehled probírané látky
Literatura
Doporučená: • MÍKA, S.: *Numerické metody algebry. Praha, MVŠT*, , 1982 • PŘIKRYL, S.: *Numerické metody. ZU Plzeň,*, , 1994 • RALSTON, A.: *Základy numerické matematiky. Praha, Academia*, , 1973

Univerzita: **Západočeská univerzita v Plzni**
Studijní program: **Učitelství pro SŠ – *obor informatika*** – povinný předmět
Studijní program: **Učitelství pro ZŠ– *obor informatika*** – volitelní předmět
Předmět: **Numerické metody**

Obsah předmětu

Nepřesnosti (chyby) při řešení úloh, platnost výsledků. Deterministické a stochastické metody. Korektnost, podmíněnost úlohy a numerická stabilita; ukončení výpočtu. Užití počítače pro řešení numerických úloh Volba aplikace. Volba metody (algoritmu). Metody řešení nelineárních rovnic. Metoda Zlatého řezu pro určení lokálního minima. Aproximace, Interpolace, Polynomiální aproximace metodou nejmenších čtverců. Trigonometrická konečná Fourierova řada. Numerický výpočet určitého integrálu. Řešení soustavy lineárních algebraických rovnic. Špatně podmíněné soustavy. Přímé metody (finitní). Normy matic. Maticové iterační metody. Implementace numerických metod. Metody Monte Carlo. Genetické algoritmy. Numerické metody a Matlab, Maple a Mathematica.

Požadavky na studenta

Úspěšné vypracování 2 seminárních prací.

Přehled probírané látky

Literatura

Doporučená:

- BARTSCH, H. J.: *Matematické vzorce*, Praha , 1996
- MÍKA, S.: *Numerické metody algebry*, Praha , 1985
- PŘIKRYL, P.: *Numerické metody matematické analýzy*, Praha , 1988
- RALSTON, A.: *Základy numerické matematiky*, Praha , 1987
- VITÁSEK, E.: *Numerické metody*, Praha , 1987

Univerzita: **Univerzita J. E. Purkyně v Ústí nad Labem**
Studijní program: **Učitelství pro SŠ – *obor informatika*** - Povinný předmět
Předmět: **Numerická matematika**

Obsah předmětu

Obsahem kurzu je základní přehled numerických metod v lineární a nelineární algebře a v problematice aproximace funkce. Hlavním cílem je umožnit orientaci v okruhu vybraných problémů, které jsou za použití moderní výpočetní techniky úspěšně řešeny a získat představu o prostředcích numerické matematiky pro řešení složitých úloh aplikované matematiky.

Požadavky na studenta

Přehled probírané látky

Literatura

Univerzita: **Univerzita Hradec Králové**
Studijní program: **Učitelství pro ZŠ–** ***obor matematika*** – povinný předmět
Předmět: **Numerická matematika a počítačová geometrie**

Anotace předmětu	Předmět navazuje na předměty matematického základu pro studenty učitelství základní školy. Základní znalost numerické matematiky je důležitou součástí znalostí každého matematika. Počítačová geometrie pak přímo navazuje na problematiku, se kterou se studenti seznámili v geometrii. Numerická matematika a počítačová geometrie má dnes s nárůstem důležitosti počítačů významné použití v praxi.
Cíle předmětu a charakteristika získaných dovedností	Seznámit studenty s cílem a užitím numerické matematiky v praxi.
Osnova předmětu ve vztahu k časovému rozvrhu výuky	1. Úvod. 2. - 3. Interpolace. 4. Metoda nejmenších čtverců. 5. Aproximace pomocí křivek a ploch. 6. Numerická derivace a integrace. 7. Numerické řešení obyčejných diferenciálních rovnic. 8. Numerické řešení rovnice f(x) = 0. 9. Numerické řešení soustav lineárních rovnice. 10. Rovinné transformace. 11. - 12. Prostorové transformace. 13. Zobrazování prostorových objektů. 14. - 15. Fraktální geometrie.
Literatura, na níž je předmět vystavěn	Ralston, A.: Úvod do numerické matematiky, SNTL, 1981
Literatura doporučená studentům	Ralston, A.: Úvod do numerické matematiky, SNTL, 1981
Způsob a pravidla výsledné klasifikace předmětu	Úspěšné absolvování písemné i ústní části zkoušky

Univerzita: **Univerzita Hradec Králové**
Studijní program: **Učitelství pro ZŠ –** ***obor informatika*** – povinný předmět
Studijní program: **Učitelství pro SŠ –** ***obor informatika*** – povinný předmět
Předmět: **Numerické metody**

1. Úvod, počítání s neúplnými čísly
2. Matice, determinanty
3. Řešení soustav lineárních rovnic
4. Řešení nelineární rovnice
5. Numerická integrace
6. Numerická derivace
7. Numerické řešení diferenciálních rovnic

Příloha č. 2

Univerzita: **Univerzita Hradec Králové**
Studijní program: **Učitelství pro SŠ–** ***obor matematika*** **–** povinný předmět
Předmět: **Výpočetní technika 2**

Anotace předmětu	Lagrangeův a Newtonův tvar interpolačního polynomu. Metoda nejmenších čtverců. Numerická derivace a integrace. Řešení rovnic i soustav rovnic lineárních a diferenciálních rovnic. Homogenní souřadnice v rovině a v trojrozměrném prostoru. Transformace v rovině a trojrozměrném prostoru. Aproximační křivky a plochy. Tvorba fraktálů na základě L-systému. Mandelbrotova a Juliova množina.
Cíle předmětu a charakteristika získaných dovedností	Studenti naprogramují v systému Mathematica základní numerické metody a základní algoritmy počítačové a fraktální geometrie.
Osnova předmětu ve vztahu k časovému rozvrhu výuky	1. Lagrangeův a Newtonův tvar interpolačního polynomu. 2. Aproximace funkce pomocí metody nejmenších čtverců. 3. Aproximační křivky B-spline, Fergusonovy a Bézierovy křivky. 4. Aproximační plochy - B-spline, Fergusonovy a Bézierovy plochy. 5. Numerická integrace (Simpsonova a lichoběžníková metoda). 6. Řešení nelineární rovnice f(x)=0 pomocí metody půlení, metody sečnové. 7. Řešení nelineární rovnice f(x)=0 pomocí metod iteračních (Newtonova tečnová metoda). 8. Řešení soustav lineárních rovnic pomocí Cramerova pravidla, prosté iterační metody a Seidelovy iterační metody. 9. Počáteční problém pro obyčejnou diferenciální rovnici 1. řádu, metody jednokrokové a vícekrokové (explicitní i implicitní). 10. Počáteční problém pro obyčejnou diferenciální rovnici n-tého řádu a soustavu n diferenciálních 1. řádu v normálním tvaru. 11. Homogenní souřadnice v rovině a základní rovinné transformace. 12. Homogenní souřadnice v prostoru a základní trojrozměrné transformace prostoru (včetně promítacích metod). Zobrazování prostorových útvarů, viditelnost a osvětlovací metody. 13. Vytváření fraktálů pomocí L -systémů. 14. Vytvoření Juliovy a Mandelbrotovy množiny.
Literatura, na níž je předmět vystavěn	Černá, R., Machlický, M., Vogel, J., Zlatník, Č., Základy numerické matematiky a programování, SNTL 1987 ŽÁRA, Jiří, Počítačová grafika : principy a algoritmy Praha, Grada, 1992 Zahradník, J. , Lineární programování při řízení hospodářství, SNTL Praha 1969
Literatura doporučená studentům	Ralston, A. , Základy numerické matematiky, Academia Praha 1978 Crownover R., M., Introduction to fractals and chaos, Jones and Bartlett Publishers, London—Boston,1995
Způsob a pravidla výsledné klasifikace předmětu	Úspěšné absolvování písemné a ústní části zkoušky.

Ukázka jednoho z mnoha příkladů vytvořených v MS Excel.

Příklad: Řešení soustavy 3 rovnic o 3 neznámých Jacobiovou iterační metodou.

Zadání: Zadejte rozšířenou matici soustavy, kterou chcete pomocí Jacobiovy iterační metody vyřešit (na hlavní diagonále nesmí být nulový prvek) a libovolný vektor x.

$$A|b=\left(\begin{array}{ccc|c} 9 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 5 & 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ -0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}1 \end{array}\right) \qquad x=\begin{pmatrix} -0{,}2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Řešíme tedy soustavu:

$$\begin{aligned} 9{,}0000x + 0{,}1000y + 0{,}1000z &= 0{,}1000 \\ 5{,}0000x + 0{,}8000y + 0{,}1000z &= 0{,}2000 \\ -0{,}2000x + 0{,}2000y + 0{,}5000z &= 0{,}1000 \end{aligned}$$

Řešení:

0. Ověříme, zda pro všechny prvky a_{ii} (pro i=1, 2, 3) platí $a_{ii} \neq 0$. (Pokud to neplatí, tak zadanou soustavu nelze řešit Jacobiovou iterační metodou)

$a_{11} = 9$

$a_{22} = 0{,}8$

$a_{33} = 0{,}5$

Podmínka splněna

1. Vyšetříme, zda daná soustava splňuje postačující podmínky konvergence Jacobiovi iterační metody, tzn. zda matice A je diagonálně dominantní. (Matice je diagonálně dominantní, právě když splňuje alespoň jednu z nerovností: (8) .)

	$\sum_{j=1; j\neq i}^{n} \lvert a_{ij} \rvert$	<	$\lvert a_{ii} \rvert$
i=1	5,2	<	9
i=2	0,3	<	0,8
i=3	0,2	<	0,5

Soustava splňuje první nerovnost z (8).

	$\sum_{i=1; i\neq j}^{n} \lvert a_{ij} \rvert$	<	$\lvert a_{jj} \rvert$
j=1	0,2	<	9
j=2	5,1	≥	0,8
j=3	0,4	<	0,5

Soustava nesplňuje druhou nerovnost z (8).

Matice je diagonálně dominantní.

Jacobiuv iterační proces bude konvergentní.

2. Zadanou soustavu převedeme na soustavu ve tvaru: (6)

a) Z první rovnice soustavy vyjádřím neznámou **x**: $x = -0{,}0111y - 0{,}0111z + 0{,}0111$

b) Z druhé rovnice soustavy vyjádřím neznámou **y**: $y = -6{,}2500x - 0{,}1250z + 0{,}2500$

c) Z třetí rovnice soustavy vyjádřím neznámou **z**: $z = 0{,}4000x - 0{,}4000y + 0{,}2000$

3. Jacobiova matice (7) této soustavy je:

$$B=\begin{vmatrix} 0 & -0{,}01111 & -0{,}0111 \\ -6{,}25 & 0 & -0{,}125 \\ 0{,}4 & -0{,}4 & 0 \end{vmatrix} \qquad d=\begin{vmatrix} 0{,}01111 \\ 0{,}25 \\ 0{,}2 \end{vmatrix}$$

4. Nyní můžeme začít provádět jednotlivé kroky vlastní iterace podle vzorce: (4)

Ukažme si, jak bychom tedy postupovali u první iterace (1.):

a) vypočteme prvek $x^{(1)} = B\,x^{(0)} + d = 0 * (-0{,}2) + (-0{,}011) * (-3) + (-0{,}011) * (-4) + 0{,}011 = 0{,}089$

b) vypočteme prvek $y^{(1)} = B\,y^{(0)} + d = -6{,}25 * (-0{,}2) + 0 * (-3) + (-0{,}125) * (-4) + 0{,}25 = 2$

c) vypočteme prvek $z^{(1)} = B\,z^{(0)} + d = 0{,}4 * (-0{,}2) + (-0{,}4) * (-3) + 0 * (-4) + 0{,}2 = 1{,}32$

a další iterace by byly následující:

1.	0,08889	2,00000	1,32000
2.	-0,02578	-0,47056	-0,56444
3.	0,02261	0,48167	0,37791
4.	0,00156	0,06144	0,01638
5.	0,01025	0,23820	0,17605
6.	0,00651	0,16395	0,10882
7.	0,00808	0,19572	0,13702
8.	0,00741	0,18237	0,12494
9.	0,00770	0,18804	0,13002
10.	0,00758	0,18564	0,12786
11.	0,00763	0,18666	0,12877
12.	0,00761	0,18623	0,12839
13.	0,00762	0,18641	0,12855
14.	0,00761	0,18634	0,12848
15.	0,00761	0,18637	0,12851
16.	0,00761	0,18635	0,12850
17.	0,00761	0,18636	0,12850
18.	0,00761	0,18636	0,12850
19.	0,00761	0,18636	0,12850
20.	0,00761	0,18636	0,12850
21.	0,00761	0,18636	0,12850
22.	0,00761	0,18636	0,12850
23.	0,00761	0,18636	0,12850
24.	0,00761	0,18636	0,12850
25.	0,00761	0,18636	0,12850
26.	0,00761	0,18636	0,12850
27.	0,00761	0,18636	0,12850
28.	0,00761	0,18636	0,12850
29.	0,00761	0,18636	0,12850
30.	**0,00761**	**0,18636**	**0,12850**

5. Provedeme zkoušku:

$L_1 = 9*0{,}0076 + 0{,}1*0{,}1864 + 0{,}1*0{,}1285) = 0{,}1$ $\qquad P_1 = 0{,}1$

$L_2 = 5*0{,}0076 + 0{,}8*0{,}1864 + 0{,}1*0{,}1285) = 0{,}2$ $\qquad P_2 = 0{,}2$

$L_3 = -0{,}2*0{,}0076 + 0{,}2*0{,}1864 + 0{,}5*0{,}1285) = 0{,}1$ $\qquad P_3 = 0{,}1$

Dotazník určený pro učitele středních škol

Škola:
Vystudovaný obor:
Konkrétní VŠ:

Učí se žáci u Vás na škole, základní pojmy z lineární algebry jako jsou:

Matice	ANO	NE
Determinant	ANO	NE
Hodnost matice	ANO	NE
Normy matic a vektorů	ANO	NE

Vyučujete u Vás na škole tyto metody řešení algebraických rovnic? Byli jste s danou látkou sami seznámeni při studiích na vysoké škole?

	Vyučujete?		Byli jste seznámeni?	
Gaussova eliminační metoda	ANO	NE	ANO	NE
Gausova eliminační metoda s výběrem hlavních prvků	ANO	NE	ANO	NE
Choleského rozklad	ANO	NE	ANO	NE
LU rozklad	ANO	NE	ANO	NE
Prostá iterace	ANO	NE	ANO	NE
Jacobiova iterační metoda	ANO	NE	ANO	NE
Gaussova-Seidelova metoda	ANO	NE	ANO	NE

Vyučujete u Vás na škole tyto metody řešení rovnice o jedné neznámé? Byli jste s danou látkou sami seznámeni při studiích na vysoké škole?

	Vyučujete?		Byli jste seznámeni?	
Metoda půlení intervalu	ANO	NE	ANO	NE
Metoda regula falsi	ANO	NE	ANO	NE
Metoda sečen	ANO	NE	ANO	NE
Metoda tečen	ANO	NE	ANO	NE

Jiné numerické metody Vámi vyučované na střední škole:

Literatura pro výuku numerické matematiky, z které čerpáte:

Literatura, kterou při výuce numerické matematiky používají žáci:

Obsah přiloženého CD

1. **Výukové programy vytvořené v programu MS Excel:**

   a) Zaklady linearni algebry.xls

   b) Rovnice o jedne nezname.xls

   c) Soustavy rovnic – přímé metody.xls

   d) Soustavy rovnic – iterační metody.xls

2. **Diplomová práce ve formátu PDF.**

3. **Dotazníky (viz. příloha č. 3) vyplněné učiteli středních škol.**