VYSOKÁ ŠKOLA CHEMICKO-TECHNOLOGICKÁ
FAKULTA CHEMICKO-INŽENÝRSKÁ
KATEDRA AUTOMATIZACE CHEMICKÝCH VÝROB

Kandidátská disertační práce

Řiditelnost, pozorovatelnost a stabilita dynamických systémů

Praha, leden 1970

Ing. Miloslav Hájek

Prohlašuji na svou čest, že jsem tuto práci vypracoval samostatně a všechnu použitou literaturu jsem řádně uvedl.

Miroslav Hájek

Obsah

Seznam symbolů 7

1 Dynamický systém 12

1.1 Úvod 12

1.2 Dynamický systém 15

1.3 Ekvivalentní dynamické systémy 20

1.4 Řiditelnost a pozorovatelnost dynamického systému 21

1.5 Kalmanova kanonická struktura dynamického systému 25

1.6 Dynamický systém a Laplaceova transformace 27

1.7 Realizace přenosové matice dynamického systému 30

1.8 Jordanova kanonická forma dynamického systému 32

1.9 Shrnutí 36

2 Řiditelnost a pozorovatelnost dynamického systému 37

2.1 Podmínky řiditelnosti a pozorovatelnosti dynamického systému 37

2.2 Duální dynamické systémy 39

2.3 Podmínky řiditelnosti a pozorovatelnosti dynamického systému v Jordanově kanonickém tvaru 40

2.4 Stabilita dynamického systému 42

2.5 Shrnutí 44

3 Složené dynamické systémy 45

3.1 Paralelní spojení dynamických systémů 47

3.2 Seriové spojení dynamických systémů 52

3.3 Zpětnovazebné spojení dynamických systémů 60

3.4 Shrnutí 70

4 Víceparametrová regulace chemického reaktoru 71

4.1 Matematický model průtočného míchaného reaktoru 71

4.2 Syntéza autonomního regulačního obvodu užitím inversního modelu 74

4.3 Stabilita autonomního regulačního obvodu 76

4.4 Shrnutí 81

Závěr 82

Dodatky 84

A Některé vlastnosti matice e^{At} 84

B Řešení souhrnných rovnic dynamického systému 86

C Smithova a Smith-McMillanova kanonická forma; charakteristický polynom racionální matice 87

D Jordanova irreducibilní kanonická realizace 90

E Důkazy 97

E.1 Důkaz věty 2.1 97

E.2 Důkaz věty 2.4 98

E.3 Důkaz věty 2.9 99

E.4 Důkaz věty 3.8 100

E.5 Důkaz věty 3.14 105

Seznam literatury 108

Předmluva

Moderní teorie regulace se zabývá vyššími formami řízení složitých fysikálních systémů jako celku. Požadavek řídit složité systémy s mnoha vstupy a mnoha výstupy je typický právě pro chemický průmysl. Jedním z nejdůležitějších a nejobtížnějších problémů při analyse a syntéze regulačního obvodu je získání odpovídajícího matematického popisu chování fysikálního systému. V teorii regulace je často chování fysikálních systémů popisováno vztahy mezi vstupy a výstupy užitím Laplaceovy transformace. Ukazuje se , že takový popis nemusí být vždy úplný a že si proto zasluhuje podrobnější rozbor, o který se pokouší tato práce.

Práce je rozdělena do čtyř kapitol. V první kapitole je axiomaticky definován dynamický systém a některé jeho vlastnosti, z nichž nejdůležitější jsou řiditelnost a pozorovatelnost. Dále je zde uveden vztah mezi dynamickým systémem a jeho přenosovou maticí. Ve druhé kapitole jsou formulovány podmínky řiditelnosti, pozorovatelnosti a stability dynamického systému. Stěžejní částí práce je kapitola třetí, v níž jsou formulovány podmínky řiditelnosti, pozorovatelnosti a stability složených dynamických systémů. Čtvrtá kapitola je věnována aplikaci dosažených výsledků na regulaci chemického reaktoru. Na konci práce jsou připojeny dodatky, v nichž jsou shrnuty některé poznatky z lineární algebry a uvedeny obtížnější důkazy některých vět z předcházejících kapitol.

K označení vět, definic a poznámek je užito dvojčíslí. První číslo resp. písmeno udává kapitolu resp. dodatek, druhé číslo udává pořadí příslušné věty, definice či poznámky v příslušné kapitole (dodatku). Rovnice jsou číslovány obdobně, avšak číslo (písmeno) kapitoly (dodatku) je uvedeno pouze při odkazu mezi dvěma různými kapitolami.

Seznam symbolů

Za symbolem uvádíme jeho název; vlastnost (je-li v celé práci stejná); kapitolu nebo vztah, kde je symbol definován, případně poprvé uveden. U symbolů s obecnou platností neuvádíme místo, kde je symbol definován, případně poprvé uveden. Význam symbolů, které nejsou uvedeny v seznamu, plyne z textu. Některé symboly mají více významů, avšak z textu plyne jednoznačně jejich správný význam.

A	matice v dynamickém systému S; $A\in C^{nn}$; kap.1.2
A^{ij}	submatice matice A; kap.1.4
{A,B,C,D}	dynamický systém charakterisovaný maticemi A,B,C,D; kap.1.2
adj(.)	adjungovaná matice k matici (.)
b^i_{jk}	k-tý řádek matice B^i_j; $b^i_{jk}\in C^p$; kap.1.8
B	matice v dynamickém systému S; $B\in C^{np}$; kap.1.2
B^i	submatice matice B; kap.1.4
$\mathcal{B}^i_1$	matice; (1.26)
c^i_{jk}	k-tý sloupec matice C^i_j; $c^i_{jk}\in C^q$; kap.1.8
C	matice v dynamickém systému S; $C\in C^{qn}$; kap.1.2
C	množina komplexních čísel
C^n	množina uspořádaných n-tic komplexních čísel; kap.1.2
C^{qp}	množina matic typu qxp s komplexními elementy; kap.1.2
C^i	submatice matice C; kap.1.4
$\mathcal{C}^i_1$	matice; (1.26)
D	matice v dynamickém systému S; $D\in R^{qp}$; kap.1.2
det(.)	determinant matice (.)
diag	diagonální matice; kap.1.8
dim A	dimense matice A; dod.D
e_i	i-tý vektor v ortonormální basi prostoru C^n; kap.1.3

E	polynomální matice s konstantním nenulovým determinantem; $E \in C^{qq}$; dod.C
f	zobrazení; kap.1.2
F	polynomální matice s konstantním nenulovým determinantem; $F \in C^{pp}$; dod.C
$F^i_{r(i)}$	matice; (D.24)
g	zobrazení; kap.1.2
G	přenosová matice dynamického systému S; $G \in C^{qp}$; kap.1.6
H^i	matice; (D.10)
$H^i_{r(i)}$	matice; (D.24)
I	jednotková matice
I_p	jednotková matice p-tého řádu; kap.3.3
J	Jordanova matice; kap.1.8
L	polynom; (3.46)
$L[.]$	Laplaceův obraz funkce [.]; kap.1.6
m	počet různých vlastních hodnot matice A; kap.1.8
M	polynom; (3.45)
N	polynom; (3.48)
n	dimense dynamického systému S; kap.1.2
n_o	dimense irreducibilní realizace; kap.1.7
N	polynom; (3.45)
p	počet vstupních veličin dynamického systému; kap.1.2
P	konstantní regulární matice; $P \in C^{nn}$; kap.1.3
P	polynomální matice; dod.C
P	operátor; def.D.1
q	počet výstupních veličin dynamického systému; kap.1.2
$r(i)$	počet Jordanových bloků příslušejících vlastní hodnotě λ_i; kap.1.8
R	množina reálných čísel
R^q	prostor výstupních veličin dynamického systému; množina uspořádaných q-tic reálných čísel; kap.1.2

R^{qp}	množina matic typu $q \times p$ s reálnými elementy; kap.1.2
$R(\cdot)$	hodnost matice (.); kap.2.3
Re	reálná část
s	argument v Laplaceově transformaci; $s \in C$; kap.1.6
S	dynamický systém; $S \equiv \{A,B,C,D\}$; kap.1.2
S_i	i-tý dynamický systém; $S_i \equiv \{{}_iA, {}_iB, {}_iC, {}_iD\}$; kap.3
S_D	duální dynamický systém; kap.2.2
t	nezávisle proměnná dynamického systému; $t \in T$; kap.1.2
T	obor definice dynamického systému; $T \subset R$; kap.1.2
u	vstup dynamického systému; $u \in U$; kap.1.2
$u_{(t_0,t\rangle}$	restrikce funkce $u(t)$ na množině $(t_0,t\rangle$; kap.1.2
$\hat{u}(s)$	Laplaceův obraz funkce $u(t)$; $\hat{u}(s) = L[u(t)]$; kap.1.6
U	prostor vstupních veličin dynamického systému; množina všech po částech spojitých funkcí definovaných na T s hodnotami v Ω; kap.1.2
x	stav dynamického systému; $x \in \Sigma$; kap.1.2
x^i	subvektor vektoru x; kap.1.4
$\dot{x}(t) \triangleq \frac{dx(t)}{dt}$	; kap.1.2
$\hat{x}(s)$	Laplaceův obraz funkce $x(t)$; $\hat{x}(s) = L[x(t)]$; kap.1.6
y	výstup dynamického systému; $y \in R^q$; kap.1.2
$y_{(t_0,t_1\rangle}$	restrikce funkce $y(t)$ na množině $(t_0,t_1\rangle$; kap.1.4
$\hat{y}(s)$	Laplaceův obraz funkce $y(t)$; $\hat{y}(s) = L[y(t)]$; kap.1.6
γ_j	invariantní faktor polynomální matice P; dod.C
Γ	matice; dod.C
δ_j	největší společný dělitel všech minorů řádu j polynomální matice P; dod.C
Δ	charakteristický polynom dynamického systému; $\Delta = \det(sI-A)$; kap.1.8
$\hat{\Delta}$	charakteristický polynom přenosové matice G; def.C.1
$\hat{\Delta}_j$	nejmenší společný jmenovatel všech minorů řádu j přenosové matice G; dod.C

$\eta(t)$	jednotková funkce; kap.3.2
ϑ_j	polynom; (C.4)
Θ	matice; dod.C
λ_i	i-tá vlastní hodnota matice A; kap.1.8
${}_i\Lambda$	množina různých vlastních hodnot matice ${}_iA$; (3.8)
$\rho(.)$	stupeň polynomu (.); kap.2.4
Σ	stavový prostor dynamického systému S; metrický prostor; kap.1.2
Σ_i	stavový prostor dynamického systému S_i; metrický prostor; kap.3
τ	nezávisle proměnná dynamického systému; $\tau \in T$; kap.1.2
ϕ	zobrazení; kap.1.2
ψ_j	invariantní faktor přenosové matice G; dod.C
Ψ	matice; dod.C
Ω	metrický prostor; kap.1.2
$\lVert x \rVert$	norma vektoru x; kap.2.4
$*$	konvoluce; dod.B
$\oplus$	přímý součet; pozn.D.1
$\times$	kartézský součin; kap.1.2
$\cap$	průnik; kap.1.2
$\setminus$	rozdíl množin; kap.3.2
$\forall$	pro všechna; kap.1.2
$\cong$	ekvivalence dynamických systémů; kap.1.3
$a \mid b$	a dělí b; kap.3.3
$\triangleleft$	konec důkazu nebo poznámky
${}_i()$	objekt () přísluší dynamickému systému S_i
$()^i$	objekt () přísluší vlastní hodnotě λ_i
$()^i_j$	objekt () přísluší j-tému Jordanovu bloku a vlastní hodnotě λ_i
$()_i$	i-tá složka vektoru ()

$()^*$	konjugovaná matice k matici ()
$()^{-1}$	inversní matice k matici ()

1 Dynamický systém

V této kapitole uvedeme definici a některé vlastnosti dynamických systémů: ekvivalenci, řiditelnost, pozorovatelnost a Kalmanovu kanonickou strukturu. Dále se budeme zabývat vztahem mezi dynamickým systémem a Laplaceovou transformací a v závěru kapitoly uvedeme Jordanovu kanonickou formu dynamického systému.

1.1 Úvod

Každý fysikální systém je složen z nějakých prvků, mezi nimiž existují nějaké vztahy. Chování fysikálního systému závisí na chování jednotlivých prvků a na vztazích mezi nimi. Chováním jakéhokoli systému rozumíme závislost výstupních veličin tohoto systému na veličinách vstupních. Ke zkoumání fysikálních systémů můžeme přistupovat v zásadě dvěma způsoby, mezi nimiž samozřejmě neexistuje ostré dělítko: první způsob je založen na experimentu, druhý způsob spočívá v odhalování fysikálních zákonů, kterými se řídí chování fysikálních systémů.

Nechť je dán neznámý fysikální systém s nějakými vstupy a nějakými výstupy. Měřením závislosti výstupů na vstupech můžeme (ale také nemusíme) získat odpověď na otázku, jaké je chování fysikálního systému. Experimentální způsob zkoumání chování fysikálního systému nemusí odhalovat zákony tohoto chování, ale pouze chování fysikálního systému popisuje. Naopak aplikací platných fysikálních zákonů na jednotlivé prvky daného fysikálního systému (tato aplikace se děje skoro vždy za určitých zjednodušujících předpokladů) můžeme získat matematický model fysikálního systému, neboli abstraktní systém, jehož chování by mělo být stejné jako chování původního fysikálního systému.

Způsoby matematického popisu chování fysikálních systémů lze rozdělit podle výše uvedených hledisek na

a) popis pomocí vztahů mezi vstupy a výstupy,

b) popis pomocí stavových proměnných,

i když netvrdíme, že popis pomocí vztahů mezi vstupy a výstupy musel být nutně získán experimentálně.

Ve starší literatuře, která se zabývá teorií regulace, je fysikální systém vesměs popisován přenosovými funkcemi, tj. vztahy mezi vstupy a výstupy. Tyto přenosové funkce jsou získány buď experimentálně, nebo z diferenciálních rovnic, popisujících fysikální systém, užitím Laplaceovy transformace. Novější literatura zakládá své závěry na popisu fysikálního systému pomocí stavových proměnných. Protože užití přenosových funkcí k popisu fysikálního systému je velmi výhodné, bude jistě důležité znát, kdy a za jakých omezení jsou oba způsoby popisu ekvivalentní.

Teorie regulace se zabývá skutečnými fysikálními systémy a nikoli pouze matematickými objekty, jako např. diferenciálními rovnicemi, přenosovými funkcemi apod. Musíme proto věnovat pozornost vztahu mezi fysikálním systémem a jeho matematickou representací. V této práci se budeme zabývat fysikálními systémy, jejichž chování je popsáno matematickými modely, které nazýváme dynamické systémy.

Chování takového fysikálního systému v budoucnu je určeno počátečním stavem systému a vnějšími silami, které budou na systém působit. Stav systému budeme chápat abstraktně a intuitivně můžeme říci, že je to nejmenší množství informace o minulosti systému, dostatečné k tomu, aby bylo možno předpovědět vliv minulosti na budoucnost. Nyní přistoupíme k definici dynamického systému jakožto matematického modelu skutečného fysikálního systému.

1.2 Dynamický systém

V této kapitole nejprve uvedeme obecnou axiomatickou definici dynamického systému (dynamical system) [1,26,45] a v závěru kapitoly specifikujeme třídu dynamických systémů, se kterými se budeme dále zabývat.

Úvodem několik označení. Nechť T je podmnožina reálných čísel; nechť Σ je metrický prostor; nechť Ω je metrický prostor a U je množina všech po částech spojitých funkcí (s body nespojitosti 1. druhu) definovaných na T s hodnotami v Ω. Nechť R^q je q-dimensionální Eucleidův prostor. Nechť x(t) je funkce definovaná na T s hodnotami v Σ a nechť y(t) je funkce definovaná na T s hodnotami v R^q. Nechť $t_o, t \in T$ a $t_o \leq t$. Označme $(t_o, t\rangle$ množinu elementů T, které leží mezi t_o a t, tj.

$$(t_o, t\rangle = \{\tau : \tau \in T \text{ a } t_o < \tau \leq t\} . \tag{.1}$$

Dále označme $u_{(t_o,t\rangle}$ jako restrikci funkce $u \in U$ na množině $(t_o, t\rangle$.

Nechť ϕ: $T \times \Omega \times \Sigma \times T \rightarrow \Sigma$, tj.

$$x(t) = \phi[t;\ u_{(t_o,t\rangle},\ x(t_o)] , \tag{.2}$$

kde $t_o, t \in T$; $t \geq t_o$; $u \in U$; $x \in \Sigma$ a nechť g: $\Sigma \times \Omega \times T \rightarrow R^q$, tj.

$$y(t) = g[x(t),\ u(t),\ t] , \tag{.3}$$

kde $t \in T$; $x \in \Sigma$; $u \in U$.

Nyní můžeme přistoupit k definici dynamického systému.

Definice 1.1: Dynamický systém S je matematická struktura sestávající z množin T, Σ, Ω, U a R^q, z proměnných t, x(t), u(t) a y(t) a z funkcí ϕ a g tak, že splňuje axiomy 1.1 až 1.3.

Axiom 1.1: Pro všechna $t_o \in T$; $x(t_o) \in \Sigma$; $u \in U$; $t \in T$, $t \geq t_o$ platí rovnice (.2).

Axiom 1.2: Funkce ϕ splňuje následující podmínky:

a) Pro všechna $t_o, t \in T$; $u \in U$; $x(t_o) \in \Sigma$ je

$$\lim_{t \to t_o^+} \phi\left[t; u_{\langle t_o, t \rangle}, x(t_o)\right] = x(t_o).$$

b) Pro všechna $t_o, t_1, t \in T$, $t_o < t_1 \leq t$; $u \in U$; $x(t) \in \Sigma$ je

$$\phi\left[t; u_{\langle t_o, t\rangle}, x(t_o)\right] = \phi\left[t; u_{\langle t_1, t\rangle}, \phi\left[t_1; u_{\langle t_o, t_1 \rangle}, x(t_o)\right]\right].$$

c) Pro všechna $t_o, t_1, t \in T$, $t_o \leq t_1 \leq t$; $x(t_o) \in \Sigma$; $u, v \in U$, jestliže $u_{\langle t_o, t\rangle} = v_{\langle t_o, t\rangle}$ je

$$\phi\left[t_1; u_{\langle t_o, t\rangle}, x(t_o)\right] = \phi\left[t_1; v_{\langle t_o, t\rangle}, x(t_o)\right].$$

Axiom 1.3: Funkce ϕ, g jsou spojité vzhledem ke všem argumentům.

Množinu T budeme nazývat oborem definice (domain) dynamického systému; metrický prostor Σ budeme nazývat stavový prostor (state space) dynamického systému; množinu U budeme nazývat prostor vstupních veličin (input space) dynamického systému a prostor R^q budeme nazývat prostor výstupních veličin (output space) dynamického systému. Funkci $x(t) \in \Sigma$ budeme nazývat stav (state) dynamického systému; funkci $u(t) \in U$ budeme nazývat vstup (input) dynamického systému a vektorovou funkci $y(t) \in R^q$ budeme nazývat výstup (output) dynamického systému. Podmnožinu

$$\left\{x(\tau): x(\tau) = \phi\left[\tau; u_{\langle t_o, \tau\rangle}, x(t_o)\right] \ \forall\ \tau \in \langle t_o, t\rangle \cap T\right\}$$

stavového prostoru Σ budeme nazývat trajektorie (trajectory) dynamického systému na množině $\langle t_o, t\rangle \cap T$, vycházející z počátečního bodu $x(t_0)$ a generovaná vstupem $u_{(t_0,t)}$.

Poznámka 1.1: Axiom 1.1 říká, že okamžitý stav dynamického systému v čase $t>t_0$ je jednoznačně určen počátečním stavem v čase t_0 a vstupem na časovém intervalu $(t_0,t\rangle$, $t>t_0$. Hodnoty vstupu před časem t_0 a po čase t nemají vliv na okamžitý stav dynamického systému.

Axiom 1.2 uvádí podmínky, kterým musí vyhovovat změny stavu dynamického systému:

a) Výchozím bodem (starting point) trajektorie je právě $x(t_0)$, neboť funkce $x(t)$ je spojitá v bodě t_0 zprava.

b) Jestliže daný vstup přivede dynamický systém ze stavu $x(t_0)$ do stavu $x(t)$ po jisté trajektorii a stav $x(t_1)$ leží na této trajektorii, pak příslušná restrikce tohoto vstupu musí přivést dynamický systém také ze stavu $x(t_1)$ do stavu $x(t)$.

c) Dynamický systém nesmí umět předvídat (nonanticipatory), tj. budoucí hodnoty vstupu nesmí mít vliv na současný stav.

Axiom 1.3 zaručuje, že malé změny ve vstupu nebo stavu dynamického systému způsobí také malé změny na trajektorii dynamického systému. ◁

Dynamický systém je definován axiomaticky. Axiomy jsou voleny tak, aby ze všech možných matematických struktur (sestávajících z množin, proměnných a funkcí, které jsou uvedeny v definici 1.1) vymezovaly právě ty, které připadají v úvahu při popisu skutečných fysikálních systémů. Dynamický systém je tedy matematický model skutečného fysikálního systému.

V další části práce se budeme zabývat pouze specielní třídou dynamických systémů. Ke specifikaci této třídy definujme několik pojmů.

<u>Definice 1.2</u>: Dynamický systém S má konečnou dimensi, jestliže:

a) Stavový prostor Σ je Eucleidův prostor C^n.

b) Množina Ω, ve které leží hodnoty vstupů u, je Eucleidův prostor R^p, p≤n.

Číslo n nazýváme dimense (dimension) dynamického systému.

<u>Definice 1.3</u>: Dynamický systém S má spojitě proměnný čas, jestliže množina T je otevřený interval $(T_1, T_2) \subset R$.

<u>Definice 1.4</u>: Dynamický systém S s konečnou dimensí a se spojitě proměnným časem je diferenciální systém, jestliže

$$x(t) = \phi[t;\ u_{(t_o,t)},\ x(t_o)] \qquad (.2)$$

je jednoznačné řešení systému diferenciálních rovnic

$$\dot{x}(t) = f[x(t),\ u(t),\ t] \qquad (.4)$$

s počátečními podmínkami $x(t_o)$. Rovnici (.4) budeme nazývat stavovou rovnicí (state equation) dynamického systému.

<u>Poznámka 1.2</u>: Zobrazení f musí splňovat podmínky jednoznačnosti řešení systému diferenciálních rovnic (.4). Rovnice (.3),(.4) nazýváme souhrnné rovnice dynamického systému. ◁

<u>Definice 1.5</u>: Diferenciální dynamický systém S s konečnou dimensí a se spojitě proměnným časem je lineární dynamický systém, jestliže stavová rovnice (.4) je lineární diferenciální rovnicí a jestliže výstup y(t) je lineární funkcí x(t) a u(t). V tomto případě mají rovnice dynamického systému tvar:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \qquad (.5)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) , \qquad (.6)$$

kde $A \in C^{nn}$, $B \in C^{np}$, $C \in C^{qn}$, $D \in R^{qp}$. Dynamický systém nazýváme konstantní, jsou-li matice A,B,C,D konstantní matice.

Poznámka 1.3: Dále se budeme zabývat výhradně lineárními konstantními diferenciálními dynamickými systémy s konečnou dimensí a se spojitě proměnným časem. Tuto třídu dynamických systémů budeme krátce nazývat dynamický systém. ◁

Pro úplnost uvedeme definici dynamického systému, se kterým se budeme zabývat v této práci.

Definice 1.6: Dynamický systém $S \equiv \{A,B,C,D\}$ je následující matematická struktura:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad (.7)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) , \qquad (.8)$$

kde $x \in C^n$, $y \in R^q$, $u \in R^p$, $A \in C^{nn}$, $B \in C^{np}$, $C \in C^{qn}$, $D \in R^{qp}$; $q,p \leq n$; A,B,C,D jsou konstantní matice.

Poznámka 1.4: Úplná informace (s vyjímkou počátečních podmínek) o dynamickém systému je představována maticemi A,B,C,D. Proto čtveřice $\{A,B,C,D\}$ označuje dynamický systém S, neboli $S \equiv \{A,B,C,D\}$. ◁

1.3 Ekvivalentní dynamické systémy

Stav $x(t)$ dynamického systému $S \equiv \{A,B,C,D\}$ můžeme chápat jako vektor $v \in C^n$ se souřadnicemi $x_1(t),\dots,x_n(t)$ vzhledem k ortonormální basi $e_1,\dots,e_n$ prostoru C^n. Je-li $P \in C^{nn}$ konstantní regulární matice, pak můžeme chápat ${}_1x(t) = P^{-1}x(t)$ jako tentýž vektor $v \in C^n$ se souřadnicemi ${}_1x_1(t),\dots,{}_1x_n(t)$ ale vzhledem k basi $Pe_1,\dots,Pe_n$ prostoru C^n. Z toho plyne, že uvažujeme-li dynamický systém $S_1 \equiv \{P^{-1}AP, P^{-1}B, CP, D\}$, kde ${}_1x(t) = P^{-1}x(t)$, pak trajektorie a výstup dynamických systémů S a S_1 jsou shodné. Tyto úvahy vedou k následující definici [1,26,45].

Definice 1.7: Dva dynamické systémy $S \equiv \{A,B,C,D\}$ a $S_1 \equiv \{{}_1A, {}_1B, {}_1C, {}_1D\}$ nazýváme ekvivalentní když a jen když existuje konstantní regulární matice $P \in C^{nn}$ tak, že

$$ {}_1x(t) = P^{-1}x(t) \,, \tag{.9} $$

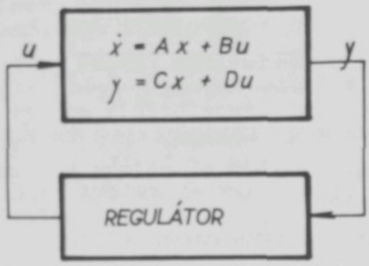
kde $x(t)$ resp. ${}_1x(t)$ je stav dynamického systému S resp. S_1. Píšeme $S \simeq S_1$.

Z uvedeného plyne následující věta, jejíž důkaz je triviální.

Věta 1.1: $\{A,B,C,D\} \simeq \{{}_1A, {}_1B, {}_1C, {}_1D\} \Leftrightarrow {}_1A = P^{-1}AP,\ {}_1B = P^{-1}B,\ {}_1C = CP,\ {}_1D = D$, kde $P \in C^{nn}$ je konstantní regulární matice.

1.4 Řiditelnost a pozorovatelnost dynamického systému

Pojmy řiditelnost (controllability) a pozorovatelnost (observability) dynamického systému hrají základní úlohu při studiu regulačních úloh všech typů. Rozeberme funkci regulačního obvodu, jehož schema je na obr.1.1. Regulátor pozoruje výstup



Obr.1.1. Schema regulačního obvodu.

dynamického systému y a na základě tohoto pozorování volí vstup u. Dvě základní otázky, týkající se regulace dynamického systému, je možno formulovat takto:

1) Je možné pomocí vhodného vstupu u převést dynamický systém z libovolného počátečního stavu $x(t_o) \in \Sigma$ do libovolného žádaného stavu $x(t) \in \Sigma$ v konečném čase t?

2) Je možné určit počáteční stav $x(t_o)$ na základě pozorování výstupu y v konečném časovém intervalu?

Odpověď na tyto otázky dal poprvé Kalman [23,24] a definoval pojmy řiditelnost a pozorovatelnost dynamického systému. V této kapitole uvedeme tyto definice a názorně si ukážeme jejich význam.

<u>Definice 1.8</u>: Dynamický systém je řiditelný když a jen když existuje takový vstup $u_{(t_o,t_1\rangle}$, že libovolný počáteční stav $x(t_o)\in C^n$ lze pomocí tohoto vstupu převést do libovolného žádaného stavu $x(t_1)\in C^n$ v konečném čase $t_1 \geq t_o$.

<u>Poznámka 1.5</u>: Za libovolný žádaný stav $x(t_1)$ lze vždy volit stav nulový, tj. $x(t_1)=0$. Za počáteční čas t_o můžeme vždy volit čas nulový, tj. $t_o=0$. ◁

Definice 1.8 je podle [26,45] ekvivalentní s definicí 1.9, která názorně objasňuje význam řiditelnosti dynamického systému.

<u>Definice 1.9</u>: Dynamický systém je řiditelný, jestliže není ekvivalentní s dynamickým systémem typu

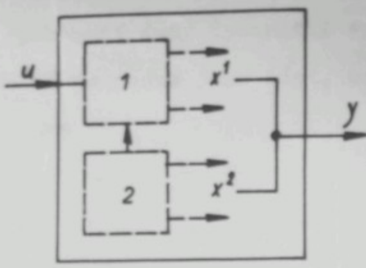
$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{11} & A^{12} \\ 0 & A^{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B^1 \\ 0 \end{bmatrix} u \qquad (.10)$$

$$y = \begin{bmatrix} C^1 & C^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix} + Du \, . \qquad (.11)$$

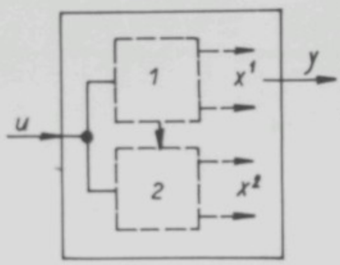
Je-li tedy možno najít takovou basi stavového prostoru C^n vzhledem k níž jsou stavové veličiny dynamického systému rozděleny do dvou skupin, při čemž druhá skupina není ovlivňována ani první skupinou ani vstupy, pak není daný dynamický systém řiditelný resp. řiditelná je pouze jeho část označená 1 na obr.1.2.

<u>Definice 1.10</u>: Dynamický systém je pozorovatelný když a jen když existuje takové konečné $t_1 \geq t_o$, že libovolný počáteční stav $x(t_o)\in C^n$ může být určen na základě znalosti vstupu $u_{\langle t_o,t_1\rangle}$ a výstupu $y_{\langle t_o,t_1\rangle}$.

<u>Poznámka 1.6</u>: Za počáteční čas t_o můžeme vždy volit čas nulový, tj. $t_o=0$. Čas t_1 může obecně záviset na u. ◁



Obr.1.2. Schema neřiditelného dynamického systému (.10),(.11).



Obr.1.3. Schema nepozorovatelného dynamického systému (.12),(.13).

Definice 1.10 je ekvivalentní s definicí 1.11 [26,45], která názorně objasňuje význam pozorovatelnosti dynamického systému.

Definice 1.11: Dynamický systém je pozorovatelný, jestliže není ekvivalentní s dynamickým systémem typu

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}x^1\\x^2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A^{11} & 0\\A^{21} & A^{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x^1\\x^2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}B^1\\B^2\end{bmatrix}u \qquad (.12)$$

$$y = \begin{bmatrix}C^1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x^1\\x^2\end{bmatrix} + Du\,. \qquad (.13)$$

Je-li tedy možno najít takovou basi stavového prostoru C^n, vzhledem k níž jsou stavové veličiny dynamického systému rozděleny do dvou skupin, při čemž druhá skupina neovlivňuje ani první skupinu ani výstup, pak není daný dynamický systém pozorovatelný, resp. pozorovatelná je pouze jeho část, označená 1 na obr.1.3.

1.5 Kalmanova kanonická struktura dynamického systému

Na základě definic uvedených v kap. 1.4 se dá očekávat, že dynamický systém je možno rozdělit do čtyř částí:

(1) část řiditelná ale nepozorovatelná

(2) část řiditelná a pozorovatená

(3) část neřiditelná a nepozorovatelná

(4) část neřiditelná ale pozorovatelná.

Tato skutečnost je precisněji formulována v následující větě, jejíž důkaz je uveden v [25,45].

Věta 1.2: (Kalmanův teorém o kanonické struktuře.) Pro každý dynamický systém existuje taková base stavového prostoru C^n, vzhledem k níž může být stavový vektor rozložen do čtyř vzájemně disjunktních částí:

$$x = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{bmatrix} ,$$

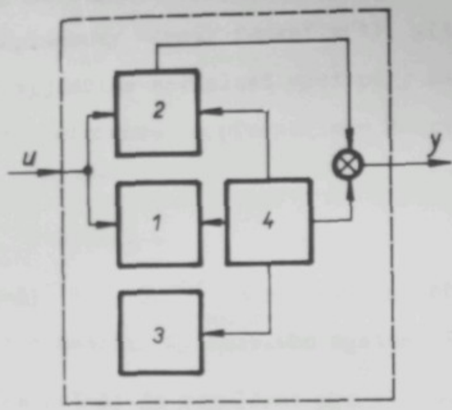
které odpovídají rozkladu naznačenému výše. Tento rozklad může být proveden mnoha způsoby, ale počet stavových veličin n_1, n_2, n_3, n_4, $\sum_{i=1}^{4} n_i = n$ v každé části je stejný pro každý rozklad. Matice A,B,C,D mají vzhledem k takové basi kanonický tvar:

$$A = \begin{bmatrix} A^{11} & A^{12} & A^{13} & A^{14} \\ 0 & A^{22} & 0 & A^{24} \\ 0 & 0 & A^{33} & A^{34} \\ 0 & 0 & 0 & A^{44} \end{bmatrix} , \qquad B = \begin{bmatrix} B^1 \\ B^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ,$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & C^2 & 0 & C^4 \end{bmatrix} , \qquad D = D .$$

Postup výpočtu kanonické struktury dynamického systému uvádí

Kalman v práci [26]. Na obr.1.4 je schematicky znázorněna Kalmanova kanonická struktura dynamického systému.



Obr.1.4. Kalmanova kanonická struktura dynamického systému.

Protože se ve větě 1.2 jedná o změnu base stavového prostoru, je převádění nějakého dynamického systému do Kalmanova kanonického tvaru vlastně hledání specielního ekvivalentního dynamického systému. Pro ekvivalentní dynamické systémy platí

Věta 1.3: Ekvivalentní dynamické systémy mají tutéž Kalmanovu kanonickou strukturu.

D ů k a z : Nechť $\{A,B,C,D\} \simeq \{{}_1A, {}_1B, {}_1C, {}_1D\}$. Pak podle věty 1.1 ${}_1A=P^{-1}AP$, ${}_1B=P^{-1}B$, ${}_1C=CP$, ${}_1D=D$, kde $P \in C^{nn}$ je regulární konstantní matice. Nechť $Q \in C^{nn}$ je regulární konstantní matice taková, že dynamický systém $\{Q^{-1}AQ,\ Q^{-1}B,\ CQ,\ D\}$ je v Kalmanově kanonickém tvaru. Volíme-li $R=P^{-1}Q$, což je opět regulární konstantní matice, je $\{R^{-1}{}_1AR,\ R^{-1}{}_1B,\ {}_1CR,\ D\} = \{Q^{-1}AQ,\ Q^{-1}B,\ CQ,\ D\}$. ◁

1.6 Dynamický systém a Laplaceova transformace

Uvažujme dynamický systém $S \equiv \{A,B,C,D\}$. Nechť $x(t)$, $y(t)$, $u(t)$ jsou originály ve smyslu Laplaceovy transformace. Označme $\hat{x}(s)$, $\hat{y}(s)$, $\hat{u}(s)$ Laplaceovy obrazy funkcí $x(t)$, $y(t)$, $u(t)$. Z rovnic (.7),(.8) vyjádříme závislost výstupů y na vstupech u užitím Laplaceovy transformace za předpokladu nulových počátečních podmínek, tj. $x(0)=0$:

$$\hat{y}(s) = \left[C(sI-A)^{-1}B+D\right]\hat{u}(s) \ . \tag{.14}$$

Matici $G(s) = C(sI-A)^{-1}B+D$, $G\in C^{qp}$ budeme nazývat přenosová matice (transfer function matrix) dynamického systému $S \equiv \{A,B,C,D\}$.

Poznámka 1.7: Matice $(sI-A)$ je regulární pro všechna $s\in C$ s výjimkou vlastních hodnot matice A. ◁

Poznámka 1.8: Elementy matice $G(s)$ jsou nesoudělné lomené racionální funkce argumentu s s reálnými koeficienty (podle toho jsou ovšem voleny matice A,B,C) a stupeň čitatele je menší nebo roven stupni jmenovatele. Pokud by byly elementy matice $G(s)$ soudělné lomené racionální funkce, můžeme nesoudělnost lehce zajistit. ◁

Pro přenosovou matici $G(s)$ zřejmě platí:

$$\lim_{s\to\infty} G(s) = D \ , \tag{.15}$$

kde $s \to \infty$ ve smyslu $\mathrm{Re}\ s \to +\infty$.

Mějme dynamický systém vyjádřený podle věty 1.2 v Kalmanově kanonickém tvaru:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}x^1\\x^2\\x^3\\x^4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A^{11} & A^{12} & A^{13} & A^{14}\\0 & A^{22} & 0 & A^{24}\\0 & 0 & A^{33} & A^{34}\\0 & 0 & 0 & A^{44}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x^1\\x^2\\x^3\\x^4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}B^1\\B^2\\0\\0\end{bmatrix} u \qquad (.16)$$

$$y = \begin{bmatrix}0 & C^2 & 0 & C^4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x^1\\x^2\\x^3\\x^4\end{bmatrix} + Du\,. \qquad (.17)$$

Vyjádřeme závislost výstupů y na vstupech u užitím Laplaceovy transformace za předpokladu nulových počátečních podmínek:

$$\hat{y}(s) = \left[C^2(sI-A^{22})^{-1}B^2+D\right]\hat{u}(s)\,. \qquad (.18)$$

Vidíme, že přenosová matice $G(s) = C^2(sI-A^{22})^{-1}B^2+D$ závisí pouze na druhé, tj. řiditelné a pozorovatelné části dynamického systému. Tuto skutečnost uvedeme jako větu.

<u>Věta 1.4</u>: Přenosová matice G(s) dynamického systému S závisí pouze na části, která je řiditelná a pozorovatelná.

Podle věty 1.4 tedy přenosová matice dynamického systému popisuje pouze jeho řiditelnou a pozorovatelnou část. Z toho je zřejmé, že vztah mezi dynamickým systémem a jeho přenosovou maticí není jedno-jednoznačný, neboť různé dynamické systémy, které mají stejnou řiditelnou a pozorovatelnou část, mají stejnou přenosovou matici.

Uvažujme dva ekvivalentní dynamické systémy $S \simeq S_1$ s přenosovými maticemi $G(s)$, ${}_1G(s)$. Platí

<u>Věta 1.5</u>: Nechť $S \simeq S_1$. Pak $G(s) = {}_1G(s)$.

D ů k a z : Je-li $S \simeq S_1$ a $S \equiv \{A,B,C,D\}$, pak podle věty 1.1 $S_1 \equiv \{P^{-1}AP, P^{-1}B, CP, D\}$. Vyjádříme závislost ${}_1y$ na vstupech ${}_1u$ dynamického systému S_1 užitím Laplaceovy transformace za předpokladu nulových počátečních podmínek:

$$ {}_1\hat{y}(s) = \left[CP(sI-P^{-1}AP)^{-1}P^{-1}B + D\right]{}_1\hat{u}(s) . $$

Úpravou dostaneme

$$ {}_1\hat{y}(s) = \left[C(sI-A)^{-1}B + D\right]{}_1\hat{u}(s), \text{ takže } G={}_1G. \lhd $$

Věta 1.5 vyjadřuje, že přenosové matice ekvivalentních dynamických systémů jsou shodné. Tento výsledek jsme jistě očekávali, neboť závislost výstupů y na vstupech u dynamického systému by neměla záviset na volbě base stavového prostoru C^n.

1.7 Realizace přenosové matice dynamického systému

Označme $G(s)$ racionální matici, tj. matici, jejíž elementy jsou nesoudělné lomené racionální funkce argumentu s a stupeň čitatele je menší a nebo roven stupni jmenovatele. Víme (poznámka 1.8), že přenosová matice dynamického systému je právě takovou racionální maticí. Nyní definujme pojem realizace (realization) přenosové matice dynamického systému [26,27].

Definice 1.12: Nechť $G(s) \in C^{qp}$ je přenosová matice dynamického systému. Dynamický systém $S \equiv \{A,B,C,D\}$ nazýváme realizací přenosové matice $G(s)$, jestliže matice A,B,C,D vyhovují vztahu

$$G(s) = C(sI-A)^{-1}B + D \qquad (.19)$$

pro všechna $s \in C$ s vyjímkou vlastních hodnot matice A. Matice $A \in C^{nn}$, $B \in C^{np}$, $C \in C^{qn}$, $D \in R^{qp}$; A,B,C,D jsou konstantní matice. Číslo $n=n(G)$ nazýváme dimense realizace.

Poznámka 1.9: Matice D v realizaci $\{A,B,C,D\}$ přenosové matice $G(s)$ je jednoznačně určena vztahem (.15). ◁

Věta 1.6: Nechť $P \in C^{nn}$ je regulární konstantní matice a $\{A,B,C,D\}$ je realizace přenosové matice $G(s)$. Nechť $n=n(G)$ je dimense této realizace. Pak $\{P^{-1}AP, P^{-1}B, CP, D\}$ je také realizace přenosové matice $G(s)$ a má opět dimensi $n(G)$.

D ů k a z : Plyne okamžitě z věty 1.5. Dimense obou realizací jsou stejné, protože matice A, $P^{-1}AP \in C^{nn}$. ◁

Dále bude užitečný pojem irreducibilní (irreducible) realizace [26,27].

Definice 1.13: Realizace $\{A,B,C,D\}$ je irreducibilní, obsahuje-li její Kalmanova kanonická struktura pouze druhou, tj. řiditelnou a pozorovatelnou část. Dimensi takové irreducibilní realizace označme n_o.

Poznámka 1.10: Irreducibilní realizace je tedy řiditelná a pozorovatelná. ◁

Dosavadní poznatky, týkající se vztahu mezi dynamickým systémem a jeho přenosovou maticí, můžeme shrnout takto: protože přenosová matice dynamického systému závisí pouze na jeho řiditelné a pozorovatelné části (věta 1.4) a irreducibilní realizace přenosové matice je řiditelná a pozorovatelná (definice 1.13), je (asi) vztah mezi přenosovou maticí G(s) dynamického systému a její irreducibilní realizací $\{A,B,C,D\}$ až na ekvivalentnost (věta 1.5) jedno-jednoznačný. Tuto domněnku potvrzuje věta 1.7, jejíž důkaz je uveden v [16,28].

Věta 1.7: Každé dvě irreducibilní realizace $\{A,B,C,D\}$, $\{{}_1A,{}_1B,{}_1C,{}_1D\}$ přenosové matice G(s) jsou ekvivalentní.

Poznámka 1.11: Z věty 1.7 plyne, že všechny irreducibilní realizace přenosové matice G(s) mají stejnou dimensi $n_o(G)$. ◁

Konstrukce irreducibilní realizace přenosové matice dynamického systému je popsána v dodatku D.

Definice 1.14: Říkáme, že přenosová matice G(s) úplně popisuje dynamický systém S když a jen když je tento dynamický systém řiditelný a pozorovatelný.

1.8 Jordanova kanonická forma dynamického systému

Úvodem uvedeme několik pojmů z lineární algebry [10,11]. Nechť $A \in C^{nn}$ je konstantní matice. Polynom $\Delta = \det(sI-A)$ nazýváme charakteristickým polynomem matice A a jeho nulové body nazýváme vlastní hodnoty (charakteristická čísla) matice A. Dvě konstantní čtvercové matice $A, {}_1A \in C^{nn}$ se nazývají podobné, existuje-li regulární konstantní matice $P \in C^{nn}$ tak, že ${}_1A = P^{-1}AP$. Podobné matice mají stejný charakteristický polynom a tedy i stejné vlastní hodnoty.

Jordanovým blokem $J(\lambda,n) \in C^{nn}$ nazýváme čtvercovou matici tvaru

$$J(\lambda,n) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix} , \qquad (.20)$$

kde $\lambda \in C$. Jordanovou maticí nazýváme matici

$$J = \operatorname{diag}\left[J(\lambda_1,n^1), J(\lambda_2,n^2), \dots, J(\lambda_m,n^m) \right] . \qquad (.21)$$

Jordanova matice je tedy pseudodiagonální matice, kde Jordanovy bloky $J(\lambda_i,n^i)$, $i=1,2,\dots,m$ jsou její diagonální pole. Čísla λ_i, $i=1,2,\dots,m$ nemusí být navzájem různá. Charakteristický polynom Jordanovy matice (.21) je zřejmě polynom

$$\Delta = \prod_{i=1}^{m} (s-\lambda_i)^{n^i} . \qquad (.22)$$

V dalším nám bude užitečná následující věta, jejíž důkaz je uveden např. v [11].

<u>Věta 1.8:</u> Každá konstantní čtvercová matice $A \in C^{nn}$ je podobná nějaké Jordanově matici $J \in C^{nn}$. Je-li matice A podob-

ná dvěma Jordanovým maticím, liší se tyto matice jen pořadím diagonálních polí.

Z věty 1.8 plyne, že existuje konstantní regulární matice $P \in C^{nn}$ tak, že

$$J = P^{-1}AP \;, \quad J = J(A) \tag{.23}$$

kde

$$\begin{aligned} J = \operatorname{diag} \big[& J(\lambda_1, n_1^1), \ldots, J(\lambda_1, n_{r(1)}^1), \\ & J(\lambda_2, n_1^2), \ldots, J(\lambda_2, n_{r(2)}^2), \\ & \vdots \\ & J(\lambda_m, n_1^m), \ldots, J(\lambda_m, n_{r(m)}^m) \big] \end{aligned} \tag{.24}$$

a $\lambda_i \neq \lambda_j$, $i \neq j$. Čísla λ_i, $i=1,2,\ldots,m$ jsou vlastní hodnoty matice A. Číslo r(i) udává počet Jordanových bloků v Jordanově matici J, které přísluší vlastní hodnotě λ_i a n_j^i udává dimensi j-tého Jordanova bloku v Jordanově matici J, který přísluší vlastní hodnotě λ_i. Protože matice A,J jsou si podobné, mají stejné charakteristické polynomy, takže

$$\Delta = \det(sI-A) = \prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{r(i)} (s-\lambda_i)^{n_j^i} \;. \tag{.25}$$

<u>Poznámka 1.12</u>: Výpočet transformační matice P není nijak jednoduchý [11], ale existuje postup vhodný pro samočinný počítač [34]. ◁

Mějme dynamický systém $S \equiv \{A,B,C,D\}$ o dimensi n. Z věty 1.8 plyne, že existuje konstantní regulární matice $P \in C^{nn}$ tak, že dynamický systém $S_1 \equiv \{P^{-1}AP, P^{-1}B, CP, D\} \simeq S$ je vyjádřen v Jordanově kanonické formě, tj. $P^{-1}AP = J(A)$.

Mějme dynamický systém $S \equiv \{J,B,C,D\}$ vyjádřený v Jordanově kanonické formě. Matice B,C,D je možno vyjádřit ve formě rozdělených (blokových) matic, při čemž rozdělení je dáno strukturou pseudodiagonální Jordanovy matice J (.24). Jordanova kanonická forma dynamického systému je přehledně uvedena v tab.1.1.

Na tomto místě ještě definujme matice $\mathcal{B}_1^i$ a $\mathcal{C}_1^i$, které nám budou užitečné později:

$$\mathcal{B}_1^i \triangleq \begin{bmatrix} b_{11}^i \\ b_{21}^i \\ \vdots \\ b_{r(i)1}^i \end{bmatrix}, \quad \mathcal{C}_1^i \triangleq \begin{bmatrix} c_{11}^i & c_{21}^i & \dots & c_{r(i)1}^i \end{bmatrix}, \tag{.26}$$

$i=1,2,\dots,m$. Matice $\mathcal{B}_1^i \in C^{r(i)p}$, $\mathcal{C}_1^i \in C^{qr(i)}$.

$\underset{n \times n}{J} = \begin{bmatrix} J^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J^m \end{bmatrix}$	$\underset{n \times p}{B} = \begin{bmatrix} B^1 \\ B^2 \\ \vdots \\ B^m \end{bmatrix}$
$\underset{q \times n}{C} = \begin{bmatrix} C^1 & C^2 & \dots & C^m \end{bmatrix}$	$\underset{q \times p}{D} = D$
$\underset{n^i \times n^i}{J^i} = \begin{bmatrix} J^i_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J^i_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J^i_{r(i)} \end{bmatrix}$	$\underset{n^i \times p}{B^i} = \begin{bmatrix} B^i_1 \\ B^i_2 \\ \vdots \\ B^i_{r(i)} \end{bmatrix}$
$\underset{q \times n^i}{C^i} = \begin{bmatrix} C^i_1 & C^i_2 & \dots & C^i_{r(i)} \end{bmatrix}$	
$\underset{n^i_j \times n^i_j}{J^i_j} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_i \end{bmatrix}$	$\underset{n^i_j \times p}{B^i_j} = \begin{bmatrix} b^i_{j1} \\ b^i_{j2} \\ \vdots \\ b^i_{jl} \end{bmatrix}$
$\underset{q \times n^i_j}{C^i_j} = \begin{bmatrix} c^i_{j1} & c^i_{j2} & \dots & c^i_{jl} \end{bmatrix}$	$l = n^i_j$
b^i_{jk} $(1 \times p)$	c^i_{jk} $(q \times 1)$

Tab.1.1. Jordanova kanonická forma n-dimensionálního dynamického systému $S \equiv \{J,B,C,D\}$.

1.9 Shrnutí

V této kapitole jsme ze všech možných matematických struktur vybrali právě ty, které připadají v úvahu při popisu chování skutečných fysikálních systémů. Třídu takových matematických struktur nazýváme dynamickým systémem. V práci se zabýváme pouze diferenciálními lineárními konstantními dynamickými systémy s konečnou dimensí a se spojitě proměnným časem. Třídu dynamických systémů, majících uvedené vlastnosti, nazýváme dále dynamickým systémem.

Definovali jsme důležité pojmy řiditelnost a pozorovatelnost dynamického systému. Ukázali jsme, že přenosová matice dynamického systému úplně popisuje pouze jeho řiditelnou a pozorovatelnou část. (Tato skutečnost je ve všech publikacích, týkajících se teorie řízení, zcela opomíjena. Vyjímku v tomto směru činí pouze specielní monografie [1,13,34,42,45], z nichž nejstarší [45] pochází z roku 1963.) K dané přenosové matici lze jednoznačně (až na ekvivalentnost) najít irreducibilní realizaci, tj. dynamický systém o minimální dimensi. Tato irreducibilní realizace je řiditelná a pozorovatelná.

V závěru kapitoly uvádíme dynamický systém, kde base stavového prostoru je volena tak, aby matice A dynamického systému byla v Jordanově kanonickém tvaru. Toto vyjádření nám bude užitečné při studiu složených dynamických systémů.

2 Řiditelnost a pozorovatelnost dynamického systému

V kapitole 1 byla definována řiditelnost a pozorovatelnost dynamického systému. V této kapitole se budeme zabývat nutnými a dostačujícími podmínkami řiditelnosti a pozorovatelnosti dynamického systému a ukážeme, že mezi řiditelností a pozorovatelností dynamického systému existuje jednoduchý vztah. V poslední části kapitoly upřesníme možnost určení stability dynamického systému na základě jeho přenosové matice.

2.1 Podmínky řiditelnosti a pozorovatelnosti dynamického systému

Mějme dynamický systém $S \equiv \{A,B,C,D\}$, jehož souhrnné rovnice jsou (definice 1.6)

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad (.1)$$

$$y = Cx + Du \quad , \qquad (.2)$$

kde $x \in C^n$, $y \in R^q$, $u \in R^p$, $A \in C^{nn}$, $B \in C^{np}$, $C \in C^{qn}$, $D \in R^{qp}$; A,B,C,D jsou konstantní matice. Pro řiditelnost a pozorovatelnost dynamického systému platí následující věty, které jsou i s důkazy uvedeny např. v [1,30,31,34,45]. Důkazy vět 2.1 a 2.4 uvádíme v dodatku E.1,E.2, věty ostatní plynou z vět 2.1 a 2.4.

Věta 2.1: Dynamický systém $S \equiv \{A,B,C,D\}$ je řiditelný když a jen když řádky matice $e^{At}B$ jsou lineárně nezávislé pro všechna $t \in \langle t_0, \infty)$.

Věta 2.2: Dynamický systém $S \equiv \{A,B,C,D\}$ je řiditelný když a jen když řádky matice $(sI-A)^{-1}B$ jsou lineárně nezávislé pro všechna $s \in C$ s vyjímkou vlastních hodnot matice A.

<u>Věta 2.3</u>: Dynamický systém $S \equiv \{A,B,C,D\}$ je řiditelný když a jen když matice

$$P = [B,\ AB, \dots,\ A^{n-1}B]\ ,\quad P \in C^{n,np} \qquad (.3)$$

má hodnost n.

<u>Věta 2.4</u>: Dynamický systém $S \equiv \{A,B,C,D\}$ je pozorovatelný když a jen když sloupce matice Ce^{At} jsou lineárně nezávislé pro všechna $t \in \langle t_0, \infty)$.

<u>Věta 2.5</u>: Dynamický systém $S \equiv \{A,B,C,D\}$ je pozorovatelný když a jen když sloupce matice $C(sI-A)^{-1}$ jsou lineárně nezávislé pro všechna $s \in C$ s vyjímkou vlastních hodnot matice A.

<u>Věta 2.6</u>: Dynamický systém $S \equiv \{A,B,C,D\}$ je pozorovatelný když a jen když matice

$$Q = [C^*,\ A^*C^*, \dots,\ (A^*)^{n-1}C^*]\ ,\quad Q \in C^{n,qn} \qquad (.4)$$

má hodnost n.

Vyšetřování řiditelnosti a pozorovatelnosti dynamického systému se tedy redukuje na určení lineární závislosti či nezávislosti vektorů, případně na určení hodnosti matice. Z uvedených vět je dále zřejmé, že řiditelnost dynamického systému je určena maticemi A,B a pozorovatelnost dynamického systému je určena maticemi A,C.

Pro ekvivalentní dynamické systémy platí následující věta, jejíž důkaz plyne okamžitě z vět 2.3 a 2.6.

<u>Věta 2.7</u>: Řiditelnost a pozorovatelnost dynamického systému je invariantní vůči změně base stavového prostoru.

Basi stavového prostoru můžeme tedy volit libovolně aniž bychom ovlivnili řiditelnost a pozorovatelnost dynamického systému.

2.2 Duální dynamické systémy

Kalman [25] ukázal, že mezi řiditelností a pozorovatelností dynamického systému existuje jednoduchý vztah. K objasnění této skutečnosti definujme duální systém.

Definice 2.1: Dynamický systém $S_D \equiv \{A^*, C^*, B^*, D^*\}$ nazýváme duálním k dynamickému systému $S \equiv \{A, B, C, D\}$.

Mezi dvěma duálními dynamickými systémy platí z hlediska řiditelnosti a pozorovatelnosti vztah, který je formulován v následující větě.

Věta 2.8: (Kalmanův teorém o dualitě.) Mějme dva navzájem duální systémy S, S_D. Pak

1) dynamický systém S je řiditelný když a jen když dynamický systém S_D je pozorovatelný;
2) dynamický systém S je pozorovatelný když a jen když dynamický systém S_D je řiditelný.

D ů k a z : Plyne okamžitě např. z vět 2.1 a 2.4. ◁

Věta 2.8 je velmi cenná, protože nám umožňuje odvozovat podmínky pozorovatelnosti z podmínek řiditelnosti a naopak.

2.3 Podmínky řiditelnosti a pozorovatelnosti dynamického systému v Jordanově kanonickém tvaru

Mějme dynamický systém $S \equiv \{J,B,C,D\}$, kde J je Jordanova matice. Struktura jednotlivých matic J,B,C,D je přehledně uvedena v tab.1.1. Dále uvažujme matice $\mathcal{B}_1^i$, $\mathcal{C}_1^i$ definované vztahem (1.26). Nutná a dostačující podmínka k tomu, aby dynamický systém S vyjádřený v Jordanově kanonickém tvaru byl řiditelný byla poprvé formulována Kalmanem [27] a je dokázána v pracích [21,22].

Věta 2.9: Dynamický systém $S \equiv \{J,B,C,D\}$ je řiditelný když a jen když $R(\mathcal{B}_1^i) = r(i)$, $i=1,2,\dots,m$.

Důkaz této věty uvádíme v dodatku E.3. Z principu duality (věta 2.8) plyne okamžitě

Věta 2.10: Dynamický systém $S \equiv \{J,B,C,D\}$ je pozorovatelný když a jen když $R(\mathcal{C}_1^i) = r(i)$, $i=1,2,\dots,m$.

Poznámka 2.1: Matice $\mathcal{B}_1^i \in C^{r(i)p}$, $\mathcal{C}_1^i \in C^{qr(i)}$. Nutnou podmínkou k tomu, aby dynamický systém byl řiditelný resp. pozorovatelný je, aby $r(i) \leq p$ resp. $r(i) \leq q$, $i=1,2,\dots,m$. ◁

Poznámka 2.2: Podle věty 2.7 je řiditelnost a pozorovatelnost dynamického systému invariantní vůči změně base stavového prostoru. Řiditelnost a pozorovatelnost dynamického systému můžeme tedy vyšetřovat také tak, že dynamický systém převedeme nejprve do Jordanova kanonického tvaru a pak užijeme vět 2.9,2.10. ◁

V dodatku D je uveden postup, kterým lze vytvořit irreducibilní, tj. řiditelnou a pozorovatelnou realizaci přenosové matice $G(s)$, při čemž tato realizace je vyjádřena v Jordanově kanonickém tvaru. Uvedeme na tomto místě několik faktů z dodatku D.

Nechť λ_i, $i=1,2,\dots,m$ jsou různé póly přenosové matice $G(s)$. Matice $G(s)$ může být rozložena takto:

$$G(s) = \sum_{i=1}^{m} H^i(s)\left[\Psi^i(s)\right]^{-1}F^i(s) + D \ . \tag{.5}$$

Podle (D.24)

$$\mathcal{B}_1^i = F_{r(i)}^i(\lambda_i) \ , \quad \mathcal{C}_1^i = H_{r(i)}^i(\lambda_i) \ , \ i=1,2,\dots,m. \tag{.6}$$

Ze vztahu (.6) a z vět 2.9,2.10 okamžitě plyne

<u>Věta 2.11</u>: Mějme dynamický systém S, který je úplně popsán přenosovou maticí $G(s)$. Pak

$$R(F_{r(i)}^i(\lambda_i)) = R(H_{r(i)}^i(\lambda_i)) = r(i), \ i=1,2,\dots,m.$$

Uvažujme jako specielní případ dynamický systém $S \equiv \{J,B,C,D\}$ s jedním vstupem a jedním výstupem, tj. $y,u \in R$ neboli $q=p=1$. Nutnou podmínkou k tomu (poznámka 2.1), aby takový dynamický systém byl řiditelný resp. pozorovatelný je, aby $r(i) = 1$, $i=1,2,\dots,m$. Matice $\mathcal{B}_1^i$, $\mathcal{C}_1^i$ jsou v tomto případě bodové matice: $\mathcal{B}_1^i = \left[b_{11}^i\right]$, $\mathcal{C}_1^i = \left[c_{11}^i\right]$. Nutná a dostačující podmínka řiditelnosti resp. pozorovatelnosti dynamického systému s jedním vstupem a jedním výstupem je formulována v následující větě [45], jejíž důkaz je evidentní.

<u>Věta 2.12</u>: Dynamický systém $S \equiv \{J,B,C,D\}$ s jedním vstupem a jedním výstupem ($q=p=1$) je řiditelný resp. pozorovatelný když a jen když $r(i) = 1$ a $b_{11}^i \neq 0$ resp. $c_{11}^i \neq 0$, $i=1,2,\dots,m$.

2.4 Stabilita dynamického systému

Pro zkoumání stability dynamického systému uvažujme dynamický systém bez vstupu, tj. $u \equiv 0$. Stavová rovnice takového dynamického systému má tvar

$$\dot{x} = Ax \quad , \tag{.7}$$

kde $A \in C^{mm}$ je konstantní matice.

Definice 2.2: Dynamický systém (.7) je stabilní když a jen když $\|x(t)\|$ zůstává ohraničená pro $t \to \infty$. Dynamický systém (.7) je asymptoticky stabilní když a jen když $\lim_{t \to \infty} \|x(t)\| = 0$. Uvedené podmínky musí platit pro všechna řešení $x(t)$ dynamického systému (.7).

Je známo, že $\Delta(s) = \det(sI-A)$ je charakteristický polynom matice A a rovnice $\Delta(s)=0$ je charakteristická rovnice dynamického systému (.7). Nechť λ_i, $i=1,2,\ldots,m$ jsou různé vlastní hodnoty matice A, neboli různé kořeny charakteristické rovnice dynamického systému (.7). O stabilitě dynamického systému (.7) platí známá věta, kterou uvádíme bez důkazu.

Věta 2.13: Dynamický systém (.7) je stabilní když a jen když

1) Re $\lambda_i \leq 0$, $i=1,2,\ldots,m$; $\lambda_i \neq \lambda_j$, $i \neq j$;
2) Re $\lambda_k < 0$, je-li λ_k vícenásobným kořenem charakteristické rovnice.

Dynamický systém (.7) je asymptoticky stabilní když a jen když Re $\lambda_i < 0$, $i=1,2,\ldots,m$.

Poznámka 2.3: Protože o stabilitě dynamického systému nerozhoduje (ohraničený) vstup $u(t)$, věta 2.13 platí pro jakýkoli dynamický systém $S \equiv \{A,B,C,D\}$. Stabilita takového dynamického systému zřejmě závisí pouze na matici A. ◁

Všimněme si, že stabilita dynamického systému závisí pouze na charakteristickém polynomu $\Delta(s) = \det(sI-A)$ bez ohledu na to, je-li dynamický systém řiditelný či pozorovatelný. Zopakujme, že ekvivalentní dynamické systémy mají stejný charakteristický polynom.

Označme $\hat{\Delta}(s)$ jako charakteristický polynom přenosové matice $G(s)$ dynamického systému. Tento charakteristický polynom je definován (definice C.1) jako nejmenší společný jmenovatel všech minorů přenosové matice $G(s)$. Platí následující velmi důležitá věta.

<u>Věta 2.14</u>: Mějme dynamický systém $S \equiv \{A,B,C,D\}$ s přenosovou maticí $G(s)$. Pak

$$\Delta(s) = \hat{\Delta}(s) \qquad (.8)$$

když a jen když dynamický systém S je řiditelný a pozorovatelný.

D ů k a z : $\Leftarrow$ Předpokládejme, že dynamický systém $S \equiv \{A,B,C,D\}$ je řiditelný a pozorovatelný. Převedeme-li jej do Jordanova kanonického tvaru, obdržíme vlastně Jordanovu irreducibilní kanonickou realizaci přenosové matice $G(s)$ a platnost (.8) plyne z věty D.2.

$\Rightarrow$ Předpokládejme, že (.8) platí, ale že dynamický systém $S \equiv \{A,B,C,D\}$ není přenosovou maticí $G(s)$ úplně popsán. Pak přenosová matice $G(s)$ popisuje pouze řiditelnou a pozorovatelnou část dynamického systému S a tudíž $\hat{\Delta} = \det(sI-A^{22})$. Však $\rho(\det(sI-A^{22})) < \rho(\det(sI-A))$, neboli $\rho(\hat{\Delta}) < \rho(\det(sI-A))$, což je ve sporu s předpokladem. $\triangleleft$

Dynamické systémy jsou v teorii regulace často popisovány přenosovými maticemi a stabilitu dynamického systému určujeme z charakteristického polynomu $\hat{\Delta}$. Tento charakteristický polynom však vůbec nic neříká o stabilitě dynamického systému v případě, kdy dynamický systém není přenosovou maticí úplně popsán.

2.5 Shrnutí

V této kapitole jsme uvedli nutné a dostačující podmínky řiditelnosti a pozorovatelnosti dynamického systému. Ukázali jsme, že řiditelnost a pozorovatelnost dynamického systému je invariantní vůči změně base stavového prostoru dynamického systému. Můžeme tedy vybrat basi stavového prostoru např. tak, aby dynamický systém byl vyjádřen v *Jordanově* kanonickém tvaru, aniž bychom tím ovlivnili jeho řiditelnost či pozorovatelnost. Toto vyjádření nám bude užitečné v příští kapitole. Jednoduchý vztah mezi řiditelností a pozorovatelností dynamického systému (viz Kalmanův teorém o dualitě) nám dovoluje odvozovat podmínky pozorovatelnosti přímo z podmínek řiditelnosti. Můžeme se tedy dále omezit pouze na odvozování a dokazování podmínek řiditelnosti a podmínky pozorovatelnosti z nich odvodíme na základě věty 2.8.

V závěru kapitoly jsme dospěli k poznatku, že stabilitu dynamického systému můžeme určit z jeho přenosové matice tehdy a jen tehdy, je-li dynamický systém touto maticí úplně popsán. Závažnost této skutečnosti bude mnohem patrnější u složených dynamických systémů, s nimiž se zabýváme v následující kapitole.

3 Složené dynamické systémy

V této kapitole se budeme zabývat řiditelností, pozorovatelností a stabilitou paralelního, seriového a zpětnovazebného spojení dvou dynamických systémů. Pro lepší přehlednost uvedeme úvodem několik označení a předpokladů, které budou užívány v celé kapitole.

Nechť jsou dány dva dynamické systémy $S_i \equiv \{{}_iA, {}_iB, {}_iC, {}_iD\}$, $i=1,2$. Souhrnné rovnice i-tého dynamického systému jsou (definice 1.6):

$$ {}_i\dot{x} = {}_iA_ix + {}_iB_iu \qquad (.1)$$

$$ {}_iy = {}_iC_ix + {}_iD_iu \ , \qquad (.2)$$

le ${}_ix \in C^{{}_in}$, ${}_iy \in R^{{}_iq}$, ${}_iu \in R^{{}_ip}$, $A \in C^{{}_in_in}$, $B \in C^{{}_in_ip}$, $C \in C^{{}_iq_in}$, $D \in R^{{}_iq_ip}$; ${}_iA, {}_iB, {}_iC, {}_iD$ jsou konstantní matice. Index i v levém dolním rohu značí i-tý dynamický systém. Stavový prostor i-tého dynamického systému označíme Σ_i. Přenosová matice ${}_iG(s)$ dynamického systému $S_i \equiv \{{}_iA, {}_iB, {}_iC, {}_iD\}$ je

$$ {}_iG(s) = {}_iC(sI - {}_iA)^{-1}{}_iB + {}_iD \ . \qquad (.3)$$

Značme ${}_i\Delta = \det(sI - {}_iA)$ charakteristický polynom matice ${}_iA$ (neboli charakteristický polynom dynamického systému $S_i \equiv \{{}_iA, {}_iC, {}_iD\}$) a ${}_i\hat{\Delta}$ charakteristický polynom přenosové matice ${}_iG$ dynamického systému S_i. Předpokládáme, že dynamické systémy S_2 jsou na počátku v nulovém stavu, tj. ${}_1x(0)=0$, ${}_2x(0)=0$ a jejich vzájemné spojení provedeme v čase t=0. Nechť $y \in R^q$ resp. $u \in R^p$ je výstup resp. vstup složeného dynamického systému. Nechť $S \equiv \{A,B,C,D\}$ je dynamický systém, který vznikl jakýmkoli spojením dvou dynamických systémů S_1, S_2. Vzájemně spojujeme pouze vstupy a výstupy jednotlivých dynamických systémů

a stavy $_1x, _2x$ dynamických systémů S_1, S_2 zůstávají zachovány.
Stav x složeného dynamického systému S je určen stavy dynamických systémů S_1, S_2. Tedy

$$x = \begin{bmatrix} {}_1x \\ {}_2x \end{bmatrix} \qquad (.4)$$

a stavový prostor Σ složeného dynamického systému S je přímý součet stavových prostorů dynamických systémů S_1, S_2:

$$\Sigma = \Sigma_1 \oplus \Sigma_2 \ . \qquad (.5)$$

Pro libovolné složené dynamické systémy platí následující věta [12,19,21].

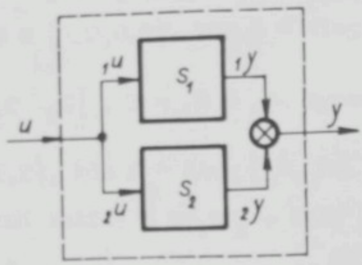
Věta 3.1: Nutnou podmínkou k tomu, aby složený dynamický systém S byl řiditelný resp. pozorovatelný je řiditelnost resp. pozorovatelnost jednotlivých dynamických systémů S_1, S_2.

Důkaz: Podle (.5) je $\Sigma = \Sigma_1 \oplus \Sigma_2$. Jestliže dynamický systém S_1 nebo S_2 není řiditelný resp. pozorovatelný, pak zřejmě ani dynamický systém S není řiditelný resp. pozorovatelný. $\triangleleft$

Dále budeme vždy předpokládat, že oba dynamické systémy S_1, S_2 jsou řiditelné a pozorovatelné. Budeme tedy zkoumat, za jakých podmínek je i složený dynamický systém řiditelný resp. pozorovatelný.

3.1 Paralelní spojení dynamických systémů

Mějme dva řiditelné a pozorovatelné dynamické systémy $S_i \equiv \{{}_iA, {}_iB, {}_iC, {}_iD\}$, i=1,2. Paralelní spojení dynamických systémů S_1, S_2 je schematicky naznačeno na obr.3.1. Z obrázku je



Obr.3.1. Paralelní spojení dynamických systémů S_1, S_2.

řejmé, že $u = {}_1u = {}_2u$, $y = {}_1y + {}_2y$, takže $p = {}_1p = {}_2p$, $q = {}_1q = {}_2q$. Dynamický ystém $S \equiv \{A,B,C,D\}$, který vznikl paralelním spojením dynamických systémů S_1, S_2 je popsán následujícími rovnicemi:

$$\begin{bmatrix} {}_1\dot{x} \\ {}_2\dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}_1A & 0 \\ 0 & {}_2A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_1x \\ {}_2x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {}_1B \\ {}_2B \end{bmatrix} u \qquad (.6)$$

$$y = \begin{bmatrix} {}_1C & {}_2C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_1x \\ {}_2x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {}_1D + {}_2D \end{bmatrix} u \ . \qquad (.7)$$

Podmínky řiditelnosti a pozorovatelnosti složeného dynamického systému S by ovšem bylo možno určovat přímo z rovnic (.6), 7), avšak bude účelnější je vyjádřit pomocí dynamických systémů S_1, S_2. Podle věty 2.7 je řiditelnost a pozorovatelnost dynamického systému invariantní vůči změně base stavového prostoru. tedy lhostejné, vyšetřujeme-li z hlediska řiditelnosti a pozorovatelnosti daný dynamický systém, nebo dynamický systém, erý je s ním ekvivalentní. Pro paralelní spojení ekvivalentních dynamických systémů platí následující věta.

Věta 3.2: Nechť $S_1 \cong S_1'$, $S_2 \cong S_2'$. Nechť S resp. S' je dynamický systém, který vznikl paralelním spojením dynamických systémů S_1,S_2 resp. S_1',S_2'. Pak $S \cong S'$.

Důkaz: $\{{}_iA,{}_iB,{}_iC,{}_iD\} \cong \{{}_iP^{-1}{}_iA{}_iP,{}_iP^{-1}{}_iB,{}_iC{}_iP,{}_iD\}$, $i=1,2$.

${}_iP \in C^{{}_in{}_in}$, $i=1,2$ jsou konstantní regulární matice.

Dynamický systém $S \equiv \{A,B,C,D\}$, kde $A = \mathrm{diag}\,[{}_1A,{}_2A]$,

$B = \begin{bmatrix}{}_1B\\ {}_2B\end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix}{}_1C & {}_2C\end{bmatrix}$, $D = {}_1D + {}_2D$. Dynamický systém

$S' \equiv \{P^{-1}AP,P^{-1}B,CP,D\}$, kde $P = \mathrm{diag}\,[{}_1P,{}_2P]$. $P \in C^{nn}$ je zřejmě konstantní regulární matice a $n = {}_1n + {}_2n$. Tedy $S \cong S'$. ◁

Věta 3.2 nás opravňuje k tomu, abychom si při zkoumání řiditelnosti a pozorovatelnosti paralelního spojení dynamických systémů S_1,S_2 vybrali basi stavových prostorů Σ_1, Σ_2 tak, jak se nám to bude hodit. Můžeme tedy např. dynamické systémy S_1,S_2 vyjádřit v Jordanově kanonickém tvaru.

Nechť ${}_i\lambda_j$, $j=1,2,\dots,{}_im$ jsou různé vlastní hodnoty matice ${}_iA$. Definujme

$$ {}_i\Lambda \triangleq \{{}_i\lambda_j;\ j=1,2,\dots,{}_im\},\quad i=1,2. \qquad (.8)$$

Pro řiditelnost a pozorovatelnost paralelního spojení dvou dynamických systémů platí následující věta [21].

Věta 3.3: Nechť dynamické systémy S_1,S_2 jsou řiditelné a pozorovatelné a nechť jsou vyjádřeny v Jordanově kanonickém tvaru. Jejich paralelní spojení je řiditelné resp. pozorovatelné když a jen když buď

1) ${}_1\Lambda \cap {}_2\Lambda = 0$,

nebo v případě, že

2) ${}_1\Lambda \cap {}_2\Lambda \neq 0$, pro každý pár společných vlastních hodnot ${}_1\lambda_\alpha = {}_2\lambda_\beta$ matic ${}_1A, {}_2A$ platí relace

$$R(\begin{bmatrix} {}_1\mathcal{B}^\alpha_1 \\ {}_2\mathcal{B}^\beta_1 \end{bmatrix}) = {}_1r(\alpha) + {}_2r(\beta) \qquad (.9)$$

resp.

$$R([{}_1\mathcal{C}^\alpha_1 \quad {}_2\mathcal{C}^\beta_1]) = {}_1r(\alpha) + {}_2r(\beta) \ . \qquad (.10)$$

k a z : Rovnice (.6) je dynamická rovnice paralelního spojení dynamických systémů S_1, S_2. Jestliže ${}_1\Lambda \cap {}_2\Lambda = 0$, ce diag $[{}_1A, {}_2A]$ v rovnici (.6) je právě Jordanovou maticí, t dynamické systémy S_1, S_2 jsou podle předpokladu v Jordano-anonickém tvaru a platnost věty plyne okamžitě z vět 2.9, . Jestliže ${}_1\Lambda \cap {}_2\Lambda \neq 0$, pak matice diag $[{}_1A, {}_2A]$ je opět anovou maticí a můžeme ji do tvaru, který je uveden v tab. převést vhodnou záměnou diagonálních polí. Podmínky (.9),) plynou opět z vět 2.9,2.10. ◁

echť ${}_1\lambda_j$, $j=1,2,\dots,{}_1m$ jsou různé póly přenosové matice) dynamického systému S_1 a ${}_1\Lambda$ je množina definovaná vztahem . Nutnou a dostačující podmínkou k tomu, aby paralelní spo- dvou dynamických systémů S_1, S_2, které jsou úplně popsány osovými maticemi ${}_1G, {}_2G$, bylo řiditelné resp. pozorovatelné [následující věta [19].

3.4: Nechť dynamické systémy S_1, S_2 jsou úplně popsány přenosovými maticemi ${}_1G, {}_2G$. Paralelní spojení dynamických systémů S_1, S_2 je řiditelné resp. pozorovatelné když a jen když buď

1) ${}_1\Lambda \cap {}_2\Lambda = 0$,

nebo v případě, že

2) ${}_1\Lambda \cap {}_2\Lambda \neq 0$, pro každý pár společných pólů ${}_1\lambda_\alpha = {}_2\lambda_\beta$ přenosových matic ${}_1G, {}_2G$ platí relace

$$R\left(\begin{bmatrix} {}_1F^{\alpha}_{{}_1r(\alpha)}({}_1\lambda_\alpha) \\ {}_2F^{\beta}_{{}_2r(\beta)}({}_2\lambda_\beta) \end{bmatrix}\right) = {}_1r(\alpha) + {}_2r(\beta) \tag{.11}$$

resp.

$$R\left(\begin{bmatrix} {}_1H^{\alpha}_{{}_1r(\alpha)}({}_1\lambda_\alpha) & {}_2H^{\beta}_{{}_2r(\beta)}({}_2\lambda_\beta) \end{bmatrix}\right) = {}_1r(\alpha) + {}_2r(\beta). \tag{.12}$$

Věta 3.4 plyne okamžitě z věty 3.3 uvážíme-li vztah (D.24).

Poznámka 3.1: Věta 3.4 je analogií věty 3.3, avšak při jejím užití stačí znát pouze přenosové matice ${}_1G, {}_2G$ dynamických systémů S_1, S_2. ◁

Jako speciální případ uvažujme dynamické systémy S_1, S_2 s jedním vstupem a jedním výstupem, tj. $p = {}_1p = {}_2p = q = {}_1q = {}_2q = 1$. Podmínky řiditelnosti a pozorovatelnosti paralelního spojení takových dynamických systémů jsou formulovány v následující větě [21].

Věta 3.5: Nechť dynamické systémy S_1, S_2 s jedním vstupem a s jedním výstupem jsou řiditelné a pozorovatelné. Jejich paralelní spojení je řiditelné a současně pozorovatelné když a jen když ${}_1\Lambda \cap {}_2\Lambda = 0$.

D ů k a z : Jestliže ${}_1\Lambda \cap {}_2\Lambda = 0$, pak platnost věty 3.5 plyne okamžitě z věty 3.3. Pokud ${}_1\Lambda \cap {}_2\Lambda \neq 0$, pak vztahy (.9),(.10) nemohou být nikdy splněny, neboť (kap.2.3) matice ${}_i\mathcal{B}^{\alpha}_{1}, {}_i\mathcal{C}^{\beta}_{1}$, i=1,2 jsou bodové matice. ◁

Pro stabilitu dynamického systému S, který vznikl paralelním spojením dynamických systémů S_1, S_2 platí

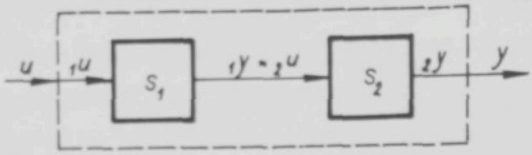
Věta 3.6: Dynamický systém S, který vznikl paralelním spojením řiditelných a pozorovatelných dynamických systémů S_1, S_2 je asymptoticky stabilní když a jen když všechny nulové body polynomu ${}_1\hat{\Delta}_2\hat{\Delta} = {}_1\Delta_2\Delta$ mají zápornou reálnou část.

D ů k a z : Charakteristický polynom složeného dynamického systému S $\Delta = \det(sI-A)$, kde podle rovnice (.6) $A = \mathrm{diag}\,[{}_1A, {}_2A]$. Protože A je pseudodiagonální matice, platí $\Delta = {}_1\Delta_2\Delta$, kde ${}_i\Delta = \det(sI-{}_iA)$, $i=1,2$. Protože dynamické systémy S_1, S_2 jsou dle předpokladu řiditelné a pozorovatelné, je ${}_1\Delta = {}_1\hat{\Delta}$, ${}_2\Delta = {}_2\hat{\Delta}$. Další část plyne z věty 2.13. ◁

Všimněme si, že k určení stability složeného dynamického systému S, který vznikl paralelním spojením dynamických systémů S_1, S_2 nemusíme vědět, zda složený dynamický systém je řiditelný a pozorovatelný. Avšak pokud složený dynamický systém není řiditelný nebo pozorovatelný, pak $\hat{\Delta} \neq {}_1\hat{\Delta}_2\hat{\Delta}$, kde $\hat{\Delta}$ je charakteristický polynom přenosové matice $G = {}_1G + {}_2G$ složeného dynamického systému.

3.2 Seriové spojení dynamických systémů

Mějme dva řiditelné a pozorovatelné dynamické systémy $S_i = \{{}_iA, {}_iB, {}_iC, {}_iD\}$, $i=1,2$. Seriové spojení dynamických systémů S_1, S_2 v uvedeném pořadí je schematicky naznačeno na obr.3.2.



Obr.3.2. Seriové spojení dynamických systémů S_1, S_2.

Z obr.3.2 je zřejmé, že $u={}_1u$, ${}_1y={}_2u$, $y={}_2y$, takže $p={}_1p$, ${}_1q={}_2p$, $q={}_2q$. Dynamický systém S, který vznikl seriovým spojením dynamických systémů S_1, S_2 (v uvedeném pořadí) je popsán následujícími rovnicemi:

$$\begin{bmatrix} {}_1\dot{x} \\ {}_2\dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}_1A & 0 \\ {}_2B\,{}_1C & {}_2A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_1x \\ {}_2x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {}_1B \\ {}_2B\,{}_1D \end{bmatrix} u \qquad (.13)$$

$$y = \begin{bmatrix} {}_2D\,{}_1C & {}_2C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_1x \\ {}_2x \end{bmatrix} + {}_2D\,{}_1D \; u \; . \qquad (.14)$$

Podmínky řiditelnosti a pozorovatelnosti seriového spojení dynamických systémů jsou mnohem komplikovanější nežli podmínky řiditelnosti a pozorovatelnosti paralelního spojení dynamických systémů. Podobně jako tomu bylo u paralelního spojení dynamických systémů, můžeme i u seriového spojení dynamických systémů vybrat při zkoumání řiditelnosti a pozorovatelnosti basi stavových prostorů Σ_1, Σ_2 dynamických systémů S_1, S_2 libovolně. K tomu nás opravňuje následující věta.

Věta 3.7: Nechť $S_1 \simeq S_1'$, $S_2 \simeq S_2'$. Nechť S resp. S' je dynamický systém, který vznikl seriovým spojením dynamických systémů S_1, S_2 resp. S_1', S_2' v uvedeném pořadí. Pak $S \simeq S'$.

Důkaz je podobný důkazu věty 3.2 a proto jej neuvádíme.

Dříve než přistoupíme k formulaci podmínek řiditelnosti a pozorovatelnosti seriového spojení dynamických systémů zaveďme několik označení. Nechť ${}_i\lambda_j$, $j=1,2,\dots,{}_im$ jsou různé vlastní hodnoty přenosové matice ${}_iG$ dynamického systému S_i, $i=1,2$. Přenosová matice ${}_iG$ může být rozložena takto (dodatek D):

$$ {}_iG = \sum_{j=1}^{{}_im} {}_iG^j + {}_iD \ , \tag{.15} $$

kde matice ${}_iG^j$ má pouze jeden pól ${}_i\lambda_j$ a $\lim\limits_{s\to\infty} {}_iG^j(s) = 0$, $\lim\limits_{s\to\infty} {}_iG(s) = {}_iD$. Nechť ${}_i\lambda_\alpha$ je jeden z pólů přenosové matice ${}_iG$. Definujme matici ${}_iG^{(\alpha)}$ takto:

$$ {}_iG^{(\alpha)} \triangleq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq\alpha}}^{{}_im} {}_iG^j + {}_iD \ . \tag{.16} $$

Pak zřejmě

$$ {}_iG = {}_iG^{(\alpha)} + {}_iG^\alpha \ . \tag{.17} $$

Nyní přistoupíme k formulaci podmínek řiditelnosti a pozorovatelnosti seriového spojení dynamických systémů.

Věta 3.8: Nechť dynamické systémy S_1, S_2 jsou řiditelné a pozorovatelné a nechť jsou vyjádřeny v Jordanově kanonickém tvaru. Dynamický systém S, který vznikl seriovým spojením dynamických systémů S_1, S_2 v uvedeném pořadí je řiditelný resp. pozorovatelný když a jen když

1) pro každé ${}_2\lambda_i \in {}_2\Lambda \dot{-} ({}_1\Lambda \cap {}_2\Lambda)$ platí relace

$$R(\left[{}_2\mathcal{B}_1^i \;\; {}_1G({}_2\lambda_i)\right]) = {}_2r(i) \tag{.18}$$

resp. pro každé ${}_1\lambda_i \in {}_1\Lambda \dot{-} ({}_1\Lambda \cap {}_2\Lambda)$ platí relace

$$R(\left[{}_2G({}_1\lambda_i) \;\; {}_1\mathcal{C}_1^i\right]) = {}_1r(i) \tag{.19}$$

a současně

2) pro každý pár společných vlastních hodnot ${}_1\lambda_\alpha = {}_2\lambda_\beta$ matic ${}_1A, {}_2A$ jsou lineárně nezávislé řádky matice

$$\begin{bmatrix} {}_1\mathcal{B}_1^\alpha \\ {}_2\mathcal{B}_1^\beta \left[{}_1G^{(\alpha)}({}_2\lambda_\beta) + {}_1G^\alpha(s)\right] \end{bmatrix} \tag{.20}$$

resp. jsou lineárně nezávislé sloupce matice

$$\left[{}_2\mathcal{C}_1^\beta \qquad \left[{}_2G^{(\beta)}({}_1\lambda_\alpha) + {}_2G^\beta(s)\right]{}_1\mathcal{C}_1^\alpha\right]. \tag{.21}$$

Počet řádek matice (.20) je roven počtu sloupců matice (.21) a je roven ${}_1r(\alpha) + {}_2r(\beta)$.

Důkaz této věty je poněkud delší a je proto uveden v dodatku E.4. Dostačující podmínka řiditelnosti a pozorovatelnosti seriového spojení dynamických systémů S_1, S_2 (E.27) je uvedena v [19,21]; nutná a dostačující podmínka je poprvé uvedena v této práci.

Z věty 3.8 a ze vztahu D.24 plyne okamžitě

<u>Věta 3.9</u>: Nechť dynamické systémy S_1, S_2 jsou úplně popsány přenosovými maticemi ${}_1G, {}_2G$. Dynamický systém S, který vznikl seriovým spojením dynamických systémů S_1, S_2 v uvedeném pořadí je řiditelný resp. pozorovatelný když a jen když

1) pro každé ${}_2\lambda_i \in {}_2\Lambda \doteq ({}_1\Lambda \cap {}_2\Lambda)$ platí relace

$$R(\left[{}_2F^i_{{}_2r(i)}({}_2\lambda_i) \quad {}_1G({}_2\lambda_i)\right]) = {}_2r(i) \qquad (.22)$$

resp. pro každé ${}_1\lambda_i \in {}_1\Lambda \doteq ({}_1\Lambda \cap {}_2\Lambda)$ platí relace

$$R(\left[{}_2G({}_1\lambda_i) \quad {}_1H^i_{{}_1r(i)}({}_1\lambda_i)\right]) = {}_1r(i) \qquad (.23)$$

a současně

2) pro každý pár společných vlastních hodnot ${}_1\lambda_\alpha = {}_2\lambda_\beta$ matic ${}_1A, {}_2A$ jsou lineárně nezávislé řádky matice

$$\begin{bmatrix} {}_1F^\alpha_{{}_1r(\alpha)}({}_1\lambda_\alpha) \\ {}_2F^\beta_{{}_2r(\beta)}({}_2\lambda_\beta)\left[{}_1G^{(\alpha)}({}_2\lambda_\beta) + {}_1G^\alpha(s)\right] \end{bmatrix} \qquad (.24)$$

resp. jsou lineárně nezávislé sloupce matice

$$\left[{}_2H^\beta_{{}_2r(\beta)}({}_2\lambda_\beta) \qquad \left[{}_2G^{(\beta)}({}_1\lambda_\alpha) + {}_2G^\beta(s)\right]{}_1H^\alpha_{{}_1r(\alpha)}({}_1\lambda_\alpha)\right] \qquad (.25)$$

Počet řádek matice (.24) je roven počtu sloupců matice (.25) a je roven ${}_1r(\alpha) + {}_2r(\beta)$.

Poznámka 3.2: Věta 3.9 je analogií věty 3.8, avšak při jejím užití stačí znát pouze přenosové matice ${}_1G, {}_2G$ dynamických systémů S_1, S_2. ◁

Jako specielní případ uvažujme dynamické systémy S_1, S_2 s jedním vstupem a jedním výstupem, tj. $p = {}_1p = {}_2p = q = {}_1q = {}_2q = 1$. Podmínky řiditelnosti a pozorovatelnosti seriového spojení takových dynamických systémů jsou formulovány v následující větě [21].

<u>Věta 3.10</u>: Nechť dynamické systémy S_1, S_2 s jedním vstupem a s jedním výstupem jsou řiditelné a pozorovatelné. Jejich seriové spojení (v uvedeném pořadí) je řiditelné resp. pozorovatelné když a jen když

$$ {}_1G({}_2\lambda_i) \neq 0 \, , \quad i=1,2,\dots,{}_2m \qquad (.26)$$

resp.

$$ {}_2G({}_1\lambda_i) \neq 0 \, , \quad i=1,2,\dots,{}_1m \, . \qquad (.27)$$

D ů k a z : Protože dynamické systémy S_1, S_2 s jedním vstupem a s jedním výstupem jsou řiditelné a pozorovatelné, pak (věta 2.12) ${}_2\mathcal{B}_1^i$, ${}_1\mathcal{C}_1^i$ jsou bodové nenulové matice a ${}_1r(i) = {}_2r(j) = 1$, $i=1,2,\dots,{}_1m$; $j=1,2,\dots,{}_2m$. Pro všechna ${}_2\lambda_i \in {}_2\Lambda \doteq ({}_1\Lambda \cap {}_2\Lambda)$ plyne platnost věty 3.10 okamžitě z věty 3.8. Pro každý pár společných vlastních hodnot ${}_1\lambda_\alpha = {}_2\lambda_\beta$ matic ${}_1A, {}_2A$ jsou podmínky věty 3.8 automaticky splněny, protože ${}_i\mathcal{B}_1^\alpha$, ${}_i\mathcal{C}_1^\beta$, $i=1,2$ jsou bodové nenulové matice a ${}_1G^\alpha(s)$, ${}_2G^\beta(s)$ jsou bodové nekonstantní matice. $\triangleleft$

Pro stabilitu dynamického systému S, který vznikl seriovým spojením dynamických systémů S_1, S_2 platí následující věta.

<u>Věta 3.11</u>: Dynamický systém S, který vznikl seriovým spojením řiditelných a pozorovatelných dynamických systémů S_1, S_2 je asymptoticky stabilní když a jen když všechny nulové body polynomu ${}_1\hat{\Delta}\,{}_2\hat{\Delta} = {}_1\Delta\,{}_2\Delta$ mají zápornou reálnou část.

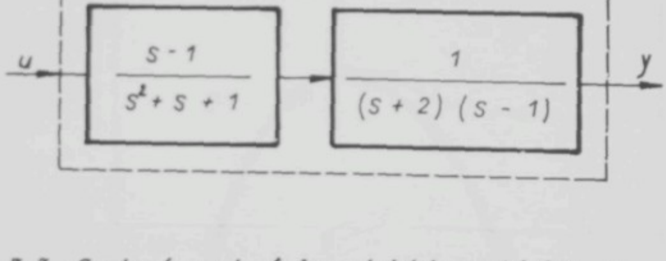
D ů k a z : Charakteristický polynom složeného dynamického systému S $\Delta = \det(sI-A)$, kde podle rovnice (.13)

$$A = \begin{bmatrix} {}_1A & 0 \\ {}_2B\,{}_1C & {}_2A \end{bmatrix}$$

. Protože A je pseudotrojúhelníková matice, platí $\Delta = {}_1\Delta\,{}_2\Delta$, kde ${}_i\Delta = \det(sI-{}_iA)$, $i=1,2$. Protože dynamické systémy S_1, S_2 jsou dle předpokladu řiditelné a pozorovatelné, je ${}_1\Delta = {}_1\hat{\Delta}$, ${}_2\Delta = {}_2\hat{\Delta}$. Další část důkazu plyne z věty 2.13. ◁

K určení stability složeného dynamického systému S, který vznikl seriovým spojením řiditelných a pozorovatelných dynamických systémů S_1, S_2 nemusíme vědět, zda složený dynamický systém je řiditelný a pozorovatelný. Avšak pokud složený dynamický systém S není řiditelný nebo pozorovatelný, pak $\hat{\Delta} \neq {}_1\hat{\Delta}_2\hat{\Delta}$, kde $\hat{\Delta}$ je charakteristický polynom přenosové matice $G = {}_2G_1G$ složeného dynamického systému. Nemůžeme tedy z charakteristického polynomu $\hat{\Delta}$ usuzovat na stabilitu či nestabilitu složeného dynamického systému. Tato skutečnost je názorně ilustrována v příkladu 3.1.

Příklad 3.1: Mějme seriové spojení dynamických systémů S_1, S_2 s jedním vstupem a s jedním výstupem, které jsou úplně popsány přenosy ${}_1G = \frac{s-1}{s^2+s+1}$ a ${}_2G = \frac{1}{(s+2)(s-1)}$.

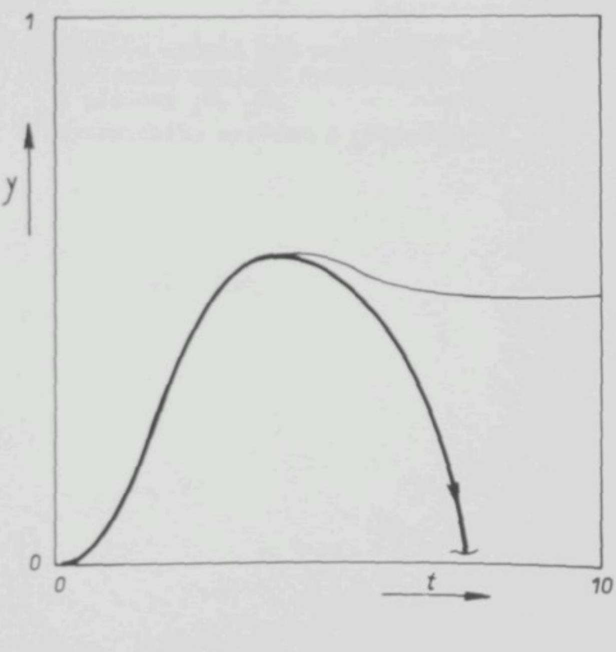


Obr.3.3. Seriové spojení dynamických systémů S_1, S_2.

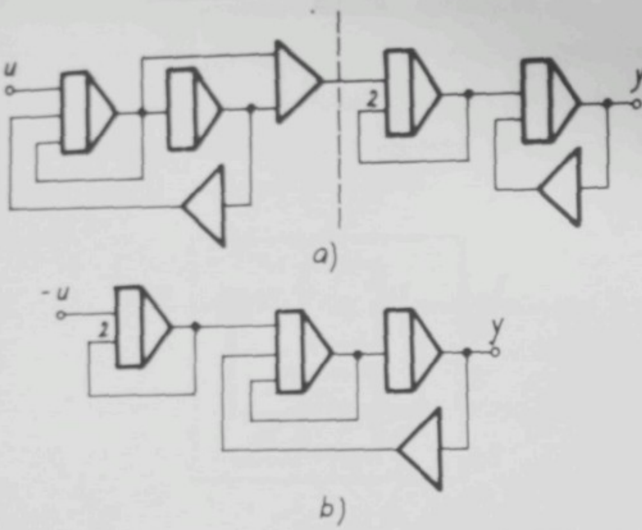
Přenos složeného dynamického systému S je $G = \frac{1}{(s+2)(s^2+s+1)}$.

Podle věty 3.10 je sice složený dynamický systém S pozorovatelný, ale není řiditelný, takže není přenosovou maticí G úplně popsán. Podle přenosové matice G by složený dynamický systém měl být stabilní, ale podle věty 3.11 je nestabilní, neboť jeden

ťen polynomu ${}_1\hat{\Delta}_2\hat{\Delta} = (s^2+s+1)(s+2)(s-1)$ má kladnou reálnou část.
žený dynamický systém (obr.3.3) byl namodelován na analogovém
čítači. Odezva $y(t)$ na vstup $u(t) = \eta(t)$, kde $\eta(t)$ je tzv.
dnotková funkce, je uvedena na obr.3.4. Silně je vyznačena
ezva $y(t)$ seriového spojení dynamických systémů, slabě je vy-
načena odezva jiného dynamického systému, který je úplně po-
án přenosem $G = \dfrac{1}{(s+2)(s^2+s+1)}$. Z obrázku je velmi názorně
dět, že mechanické používání Laplaceova operátorového počtu
že vést k velmi nepříjemným důsledkům. Pro úplnost uvádíme
obr.3.5 programové schema řešení uvedené úlohy na analogovém
čítači.



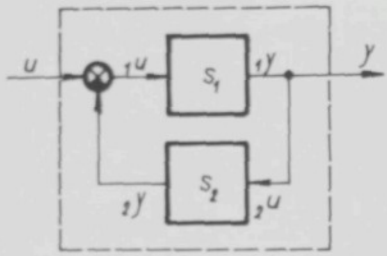
Obr.3.4. Odezva $y(t)$ na vstup $\eta(t)$ složeného dynamického systému (silně) a jiného dynamického systému s přenosem G (slabě).



Obr.3.5. Programové schema pro modelování
a) seriového spojení dynamických systémů s přenosy $_1G$, $_2G$;
b) dynamického systému s přenosem G.

3.3 Zpětnovazebné spojení dynamických systémů

Mějme dva řiditelné a pozorovatelné dynamické systémy $S_i = \{_iA, _iB, _iC, _iD\}$, $i=1,2$. Zpětnovazebné spojení dynamických systémů S_1, S_2 s dynamickým systémem S_2 ve zpětné vazbě je schematicky naznačeno na obr.3.6. Z obrázku je zřejmé, že



Obr.3.6. Zpětnovazebné spojení dynamických systémů S_1, S_2.

$_1u = u - {_2y}$, $_2u = {_1y} = y$, takže $p = {_1p} = {_2q}$, $_2p = {_1q} = q$. Dynamický systém S, který vznikl zpětnovazebným spojením dynamických systémů S_1, S_2 je popsán následujícími rovnicemi:

$$\begin{bmatrix} _1\dot{x} \\ _2\dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} _1A - {_1B}\,{_2D}(I + {_1D}\,{_2D})^{-1}\,{_1C} & -{_1B}\,{_2C} + {_1B}\,{_2D}(I + {_1D}\,{_2D})^{-1}\,{_1D}\,{_2C} \\ _2B(I + {_1D}\,{_2D})^{-1}\,{_1C} & _2A - {_2B}(I + {_1D}\,{_2D})^{-1}\,{_1D}\,{_2C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} _1x \\ _2x \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} _1B - {_1B}\,{_2D}(I + {_1D}\,{_2D})^{-1}\,{_1D} \\ _2B(I + {_1D}\,{_2D})^{-1}\,{_1D} \end{bmatrix} u \qquad (.28)$$

$$y = (I + {_1D}\,{_2D})^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} _1C & -{_1D}\,{_2C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} _1x \\ _2x \end{bmatrix} + {_1D}\,u \right\}, \qquad (.29)$$

kde

$$\det(I + {_1D}\,{_2D}) \neq 0 . \qquad (.30)$$

Vyjádřeme pomocí Laplaceovy transformace závislost $\hat{y}(s)$ na $\hat{u}(s)$ za předpokladu nulových počátečních podmínek, tj. $\begin{bmatrix} {}_1x(0) \\ {}_2x(0) \end{bmatrix} = 0$:

$$\hat{y}(s) = (I + {}_1G_2G)^{-1}\, {}_1G\, \hat{u}(s) \quad , \qquad (.31)$$

kde

$$\det(I + {}_1G_2G) \neq 0 \qquad (.32)$$

pro všechna $s \in C$ s vyjímkou konečného počtu bodů. Podmínka (.32) zaručuje, že výstup y a stav x složeného dynamického systému S se vstupy u a počátečními podmínkami $\begin{bmatrix} {}_1x(0) \\ {}_2x(0) \end{bmatrix}$ určen jednoznačně. V takovém případě říkáme, že zpětnovazebné spojení dynamických systémů S_1, S_2 je determinované [7].

Označme $G = (I + {}_1G_2G)^{-1}\, {}_1G$ přenosovou maticí zpětnovazebného spojení dynamických systémů S_1, S_2. Pro determinanty matic $(I + {}_1G_2G)$ a $(I + {}_2G_1G)$ platí následující věta [27,39].

Věta 3.12: $\det(I_p + {}_2G_1G) = \det(I_q + {}_1G_2G)$, (.33)
kde I_p resp. I_q je jednotková matice p-tého resp. q-tého řádu.

Důkaz: Uvažujme tento determinant

$$\det \begin{bmatrix} I_q & {}_1G \\ -{}_2G & I_p \end{bmatrix} . \qquad (.34)$$

Užitím známých vztahů pro výpočet determinantu blokové matice [11] dostaneme:

$$\det(I_q)\, \det(I_p + {}_2G_1G) = \det(I_q + {}_1G_2G)\, \det(I_p) \ . \ \triangleleft \qquad (.35)$$

Pro přenosovou matici G platí následující věta [20].

Věta 3.13: $G = (I + {}_1G_2G)^{-1}\, {}_1G = {}_1G(I + {}_2G_1G)^{-1}$. (.36)

Důkaz: Existuje-li matice $(I + {}_1G_2G)^{-1}$, pak podle věty 3.12

existuje také matice $(I+{}_2G_1G)^{-1}$. Další část důkazu provedeme násobením rovnice (.36) zprava maticí $(I+{}_2G_1G)$ a zleva maticí $(I+{}_1G_2G)$. ◁

Vraťme se zpět k přenosové matici $G = (I+{}_1G_2G)^{-1}\,{}_1G$ zpětnovazebního spojení dynamických systémů S_1, S_2. Zřejmě platí:

$$\lim_{s\to\infty} \det(I+{}_1G_2G) = \det(I+{}_1D_2D) \;, \qquad (.37)$$

takže podmínka (.30) je specielním případem podmínky (.32).

Dále se budeme zabývat pouze determinovanými zpětnovazebnými spojeními dynamických systémů S_1, S_2, takže bude vždy pro všechna $s\in C$ s vyjímkou konečného počtu bodů platit:

$$\det(I+{}_1G_2G) = \det(I+{}_2G_1G) \neq 0 \;. \qquad (.38)$$

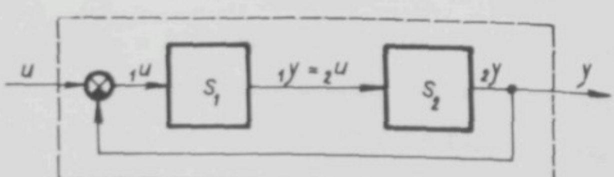
Poznámka 3.3: Podmínka (.38) a tedy i (.32) musí platit i pro $s \to \infty$, takže je současně splněna podmínka (.30). ◁

Vyjádřeme pomocí Laplaceovy transformace závislost ${}_2\hat{y}(s)$ na $\hat{u}(s)$ za předpokladu nulových počátečních podmínek, tj. $\begin{bmatrix} {}_1x(0) \\ {}_2x(0) \end{bmatrix} = 0$:

$${}_2\hat{y}(s) = (I+{}_2G_1G)^{-1}\,{}_2G_1G\,\hat{u} \;. \qquad (.39)$$

Podle (.38) je také ${}_2y$ (podobně jako y) určeno jednoznačně.

Poznámka 3.4: Uvažujeme-li ${}_2y$ jako výstup zpětnovazebného spojení dynamických systémů S_1, S_2, můžeme schema na obr.3.6 překreslit tak, jak je naznačeno na obr.3.7.



Obr.3.7. Zpětnovazebné spojení dynamických systémů S_1, S_2.

Vidíme, že zpětnovazebné spojení dynamických systémů podle obr.3.7 je specielním případem zpětnovazebného spojení podle obr.3.6. Přímou vazbu na obr.3.6 tvoří dynamický systém S_1, na obr.3.7 tvoří přímou vazbu seriové spojení dynamických systémů S_1, S_2; zpětnou vazbu na obr.3.6 tvoří dynamický systém S_2, na obr.3.7 tvoří zpětnou vazbu dynamický systém $\{0,0,0,I\}$. Zpětnou vazbu, která je tvořena dynamickým systémem $\{0,0,0,I\}$ budeme nazývat identickou zpětnou vazbou. $\triangleleft$

Nyní přistoupíme k formulaci podmínek řiditelnosti a pozorovatelnosti zpětnovazebného spojení dynamických systémů S_1, S_2 [7,12]. Označme S_{12} dynamický systém, který vznikne seriovým spojením dynamických systémů S_1, S_2 v uvedeném pořadí a S_{21} dynamický systém, který vznikne seriovým spojením dynamických systémů S_2, S_1 v uvedeném pořadí. Dále označme S_f dynamický systém, který vznikne zpětnovazebným spojením dynamických systémů S_1, S_2 s dynamickým systémem S_2 ve zpětné vazbě (obr.3.6). Platí

<u>Věta 3.14</u>: Nechť S_f je determinovaný dynamický systém, který vznikl zpětnovazebným spojením řiditelných a pozorovatelných dynamických systémů S_1, S_2 s dynamickým systémem S_2 ve zpětné vazbě (obr.3.6). Pak

1) dynamický systém S_f je řiditelný když a jen když dynamický systém S_{12} je řiditelný;
2) dynamický systém S_f je pozorovatelný když a jen když dynamický systém S_{21} je pozorovatelný.

Důkaz této věty uvádíme v dodatku E.5. Pro řiditelnost a pozorovatelnost zpětnovazebného spojení dynamických systémů podle obr.3.7 platí následující věta, která okamžitě plyne z věty 3.14.

Věta 3.15: Nechť S_f je determinovaný dynamický systém, který vznikl zpětnovazebným spojením řiditelných a pozorovatelných dynamických systémů S_1,S_2 s identickou zpětnou vazbou (obr.3.7). Pak dynamický systém S_f je řiditelný resp pozorovatelný když a jen když dynamický systém S_{12} je řiditelný resp. pozorovatelný.

Věty 3.14,3.15 převádějí určení řiditelnosti a pozorovatelnosti determinovaného zpětnovazebného spojení řiditelných a pozorovatelných dynamických systémů na určení řiditelnosti a pozorovatelnosti seriového spojení řiditelných a pozorovatelných dynamických systémů (kap.3.2).

Jako specielní případ uvažujme dynamické systémy S_1,S_2 s jedním vstupem a jedním výstupem, tj. $p={}_1p={}_2p=q={}_1q={}_2q=1$. Podmínky řiditelnosti a pozorovatelnosti determinovaného zpětnovazebného spojení takových dynamických systémů jsou formulovány v následujících větách, které vyplývají okamžitě z vět 3.10,3.14,3.15.

Věta 3.16: Nechť dynamické systémy S_1,S_2 s jedním vstupem a jedním výstupem jsou řiditelné a pozorovatelné. Jejich determinované zpětnovazebné spojení s dynamickým systémem S_2 ve zpětné vazbě (obr.3.6) je řiditelné a současně pozorovatelné když a jen když

$$ {}_1G({}_2\lambda_i) \neq 0 \ , \quad i=1,2,\dots,{}_2m \ . \qquad (.40) $$

Věta 3.17: Nechť dynamické systémy S_1,S_2 s jedním vstupem a jedním výstupem jsou řiditelné a pozorovatelné. Jejich determinované zpětnovazebné spojení s identickou zpětnou vazbou (obr.3.7) je řiditelné resp. pozorovatelné když a jen když

$$ {}_1G({}_2\lambda_i) \neq 0 \,, \quad i=1,2,\ldots,{}_2m \tag{.41} $$

resp.

$$ {}_2G({}_1\lambda_i) \neq 0 \,, \quad i=1,2,\ldots,{}_1m \,. \tag{.42} $$

Protože zpětnovazebná spojení dynamických ... obr.3.6 a 3.7 se liší jen interpretací výstupu, ... stability stejné pro obě zpětnovazebná spojení. ... to uvažovat jen determinované zpětnovazebné s... a pozorovatelných dynamických systémů S_1, S_2 s... S_2 ve zpětné vazbě (obr.3.6).

Víme, že přenosová matice tohoto zpětnovaze...

$$ G = (I + {}_1G_2G)^{-1}\,{}_1G \,, $$

neboli

$$ G = \frac{1}{\det(I+{}_1G_2G)} \left[\operatorname{adj}(I+{}_1G_2G)\right]{}_1G \,. $$

Definujme

$$ \frac{M(s)}{N(s)} \triangleq \det\,(I+{}_1G_2G) \,, $$

kde $M(s)$, $N(s)$ jsou nesoudělné polynomy. Dále defin...

$$ \frac{1}{L(s)}\,P(s) \triangleq \left[\operatorname{adj}(I+{}_1G_2G)\right]{}_1G \,, $$

kde $L(s)$ je nejmenší společný jmenovatel všech element... $\left[\operatorname{adj}(I+{}_1G_2G)\right]{}_1G$ a $P(s)$ je tedy polynomiální matice. Do... (.45),(.46) do (.44) dostaneme:

$$ G(s) = \frac{N(s)}{M(s)}\,\frac{1}{L(s)}\,P(s) \,. $$

Nechť ${}_1\hat{\Delta}$, ${}_2\hat{\Delta}$ jsou charakteristické polynomy přenosov... ${}_1G$, ${}_2G$. (Zopakujme, že charakteristický polynom ... je definován (definice C.1) jako nejmenší spole... j... všech minorů přenosové matice.) Ryze algebr...ými úpravami se dá ukázat, že $N(s) \mid {}_1\hat{\Delta}_2\hat{\Delta}$ a $L(s) \mid {}_1\hat{\Delta}_2\hat{\Delta}$. Protože $N(s) \mid {}_1\hat{\Delta}_2\hat{\Delta}$, můžeme definovat

$$\bar{M}(s) \triangleq \frac{{}_1\hat{\Delta}_2\hat{\Delta}}{N(s)} \quad . \tag{.48}$$

Pro stabilitu zpětnovazebného spojení dynamických systémů S_1, S_2 platí následující věta [20].

Věta 3.18: Dynamický systém, který vznikl zpětnovazebným spojením řiditelných a pozorovatelných dynamických systémů S_1, S_2 (obr.3.6,3.7) je asymptoticky stabilní, jestliže všechny nulové body polynomu $M(s)\bar{M}(s)$ mají zápornou reálnou část.

D ů k a z : Z (.48) vidíme, že $N(s) = \frac{{}_1\hat{\Delta}_2\hat{\Delta}}{\bar{M}(s)}$. Dosazením do (.47) dostaneme

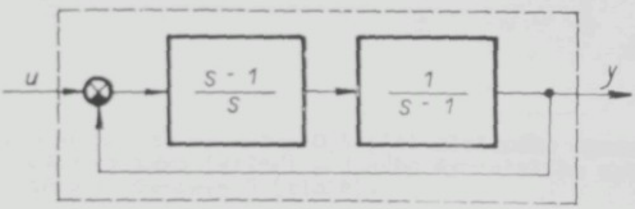
$$G(s) = \frac{1}{M(s)\bar{M}(s)} \frac{{}_1\hat{\Delta}_2\hat{\Delta}}{L(s)} P(s) \quad . \tag{.49}$$

Protože $L(s) \mid {}_1\hat{\Delta}_2\hat{\Delta}$, je $\frac{{}_1\hat{\Delta}_2\hat{\Delta}}{L(s)} P(s)$ polynomální matice. ◁

Poznámka 3.5: Věta 3.18 uvádí dostačující podmínku pro určení stability zpětnovazebného spojení dynamických systémů. Lze se domnívat, že tato podmínka je současně podmínkou nutnou, ačkoli se to dosud nepodařilo dokázat. Tento důkaz, případně vyvrácení uvedené domněnky, je zde předkládán jako jedna z dosud nevyřešených úloh. Jiná nutná a dostačující podmínka pro určení stability zpětnovazebného spojení dynamických systémů dosud nebyla publikována. Zde máme samozřejmě na mysli podmínku založenou na dynamických systémech S_1, S_2 odděleně, neboť stabilitu zpětnovazebného spojení dynamických systémů můžeme určit přímo z rovnice (.28). ◁

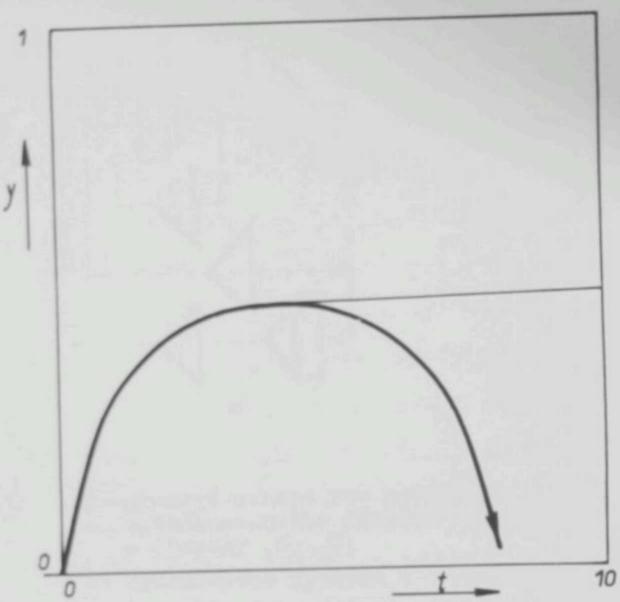
Pokud dynamické systémy S_1, S_2 jsou stabilní, pak všechny nulové body polynomu ${}_1\hat{\Delta}_2\hat{\Delta}$ a tedy i polynomu $\bar{M}$ mají zápornou reálnou část a nestabilita zpětnovazebného spojení dynamických systémů S_1, S_2 může vzniknout jedině tak, že alespoň jeden nulový bod polynomu M má kladnou reálnou část. K vyšetřování stability zpětnovazebného spojení dynamických systémů S_1, S_2 můžeme tedy používat pouze polynom M když a jen když dynamické systémy S_1, S_2 jsou stabilní. Tato základní skutečnost je dlouhá léta zcela opomíjena v literatuře zabývající se teorií regulace a to i u jednoparametrových regulačních obvodů. Vyjímku v naší literatuře činí snad pouze monografie [32].

<u>Příklad 3.2</u>: Mějme zpětnovazebné spojení dynamických systémů S_1, S_2 s jedním vstupem a s jedním výstupem, které jsou úplně popsány přenosy ${}_1G = \frac{s-1}{s}$ a ${}_2G = \frac{1}{s-1}$. Přenos složeného dy-



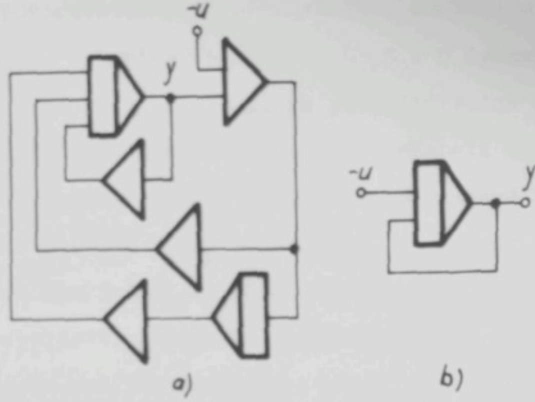
Obr.3.8. Zpětnovazebné spoje[illegible] S_1, S_2.

namického systému je $G = \frac{1}{}$ [illegible] ený dynamický [illegible] řídi [illegible] ní pře[illegible] vou [illegible] Podle přenos[illegible] by [illegible] ý dynami[illegible] systém měl být stabilní, ale podle věty 3.18 je (asi) nestabilní, neboť jeden kořen polynomu $M\bar{M}$ = (s+1)(s-1) má kladnou reálnou část. Složený dynamický systém S (obr.3.8) byl namodelován na analogovém počítači. Odezva y(t) na vstup u(t) = 0,5 η(t), kde η(t) je tzv. jednotková funkce, je uvedena na obr.3.9. Silně je vyznačen[illegible] [illegible]zva y(t) zpětnovazebného spo-



Obr.3.9. Odezva y(t) na vstup 0,5 $\eta(t)$ složeného dynamického systému (silně) a jiného dynamického systému s přenosem G (slabě).

jení dynamických systémů S_1, S_2, slabě je vyznačena odezva jiného dynamického systému, který je úplně popsán přenosem $G = \frac{1}{s+1}$. Z obr.3.9 je vidět, že rovnice $\det(I+{}_1G_2G) = 0$ (neboli $M = 0$), která je v literatuře nazývána charakteristickou rovnicí uzavřeného regulačního obvodu, tento regulační obvod vůbec necharakterisuje. Pro úplnost uvádíme na obr.3.10 programové schema pro řešení uvedené úlohy na analogovém počítači.



Obr.3.10. Programové schema pro modelování
a) zpětnovazebného spojení dynamických systémů s přenosy $_1G$, $_2G$;
b) dynamického systému s přenosem G.

3.4 Shrnutí

V této kapitole jsme uvedli nutné a dostačující podmínky řiditelnosti a pozorovatelnosti paralelního, seriového a zpětnovazebného spojení dynamických systémů S_1, S_2. O dynamických systémech S_1, S_2 jsme předpokládali, že jsou řiditelné a pozorovatelné. Podmínky řiditelnosti a pozorovatelnosti složeného dynamického systému jsou založeny jednak na Jordanově kanonické formě dynamických systémů S_1, S_2 a jednak na přenosových maticích ${}_1G, {}_2G$ dynamických systémů S_1, S_2. Dostačující podmínka řiditelnosti a pozorovatelnosti seriového spojení dynamických systémů, která byla až dosud publikována, byla v práci upřesněna a byla tak nalezena podmínka nutná a postačující. V závěru každé podkapitoly jsme uvedlipodmínky stability příslušného spojení dynamických systémů S_1, S_2.

Zvláštní pozornost zasluhuje podmínka stability zpětnovazebného spojení dynamických systémů S_1, S_2, které jsou úplně popsány přenosovými maticemi ${}_1G, {}_2G$. Až dosud se věřilo, soudě podle literatury zabývající se teorií regulace, že $\det(I + {}_1G\, {}_2G) = 0$ je charakteristickou rovnicí zpětnovazebného spojení (regulačního obvodu) a že kořeny této charakteristické rovnice určují stabilitu zpětnovazebného spojení. Nikde ale není podotknuto (s vyjímkou [32]), že toto je pravda jen a jen tehdy, jsou-li dynamické systémy S_1, S_2 samy o sobě stabilní. V práci byla uvedena (věta 3.18) dostačující podmínka stability zpětnovazebného spojení dynamických systémů; domníváme se, že tato podmínka je současně podmínkou nutnou. Důkaz této domněnky, případně její vyvrácení, předkládáme jako jednu z dosud nevyřešených úloh.

4 Víceparametrová regulace chemického reaktoru

V této kapitole na praktickém příkladu víceparametrové regulace chemického reaktoru objasníme některé důsledky plynoucí z kapitoly 3.3.

4.1 Matematický model průtočného míchaného reaktoru

Průtočné míchané reaktory jsou v literatuře poměrně dobře popsány. Seznam základní literatury, která se zabývá matematickým popisem průtočných míchaných reaktorů z dynamického hlediska, je uveden v práci [15]. V této kapitole budeme uvažovat průtočný míchaný reaktor, ve kterém probíhá chemická reakce typu X → produkty. Matematický popis reaktoru včetně konkrétních hodnot jednotlivých veličin je převzat z literatury [9].

Rovnice látkové a tepelné bilance reaktoru jsou:

$$\frac{dX(t)}{dt} = \frac{Q(t)}{V}\left[X_1-X(t)\right] - A^{*}e^{-\frac{E}{RT(t)}}X(t) \qquad (.1)$$

$$\frac{dT(t)}{dt} = \frac{Q(t)}{V}\left[T_1-T(t)\right] - \frac{UAF(t)\left[T(t)-T_c\right]}{V\rho C_p\left[F(t)+1\right]} - \frac{A^{*}e^{-\frac{E}{RT(t)}}\Delta HX(t)}{\rho C_p} \qquad (.2)$$

$$F(t) = \frac{2Q_c(t)\rho_c C_c}{UA} \quad . \qquad (.3)$$

Jednotlivé veličiny v rovnicích (.1)-(.3) mají následující význam a hodnoty:

A	plocha chladicího hadu; 46,5 m^2
A^{*}	frekvenční faktor; 3.10^{11} s^{-1}
C_c	specifické teplo chladiva; 1 $kcal.kg^{-1}.deg^{-1}$
C_p	specifické teplo reakční směsi; 1 $kcal.kg^{-1}.deg^{-1}$
E	aktivační energie; $2{,}5.10^4$ $kcal.kmol^{-1}$

ΔH	reakční teplo; $-1{,}11.10^{4}$ kcal.kmol^{-1}
$Q(t)$	nástřik; $Q_o=1{,}42.10^{-2}$ m^3.s^{-1}
$Q_c(t)$	průtok chladiva; $Q_{co}=5{,}66.10^{-3}$ m^3.s^{-1}
R	plynová konstanta; $1{,}987$ kcal.kmol^{-1}.deg^{-1}
ρ	hustota reakční směsi; 961 kg.m^{-3}
ρ_c	hustota chladiva; 961 kg.m^{-3}
$T(t)$	teplota reakční směsi; $T_o=399$ ^oK
T_c	teplota chladiva; 289 ^oK
T_i	teplota nástřiku; 383 ^oK
U	koeficient prostupu tepla; $0{,}14$ kcal.m^{-2}.s^{-1}.deg^{-1}
V	objem reaktoru; $2{,}83$ m^3
$X(t)$	koncentrace výchozí látky v reakční směsi; $X_o=3{,}86$ kmol.m^{-3}
X_i	koncentrace výchozí látky v nástřiku; $8{,}01$ kmol.m^{-3}

F je definováno vztahem (.3). Index $()_o$ značí hodnotu veličiny () v pracovním bodě. Lze se snadno přesvědčit, že uvedený pracovní bod je nestabilní [9,15].

Diferenciální rovnice (.1),(.2) představují soustavu dvou obyčejných nelineárních diferenciálních rovnic 1. řádu. Všechny nelineární závislosti mezi jednotlivými proměnnými v těchto rovnicích lze v jistém okolí pracovního bodu linearisovat, takže získáme linearisované diferenciální rovnice látkové a tepelné bilance reaktoru. Tyto rovnice popisují chování reaktoru tím lépe, čím menší je okolí pracovního bodu, v němž budou nastávat změny všech proměnných.

Jednotlivé proměnné můžeme vyjádřit jako součet hodnoty v pracovním bodě a odchylky od pracovního bodu:

$$
\begin{aligned}
X(t) &= X_o + x_1(t)\\
T(t) &= T_o + x_2(t)\\
Q(t) &= Q_o + u_1(t)\\
Q_c(t) &= Q_{co} + u_2(t) \quad ,
\end{aligned}
\qquad (.4)
$$

kde x_i, u_i; $i=1,2$ značí odchylku příslušné veličiny od hodnoty v pracovním bodě. Nelineární funkce lze linearisovat rozvedením do Taylorovy řady v pracovním bodě a zanedbáním členů druhého a vyšších řádů. Potom z diferenciálních rovnic (.1),(.2) získáme následující linearisované diferenciální rovnice látkové a tepelné bilance reaktoru:

$$
\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = 10^{-3} \begin{bmatrix} -10,82 & -1,783 \\ 67,46 & 14,12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1,465 & 0 \\ -5,509 & -10,85 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}
\qquad (.5)
$$

Protože x_1, x_2 jsou přímo výstupní (měřené) veličiny reaktoru, představuje samotná rovnice (.5) popis reaktoru jako dynamického systému ve smyslu definice 1.6. Snadno se lze přesvědčit, že dynamický systém popsaný rovnicí (.5) je řiditelný a pozorovatelný a je tedy úplně popsán přenosovou maticí

$$
G(s) = \frac{1}{(s-7,59.10^{-3})(s+4,29.10^{-3})} \cdot
$$

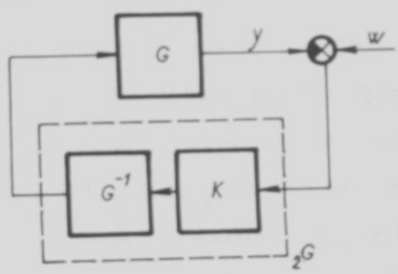
$$
\cdot \begin{bmatrix} 1,465s-10,86.10^{-3} & 19,35.10^{-3} \\ -5,509s+39,22.10^{-3} & -10,85s-0,1174 \end{bmatrix} \qquad (.6)
$$

Poznámka 4.1: Vlastní hodnoty matice A dynamického systému (.5) (reaktoru) jsou $7,59.10^{-3}$ a $-4,29.10^{-3}$, takže reaktor je nestabilní v okolí pracovního bodu, což souhlasí s tvrzením uvedeným výše. ◁

Naším úkolem bude sestavit takový regulační obvod, aby bylo možno pomocí akčních veličin Q, Q_c (u_1, u_2) měnit regulované veličiny X, T (x_1, x_2) nezávisle na sobě. Regulační obvody, které mají tuto vlastnost nazýváme autonomními. K řešení uvedeného úkolu užijeme metody inversních modelů [36].

4.2 Syntéza autonomního regulačního obvodu užitím inversního modelu

Nechť G(s) je regulární čtvercová přenosová matice regulované soustavy, $G^{-1}(s)$ je matice k ní inversní a K je nějaká diagonální matice stejného typu jako matice G. Regulační obvod sestavený podle obr.4.1 je autonomní [36], o čemž se snadno



Obr.4.1. Autonomní regulační obvod.

přesvědčíme. Vypočtěme závislost regulované veličiny y na řídicí veličině w (y,w jsou vektory):

$$\hat{y}(s) = (I+K)^{-1}K\,\hat{w}(s) \quad . \tag{.7}$$

Protože K je diagonální matice, je $(I+K)^{-1}K$ také diagonální matice a řídicí veličina w_1 ovlivňuje pouze regulovanou veličinu y_1. Regulační obvod je tedy autonomní.

Poznámka 4.2: Syntéza autonomního regulačního obvodu pomocí inversního modelu (inversní model je popsán maticí G^{-1}) je velmi jednoduchá, avšak narážíme zde na otázku existence a praktické realizovatelnosti inversního modelu. Otázka existence inversního modelu (inversního dynamického systému) je předmětem nejnovějších studií [38,41] a není v práci [36] obecně diskutována. Další podrobnosti o syntéze regulačních obvodů pomocí inversního modelu můžeme nalézt v [36]. $\triangleleft$

Matice G^{-1} existuje:

$$G^{-1}(s) = -\frac{1}{15,9}\begin{bmatrix} -10,85s-0,1174 & -19,35.10^{-3} \\ 5,509s-39,22.10^{-3} & 1,465s-10,86.10^{-3} \end{bmatrix} \qquad (.8)$$

a můžeme tedy ze znalosti x vypočítat u:

$$\hat{u}(s) = G^{-1}(s)\,\hat{x}(s) \quad . \qquad (.9)$$

Z tvaru jednotlivých prvků matice G^{-1} vidíme, že budeme muset derivovat, neboť stupeň čitatele některých prvků matice G^{-1} je větší než stupeň jmenovatele. Avšak vhodnou volbou matice K můžeme dosáhnout toho, že matice ${}_2G=G^{-1}K$, což je vlastně přenosová matice regulátoru, bude obsahovat pouze elementy, které jsou lomené racionální funkce a stupeň čitatele je menší nebo roven stupni jmenovatele. Volme např.

$$K = \mathrm{diag}\left[\frac{k_1}{s}, \frac{k_2}{s}\right] . \qquad (.10)$$

Pak

$${}_2G(s) = \begin{bmatrix} 0,6824\ k_1 & 0 \\ -0,3465\ k_1 & -0,09214\ k_2 \end{bmatrix} + \frac{10^{-3}}{s}\begin{bmatrix} 7,384\ k_1 & 1,217\ k_2 \\ 2,4667\ k_1 & 0,683\ k_2 \end{bmatrix} \qquad (.11)$$

a podle (.7)

$$\hat{y}_i(s) = \frac{1}{\frac{1}{k_i}\,s + 1}\,\hat{w}_i(s) \ , \quad i=1,2 \ . \qquad (.12)$$

Jednotlivé regulační obvody reaktoru se jeví jako navzájem oddělené a jejich dynamické chování odpovídá dynamickému chování systému 1. řádu s časovou konstantou $\frac{1}{k_i}$, $i=1,2$. Praktická realizace regulátoru, který je popsán přenosovou maticí ${}_2G$, je jednoduchá, neboť potřebujeme pouze regulátory proporcionálně-integrační. Zdá se tedy, že daný úkol byl uspokojivě vyřešen.

4.3 Stabilita autonomního regulačního obvodu

Podle [36] „kořeny charakteristické rovnice uzavřeného regulačního obvodu jednoznačně určují jeho stabilitu", při čemž charakteristickou rovnicí je rovnice

$$\det(I+K) = 0 \ . \qquad (.13)$$

Je-li matice K volena podle (.10), pak $\det(I+K) = \frac{(s+k_1)(s+k_2)}{s^2}$ a charakteristická rovnice uzavřeného regulačního obvodu bude $(s+k_1)(s+k_2) = 0$. Volíme-li $k_1, k_2 > 0$, je podle [36] regulační obvod stabilní.

Užijme k určení stability autonomního regulačního obvodu věty 3.18. Označme v souhlasu s kapitolou 3.3

$$\frac{M}{N} = \det(I+K) \ , \qquad (.14)$$

$\hat{\Delta}$ resp. ${}_2\hat{\Delta}$ charakteristický polynom regulované soustavy (reaktoru) s přenosovou maticí G resp. charakteristický polynom regulátoru s přenosovou maticí ${}_2G$ a $\bar{M} = \frac{\hat{\Delta}\,{}_2\hat{\Delta}}{N}$. V našem případě $M = (s+k_1)(s+k_2)$, $\bar{M} = (s-7{,}59.10^{-3})(s+4{,}29.10^{-3})$, neboť ${}_2\hat{\Delta} = N = s^2$. Protože polynom $M\bar{M}$ má jeden nulový bod s kladnou reálnou částí, nemůžeme říci, že regulační obvod je stabilní. Podle domněnky, že věta 3.18 uvádí podmínku nutnou a dostačující, bychom dokonce řekli, že regulační obvod je nestabilní.

O stabilitě našeho regulačního obvodu se můžeme zcela jednoznačně přesvědčit následujícím způsobem. Označme S_1 resp. S_2

dynamický systém, který je úplně popsán přenosovou maticí G resp. ${}_2G$. Irreducibilní realizací přenosové matice G je (.5), irreducibilní realizací přenosové matice ${}_2G$ je

$$ {}_2\dot{x} = 10^{-3}\begin{bmatrix} 7{,}384\ k_1 & 1{,}217\ k_2 \\ 2{,}4667\ k_1 & 0{,}683\ k_2 \end{bmatrix} {}_2u \tag{.15} $$

$$ {}_2y = {}_2x + \begin{bmatrix} 0{,}6824\ k_1 & 0 \\ -0{,}3465\ k_1 & -0{,}09214\ k_2 \end{bmatrix} {}_2u\ . \tag{.16} $$

Regulační obvod (zpětnovazebné spojení) je popsán rovnicemi (3.28),(3.29). O stabilitě regulačního obvodu rozhodují vlastní hodnoty matice A v rovnici (3.28); tuto matici označme ${}_rA$. Po dosazení konkrétních čísel z rovnic (.5),(.15),(.16) a pro $k_1 = 10^{-2}$, $k_2 = 2.10^{-2}$ dostaneme

$$ {}_rA = \begin{bmatrix} -20{,}817.10^{-3} & -1{,}783.10^{-3} & -1{,}465 & 0 \\ 67{,}458.10^{-3} & -5{,}8744.10^{-3} & 5{,}509 & 10{,}85 \\ 7{,}384.10^{-5} & 2{,}434.10^{-5} & 0 & 0 \\ 2{,}4667.10^{-5} & 1{,}366.10^{-5} & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{.17} $$

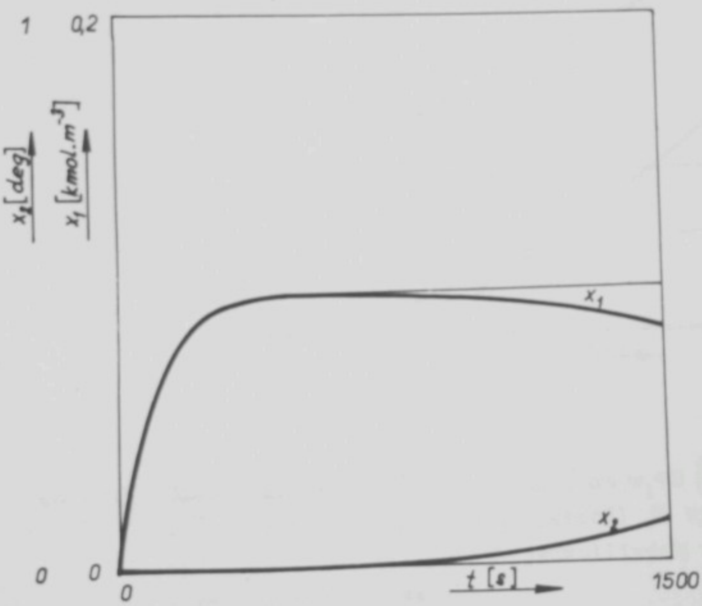
Charakteristický polynom ${}_r\Delta = \det(sI - {}_rA)$ je roven

$$ {}_r\Delta = s^4 + 2{,}669.10^{-2}s^3 + 6{,}844.10^{-5}s^2 - 1{,}633.10^{-6}s - 6{,}489.10^{-9}\ , \tag{.18} $$

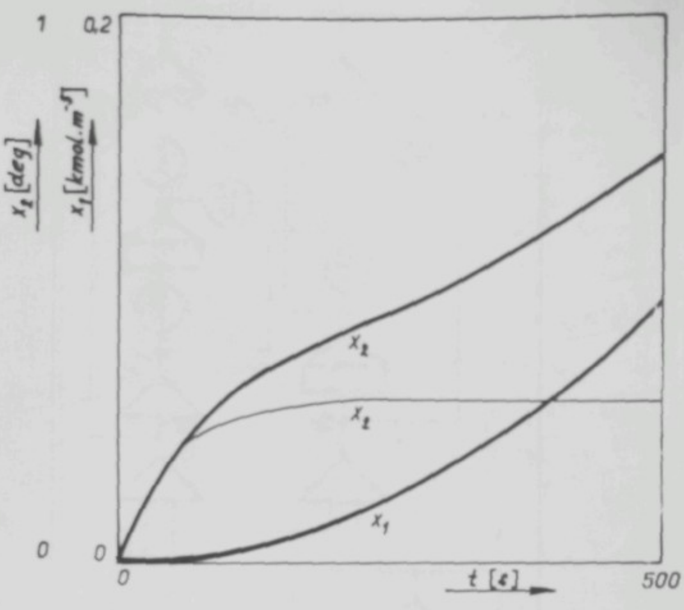
takže regulační obvod je nestabilní.

<u>Poznámka 4.3</u>: Stojí za povšimnutí, že (pro $k_1 = 10^{-2}$, $k_2 = 2.10^{-2}$) $\overline{MM} = {}_r\Delta$. Tato skutečnost je v souhlasu s domněnkou, že věta 3.18 uvádí nejen dostačující ale i nutnou podmínku stability regulačního obvodu. ◁

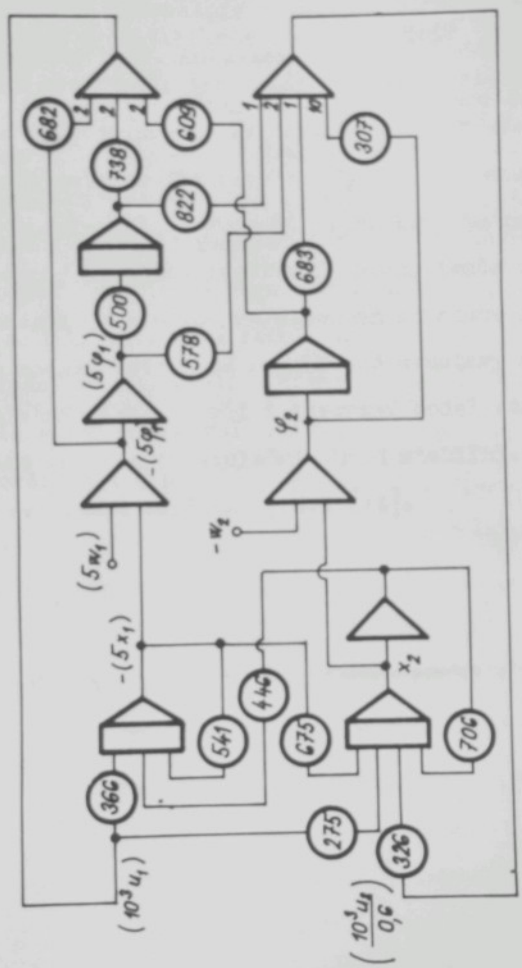
Pro ilustraci byl autonomní regulační obvod namodelován na analogovém počítači. Výsledky jsou uvedeny na obr.4.2, 4.3. Z obrázků je patrné ideální autonomní chování na počátku a pak rychlé odchylování se od ideálních hodnot vlivem nestabilních složek. Odchylky v teplotě (obr.4.3) jsou v tomto směru nebezpečnější než odchylky v koncentraci výchozí látky v reakční směsi (obr.4.2). Pro úplnost uvádíme na obr.4.4 programové schema zapojení uvedené úlohy na analogovém počítači.



Obr.4.2. Odezva x_1 [kmol.m^{-3}], x_2 [deg] na w_1=0,1 $\eta(t)$ [kmol.m^{-3}], w_2=0 [deg]. Silně (slabě) je vyznač skutečný (ideální) průběh jednotlivých veličin v závislosti na čase.



Obr.4.3. Odezva x_1 [kmol.m^{-3}], x_2 [deg] na w_1=0 [kmol. .m^{-3}], w_2=0,3 [deg]. Silně (slabě) je vyznačen skutečný (ideální) průběh jednotlivých veličin v závislosti na čase.



Obr.4.4. Programové schema autonomního regulačního obvodu. Hodnoty jednotlivých koeficientů jsou na obrázku uvedeny 1000x větší.

4.4 Shrnutí

V této kapitole jsme na příkladu průtočného míchaného reaktoru, který pracuje v nestabilním pracovním bodě, ukázali praktickou závažnost věty 3.18. Autonomní regulační obvod, sestavený v kapitole 4.2, je prakticky nepoužitelný, protože je nestabilní. Syntézu autonomního regulačního obvodu reaktoru užitím inversního modelu můžeme provést např. tak, že nejprve realizujeme jednoduchý stabilní regulační obvod, tento regulační obvod budeme chápat jako novou regulovanou soustavu a s použitím inversního modelu této nové regulované soustavy sestavíme autonomní regulační obvod. Je-li i inversní model stabilní, je podle (.13) také autonomní regulační obvod stabilní. Tato myšlenka byla ověřena v diplomní práci [14].

Závěr

V práci je axiomaticky definován dynamický systém jako matematická struktura, která přichází v úvahu při popisu skutečných fyzikálních systémů. Celá práce se zabývá pouze diferenciálními lineárními konstantními dynamickými systémy s konečnou dimensí a se spojitě proměnným časem.

Pomocí pojmů řiditelnost a pozorovatelnost dynamického systému bylo ukázáno, že vztah mezi dynamickým systémem a jeho přenosovou maticí není jedno-jednoznačný. Tato naprosto podstatná skutečnost (která je zcela opomíjena v literatuře zabývající se teorií regulace) hraje důležitou roli již při zkoumání stability složených dynamických systémů. Na příkladech 3.1,3.2 je ukázáno, že mechanické používání Laplaceova operátorového počtu k popisu chování složených dynamických systémů může vést ke kvalitativně nesprávným výsledkům. Tato skutečnost je také názorně objasněna na praktickém příkladu autonomní víceparametrové regulace průtočného míchaného reaktoru (kapitola 4), který pracuje v nestabilním pracovním bodě.

Pojmy řiditelnost a pozorovatelnost dynamických systémů hrají základní úlohu při studiu regulačních úloh všech typů. Podmínky řiditelnosti a pozorovatelnosti jednoduchých dynamických systémů jsou známy pro lineární konstantní i nekonstantní dynamické systémy. Uvedené podmínky pro složené (lineární konstantní) dynamické systémy se objevují v literatuře teprve v posledních dvou létech. Nutná a dostačující podmínka řiditelnosti a pozorovatelnosti seriového spojení dynamických systémů je poprvé uvedena v této práci. Takřka nic není z hlediska řiditelnosti a pozorovatelnosti známo o nelineárních dynamic kých systémech.

Jako velmi perspektivní se jeví syntéza víceparametrových regulačních obvodů pomocí inversních modelů. Existence a syntéza inversních dynamických systémů (inversních modelů) úzce souvisí s řiditelností a pozorovatelností dynamického systému a je předmětem nejnovějších studií [38,41]. Protože skoro všechny chemicko-technologické procesy představují (nelineární) víceparametrové regulované soustavy, je analyza a syntéza víceparametrových regulačních obvodů typická právě pro chemický průmysl.

D O D A T K Y

A Některé vlastnosti matice e^{At}

V tomto dodatku uvedeme jen takové vlastnosti matice e^{At}, které jsou potřebné v této práci. Důkazy a další podrobnosti lze nalézt ve specielní literatuře, z níž citujeme např. [4,5, 10,11,13,34,45].

Uvažujme charakteristickou rovnici matice $A \in C^{nn}$:

$$\Delta = \det(\lambda I - A) = 0 \, . \tag{.1}$$

Platí věta, známá pod názvem Cayley-Hamiltonův teorém:

Věta A.1: Každá čtvercová matice vyhovuje své vlastní charakteristické rovnici.

Rozepíšeme-li (.1) podrobněji, dostaneme

$$\Delta = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_o = 0 \, , \tag{.2}$$

a protože A vyhovuje své vlastní charakteristické rovnici, plat

$$A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_1 A + a_o I = 0 \, . \tag{.3}$$

Rovnici (.3) přepišme takto:

$$A^n = -a_{n-1}A^{n-1} - \ldots - a_1 A - a_o I \tag{.4}$$

a vynásobme obě strany rovnice (.4) maticí A:

$$A^{n+1} = -a_{n-1}A^n - \ldots - a_1 A^2 - a_o A \, . \tag{.5}$$

Dosazením A^n z rovnice (.4) do (.5) dostaneme

$$A^{n+1} = -a_{n-1}\left[-a_{n-1}A^{n-1} - \ldots - a_1 A - a_o I\right] - \\ - a_{n-2}A^{n-1} - \ldots - a_1 A^2 - a_o A \, . \tag{.6}$$

Vidíme, že matice A^n, A^{n+1},... můžeme vyjádřit jako lineární kombinaci matic $A^0 \triangleq I, A, A^2, \ldots, A^{n-1}$.

Je známo, že matice e^{At} se dá vyjádřit pomocí nekonečné absolutně konvergentní potenční řady

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{t^k}{k!} , \tag{.7}$$

která konverguje (absolutně) pro všechna $t \in R$. Vyjádříme-li v (.7) všechny matice A^j, $j > n$ pomocí matic A^i, $i=0,1,\ldots,n-1$, dostaneme vyjádření matice e^{At} pomocí matic A^i, $i=0,1,\ldots,n-1$:

$$e^{At} = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(t) A^i . \tag{.8}$$

Matice e^{At} má následující vlastnosti:

1) $Ae^{At} = e^{At}A$ (.9)

2) $\frac{d}{dt} e^{At} = Ae^{At} = e^{At}A$ (.10)

3) $e^{(A+B)t} = e^{At} e^{Bt} = e^{Bt} e^{At} \Longleftrightarrow AB = BA$ (.11)

4) $e^{-At} = (e^{At})^{-1}$, matice e^{At} je regulární pro všechna A,t (.12

5) Nechť $P \in C^{nn}$ je regulární matice. Pak

$$e^{P^{-1}APt} = P^{-1} e^{At} P . \tag{.13}$$

Označme $J = J(A)$ Jordanovu kanonickou formu matice A. Jordanova matice J má známou strukturu:

$$\begin{aligned} J = \operatorname{diag} \Big[& J(\lambda_1, n_1^1), \ldots, J(\lambda_1, n_{r(1)}^1), \\ & J(\lambda_2, n_1^2), \ldots, J(\lambda_2, n_{r(2)}^2), \\ & \vdots \\ & J(\lambda_m, n_1^m), \ldots, J(\lambda_m, n_{r(m)}^m) \Big] , \end{aligned} \tag{.14}$$

kde $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ jsou různé vlastní hodnoty matice A. Označme

$J_j^i = J(\lambda_i, n_j^i)$, $i=1,2,\ldots,m$; $j=1,2,\ldots,r(i)$. Platí

$$e^{Jt} = \mathrm{diag}\Big[e^{J_1^1 t}, \ldots, e^{J_{r(1)}^1 t}, \\ e^{J_1^2 t}, \ldots, e^{J_{r(2)}^2 t}, \\ \vdots \\ e^{J_1^m t}, \ldots, e^{J_{r(m)}^m t}\Big] , \qquad (.15)$$

kde

$$e^{J_j^i t} = e^{\lambda_i t} \cdot \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \ldots & \frac{t^{l-1}}{(l-1)!} \\ 0 & 1 & t & \ldots & \frac{t^{l-2}}{(l-2)!} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} , \qquad (.16)$$

$l=n_j^i$. Na tomto místě ještě připomeňme, že řádky matice $e^{J_j^i t}$ jsou lineárně nezávislé pro všechna $t \in R$.

B Řešení souhrnných rovnic dynamického systému

Mějme dynamický systém $S = \{A,B,C,D\}$, který je popsán následujícími rovnicemi:

$$\mathring{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad (.1)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) , \qquad (.2)$$

kde $x \in C^n$, $y \in R^q$, $u \in R^p$, $A \in C^{nn}$, $B \in C^{np}$, $C \in C^{qn}$, $D \in R^{qp}$; A,B,C,D jsou konstantní matice; $u(t)$ je po částech spojitá funkce s body nespojitosti 1. druhu. Nechť diferenciální rovnice (.1) má počáteční podmínku $x(t_o)$, $t_o \in R$. Je známo, že za uvedených podmínek má diferenciální rovnice (.1) jednoznačné spojité řešení vyhovující počáteční podmínce $x(t_o)$. Obecné řešení diferenciální rovnice (.1) je dáno vztahem

$$x(t) = e^{A(t-t_o)}x(t_o) + \int_{t_o}^{t} e^{A(t-\tau)}B\, u(\tau)\, d\tau \ , \ t \geq t_o. \qquad (.3)$$

Z vlastností konvolutorního integrálu plyne, že

$$x(t) = e^{A(t-t_o)}x(t_o) + \int_{t_o}^{t} e^{A\tau}B\, u(t-\tau)\, d\tau \ , \ t \geq t_o. \qquad (.4)$$

Dosazením (.4) do (.2) dostaneme

$$y(t) = C\left[e^{A(t-t_o)}x(t_o) + \int_{t_o}^{t} e^{A\tau}B\, u(t-\tau)\, d\tau\right] + Du(t) \ , \qquad (.5)$$

$$t \geq t_o.$$

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $t_o=0$. Řešme diferenciální rovnici (.1) užitím Laplaceovy transformace:

$$\hat{x}(s) = (sI-A)^{-1}\left[\, x(0) + B\,\hat{u}(s)\,\right] . \qquad (.6)$$

Protože

$$L^{-1}\left[(sI-A)^{-1}\right] = e^{At} , \qquad (.7)$$

pak

$$L^{-1}\left[\hat{x}(s)\right] = e^{At}x(0) + e^{At} * B\, u(t) \ , \ t \geq 0 \ , \qquad (.8)$$

což je právě (.4) pro $t_o=0$.

C Smithova a Smith - McMillanova kanonická forma; charakteristický polynom racionální matice

Označme P(s) polynomální matici proměnné s. Polynom $\delta_j(P)$ značí největšího společného dělitele všech minorů řádu j matice P. Pro úplnost definujme $\delta_o \triangleq 1$. Zřejmě δ_j dělí δ_{j+1}, což krátce píšeme $\delta_j | \delta_{j+1}$. Předpokládejme, že všechny polynomy δ_j jsou v normovaném tvaru, tj. koeficient u nejvyšší mocniny s je roven jedné. Jestliže $\delta_R(P) \neq 0$ ale $\delta_j(P) = 0$ pro všechna $j>R$, pak $R(P)$ je hodnost matice P.

<u>Věta C.1</u>: (Smithova kanonická forma.) Každou polynomální matici $P(s) \in C^{qp}$ o hodnosti R je možno vyjádřit ve tvaru

$$P(s) = E(s)\,\Gamma(s)\,F(s) \,, \tag{.1}$$

kde

a) $\Gamma = \mathrm{diag}\,[\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_R, 0, \dots, 0]$, $\Gamma \in C^{qp}$ a $\gamma_j \mid \gamma_{j+1}$, $j=1,2,\dots,R-1$; $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_R$ jsou tzv. invariantní faktory matice P a platí

$$\gamma_j = \frac{\delta_j(P)}{\delta_{j-1}(P)} \,. \tag{.2}$$

b) $E \in C^{qq}$, $F \in C^{pp}$ jsou polynomální matice s konstantními nenulovými determinanty.

Polynomy γ_j můžeme vyjádřit takto:

$$\gamma_j(s) = \prod_{i=1}^{m} (s-\lambda_i)^{n_j^i} \,, \quad n_j^i \leq n_{j+1}^i \,, \tag{.3}$$

kde λ_i, $i=1,2,\dots,m$ jsou různé nuly polynomu γ_R. Polynomy $(s-\lambda_i)^{n_j^i}$ se nazývají elementární dělitelé matice P. Důkaz věty C.1 a další podrobnosti viz např. [5,11].

Označme G(s) racionální matici, tj. matici, jejíž elementy jsou nesoudělné lomené racionální funkce proměnné s a stupeň čitatele je menší nebo roven stupni jmenovatele. Nechť polynom $\psi(G)$ značí nejmenšího společného jmenovatele všech elementů matice G. Pak $\psi(G)G$ je polynomální matice. Hodnost matice G označme $R(G)$. Zřejmě $R(G) = R(\psi(G)G)$. Pro každé $j=1,2,\dots,R(G)$ definujme polynomy ϑ_j a ψ_j takto:

$$\frac{\vartheta_j(G)}{\psi_j(G)} = \frac{r_j(\psi(G)G)}{\psi(G)} \,, \qquad (.4)$$

kde požadujeme, aby ϑ_j a ψ_j byly nesoudělné. Zřejmě $\psi = \psi_1$ a $r_j \,|\, r_{j+1} \Rightarrow \psi_{j+1} \,|\, \psi_j$ a $\vartheta_j \,|\, \vartheta_{j+1}$. Od nějakého $r(G) \leq R(G)$ počínaje jsou všechna $\psi_j = 1$, $j > r$. Číslo $r(G)$ nazýváme subhodnost matice G.

<u>Věta C.2</u>: (Smith-McMillanova kanonická forma.) Každou racionální matici $G(s) \in C^{qp}$ o hodnosti R je možno vyjádřit ve tvaru

$$G(s) = E(s)\; \Theta(s) \left[\Upsilon(s)\right]^{-1} F(s) \,, \qquad (.5)$$

kde

a) $\Theta = \mathrm{diag}\left[\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_R, 0, \dots, 0\right]$, $\Theta \in C^{qp}$,
$\Upsilon = \mathrm{diag}\left[\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_r, 1, \dots, 1\right]$, $\Upsilon \in C^{pp}$, kde
ϑ_j a ψ_j jsou definovány rovnicí (.4);

b) $E \in C^{qq}$, $F \in C^{pp}$ jsou polynomální matice s konstantními nenulovými determinanty.

<u>Poznámka C.1</u>: Matice E, F jsou stejné jako ve větě C.1, uvažujeme-li polynomální matici $P(s) = \psi(G)G$. ◁

Polynomy ψ_j se nazývají invariantní faktory matice G a můžeme je vyjádřit takto:

$$\psi_j(s) = \prod_{i=1}^{m} (s-\lambda_i)^{n_j^i} \,, \quad n_j^i \geq n_{j+1}^i \,, \qquad (.6)$$

kde λ_i, $i=1,2,\dots,m$ jsou různé nuly polynomu ψ. Polynomy $(s-\lambda_i)^{n}$ se nazývají elementární dělitelé matice G. Důkaz věty C.2 a další podrobnosti viz [33].

Označme $\hat{\Delta}_j$ nejmenšího společného jmenovatele všech minorů řádu j racionální matice G. Zřejmě $\hat{\Delta}_j \,|\, \hat{\Delta}_{j+1}$. Pro úplnost definujme $\hat{\Delta}_0 \triangleq 1$.

<u>Věta C.3</u>: $\hat{\Delta}_j = \prod_{i=1}^{j} \psi_i(G)$. (.7)

D ů k a z : Je zřejmé, že $[\psi(G)]^j$ je společný jmenovatel všech minorů řádu j matice G. Ale podle (.4) a (.2)

$$\prod_{i=1}^{j} \frac{\vartheta_i}{\psi_i} = \prod_{i=1}^{j} \frac{\frac{\delta_i}{\delta_{i-1}}}{\psi} = \frac{\delta_j}{\psi^j} \ . \tag{.8}$$

Protože ϑ_i a ψ_i jsou nesoudělné, je $\prod_{i=1}^{j} \psi_i = \hat{\Delta}_j$ právě nejmenším společným jmenovatelem všech minorů řádu j matice G. ◁

<u>Definice C.1</u>: Charakteristický polynom racionální matice G(s) definujeme jako nejmenší společný jmenovatel všech minorů matice G(s). Značíme jej $\hat{\Delta}$ a platí:

$$\hat{\Delta} = \hat{\Delta}_R \ , \tag{.9}$$

kde R je hodnost matice G.

Z rovnic (.6) a (.7) dále plyne, že

$$\hat{\Delta} = \prod_{j=1}^{r} \prod_{i=1}^{m} (s-\lambda_i)^{n_j^i} \ , \tag{.10}$$

neboť $\psi_j = 1$ pro všechna $j > r$. Takto definovaný charakteristický polynom je současně charakteristickým polynomem každé řiditelné a pozorovatelné realizace matice G(s) - viz dodatek D.

D <u>Jordanova irreducibilní kanonická realizace</u>

Nechť je dána přenosová matice $G(s) \in C^{qp}$, jejíž elementy jsou nesoudělné lomené racionální funkce argumentu s a stupeň čitatele je menší nebo roven stupni jmenovatele. Uvedeme konstrukci Jordanovy irreducibilní kanonické realizace přenosové matice G(s) [27]:

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad (.1)$$
$$y = Cx + Du ,$$

kde $x \in C^n$, $y \in R^q$, $u \in R^p$, $A \in C^{nn}$, $B \in C^{np}$, $C \in C^{qn}$, $D \in R^{qp}$; A,B,C,D jsou konstantní matice. Matice A je v tzv. Jordanově kanonickém tvaru, tj.

$$\begin{aligned} A = J = \operatorname{diag} \big[& J(\lambda_1, n_1^1), J(\lambda_1, n_2^1), \dots, J(\lambda_1, n_{r(1)}^1), \\ & J(\lambda_2, n_1^2), J(\lambda_2, n_2^2), \dots, J(\lambda_2, n_{r(2)}^2), \\ & \vdots \\ & J(\lambda_m, n_1^m), J(\lambda_m, n_2^m), \dots, J(\lambda_m, n_{r(m)}^m) \big] . \end{aligned} \qquad (.2)$$

Pro dimensi n matice A zřejmě platí:

$$n = \dim A = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{r(i)} n_j^i \; . \qquad (.3)$$

Mezi přenosovou maticí G(s) a její realizací {A,B,C,D} platí vztah:

$$G(s) = C(sI-A)^{-1}B + D \; . \qquad (.4)$$

Říkáme, že λ je pólem matice G(s), je-li pólem alespoň jednoho elementu matice G(s). Nechť λ_i, i=1,2,...,m jsou různé póly matice G(s). Matice G(s) může být rozložena takto:

$$G(s) = \sum_{i=1}^{m} G^i(s) + D , \qquad (.5)$$

kde matice $G^i(s)$ má pouze jeden pól λ_i, $\lim_{s \to \infty} G^i(s) = 0$ a $\lim_{s \to \infty} G(s) = D$

Rozklad (.5) provedeme tak, že rozložíme každý element matice G na součet parciálních zlomků a všechny elementy s pólem λ_i sdružíme do matice G^i.

Nechť $\{A^i, B^i, C^i\}$, i=1,2,...,m jsou realizace matic G^i. Pak přímý součet těchto realizací je realizace přenosové matice

$\sum_{i=1}^{m} G^i$ a celková realizace matice G je $\{A,B,C,D\}$, kde

$$
\begin{aligned}
A &= \mathrm{diag}\left[A^1, A^2, \ldots, A^m\right], && A \in C^{nn} \\
B &= \begin{bmatrix} B^1 \\ B^2 \\ \vdots \\ B^m \end{bmatrix}, && B \in C^{np} \\
C &= \left[C^1 \; C^2 \; \ldots \; C^m\right], && C \in C^{qn} \\
D &= D, && D \in R^{qp}.
\end{aligned}
\tag{.6}
$$

Poznámka D.1: Nechť Σ_1, Σ_2 jsou dva podprostory vektorového prostoru Σ. Říkáme, že Σ je přímý součet Σ_1 a Σ_2, psáno $\Sigma = \Sigma_1 \oplus \Sigma_2$, jestliže libovolný vektor $x \in \Sigma$ může být vyjádřen jedním a pouze jedním způsobem jako $x=y+z$, kde $y \in \Sigma_1$ a $z \in \Sigma_2$. ◁

Podle věty C.2 lze každou matici $G^i(s)$ vyjádřit ve tvaru

$$G^i(s) = E^i(s)\, \Theta^i(s) \left[\Psi^i(s)\right]^{-1} F^i(s) , \tag{.7}$$

kde $E^i \in C^{qq}$, $F^i \in C^{pp}$ jsou polynomální matice s konstantními nenulovými determinanty a

$$\Theta^i = \mathrm{diag}\left[\vartheta_1^i, \vartheta_2^i, \ldots, \vartheta_{R(i)}^i, 0, \ldots, 0\right] , \quad \Theta^i \in C^{qp},$$

$$\Psi^i = \mathrm{diag}\left[\psi_1^i, \psi_2^i, \ldots, \psi_{r(i)}^i, 1, \ldots, 1\right] , \quad \Psi^i \in C^{pp}.$$

Polynomy ϑ_j^i, ψ_j^i jsou definovány rovnicí (C.4). Protože matice $G^i(s)$ má pouze jeden pól λ_i, lze polynomy $\psi_j^i(s)$ vyjádřit takto:

$$\psi_j^i(s) = (s-\lambda_i)^{n_j^i} , \quad j=1,2,\ldots,r(i) . \tag{.8}$$

Protože $\psi_{j+1}^i \mid \psi_j^i$, musí platit $n_j^i \geq n_{j+1}^i$, $j=1,2,\ldots,r(i)-1$.

Znovu připomeňme (dodatek C), že R(i) resp. r(i) je hodnost resp. subhodnost matice G^i a $r(i) \leq R(i)$.

Definice D.1: Nechť n(s) a m(s) jsou polynomy. Označme $\rho n(s)$ stupeň polynomu n(s). Definujme operátor P takto:

$$P\left[\frac{m(s)}{n(s)}\right] = \frac{m'(s)}{n(s)} \quad , \qquad (.9)$$

kde $m(s) \equiv m'(s)$ [mod n(s)] a $\rho m'(s) < \rho n(s)$. Jinými slovy, $m'(s)$ je zbytek nejmenšího stupně, který získáme při dělení polynomu m(s) polynomem n(s). Na matici aplikujeme operátor P tak, že jej aplikujeme na každý prvek matice.

Definujme dále matici $H^i(s)$ takto:

$$H^i(s) \triangleq E^i(s)\ \theta^i(s) \qquad (.10)$$

a označme h^i_j j-tý sloupec matice H^i a f^i_j j-tý řádek matice F^i. Tedy $H^i = [h^i_1\ h^i_2 \ldots h^i_l]$,

$$F^i = \begin{bmatrix} f^i_1 \\ f^i_2 \\ \vdots \\ f^i_l \end{bmatrix} .$$

Pak podle předpokladu, že $\lim_{s\to\infty} G^i(s) = 0$ platí

$$G^i(s) = P[G^i(s)] = P[H^i(s)[\Psi^i(s)]^{-1}F^i(s)] =$$
$$= P[\sum_{j=1}^{l} h^i_j(s)[\psi^i_j(s)]^{-1}f^i_j(s)] = \sum_{j=1}^{l} P[h^i_j[\psi^i_j]^{-1}f^i_j] . \qquad (.11)$$

Poslední krok v (.11) je oprávněn vzhledem k linearitě operátor P. Protože $\psi^i_j(s)=1$ pro $j>r(i)$, je

$$P[h^i_j[\psi^i_j]^{-1}f^i_j] = 0 \text{ pro } j>r(i) \qquad (.12)$$

a (.11) může být zjednodušena na

$$G^i(s) = \sum_{j=1}^{r(i)} P[h^i_j[\psi^i_j]^{-1}f^i_j] = \sum_{j=1}^{r(i)} G^i_j(s) , \qquad (.13)$$

kde

$$G_j^i(s) = P\left[h_j^i[\psi_j^i]^{-1}f_j^i\right] . \qquad (.14)$$

Předpokládejme, že polynomální vektory h_j^i a f_j^i jsou vyjádřeny takto:

$$h_j^i(s) = c_{j1}^i + (s-\lambda_i)c_{j2}^i + \dots + (s-\lambda_i)^{n_j^i-1}c_{jl}^i + \dots \qquad (.15)$$

$$f_j^i(s) = b_{jl}^i + (s-\lambda_i)b_{j(l-1)}^i + \dots + (s-\lambda_i)^{n_j^i-1}b_{j1}^i + \dots \qquad (.16)$$

kde $c_{jk}^i \in C^q$ je sloupcový vektor, $b_{jk}^i \in C^p$ je řádkový vektor a $l=n_j^i$.

<u>Věta D.1</u>: Přenosová matice $G_j^i(s)$ má realizaci $\{A_j^i, B_j^i, C_j^i\}$, kde

$$A_j^i = J(\lambda_i, n_j^i)$$

$$B_j^i = \begin{bmatrix} b_{j1}^i \\ b_{j2}^i \\ \vdots \\ b_{jl}^i \end{bmatrix} \qquad (.17)$$

$$C_j^i = \begin{bmatrix} c_{j1}^i & c_{j2}^i & \dots & c_{jl}^i \end{bmatrix}, \quad l=n_j^i .$$

D ů k a z : Přenosová matice

$$G_j^i(s) = C_j^i(sI-A_j^i)^{-1}B_j^i . \qquad (.18)$$

Důkaz provedeme dosazením (.17) do (.18) a srovnáním s (.14). ◁

Realizace přenosové matice $G^i(s)$, tj. $\{A^i, B^i, C^i\}$ je přímý součet realizací přenosových matic $G_j^i(s)$, $j=1,2,\dots,r(i)$, takže

$$A^i = \mathrm{diag}\left[A_1^i, A_2^i, \dots, A_{r(i)}^i\right]$$

$$B^i = \begin{bmatrix} B_1^i \\ B_2^i \\ \vdots \\ B_{r(i)}^i \end{bmatrix} \qquad (.19)$$

$$C^i = [C_1^i \;\; C_2^i \;\; \dots \;\; C_{r(i)}^i] .$$

Nyní teprve vidíme, že matice A má skladbu, která byla naznačena v (.2). Číslo r(i) udává počet Jordanových bloků v matici A, které přísluší vlastní hodnotě λ_i a n_j^i udává dimensi j-tého Jordanova bloku v matici A, který přísluší vlastní hodnotě λ_i.

Je známo, že charakteristický polynom realizace (.1) má tvar

$$\Delta = \det(sI-A) . \tag{.20}$$

Je-li matice A v Jordanově kanonickém tvaru (.2), pak

$$\Delta = \prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{r(i)} (s-\lambda_i)^{n_j^i} . \tag{.21}$$

Dokážeme následující větu:

<u>Věta D.2</u>: Charakteristický polynom racionální matice G(s) (definice C.1) je totožný s charakteristickým polynomem (.21) Jordanovy irreducibilní kanonické realizace matice G(s), tj. $\hat{\Delta} = \Delta$.

D ů k a z : Matice G(s) se dá vyjádřit ve tvaru (.5). Každou matici G^i můžeme dále vyjádřit ve tvaru (.7).
Charakteristickým polynomem matice G^i je podle (C.10) a (.8) polynom

$$\hat{\Delta}^i = \prod_{j=1}^{r(i)} (s-\lambda_i)^{n_j^i} \tag{.22}$$

a charakteristickým polynomem matice G je polynom $\hat{\Delta} = \prod_{i=1}^{m} \hat{\Delta}^i$, což je právě (.21). ◁

Na závěr ještě definujme matice $\mathcal{B}_1^i$ a $\mathcal{C}_1^i$:

$$\mathcal{B}_1^i \triangleq \begin{bmatrix} b_{11}^i \\ b_{21}^i \\ \vdots \\ b_{r(i)1}^i \end{bmatrix}, \quad \mathcal{C}_1^i \triangleq [c_{11}^i \;\; c_{21}^i , \dots \; c_{r(i)1}^i], \tag{.23}$$

kde $c^i_{jl} \in C^q$ je sloupcový vektor, $b^i_{jl} \in C^p$ je řádkový vektor (viz rovnice (.15),(.16)). Dále označme $H^i_{r(i)}$ prvních $r(i)$ sloupců matice H^i a $F^i_{r(i)}$ prvních $r(i)$ řádků matice F^i. Z rovnic (.15) a (.16) plyne, že

$$\mathcal{B}^i_1 = F^i_{r(i)}(\lambda_i) , \qquad \mathcal{C}^i_1 = H^i_{r(i)}(\lambda_i) . \tag{.24}$$

Dokažme ještě, že Jordanova kanonická realizace přenosové matice získaná uvedeným způsobem je irreducibilní.

<u>Věta D.3</u>: Jordanova kanonická realizace získaná výše uvedeným způsobem je irreducibilní.

D ů k a z : Podle definice 1.13 a poznámky 1.10 je irreducibilní realizace řiditelná a pozorovatelná. Zkoumejme realizaci $\{A^i,B^i,C^i\}$. Tato realizace je podle vět 2.9 a 2.10 řiditelná a pozorovatelná když a jen když $R(\mathcal{B}^i_1) = R(\mathcal{C}^i_1) = r(i)$, neboli podle (.24) $R(F^i_{r(i)}(\lambda_i)) = R(H^i_{r(i)}(\lambda_i)) = r(i)$. Ale protože $R(F^i) = p \geq r(i)$, je $R(F^i_{r(i)}(\lambda_i)) = r(i)$. Podobně $R(H^i) = R(i) \geq r(i)$ a tedy $R(H^i_{r(i)}(\lambda_i)) = r(i)$. Tím jsme ukázali, že realizace $\{A^i,B^i,C^i\}$ je irreducibilní. Zbývá ještě ukázat, že přímý součet těchto realizací, tj. realizace $\{A,B,C,D\}$ je irreducibilní. Tato skutečnost je ovšem zřejmá z důkazu věty 2.9 (dodatek E.3), neboť $\lambda_i \neq \lambda_j$, $i \neq j$. ◁

E Důkazy

E.1 Důkaz věty 2.1

⇒ Předpokládejme, že dynamický systém $S = \{A,B,C,D\}$ je řiditelný, tj. (definice 1.8) existuje takový vstup $u_{\langle t_o,t_1\rangle}$, že libovolný počáteční stav $x(t_o)\in C^n$ lze pomocí tohoto vstupu převést na libovolný žádaný stav $x(t_1)\in C^n$ v konečném čase $t_1 \geqslant t_o$. Víme (dodatek B), že

$$x(t_1) = e^{A(t_1-t_o)}x(t_o) + \int_{t_o}^{t_1} e^{A\tau} B\, u(t_1-\tau)\, d\tau \; . \qquad (.1)$$

Odtud

$$\tilde{x} = x(t_1) - e^{A(t_1-t_o)}x(t_o) = \int_{t_o}^{t_1} e^{A\tau} B\, u(t_1-\tau)\, d\tau \; , \qquad (.2)$$

kde $\tilde{x}$ je libovolný element C^n. To znamená, že žádná složka $\tilde{x}_i$, $i=1,2,\ldots,n$ vektoru $\tilde{x}$ není závislá na ostatních. Označme $H=e^{At}B$ a H^i i-tý řádek matice H, $i=1,2,\ldots,n$. Pak

$$Hu = \begin{bmatrix} (H^1,u) \\ (H^2,u) \\ \vdots \\ (H^n,u) \end{bmatrix} \; , \qquad (.3)$$

kde (H^i,u) značí skalární součin vektorů H^i, u. Jsou-li řádky vektoru $\tilde{x}$ lineárně nezávislé, musí být také řádky vektoru

$\int_{t_o}^{t_1} H(\tau)\, u(t_1-\tau)\, d\tau$ lineárně nezávislé pro všechna $t_o, t_1 \in R$, $t_o \leqslant t_1$. To bude splněno jen tehdy, budou-li lineárně nezávislé řádky vektoru Hu a tato podmínka bude splněna zase jen tehdy (viz (.3)), budou-li lineárně nezávislé řádky matice $H = e^{At}B$.

⇐ Předpokládejme, že dynamický systém $S \equiv \{A,B,C,D\}$ je řiditelný, ale že např. n-tý řádek matice $H = e^{At}B$ je lineárně závislý na ostatních. Potom také složka $\tilde{x}_n$ vektoru $\tilde{x}$ je jednoznačně vyjádřena pomocí složek $\tilde{x}_1,\dots,\tilde{x}_{n-1}$ a nelze ji tudíž volit libovolně. Tedy ani vektor $\tilde{x}$ nemůže být libovolný element C^n, což je ve sporu s předpokladem. ◁

E.2 <u>Důkaz věty 2.4</u>

⇒ Předpokládejme, že dynamický systém $S \equiv \{A,B,C,D\}$ je pozorovatelný, tj. (definice 1.10) existuje takové konečné $t_1 \geq t_0$, že libovolný počáteční stav $x(t_0) \in C^n$ může být určen na základě znalosti vstupu $u_{\langle t_0,t_1\rangle}$ a výstupu $y_{\langle t_0,t_1\rangle}$. Víme (dodatek B), že

$$y(t) = C\left[e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A\tau} B\, u(t-\tau)\, d\tau\right] + D\, u(t)\ . \qquad (.4)$$

Odtud

$$\tilde{y} = y(t) - C\int_{t_0}^{t} e^{A\tau} B\, u(t-\tau)\, d\tau - D\, u(t) = Ce^{At}\tilde{x}\ , \qquad (.5)$$

kde $\tilde{x} = e^{-At_0}x(t_0)$. Protože $x(t_0)$ je libovolný element C^n je $\tilde{x}$ také libovolný element C^n, neboť matice e^{-At_0} je regulární. To znamená, že žádná složka $\tilde{x}_i$, $i=1,2,\dots,n$ vektoru $\tilde{x}$ není závislá na ostatních. Označme $H = Ce^{At}$ a H^i i-tý sloupec matice H, $i=1,2,\dots,n$. Pak

$$\tilde{y} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_i H^i\ . \qquad (.6)$$

Je-li dynamický systém dle předpokladu pozorovatelný, pak rovnicí (.6) musí být vektor $\tilde{x}$ jednoznačně určen a to bude jen tehdy, jsou-li vektory H^i, $i=1,2,\dots,n$ lineárně nezávislé.

$\Leftarrow$ Nechť vektory H^i, $i=1,2,\dots,n$ jsou lineárně nezávislé. Pak složky $\tilde{x}_i$ vektoru $\tilde{x}$ jsou rovnicí (.6) jednoznačně určeny a dynamický systém je pozorovatelný. $\triangleleft$

E.3 Důkaz věty 2.9

Podle věty 2.1 je dynamický systém $S = \{A,B,C,D\}$ řiditelný když a jen když řádky matice $e^{At}B$ jsou lineárně nezávislé pro $t\in\langle t_0,\infty)$. Je-li matice A v Jordanově kanonickém tvaru, pak $A=J$. Musíme tedy ukázat, za jakých podmínek jsou řádky matice $e^{Jt}B$ lineárně nezávislé. Matice $e^{Jt}B$ může být vyjádřena takto (kapitola 1.8, tab.1.1):

$$e^{Jt}B = \begin{bmatrix} e^{J^1t}B^1 \\ e^{J^2t}B^2 \\ \vdots \\ e^{J^mt}B^m \end{bmatrix} \qquad (.7)$$

a matice $e^{J^it}B^i$, $i=1,2,\dots,m$ mají tvar

$$e^{J^it}B^i = \begin{bmatrix} e^{J^i_1t}B^i_1 \\ e^{J^i_2t}B^i_2 \\ \vdots \\ e^{J^i_{r(i)}t}B^i_{r(i)} \end{bmatrix}, \qquad (.8)$$

kde podle (A.16)

$$e^{J^i_jt}B^i_j = e^{\lambda_it}\cdot\begin{bmatrix} 1 & t & \cdots & \frac{t^{l-1}}{(l-1)!} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots\cdots & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b^i_{j1} \\ \vdots \\ b^i_{jl} \end{bmatrix}, \qquad (.9)$$

$j=1,2,\dots,r(i)$; $l=n^i_j$. Nyní přistoupíme k vlastnímu důkazu.

$\Rightarrow$ Předpokládejme, že dynamický systém $S = \{J,B,C,D\}$ je řiditelný. Pak řádky matice $e^{Jt}B$ musí být lineárně nezávislé. Poslední řádek matice $e^{J_j^i t}B_j^i$ je $e^{\lambda_i t}b_{j1}^i$, $j=1,2,\ldots,r(i)$. Jsou-li tedy vektory $b_{11}^i, b_{21}^i, \ldots, b_{r(i)1}^i$ lineárně závislé, neboli $R(\mathcal{B}_1^i) < r(i)$, pak poslední řádky matic $e^{J_j^i t}B_j^i$, $j=1,2,\ldots,r(i)$ jsou lineárně závislé a tedy i řádky matice $e^{Jt}B$ jsou lineárně závislé, což je ve sporu s předpokladem. Proto musí být $R(\mathcal{B}_1^i) = r(i)$.

$\Leftarrow$ Z (.9) je zřejmé, že jestliže $b_{j1}^i \neq 0$, pak všechny řádky matice $e^{J_j^i t}B_j^i$ jsou lineárně nezávislé. Předpokládejme, že vektory $b_{11}^i, b_{21}^i, \ldots, b_{r(i)1}^i$ jsou lineárně nezávislé, neboli $R(\mathcal{B}_1^i) = r(i)$. Pak také všechny řádky matice $e^{J^i t}B^i$ jsou lineárně nezávislé. Protože $\lambda_i \neq \lambda_j$, $i \neq j$, pak libovolné řádky matic $e^{J^i t}B^i$, $e^{J^j t}B^j$, $i \neq j$ jsou navzájem lineárně nezávislé a tedy i řádky matice $e^{Jt}B$ jsou lineárně nezávislé. $\lhd$

<u>Poznámka E.1</u>: Z důkazu je zřejmé, že jakákoli lineární závislost řádků matice $e^{Jt}B$ vzniká v Jordanových blocích příslušejících jedné vlastní hodnotě λ_i. Proto také vyšetřujeme $R(\mathcal{B}_1^i)$ pro jednotlivá $i=1,2,\ldots,m$. $\lhd$

E.4 <u>Důkaz věty 3.8</u>

Z důkazu věty 2.9 (dodatek E.3) je zřejmé, že pro zkoumání řiditelnosti stačí uvažovat pouze stavové proměnné příslušející jedné vlastní hodnotě matice J nezávisle na ostatních. Navíc mezi stavovými proměnnými, které přísluší jedné vlastní hodnotě matice J, např. λ_i, stačí uvažovat pouze ty, které přísluší poslednímu řádku každého Jordanova bloku v matici J (který ovšem přísluší té vlastní hodnotě λ_i); tedy $x_{11}^i, \ldots, x_{r(i)1}^i$. Neboť jsou-li stavové proměnné $x^i_{1l},\dots,x^i_{r(i)l}$ řiditelné, jsou řiditelné všechny stavové proměnné příslušející vlastní hodnotě λ_i. Platí-li uvedené tvrzení pro všechna $i=1,2,\dots,m$, pak je řiditelný celý dynamický systém. Nyní přistoupíme k vlastnímu důkazu.

Dynamické systémy S_1,S_2 jsou dle předpokladu řiditelné a pozorovatelné a jsou vyjádřeny v Jordanově kanonickém tvaru. Výstup dynamického systému S_1 je současně vstupem dynamického systému S_2, takže ${}_2\hat{u}(s) = {}_1\hat{y}(s) = {}_1G(s)\hat{u}(s)$, kde

$$ {}_1G(s) = {}_1C(sI-{}_1J)^{-1}\,{}_1B + {}_1D \ . \tag{.10}$$

Pro libovolnou stavovou proměnnou ${}_2x^i_{jl}$, $j=1,2,\dots,{}_2r(i)$; $i=1,2,\dots,{}_2m$ dynamického systému S_2 platí:

$$ {}_2\hat{x}^i_{jl}(s) = \frac{1}{s-{}_2\lambda_i}\ {}_2b^i_{jl}\ {}_1G(s)\ \hat{u}(s) \ . \tag{.11}$$

Dosazením (.10) do (.11) dostaneme

$$ {}_2\hat{x}^i_{jl}(s) = {}_2b^i_{jl}\ \frac{1}{s-{}_2\lambda_i}\ {}_1D\ \hat{u}(s) + {}_2b^i_{jl}\ {}_1C\ \frac{1}{s-{}_2\lambda_i}\ (sI-{}_1J)^{-1}\,{}_1B\ \hat{u}(s) \tag{.12}$$

a) ${}_2\lambda_i \in {}_2\Lambda \doteq ({}_1\Lambda \cap {}_2\Lambda)$

Dosadíme-li do (.12) následující výraz

$$ \frac{1}{s-{}_2\lambda_i}\ (sI-{}_1J)^{-1} = \frac{1}{s-{}_2\lambda_i}\ ({}_2\lambda_i I-{}_1J)^{-1} - ({}_2\lambda_i I-{}_1J)^{-1}(sI-{}_1J)^{-1} \tag{.13}$$

(o jehož správnosti se můžeme přesvědčit násobením $(sI-{}_1J)$ zprava a $({}_2\lambda_i I-{}_1J)$ zleva), dostaneme

$$ {}_2\hat{x}^i_{jl}(s) = {}_2b^i_{jl}\left[{}_1D + {}_1C({}_2\lambda_i I-{}_1J)^{-1}\,{}_1B\right]\frac{1}{s-{}_2\lambda_i}\ \hat{u}(s) - $$

$$ - {}_2b^i_{jl}\ {}_1C({}_2\lambda_i I-{}_1J)^{-1}(sI-{}_1J)^{-1}\,{}_1B\ \hat{u}(s) \ . \tag{.14}$$

Existence matice $({}_2\lambda_i I-{}_1J)^{-1}$ plyne z předpokladu, že ${}_2\lambda_i \in {}_2\Lambda \doteq ({}_1\Lambda \cap {}_2\Lambda)$. Dosazením

$$ {}_1G({}_2\lambda_1) = {}_1C({}_2\lambda_1 I - {}_1J)\,{}_1B + {}_1D \tag{.15}$$

a

$$ {}_1\hat{x}(s) = (sI - {}_1J)^{-1}\,{}_1B\,\hat{u}(s) \tag{.16}$$

do (.14) dostaneme

$$ {}_2\hat{x}^i_{j1}(s) + {}_2b^i_{j1}\,{}_1C({}_2\lambda_1 I - {}_1J)^{-1}\,{}_1\hat{x}(s) = {}_2b^i_{j1}\,{}_1G({}_2\lambda_1)\,\frac{1}{s - {}_2\lambda_1}\,\hat{u}(s) \,. \tag{.17}$$

Zpětnou Laplaceovou transformací získáme

$$ {}_2x^i_{j1}(t) + {}_2b^i_{j1}\,{}_1C({}_2\lambda_1 I - {}_1J)^{-1}\,{}_1x(t) = {}_2b^i_{j1}\,{}_1G({}_2\lambda_1)\,e^{{}_2\lambda_1 t} * u(t)\,, \tag{.18}$$

$j=1,2,\dots,{}_2r(i)$.

$\Rightarrow$ Předpokládejme, že seriové spojení dynamických systémů S_1,S_2 je řiditelné. Dále předpokládejme, že vektory ${}_2b^i_{11}\,{}_1G({}_2\lambda_1), \dots, {}_2b^i_{{}_2r(i)1}\,{}_1G({}_2\lambda_1)$ jsou pro nějaké i lineárně závislé. Pak existuje nenulový řádkový vektor $k \in C^{{}_2r(i)}$ tak, že

$$ k\,{}_2\beta^i_1\,{}_1G({}_2\lambda_1) = 0\,, \tag{.19}$$

kde ${}_2\beta^i_1$ je definováno rovnicí (1.26). Z rovnic (.18),(.19) plyne, že

$$ k\begin{bmatrix} {}_2x^i_{11}(t) + {}_2b^i_{11}\,{}_1C({}_2\lambda_1 I - {}_1J)^{-1}\,{}_1x(t) \\ \vdots \\ {}_2x^i_{{}_2r(i)1}(t) + {}_2b^i_{{}_2r(i)1}\,{}_1C({}_2\lambda_1 I - {}_1J)^{-1}\,{}_1x(t) \end{bmatrix} = 0 \tag{.20}$$

Z rovnice (.20) můžeme nějakou stavovou proměnnou, např. ${}_2x^i_{j1}(t)$, vyjádřit pomocí ostatních, takže ji nemůžeme volit libovolně a proto stav složeného dynamického systému $\begin{bmatrix} {}_1x \\ {}_2x \end{bmatrix}$ není řiditelný ve stavovém prostoru $\Sigma_1 \oplus \Sigma_2$, což je ve sporu s předpokladem.

$\Leftarrow$ Protože ${}_2\lambda_1 \in {}_2\Lambda^* \,({}_1\Lambda \cap {}_2\Lambda)$, jsou složky vektoru ${}_1x$ a stavové proměnné ${}_2x^i_{j1}$, $j=1,2,\dots,{}_2r(i)$ navzájem lineárně nezávislé. Zbývá ukázat, kdy jsou lineárně nezávislé stavové proměnné ${}_2x^i_{jl}$, $j=1,2,\dots,{}_2r(i)$ mezi sebou. Z rovnice (.14) je okamžitě vidět, že dostačující podmínkou k tomu, aby stavové proměnné ${}_2x^i_{jl}$, $j=1,2,\dots,{}_2r(i)$ byly lineárně nezávislé (neboli řiditelné) je lineární nezávislost vektorů ${}_2b^i_{1l}\ {}_1G({}_2\lambda_i)$, ..., ${}_2b^i_{{}_2r(i)l}\ {}_1G({}_2\lambda_i)$. Víme, že jsou-li stavové proměnné ${}_2x^i_{jl}$, $j=1,2,\dots,{}_2r(i)$ řiditelné, pak jsou řiditelné všechny stavové proměnné, které přísluší vlastní hodnotě ${}_2\lambda_i$.

Stav ${}_1x$ dynamického systému S_1 je řiditelný dle předpokladu a tato řiditelnost není ovlivněna tím, že za dynamický systém S_1 zapojíme dynamický systém S_2. Tím jsme vlastně dokázali, že nutnou a dostačující podmínkou k tomu, aby stav ${}_1x$ a stavové proměnné ${}_2x^i$ (kde i je takové aby ${}_2\lambda_i \in {}_2\Lambda \dot{-} ({}_1\Lambda \cap {}_2\Lambda)$) byly řiditelné, je právě (3.18).

2) ${}_1\lambda_\alpha = {}_2\lambda_\beta$; ${}_1\lambda_\alpha,\ {}_2\lambda_\beta \in {}_1\Lambda \cap {}_2\Lambda$

Přenosovou matici ${}_1G(s)$ můžeme podle (3.17) vyjádřit takto:

$$ {}_1G(s) = {}_1G^{(\alpha)}(s) + {}_1G^{\alpha}(s)\ , \qquad (.21) $$

kde podle (3.16)

$$ {}_1G^{(\alpha)}(s) = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq\alpha}}^{{}_1m} {}_1G^i(s) + {}_1D\ . \qquad (.22) $$

Dosazením (.21) do (.11) dostaneme

$$ {}_2\hat{x}^\beta_{jl}(s) = \frac{1}{s-{}_2\lambda_\beta}\ {}_2b^\beta_{jl}\ {}_1G^{(\alpha)}(s)\ \hat{u}(s) + \frac{1}{s-{}_2\lambda_\beta}\ {}_2b^\beta_{jl}\ {}_1G^{\alpha}(s)\ \hat{u}(s)\ . \qquad (.23) $$

Protože matice ${}_1G^{(\alpha)}(s)$ nemá ${}_1\lambda_\alpha = {}_2\lambda_\beta$ za své póly, můžeme první člen na pravé straně rovnice (.23) upravit stejným způsobem jako v případě ad 1) a dostaneme

$$ {}_2\hat{x}^{\beta}_{j1}(s) + {}_2b^{\beta}_{j1}\ {}_1C^{(\alpha)}({}_2\lambda_\beta I - {}_1J^{(\alpha)})^{-1}\ {}_1\hat{x}^{(\alpha)} = $$

$$ = {}_2b^{\beta}_{j1}\left[{}_1G^{(\alpha)}({}_2\lambda_\beta) + {}_1G^{\alpha}(s)\right]\frac{1}{s-{}_2\lambda_\beta}\,\hat{u}(s) \quad , \qquad (.24) $$

kde ${}_1C^{(\alpha)} = \left[{}_1C^1,\dots,{}_1C^{\alpha-1},{}_1C^{\alpha+1},\dots,{}_1C^{1^m}\right]$; ${}_1J^{(\alpha)} = \mathrm{diag}\left[{}_1J^1,\dots\right.$ $\left.\dots,{}_1J^{\alpha-1},{}_1J^{\alpha+1},\dots,{}_1J^{1^m}\right]$ a podobně ${}_1\hat{x}^{(\alpha)}$; $j=1,2,\dots,{}_2r(\beta)$.

Další část důkazu je analogická jako v případě 1). Nutnou a dostačující podmínkou k tomu, aby stavové proměnné ${}_2x^{\beta}_{j1}$, $j=1,2,\dots,{}_2r(\beta)$ byly lineárně nezávislé je lineární nezávislost všech ${}_2r(\beta)$ řádků matice

$$ {}_2\mathcal{B}^{\beta}_1\left[{}_1G^{(\alpha)}({}_2\lambda_\beta) + {}_1G^{\alpha}(s)\right] \qquad (.25) $$

Zde je nutno si uvědomit, že složky vektoru ${}_1x^{(\alpha)}(t)$ a stavové proměnné ${}_2x^{\beta}_{j1}(t)$, $j=1,2,\dots,{}_2r(\beta)$ jsou nezávislé. Avšak mohou být ještě vzájemně závislé stavové proměnné ${}_1x^{\alpha}_{j1}$, $j=1,2,\dots$ $\dots,{}_1r(\alpha)$ a ${}_2x^{\beta}_{k1}$, $k=1,2,\dots,{}_2r(\beta)$. Stavové proměnné ${}_1x^{\alpha}_{11},\dots,{}_1x^{\alpha}_{{}_1r(\alpha)1}$ jsou lineárně nezávislé, jestliže (věta 2.9) $R({}_1\mathcal{B}^{\alpha}_1) = {}_1r(\alpha)$. Stavové proměnné ${}_1x^{\alpha}_{j1}$, ${}_2x^{\beta}_{k1}$, $j=1,2,\dots,{}_1r(\alpha)$; $k=1,2,\dots,{}_2r(\beta)$ jsou pak lineárně nezávislé když a jen když jsou lineárně nezávislé všechny řádky matice

$$ \begin{bmatrix} {}_1\mathcal{B}^{\alpha}_1 \\ {}_2\mathcal{B}^{\beta}_1\left[{}_1G^{(\alpha)}({}_2\lambda_\beta) + {}_1G^{\alpha}(s)\right] \end{bmatrix} \quad , \qquad (.26) $$

což je právě (3.20). Tím jsme vlastně dokázali, že (.26) je nutnou a dostačující podmínkou k tomu, aby stav ${}_1x$ a stavové proměnné ${}_2x^{\beta}$, kde β je takové aby ${}_2\lambda_\beta \in {}_1\Lambda \cap {}_2\Lambda$, byly řiditelné.

Spojením závěrů z částí 1) a 2) dostáváme nutnou a dostačující podmínku k tomu, aby stav $\begin{bmatrix} {}_1x \\ {}_2x \end{bmatrix}$ dynamického systému, který vznikl seriovým spojením řiditelných a pozorovatelných dynamických systémů S_1, S_2 v uvedeném pořadí, byl řiditelný ve stavovém prostoru $\Sigma_1 \oplus \Sigma_2$. $\triangleleft$

Poznámka E.2: Dostačující podmínkou k tomu, aby platilo (.26) je

$$R\left(\begin{bmatrix} {}_1\mathcal{B}_1^{\alpha} & \\ {}_2\mathcal{B}_1^{\beta} & {}_1G^{(\alpha)}({}_2\lambda_{\beta}) \end{bmatrix}\right) = {}_1r(\alpha) + {}_2r(\beta) \ . \qquad (.27)$$

Tato podmínka je uvedena v [21]. $\triangleleft$

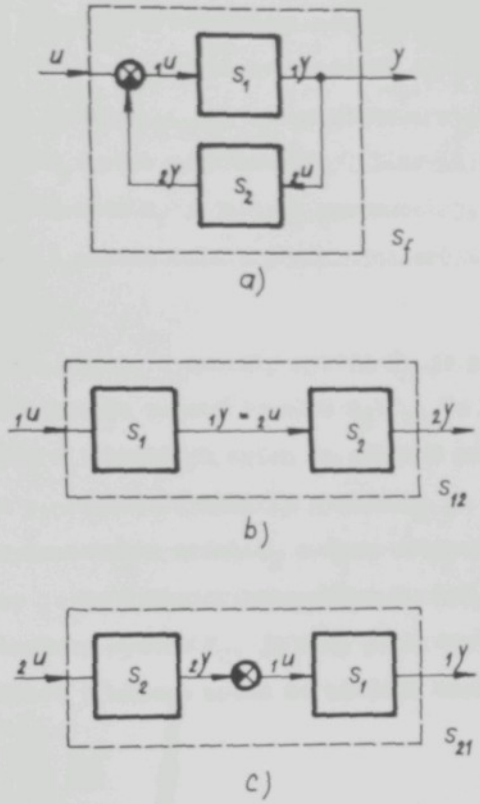
E.5 Důkaz věty 3.14

K důkazu nám bude užitečný obr.E.1.

Poznámka E.3: Na obr.E.1c je ve skutečnosti znázorněno seriové spojení dynamického systému S_2, invertoru znaménka a dynamického systému S_1 v uvedeném pořadí. Protože se jedná o lineární dynamické systémy, můžeme invertor znaménka přesunout dopředu nebo dozadu a uvažovat jen seriové spojení dynamických systémů S_2, S_1. $\triangleleft$

Nyní přistoupíme k vlastnímu důkazu.

1) $\Leftarrow$ Předpokládejme, že dynamický systém S_{12} je řiditelný. To znamená, že existuje takový vstup ${}_1u$, že libovolný počáteční stav $x(t_0) = \begin{bmatrix} {}_1x(t_0) \\ {}_2x(t_0) \end{bmatrix} \in \Sigma_1 \oplus \Sigma_2$ lze pomocí tohoto vstupu převést do libovolného žádaného stavu $x(t_1)$ v konečném čase $t_1 \geqslant t_0$. Protože dynamický systém S_f je determinovaný, je výstup ${}_2y$ vstupem ${}_1u$ (do dynamického systému S_1) v dynamickém systému S_f určen jednoznačně. Chceme-li dostat ${}_1u$ jako vstup dynamického systému S_1, musíme volit $u = {}_1u + {}_2y$; tento vstup u převede dynamický systém S_f z libovolného počátečního stavu $x(t_0)$ do libovolného žádaného stavu $x(t_1)$ v konečném čase $t_1 \geqslant t_0$ a dynamický systém S_f je tedy řiditelný.



Obr.E.1. Obrázek k důkazu věty 3.14.

⇒ Předpokládejme, že dynamický systém S_f je řiditelný. Pak existuje takový vstup u, který převede libovolný počáteční stav $x(t_o)$ do libovolného žádaného stavu $x(t_1)$ v konečném čase $t_1 \geq t_o$. Protože dynamický systém S_f je determinovaný, je výstup $_2y$ vstupem u v dynamickém systému S_f určen jednoznačně. Avšak vstup $_1u = u - {}_2y$ přivedený do dynamického systému S_{12} způsobí tutéž změnu $x(t_o) \rightarrow x(t_1)$, takže dynamický systém S_{12} je řiditelný.

2) $\Leftarrow$ Předpokládejme, že dynamický systém S_{21} je pozorovatelný. Pak existuje takové konečné $t_1 \geq t_o$, že libovolný počáteční stav $x(t_o)$ může být určen na základě znalosti vstupu $_2u$ a výstupu $_1y$. Protože dynamický systém S_f je determinovaný, je výstup $_2y$ vstupem $_2u$ (do dynamického systému S_2) v dynamickém systému S_f určen jednoznačně. Volíme-li $u = 2_2y$, pak $_1u = _2y$. Dynamický systém S_f je tedy pozorovatelný, neboť počáteční stav $x(t_o)$ můžeme (dle předpokladu) určit na základě znalosti $_2u = _1y$.

$\Rightarrow$ Předpokládejme, že dynamický systém S_f je pozorovatelný. To znamená, že existuje takové konečné $t_1 \geq t_o$, že libovolný počáteční stav $x(t_o)$ může být určen na základě znalosti vstupu u a výstupu y. Protože dynamický systém S_f je determinovaný, je $_2u$ i $_2y$ v dynamickém systému S_f určeno vstupem u jednoznačně. Volme vstup $_2u$ do dynamického systému S_2 tak, aby $_2y = \frac{u}{2}$. Pak $_1u = _2y$. Dynamický systém S_{21} je tedy pozorovatelný, neboť počáteční stav $x(t_o)$ můžeme určit na základě znalosti $_2u$, $_1y$. $\triangleleft$

Seznam literatury

1) ATHANS M., FALB P.L.: Optimal Control.
McGraw-Hill, New York, 1966,879 str.

2) BASS R.W., GURA I.: High order system via statespace considerations.
Preprints of Joint Automatic Control Conf., 1965,311-318

3) BELLMAN R.: Stability theory of differential equations.
McGraw-Hill, New York, 1953

4) BELLMAN R.: Introduction to matrix analysis.
McGraw-Hill, New York, 1960,320 str.

5) BODEWIG E.: Matrix calculus.
North-Holland, Amsterdam, 1956

6) BRUNI C., ISIDORI A., RUBERTI A.: A method of realization based on the moments of the impulse-response matrix.
IEEE Trans. Aut. Control, 1969,<u>AC-14</u>,No.2,203-204

7) DESOER C.A., CHEN C.T.: Controllability and observability of feedback systems.
IEEE Trans. Aut. Control, 1967,<u>AC-12</u>,No.4,474-475

8) FALB P.L., ATHANS M.: A direct constructive proof of the criterion for complete controllability of time-invariant linear systems.
IEEE Trans. Aut. Control, 1964,<u>AC-9</u>,189-190

9) FOSTER R.D., STEVENS W.F.: An application of noninteracting control to a continuous flow stirred-tank reactor.
AICHE Journal, 1967,<u>13</u>,No.2,340-345

10) FRAZER R.A., DUNCAN W.J., COLLAR A.R.: Základy maticového počtu, jeho aplikace v dynamice a v diferenciálních rovnicích.
SNTL, Praha, 1958,435str.

11) GANTMACHER F.R.: Teorija matric.
Nauka, Moskva, 1966,576 str.

12) GILBERT E.G.: Controllability and observability in multivariable control systems.
Journal SIAM Control, ser.A, 1963,<u>1</u>,No.1,128-151

13) GUPTA S.C.: Transform and state variable methods in linear systems.
John Wiley, New York, 1966,426 str.

14) HAVLÍN A.: Víceparametrová regulace chemického reaktoru. (Diplomní práce).
VŠCHT, katedra automatizace, 1969,40 str.

15) HÁJEK M.: Dynamické chování a regulace průtočných míchaných reaktorů. (Písemná práce ke zkouškám z kandidátského minima).
VŠCHT, Praha, 1966,40 str.

16) HO B.L., KALMAN R.E.: Effective construction of linear state-variable models from input/output functions.
Regelungstechnik, 1966,14,Dec.,545-548

17) HO Y.C.: What constitutes a controllable system?
IRE Trans. Aut. Control, 1962,AC-7,No.3,76

18) CHEN C.T.: General theory of controllability and observability of composite systems.
Preprints of Joint Automatic Control Conf., 1967,786-790

19) CHEN C.T.: Representations of linear time-invariant composite systems.
IEEE Trans. Aut. Control, 1968,AC-13,No.3,277-283

20) CHEN C.T.: Stability of linear multivariable feedback systems.
Proceedings IEEE, 1968,56,No.5,821-828

21) CHEN C.T., DESOER C.A.: Controllability and observability of composite systems.
IEEE Trans. Aut. Control, 1967,AC-12,No.4,402-409

22) CHEN C.T., DESOER C.A.: A proof of controllability of Jordan form state equations.
IEEE Trans. Aut. Control, 1968,AC-13,Apr.,195-196

23) KALMAN R.E.: Contributions to the theory of optimal control.
Proceedings of the Mexico City conference on ordinary differential equations, 1959; Bol.Soc.Mat.Mex., 1960,102

24) KALMAN R.E.: On the general theory of control systems.
Proceedings of the 1st international congress on automatic control, Moscow, 1960; Butterworths Scientific Publications, London, 1961,1,481-492

25) KALMAN R.E.: Canonical structure of linear dynamical systems.
Proceedings Nat. Acad. Sci. USA, 1962,48,596-600

26) KALMAN R.E.: Mathematical description of linear dynamical systems.
Journal SIAM Control, ser.A, 1963,1,No.2,152-192

27) KALMAN R.E.: Irreducible realizations and the degree of a rational matrix.
Journal SIAM, 1965,13,No.2,520-544

28) KALMAN R.E.: Algebraic structure of linear dynamical systems, I. The module of Σ.
Proceedings of the Nat. Acad. Sci. USA, 1965,54,No.6, 1503-1508

29) KALMAN R.E., BERTRAM J.E.: General synthesis procedure for computer control of single and multi-loop linear systems.
Trans. AIEE, 1958,77,602

30) KALMAN R.E., HO Y.C., NARENDRA K.S.: Controllability of linear dynamical systems.
Contributions to Differential Equations, 1,No.2, 189-213; John Willey, New York, 1963

31) KREINDLER E., SARACHIK P.E.: On the concepts of controllability and observability of linear systems.
IEEE Trans. Aut. Control, 1964,AC-9,No.2,129-136

32) KUBÍK S., KOTEK Z., ŠALAMON M.: Teorie regulace I. Lineární regulace.
SNTL, Praha, 1968,267 str.

33) McMILLAN B.: Introduction to formal realizability theory, parts I,II.
The Bell System Technical Journal, 1952,31,
No.2,217-279 part I
No.3,541-600 part II

34) OGATA K.: State space analysis of control systems.
Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1967,596 str.

35) PANDA S.P., CHEN C.T.: Irreducible Jordan form realization of a rational matrix.
IEEE Trans. Aut. Control, 1969,AC-14,66-69

36) PUCHOV G.E., ŽUK K.D.: Sintěz mnogosvjaznych sistěm upravlenija po metodu obratnych operatorov.
Naukova dumka, Kijev, 1966,218 str.

37) REKTORYS K.: Přehled užité matematiky.
SNTL, Praha, 1963,1136 str.

38) SAIN M.K., MASSEY J.L.: Invertibility of linear time--invariant dynamical systems.
IEEE Trans. Aut. Control, 1969,AC-14,No.2,141-149

39) SANDBERG I.W.: On the theory of linear multi-loop feedback systems.
The Bell System Technical Journal, 1963,42,355-382

40) SCHMIDTMAYER J.: Maticový počet a jeho použití v technice.
SNTL, Praha, 1967,382 str.

41) SILVERMAN L.M.: Inversion of multivariable linear systems.
IEEE Trans. Aut. Control, 1969,AC-14,No.3,270-276

42) TOU J.T.: Modern control theory.
McGraw-Hill, New York, 1964,427 str.

43) WILKINSON J.H.: The algebraic eigenvalue problem.
Clarendon press, Oxford, 1965,662 str.

44) YOULA D.C.: The synthesis of linear dynamical systems from prescribed weighting patterns.
Journal SIAM Appl. Math., 1966,14,No.3,527-549

45) ZADEH L.A., DESOER C.A.: Linear system theory.
McGraw-Hill, New York, 1963,628 str.