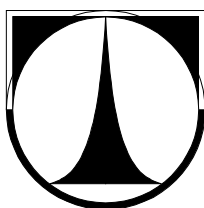


TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI

FAKULTA STROJNÍ

Katedra vozidel a motorů



Experimentální určení polohy a rozměrů elipsoidu setrvačnosti hnacího agregátu

doktorská disertační práce

Studijní program:

P2302 Stroje a zařízení

Studijní obor

2302V010 Konstrukce strojů a zařízení

Doktorand:

Ing. Pavel Brabec

Školitel:

Prof. Ing. Jan Honců, CSc.

Liberec 2009

PODĚKOVÁNÍ

Děkuji školitelům Prof. Ing. Janu Honcům, CSc. z Katedry částí a mechanismů strojů a Doc. Ing. Miroslavovi Malému, CSc. z Katedry vozidel a motorů na Technické univerzitě v Liberci za vedení celého mého doktorandského studia, za vydatnou odbornou pomoc a za odborné připomínky při zpracování disertační práce.

Rovněž děkuji všem pracovníkům Katedry vozidel a motorů za pomoc a náměty. Dále mé poděkování patří firmám Škoda Auto a.s. a Cummins Inc. za poskytnutá data a motory k měření.

Dále chci poděkovat panu Ing. Robertovi Voženílkovi z Katedry vozidel a motorů na Technické univerzitě v Liberci za pomoc na experimentální části této práce.

Rád bych také poděkoval rodině za podporu při mém doktorském studiu a při zpracování této disertační práce.

PROHLÁŠENÍ

Byl jsem seznámen s tím, že na mou doktorskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 o plném autorském, zejména § 60 (školní dílo) a § 35 (o nevýdělečném užití díla k vnitřní potřebě školy).

Beru na vědomí, že TUL má právo na uzavření licenční smlouvy o užití mé práce a prohlašuji, že souhlasím s případným užitím mé práce (prodej, zapůjčení apod.).

Jsem si vědom toho, že užít své doktorské práce či poskytnout licenci k jejímu využití mohu jen se souhlasem TUL, která má právo ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, vynaložených univerzitou na vyhotovení samotného díla.

Datum : 16.5.2009

Podpis:

ANOTACE

Experimentální určení polohy a rozměrů elipsoidu setrvačnosti hnacího agregátu

Tato doktorská disertační práce shrnuje poznatky a výsledky studia zaměřeného na stanovení elipsoidu setrvačnosti. Přispívá tak k dosavadním znalostem o možnostech experimentálního určení elipsoidu setrvačnosti obecného tělesa (součásti).

Práce se zabývá využitím metod pro experimentální určení matice setrvačnosti a shrnuje základní možnosti těchto metod. V práci je popsán navržený výpočtový algoritmus, s jehož pomocí lze určit elipsoid setrvačnosti. V experimentální části práce jsou ukázány výsledky měření pro spalovací motory (agregáty). Z navržené metody jsou shromážděny výsledky měření a nové poznatky ohledně vlivu natočení klikového hřídele a polohy příslušenství motoru. Dále jsou zformulovány závěry pro rozvoj oboru.

Klíčová slova: moment setrvačnosti, elipsoid setrvačnosti, metodika měření

ANNOTATION

Experimental Determination of Position and Size of the Inertia Ellipsoid for Powertrains

This doctoral thesis summarizes scientific knowledge and results of the study focused on the inertial ellipsoid determination. Consequently, it contributes its share to enhance current knowledge of alternatives in experimental determination of inertia ellipsoid of a common body (part).

The thesis deals with an application of methods for an experimental determination of the inertia matrix, summarizes their basic potential and describes a proposed computational algorithm by means of which the inertia ellipsoid can be determined. An experimental section of the thesis shows results of measurements for internal combustion engines (powertrains). The proposed method represents a source from which measurement results have been collected and new knowledge of an impact of crankshaft angular displacement and engine accessories has been obtained. Besides, conclusions for the development of this branch have been drawn.

Key words: moment of inertia, inertia ellipsoid, metering methodics

SOUHRN

Předkládaná doktorská disertační práce shrnuje poznatky a výsledky studia zaměřeného na elipsoid setrvačnosti těles a na možnosti jeho stanovování, které autor získal v letech doktorandského studia na Katedře vozidel a motorů Fakulty strojní na Technické univerzitě v Liberci. Studium bylo podpořeno možností využít zařízení laboratoře na Technické Univerzitě v Liberci. Experimentální část této práce je pak výsledkem dobré spolupráce Technické univerzity s praxí.

Práce je rozvržena do osmi kapitol. Kapitola 1 je úvodem doktorské disertační práce a obsahuje důvody volby tématu disertační práce. Kapitola 2 *Současný stav problematiky* popisuje definice základních veličin a možné způsoby experimentálního určování momentů setrvačnosti. Rozbor ukazuje smysl a význam znalosti elipsoidu setrvačnosti hnacího agregátu. V následující kapitole jsou definovány cíle disertační práce. V kapitole 4 *Popis vlastní metody* je kompletně popsána zvolená metoda stanovování elipsoidu setrvačnosti tělesa (v našem případě agregátu či samotného spalovacího motoru). Kapitola 5 *Přesnost měření* se věnuje otázce s jakou přesností byl elipsoid setrvačnosti (matice setrvačnosti) určen. V první části je porovnání stanoveného (změřeného) elipsoidu setrvačnosti na tělese o známé matici setrvačnosti (pomocí 3D modelu vytvořeném v CAD softwaru). Dále se tato kapitola věnuje matematickému odvození přesnosti měření.

Následující dvě kapitoly se věnují sledování dalších vlivů na velikost a polohu elipsoidu setrvačnosti agregátu (motoru). V kapitole 6 *Účinek pootočení klikového hřídele na elipsoid setrvačnosti agregátu* je popsáno, jak se mění elipsoid setrvačnosti celého agregátu nebo motoru v závislosti na pootočení klikového hřídele. Kapitola 7 *Vliv příslušenství motoru* sleduje změnu matice setrvačnosti (neboli elipsoidu setrvačnosti) při různém uspořádání příslušenství spalovacího motoru.

V závěrečné kapitole 8 *Závěry doktorské disertační práce* jsou shromážděny výsledky a nové poznatky vyplývající z doktorské disertační práce a jsou zformulovány závěry pro rozvoj oboru.

V příloze disertační práce jsou ukázány výsledky měření pomocí navržené metodiky pro konkrétní agregáty, či motory.

SEZNAM POUŽITÝCH OZNAČENÍ

c	torzní tuhost závěsu	$[MPa.m^3]$
d	průměr drátu	$[m]$
$d_{stř}$	střední průměr drátu	$[m]$
d_o	jmenovitý průměr drátu	$[m]$
DPF	filtr pevných částic (Diesel Particle Filter)	
DQ	typ automatické převodovky (např.: DQ 250 – číslo 250 určuje max. přípustnou hodnotu točivého momentu)	
D_{xy}	deviační moment k rovině xy	$[kg.m^2]$
D_{yz}	deviační moment k rovině yz	$[kg.m^2]$
D_{zx}	deviační moment k rovině zx	$[kg.m^2]$
ES	elipsoid setrvačnosti	
g	gravitační zrychlení	$[m.s^{-2}]$
G	modul pružnosti ve smyku závěsného drátu	$[MPa]$
h	délka měřeného polotovaru	$[m]$
H_N	hodnota naměřená momentu setrvačnosti	$[kg.m^2]$
H_V	hodnota vypočtená momentu setrvačnosti pomocí 3D CADu	$[kg.m^2]$
I_1, I_2, I_3	hlavní momenty setrvačnosti	$[kg.m^2]$
I_A	změřený osový moment setrvačnosti	$[kg.m^2]$
I_B	moment setrvačnosti vypočtený z elipsoidu setrvačnosti určeného pomocí metody nejmenších čtverců z naměřených hodnot	$[kg.m^2]$
I_C	osový moment setrvačnosti vypočtený z elipsoidu setrvačnosti, který byl určen CAD softwarem	$[kg.m^2]$
I_o	osový moment setrvačnosti	$[kg.m^2]$
I_x	osový moment setrvačnosti k ose x	$[kg.m^2]$
I_{xy}	moment setrvačnosti k rovině xy	$[kg.m^2]$
I_y	osový moment setrvačnosti k ose y	$[kg.m^2]$
I_{yz}	moment setrvačnosti k rovině yz	$[kg.m^2]$
I_z	osový moment setrvačnosti k ose z	$[kg.m^2]$
I_{zx}	moment setrvačnosti k rovině zx	$[kg.m^2]$
l	délka drátu	$[m^3]$

L	délka závěsu	$[m^3]$
m	hmotnost	$[kg]$
MKW	průsečík dosedací roviny převodovky s osou klikového hřídele (počátek globálního souřadného systému)	
MQ	typ manuální převodovky (např.: MQ 200 – číslo 200 určuje max. přípustnou hodnotu točivého momentu)	
r	vzdálenost od těžiště	$[m]$
T	čas jednoho kmitu	$[s]$
x_T	poloha těžiště ve směru osy x	$[mm]$
y_T	poloha těžiště ve směru osy y	$[mm]$
z_T	poloha těžiště ve směru osy z	$[mm]$
$ZVES$	základní veličiny elipsoidu setrvačnosti (za tyto veličiny pokládáme hlavní momenty setrvačnosti a polohu os elipsoidu setrvačnosti)	
α	úhel pootočení klikového hřídele	$[^\circ]$
α	úhel mezi osou o a osou x souřadného systému	$[^\circ]$
β	úhel mezi osou o a osou y souřadného systému	$[^\circ]$
γ	úhel mezi osou o a osou z souřadného systému	$[^\circ]$
δI	relativní chyba určení momentu setrvačnosti	$[\%]$
δG	relativní chyba modulu pružnosti v krutu torzního drátu	$[\%]$
δEL	relativní chyba proložení elipsoidu setrvačnosti	$[\%]$
Δ	procentuální vyjádření rozdílu výsledků získaných měřením a výpočtem pomocí CADu	$[\%]$
Δd	absolutní chyba průměru torzního drátu	$[m]$
ΔL	absolutní chyba délky torzního drátu	$[m]$
λ	vlastní číslo matice momentů setrvačnosti	$[kg.m^2]$

OBSAH

1	Úvod.....	10
2	Současný stav problematiky	12
2.1	<i>Definice základních veličin</i>	<i>12</i>
2.2	<i>Osové momenty setrvačnosti při rovnoběžných osách</i>	<i>15</i>
2.3	<i>Moment setrvačnosti k obecné ose</i>	<i>16</i>
2.4	<i>Elipsoid setrvačnosti a jeho hlavní osy setrvačnosti</i>	<i>17</i>
2.5	<i>Určení hlavních os setrvačnosti</i>	<i>18</i>
2.6	<i>Experimentální určování momentů setrvačnosti</i>	<i>20</i>
2.7	<i>Fyzikální kyvadlo</i>	<i>22</i>
2.8	<i>Torzní závěs</i>	<i>24</i>
2.9	<i>Závěs na vláknech</i>	<i>25</i>
2.10	<i>Určování deviačních momentů</i>	<i>25</i>
2.11	<i>Měřicí zařízení momentů setrvačnosti v praxi</i>	<i>26</i>
3	Cíle disertační práce	31
4	Popis vlastní metody	32
4.1	<i>Určení momentů setrvačnosti</i>	<i>33</i>
4.1.1	<i>Stanovení modulu pružnosti ve smyku drátu</i>	<i>34</i>
4.1.2	<i>Měření délky a průměru drátu závěsu</i>	<i>34</i>
4.1.3	<i>Měření doby jednoho kmitu</i>	<i>35</i>
4.1.4	<i>Měření úhlů natočení souřadného systému vůči závěsu s torzním drátem</i>	<i>37</i>
4.1.5	<i>Stanovení elipsoidu setrvačnosti - aproximace poloh naměřených bodů určených v prostoru</i>	<i>40</i>
4.2	<i>Stanovení polohy těžiště</i>	<i>44</i>
4.2.1	<i>Měření tahových sil v závěsech</i>	<i>46</i>
4.3	<i>Určení polohy a délek hlavních os elipsoidu setrvačnosti agregátu</i>	<i>49</i>
4.4	<i>Program pro zpracování naměřených dat</i>	<i>54</i>
5	Přesnost měření	55
5.1	<i>Verifikace vypočtených a naměřených hodnot pomocí rámu</i>	<i>55</i>
5.1.1	<i>Rám pro agregáty osobních vozidel</i>	<i>55</i>
5.1.2	<i>Rám pro motor nákladního vozidla</i>	<i>59</i>

5.2	<i>Konstrukční úpravy pro větší přesnost měření.....</i>	62
5.3	<i>Ověřování měření pomocí jednoduchého tělesa upnutého v rámu.....</i>	65
5.3.1	Vypočtení matice setrvačnosti zvoleného tělesa pomocí základních vztahů.....	66
5.3.2	Vypočtení matice setrvačnosti zvoleného tělesa pomocí CAD programu.....	71
5.3.3	Stanovení matice setrvačnosti zvoleného tělesa experimentem	73
5.3.4	Porovnání matice momentů setrvačnosti zvoleného tělesa určené experimentem a pomocí CAD programu	75
5.4	<i>Experimentální určení polohy hlavní osy setrvačnosti u polotovaru umístěného „napříč“ v rámu ..</i>	76
5.5	<i>Stanovení přesnosti měření</i>	81
6	Účinek pootočení klikového hřídele na elipsoid setrvačnosti agregátu.....	86
7	Vliv příslušenství motoru	103
7.1	<i>Vliv kompresoru klimatizace na elipsoid setrvačnosti motoru 1.2 MPI.....</i>	103
7.2	<i>Vliv filtru sání na elipsoid setrvačnosti agregátu osobního automobilu (1.4 59kW MPI-MQ200)..</i>	106
7.3	<i>Elipsoid setrvačnosti motoru nákladního vozidla s příslušenstvím a bez něho.....</i>	109
8	Závěr doktorské disertační práce.....	116

1 Úvod

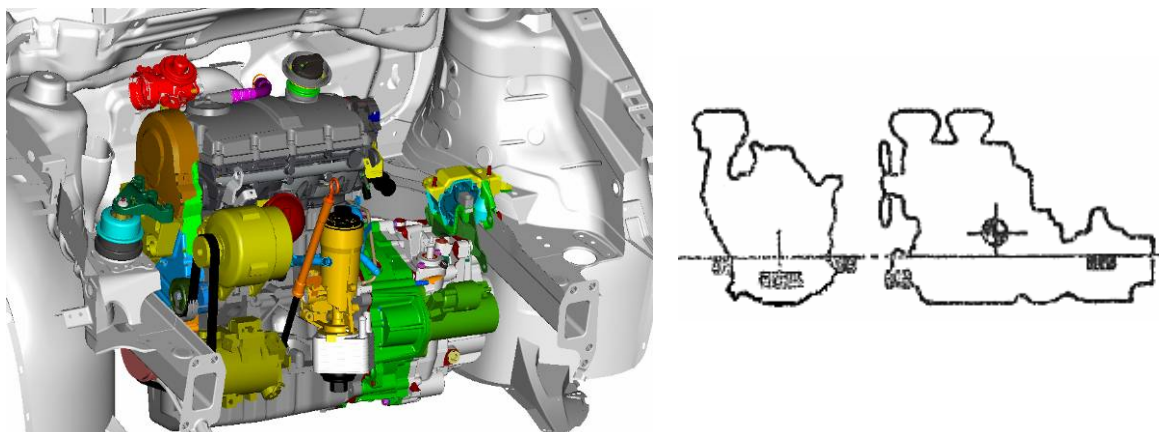
K určení momentů setrvačnosti se používají různé metody. Všechny tyto metody jsou založeny na principu závislosti mezi momentem setrvačnosti tělesa a frekvencí vlastního kmitání. Při měření se předpokládá, že kmitání je netlumené a měří se doba kmitu. Základní metody určení momentu setrvačnosti tělesa jsou založeny na principu fyzikálního kyvadla, torzního závěsu nebo dvouvláknového (bifilárního) závěsu (popř. trojvláknového či čtyřvláknového).

Úkolem prací bylo provést potřebná měření, na základě kterých by bylo možné identifikovat hlavní hmotnostní parametry soustavy spalovací motor a převodovka (agregátu). Naměřená matice momentů setrvačnosti agregátu jsou v praxi dále využity jako jedny ze vstupních parametrů simulačních výpočtů. Zejména tyto údaje se dále používají pro optimalizaci pružného uložení agregátu a simulaci crash testů vozidla.

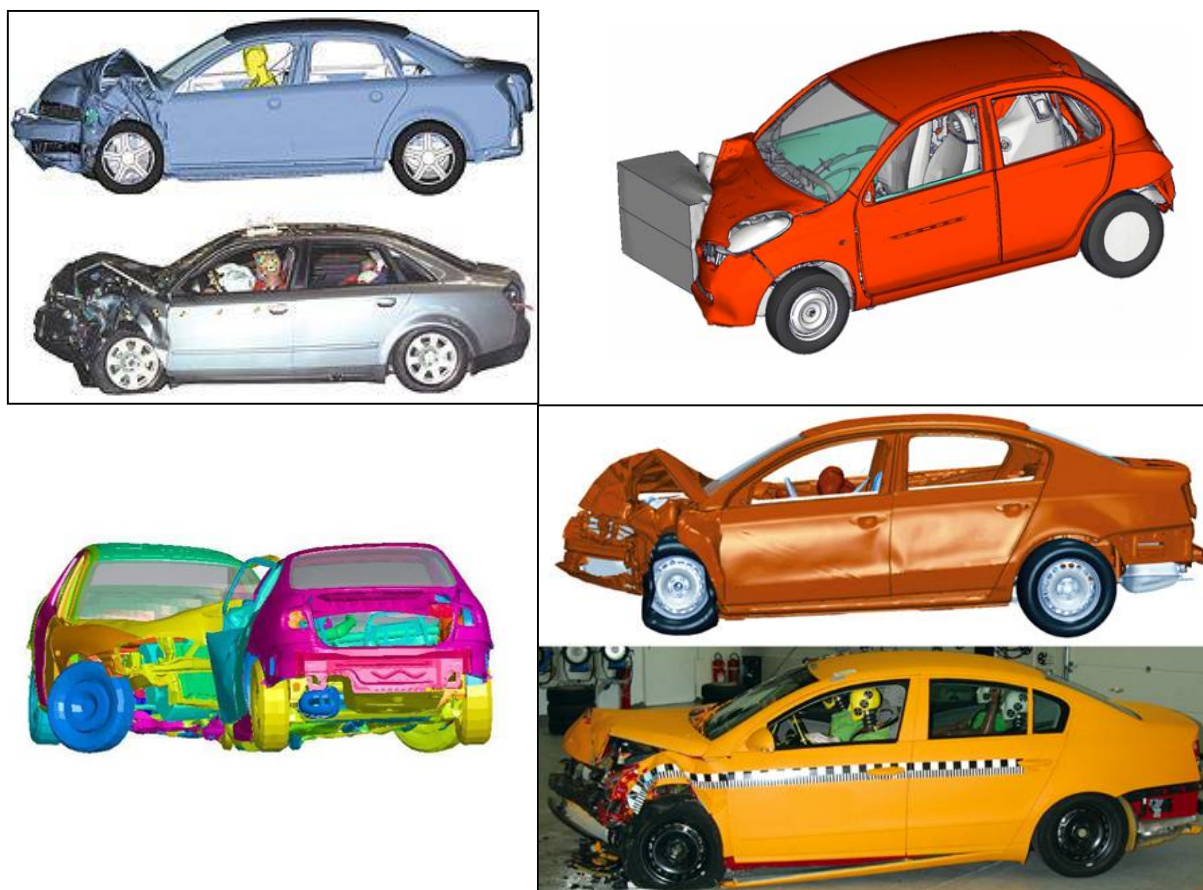
Bezpečnost automobilu se stále zvyšuje a vozidla musejí splňovat nové přísnější zákonné předpisy. Proto je nutné účinně navrhovat vhodná konstrukční řešení pro zvyšování bezpečnosti při provozu vozidel. U nově projektovaných automobilů je nutné myslet na problematiku bezpečnosti již v samém počátku návrhu. Toto jsou hlavní důvody proč vytvářet kvalitní simulační modely budoucích automobilů. Konstrukční vady a nedostatky mohou být odhaleny ještě před vznikem prvního prototypu vozidla, což nám může ušetřit značné prostředky. Prototyp vozidla tedy může být vyroben jako jakési „optimální“ řešení, které bylo vytvořeno na základě simulačních výpočtů.

Efektivním řešením výše uvedeného problému, může být použití přesných vstupních parametrů do simulačních výpočtů, jak z hlediska bezpečnosti (crash testy) tak i z hlediska komfortu (kvalitní uložení agregátu v karosérii vozidla).

Proto bylo připraveno experimentální pracoviště k určení hmotnosti, polohy těžiště a momentů setrvačnosti agregátu, na němž byla potom uskutečněna potřebná měření s co nejvyšší přesností.



Obr. 1: Ukázka uložení agregátu ^[10] ^[15].



Obr. 2: Ukázky výsledků simulace crash testů vozidla ^[22].

2 Současný stav problematiky

Momenty setrvačnosti a deviační momenty tělesa, resp. soustavy hmotných bodů charakterizují, spolu s hmotností a statickými momenty hmoty, rozložení hmotnosti v prostoru. Jako takové se proto uplatňují i ve výrazech pro některé dynamické veličiny (např. moment hybnosti, kinetická energie, setrvačné momenty) a v důsledku toho i v příslušných pohybových rovnicích.

2.1 Definice základních veličin

U soustavy hmotných bodů je definován moment setrvačnosti k ose o vztahem

$$I_o = \sum_i m_i \cdot r_{io}^2, \quad (2.1)$$

kde r_{io}^2 je čtverec nejkratší vzdálenosti bodu o hmotnosti m_i od uvažované osy o .

Analogicky pro tělesa platí

$$I_o = \int_m r_o^2 \cdot dm. \quad (2.2)$$

Dále zde budou uvedeny vztahy jen pro dokonale tuhá tělesa, s nimiž se při dynamických výpočtech setkáváme nejčastěji. Odpovídající vztahy pro soustavy hmotných bodů bychom získali příslušným přepisem (tzn. záměnou integrace za sumaci).

Položíme-li na osu o jednu ze souřadnicových os kartézského souřadnicového systému, dostáváme

$$I_x = \int_m (y^2 + z^2) \cdot dm, \quad (2.3)$$

$$I_y = \int_m (z^2 + x^2) \cdot dm, \quad (2.4)$$

$$I_z = \int_m (x^2 + y^2) \cdot dm. \quad (2.5)$$

Při výpočtech momentů setrvačnosti k ose často s výhodou využíváme pomocných veličin, které vyjadřují momenty setrvačnosti k rovinám (tzv. rovinné momenty setrvačnosti)

$$I_{yz} = \int_m x^2 \cdot dm, \quad (2.6)$$

$$I_{zx} = \int_m y^2 \cdot dm, \quad (2.7)$$

$$I_{xy} = \int_m z^2 \cdot dm. \quad (2.8)$$

Z následujících vztahů je patrná závislost mezi osovými a rovinnými momenty setrvačnosti

$$I_x = I_{xy} + I_{zx}, \quad (2.9)$$

$$I_y = I_{yz} + I_{xy}, \quad (2.10)$$

$$I_z = I_{zx} + I_{yz}$$

a

$$I_{xy} = \frac{I_x + I_y - I_z}{2}, \quad (2.11)$$

$$I_{yz} = \frac{I_y + I_z - I_x}{2}, \quad (2.12)$$

$$I_{zx} = \frac{I_z + I_x - I_y}{2}. \quad (2.13)$$

Podobně po zavedení pomocné veličiny vyjadřující moment setrvačnosti k bodu – tzv. polární moment setrvačnosti (zde k počátku souřadnicového systému O) platí

$$I_O = \int_m (x^2 + y^2 + z^2) \cdot dm, \quad (2.14)$$

$$I_{xy} + I_{yz} + I_{zx} = I_O, \quad (2.15)$$

$$I_x + I_y + I_z = 2 \cdot I_O. \quad (2.16)$$

Deviační momenty jsou rovněž momenty druhého stupně, jsou však vázány na dvě vzájemně kolmé souřadnice

$$D_{xy} = \int_m x \cdot y \cdot dm, \quad (2.17)$$

$$D_{yz} = \int_m y \cdot z \cdot dm, \quad (2.18)$$

$$D_{zx} = \int_m z \cdot x \cdot dm. \quad (2.19)$$

Na rozdíl od momentů setrvačnosti, které jsou vždy kladné, deviační momenty mohou nabývat i záporných hodnot.

Momenty setrvačnosti a deviační momenty lze souhrnně vyjádřit v maticovém tvaru jedinou veličinou – maticí setrvačnosti

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_x & -D_{xy} & -D_{xz} \\ -D_{yx} & I_y & -D_{yz} \\ -D_{zx} & -D_{zy} & I_z \end{bmatrix}, \quad (2.20)$$

která je maticí symetrického tenzoru druhého řádu – tenzoru setrvačnosti.

Jeli hustota (měrná hmotnost) ρ v prostoru tělesa stálá (homogenní materiál), platí

$$I_x = \iiint_{x,y,z} \rho \cdot (y^2 + z^2) \cdot dx \cdot dy \cdot dz, \quad (2.21)$$

$$I_y = \iiint_{x,y,z} \rho \cdot (z^2 + x^2) \cdot dx \cdot dy \cdot dz, \quad (2.22)$$

$$I_z = \iiint_{x,y,z} \rho \cdot (x^2 + y^2) \cdot dx \cdot dy \cdot dz, \quad (2.23)$$

$$D_{xy} = \iiint_{x,y,z} \rho \cdot x \cdot y \cdot dx \cdot dy \cdot dz, \quad (2.24)$$

$$D_{yz} = \iiint_{x,y,z} \rho \cdot y \cdot z \cdot dx \cdot dy \cdot dz, \quad (2.25)$$

$$D_{zx} = \iiint_{x,y,z} \rho \cdot z \cdot x \cdot dx \cdot dy \cdot dz. \quad (2.26)$$

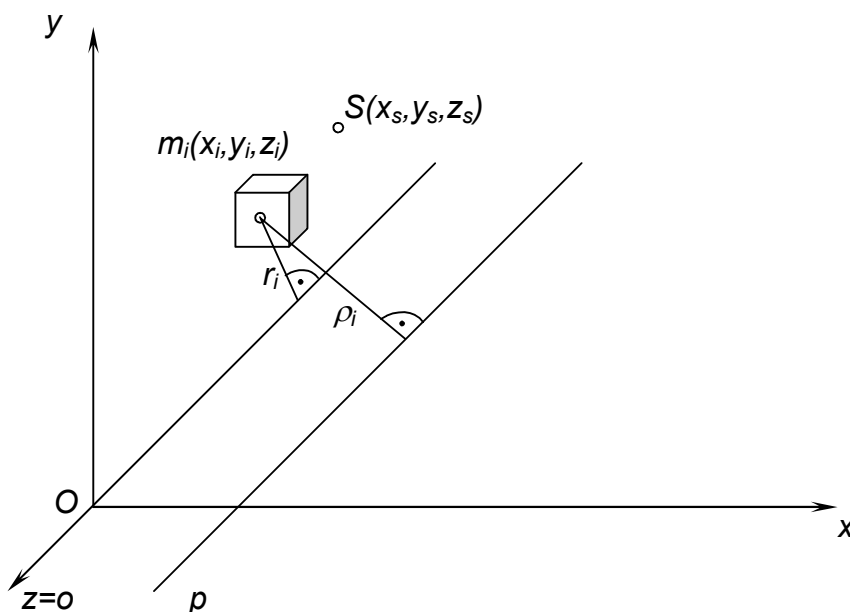
Momenty setrvačnosti a deviační momenty geometricky jednoduchých těles lze vypočítat užitím výše uvedených vzorců.

2.2 Osové momenty setrvačnosti při rovnoběžných osách

Podle definice jsou osové momenty setrvačnosti k rovnoběžným osám o a p dány výrazy (viz obr. 3) $I_o = \sum_i m_i \cdot r_i^2$, $I_p = \sum_i m_i \cdot \rho_i^2$. Zvolíme-li souřadnicový systém

tak, aby bylo $z \equiv o$ a x protínala p , bude $\rho_i^2 = (x_i - e)^2 + y_i^2$ a $I_p = \sum_i m_i \cdot [(x_i - e)^2 + y_i^2] = \sum_i m_i \cdot (x_i^2 + y_i^2) - 2 \cdot \sum_i m_i \cdot x_i \cdot e + \sum_i m_i \cdot e^2$, takže

$I_p = I_o - 2 \cdot m \cdot x_s \cdot e + m \cdot e^2$. Prochází-li osa o hmotným středem S , je $x_s = 0$ a $I_p = I_s + m \cdot e^2$. (2.27)



Obr. 3: Osové momenty setrvačnosti při rovnoběžných osách.

Toto je obvyklé znění **Steinerovy věty**: Moment setrvačnosti tělesa k určité ose je roven součtu jeho momentu setrvačnosti k rovnoběžné ose jdoucí hmotným středem a součinu celkové hmoty a čtverce vzdálenosti obou os.

Pro přepočítání matice setrvačnosti pro novou osu můžeme použít Steinerovu větu

$$I'_x = I_x + m \cdot (y^2 + z^2), \quad D'_{xy} = D_{xy} - m \cdot x \cdot y,$$

$$I'_y = I_y + m \cdot (x^2 + z^2), \quad D'_{xz} = D_{xz} - m \cdot x \cdot z,$$

$$I'_z = I_z + m \cdot (x^2 + y^2), \quad D'_{yz} = D_{yz} - m \cdot y \cdot z.$$

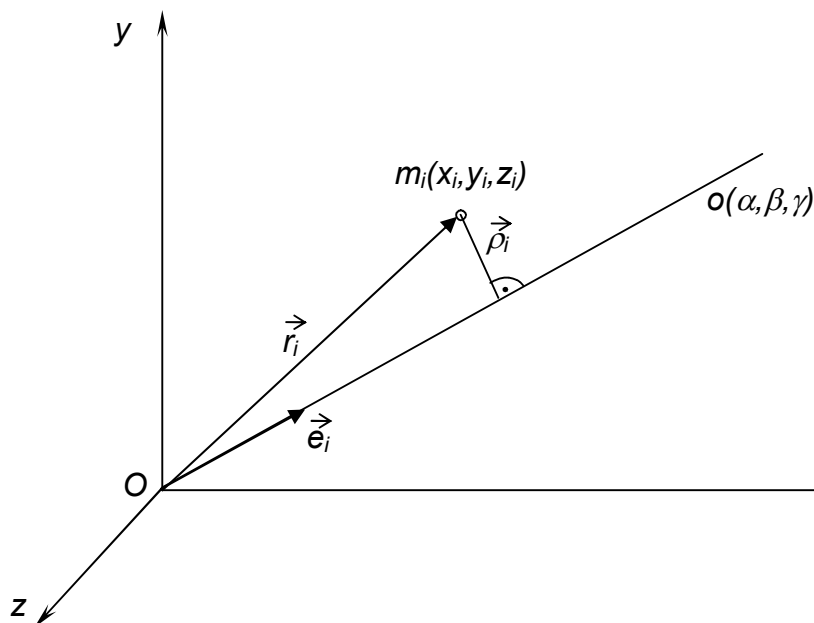
2.3 Moment setrvačnosti k obecné ose

Podle definice je moment setrvačnosti tělesa (soustavy bodů) k ose o , dán výrazem

$$I_o = \sum_i m_i \cdot \rho_i^2.$$

Zvolme počátek pravoúhlého souřadnicového systému na ose o , osa

o svírá s osami souřadnicového systému úhly α , β , γ , její jednotkový vektor označíme $\vec{e}$.



Obr. 4: Moment setrvačnosti k obecné ose.

Z předchozího obrázku plyne vztah $\rho_i^2 = r_i^2 - (\vec{r}_i \cdot \vec{e})^2$, kde člen v závorce je pravoúhlý průmět radiusvektoru $\vec{r}$ do osy o .

$$\text{Po dosazení } \rho_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - \left[(\vec{i} \cdot x_i + \vec{j} \cdot y_i + \vec{k} \cdot z_i) \cdot (\vec{i} \cdot \cos \alpha + \vec{j} \cdot \cos \beta + \vec{k} \cdot \cos \gamma) \right]^2 =$$

$$= x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - [x_i \cdot \cos \alpha + y_i \cdot \cos \beta + z_i \cdot \cos \gamma]^2 \quad \text{a} \quad \text{dále} \quad \text{užitím} \quad \text{vztahu}$$

$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ dostaneme po úpravě

$$\rho_i^2 = (y_i^2 + z_i^2) \cdot \cos^2 \alpha + (z_i^2 + x_i^2) \cdot \cos^2 \beta + (x_i^2 + y_i^2) \cdot \cos^2 \gamma - 2 \cdot x_i \cdot y_i \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta - 2 \cdot y_i \cdot z_i \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma - 2 \cdot z_i \cdot x_i \cdot \cos \gamma \cdot \cos \alpha.$$

Dosadíme-li výraz pro ρ_i^2 do $I_o = \sum_i m_i \cdot \rho_i^2$, dostaneme (uvědomíme-li si význam součtů $\sum m_i \cdot (y_i^2 + z_i^2)$, $\sum m_i \cdot x_i \cdot y_i$ apod.)

$$I_o = I_x \cdot \cos^2 \alpha + I_y \cdot \cos^2 \beta + I_z \cdot \cos^2 \gamma - 2 \cdot D_{xy} \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta - 2 \cdot D_{yz} \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma - 2 \cdot D_{zx} \cdot \cos \gamma \cdot \cos \alpha \quad (2.28)$$

Známe-li osově a deviační momenty setrvačnosti k souřadnicovým osám, určujeme podle tohoto vztahu moment setrvačnosti k libovolné ose jdoucí počátkem pravoúhlého souřadnicového systému, která svírá s jeho osami úhly α , β , γ .

2.4 Elipsoid setrvačnosti a jeho hlavní osy setrvačnosti

Mění-li osa, procházející zvoleným počátkem, svůj směr, mění se moment setrvačnosti tělesa (soustavy hmotných bodů) k ní podle vzorce (2.28). Vynesme v měřítku na tyto osy od počátku převrácené hodnoty odmocnin příslušných

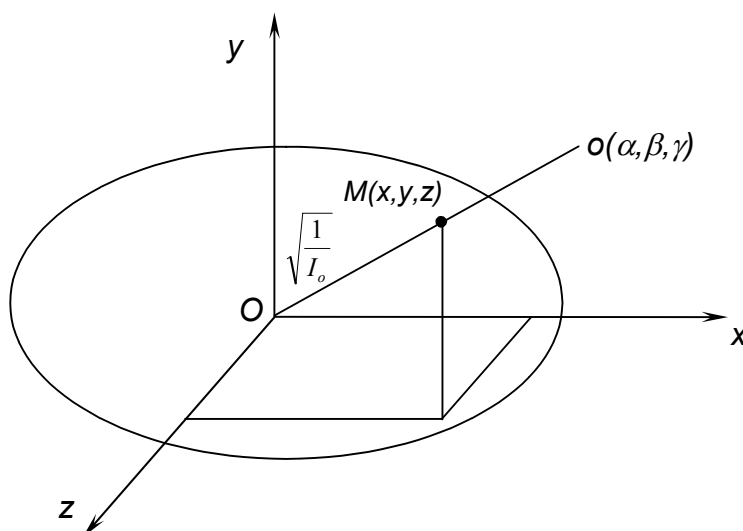
momentů setrvačnosti $OM = \sqrt{\frac{1}{I_o}}$ a hledejme geometrická místa koncových

bodů M . Pomocí souřadnic (x, y, z) bodu M $x = OM \cdot \cos \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{I_o}}$, $y = \frac{\cos \beta}{\sqrt{I_o}}$,

$z = \frac{\cos \gamma}{\sqrt{I_o}}$ můžeme upravit vztah (2.28) na tvar

$$I_x \cdot x^2 + I_y \cdot y^2 + I_z \cdot z^2 - 2 \cdot D_{xy} \cdot x \cdot y - 2 \cdot D_{yz} \cdot y \cdot z - 2 \cdot D_{zx} \cdot z \cdot x = 1. \quad (2.29)$$

Hledaným geometrickým místem je (obecně trojosý) elipsoid. Nazývá se **elipsoid setrvačnosti** (dále jen ES).



Obr. 5: Elipsoid setrvačnosti.

Osy tohoto elipsoidu nazýváme **hlavními osami setrvačnosti**. Potom pro tyto osy platí podmínka, že všechny tři deviační momenty jsou k nim rovny nule. Momenty k těmto osám se nazývají hlavní momenty setrvačnosti. Hlavní osy elipsoidu pro střed hmoty se nazývají hlavní centrální osy setrvačnosti a příslušné momenty setrvačnosti hlavní centrální momenty setrvačnosti.

2.5 Určení hlavních os setrvačnosti

Hlavní osy setrvačnosti označme ξ , η , ζ . U tělesa obecného tvaru lze polohu hlavních os setrvačnosti spočítat z podmínek pro extrémní hodnoty I_o pro proměnné $u = \cos \alpha$, $v = \cos \beta$, $w = \cos \gamma$ při vedlejší podmínce $u^2 + v^2 + w^2 = 1$, tj. z podmínek extrému funkce $\Phi = I_o - \lambda \cdot (u^2 + v^2 + w^2 - 1)$, tedy za podmínek $\frac{\partial \Phi}{\partial u} = 0$, $\frac{\partial \Phi}{\partial v} = 0$

$$\text{a } \frac{\partial \Phi}{\partial w} = 0.$$

Úloha vede na řešení soustavy lineárních rovnic

$$(I_x - \lambda) \cdot u - D_{xy} \cdot v - D_{xz} \cdot w = 0, \quad (2.30 \text{ a})$$

$$-D_{yx} \cdot u + (I_y - \lambda) \cdot v - D_{yz} \cdot w = 0, \quad (2.30 \text{ b})$$

$$-D_{zx} \cdot u - D_{zy} \cdot v + (I_z - \lambda) \cdot w = 0. \quad (2.30 \text{ c})$$

Rozpis determinantu vede na kubickou rovnici pro $\lambda_{1,2,3}$

$$\lambda^3 + a \cdot \lambda^2 + b \cdot \lambda + c = 0,$$

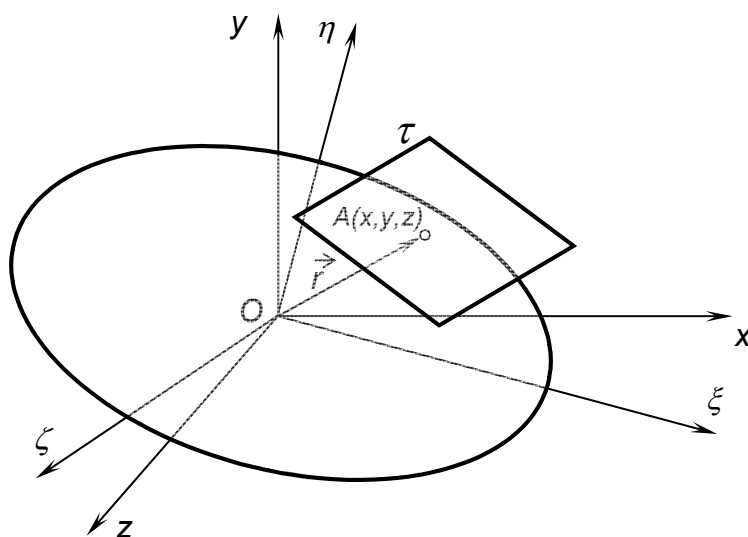
kde

$$a = -(I_x + I_y + I_z),$$

$$b = I_x \cdot I_y + I_y \cdot I_z + I_z \cdot I_x - D_{yz}^2 - D_{zx}^2 - D_{xy}^2,$$

$$c = -(I_x \cdot I_y \cdot I_z - I_x \cdot D_{yz}^2 - I_y \cdot D_{zx}^2 - I_z \cdot D_{xy}^2 - 2 \cdot D_{yz} \cdot D_{zx} \cdot D_{xy}).$$

Potom hledané směrové kosiny jednotlivých os ξ , η , ζ , u_i , v_i , w_i určíme z libovolných dvou rovnic soustavy (2.30) a podmínky $u^2 + v^2 + w^2 = 1$, pro $\lambda = \lambda_i$, přičemž $i = 1, 2, 3$.



Je-li průvodič $\vec{r}$ bodu elipsoidu setrvačnosti jeho hlavní poloosou, je tečná rovina τ v koncovém bodě A k němu kolmá, to znamená, že

$$\text{grad}(x, y, z) = \lambda \cdot \vec{r}.$$

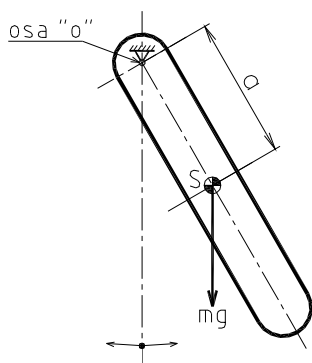
Obr. 6: Určení hlavních os setrvačnosti.

2.6 Experimentální určování momentů setrvačnosti

Momenty setrvačnosti můžeme určit pomocí jakéhokoliv CAD softwaru, pokud máme tuto součástku namodelovanou trojrozměrně (3D). V tomto softwaru musíme zadat jen hustotu materiálů těles a použít příslušný příkaz k výpočtu polohy těžiště a matice setrvačnosti. Mohou však nastat případy, že tento postup nebudeme moci použít a potom musíme určit momenty setrvačnosti experimentálně. Z praxe (např. firma Škoda Auto) známe případ právě pro agregát osobního automobilu, u něhož je sestava 3D CAD dat příliš rozsáhlá kvůli velkému množství těles. Dále je pracné zkontrolovat u všech součástí v sestavě správnost zadání hustoty. Konečně je též problém s daty komponent dodávaných jinými výrobci, protože CAD data jsou též dodána většinou pouze jako plochy (k výpočtu matice momentu setrvačnosti jsou potřeba „objemová“ CAD data).

K určení momentů setrvačnosti se používají různé metody. Všechny měřicí metody jsou založeny na principu závislosti mezi momentem setrvačnosti tělesa a frekvencí vlastního kmitání. Při měření se předpokládá, že kmitání je netlumené a měří se doba kmitu (perioda) T . Z praktických důvodů je vhodné počítat dobu kmitu jako průměrnou hodnotu z více kmitů. Základní metody určení momenty setrvačnosti tělesa jsou přehledně znázorněny níže, kde jsou také uvedeny vztahy pro výpočet momentu setrvačnosti.

fyzikální kyvadlo

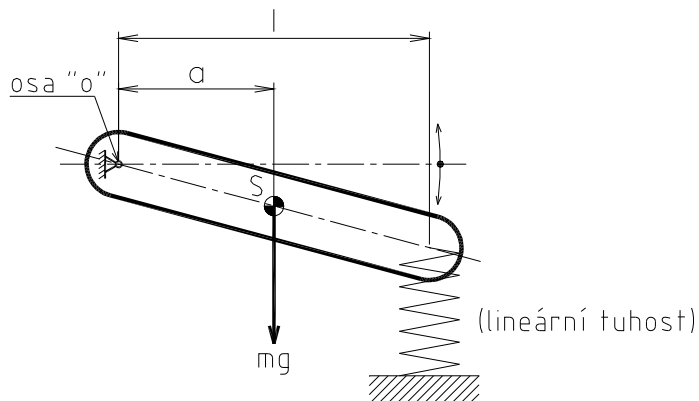


$$I_0 = \frac{m \cdot g \cdot a}{4 \cdot \pi^2} \cdot T^2$$

Použijeme Steinerovu větu
na přepočet pro osu
procházející těžištěm:

$$I_S = I_0 - m \cdot a^2$$

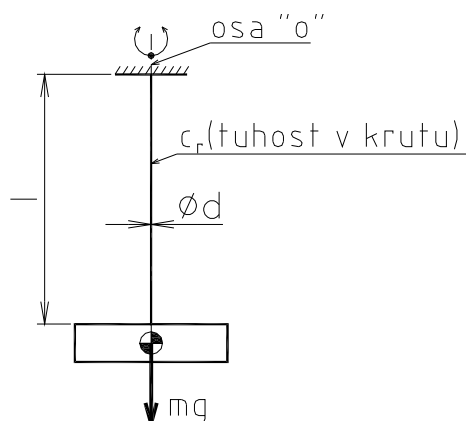
fyzikální kyvadlo



$$I_0 = \frac{c \cdot l^2}{4 \cdot \pi^2} \cdot T^2$$

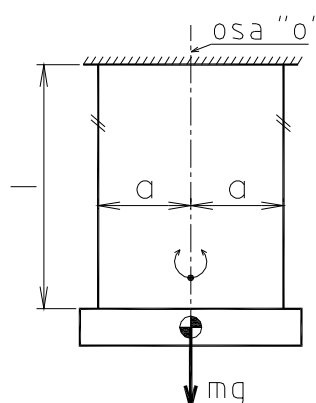
$$I_S = I_0 - m \cdot a^2$$

torzní závěs

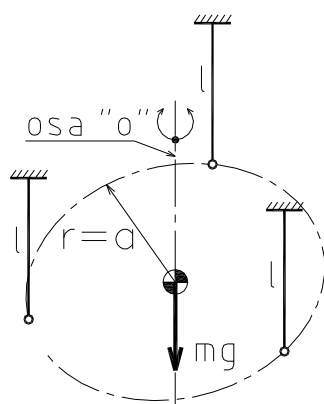


$$I_0 = \frac{c_r}{4 \cdot \pi^2} \cdot T^2$$

dvouvláknový (bifilární) závěs



$$I_0 = \frac{m \cdot g \cdot a^2}{4 \cdot \pi^2 \cdot l} \cdot T^2$$

trojvláknový (trifilární) závěs

$$I_0 = \frac{m \cdot g \cdot a^2}{4 \cdot \pi^2 \cdot l} \cdot T^2$$

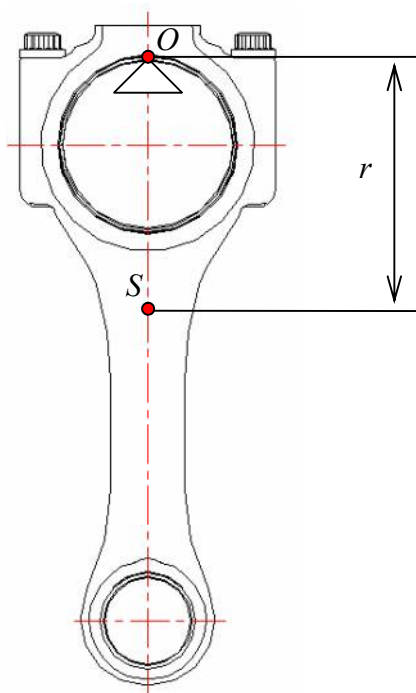
Tento princip by mohl být aplikován např. i na čtyřvláknový závěs.

U těchto metod (bifilární a trojvláknový závěs) musí být poloha závěsných lan volena tak, aby byla v klidové poloze rovnoběžná s osou kmitání a dále musí být konce upevněny na stejném poloměru (stejná vzdálenost od těžiště).

Nyní si ukážeme použití těchto metod na vhodných případech z praxe.

2.7 Fyzikální kyvadlo

Ve strojařské praxi jde často o tělesa, která lze uložit tak, aby se mohla kývat alespoň kolem jedné osy. Typickým případem je ojnice. Zavěsíme ji tak, aby se mohla kývat kolem osy rovnoběžné s osou, ke které moment setrvačnosti určíme. Je to obvykle osa procházející středem hybnosti (těžištěm).



$$I_0 = \frac{m \cdot g \cdot e}{4 \cdot \pi^2} \cdot T^2$$

$$I_S = I_0 - m \cdot e^2 = m \cdot \left(\frac{g \cdot e \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2} - e^2 \right)$$

Obr. 7: Kývání ojnice kolem jedné osy.

Podle uvedených vzorců v obr. počítáme osový moment setrvačnosti tělesa, známe-li jeho hmotu, polohu hmotného středu a dobu kmitu při kývání kolem příslušné rovnoběžné osy. Neznáme-li polohu hmotného středu, lze moment setrvačnosti k ose jím procházející a zároveň jeho polohu určit dvojím kýváním^[11].

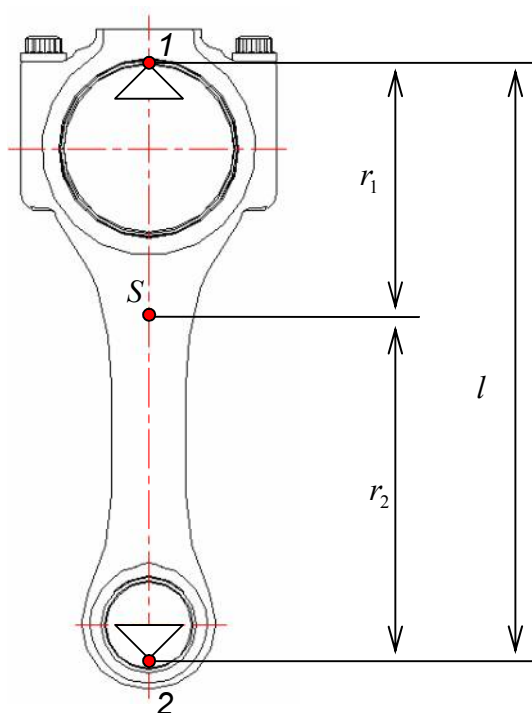
Jsou-li T_1 a T_2 doby kyvu při kývání kolem os 1 a 2 (viz obr.8), můžeme psát

$$I_1 = \frac{m \cdot g \cdot r_1}{4 \cdot \pi^2} \cdot T_1^2, \quad I_S = I_1 - m \cdot r_1^2$$

$$I_2 = \frac{m \cdot g \cdot r_2}{4 \cdot \pi^2} \cdot T_2^2, \quad I_S = I_2 - m \cdot r_2^2$$

$$r_1 + r_2 = l.$$

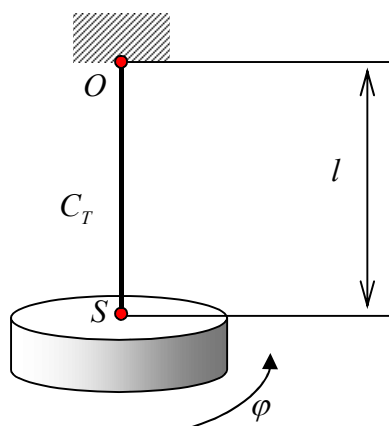
Z těchto rovnic můžeme vypočítat I_S , r_1 a r_2 .



Obr. 8: Kývání ojnice kolem dvou rovnoběžných os.

2.8 Torzní závěs

Moment setrvačnosti osově symetrické součásti je vhodné zjišťovat pomocí torzního závěsu (tenká torzní tyč nebo drát).



Obr. 9: Torzní závěs.

Z příslušné doby kmitu můžeme určit moment setrvačnosti $I_0 = \frac{C_T}{4 \cdot \pi^2} \cdot T^2$, kde C_T je torzní tuhost závěsu. Lze ji vypočítat při znalosti parametrů závěsného drátu ze vztahu $C_T = \frac{G \cdot J_P}{l} = \frac{G \cdot \pi \cdot d^4}{32 \cdot l}$, kde G je modul pružnosti ve smyku, d je průměr

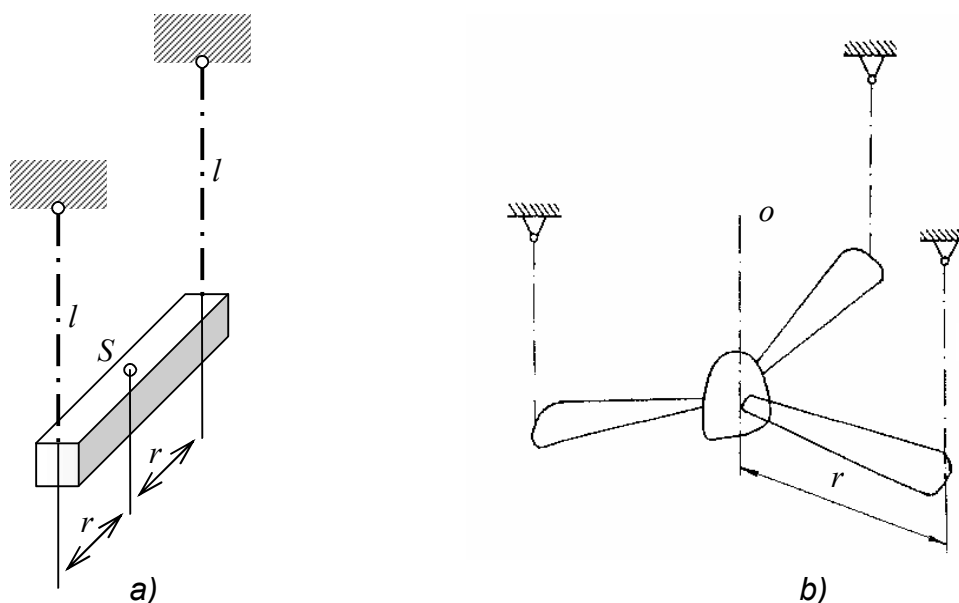
drátu a l je jeho délka. V praxi je obvyklé určit konstantu tuhosti závěsu odkýváním tělesa známého momentu setrvačnosti a pak teprve měřit vyšetřované těleso.

2.9 Závěs na vláknech

U tělesa s převažujícím délkovým rozměrem je vhodný bifilární závěs. Pro tělesa jako je vrtule, lze použít trifilární závěs. Při délce závěsu l a jeho vzdálenosti od osy kývání dané mírou r vypočteme moment setrvačnosti I_o k ose o ze vztahu

$$I_o = \frac{m \cdot g \cdot r^2}{4 \cdot \pi^2 \cdot l} \cdot T^2.$$

Vlákna musejí být rozmístěna pravidelně po obvodu a rovnoběžně s osou.



Obr. 10: Závěs na vláknech: a) bifilární, b) trifilární ^[9].

2.10 Určování deviačních momentů

Obtížnější je experimentální určování deviačních momentů. Lze přitom použít vztahu (2.28). Položíme-li osu o do roviny x, y , pak $\cos \gamma = 0$ a z výrazu lze určit D_{xy} , známe-li I_x , I_y a I_o (zjistíme měřením). Vybereme-li osu o tak, aby byla symetrálou

os x a y , pak $\alpha = \beta = \frac{1}{4} \cdot \pi$. Označíme-li moment setrvačnosti k symetrále os x a y

jako $I_{o(xy)}$, pak platí $I_{o(xy)} = I_x \cdot \cos^2 \alpha + I_y \cdot \sin^2 \alpha - D_{xy} \cdot \sin 2\alpha$,

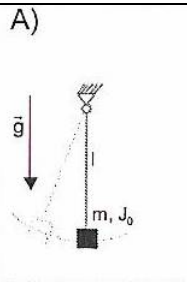
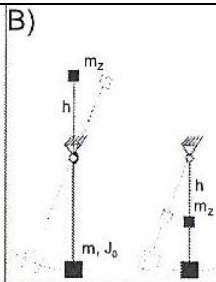
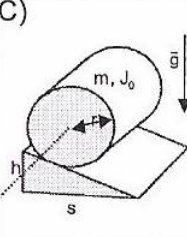
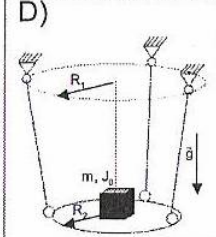
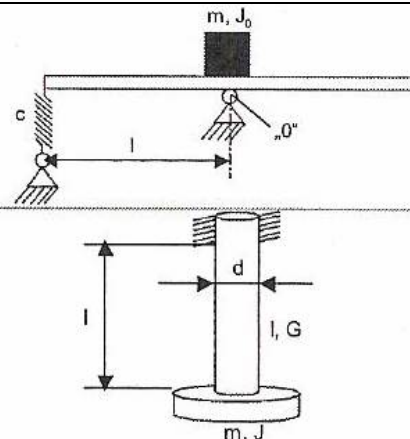
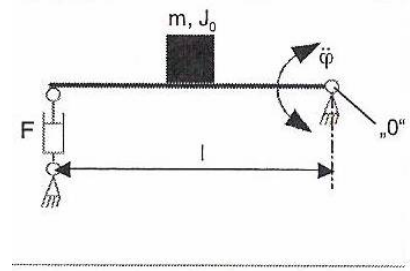
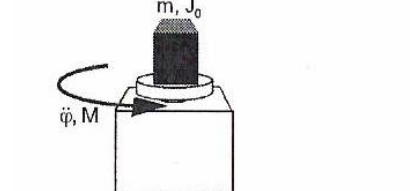
$$\text{odtud } D_{xy} = \frac{I_x \cdot \cos^2 \alpha + I_y \cdot \sin^2 \alpha - I_{o(xy)}}{\sin 2\alpha} = \frac{I_x + I_y}{2} - I_{o(xy)}.$$

Analogický vztah platí i pro D_{yz} a D_{zx} . Vzhledem k tomu, že však hodnoty deviačních momentů bývají proti hodnotám I_x , I_y a I_o podstatně menší, je nutno měření deviačních veličin provádět velmi přesně.

2.11 Měřicí zařízení momentů setrvačnosti v praxi

Z dostupných zdrojů informací (publikace, referáty z kongresů, internet) o řešené problematice byly vyhledány odkazy na různá měřicí zařízení momentů setrvačnosti. Nalezených informací bohužel nebylo mnoho a většina z nich se týkala měření momentů setrvačnosti celého vozidla, nikoliv samotného agregátu. Naměřená data momentů setrvačnosti vozidla (kolem podélné, příčné a svislé osy) jsou používána v simulačních výpočtech např. stability, ovladatelnosti a jízdní dynamiky automobilu. Z hlediska principů není ale v měřeních žádný rozdíl.

Naměřená matice momentů setrvačnosti agregátu může tedy být použita jako přesný vstupní parametr do simulačních výpočtů jak z hlediska bezpečnosti (crash testy), tak i z hlediska komfortu jízdy (kvalitní uložení agregátu v karosérii vozidla). V předchozím textu je ukázán smysl a význam znalosti ES hnacího agregátu (jaké důsledky mohou mít neúplné, chybné nebo nesprávné údaje $\Rightarrow$ nekvalitní simulační model dávající nesprávné výsledky). Požadavky na bezpečnost vozidel rostou. Z toho vyplývá potřeba vytváření kvalitních simulačních modelů budoucích automobilů. Konstrukční vady a nedostatky mohou být odhaleny ještě před vznikem prvního prototypu vozidla, což může ušetřit značné finanční prostředky.

	Zobrazení principu	Matematický popis	Poznámka
Zrychlení pomocí přírodní síly (gravitace)	   	A: $J_0 = m \cdot l \cdot \left(\frac{g \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2} \right) - m \cdot l^2$ B: $J_0 = \frac{m_z \cdot g \cdot h}{2 \cdot \pi^2} \cdot \frac{T_1^2 \cdot T_2^2}{T_1^2 - T_2^2}$ C: $J_0 = m \cdot (r - h_0) \cdot \left(\frac{g \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2} \right)$ D: $J_0 = m \cdot \frac{g \cdot R_1 \cdot R_2}{4 \cdot \pi^2} \cdot T^2$	měření času kyvu T, (popř. času pohybu) dynamického pohybu vyvolaného gravitací
Zrychlení pomocí pasivního silového elementu		$J_0 = \frac{c \cdot l^2 \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2}$ $J_0 = \frac{G \cdot d^4 \cdot T^2}{l \cdot \pi \cdot 256}$	měření času kmitu T dynamického pohybu, který je udržován pasivní silou
Zrychlení pomocí aktivního silového elementu	 	$J_0 = \frac{F \cdot l}{\ddot{\varphi}}$ $J_0 = \frac{M}{\ddot{\varphi}}$	měření momentu M, popř. síly F, jakož i úhlového zrychlení pro dynamický pohyb, který je indukován aktivním silovým elementem
Tab.: Principy určení momentů setrvačnosti ^[26] .			



Jeden roh měřicí plošiny
při probíhajícímu testu



Umístění: Michigan, USA

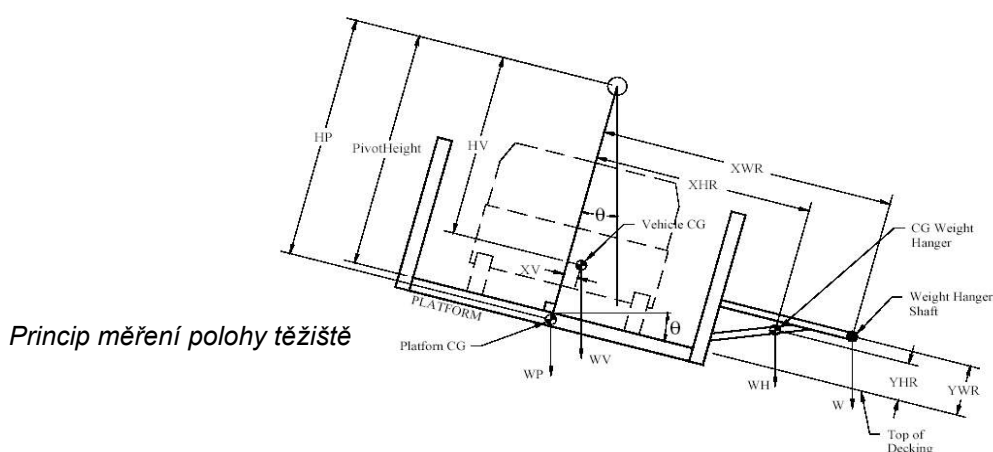
Konstrukční požadavky:

- 1) měřit hmotnost; polohu těžiště; příčný, podélný a svislý moment setrvačnosti vozidla
- 2) přesnost měření momentu setrvačnosti a polohy těžiště do 3 %
- 3) měřit prázdná vozidla; jen jednotlivá vozidla (bez přívěsu)
- 4) možno měřit široký rozsah vojenských vozidel (hmotnost 1360 – 27000 kg, až 11 m dlouhá, až 3 m široká)

Princip měření:

- poloha těžiště se měří pomocí čtyř vah, pokud má vozidlo více kol jsou některé osy měřeny najednou
- měření momentu setrvačnosti kolem svislé osy je měřen pomocí otočného stolu

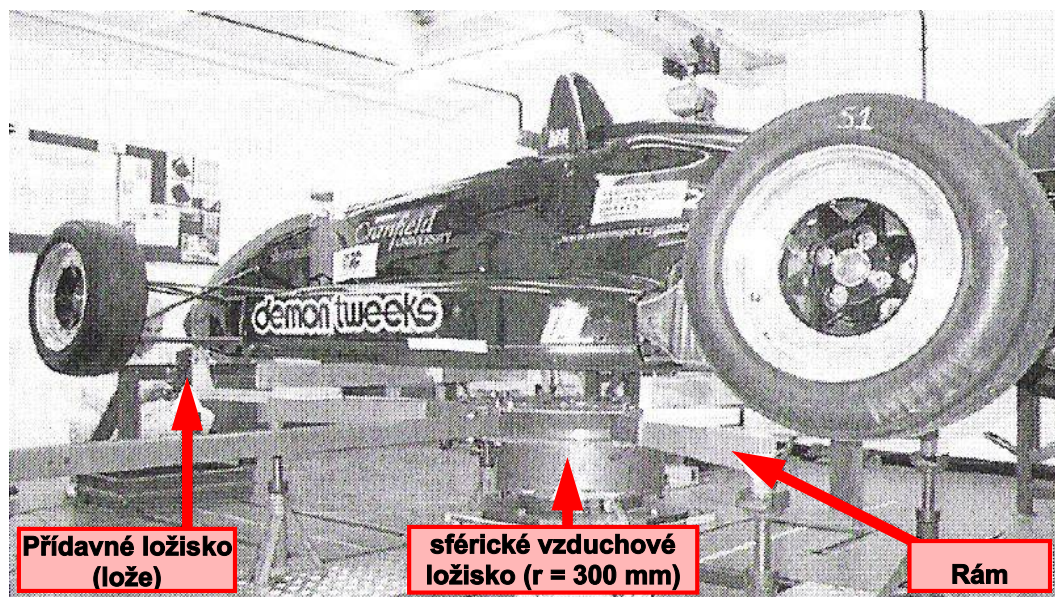
Využití naměřených hodnot: simulace existujících vozidel, vývoj nových vozidel, počítačové modely pro simulaci stability a ovladatelnosti vozidla



Princip měření polohy těžiště

Obr. 11: Zkušební zařízení pro měření vojenských vozidel využívající princip gravitace ^[31].

možnosti zařízení: určení hmotnosti, polohy těžiště a matice momentů setrvačnosti vozidla
nevýhoda: pro kompletní určení všech parametrů potřebujeme šest měření

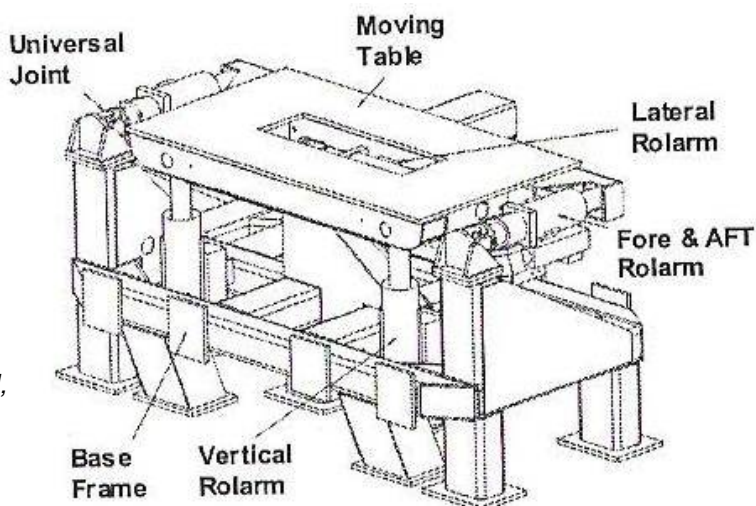


Obr. 12: Zkušební zařízení pro měření momentu setrvačnosti využívající princip pasivního silového elementu ^[29].

možnosti zařízení: určení hmotnosti, polohy těžiště a matice momentů setrvačnosti vozidla
výhoda: měření všech parametrů probíhá automaticky na jeden proces, není nutná změna uložení



zařízení obsahuje: centrální stůl,
šest lineárních pohonů



Obr. 13: Zkušební zařízení pro měření vozidel využívající princip aktivního silového elementu od firmy Anthony Best Dynamics ^[28].

možnosti zařízení: určení hmotnosti, polohy těžiště a matice momentů setrvačnosti vozidla
výhoda: měření všech parametrů probíhá automaticky na jeden proces bez nutnosti změny uložení



Detail kloub mezi válci
Z1 a Z2

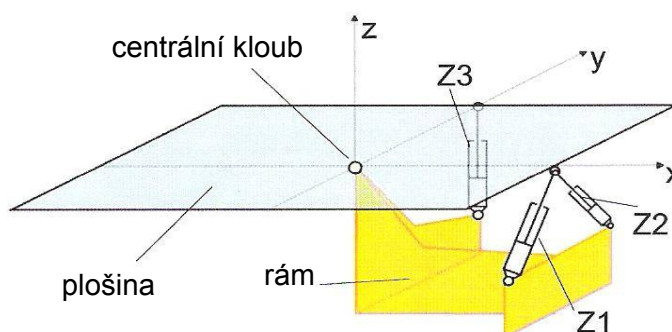


Konstrukční požadavky:

- měření všech momentů setrvačnosti v jednom kroku
- realizovat efektivní způsob měření
- při měření využít jen omezený úhel náklonu vozidla z důvodu vytečení provozních kapalin, musí být dodržen mezní úhel náklonu maximálně 25°
- minimální náklady (tzn. minimální množství senzorů a pohonů, minimální počet dílů)
- dostatečně vysoká tuhost s minimální hmotností (menší hmota vede v této souvislosti k vyšší přesnosti měření)
- minimální omezení měřeného vozidla z hlediska hmotnosti a velikosti
- automatický průběh měření, pouze upevnění a nastavení pozice měřeného tělesa může být provedeno manuálně
- přesnost měření pod 5 % s výjimkou deviačních momentů, zde z důvodu menších velikostí než u hlavních momentů setrvačnosti je dovolena chyba 15 %

Popis principu měření:

- sférické (kulové) uložení plošiny v centrálním kloubu
- kývání kolem podélné osy vozidla zajišťuje hydraulický lineární pohon Z3
- paralelní uspořádání válců Z1 a Z2 zajišťuje kývání kolem příčné a svislé osy vozidla
- centrální kloub obsahuje jednoosý snímač síly a snímače natočení kolem os x, y a z
- kloub mezi válci Z1 a Z2 obsahuje tříosý snímač síly



Obr. 14: Zkušební zařízení pro měření pro měření vozidel využívající princip aktivního silového elementu ^[26].

3 Cíle disertační práce

Cílem předložené disertační práce je návrh a ověření experimentálně-výpočtové metody stanovení těžiště, hlavních os a polohy ES hnacího agregátu vozidla, pomocí které bude možné spolehlivě zjistit parametry setrvačnosti motoru a jeho příslušenství s připojenou převodovkou, potřebné ke konstrukčnímu řešení jeho zástavby do vozidla a k modelovým výpočtům chování hnacího agregátu ve vozidle v podmínkách extrémních dynamických situací. K dosažení tohoto cíle byly dílčí etapy práce formulovány následovně:

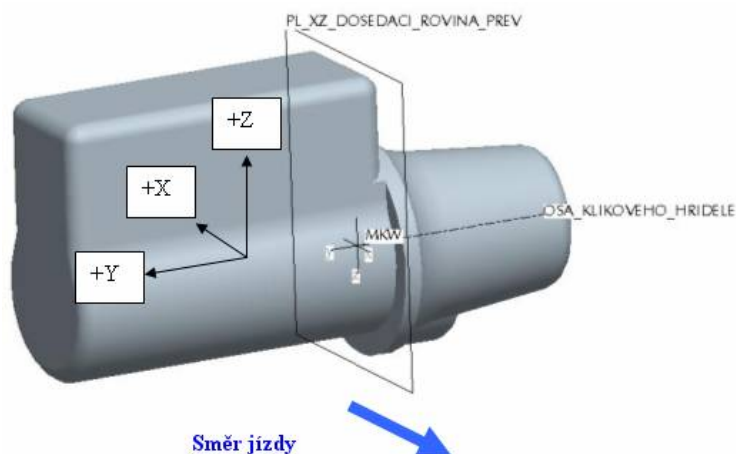
1. Seznámení se způsoby určení (měření) momentů setrvačnosti u agregátů, či motorů.
2. Vytvoření experimentální metody k zjišťování momentu setrvačnosti hnacího agregátu vozidla a následného algoritmu pro výpočet elipsoidu setrvačnosti.
3. Realizace zkušebního zařízení k měření momentu setrvačnosti hnacího agregátu, ověření navržené experimentálně-výpočtové metody jednak pro základní konfiguraci hnacího agregátu, jednak pro jeho variantu rozšířenou o skupiny příslušenství.
4. Ověření vlivu vybraných činitelů (např. polohy klikového hřídele motoru, pozice příslušenství motoru aj.) na změny dynamických vlastností hnacího agregátu.
5. Zhodnocení výsledků doktorské disertační práce.

4 Popis vlastní metody

Při volbě metody k určení ES agregátu byl kladen důraz hlavně na přesnost měření. Správně určená matice setrvačnosti agregátu je velmi důležitá pro další využití v počítačových simulacích, např. crashových (nárazových) zkoušek.

Stanovení hmotnosti a polohy těžiště agregátu, popř. motoru, bylo provedeno na základě měření na třívláknovém závěsu (měření tahových sil v jednotlivých vláknech). Pro určení momentů setrvačnosti byla užita nepřímá metoda měření doby kmitu tělesa zavěšeného na jednovláknovém (torzním) závěsu.

Při stanovení momentů setrvačnosti těles složitějších tvarů se neobejdeme bez přípravků, které umožňují zavěšení tělesa v různých polohách na torzní závěs. Z tohoto důvodu byl vyroben pomocný rám pro upnutí agregátu (motoru). Agregát byl upnut do pomocného rámu definovaným způsobem a to tak, aby osy zvoleného souřadného systému agregátu byly rovnoběžné s osami souřadného systému rámu. Na agregátu byl souřadný systém definován od počátku (tzv. bodu *MKW*) v souladu se zvyklostmi zadavatele – viz obr.15.



Obr. 15: Volba počátku (bodu *MKW* - bod $[0,0,0]$) a globálního souřadného systému ^[15].

Bod *MKW* je dán průsečíkem dosedací roviny převodovky s osou klikového hřídele. K tomuto bodu bude vztažena zjištěná poloha těžiště agregátu. Orientace os souřadného systému je následující: osa *Y* je totožná s osou klikového hřídele, osa *Z* je rovnoběžná s osami válců a osa *X* je kolmá na rovinu *YZ*. Poloha agregátu v rámu je nastavována tak, aby odchylka rovnoběžnosti os souřadných systémů agregátu a rámu byla co nejmenší.

Protože momenty setrvačnosti rámu nejsou zanedbatelné, bylo nutno provést dvojí měření. První měření bylo provedeno pro sestavu (tj. rám+agregát). Ve druhé fázi byl rám měřen samostatně z důvodu pozdějšího „odečtení“ rámu od měřené sestavy.

4.1 Určení momentů setrvačnosti

K určení momentů setrvačnosti byla užita nepřímá metoda měřením doby kmitu tělesa zavěšeného na jednovláknovém (torzním) závěsu. Pro výpočet momentu setrvačnosti na torzním závěsu (viz kap. 2.8) platí vzorec:

$$I = \frac{G \cdot d^4}{128 \cdot \pi \cdot L} \cdot T^2, \quad (4.1)$$

kde *I* - moment setrvačnosti, *G* - modul pružnosti ve smyku pružinového drátu, *d* - průměr pružinového drátu, *L* - délka závěsu, *T* - doba jednoho kmitu.

Pro potřeby měření byl vytvořen závěs, který se skládal z kardanových kloubů a pružinového drátu. Konce závěsu byly opatřeny závěsnými třmeny, do nichž byl pružinový drát upevněn svěrným způsobem. Oba třmeny obsahovaly křížové (kardanové) klouby, k jejichž jednomu konci byl upevněn drát a druhý konec byl přichycen buď k měřenému tělesu (rám nebo soustava – tzn. rám+agregát) nebo k pevnému bodu zavěšení. Tato konstrukce umožňovala měřenému tělesu viset volně (přímka procházející osou drátu protíná těžiště tělesa) po celou dobu kmitu a u všech případů zavěšení (viz obr.19).

Naměřené veličiny byly použity k určení prvků matice setrvačnosti agregátu a pomocného rámu. K určení matice setrvačnosti je zapotřebí nejméně šest měření. Kvůli zvýšení přesnosti výsledků bylo však měřeno přinejmenším desetkrát – užitím

vztahu (2.28) platného k určení momentu setrvačnosti k libovolné ose jdoucí počátkem. Poloha elipsoidu setrvačnosti byla následně stanovena pomocí dalších matematických postupů.

Nyní se budeme více zabývat měřením jednotlivých veličin ve vztahu (4.1).

4.1.1 Stanovení modulu pružnosti ve smyku drátu

Modul pružnosti ve smyku drátu byl určen použitím závaží o známém momentu setrvačnosti, kdy jsme měřili čas jednoho kmitu a následně jsme vypočítali modul pružnosti v krutu podle vztahu (4.1). Pro měření bylo použito tvarově jednoduché závaží – čímž byl v našem případě válec. Výsledky z měření jsou zobrazeny v příloze 1.

Měření bylo provedeno pro dva pružinové dráty, a to pro průměry drátu $d = 6.3mm$ a $d = 8mm$. U menšího průměru drátu byl zjištěn modul pružnosti ve smyku o hodnotě $G = 7.88 \cdot 10^4 MPa$, u většího průměru drátu vyšla hodnota $G = 7.955 \cdot 10^4 MPa$. Protokoly s výsledky z měření jsou přiloženy v příloze 1.

4.1.2 Měření délky a průměru drátu závěsu

Délka závěsu torzního drátu L byla opakovaně změřena ocelovým měřítkem (pravítkem) v zatíženém stavu. Byly vyrobeny dva závěsy, první se používal pro agregáty osobních vozidel. Byl u něho použit pružinový drát o menším průměru, v tomto případě délka závěsu činila $L = 2543mm$. U druhého závěsu byl použit větší průměr drátu a používal se u měření motoru pro nákladní automobil. Jeho délka byla změřena a měla hodnotu $L = 1877mm$.

S ohledem na předpokládanou kuželovitost a ovalitu byl průměr drátu měřen mikrometrem ve čtyřech rovinách vždy ve dvou průměrech k sobě kolmých. Výsledná hodnota průměru byla pak určena statisticky. Hodnota průměru drátu je velmi důležitá, protože ve vztahu pro výpočet momentu setrvačnosti na torzním závěsu (4.1) je ve čtvrté mocnině. Postup a výsledky měření jsou ukázány na pružinovém drátu o průměru $d = 6.3mm$.

Výsledný střední průměr drátu se určí podle vztahu:

$$d_{str} = \sqrt[4]{d_o^4 \cdot \left(1 + \frac{\sum_1^z [\pm 2\Delta + \Delta^2]}{2 \cdot z} \right)} \quad (4.2)$$
$$\Delta = \frac{d - d_o}{d_o}$$

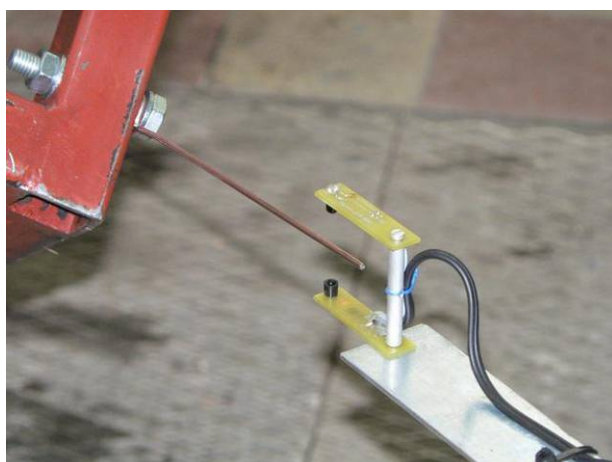
kde d_o - jmenovitý průměr drátu, z - počet dvojic měřených průměrů.

		Odchylky pro $d_o = 6,3$ mm			
		Δ %	$\Delta^2 \cdot 10^{-2}$ %	Δ %	$\Delta^2 \cdot 10^{-2}$ %
6,385	6,285	1,349	1,820	-0,238	0,057
6,35	6,285	0,794	0,630	-0,238	0,057
6,295	6,28	-0,079	0,006	-0,317	0,101
6,3	6,285	0,000	0,000	-0,238	0,057
		2,063	2,457	-1,032	0,271

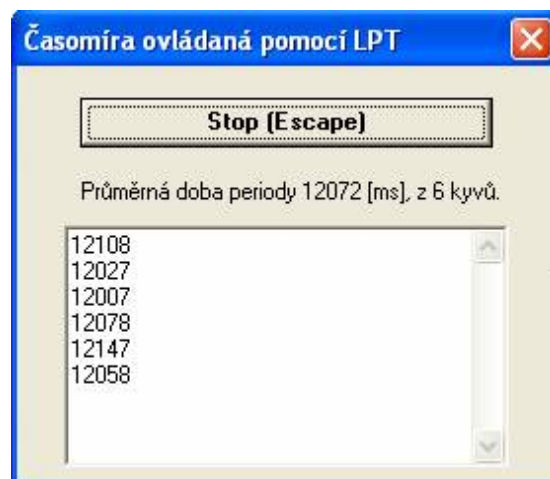
potom $d_{str} = \mathbf{6,304}$ mm

4.1.3 Měření doby jednoho kmitu

Doba jednoho kmitu byla měřena pomocí optického čidla vlastní výroby i konstrukce reagující na zaclonění světelného paprsku clonkou, která byla upevněna na kývajícím se tělese. Měřicí zařízení doby kmitu obsahuje samotné čidlo a potřebný software, který byl nainstalován v notebooku. Čidlo bylo napájeno přes USB port a data byla sbírána pomocí paralelního portu. Při měření bylo vždy provedeno nejméně 30 kmitů (záleželo na ustálení doby periody), ze kterých byla následně spočtena průměrná hodnota. Protože za dobu jednoho kmitu prochází clonka čidlem 2x, není nutné uvažovat vliv její šířky. Ověření vhodnosti tohoto snímače provedl Český metrologický institut a protokol o zkoušce je v příloze 1.



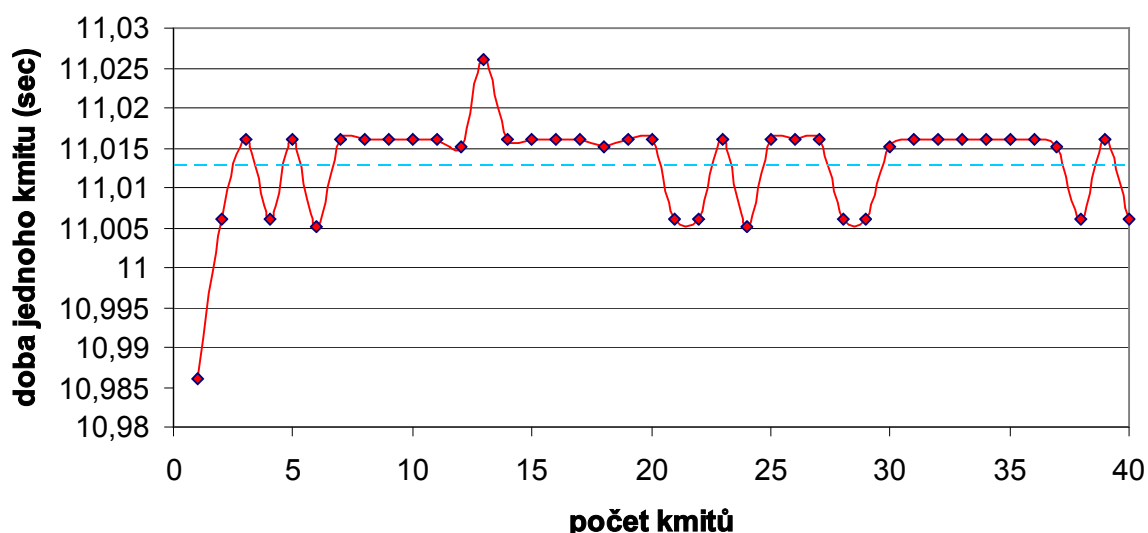
a)



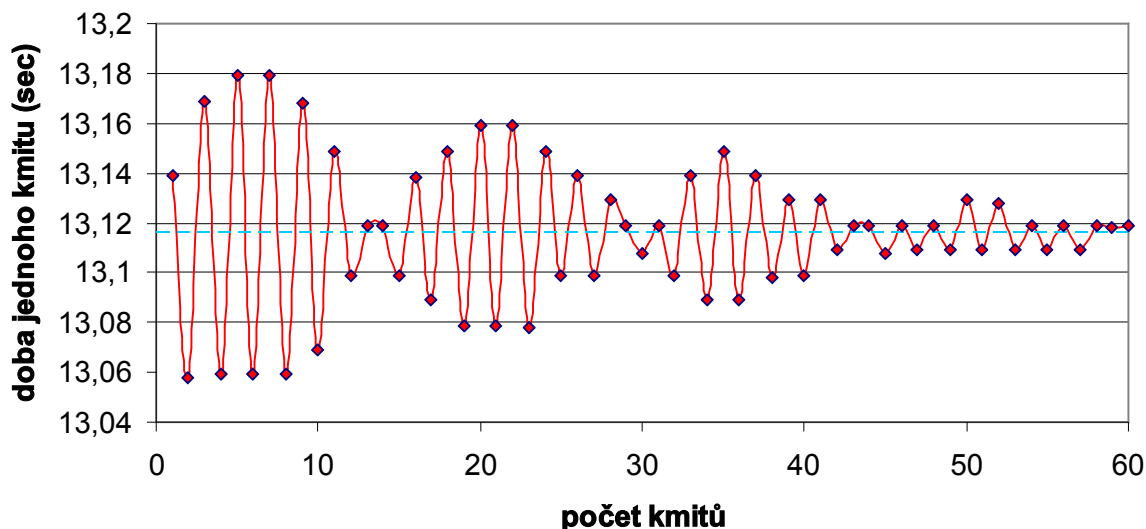
b)

Obr. 16: Ukázka měření doby jednoho kmitu: a) optické čidlo, b) aplikace pro snímání naměřených dat.

Při rozkývání tělesa na torzním závěsu je nutné brát zřetel na to, aby se pokud možno měřené těleso natáčelo pouze kolem svislé osy a nedocházelo k nežádoucímu houpání, nebo kolébání. „Kvalita“ rozkývání má veliký vliv na nutný počet kmitů, než se doba jednoho kmitu ustálí. Na následujících obrázcích jsou ukázky z měření doby kmitů.



Obr. 17: Ukázka průběhu doby jednoho kmitu – dobře rozkýváno.

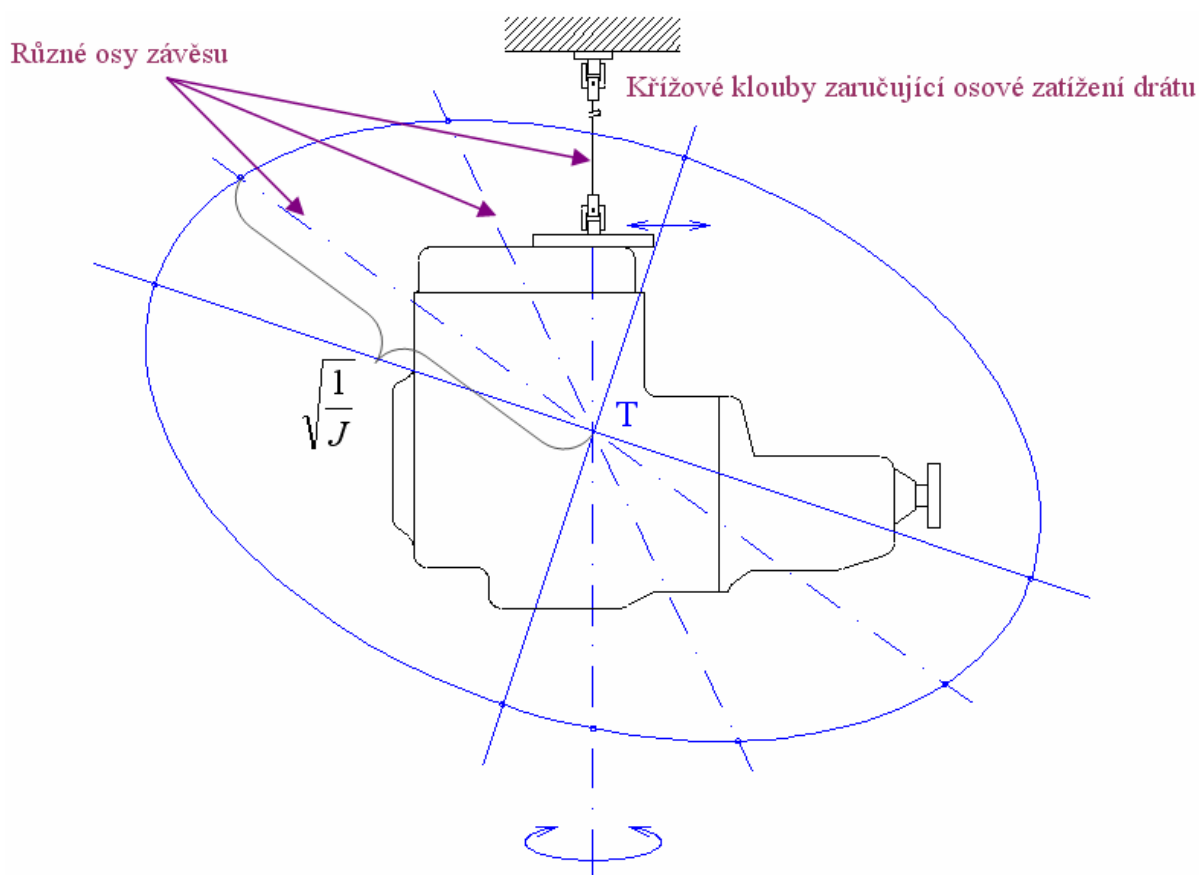


Obr. 18: Ukázka průběhu doby kmitu – špatně rozkýváno (přídavné houpání).

4.1.4 Měření úhlů natočení souřadného systému vůči závěsu s torzním drátem

K určení matice setrvačnosti (tj. i ES) musíme odkývat těleso nejméně kolem šesti různých os užitím různých závěsných bodů. Polohy jednotlivých os by se od sebe měly co nejvíce lišit. Získáme tak stejný počet hodnot momentů setrvačnosti k různým osám procházejícím těžištěm (středem hmotnosti).

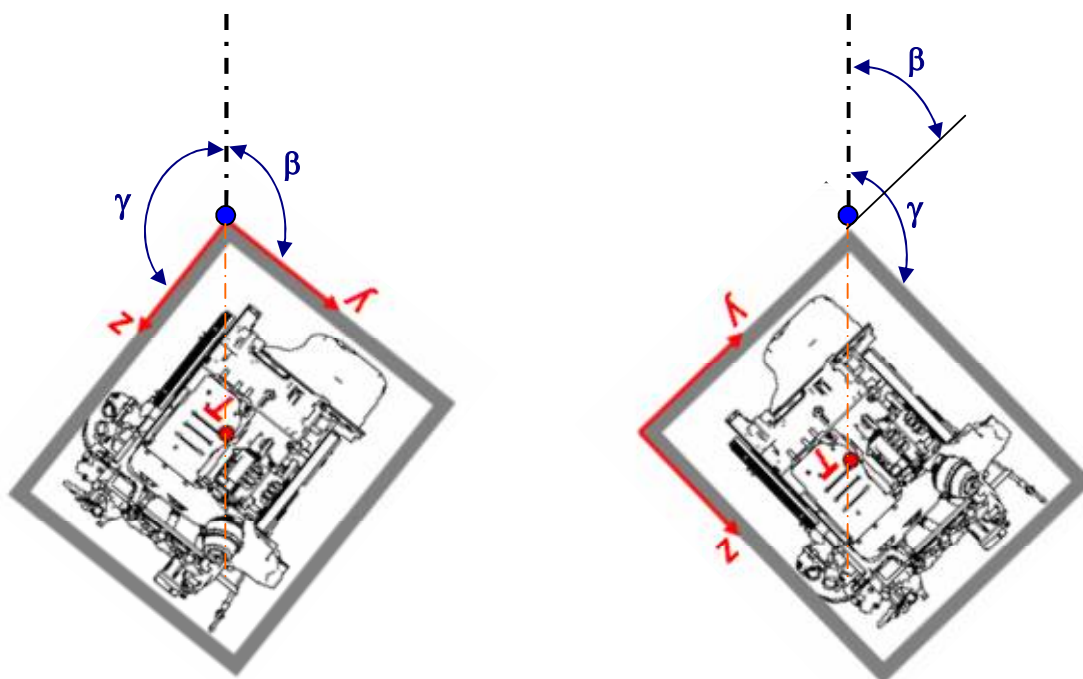
Vynášíme-li z těžiště hodnoty $\sqrt{\frac{1}{J}}$ v určitém měřítku jako vektory ve směru osy závěsu, vyplní koncové body v prostoru elipsoid setrvačnosti. Na následujícím zjednodušujícím obrázku je znázorněn postup sestavení elipsoidu setrvačnosti v rovině vedené osou klikového hřídele a osami válců. Pro zvětšení přesnosti je přirozeně vhodné provést více měření, nejlépe pak několik při použití závěsů, které určují body elipsoidu setrvačnosti v blízkosti konců jeho poloos (tzn. kolem vrcholů elipsy).



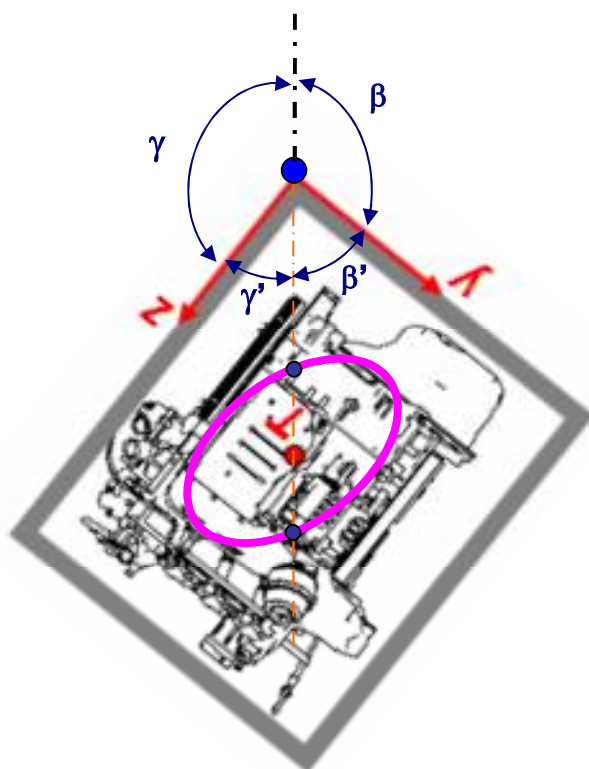
Obr. 19: Ukázka principu sestavení elipsoidu setrvačnosti v rovině klikového hřídele.

Aby soustava rovnic, která vznikne za použití vztahu (2.28), obsahovala pouze neznámé momenty setrvačnosti k osám X, Y, Z a deviační momenty, je nezbytné ještě změřit úhly α , β a γ (tedy úhly mezi osami souřadného systému a závěsu). Z následujících obrázků je zřejmý způsob odečítání těchto úhlů pro dva různé body závěsu. Tyto úhly se vždy musí měřit od kladného směru osy souřadného systému k ose závěsu (pružinového drátu).

Na Obr. 21 jsou znázorněny dvě možnosti odečítání úhlů mezi osami souřadného systému a závěsu. U jednoho měření se vždy všechny tři úhly musejí měřit jen jednou možností.



Obr. 20: Způsob odečítání úhlů mezi osami souřadného systému a osou pružinového drátu pro dva různé body zavěšení.



Obr. 21: Ukázka dvou možností odečítání úhlů mezi osami souřadného systému a závěsu (vždy všechny tři úhly musejí být změřeny jednou možností).

4.1.5 Stanovení elipsoidu setrvačnosti - aproximace poloh naměřených bodů určených v prostoru

Připomeňme si, že pro určení matice setrvačnosti (tj. i ES) musíme odkývat těleso nejméně kolem šesti různých os užitím nestejných závěsných bodů. Směry jednotlivých os by se od sebe měly co nejvíce lišit. Získali bychom tak šest hodnot momentů setrvačnosti k různým osám procházejícím těžištěm a mohli bychom určit matici setrvačnosti měřeného tělesa pomocí soustavy rovnic, která by vznikla za opakovaného použití vztahu (2.28). Šest rovnic o šesti neznámých postačuje k výpočtu momentů setrvačnosti k osám X, Y, Z a deviačních momentů.

V našem případě bylo vždy z důvodu přesnosti měření a následného vypočtení velikosti a polohy ES (dále ZVES – tj. základní vlastnosti elipsoidu setrvačnosti; za tyto veličiny pokládáme hlavní momenty setrvačnosti a polohu os ES) provedeno alespoň deset měření momentu setrvačnosti k libovolné ose jdoucí počátkem. Obecně pro n měření získáme matici n rovnic o šesti neznámých. Jde o případ, kdy tyto neznámé ($I_X, I_Y, I_Z, D_{XY}, D_{YZ}$ a D_{ZX}) lze určit užitím metody nejmenších čtverců^{[23], [24]}.

Metoda nejmenších čtverců je matematická metoda, určená ke statistickému zpracování dat. Umožňuje nalézt vhodnou aproximační funkci pro dané empiricky zjištěné hodnoty. Hledaná funkce musí být lineární kombinací předem známých funkcí, metoda umožní vypočítat jejich koeficienty. Metoda nejmenších čtverců hledá takové hodnoty koeficientů, aby součet čtverců odchylek jejích funkčních hodnot od daných naměřených hodnot byl nejmenší možný. Zjednodušeně „aby součet čtverců odchylek byl nejmenší“. Můžeme sestavit soustavu rovnic $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ ($\mathbf{A}$ je matice, kterou známe, $\mathbf{b}$ je vektor a také jej známe, $\mathbf{x}$ je neznámý vektor).

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} I_X \\ I_Y \\ I_Z \\ D_{XY} \\ D_{YZ} \\ D_{ZX} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} I_{o1} \\ I_{o2} \\ \dots \\ \dots \\ I_{on} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha_1 & \cos^2 \beta_1 & \cos^2 \gamma_1 & -2 \cdot \cos \alpha_1 \cdot \cos \beta_1 & -2 \cdot \cos \beta_1 \cdot \cos \gamma_1 & -2 \cdot \cos \gamma_1 \cdot \cos \alpha_1 \\ \cos^2 \alpha_2 & \cos^2 \beta_2 & \cos^2 \gamma_2 & -2 \cdot \cos \alpha_2 \cdot \cos \beta_2 & -2 \cdot \cos \beta_2 \cdot \cos \gamma_2 & -2 \cdot \cos \gamma_2 \cdot \cos \alpha_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cos^2 \alpha_n & \cos^2 \beta_n & \cos^2 \gamma_n & -2 \cdot \cos \alpha_n \cdot \cos \beta_n & -2 \cdot \cos \beta_n \cdot \cos \gamma_n & -2 \cdot \cos \gamma_n \cdot \cos \alpha_n \end{bmatrix}$$

V našem případě má matice $\mathbf{A}$ větší počet řádků než sloupců, vektor $\mathbf{b}$ má větší rozměr než vektor $\mathbf{x}$. Jedná se o přeuročenu soustavu rovnic, která má více rovnic než neznámých. V tomto případě je teoreticky možné některé rovnice zanedbat, ale předpokládejme, že rovnice jsou získány z experimentálních dat, u kterých si ceníme každého měření a nejsme schopni rozhodnout, kterou pracně získanou rovnici zanedbat.

V případech s přeuročenu soustavou lineárních rovnic platí, že taková soustava má nekonečně mnoho (respektive žádné) řešení. Řekněme, že nás taková skutečnost neuspokojuje a definujeme chybu řešení $\mathbf{e} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{b}$.

Chceme najít takové řešení $\mathbf{x}$, aby tato chyba (respektive velikost vektoru $\mathbf{e}$) byla minimální. Řešení naší soustavy rovnic můžeme odvodit pomocí derivace matic a vektorů. Protože $\mathbf{e}$ je vektor, upravme tento požadavek tak, aby „součet čtverců jednotlivých odchylek (tedy složek vektoru $\mathbf{e}$) byl minimální“. Při takovém způsobu formulace kritéria se vlastně jedná minimalizaci skalárního součinu, který můžeme napsat pomocí transpozice.

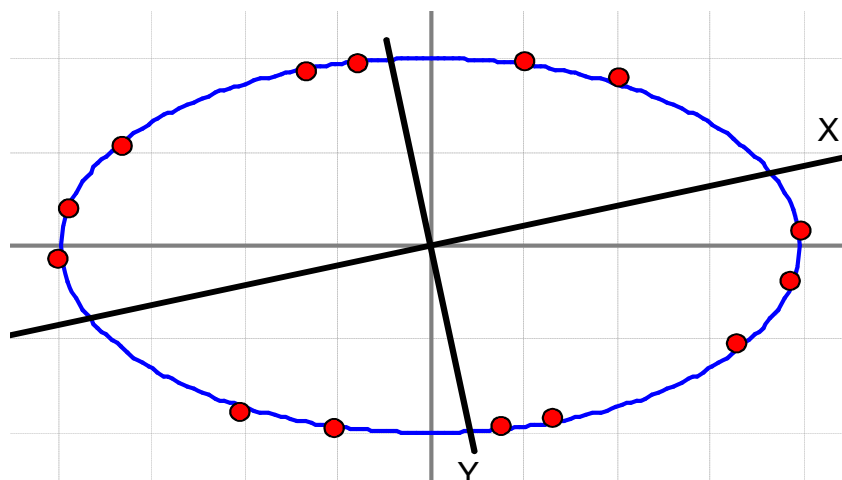
$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{e} = \mathbf{e}^T \cdot \mathbf{e} \rightarrow \min$$

Součin bude minimální tehdy, když jeho derivace podle proměnné $\mathbf{x}$ bude rovna nule. $(\mathbf{e}^T \cdot \mathbf{e})' = [(\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{b})^T \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{b})]' = 0$. Pomocí pravidel pro transpozici součinu a derivaci součinu matic a vektorů můžeme vztah dále upravovat.

$$[\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{b} - \mathbf{b}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \cdot \mathbf{b}]' = 2 \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} - 2 \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{b} = 0$$

Z výše uvedeného vztahu lze již vyjádřit výsledný vzorec pro $\mathbf{x}$.

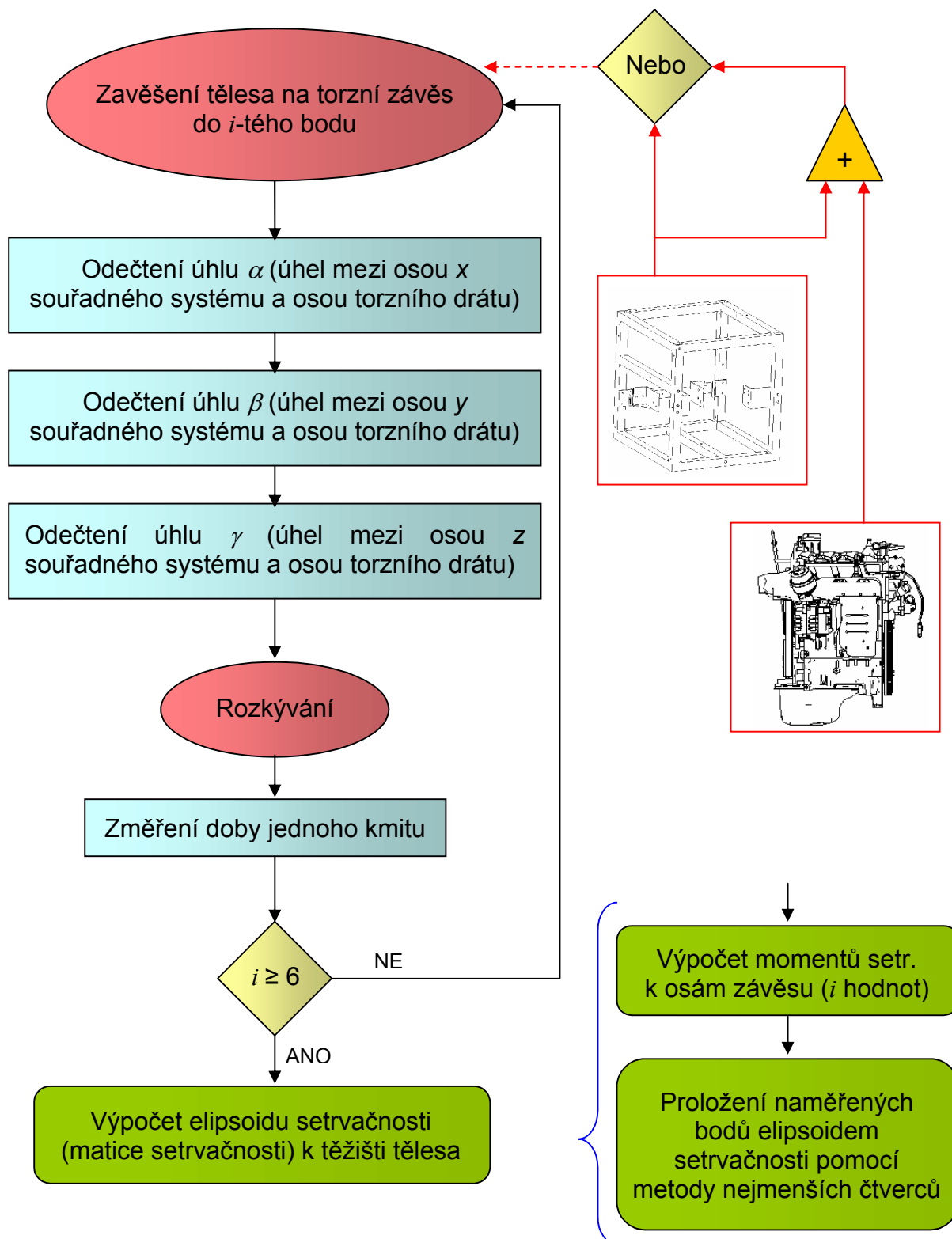
$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{b} \quad (4.3)$$



Obr. 22: Elipsoid setrvačnosti – ukázka aproximace naměřenými body v jedné rovině (tzn. elipsa - 2D případ).

V následující tabulce je ukázka aproximace ZVES vypočtená u měření sestavy pomocného rámu a spalovacího motoru 1.2 40 kW MPI.

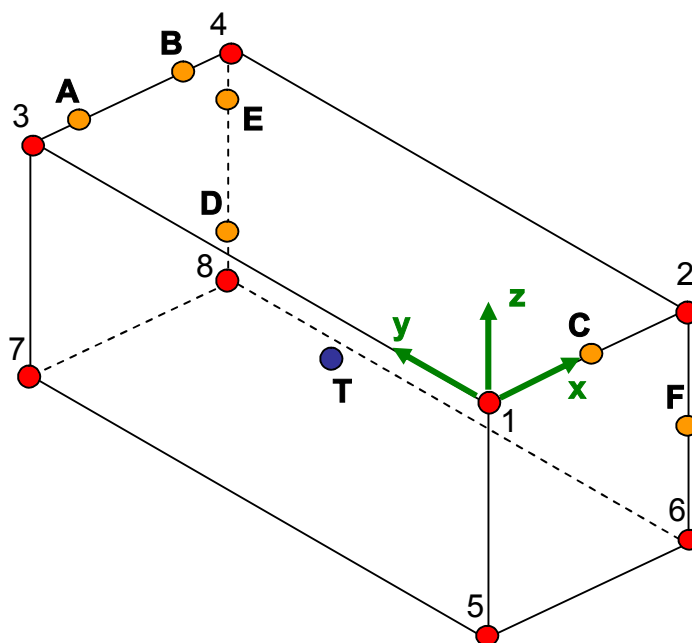
	Změřený moment setr. I_A (kg.m ²)	Moment setr. vypočtený z elipsoidu, který byl určen pomocí metody nejmenších čtverců z naměřených hodnot I_B (kg.m ²)	$ \Delta = I_A - I_B $ (kg.m ²)	$\delta EL = \left \frac{\Delta}{I_B} \cdot 100 \right $ (%)
1	9,3714	9,388617	0,017217	0,18
2	8,299778	8,335152	0,035373	0,42
3	8,523501	8,518588	0,004912	0,06
4	8,558027	8,52816	0,029868	0,35
5	9,426795	9,403758	0,023037	0,24
6	8,973625	9,023905	0,050279	0,56
7	8,961139	8,922355	0,038784	0,43
8	9,109453	9,0953	0,014153	0,16
9	10,42937	10,43846	0,009091	0,09
10	8,71939	8,717424	0,001966	0,02



Obr. 23: Vývojový diagram zobrazující navrženou metodu pro určení matice setrvačnosti (ES).

4.2 Stanovení polohy těžiště

Určení polohy těžiště bylo provedeno na základě měření na trojvláknovém závěsu (měřením tahových sil v jednotlivých vláknech). Nejprve byla zjištěna poloha těžiště v jedné rovině XY, následně se rám (popř. sestava=rám+agregát) otočil a byla zjištěna poloha těžiště v rovině kolmé na původní (YZ). Po provedení tohoto měření pro samotný rám a pak i sestavu se určí těžiště samotného agregátu.



Obr. 24: Schématické znázornění bodů pro upevnění vláken se siloměry na pomocném rámu.

Z rovnic momentové rovnováhy u měřené roviny XY můžeme vypočítat polohu těžiště v osách X a Y. Pro polohu těžiště ve směru osy X a Y platí

$$x_T = \frac{x_A \cdot m_A + x_B \cdot m_B + x_C \cdot m_C}{m_A + m_B + m_C}, \quad (4.4)$$

$$y_T = \frac{y_A \cdot m_A + y_B \cdot m_B + y_C \cdot m_C}{m_A + m_B + m_C}, \quad (4.5)$$

kde x_A je vzdálenost bodu A od počátku ve směru osy X, m_A je tíha změřená ve vlákne upevněném v bodě A, obdobně to platí i pro ostatní upevňovací body.

K měření polohy těžiště v rovině YZ můžeme tyto vztahy odvodit obdobně. Potom pro polohu těžiště ve směru os Y a Z platí

$$y_T = \frac{y_D \cdot m_D + y_E \cdot m_E + y_F \cdot m_F}{m_D + m_E + m_F}, \quad (4.6)$$

$$z_T = \frac{z_D \cdot m_D + z_E \cdot m_E + z_F \cdot m_F}{m_D + m_E + m_F}. \quad (4.7)$$

Výslednou hodnotu hmotnosti a polohy těžiště ve směru osy Y můžeme vypočítat jako aritmetický průměr ze dvou měření (dvě roviny).



Obr. 25: Ukázka uspořádání při měření polohy těžiště v rovině YZ pro soustavu (tzn. rám společně s motorem 1.2 40kW MPI).

Výše popsané měření, tzn. určení polohy těžiště od počátku ve směru všech tří os, provedeme pro samotný rám a i pro soustavu (rám+agregát). Potom z těchto naměřených a vypočtených hodnot můžeme vypočítat hmotnost a polohu těžiště samotného agregátu podle vztahů

$$x_{TAgr} = \frac{m_{Sestava} \cdot x_{TSestava} - m_{Ram} \cdot x_{TRam}}{m_{Agr}}, \quad (4.8)$$

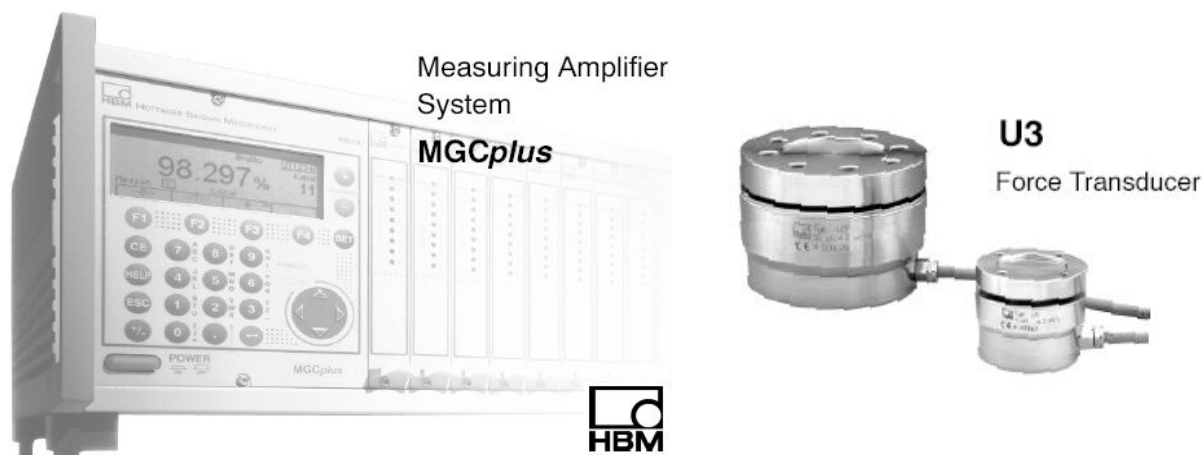
$$y_{TAgr} = \frac{m_{Sestava} \cdot y_{TSestava} - m_{Ram} \cdot y_{TRam}}{m_{Agr}}, \quad (4.9)$$

$$z_{TAgr} = \frac{m_{Sestava} \cdot z_{TSestava} - m_{Ram} \cdot z_{TRam}}{m_{Agr}}, \quad (4.10)$$

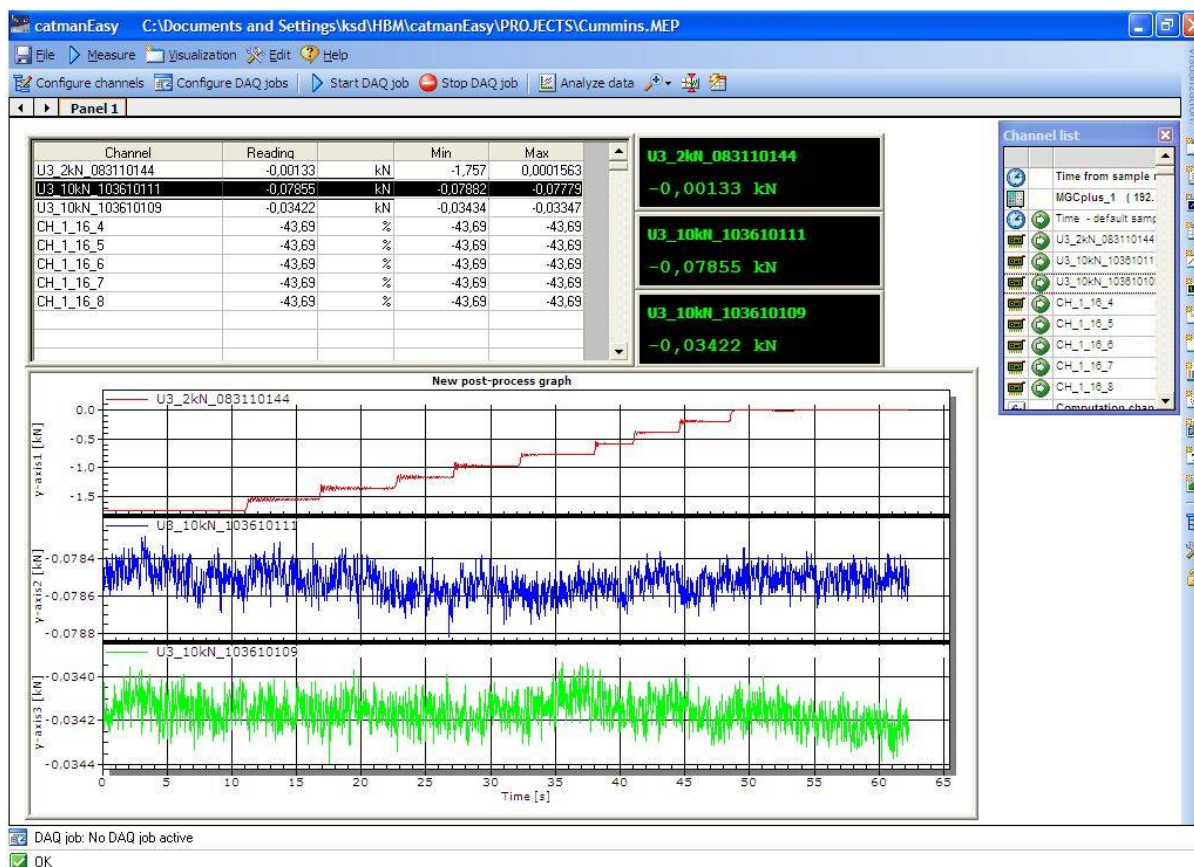
kde x_{TAgr} je poloha těžiště agregátu ve směru osy X, $x_{TSestava}$ je poloha těžiště sestavy (rám+agregát) ve směru osy X, x_{TRam} je poloha těžiště rámu ve směru osy X, $m_{Sestava}$ je hmotnost sestavy, m_{Ram} je hmotnost rámu, $m_{Agr} = m_{Sestava} - m_{Ram}$ je hmotnost agregátu. Obdobně to platí i pro osy Y a Z.

4.2.1 Měření tahových sil v závěsech

Velikost sil v závěsech byly měřeny pomocí snímačů U3 (popř. S9) a měřicí ústředny MGC plus od firmy HOTTINGER BALDWIN MESSTECHNIK GmbH. K zobrazení a vyhodnocení hodnot sil byl použit software catmanEasy (také od firmy HBM).

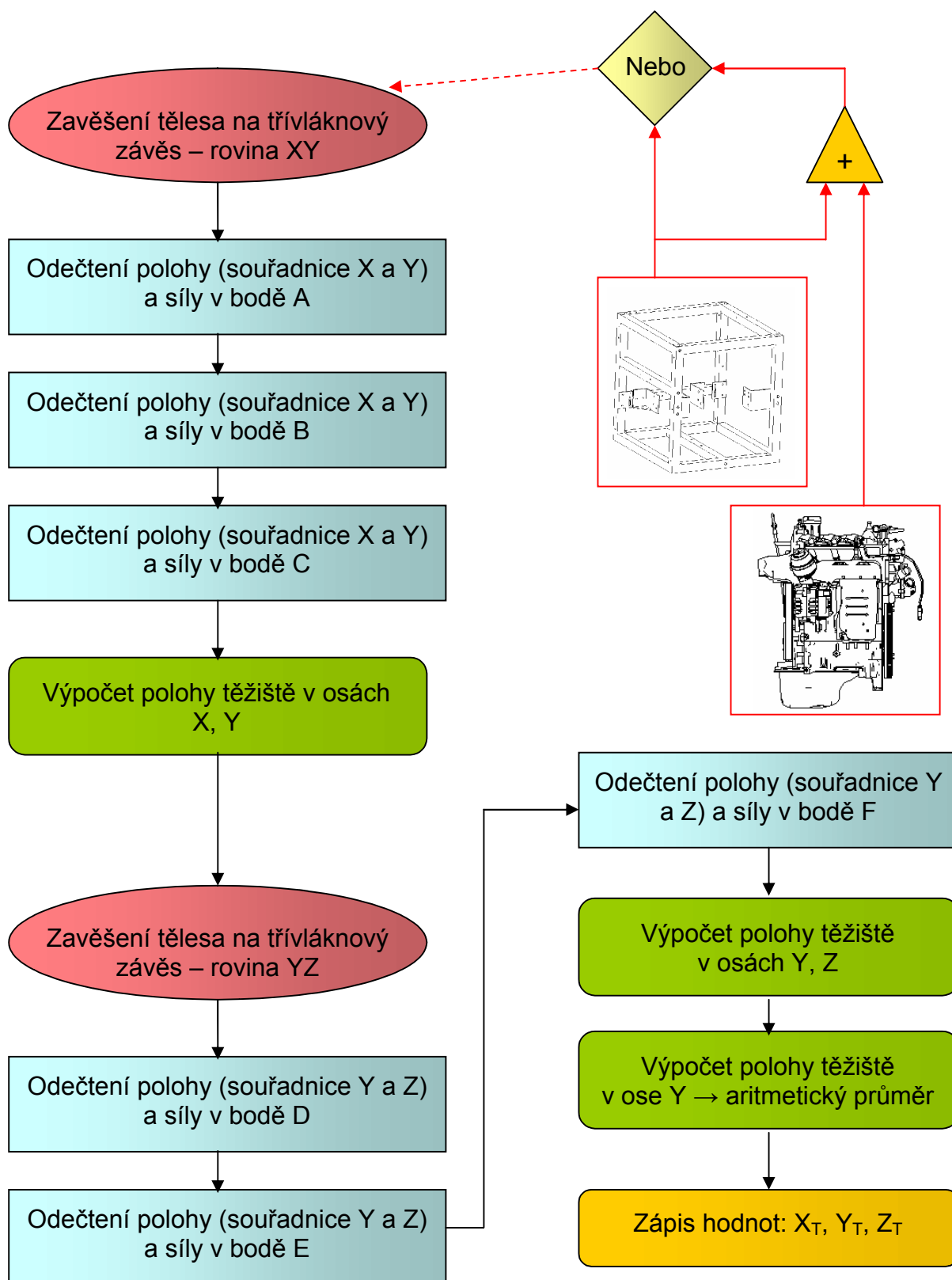


Obr. 26: Měřicí ústředna MGC plus a snímač síly U3 od firmy HOTTINGER BALDWIN MESSTECHNIK GmbH^[17].



Obr. 27: Snímek záznamu na obrazovce při použití měřícího softwaru catmanEasy od firmy HOTTINGER BALDWIN MESSTECHNIK GmbH - cejchování snímače.

Ověření přesnosti snímačů udávané výrobcem bylo provedeno pomocí kalibrovaného závaží z Českého metrologického institutu. Kalibrační protokoly jsou v příloze 1.



Obr. 28: Vývojový diagram zobrazující navržený postup určení polohy těžiště.

4.3 Určení polohy a délek hlavních os elipsoidu setrvačnosti agregátu

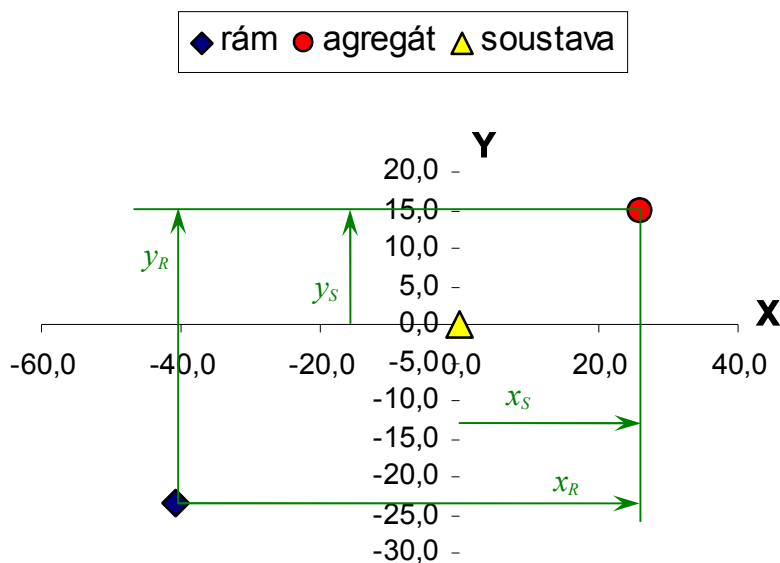
Poslední výpočetní operaci, kterou musíme provést k zjištění ZVES (tzn. matice setrvačnosti) samotného agregátu (motoru), je odečtení matice setrvačnosti pomocného rámu od matice setrvačnosti sestavy (rám+agregát). K tomuto výpočtu použijeme Steinerovu větu (viz kap. 2.2).

Osový moment setrvačnosti pro osu X vypočteme podle následujících vztahů.

Nejprve určíme moment setrvačnosti soustavy (rám+agregát) k těžišti agregátu

$J'_{XSoustava} = J_{XSoustava} + m_S \cdot (z_S^2 + y_S^2)$, kde $J_{XSoustava}$ je moment setrvačnosti soustavy k ose X určený k těžišti soustavy, m_S je hmotnost soustavy, z_S a y_S jsou vzdálenosti těžiště soustavy od těžiště samotného agregátu v příslušných osách.

Stejný postup aplikujeme i na samotný rám, tzn. $J'_{XRam} = J_{XRam} + m_R \cdot (z_R^2 + y_R^2)$ kde J'_{XRam} je moment setrvačnosti rámu k ose X určený k těžišti agregátu, J_{XRam} je moment setrvačnosti rámu k ose X určený k těžišti rámu, m_R je hmotnost rámu, z_R a y_R jsou vzdálenosti těžiště rámu od těžiště samotného agregátu v příslušných osách.



Obr. 29: Ukázka určování vzdáleností těžišť v osách X a Y potřebných k výpočtu matice setrvačnosti samotného agregátu.

Výsledný moment setrvačnosti samotného agregátu (motoru) se potom rovná

$$J_{XAgregat} = J'_{XSoustava} - J'_{XRam}.$$

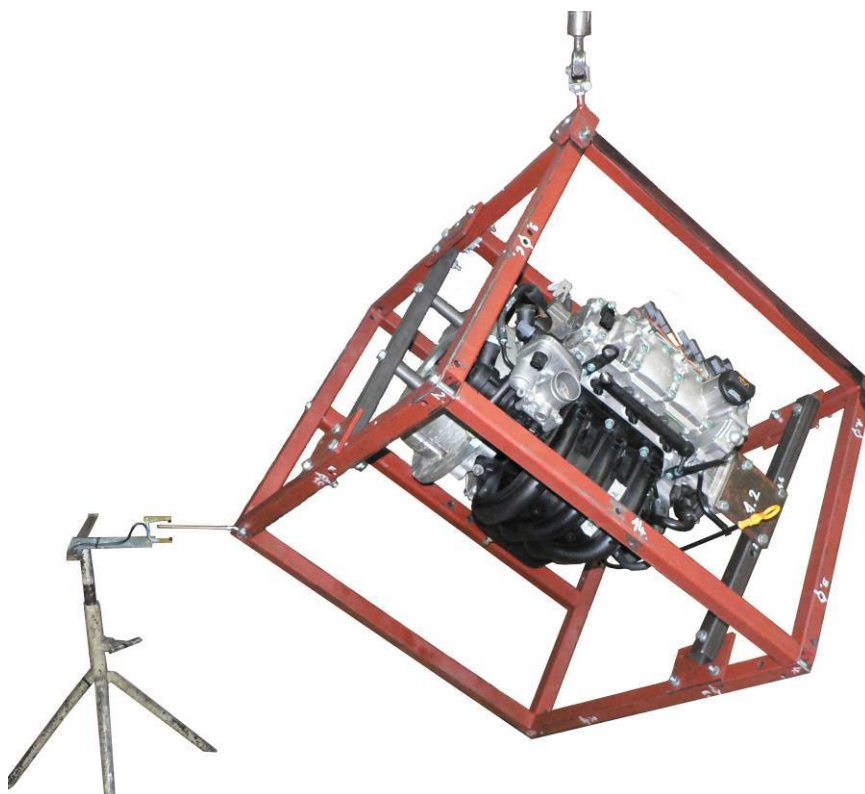
U výpočtu deviačního momentu XY samotného agregátu můžeme použít následující vzorce

$$D'_{XYsoustava} = D_{XYsoustava} - m_S \cdot x_S \cdot y_S,$$

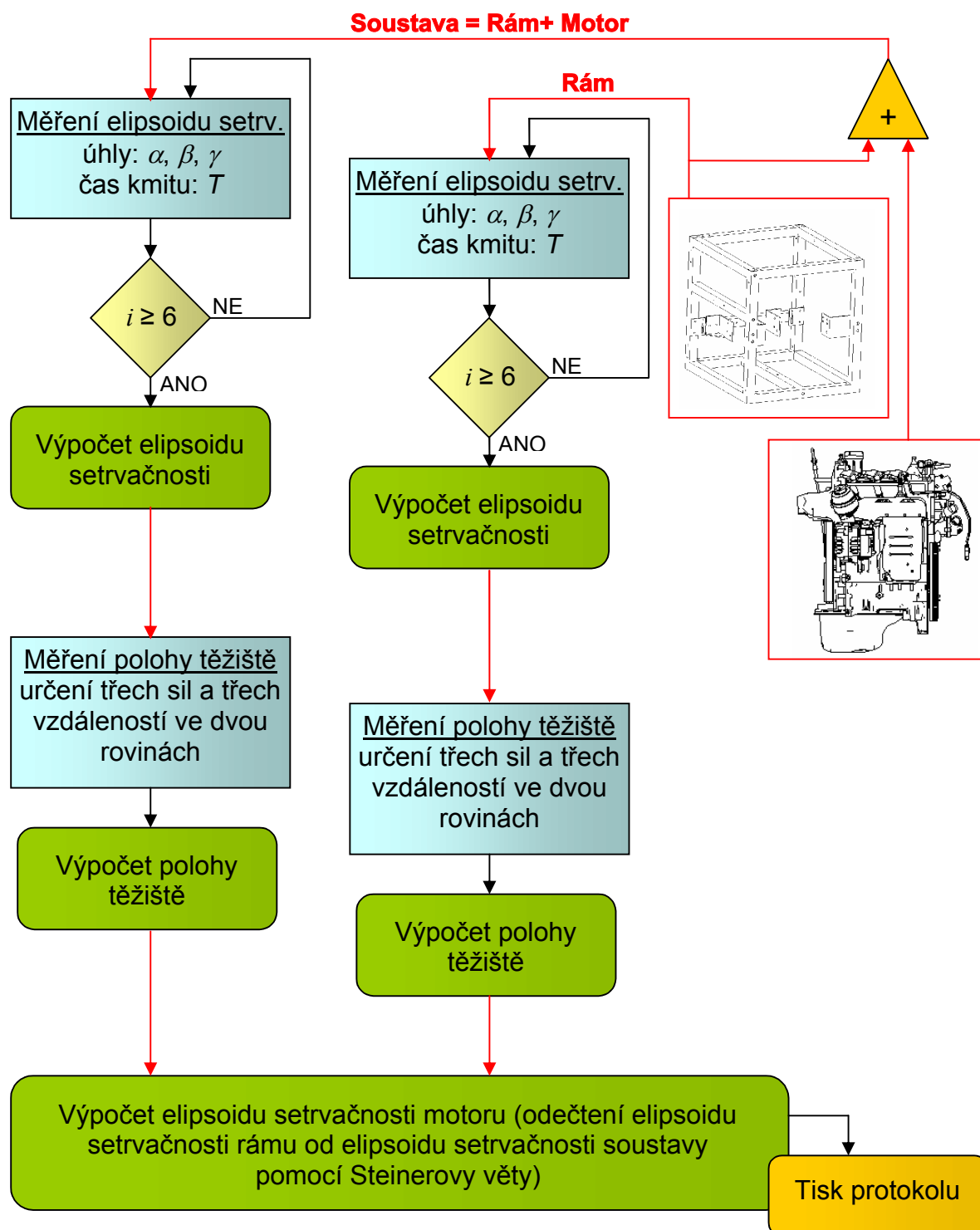
$$D'_{XYRam} = D_{XYRam} - m_R \cdot x_R \cdot y_R \quad \text{a}$$

$$D_{XYAgregat} = D'_{XYsoustava} - D'_{XYRam}.$$

Pro zbylé osové a deviační momenty setrvačnosti použijeme stejné vzorce, jen musíme modifikovat indexy cyklickou záměnou.

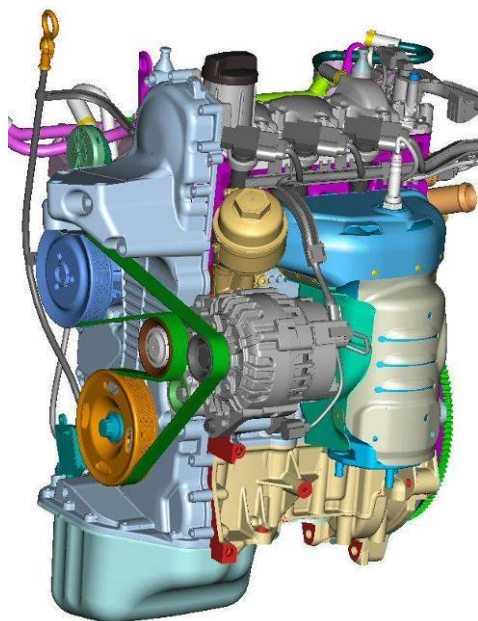


Obr. 30: Ukázka z měření momentu setrvačnosti motoru 1.2 40kW MPI.



Obr. 31: Vývojový diagram zobrazující kompletní postup pro stanovení elipsoidu setrvačnosti agregátu.

Na následujícím obrázku jsou zobrazeny výsledky měření samotného motoru 1.2 40kW MPI. V první části je uvedena hmotnost a poloha těžiště motoru, dále jsou hodnoty týkající se momentů setrvačnosti motoru.



Hmotnost motoru:

$$m = 80,7 \text{ kg}$$

Poloha těžiště motoru vzhledem k bodu MKW:

$$x_T = -19 \text{ mm}$$

$$y_T = 152 \text{ mm}$$

$$z_T = 99 \text{ mm}$$

Matice momentů setrvačnosti k těžišti motoru:

$$\begin{vmatrix} J_x & -D_{xy} & -D_{zx} \\ -D_{xy} & J_y & -D_{yz} \\ -D_{zx} & -D_{yz} & J_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2,67 & 0,11 & 0,02 \\ 0,11 & 2,32 & -0,10 \\ 0,02 & -0,10 & 1,66 \end{vmatrix} [\text{kg} \cdot \text{m}^2]$$

Hlavní momenty setrvačnosti motoru:

$$J_1 = 1,64 [\text{kg} \cdot \text{m}^2]$$

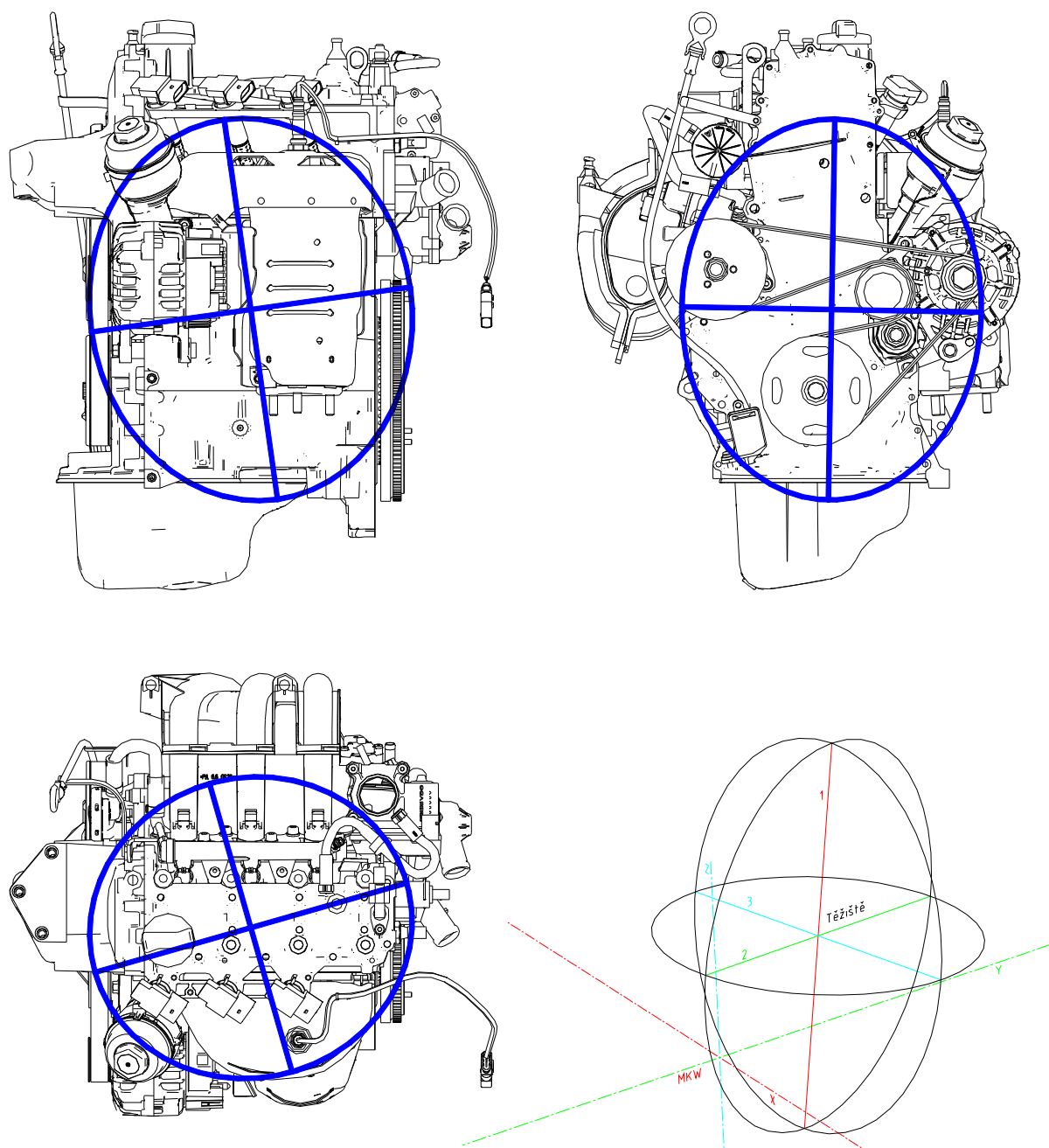
$$J_2 = 2,30 [\text{kg} \cdot \text{m}^2]$$

$$J_3 = 2,70 [\text{kg} \cdot \text{m}^2]$$

Matice směrových kosinů hlavních os setrvačnosti motoru:

$$\begin{vmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \alpha_2 & \cos \alpha_3 \\ \cos \beta_1 & \cos \beta_2 & \cos \beta_3 \\ \cos \gamma_1 & \cos \gamma_2 & \cos \gamma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,03406 & 0,26891 & 0,96256 \\ -0,15198 & -0,95053 & 0,27093 \\ -0,98780 & 0,15552 & -0,00850 \end{vmatrix}$$

Obr. 32: Naměřené hodnoty pro motor 1.2 40kW MPI.

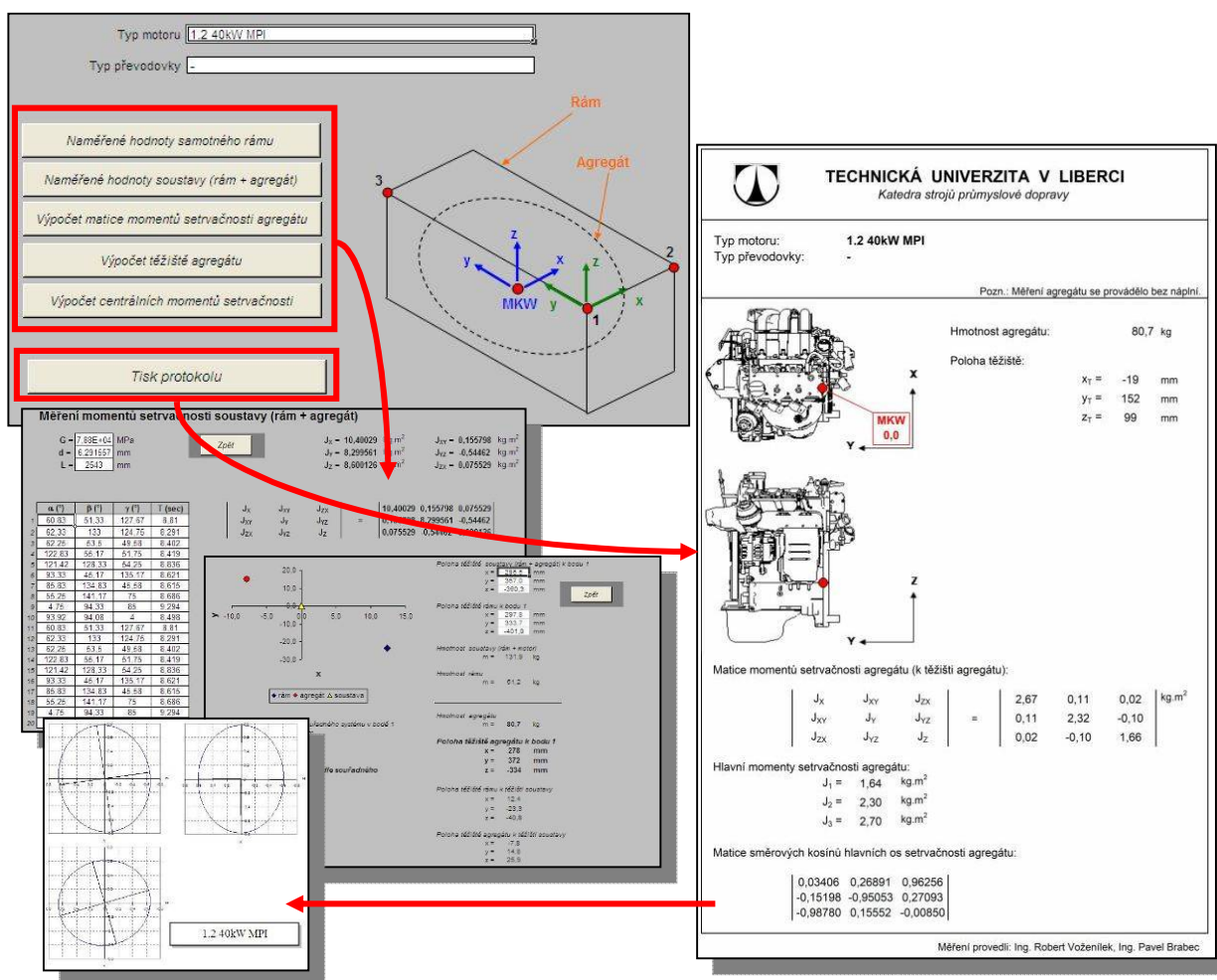


*Obr. 33: Řezy ES rovinami procházejícími těžištěm a umístění ES v prostoru
pro motor 1.2 40kW MPI.^[18]*

Protokoly z měření motoru pro osobní automobil 1.2 40 kW MPI jsou obsaženy v příloze 2 disertační práce.

4.4 Program pro zpracování naměřených dat

Z důvodu rychlého zpracování velkého množství naměřených dat byl vytvořen program pomocí softwaru Excel od společnosti Microsoft. Tento program zpracovává všechna naměřená data, z nich vypočte polohu těžiště a pomocí metody nejmenších čtverců aproximuje ZVES, a to jak pro rám tak i sestavu (rám+agregát). Následně z těchto dat dále určí hmotnost, polohu těžiště, matici setrvačnosti (tzn. ES), hlavní centrální momenty setrvačnosti a směry hlavních centrálních os ES u samotného agregátu (spalovací motoru). Celý postup výpočtu je schématicky znázorněn ve vývojových diagramech (viz obr. 23, 28 a 31). Výstupem tohoto programu je protokol z měření určený pro tisk, který obsahuje všechny zmíněné důležité informace o změřeném tělese.



Obr. 34: Ukázka z užití softwaru pro zpracování naměřených dat.

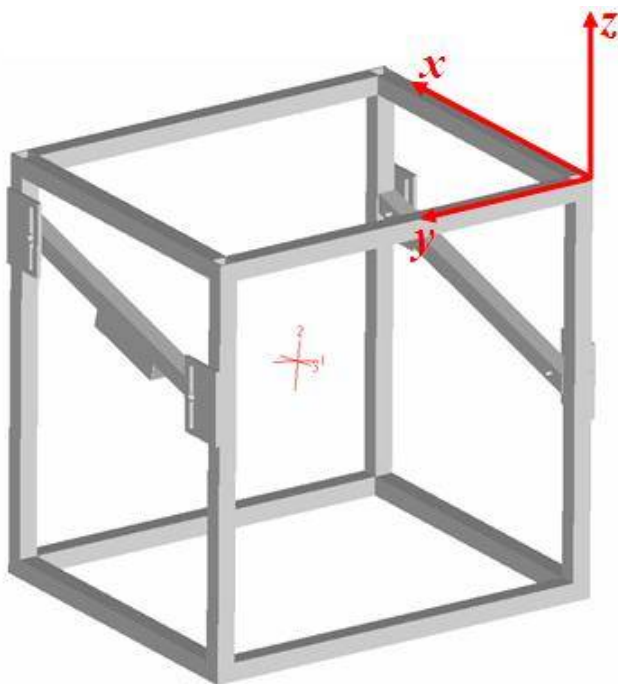
5 Přesnost měření

5.1 Verifikace vypočtených a naměřených hodnot pomocí rámu

Pro měření ZVES agregátu nebo samotného motoru byly vyrobeny dva pomocné rámy. Lišily se velikostí, kde první byl používán u agregátů (motorů) osobních vozidel a druhý větší rám byl použit k měření motoru nákladního vozidla. Pro první přiblížení přesnosti měření byly tyto rámy namodelovány pomocí 3D CAD softwaru, který umožňoval výpočet hmotnostních parametrů (hmotnost, poloha těžiště, matice setrvačnosti) a následně byly tyto veličiny zjištěny měřením rámu. Verifikace výsledků je uvedena v následujících kapitolách.

5.1.1 Rám pro agregáty osobních vozidel

Jednalo se o rám, jehož rozměry byly přibližně 650x780x775 mm, vyrobený z profilů 35x35xT3 mm. K vypočtení matice setrvačnosti (ZVES) je zapotřebí minimálně šest měření momentu setrvačnosti v určitém bodě, v našem případě bylo provedeno deset měření a ES byl následně vypočten pomocí metody nejmenších čtverců. Naměřené hodnoty jsou zobrazeny v následující tabulce.



Obr. 35: Model rámu pro uložení agregátu osobního vozidla v 3D CADu.

Číslo měření	Doba kyvu T (sec)	Vypočítaný moment setr. I_A (kg.m ²)
1	6,830	5,638
2	6,759	5,521
3	6,700	5,425
4	6,614	5,287
5	6,627	5,307
6	6,706	5,435
7	6,793	5,577
8	6,865	5,696
9	6,670	5,377
10	6,661	5,362

Potom matice setrvačnosti vyjde (v následujících případech je někdy použito označení v matici setrvačnosti jako používal software 3D CAD - ProEngineer):

$$\begin{matrix} I_X & I_{XY} & I_{XZ} \\ I_{YX} & I_Y & I_{YZ} \\ I_{ZX} & I_{ZY} & I_Z \end{matrix} = \begin{vmatrix} 6,35 & -0,03 & -0,15 \\ -0,03 & 4,53 & -0,15 \\ -0,15 & -0,15 & 5,74 \end{vmatrix} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Dále můžeme určit hlavní momenty setrvačnosti rámu a matici směrových kosínů hlavních os setrvačnosti rámu:

$$\begin{matrix} I_1 = 4,512 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \\ I_2 = 5,729 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \\ I_3 = 6,385 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \end{matrix} \quad \begin{vmatrix} 0,02413 & 0,22827 & 0,97330 \\ 0,99161 & -0,12913 & 0,00570 \\ 0,12698 & 0,96500 & -0,22947 \end{vmatrix}$$

Těžiště bylo určeno pomocí zavěšení rámu na tři body, v kterých byly umístěny snímače sil. Toto měření bylo provedeno v rovině XY a YZ.

$$\begin{matrix} m = 31,22 & \text{kg} \\ x_T = 326,8 & \text{mm} \\ y_T = 396,1 & \text{mm} \\ z_T = -355,2 & \text{mm} \end{matrix}$$



Zjednodušený rám byl nakreslen v 3D CAD softwaru a následně byl vygenerován soubor s hodnotami momentů setrvačnosti. U rámu nebyly namodelovány všechny detaily (tzn. všechny díry, spojovací materiál – šrouby a matice apod.).

Výsledky namodelovaného rámu z CADu:

MASS = 3.1218233e-02 TONNE

CENTER OF GRAVITY with respect to ACS1 coordinate frame:

X Y Z 3.2454206e+02 3.9416720e+02 -3.5926600e+02 MM

INERTIA with respect to ACS1 coordinate frame: (TONNE * MM²)

INERTIA TENSOR:

Ixx Ixy Ixz 1.5123353e+04 -3.9883440e+03 3.5585103e+03

Iyx Iyy Iyz -3.9883440e+03 1.2189317e+04 4.2586349e+03

Izx Izy Izz 3.5585103e+03 4.2586349e+03 1.3856961e+04

INERTIA at CENTER OF GRAVITY with respect to ACS1 coordinate frame: (TONNE * MM²)

INERTIA TENSOR:

Ixx Ixy Ixz 6.2436434e+03 5.2121333e+00 -8.1439783e+01

Iyx Iyy Iyz 5.2121333e+00 4.8717759e+03 -1.6220627e+02

Izx Izy Izz -8.1439783e+01 -1.6220627e+02 5.7185131e+03

PRINCIPAL MOMENTS OF INERTIA: (TONNE * MM²)

I1 I2 I3 4.8416989e+03 5.7356019e+03 6.2566316e+03

ROTATION MATRIX from ACS1 orientation to PRINCIPAL AXES:

0.00695 0.15747 0.98750

0.98318 -0.18133 0.02200

0.18253 0.97073 -0.15608

ROTATION ANGLES from ACS1 orientation to PRINCIPAL AXES (degrees):

angles about x y z -171.978 80.931 -87.474

RADII OF GYRATION with respect to PRINCIPAL AXES:

R1 R2 R3 3.9381724e+02 4.2863274e+02 4.4767839e+02 MM

Pro porovnání výsledků byl nejprve proveden přepočít vypočtených momentů setrvačnosti z CADu do jednotek soustavy SI (kg.m²):

$$\begin{matrix} I_x & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_y & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_z \end{matrix} = \begin{vmatrix} 6243,64 & 5,21 & -81,44 \\ 5,21 & 4871,78 & -162,21 \\ -81,44 & -162,21 & 5718,51 \end{vmatrix} t \cdot mm^2$$



$$\begin{matrix} I_X & I_{XY} & I_{XZ} \\ I_{YX} & I_Y & I_{YZ} \\ I_{ZX} & I_{ZY} & I_Z \end{matrix} = \begin{vmatrix} 6,24 & 0,01 & -0,08 \\ 0,01 & 4,87 & -0,16 \\ -0,08 & -0,16 & 5,72 \end{vmatrix} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_1 = 4,842 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_2 = 5,736 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_3 = 6,257 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Číslo měření	Změřený moment setr. I_A (kg.m ²)	Moment setr. vypočtený z elipsoidu, který byl určen pomocí metody nejmenších čtverců z naměřených hodnot I_B (kg.m ²)	$(I_A - I_B) / I_A \cdot 100$ (%)	Moment setr. vypočtený z elipsoidu, který byl určen CAD softwarem I_C (kg.m ²)	$(I_B - I_C) / I_B \cdot 100$ (%)
1	5,638	5,585	0,94	5,678	-1,67
2	5,521	5,551	-0,54	5,682	-2,36
3	5,425	5,469	-0,81	5,499	-0,55
4	5,287	5,330	-0,81	5,485	-2,91
5	5,307	5,268	0,73	5,415	-2,79
6	5,435	5,394	0,75	5,414	-0,37
7	5,577	5,547	0,54	5,664	-2,11
8	5,696	5,743	-0,83	5,813	-1,22
9	5,377	5,381	-0,07	5,574	-3,59
10	5,362	5,353	0,17	5,472	-2,22

Vyjádření rozdílů získaných výsledků v procentech:

$$\Delta = \frac{H_N - H_V}{H_N} \cdot 100 \text{ [%]}$$

H_N – hodnota naměřená

H_V – hodnota vypočtená pomocí 3D CADu

hlavní momenty setrvačnosti:

$$I_1 = -7,31 \text{ %}$$

$$I_2 = -0,12 \text{ %}$$

$$I_3 = 2,00 \text{ %}$$

poloha těžiště:

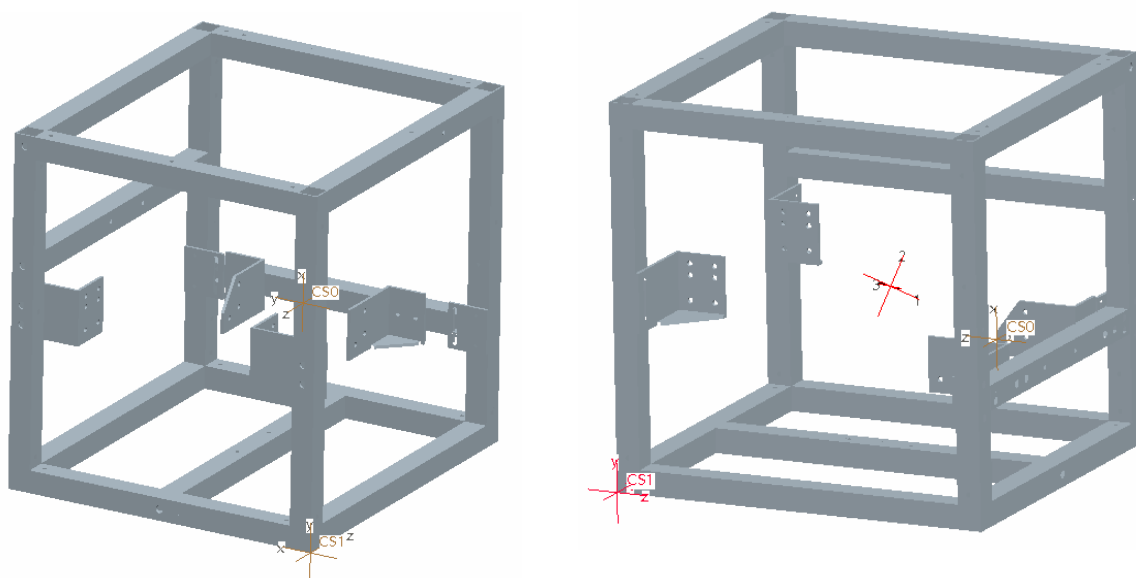
$$x_T = 0,70 \text{ %}$$

$$y_T = 0,48 \text{ %}$$

$$z_T = 1,15 \text{ %}$$

5.1.2 Rám pro motor nákladního vozidla

Jednalo se o robustnější rám, jehož rozměry byly přibližně 860x940x945 mm. K výrobě byly použity profily 60x60xT5 mm. Pro vypočtení matice setrvačnosti (ZVES) bylo opět provedeno deset měření a ES byl následně vypočten pomocí metody nejmenších čtverců. Naměřené hodnoty jsou zobrazeny v následující tabulce.



Obr. 36: Model rozměrnějšího rámu pro uložení motoru nákladního vozidla v 3D CADu.

Číslo měření	Doba kyvu T (sec)	Vypočítaný moment setr. I_A (kg.m ²)
1	8,082	28,211
2	8,162	28,772
3	8,043	27,939
4	7,972	27,448
5	8,051	27,995
6	8,222	29,197
7	8,133	28,568
8	7,781	26,149
9	8,094	28,295
10	8,284	29,639

Potom matice setrvačnosti vyjde:

$$\begin{matrix} I_X & I_{XY} & I_{XZ} \\ I_{YX} & I_Y & I_{YZ} \\ I_{ZX} & I_{ZY} & I_Z \end{matrix} = \begin{vmatrix} 29,652 & -0,618 & -0,271 \\ -0,618 & 28,500 & 0,462 \\ -0,271 & 0,462 & 26,179 \end{vmatrix} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Dále můžeme určit hlavní momenty setrvačnosti rámu a matici směrových kosínů hlavních os setrvačnosti rámu:

$$\begin{matrix} I_1 = 26,084 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \\ I_2 = 28,276 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \\ I_3 = 29,971 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \end{matrix} \quad \begin{vmatrix} 0,04401 & 0,42871 & 0,90237 \\ -0,17670 & 0,89235 & -0,41533 \\ 0,98328 & 0,14117 & -0,11502 \end{vmatrix}$$

Těžiště bylo určeno pomocí zavěšení rámu na tři body, v kterých byly umístěny snímače sil. Toto měření bylo provedeno v rovině XY a YZ.

$$\begin{matrix} m = 115,6 & \text{kg} \\ x_T = 460,5 & \text{mm} \\ y_T = 426,9 & \text{mm} \\ z_T = 502,2 & \text{mm} \end{matrix}$$

Zjednodušený rám byl nakreslen v 3D CAD softwaru a následně byl vygenerován soubor s hodnotami momentů setrvačnosti. U rámu nebyly namodelovány všechny detaily (tzn. všechny díry, spojovací materiál – šrouby a matice apod.).

Výsledky pro model rámu užitím CADu:

MASS = 1.1560165e-01 TONNE

CENTER OF GRAVITY with respect to ACS1 coordinate frame:

X Y Z 4.5427088e+02 4.3172685e+02 4.9503025e+02 MM

INERTIA with respect to ACS1 coordinate frame: (TONNE * MM^2)

INERTIA TENSOR:

Ixx Ixy Ixz 7.9964214e+04 -2.3088922e+04 -2.6001418e+04

Iyx Iyy Iyz -2.3088922e+04 8.1045086e+04 -2.4016967e+04

Izx Izy Izz -2.6001418e+04 -2.4016967e+04 7.2216215e+04

INERTIA at CENTER OF GRAVITY with respect to ACS1 coordinate frame: (TONNE * MM^2)

INERTIA TENSOR:



$I_{xx} \ I_{xy} \ I_{xz}$ 3.0088687e+04 -4.1701846e+02 -5.1699134e+00
 $I_{yx} \ I_{yy} \ I_{yz}$ -4.1701846e+02 2.8860536e+04 6.8917007e+02
 $I_{zx} \ I_{zy} \ I_{zz}$ -5.1699134e+00 6.8917007e+02 2.6813654e+04

PRINCIPAL MOMENTS OF INERTIA: (TONNE * MM^2)

$I_1 \ I_2 \ I_3$ 2.6599259e+04 2.8932960e+04 3.0230659e+04

ROTATION MATRIX from ACS1 orientation to PRINCIPAL AXES:

-0.03409 0.32581 -0.94482
 -0.29711 0.89933 0.32084
 0.95423 0.29165 0.06614

ROTATION ANGLES from ACS1 orientation to PRINCIPAL AXES (degrees):

angles about x y z -78.352 -70.878 -95.974

RADII OF GYRATION with respect to PRINCIPAL AXES:

$R_1 \ R_2 \ R_3$ 4.7968126e+02 5.0028146e+02 5.1137770e+02 MM

Pro porovnání výsledků byl opět proveden přepočít vypočtených momentů setrvačnosti z CADu do jednotek soustavy SI ($\text{kg} \cdot \text{m}^2$):

$$\begin{matrix} I_X & I_{XY} & I_{XZ} \\ I_{YX} & I_Y & I_{YZ} \\ I_{ZX} & I_{ZY} & I_Z \end{matrix} = \begin{vmatrix} 30088,69 & -417,02 & -5,17 \\ -417,02 & 28860,54 & 689,17 \\ -5,17 & 689,17 & 26813,65 \end{vmatrix} t \cdot mm^2$$

$$\begin{matrix} I_X & I_{XY} & I_{XZ} \\ I_{YX} & I_Y & I_{YZ} \\ I_{ZX} & I_{ZY} & I_Z \end{matrix} = \begin{vmatrix} 30,09 & -0,42 & -0,01 \\ -0,42 & 28,86 & 0,69 \\ -0,01 & 0,69 & 26,81 \end{vmatrix} kg \cdot m^2$$

$$I_1 = 26,599 \text{ kg} \cdot m^2$$

$$I_2 = 28,933 \text{ kg} \cdot m^2$$

$$I_3 = 30,231 \text{ kg} \cdot m^2$$

Číslo měření	Změřený moment setr. I_A ($\text{kg} \cdot \text{m}^2$)	Moment setr. vypočtený z elipsoidu, který byl určen pomocí metody nejmenších čtverců z naměřených hodnot I_B ($\text{kg} \cdot \text{m}^2$)	$(I_A - I_B) / I_A \cdot 100$ (%)	Moment setr. vypočtený z elipsoidu, který byl určen CAD softwarem I_3 ($\text{kg} \cdot \text{m}^2$)	$(I_B - I_C) / I_B \cdot 100$ (%)
1	28,211	28,23694	-0,09	29,20009	-3,41
2	28,772	28,63297	0,48	28,99196	-1,25
3	27,939	27,93891	0,00	28,30426	-1,31
4	27,448	27,43007	0,07	27,71125	-1,03

5	27,995	27,89073	0,37	28,24014	-1,25
6	29,197	29,18329	0,05	29,70078	-1,77
7	28,568	28,5655	0,01	28,97367	-1,43
8	26,149	26,22402	-0,29	26,71733	-1,88
9	28,295	28,32643	-0,11	28,60304	-0,98
10	29,639	29,78295	-0,49	29,98537	-0,68

Procentuální vyjádření rozdílů získaných výsledků:

$$\Delta = \frac{H_N - H_V}{H_N} \cdot 100 \quad [\%]$$

H_N – hodnota naměřená

H_V – hodnota vypočtená pomocí 3D CADu

hlavní momenty setrvačnosti:

poloha těžiště:

$$I_1 = -1,97 \quad \%$$

$$x_T = 1,35 \quad \%$$

$$I_2 = -2,32 \quad \%$$

$$y_T = -1,12 \quad \%$$

$$I_3 = -0,87 \quad \%$$

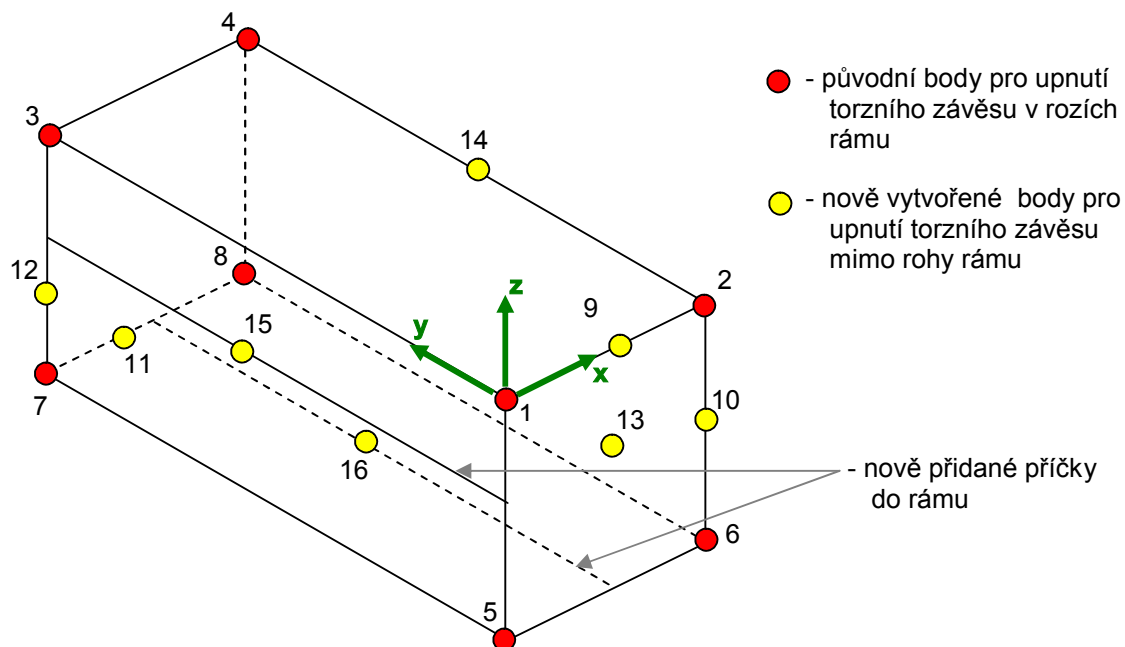
$$z_T = 1,43 \quad \%$$

O konstrukcích rámu můžeme říci, že je asymetrická. Asymetrie je však velmi malá a z tohoto důvodu se deviační momenty blíží nule. U hlavních momentů setrvačnosti byla shoda velmi dobrá, největší odchylka činila asi 7 %, průměr však byl 2,43 %. Modelované rámy v 3D CADu byly vytvořeny s výše popsanými zjednodušeními. Proto dochází i k otočení znaménka deviačních momentů v osách X, Y u „menšího“ rámu (ovšem ve srovnání s hlavními momenty setrvačnosti se jedná o dva řády nižší hodnoty) a k rozdílu v poloze těžiště.

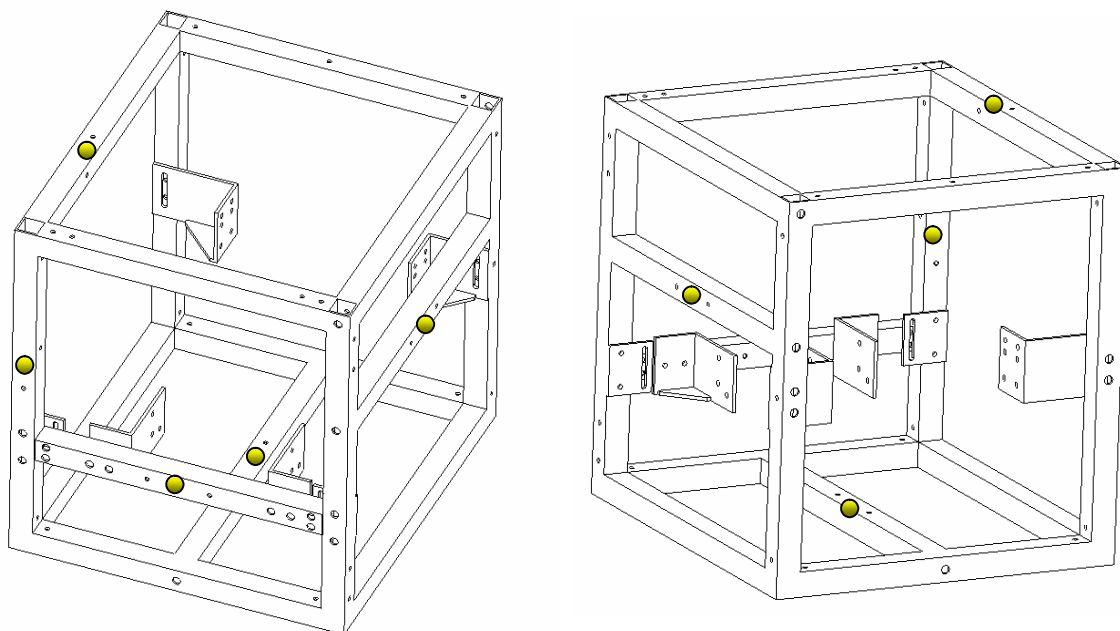
5.2 Konstrukční úpravy pro větší přesnost měření

Při měření ZVES prvního agregátu (což byl agregát pro osobní vozidlo – motor 1.9 96 kW TDI s převodovkou MQ 350 + rám pro agregáty osob. vozidel) bylo zjištěno, že by bylo vhodné přidat ještě další měřící body. Proto byly dále ještě zvoleny a vyrobeny další dva přípravky k uchycení kardanova kloubu s torzním

drátem. Dále byly na rám ještě přidány další příčky. Tyto nové varianty se upínaly mimo rohy rámu, schématicky je to zobrazeno na následujících obrázcích.

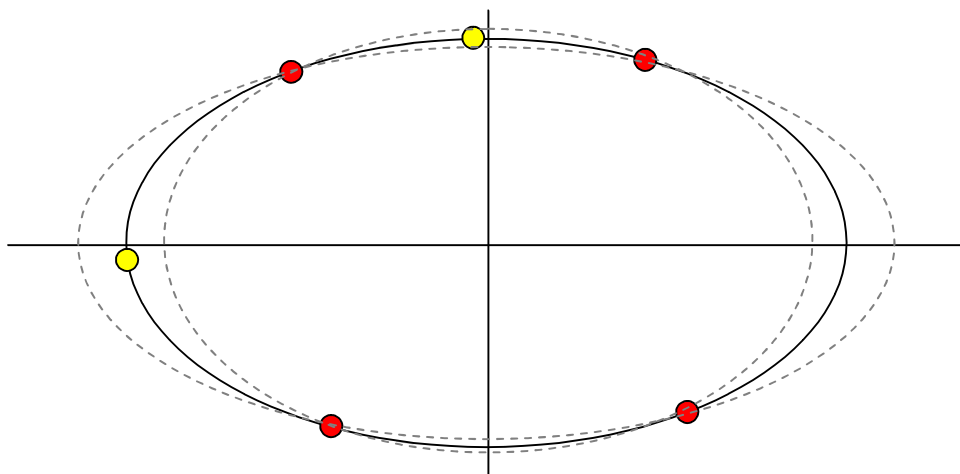


Obr. 37: Schématické znázornění nově vytvořených bodů pro upnutí torzního závěsu.

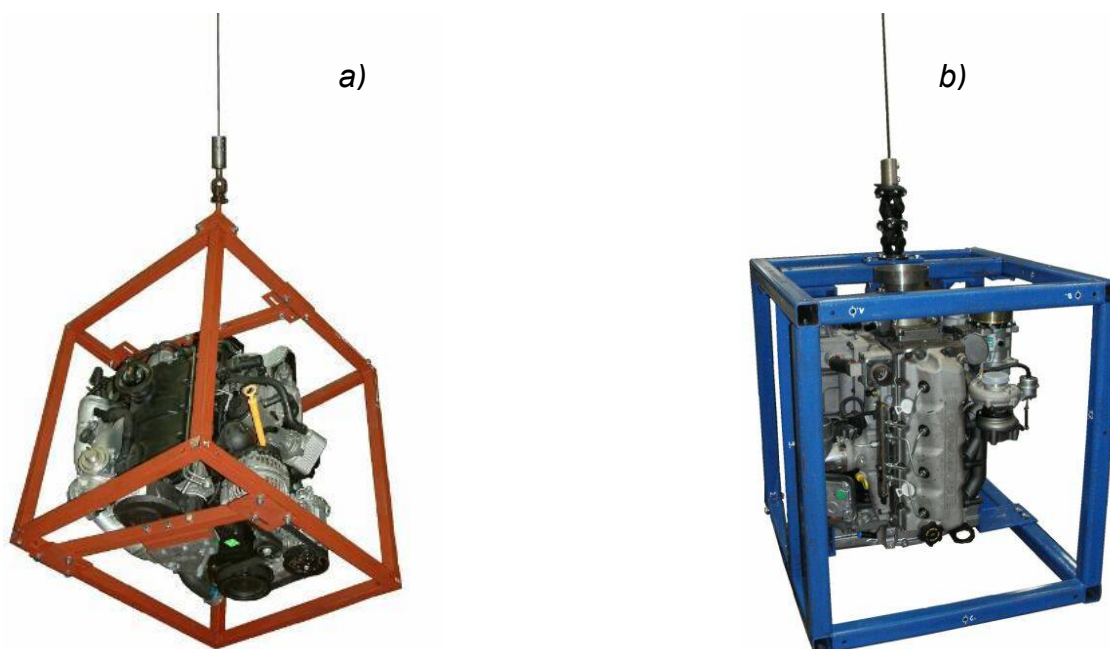


Obr. 38: Ukázka upevňovacích bodů mimo rohy u „většího“ rámu (dalších pět bodů, dva na zákl. rámu a tři na přidaných příčkách).

Ukázalo se, že tyto nově vytvořené upínací body mají značný upřesňující vliv na výsledky výpočtu naměřeného ES pomocí metody nejmenších čtverců. Samotné upínací body v rozích rámu nestačí z důvodu podobných poloh na elipsoidu. Nově vytvořené upínací body podstatně zpřesnily výpočet, kdy dochází k proložení elipsoidu naměřenými body, protože tyto nové body leží blízko koncových bodů poloos elipsoidu (nejlépe to vysvětluje následující obrázek).



Obr. 39: Znáznornění upřesňujícího vlivu doplňkových upínacích bodů (ukázáno na rovinném případě elipsy).



Obr. 40: Ukázka z měření doby jednoho kmitu potřebné pro výpočet momentu setrvačnosti: a) rohový bod rámu (agregát 1.9 96 kW TDI+MQ 350), b) bod v blízkosti vrcholu elipsoidu (motor 3.8 L).

5.3 Ověřování měření pomocí jednoduchého tělesa upnutého v rámu

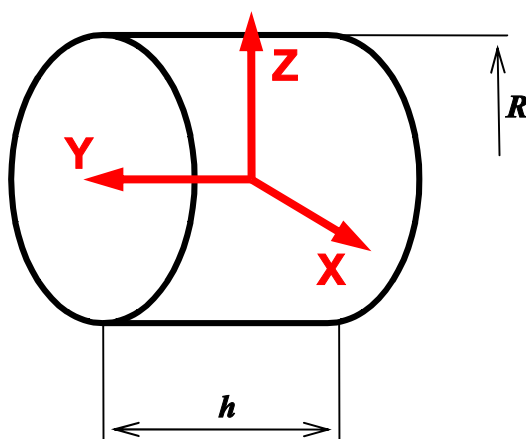
K ověření (verifikaci) metody měření byl zvolen následující postup. Nejprve bylo vybráno geometricky jednoduché těleso, které se podrobilo úplnému postupu měření jako samotný agregát – tzn. nejprve byla změřena sestava rám+těleso a později samostatný rám. Jednoduchý tvar tělesa byl volen kvůli možnosti prostého výpočtu matice momentu setrvačnosti tělesa, která byla dále porovnána s maticí naměřenou. S ohledem na dostupné polotovary v naší laboratoři bylo vybráno uspořádání dvou polotovarů o rozměrech $\varnothing 100$ a $\varnothing 130$. Poloha polotovarů byla volena tak, aby jeden deviační moment nebyl nulový. Specifikaci uspořádání zobrazuje následující obrázek.



Obr. 41: Fotografie zvoleného uspořádání polotovarů pro verifikaci měření .

5.3.1 Vypočtení matice setrvačnosti zvoleného tělesa pomocí základních vztahů

Nejprve si odvodíme vztahy pro výpočet osových momentů setrvačnosti jednoduchého válce.



Obr. 42: Popis souřadného systému u zvoleného polotovaru (válce).

Moment setrvačnosti k ose y můžeme vypočítat podle vztahu (2.2)

$$I_y = \int_m r^2 \cdot dm = \int_0^R \rho \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h \cdot dr \cdot r^2 = \rho \cdot 2 \cdot \pi \cdot h \cdot \int_0^R r^3 dr = \rho \cdot 2 \cdot \pi \cdot h \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \pi \cdot h \cdot R^4 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot m \cdot R^2 \quad (\text{při použití vzorce } m = \rho \cdot V = \rho \cdot \pi \cdot R^2 \cdot h).$$

Hledaný moment setrvačnosti k ose x můžeme vypočítat podle vztahu (2.3),

tzn. $I_x = \int_m (y^2 + z^2) \cdot dm$. Jeho přímý výpočet je nevýhodný (jde o trojný integrál),

proto použijeme souvislost osového momentu setrvačnosti s momenty setrvačnosti

k rovinám. Podle vztahu (2.9) platí $I_x = I_{xy} + I_{zx}$, kde známe $I_{xy} = \frac{1}{2} \cdot I_y = \frac{1}{4} \cdot m \cdot R^2$

z důvodu $I_y = I_{xy} + I_{zy}$, $I_{xy} = I_{zy}$. Pro výpočet rovinného momentu setrvačnosti

použijeme vztah (2.7) $I_{zx} = \int_m y^2 \cdot dm = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho \cdot \pi \cdot R^2 \cdot dy \cdot y^2 = \rho \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \frac{h^3}{12} = \frac{1}{12} m \cdot h^2$.

Osový moment setrvačnosti k ose x se tedy rovná $I_x = \frac{1}{4} \cdot m \cdot R^2 + \frac{1}{12} \cdot m \cdot h^2$,

dále z osové symetrie známe osový moment setrvačnosti k ose z $I_z = I_x$.

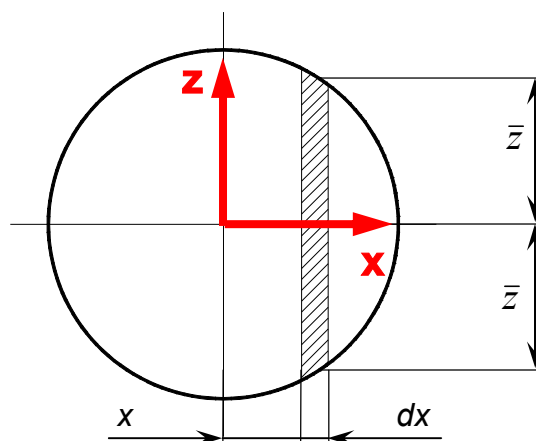
Deviační moment setrvačnosti k osám xz je nulový, protože osa x je hlavní centrální osou setrvačnosti válce a zbývající dvě osy ležící v rovině kolmé k ní, jsou centrálními osami setrvačnosti.

Přesvědčme se výpočtem za pomoci vztahů (2.17) až (2.19)

$$D_{xz} = \iiint_V \rho \cdot x \cdot z \cdot dx \cdot dy \cdot dz = \rho \cdot \int_{-r}^r x \cdot dx \cdot$$

$$\cdot \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dy \cdot \int_{-\bar{z}(x)}^{\bar{z}(x)} z \cdot dz = 0, \text{ právě pro integrál}$$

$$\int_{-r}^r x \cdot dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-r}^r = \frac{r^2}{2} - \frac{(-r)^2}{2} = 0,$$

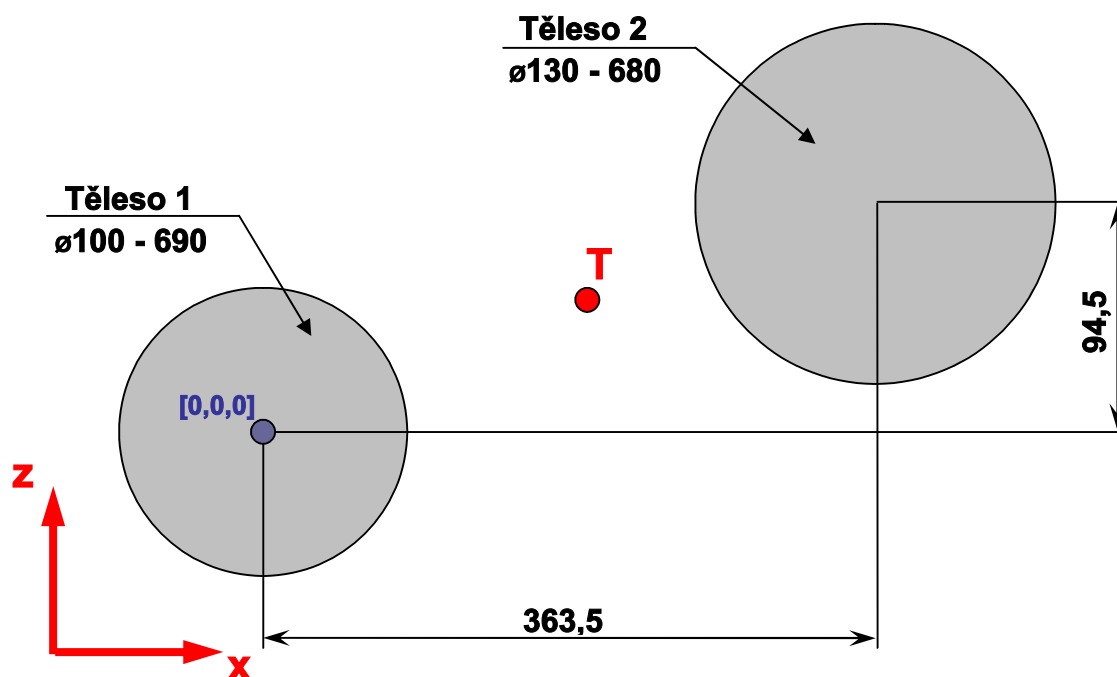


obdobně i pro zbývající deviační momenty setrvačnosti

$$D_{xy} = \iiint_V \rho \cdot x \cdot y \cdot dx \cdot dy \cdot dz = \rho \cdot \int_{-r}^r x \cdot dx \cdot \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y \cdot dy \cdot \int_{-\bar{z}(x)}^{\bar{z}(x)} dz = 0,$$

$$D_{yz} = \iiint_V \rho \cdot y \cdot z \cdot dx \cdot dy \cdot dz = \rho \cdot \int_{-r}^r dx \cdot \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y \cdot dy \cdot \int_{-\bar{z}(x)}^{\bar{z}(x)} z \cdot dz = 0, \quad \text{protože také platí}$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y \cdot dy = \left[\frac{y^2}{2} \right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{\left(\frac{h}{2}\right)^2}{2} - \frac{\left(-\frac{h}{2}\right)^2}{2} = 0.$$



Obr. 43: Vzájemná poloha těles polotovarů pro verifikaci měření.

Výpočet momentů setrvačnosti jednotlivých těles (válců) k jejich těžišti:

$$I_{y1} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \pi \cdot h \cdot R^4 = \frac{1}{2} \cdot 7800 \cdot \pi \cdot 0,69 \cdot 0,050^4 = 0,05284 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_{x1} = I_{z1} = \frac{1}{4} \cdot \rho \cdot \pi \cdot h \cdot R^4 + \frac{1}{12} \cdot \rho \cdot \pi \cdot R^2 \cdot h^3 = \frac{1}{4} \cdot 7800 \cdot \pi \cdot 0,69 \cdot 0,050^4 + \frac{1}{12} \cdot 7800 \cdot \pi \cdot 0,050^2 \cdot 0,69^3 = 1,70349 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_{y2} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \pi \cdot h \cdot R^4 = \frac{1}{2} \cdot 7800 \cdot \pi \cdot 0,68 \cdot 0,065^4 = 0,14872 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_{x2} = I_{z2} = \frac{1}{4} \cdot \rho \cdot \pi \cdot h \cdot R^4 + \frac{1}{12} \cdot \rho \cdot \pi \cdot R^2 \cdot h^3 = \frac{1}{4} \cdot 7800 \cdot \pi \cdot 0,68 \cdot 0,065^4 + \frac{1}{12} \cdot 7800 \cdot \pi \cdot 0,065^2 \cdot 0,68^3 = 2,78715 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Výpočet těžiště soustavy:

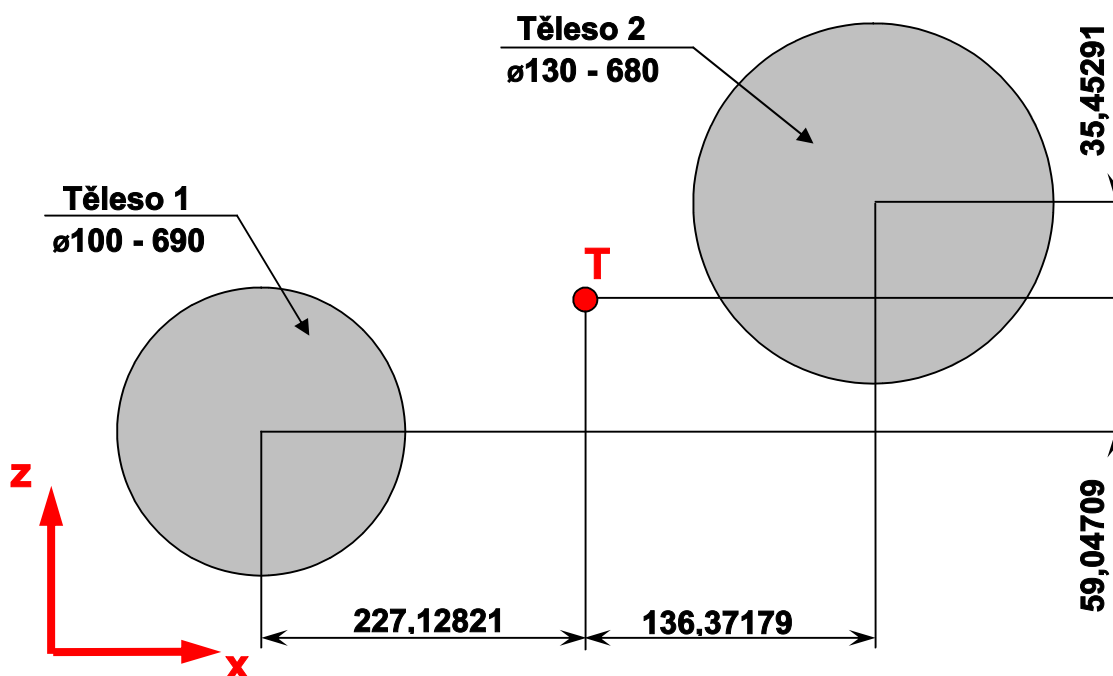
$$m_1 = \rho \cdot V_1 = \rho \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot h = 7800 \cdot \frac{\pi \cdot 0,1^2}{4} \cdot 0,69 = 42,27013 \text{ kg}$$

$$m_2 = \rho \cdot V_2 = \rho \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot h = 7800 \cdot \frac{\pi \cdot 0,13^2}{4} \cdot 0,68 = 70,40121 \text{ kg}$$

$$x_T = \frac{m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2}{m_1 + m_2} = \frac{42,27013 \cdot 0 + 70,40123 \cdot 363,5}{42,27013 + 70,40123} = 227,12821 \text{ mm}$$

$$z_T = \frac{m_1 \cdot z_1 + m_2 \cdot z_2}{m_1 + m_2} = \frac{42,27013 \cdot 0 + 70,40123 \cdot 94,5}{42,27013 + 70,40123} = 59,04709 \text{ mm}$$

Těžiště soustavy v ose y leží ve shodné rovině jako těžiště těles, protože soustava je souměrná podle roviny xz.



Obr. 44: Poloha těžiště soustavy polotovarů.

Výpočet momentů setrvačnosti těles k těžišti soustavy (využití Steinerovy věty – viz kap. 2.2):

$$\begin{aligned} I'_{y1} &= I_{y1} + m_1 \cdot (x_1^2 + z_1^2) = 0,05284 + 42,27013 \cdot \left((-227,12808 \cdot 10^{-3})^2 + (-59,04709 \cdot 10^{-3})^2 \right) = \\ &= 2,38081 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \end{aligned}$$

$$I'_{x1} = I_{x1} + m_1 \cdot (y_1^2 + z_1^2) = 1,70349 + 42,27013 \cdot \left((0)^2 + (-59,04709 \cdot 10^{-3})^2 \right) = 1,85086 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I'_{z1} = I_{z1} + m_1 \cdot (x_1^2 + y_1^2) = 1,70349 + 42,27013 \cdot ((-227,12808 \cdot 10^{-3})^2 + (0)^2) = 3,88408 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$D'_{xy1} = D_{xy1} - m_1 \cdot x_1 \cdot y_1 = 0 - 42,27013 \cdot (-227,12808 \cdot 10^{-3}) \cdot 0 = 0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$D'_{xz1} = D_{xz1} - m_1 \cdot x_1 \cdot z_1 = 0 - 42,27013 \cdot (-227,12808 \cdot 10^{-3}) \cdot (-59,04709 \cdot 10^{-3}) = -0,56690 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$D'_{yz1} = D_{yz1} - m_1 \cdot y_1 \cdot z_1 = 0 - 42,27013 \cdot 0 \cdot (-59,04709 \cdot 10^{-3}) = 0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$\begin{aligned} I'_{y2} &= I_{y2} + m_2 \cdot (x_2^2 + z_2^2) = 0,14872 + 70,40121 \cdot ((136,37179 \cdot 10^{-3})^2 + (35,45291 \cdot 10^{-3})^2) = \\ &= 1,54648 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \end{aligned}$$

$$I'_{x2} = I_{x2} + m_2 \cdot (y_2^2 + z_2^2) = 2,78715 + 70,40121 \cdot ((0)^2 + (35,45291 \cdot 10^{-3})^2) = 2,87564 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I'_{z2} = I_{z2} + m_2 \cdot (x_2^2 + y_2^2) = 2,78715 + 70,40121 \cdot ((136,37179 \cdot 10^{-3})^2 + (0)^2) = 4,09642 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$D'_{xy2} = D_{xy2} - m_2 \cdot x_2 \cdot y_2 = 0 - 70,40121 \cdot (136,37179 \cdot 10^{-3}) \cdot 0 = 0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$D'_{xz2} = D_{xz2} - m_2 \cdot x_2 \cdot z_2 = 0 - 70,40121 \cdot (136,37179 \cdot 10^{-3}) \cdot (35,45291 \cdot 10^{-3}) = -0,34037 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$D'_{yz2} = D_{yz2} - m_2 \cdot y_2 \cdot z_2 = 0 - 70,40121 \cdot 0 \cdot (35,45291 \cdot 10^{-3}) = 0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Výpočet momentů setrvačnosti celé soustavy (sečtení obou těles):

$$I'_y = I'_{y1} + I'_{y2} = 3,92729 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$D'_{xy} = D'_{xy1} + D'_{xy2} = 0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I'_x = I'_{x1} + I'_{x2} = 4,72651 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$D'_{xz} = D'_{xz1} + D'_{xz2} = -0,90727 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I'_z = I'_{z1} + I'_{z2} = 7,98051 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$D'_{yz} = D'_{yz1} + D'_{yz2} = 0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

5.3.2 Vypočtení matice setrvačnosti zvoleného tělesa pomocí CAD programu

Z důvodu kontroly byla soustava těles (polotovarů) nakreslena v 3D CAD softwaru a následně byl vygenerován soubor s hodnotami momentů setrvačnosti.

Výsledky namodelované sestavy z CADu:

VOLUME = 1.4445043e+07 MM³
DENSITY = 7.8000000e-09
TONNE / MM³
MASS = 1.1267133e-01 TONNE

CENTER OF GRAVITY with
respect to CS0 coordinate frame:

X Y Z 2.2712820e+02 3.4000000e+02 5.9047222e+01 MM

INERTIA at CENTER OF GRAVITY with respect to CS0 coordinate frame: (TONNE * MM²)

INERTIA TENSOR:

lxx lxy lxz 4.7265019e+03 0.0000000e+00 -9.0726676e+02

lyx lyy lyz 0.0000000e+00 3.9272934e+03 0.0000000e+00

lzx lzy lzz -9.0726676e+02 0.0000000e+00 7.9805125e+03

PRINCIPAL MOMENTS OF INERTIA: (TONNE * MM²)

I1 I2 I3 3.9272934e+03 4.4906386e+03 8.2163758e+03

ROTATION MATRIX from CS0 orientation to PRINCIPAL AXES:

0.00000 -0.96783 -0.25161

1.00000 0.00000 0.00000

0.00000 -0.25161 0.96783

ROTATION ANGLES from CS0 orientation to PRINCIPAL AXES (degrees):

angles about x y z 0.000 -14.573 90.000

RADII OF GYRATION with respect to PRINCIPAL AXES:

R1 R2 R3 1.8669812e+02 1.9963990e+02 2.7004331e+02 MM

Pro porovnání výsledků byl nejprve proveden přepoččet vypočtených momentů setrvačnosti z CADu do jednotek soustavy SI (kg.m²):

$$\begin{matrix} I_X & I_{XY} & I_{XZ} \\ I_{YX} & I_Y & I_{YZ} \\ I_{ZX} & I_{ZY} & I_Z \end{matrix} = \begin{vmatrix} 4726,5019 & 0 & -907,26676 \\ 0 & 3927,2934 & 0 \\ -907,26676 & 0 & 7980,5125 \end{vmatrix} t \cdot mm^2$$

$$\begin{matrix} I_X & I_{XY} & I_{XZ} \\ I_{YX} & I_Y & I_{YZ} \\ I_{ZX} & I_{ZY} & I_Z \end{matrix} = \begin{vmatrix} 4,7265 & 0 & -0,9073 \\ 0 & 3,9273 & 0 \\ -0,9073 & 0 & 7,9805 \end{vmatrix} kg \cdot m^2$$

V obou případech vyšly matice setrvačnosti soustavy těles shodně. K porovnání s naměřenou maticí setrvačnosti byl pomocí CADu vygenerován ještě jeden soubor pro přesnější geometrii soustavy těles (včetně úchytů sloužících k připevnění polotovarů k rámu).

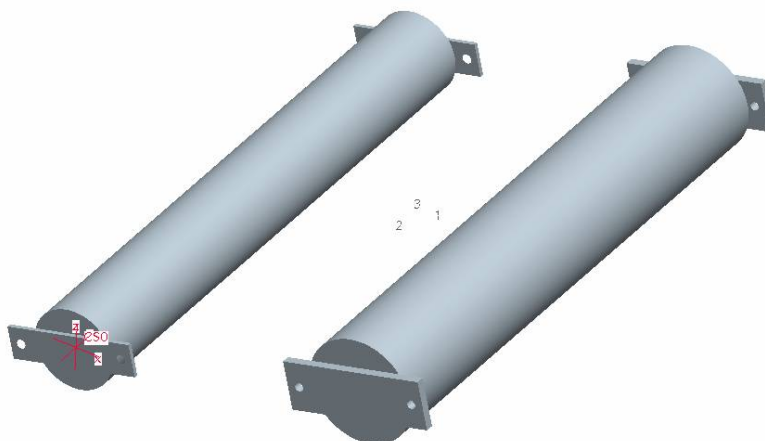
Výsledky namodelované sestavy z CADu:

VOLUME = 1.4716941e+07 MM^3
DENSITY = 7.8336600e-09 TONNE / MM^3

MASS = 1.1528751e-01 TONNE

CENTER OF GRAVITY with respect to CS0 coordinate frame:

X Y Z 2.2811388e+02
3.4000000e+02 5.9303363e+01 MM



INERTIA at CENTER OF GRAVITY with respect to CS0 coordinate frame: (TONNE * MM^2)

INERTIA TENSOR:

Ixx Ixy Ixz 5.0058979e+03 0.0000000e+00 -9.2676575e+02

Iyx Iyy Iyz 0.0000000e+00 4.0093714e+03 0.0000000e+00

Izx Izy Izz -9.2676575e+02 0.0000000e+00 8.3298323e+03

PRINCIPAL MOMENTS OF INERTIA: (TONNE * MM^2)

I1 I2 I3 4.0093714e+03 4.7649648e+03 8.5707655e+03

ROTATION MATRIX from CS0 orientation to PRINCIPAL AXES:

0.00000 -0.96783 -0.25161
1.00000 0.00000 0.00000
0.00000 -0.25161 0.96783

ROTATION ANGLES from CS0 orientation to PRINCIPAL AXES (degrees):

angles about x y z 0.000 -14.573 90.000

RADII OF GYRATION with respect to PRINCIPAL AXES:

R1 R2 R3 1.8648633e+02 2.0330062e+02 2.7265827e+02 MM

$$\begin{matrix} I_{XX} & I_{XY} & I_{XZ} \\ I_{YX} & I_{YY} & I_{YZ} \\ I_{ZX} & I_{ZY} & I_{ZZ} \end{matrix} = \begin{vmatrix} 5,0059 & 0 & -0,9268 \\ 0 & 4,0094 & 0 \\ -0,9268 & 0 & 8,3298 \end{vmatrix} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Tuto CAD programem vypočtenou matici setrvačnosti budeme dále porovnávat s maticí setrvačnosti určenou z naměřených hodnot.

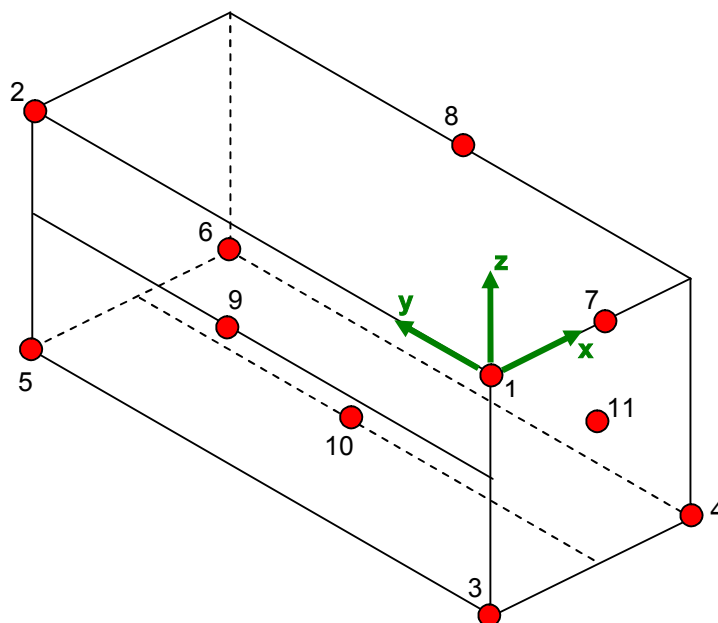
5.3.3 Stanovení matice setrvačnosti zvoleného tělesa experimentem

K vypočtení matice setrvačnosti (ZVES) soustavy těles (polotovaru) byla použita stejná metodika měření jako u agregátů, tzn. bylo provedeno jedenáct měření v různých osách jak pro sestavu rám+polotovary, tak pro samotný rám. Následně byl vypočten ES pomocí metody nejmenších čtverců u obou měření. Dále byla změřena popsáním způsobem poloha těžiště jak pro sestavu rám+polotovary, tak pro samotný rám. Naměřené hodnoty jsou zobrazeny v následujících tabulkách.

Nejprve si zobrazíme naměřené hodnoty pro sestavu rám+polotovary:

Číslo měření	Doba kyvu T (sec)	Změřený moment setr. I_A (kg.m ²) <i>pozn.: vypočtený pomocí naměřené doby kyvu</i>	Moment setr. vypočtený z elipsoidu, který byl určen pomocí metody nejmenších čtverců z naměřených hodnot I_B (kg.m ²)	$(I_A - I_B) / I_A \cdot 100$ (%)
1	10,265	12,72244	12,72168	0,01
2	10,28	12,75965	12,7205	0,31
3	9,962	11,98245	11,9251	0,48
4	10,623	13,62533	13,65592	0,22
5	9,968	11,99689	11,99923	0,02
6	10,623	13,62533	13,64923	0,18
7	9,879	11,78362	11,71413	0,59
8	10,959	14,50088	14,54236	0,29
9	9,993	12,05714	12,09344	0,30

10	10,969	14,52736	14,49757	0,21
11	9,203	10,22613	10,34574	1,16



Obr. 45: Schématické znázornění měřených bodů na rámu pro upnutí torzního závěsu (viz předchozí tabulka).

Potom matice setrvačnosti pro sestavu rám+polotovary vyjde:

$$\begin{matrix} I_X & I_{XY} & I_{XZ} \\ I_{YX} & I_Y & I_{YZ} \\ I_{ZX} & I_{ZY} & I_Z \end{matrix} = \begin{vmatrix} 12,51153 & -0,07778 & -1,23276 \\ -0,07778 & 10,25301 & -0,03274 \\ -1,23276 & -0,03274 & 14,67097 \end{vmatrix} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Dále si zobrazíme naměřené hodnoty pro samotný rám:

Číslo měření	Doba kyvu T (sec)	Změřený moment setr. I_A (kg.m ²) <i>pozn.: vypočtený pomocí naměřené doby kyvu</i>	Moment setr. vypočtený z elipsoidu, který byl určen pomocí metody nejmenších čtverců z naměřených hodnot I_B (kg.m ²)	$(I_A - I_B) / I_A \cdot 100$ (%)
1	7,134	6,150595	6,180575	0,49
2	7,138	6,157494	6,13051	0,44
3	7,115	6,117877	6,120969	0,05
4	7,175	6,221495	6,277783	0,90
5	7,086	6,068107	6,083358	0,25
6	7,152	6,181672	6,20934	0,45

7	6,969	5,869375	5,867104	0,04
8	7,351	6,53046	6,493188	0,57
9	7,537	6,865117	6,852763	0,18
10	7,194	6,254489	6,247623	0,11
11	6,787	5,566813	5,50094	1,20

Potom matice setrvačnosti u sestavy rám+polotovary vyjde:

$$\begin{matrix} I_X & I_{XY} & I_{XZ} \\ I_{YX} & I_Y & I_{YZ} \\ I_{ZX} & I_{ZY} & I_Z \end{matrix} = \begin{vmatrix} 6,852404 & 0,025032 & -0,02995 \\ 0,025032 & 5,422728 & 0,015271 \\ -0,02995 & 0,015271 & 6,236387 \end{vmatrix} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Dále bylo změřeno těžiště pomocí zavěšení rámu na tři body, v kterých byly umístěny snímače sil, všechny výsledky měření byly dosazeny do připraveného programu na výpočet matice momentů setrvačnosti samotných měřených polotovarů.

Potom matice setrvačnosti polotovarů pomocí programu vyjde:

$$\begin{matrix} I_X & I_{XY} & I_{XZ} \\ I_{YX} & I_Y & I_{YZ} \\ I_{ZX} & I_{ZY} & I_Z \end{matrix} = \begin{vmatrix} 5,02252 & -0,0895 & -0,9033 \\ -0,0895 & 4,05375 & -0,0198 \\ -0,9033 & -0,0198 & 8,29216 \end{vmatrix} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

5.3.4 Porovnání matice momentů setrvačnosti zvoleného tělesa určené experimentem a pomocí CAD programu

Pokud použijeme stejné vyhodnocení výsledů jako u verifikace měření pomocí rámu, můžeme psát:

$$\Delta = \frac{H_N - H_V}{H_V} \cdot 100 \quad [\%]$$

H_N – hodnota naměřená

H_V – hodnota vypočtená pomocí 3D CADu

Potom nám vyjdou následující relativní chyby měření:

$$\begin{array}{ccc|cc} I_X & I_{XY} & I_{XZ} & 0,3321 & -2,5298 \\ I_{YX} & I_Y & I_{YZ} & & 1,1068 \\ I_{ZX} & I_{ZY} & I_Z & -2,5298 & -0,4523 \end{array} \%$$

U hlavních momentů setrvačnosti byla shoda velmi dobrá, největší odchylka byla ve směru osy y a byla menší než **1,5 %**.

O pozici polotovarů můžeme říci, že je asymetrická. Asymetrie je však volena tak, že dva deviační momenty jsou nulové. U těchto dvou nulových deviačních momentů nejsme schopni určit relativní chybu, můžeme stanovit jen chybu absolutní (tzn. $-0,0895 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ a $-0,0198 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$). Poslední deviační moment byl změřen přibližně s relativní chybou **2,5 %**. Tento výsledek je velmi dobrý s ohledem na srovnání velikosti deviačních momentů (s hlavními momenty setrvačnosti se jedná o nižší řády hodnot).

5.4 Experimentální určení polohy hlavní osy setrvačnosti u polotovaru umístěného „napříč“ v rámu

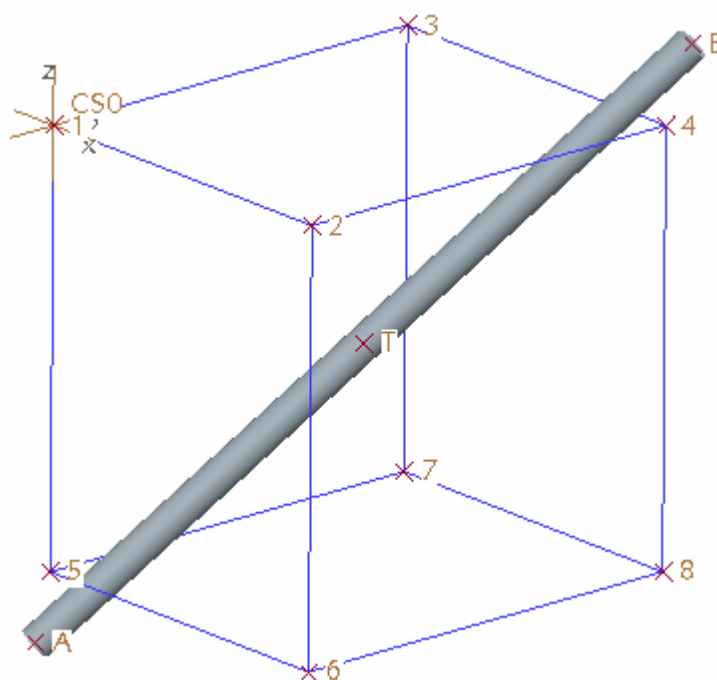
Dalším měřením pro ověření (verifikaci) metody bylo zvoleno umístění polotovaru o rozměrech $\varnothing 60\text{-}1500 \text{ mm}$ do polohy tělesové úhlopříčky pomocného rámu. Postup měření byl shodný s verifikací popsanou v předchozí kapitole (tzn. i s měřením agregátu). Matice momentů setrvačnosti zvoleného polotovaru byla nejprve vypočtena pomocí CAD programu, dále pak byla určena pomocí měření. Z těchto matic momentů setrvačnosti byly dále určeny a porovnány prostorové úhly hlavní osy setrvačnosti od souřadného systému. Specifikaci uspořádání měření zobrazuje následující obrázek.



Obr. 46: Fotografie a CAD model s napříč uloženým polotovarem.

K porovnání s naměřenou maticí setrvačnosti byl pomocí CADu vygenerován soubor hmotnostních vlastností měřeného polotovaru (v měřeném souřadném systému).

Výsledky namodelované sestavy z CADu:



VOLUME = 4.2411501e+06 MM³

MASS = 3.2621811e-02 TONNE

INERTIA at CENTER OF GRAVITY with respect to CS0 coordinate frame: (TONNE * MM²)

INERTIA TENSOR:

Ixx Ixy Ixz 4.8726218e+03 -1.5474621e+03 -1.9194115e+03

Iyx Iyy Iyz -1.5474621e+03 4.2102196e+03 -2.3736905e+03

Izx Izy Izz -1.9194115e+03 -2.3736905e+03 3.1796974e+03

PRINCIPAL MOMENTS OF INERTIA: (TONNE * MM²)

I1 I2 I3 1.4679815e+01 6.1239292e+03 6.1239298e+03

ROTATION MATRIX from CS0 orientation to PRINCIPAL AXES:

0.45257	-0.30566	-0.83771
0.55969	0.82871	0.00000
0.69421	-0.46885	0.54612

↓
Určení polohy hlavní osy setrvačnosti (shodná s osou polotovaru):

$$\begin{aligned}\cos(\alpha_1) &= 0.45257 \Rightarrow \alpha_1 = 63^\circ 5' \\ \cos(\beta_1) &= 0.55969 \Rightarrow \beta_1 = 55^\circ 58' \\ \cos(\gamma_1) &= 0.69421 \Rightarrow \gamma_1 = 46^\circ 2'\end{aligned}$$

$$\begin{matrix} I_X & I_{XY} & I_{XZ} \\ I_{YX} & I_Y & I_{YZ} \\ I_{ZX} & I_{ZY} & I_Z \end{matrix} = \begin{vmatrix} 4,8726 & -1,5475 & -1,9194 \\ -1,5475 & 4,2102 & -2,3737 \\ -1,9194 & -2,3737 & 3,1797 \end{vmatrix} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Tyto CAD programem vypočtené hodnoty matice setrvačnosti a prostorových úhlů hlavní osy setrvačnosti budeme dále porovnávat s hodnotami určenými měřením.

K vypočtení matice setrvačnosti (ES) měřeného polotovaru byla použita stejná metodika měření jako u agregátů, tzn. bylo provedeno jedenáct měření v různých osách jak pro sestavu rám+polotovaru, tak pro samotný rám. Následně byl vypočten ES pomocí metody nejmenších čtverců u obou měření. Dále byla změřena popsáním způsobem poloha těžiště jak pro sestavu rám+polotovaru, tak pro samotný rám.

V následující tabulce jsou zobrazeny naměřené hodnoty pro sestavu rám+polotovár:

Číslo měření	Doba kyvu T (sec)	Změřený moment setr. I_A (kg.m ²) <i>pozn.: vypočtený pomocí naměřené doby kyvu</i>	Moment setr. vypočtený z elipsoidu, který byl určen pomocí metody nejmenších čtverců z naměřených hodnot I_B (kg.m ²)	$(I_A - I_B) / I_A \cdot 100$ (%)
1	10,035	12,15871	12,21996	0,50
2	9,299	10,44059	10,43092	0,09
3	7,154	6,17946	6,19548	0,26
4	9,437	10,75277	10,77591	0,21
5	9,827	11,65989	11,64386	0,14
6	10,022	12,12723	12,08660	0,34
7	9,932	11,91039	11,96271	0,44
8	8,943	9,65649	9,62648	0,31
9	9,932	11,91039	11,90821	0,02
10	10,114	12,35090	12,35476	0,03
11	9,449	10,78014	10,72365	0,53

Konfigurace rámu byla použita shodná jako u předchozího případu (viz kap. 5.3), proto samotný rám už nebyl měřen znovu a byly použity již naměřené hodnoty. Dále byla změřena poloha těžiště a všechny výsledky měření byly dosazeny do připraveného programu na výpočet matice momentů setrvačnosti měřeného objektu.

Potom matice setrvačnosti měřeného polotovaru pomocí programu vyjde:

$$\begin{matrix} I_x & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_y & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_z \end{matrix} = \begin{vmatrix} 4,8607 & -1,5571 & -1,9066 \\ -1,5571 & 4,1032 & -2,4076 \\ -1,9066 & -2,4076 & 3,2150 \end{vmatrix} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Podle postupu popsaném v kap. 2.5 můžeme určit polohy (směry) hlavních os setrvačnosti. Z naměřené matice setrvačnosti polotovaru nám vyjde poloha hlavní osy setrvačnosti ve směru podélné osy polotovaru:

$$\alpha_1 = 63^\circ 16' \quad \beta_1 = 55^\circ 14' \quad \gamma_1 = 46^\circ 33'.$$

Pokud použijeme stejné vyhodnocení výsledů jako u předchozích případů, můžeme psát:

$$\Delta = \frac{H_N - H_V}{H_V} \cdot 100 \quad [\%]$$

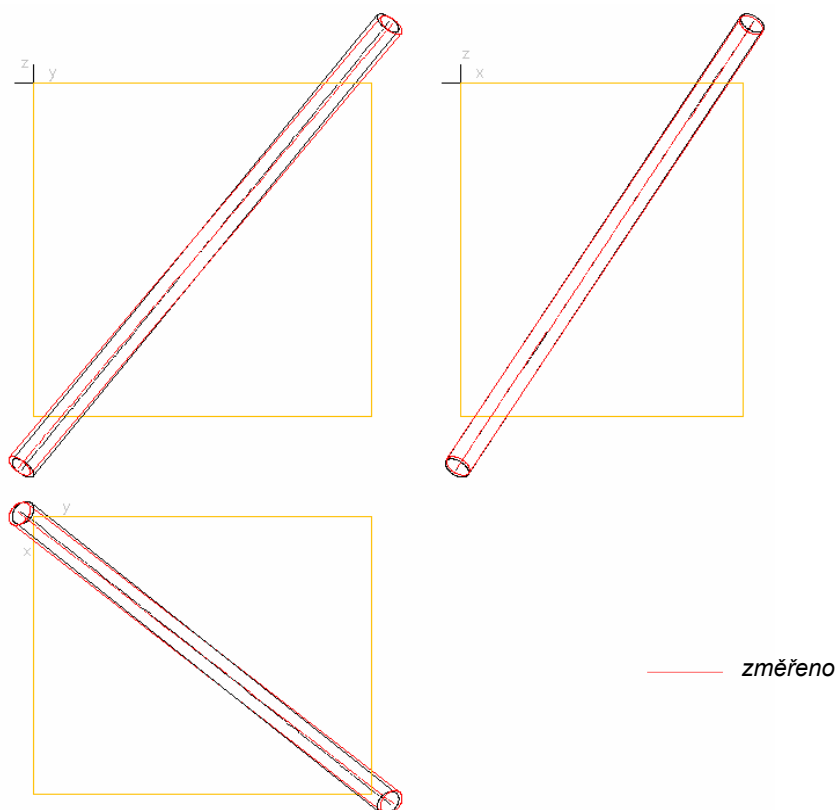
H_N – hodnota naměřená

H_V – hodnota vypočtená pomocí 3D CADu

Potom nám vyjdou následující relativní chyby měření:

I_X	I_{XY}	I_{XZ}	$-0,2455$	$0,6231$	$-0,6673$	%	α_1	$0,2923$	%
I_{YX}	I_Y	I_{YZ}	$0,6231$	$-2,5425$	$1,4292$		β_1	$-1,2953$	
I_{ZX}	I_{ZY}	I_Z	$-0,6673$	$1,4292$	$1,1100$		γ_1	$1,1467$	

U porovnání vypočtených a naměřených hodnot momentů setrvačnosti vyšla průměrná chyba **1,10 %**, maximální odchylka byla ve směru osy y a to **2,54 %**. Absolutní chyba u směru hlavní osy setrvačnosti (shodné s osou polotovaru) byla menší než **1°** u všech tří prostorových úhlů.



Obr. 47: Porovnání výsledů měření v pravoúhlém promítání.

5.5 Stanovení přesnosti měření

K vypočtení relativní chyby momentu setrvačnosti byly použity naměřené hodnoty pro motor s označením 1.2 40 kW MPI.

Jelikož se jedná o složité měření, po kterém ještě následují matematické operace, byla k určení chyby měření momentu setrvačnosti zvolena zjednodušená metoda. Potom relativní chyba momentu setrvačnosti se rovná odmocnině kvadrátu součtu relativních chyb všech veličin důležitých k určení momentu setrvačnosti, tzn.

$$\delta I = \sqrt{\sum_i^n (\delta_i)^2} \quad (\%).$$
 Takto určíme relativní chybu pro měření soustavy (tzn. motor + rám) a následně stejnou metodou určíme relativní chybu momentu setrvačnosti samotného motoru.

Relativní chyba je definována $\delta = \frac{\text{presnost mereni}}{\text{absolutni hodnota}}$; např. délku torzního drátu

určíme s přesností ± 1 mm, pak relativní chyba měření délky torzního drátu je

$$\delta L = \frac{\Delta L}{L} = \frac{2}{2543} \cdot 100 = 0,07865\%.$$
 Výsledná nejistota měření momentu setrvačnosti se

uvádí jako rozšířená kombinovaná nejistota pro spolehlivost odhadu $\gamma = 0,95$.

Přesnost měření všech měřených veličin:

- Modul pružnosti v krutu torzního drátu – chyba byla určena z měření $\delta G = \pm 0,13 \quad \%$
při kalibraci torzního drátu pomocí měření doby kmitu závaží
o známém momentu setrvačnosti.

- Průměr drátu byl měřen mikrometrem ve čtyřech rovinách vždy ve $\Delta d = 0,01 \quad \text{mm}$
dvou průměrech k sobě kolmých, výsledná hodnota průměru byla
určena s ohledem na zjištěnou kuželovitost a ovalitu.

- Délka torzního drátu byla opakovaně změřena ocelovým měřítkem $\Delta L = 2 \quad \text{mm}$
(pravítkem).

Pozn.: Další chyba měření může být způsobena tím, že svěrné spojení drátu v koncovkách je nejisté, např. část torzního drátu se kroutí i do určité hloubky svěrného spoje.

- Prostorové úhly natočení souřadného systému vůči závěsu s torzním drátem byly měřeny pomocí úhlooměru.
- $$\begin{aligned}\Delta\alpha &= 0,5^\circ \\ \Delta\beta &= 0,5^\circ \\ \Delta\gamma &= 0,5^\circ\end{aligned}$$
- Doba jednoho kmitu byla měřena pomocí optického čidla (vždy bylo provedeno minimálně 30 kmitů, ze kterých byla následně spočtena průměrná hodnota) – ověření snímače provedl Český metrologický institut.
- $$\Delta T = 0,01 \text{ sec}$$
- Určení chyby proložení ES pomocí metody nejmenších čtverců byla určena jako průměrná hodnota ze všech 10-ti měření.
- $$\delta EL = \frac{1}{n} \cdot \sum_i^n \delta EL_i \quad \%$$
- Měření polohy těžiště bylo provedeno pomocí třívláknového závěsu v jednotlivých rovinách:
- Velikost sil v závěsech byly měřeny pomocí snímačů U3 (S9) a měřicí ústředny MGC plus od firmy HOTTINGER BALDWIN MESSTECHNIK GmbH (ověření přesnosti snímačů udávané výrobcem bylo provedeno pomocí kalibrovaného závaží z Českého metrologického institutu)
- $$\delta F = 0,2 \quad \%$$
- Poloha závěsů od počátečního bodu rámu byla měřena posuvným měřítkem, případně ocelovým měřítkem (pravítkem).
- $$\begin{aligned}\delta x &= 1 \quad \% \\ \delta y &= 1 \quad \% \\ \delta z &= 1 \quad \%\end{aligned}$$

Výslednou relativní chybu polohy těžiště určíme ze vztahu

$$\delta C = \sqrt{3 \cdot (\delta x)^2 + 3 \cdot (\delta y)^2 + 3 \cdot (\delta z)^2 + 3 \cdot (\delta F)^2}.$$

Potom kompletní vztah pro stanovení relativní chyby momentu setrvačnosti vychází následovně

$$\delta I = \sqrt{(\delta L)^2 + (\delta d)^2 + (\delta G)^2 + (\delta T)^2 + (\delta\alpha)^2 + (\delta\beta)^2 + (\delta\gamma)^2 + (\delta C)^2 + (\delta EL)^2}.$$



a) Měření samotného rámu

Absolutní hodnoty všech měřených veličin, relativní chyby všech měřených veličin a výsledná relativní chyba momentu setrvačnosti rámu jsou uvedeny v následujících tabulkách. Následující tabulka znázorňuje také rozdíly mezi naměřenými a vypočtenými hodnotami.

	Změřený moment setr. I_A (kg.m ²)	Moment setr. vypočtený z elipsoidu, který byl určen pomocí metody nejmenších čtverců z naměřených hodnot I_B (kg.m ²)	$ \Delta = I_A - I_B $ (kg.m ²)	$\delta EL = \left \frac{\Delta}{I_B} \cdot 100 \right $ (%)
1	7,009787	7,067218	0,057431	0,81
2	6,270148	6,201396	0,068752	1,11
3	6,422528	6,433165	0,010637	0,17
4	6,534014	6,565951	0,031937	0,49
5	6,905254	6,886582	0,018671	0,27
6	6,865117	6,830578	0,034539	0,51
7	6,709344	6,660309	0,049035	0,74
8	6,633918	6,705773	0,071855	1,07
9	7,563342	7,531718	0,031624	0,42
10	6,936348	6,963602	0,027254	0,39

$$\begin{aligned}
 d &= 6,293 \text{ mm} \\
 L &= 2543 \text{ mm} \\
 \delta d &= 0,15891 \% \\
 \delta L &= 0,07865 \%
 \end{aligned}$$

	Absolutní hodnoty				Relativní chyby				I [kg.m ²]	δI [%]
	α (°)	β (°)	γ (°)	T (sec)	$\delta \alpha$ (%)	$\delta \beta$ (%)	$\delta \gamma$ (%)	δT (%)		
1	59,75	54,58	130,58	7,616	0,83682	0,916086	0,382907	0,131303	7,009787	3,35837
2	63	132,5	125,25	7,203	0,793651	0,377358	0,399202	0,138831	6,270148	3,244414
3	59,33	53,67	51,5	7,29	0,842744	0,931619	0,970874	0,137174	6,422528	3,48064
4	123,75	54,25	52,67	7,353	0,40404	0,921659	0,949307	0,135999	6,534014	3,392299
5	121,08	131,42	56,92	7,559	0,41295	0,38046	0,878426	0,132293	6,905254	3,267984
6	92,92	49,67	139,75	7,537	0,538097	1,006644	0,357782	0,132679	6,865117	3,320211
7	84,42	138,5	49	7,451	0,592277	0,361011	1,020408	0,13421	6,709344	3,334018
8	55,08	144,67	78,83	7,409	0,907771	0,345614	0,634276	0,134971	6,633918	3,307465
9	7,33	98	91,33	7,911	6,821282	0,510204	0,547465	0,126406	7,563342	7,528692
10	92,75	96,83	7,08	7,576	0,539084	0,516369	7,062147	0,131996	6,936348	7,747509

Průměr $\delta J = 4,1982$



b) Měření soustavy (tzn. motor + rám)

Absolutní hodnoty všech měřených veličin, relativní chyby všech měřených veličin a výsledná relativní chyba pro moment setrvačnosti soustavy jsou uvedeny v následujících tabulkách. Následující tabulka znázorňuje také rozdíly mezi naměřenými a vypočtenými hodnotami.

	Změřený moment setr. I_A (kg.m ²)	Moment setr. vypočtený z elipsoidu, který byl určen pomocí metody nejmenších čtverců z naměřených hodnot I_B (kg.m ²)	$ \Delta = I_A - I_B $ (kg.m ²)	$\delta EL = \left \frac{\Delta}{I_B} \cdot 100 \right $ (%)
1	9,3714	9,388617	0,017217	0,18
2	8,299778	8,335152	0,035373	0,42
3	8,523501	8,518588	0,004912	0,06
4	8,558027	8,52816	0,029868	0,35
5	9,426795	9,403758	0,023037	0,24
6	8,973625	9,023905	0,050279	0,56
7	8,961139	8,922355	0,038784	0,43
8	9,109453	9,0953	0,014153	0,16
9	10,42937	10,43846	0,009091	0,09
10	8,71939	8,717424	0,001966	0,02

$$d = 6,29156 \text{ mm}$$

$$L = 2543 \text{ mm}$$

$$\delta d = 0,15894 \%$$

$$\delta L = 0,07865 \%$$

	Absolutní hodnoty				Relativní chyby				I [kg.m ²]	δI [%]
	α (°)	β (°)	γ (°)	T (sec)	$\delta \alpha$ (%)	$\delta \beta$ (%)	$\delta \gamma$ (%)	δT (%)		
1	60,83	51,33	127,67	8,81	0,821963	0,974089	0,391635	0,113507	9,3714	3,327638
2	62,33	133	124,75	8,291	0,802182	0,37594	0,400802	0,120613	8,299778	3,200384
3	62,25	53,5	49,58	8,402	0,803213	0,934579	1,008471	0,119019	8,523501	3,439798
4	122,83	55,17	51,75	8,419	0,407067	0,90629	0,966184	0,118779	8,558027	3,349197
5	121,42	128,33	54,25	8,836	0,411794	0,389621	0,921659	0,113173	9,426795	3,235132
6	93,33	45,17	135,17	8,621	0,535733	1,106929	0,369905	0,115996	8,973625	3,308327
7	85,83	134,83	45,58	8,615	0,582547	0,370837	1,096972	0,116077	8,961139	3,313026
8	55,25	141,17	75	8,686	0,904977	0,354183	0,666667	0,115128	9,109453	3,268726
9	4,75	94,33	85	9,294	10,52632	0,530054	0,588235	0,107596	10,42937	10,98746
10	93,92	94,08	4	8,498	0,532368	0,531463	12,5	0,117675	8,71939	12,88845

$$\text{Průměr } \delta J = \mathbf{5,0318}$$

c) Relativní chyba momentu setrvačnosti agregátu

Výsledná relativní chyba polohy těžiště vyšla

$$\delta C = \sqrt{3 \cdot (\delta x)^2 + 3 \cdot (\delta y)^2 + 3 \cdot (\delta z)^2 + 3 \cdot (\delta F)^2} = 3,02 \% .$$

Vztah pro určení relativní chyby momentu setrvačnosti agregátu

$$\delta I_{Motor} = \sqrt{(\delta I_{Rám})^2 + (\delta I_{Soustava})^2} = \sqrt{(4,7509)^2 + (4,6467)^2} = 6,5531 \% ,$$

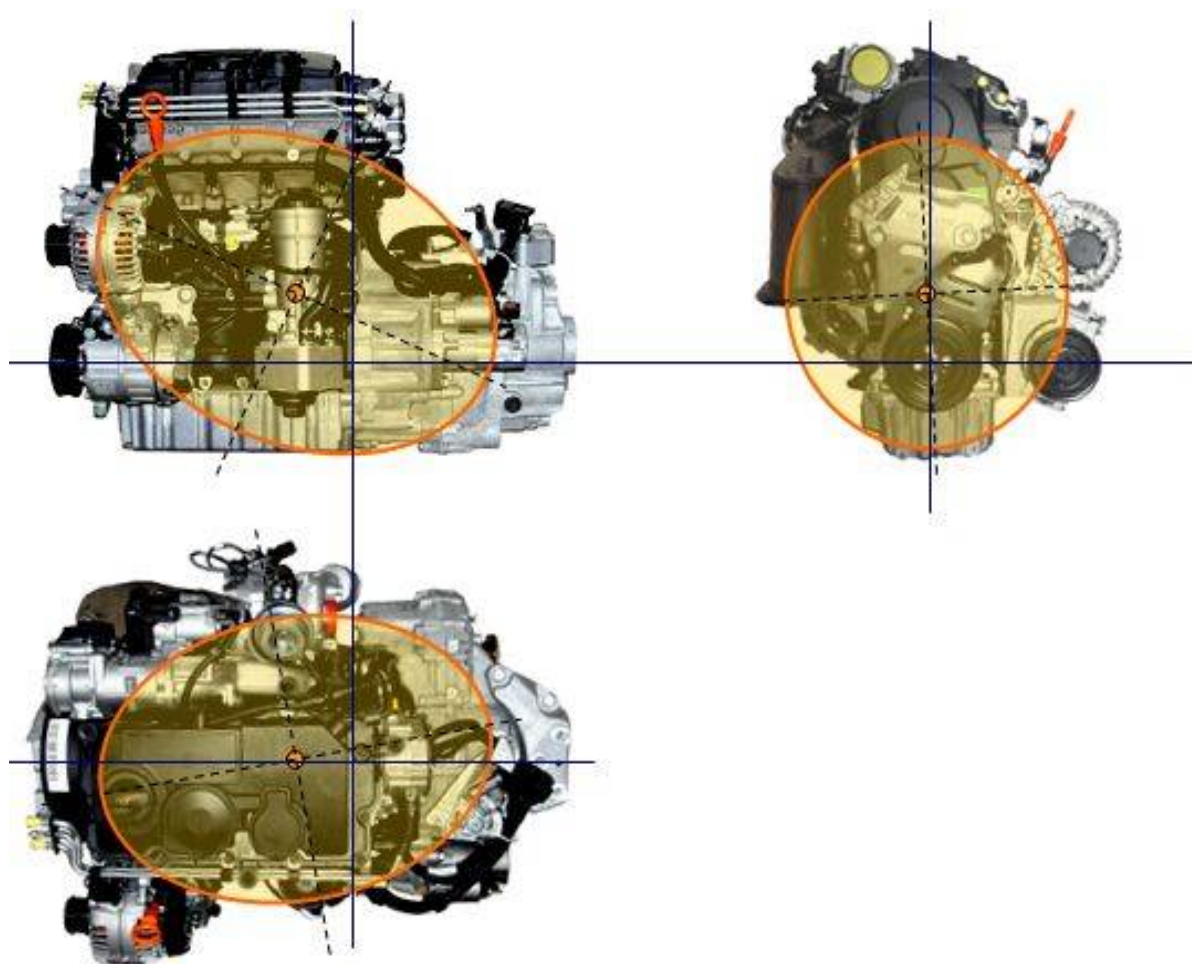
tzn. po zaokrouhlení:

$$\delta I_{Motor} = 6,55 \% .$$

Jedná se o maximální relativní chybu měření momentu setrvačnosti při použití všech největších možných chyb měření u všech vstupů do výpočtu ZVES. Z verifikace měření (viz celá kap. 5) vidíme, že chyba měření byla menší než 2,5 % při použití vhodně zvolených bodů měření v blízkosti vrcholů elipsoidu.

6 Účinek pootočení klikového hřídele na elipsoid setrvačnosti agregátu

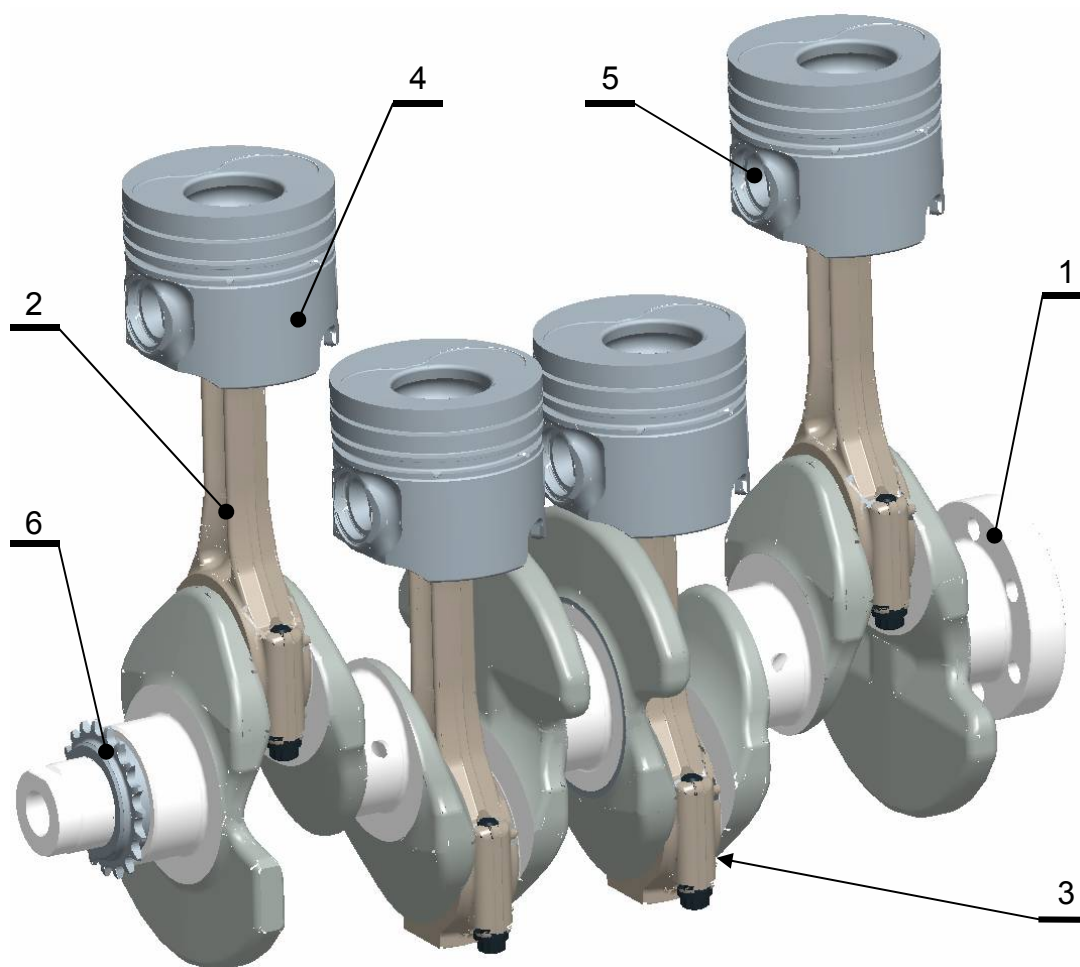
Další parametr, který má vliv na ZVES agregátu (popř. motoru) je úhel otočení klikového hřídele. K zjištění citlivosti na tento parametr byly použity naměřené hodnoty pro agregát osobního vozidla (motor: 2.0 103 kW TDI - DPF; převodovka: MQ 350). Před měřením tohoto agregátu byla nastavena poloha klikového hřídele tak, že píst prvního válce byl v horní úvratí. Na následujícím obrázku je zobrazen naměřený ES zmíněného agregátu.



Obr. 48: Ukázka naměřeného elipsoidu setrvačnosti

agregátu 2.0 103 kW TDI (DPF) - MQ 350.

Dále bylo třeba určit ES agregátu i v jiných polohách klikového hřídele. Jelikož měření je velmi pracné a zdoluhavé, byla zvolena varianta, kdy kompletní klikový mechanismus byl namodelován jako 3D model v CADu. V sestavě nebyly namodelovány a byly zanedbány pístní kroužky. Následně bylo potřeba zadat všem částem (objemům) hustotu materiálu. Pomocí tohoto softwaru byla spočtena matice setrvačnosti celého klikového mechanismu.



Obr. 49: 3D model klikového mechanismu pro motor 2.0 103 kW TDI.

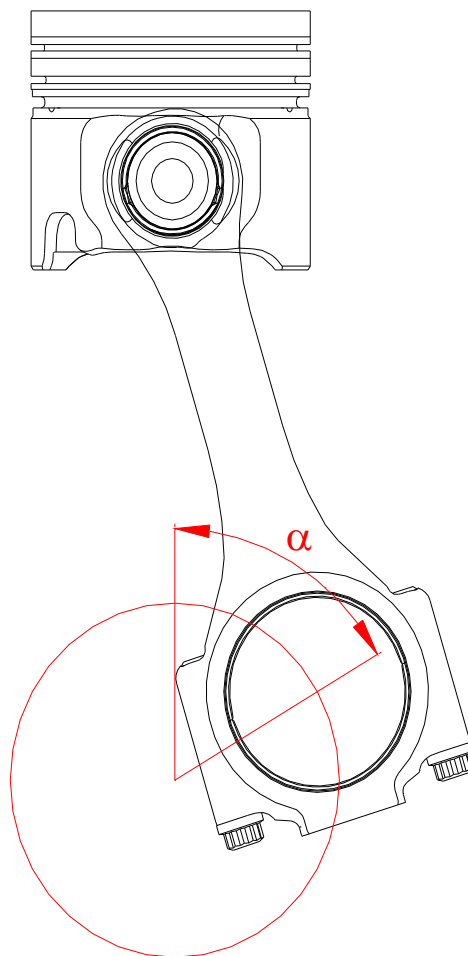
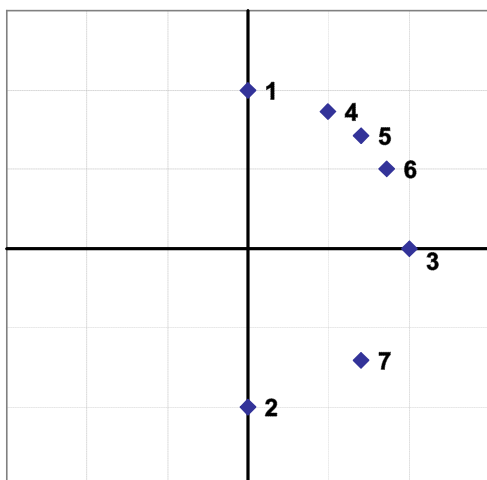
Nejprve byla určena matice setrvačnosti v daném souřadném systému klikového mechanismu pro polohu, kdy byl píst prvního válce v horní úvrti. Později byla tato matice setrvačnosti vypočtena ještě u dalších šesti zvolených poloh klikového hřídele.

V následující tabulce jsou zobrazeny zadané a vypočtené hodnoty (z CADu) pro klikový mechanismus (Poz. 2 – je jako sestava ojnice, pouzdra pístního čepu a šroubů). Čísla pozic odpovídají jako na obr. 49.

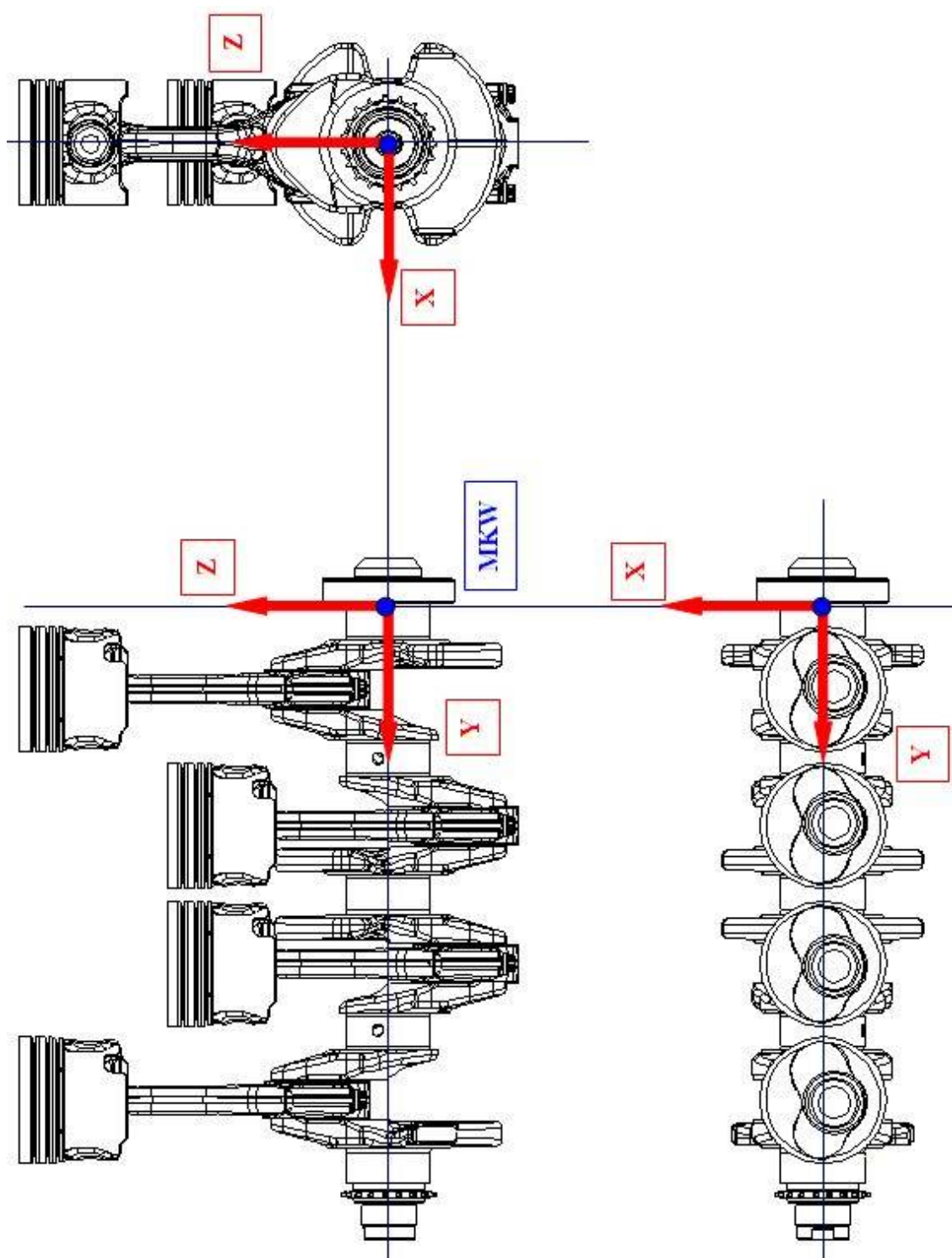
Pozice		Objem mm ³	Plocha mm ²	Hustota gram/mm ³	Hmotnost gram
1.	Klikový hřídel	1756796,7	223928,72	0,00786	13808,42
2.	Ojnice	84467,998	35685,683	0,0079486	671,4054
3.	Ojnice - pánvička	2314,8072	3570,7921	0,00805	18,6342
4.	Píst	191658,29	64866,47	0,0031516	604,0386
5.	Pístní čep	25920,108	8570,0724	0,00786	203,7321
6.	Ozub. kolo	10736,392	6086,1752	0,007	75,15476
					$\Sigma = 19949,35 \text{ g}$
					19,95 kg

Nyní máme vypočtenou matici setrvačnosti úplného klikového mechanismu pro sedm různých úhlů pootočení klikového hřídele. Z důvodu časové náročnosti měření momentu setrvačnosti byl zvolen postup, kdy matice momentu setrvačnosti agregátu byla určena výpočtem pomocí Steinerovy věty. Matice setrvačnosti agregátu u polohy, kdy píst prvního válce byl v horní úvrati ($\alpha=0$), byla určena měřením. Od této matice pomocí Steinerovy věty byla odečtena matice klikového mechanismu pro hodnotu úhlu $\alpha=0$. Matice setrvačnosti agregátu u zbylých úhlů α byly následně vypočteny tak, že k rozdílu (naměřená matice setrvačnosti agregátu pro $\alpha=0$ a vypočtená matice setrvačnosti klikového mechanismu pro $\alpha=0$) byly pomocí Steinerovy věty přičteny zbylé vypočtené matice setrvačnosti pro ostatní polohy klikového hřídele.

Modelovaný případ č.	Úhel α [°] pro první válec
1	0
2	180
3	90
4	30
5	45
6	60
7	135



Obr. 50: Hodnoty úhlu α (pootočení klikového hřídele) pro první válec, pro které byl namodelován klikový mechanismus.

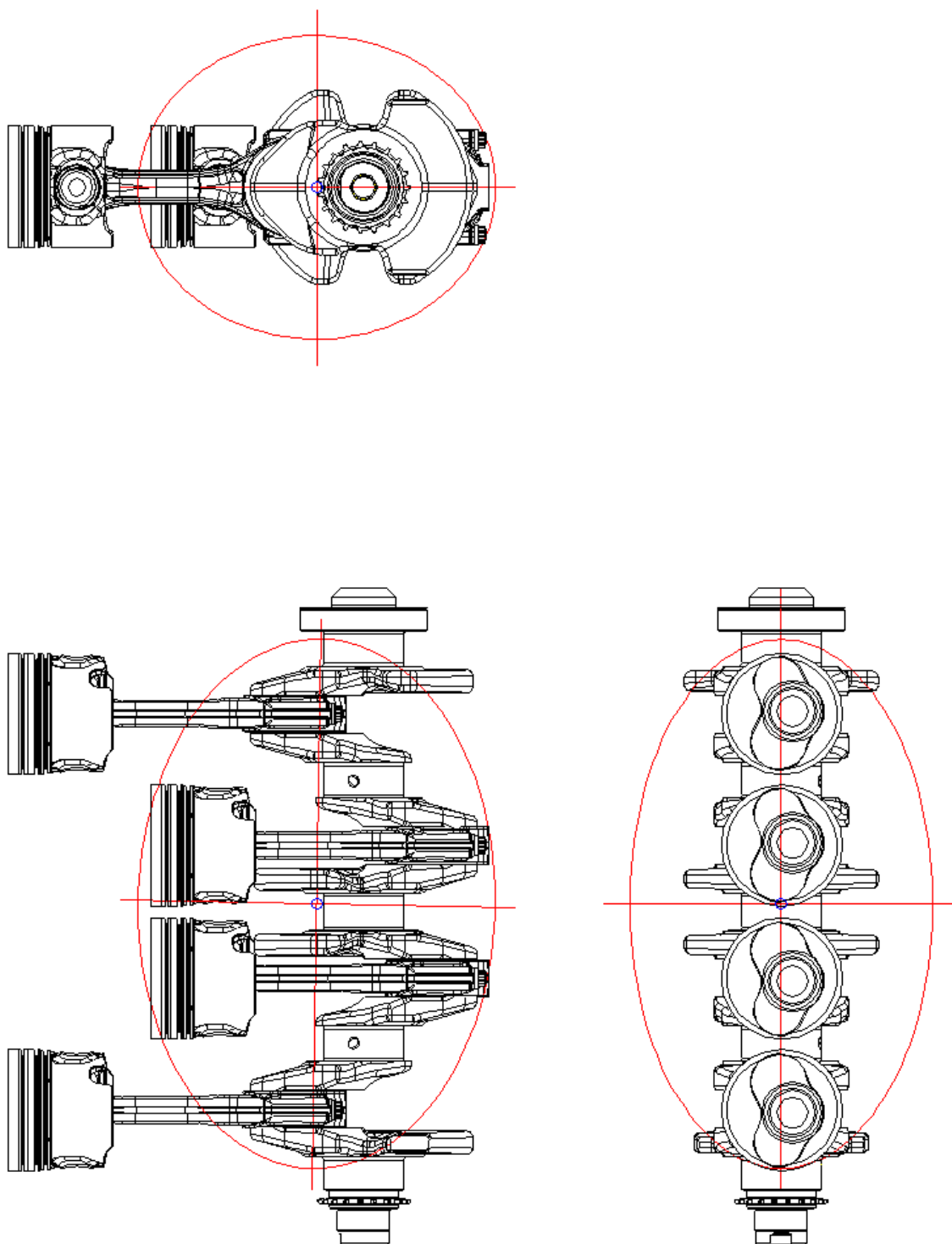


Obr. 51: Namodelovaný klikový mechanismus motoru 2.0 103 kW TDI pro úhel $\alpha=0$ - zobrazení počátku a souřadného systému, který byl shodný se souřadným systémem celého agregátu.



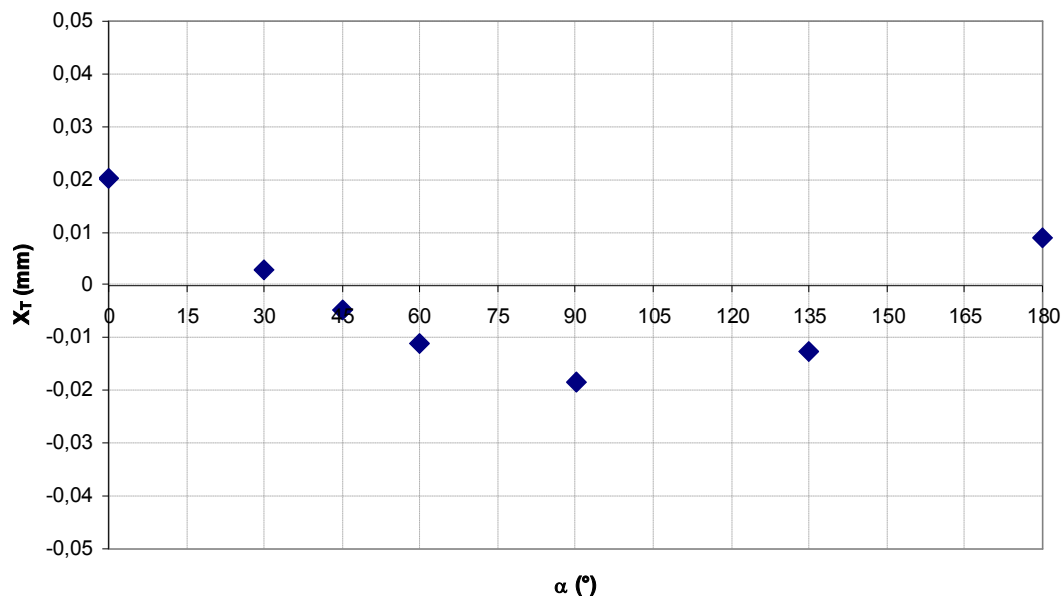
V následující tabulce jsou zobrazeny vypočtené výsledky klikového mechanismu pro všechny simulované úhly pootočení klikového hřídele.

Případ č. 1: Těžiště: x = 0,020 mm y = 182,416 mm z = 31,216 mm Hmotnost : 19,95 kg <table><tr><td>lxx</td><td>lxy</td><td>lxz</td><td>0,3516</td><td>0,0000</td><td>-0,0001</td><td>kg m²</td></tr><tr><td>lyx</td><td>lyy</td><td>lyz</td><td>0,0000</td><td>0,1152</td><td>-0,0030</td><td></td></tr><tr><td>lzx</td><td>lzy</td><td>lzz</td><td>-0,0001</td><td>-0,0030</td><td>0,2545</td><td></td></tr></table>	lxx	lxy	lxz	0,3516	0,0000	-0,0001	kg m ²	lyx	lyy	lyz	0,0000	0,1152	-0,0030		lzx	lzy	lzz	-0,0001	-0,0030	0,2545		Případ č. 2: Těžiště: x = 0,009 mm y = 182,416 mm z = 31,283 mm Hmotnost : 19,95 kg <table><tr><td>lxx</td><td>lxy</td><td>lxz</td><td>0,3516</td><td>0,0000</td><td>-0,0001</td><td>kg m²</td></tr><tr><td>lyx</td><td>lyy</td><td>lyz</td><td>0,0000</td><td>0,1152</td><td>-0,0028</td><td></td></tr><tr><td>lzx</td><td>lzy</td><td>lzz</td><td>-0,0001</td><td>-0,0028</td><td>0,2545</td><td></td></tr></table>	lxx	lxy	lxz	0,3516	0,0000	-0,0001	kg m ²	lyx	lyy	lyz	0,0000	0,1152	-0,0028		lzx	lzy	lzz	-0,0001	-0,0028	0,2545	
lxx	lxy	lxz	0,3516	0,0000	-0,0001	kg m ²																																					
lyx	lyy	lyz	0,0000	0,1152	-0,0030																																						
lzx	lzy	lzz	-0,0001	-0,0030	0,2545																																						
lxx	lxy	lxz	0,3516	0,0000	-0,0001	kg m ²																																					
lyx	lyy	lyz	0,0000	0,1152	-0,0028																																						
lzx	lzy	lzz	-0,0001	-0,0028	0,2545																																						
Případ č. 3: Těžiště: x = -0,018 mm y = 182,416 mm z = 29,598 mm Hmotnost : 19,95 kg <table><tr><td>lxx</td><td>lxy</td><td>lxz</td><td>0,3209</td><td>-0,0001</td><td>-0,0001</td><td>kg m²</td></tr><tr><td>lyx</td><td>lyy</td><td>lyz</td><td>-0,0001</td><td>0,0981</td><td>-0,0027</td><td></td></tr><tr><td>lzx</td><td>lzy</td><td>lzz</td><td>-0,0001</td><td>-0,0027</td><td>0,2682</td><td></td></tr></table>	lxx	lxy	lxz	0,3209	-0,0001	-0,0001	kg m ²	lyx	lyy	lyz	-0,0001	0,0981	-0,0027		lzx	lzy	lzz	-0,0001	-0,0027	0,2682		Případ č. 4: Těžiště: x = 0,003 mm y = 182,416 mm z = 30,816 mm Hmotnost : 19,95 kg <table><tr><td>lxx</td><td>lxy</td><td>lxz</td><td>0,3440</td><td>0,0000</td><td>-0,0061</td><td>kg m²</td></tr><tr><td>lyx</td><td>lyy</td><td>lyz</td><td>0,0000</td><td>0,1110</td><td>-0,0029</td><td></td></tr><tr><td>lzx</td><td>lzy</td><td>lzz</td><td>-0,0061</td><td>-0,0029</td><td>0,2580</td><td></td></tr></table>	lxx	lxy	lxz	0,3440	0,0000	-0,0061	kg m ²	lyx	lyy	lyz	0,0000	0,1110	-0,0029		lzx	lzy	lzz	-0,0061	-0,0029	0,2580	
lxx	lxy	lxz	0,3209	-0,0001	-0,0001	kg m ²																																					
lyx	lyy	lyz	-0,0001	0,0981	-0,0027																																						
lzx	lzy	lzz	-0,0001	-0,0027	0,2682																																						
lxx	lxy	lxz	0,3440	0,0000	-0,0061	kg m ²																																					
lyx	lyy	lyz	0,0000	0,1110	-0,0029																																						
lzx	lzy	lzz	-0,0061	-0,0029	0,2580																																						
Případ č. 5: Těžiště: x = -0,005 mm y = 182,416 mm z = 30,411 mm Hmotnost : 19,95 kg <table><tr><td>lxx</td><td>lxy</td><td>lxz</td><td>0,3363</td><td>0,0000</td><td>-0,0071</td><td>kg m²</td></tr><tr><td>lyx</td><td>lyy</td><td>lyz</td><td>0,0000</td><td>0,1067</td><td>-0,0029</td><td></td></tr><tr><td>lzx</td><td>lzy</td><td>lzz</td><td>-0,0071</td><td>-0,0029</td><td>0,2614</td><td></td></tr></table>	lxx	lxy	lxz	0,3363	0,0000	-0,0071	kg m ²	lyx	lyy	lyz	0,0000	0,1067	-0,0029		lzx	lzy	lzz	-0,0071	-0,0029	0,2614		Případ č. 6: Těžiště: x = -0,011 mm y = 182,416 mm z = 30,003 mm Hmotnost : 19,95 kg <table><tr><td>lxx</td><td>lxy</td><td>lxz</td><td>0,3286</td><td>-0,0001</td><td>-0,0061</td><td>kg m²</td></tr><tr><td>lyx</td><td>lyy</td><td>lyz</td><td>-0,0001</td><td>0,1024</td><td>-0,0028</td><td></td></tr><tr><td>lzx</td><td>lzy</td><td>lzz</td><td>-0,0061</td><td>-0,0028</td><td>0,2648</td><td></td></tr></table>	lxx	lxy	lxz	0,3286	-0,0001	-0,0061	kg m ²	lyx	lyy	lyz	-0,0001	0,1024	-0,0028		lzx	lzy	lzz	-0,0061	-0,0028	0,2648	
lxx	lxy	lxz	0,3363	0,0000	-0,0071	kg m ²																																					
lyx	lyy	lyz	0,0000	0,1067	-0,0029																																						
lzx	lzy	lzz	-0,0071	-0,0029	0,2614																																						
lxx	lxy	lxz	0,3286	-0,0001	-0,0061	kg m ²																																					
lyx	lyy	lyz	-0,0001	0,1024	-0,0028																																						
lzx	lzy	lzz	-0,0061	-0,0028	0,2648																																						
Případ č. 7: Těžiště: x = -0,013 mm y = 182,416 mm z = 30,458 mm Hmotnost : 19,95 kg <table><tr><td>lxx</td><td>lxy</td><td>lxz</td><td>0,3362</td><td>-0,0001</td><td>0,0069</td><td>kg m²</td></tr><tr><td>lyx</td><td>lyy</td><td>lyz</td><td>-0,0001</td><td>0,1066</td><td>-0,0027</td><td></td></tr><tr><td>lzx</td><td>lzy</td><td>lzz</td><td>0,0069</td><td>-0,0027</td><td>0,2614</td><td></td></tr></table>	lxx	lxy	lxz	0,3362	-0,0001	0,0069	kg m ²	lyx	lyy	lyz	-0,0001	0,1066	-0,0027		lzx	lzy	lzz	0,0069	-0,0027	0,2614																							
lxx	lxy	lxz	0,3362	-0,0001	0,0069	kg m ²																																					
lyx	lyy	lyz	-0,0001	0,1066	-0,0027																																						
lzx	lzy	lzz	0,0069	-0,0027	0,2614																																						

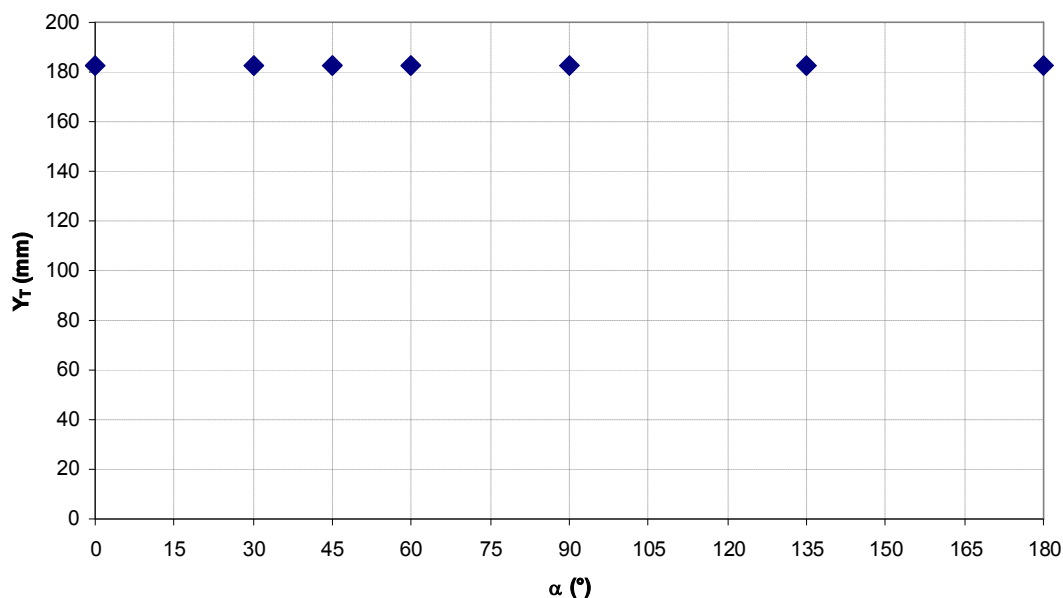


Obr. 52: Vypočtený elipsoid setrvačnosti klikového mechanismu motoru
2.0 103 kW TDI pro úhel pootočení klikového mechanismu $\alpha=0$.

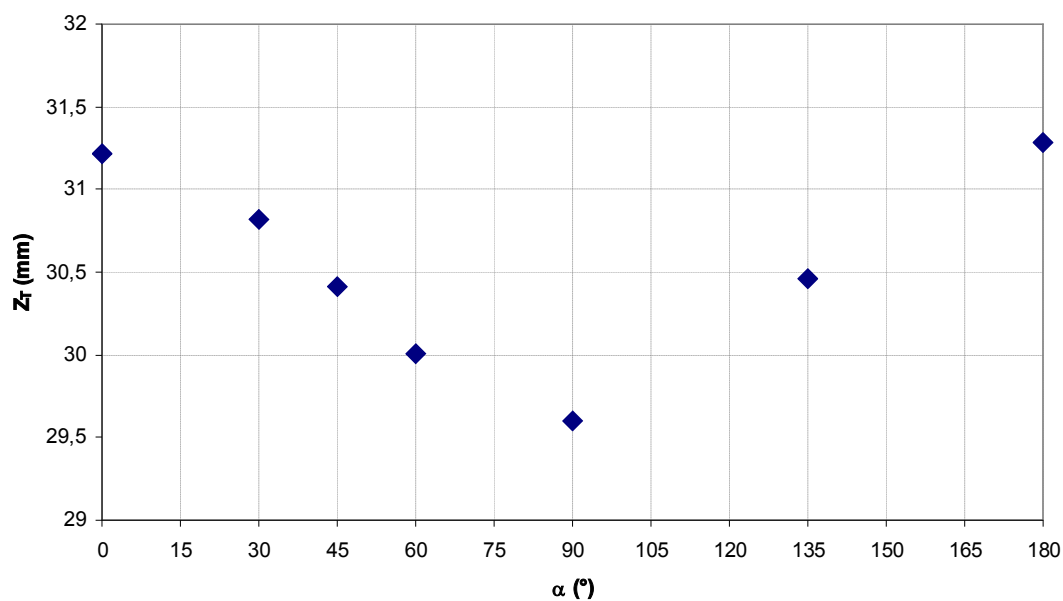
Dále jsou tyto výsledky zobrazeny graficky v závislosti na úhlu pootočení klikového hřídele.



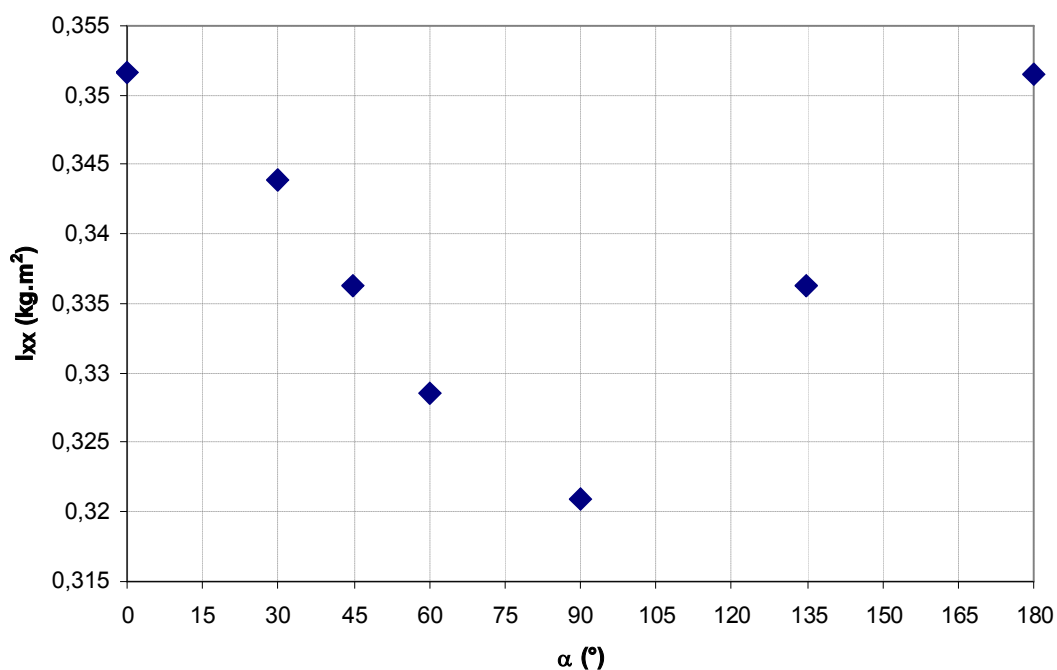
Graf 1: Závislost polohy těžiště klikového mechanismu ve směru x na úhlu pootočení klikového hřídele.



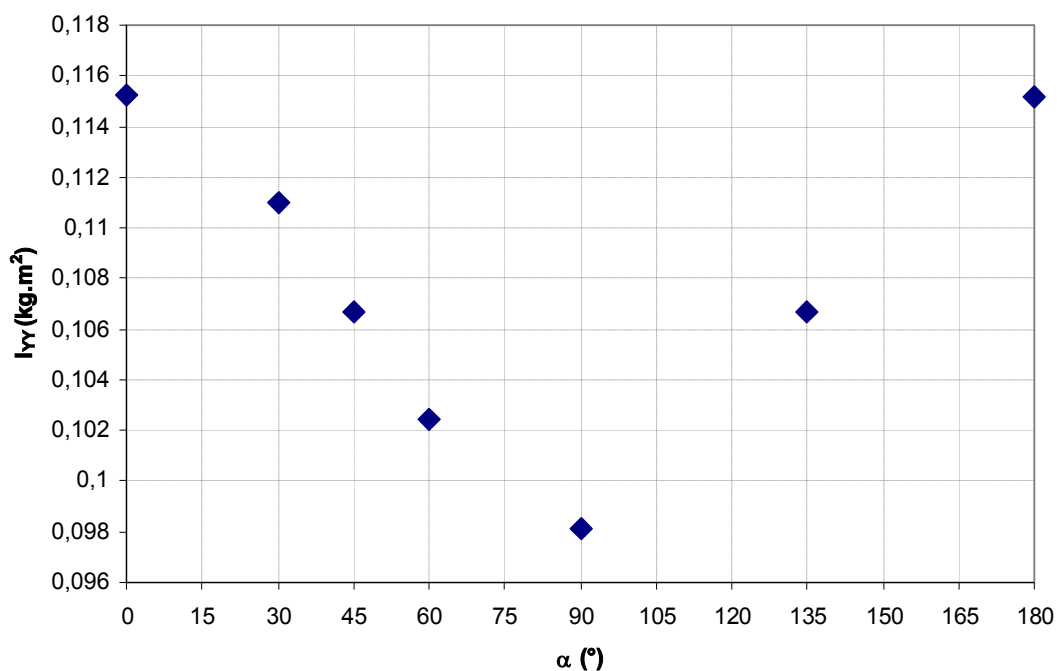
Graf 2: Závislost polohy těžiště klikového mechanismu ve směru y (osa klikového hřídele) na úhlu pootočení klikového hřídele



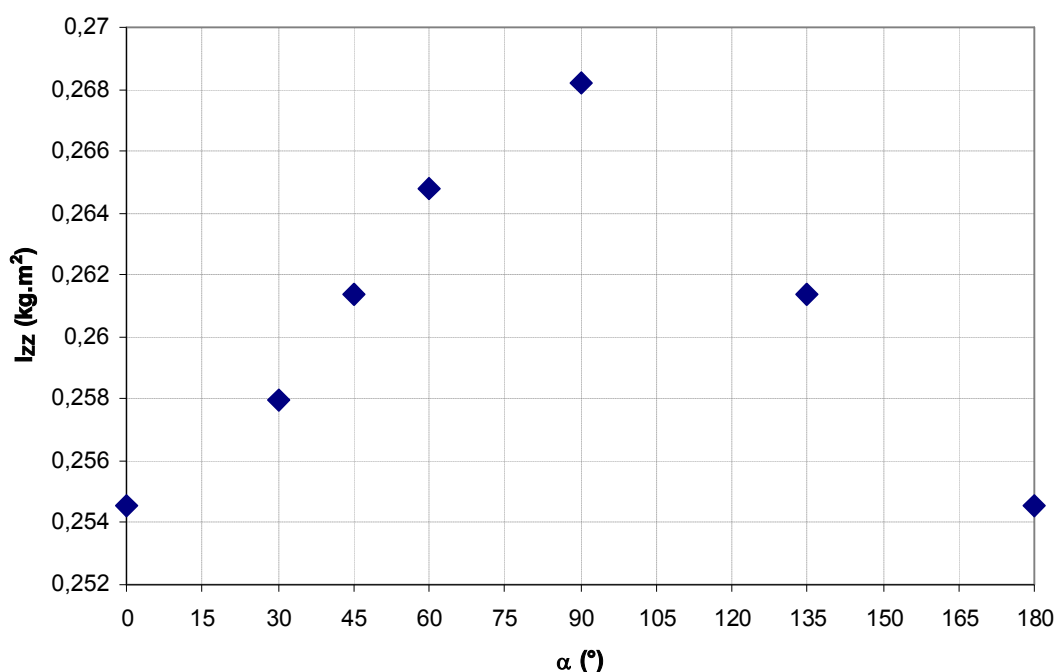
Graf 3: Závislost polohy těžiště klikového mechanismu ve směru z (osa pístu) na úhlu pootočení klikového hřídele



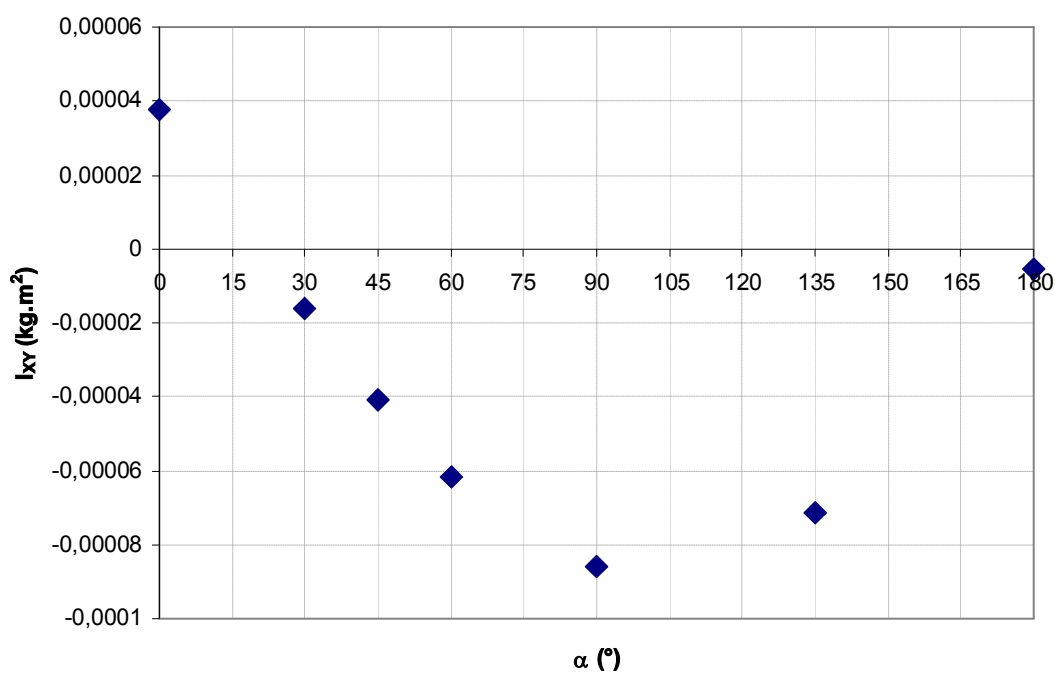
Graf 4: Závislost momentu setrvačnosti klikového mechanismu k ose x na úhlu pootočení klikového hřídele



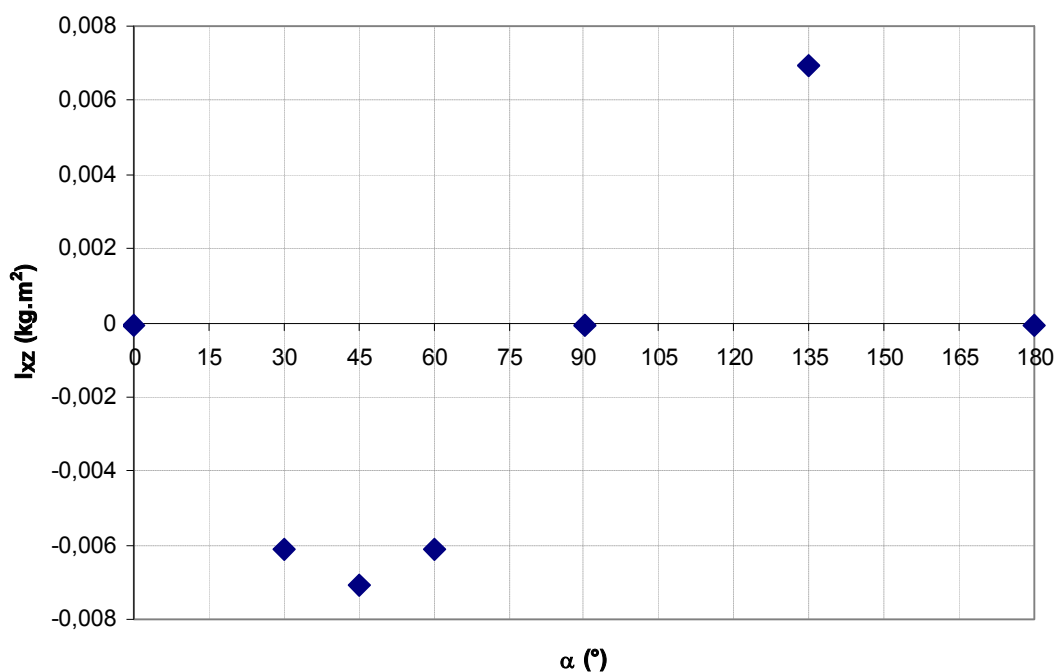
Graf 5: Závislost momentu setrvačnosti klikového mechanismu k ose y (osa klikového hřídele) na úhlu pootočení klikového hřídele



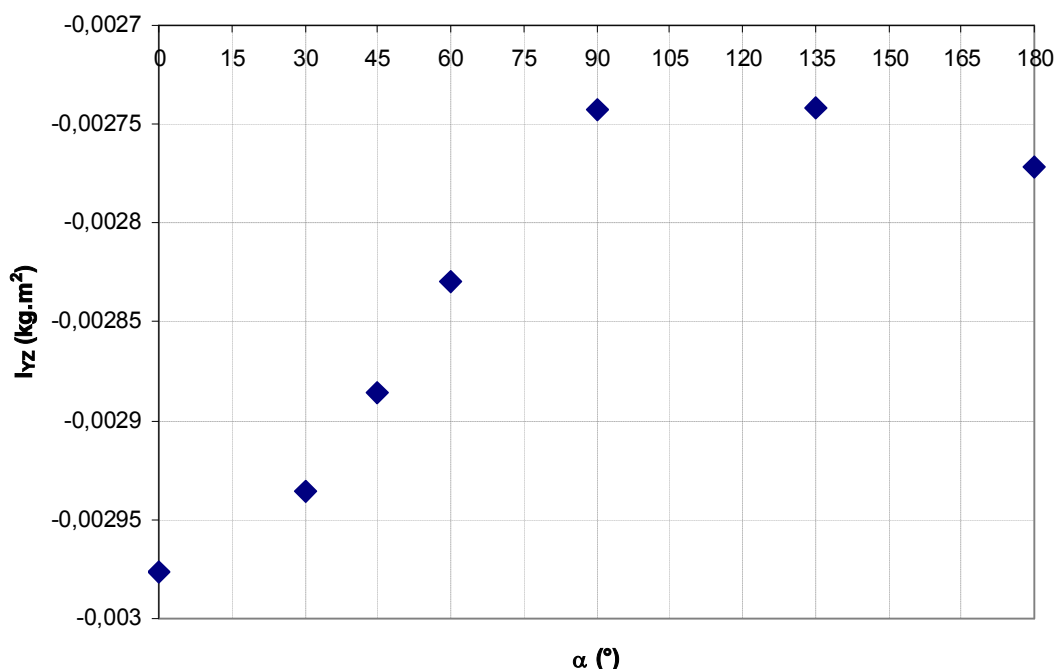
Graf 6: Závislost momentu setrvačnosti klikového mechanismu k ose z (osa pístu) na úhlu pootočení klikového hřídele



Graf 7: Závislost deviačního momentu xy na úhlu pootočení klikového hřídele



Graf 8: Závislost deviačního momentu xz na úhlu pootočení klikového hřídele



Graf 9: Závislost deviačního momentu I_{yz} na úhlu pootočení klikového hřídele

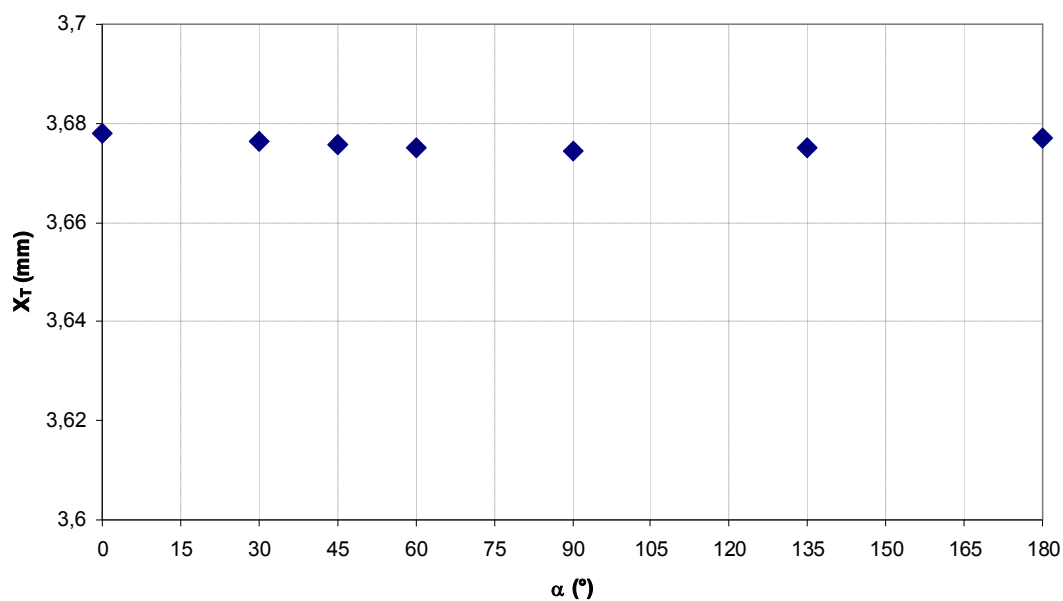
KLIK. MECHAN.	Z_T [mm]	I_{xx} [kg.m²]	I_{yy} [kg.m²]	I_{zz} [kg.m²]
Maximum	31,2851	0,351648	0,115249	0,268203
Minimum	29,598	0,320876	0,098133	0,254546
Max. / Min.	1,06	1,10	1,17	1,05

V předchozí tabulce vidíme, jak se nám mění vypočtené parametry. Jedná se řádově o desítky procent. Maximální hodnoty dosáhl moment setrvačnosti kolem osy y, kde byla změna okolo 17%. Nyní tyto vypočtené hodnoty můžeme přenést do momentu setrvačnosti celého agregátu a zkoumat vliv na celou sestavu. V disertační práci budou uvedeny pouze polohu těžiště a momenty setrvačnosti kolem os x, y a z.

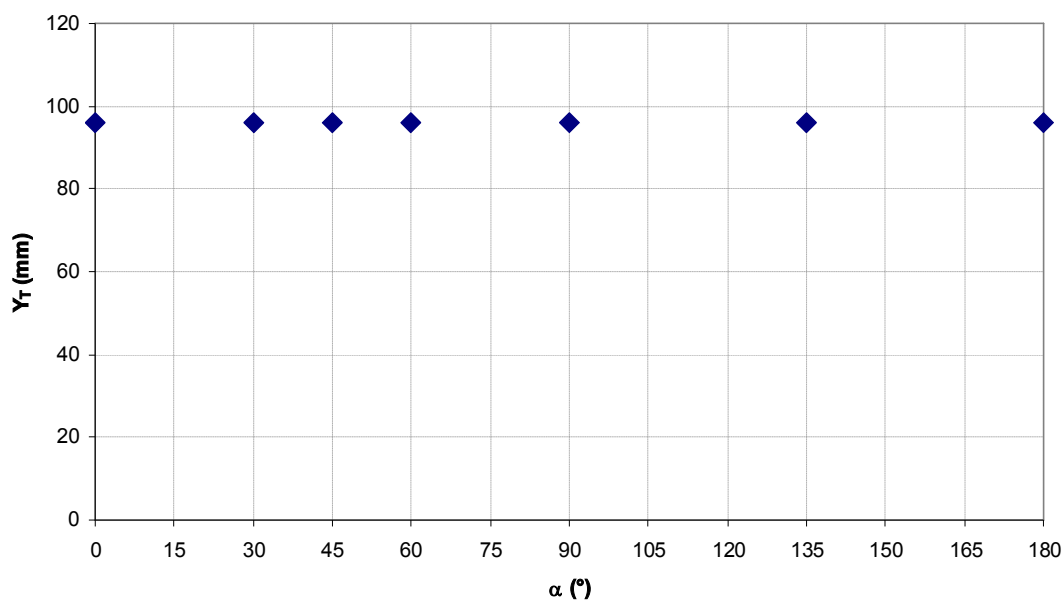
V následující tabulce jsou zobrazeny vypočtené výsledky agregátu (motor 2.0 103 kW TDI (DPF) a převodovka MQ 350) pro všechny simulované úhly pootočení klikového hřídele.



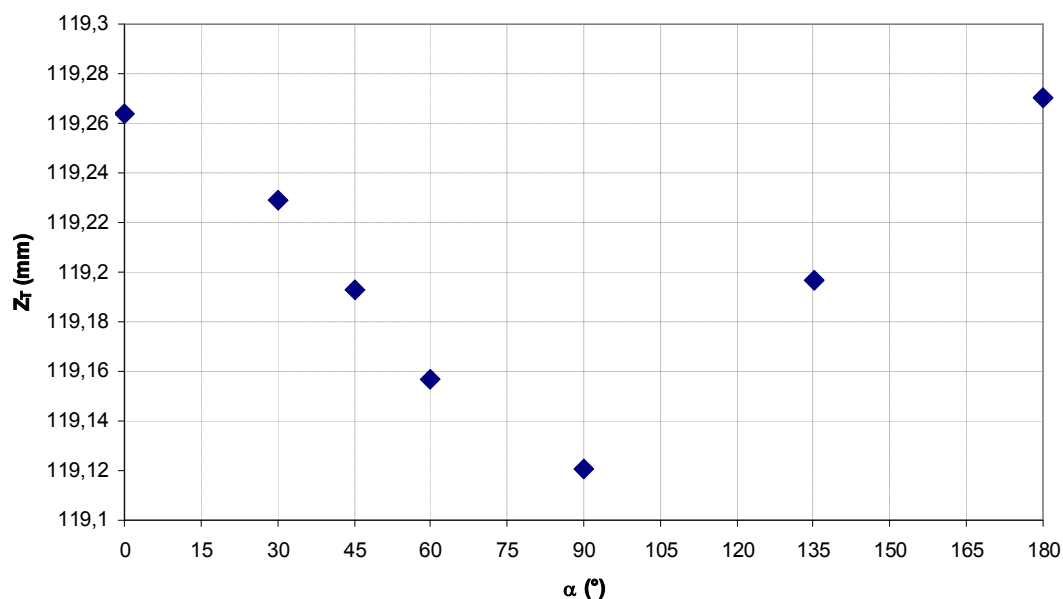
Případ č. 1: Těžiště: x = 3,678 mm y = 96,042 mm z = 119,264 mm Hmotnost : 225,30 kg <table><tr><td>lxx</td><td>lxy</td><td>lxz</td><td>14,8316</td><td rowspan="3">kg m²</td></tr><tr><td>lyx</td><td>lyy</td><td>lyz</td><td>7,7785</td></tr><tr><td>lzx</td><td>lzy</td><td>lzz</td><td>12,3611</td></tr></table>	lxx	lxy	lxz	14,8316	kg m ²	lyx	lyy	lyz	7,7785	lzx	lzy	lzz	12,3611	Případ č. 2: Těžiště: x = 3,677 mm y = 96,042 mm z = 119,270 mm Hmotnost : 225,30 kg <table><tr><td>lxx</td><td>lxy</td><td>lxz</td><td>14,8313</td><td rowspan="3">kg m²</td></tr><tr><td>lyx</td><td>lyy</td><td>lyz</td><td>7,7781</td></tr><tr><td>lzx</td><td>lzy</td><td>lzz</td><td>12,3611</td></tr></table>	lxx	lxy	lxz	14,8313	kg m ²	lyx	lyy	lyz	7,7781	lzx	lzy	lzz	12,3611
lxx	lxy	lxz	14,8316	kg m ²																							
lyx	lyy	lyz	7,7785																								
lzx	lzy	lzz	12,3611																								
lxx	lxy	lxz	14,8313	kg m ²																							
lyx	lyy	lyz	7,7781																								
lzx	lzy	lzz	12,3611																								
Případ č. 3: Těžiště: x = 3,674 mm y = 96,042 mm z = 119,121 mm Hmotnost : 225,30 kg <table><tr><td>lxx</td><td>lxy</td><td>lxz</td><td>14,8066</td><td rowspan="3">kg m²</td></tr><tr><td>lyx</td><td>lyy</td><td>lyz</td><td>7,7671</td></tr><tr><td>lzx</td><td>lzy</td><td>lzz</td><td>12,3748</td></tr></table>	lxx	lxy	lxz	14,8066	kg m ²	lyx	lyy	lyz	7,7671	lzx	lzy	lzz	12,3748	Případ č. 4: Těžiště: x = 3,676 mm y = 96,042 mm z = 119,229 mm Hmotnost : 225,30 kg <table><tr><td>lxx</td><td>lxy</td><td>lxz</td><td>14,8253</td><td rowspan="3">kg m²</td></tr><tr><td>lyx</td><td>lyy</td><td>lyz</td><td>7,7756</td></tr><tr><td>lzx</td><td>lzy</td><td>lzz</td><td>12,3646</td></tr></table>	lxx	lxy	lxz	14,8253	kg m ²	lyx	lyy	lyz	7,7756	lzx	lzy	lzz	12,3646
lxx	lxy	lxz	14,8066	kg m ²																							
lyx	lyy	lyz	7,7671																								
lzx	lzy	lzz	12,3748																								
lxx	lxy	lxz	14,8253	kg m ²																							
lyx	lyy	lyz	7,7756																								
lzx	lzy	lzz	12,3646																								
Případ č. 5: Těžiště: x = 3,676 mm y = 96,042 mm z = 119,193 mm Hmotnost : 225,30 kg <table><tr><td>lxx</td><td>lxy</td><td>lxz</td><td>14,8191</td><td rowspan="3">kg m²</td></tr><tr><td>lyx</td><td>lyy</td><td>lyz</td><td>7,7727</td></tr><tr><td>lzx</td><td>lzy</td><td>lzz</td><td>12,3680</td></tr></table>	lxx	lxy	lxz	14,8191	kg m ²	lyx	lyy	lyz	7,7727	lzx	lzy	lzz	12,3680	Případ č. 6: Těžiště: x = 3,675 mm y = 96,042 mm z = 119,157 mm Hmotnost : 225,30 kg <table><tr><td>lxx</td><td>lxy</td><td>lxz</td><td>14,8128</td><td rowspan="3">kg m²</td></tr><tr><td>lyx</td><td>lyy</td><td>lyz</td><td>7,7699</td></tr><tr><td>lzx</td><td>lzy</td><td>lzz</td><td>12,3714</td></tr></table>	lxx	lxy	lxz	14,8128	kg m ²	lyx	lyy	lyz	7,7699	lzx	lzy	lzz	12,3714
lxx	lxy	lxz	14,8191	kg m ²																							
lyx	lyy	lyz	7,7727																								
lzx	lzy	lzz	12,3680																								
lxx	lxy	lxz	14,8128	kg m ²																							
lyx	lyy	lyz	7,7699																								
lzx	lzy	lzz	12,3714																								
Případ č. 7: Těžiště: x = 3,675 mm y = 96,042 mm z = 119,197 mm Hmotnost : 225,30 kg <table><tr><td>lxx</td><td>lxy</td><td>lxz</td><td>14,8189</td><td rowspan="3">kg m²</td></tr><tr><td>lyx</td><td>lyy</td><td>lyz</td><td>7,7725</td></tr><tr><td>lzx</td><td>lzy</td><td>lzz</td><td>12,3679</td></tr></table>	lxx	lxy	lxz	14,8189	kg m ²	lyx	lyy	lyz	7,7725	lzx	lzy	lzz	12,3679														
lxx	lxy	lxz	14,8189	kg m ²																							
lyx	lyy	lyz	7,7725																								
lzx	lzy	lzz	12,3679																								



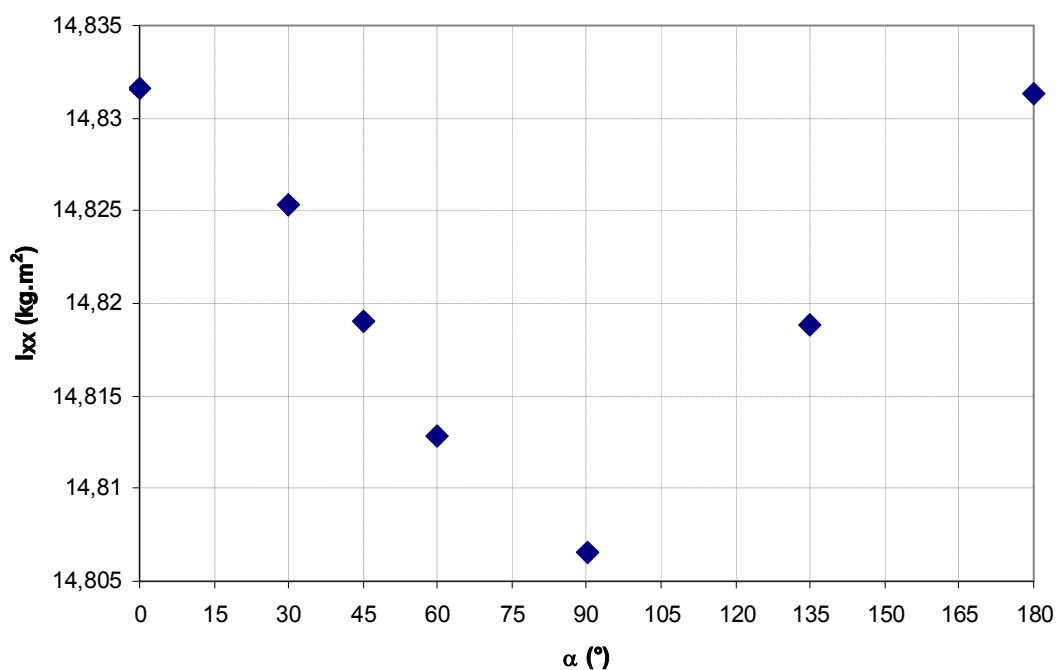
Graf 10: Závislost polohy těžiště agregátu 2.0 103 kW TDI (DPF)-MQ 350 ve směru x na úhlu pootočení klikového hřídele.



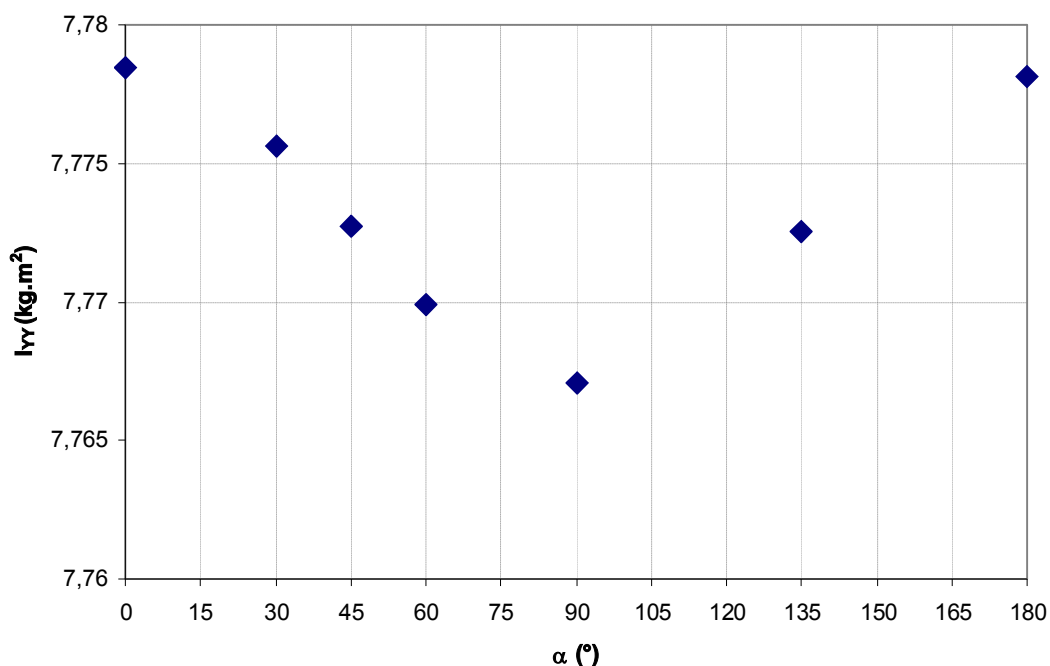
Graf 11: Závislost polohy těžiště agregátu 2.0 103 kW TDI (DPF)-MQ 350 ve směru y (osa klikového hřídele) na úhlu pootočení klikového hřídele.



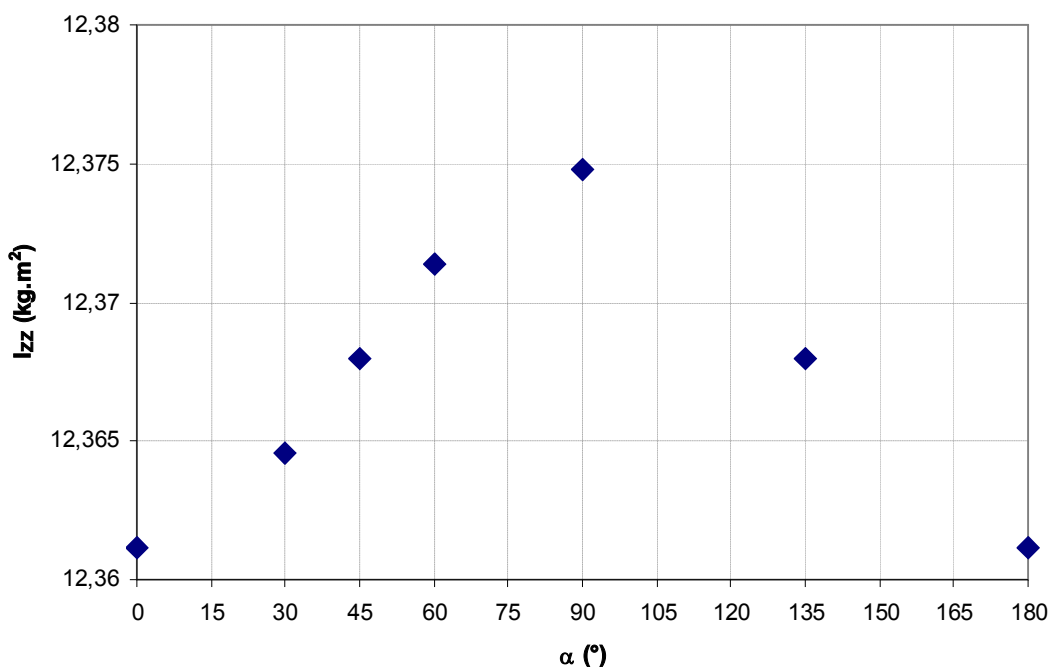
Graf 12: Závislost polohy těžiště agregátu 2.0 103 kW TDI (DPF)-MQ 350 ve směru z (osa pístu) na úhlu pootočení klikového hřídele.



Graf 13: Závislost momentu setrvačnosti agregátu 2.0 103 kW TDI (DPF)-MQ 350 k ose x na úhlu pootočení klikového hřídele



Graf 14: Závislost momentu setrvačnosti agregátu 2.0 103 kW TDI (DPF)-MQ 350
k ose y na úhlu pootočení klikového hřídele



Graf 15: Závislost momentu setrvačnosti agregátu 2.0 103 kW TDI (DPF)-MQ 350
k ose z na úhlu pootočení klikového hřídele



AGREGÁT	Z_T [mm]	I_{xx} [kg.m ²]	I_{yy} [kg.m ²]	I_{zz} [kg.m ²]
<i>Maximum</i>	119,2701	14,83163	7,77845	12,37479
<i>Minimum</i>	119,1209	14,80659	7,767073	12,36113
<i>Max. / Min.</i>	1,0013	1,0017	1,0015	1,0011
	100,1252 %	100,1691 %	100,1465 %	100,1105 %

V předchozí tabulce vidíme, že vliv úhlu pootočení klikového hřídele na momenty setrvačnosti celého agregátu je velice malý. Změna polohy těžiště nebo momentu setrvačnosti k nějaké ose je dokonce daleko menší než jedno procento. Maximální změna byla přibližně jen 0,2 %. Pokud použijeme dostupné výsledky měření firmy Volkswagen pro převodovku MQ350, tak můžeme provést výpočet vlivu pootočení klikového hřídele u samotného motoru. Vypočtené hodnoty jsou zobrazeny v následující tabulce. I v tomto případě vidíme, že vliv pootočení klikového hřídele na moment setrvačnosti motoru je téměř zanedbatelný. Maximální změna v tomto případě byla přibližně okolo 0,3 %.

MOTOR	Z_T [mm]	I_{xx} [kg.m ²]	I_{yy} [kg.m ²]	I_{zz} [kg.m ²]
<i>Maximum</i>	152,6293	7,946382	5,808406	5,606591
<i>Minimum</i>	152,4318	7,923494	5,799153	5,592949
<i>Max. / Min.</i>	1,0013	1,0029	1,0016	1,0024
	100,1296 %	100,2889 %	100,1595 %	100,2439 %

Z předchozích tabulek a grafů je vidět, že vliv polohy klikového hřídele je na celkový ES agregátu, či motoru, zanedbatelný.

7 Vliv příslušenství motoru

Velikost změny momentu setrvačnosti závisí na těchto faktorech: momentu setrvačnosti dané součásti, hmotnosti (m) a vzdálenosti od těžiště (e). Uvedený vztah formulujeme často ve tvaru $I_0 = I_{0S} + m \cdot e^2$ jako Steinerovu větu. Velký význam má vzdálenost od těžiště, kdy poměrně i malá hmota dokáže ovlivnit celkový moment setrvačnosti agregátu. K posouzení vlivu příslušenství bylo zvoleno několik variant měření motorů, či agregátů s různým uspořádáním. V některých případech budou bohužel výsledky prezentovány jen jako poměrné procentní změny, protože data momentů setrvačnosti byla měřena pro zadavatele. Jednalo se totiž o soukromé informace, které nemohou být zveřejněny.

V následujících podkapitolách bude posouzen vliv dalšího přídavného příslušenství motoru na ES celého agregátu (motoru). Měření proběhlo na třech agregátech (dva byly pro osobní automobil a jeden motor byl určen pro nákladní vozidlo).

7.1 Vliv kompresoru klimatizace na elipsoid setrvačnosti motoru

1.2 MPI

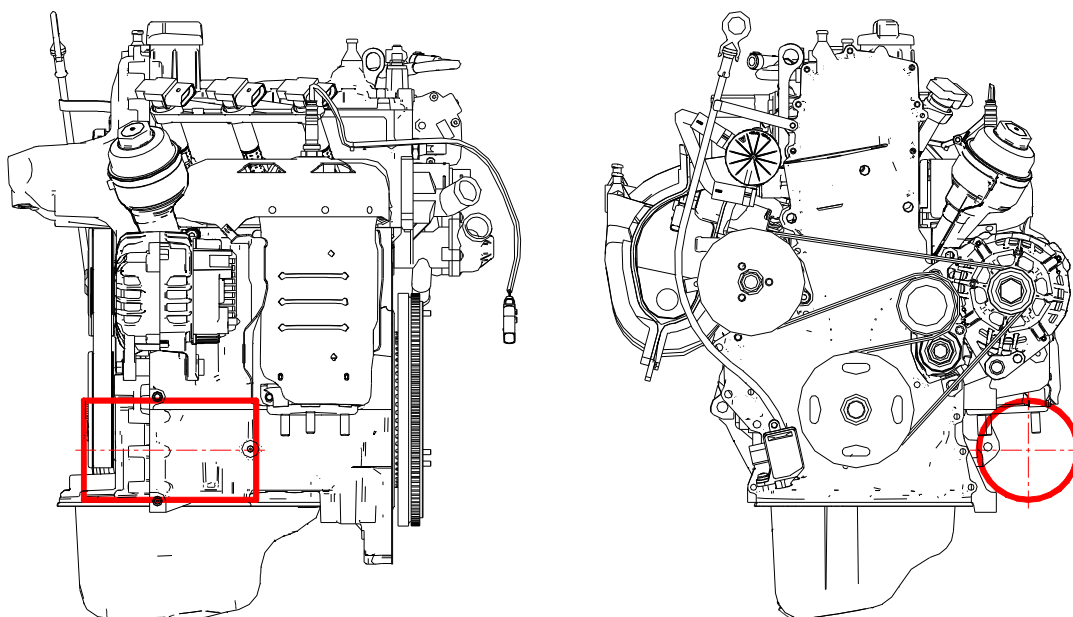
K posouzení vlivu příslušenství byl zvolen případ, že k motoru byl přidán kompresor pro klimatizaci. Z důvodu časové náročnosti měření momentu setrvačnosti byl zvolen postup, kdy moment setrvačnosti kompresoru klimatizace byl přibližně určen výpočtem a později byla stanovena matice setrvačnosti soustavy (tzn. těchto dvou částí – motor a kompresor) pomocí Steinerovy věty.



Data kompresoru pro klimatizaci

- hmotnost: 4,75 kg
- přibližné rozměry: průměr 115 mm
délka 200 mm

Obr. 53: Fotografie a stručná data kompresoru pro klimatizaci.



Obr. 54: Schématicky znázorněná poloha kompresoru pro klimatizaci.

V následující tabulce jsou zobrazena vypočtená data pro varianty s i bez kompresoru klimatizace u motoru 1.2 MPI.

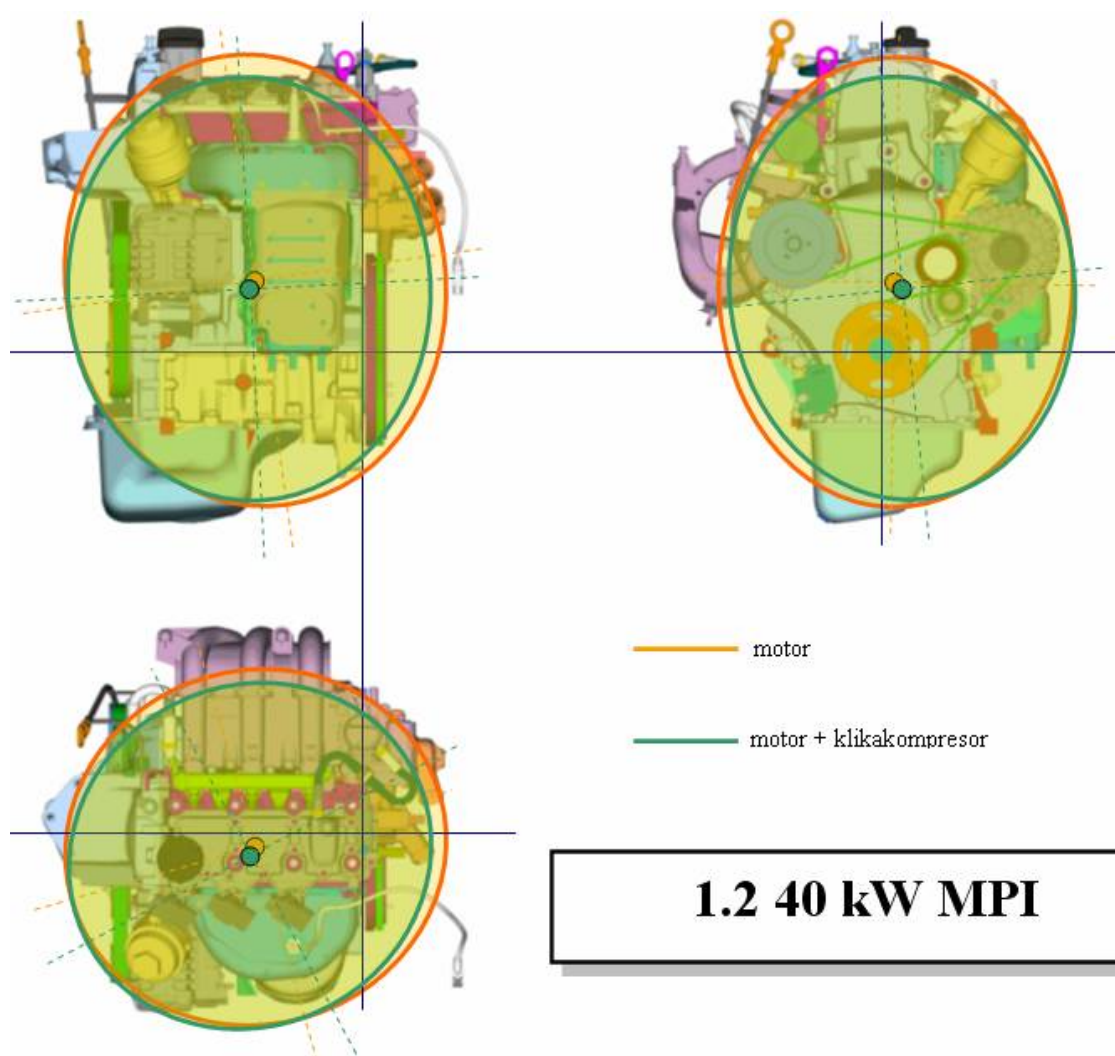
Motor:	Motor s kompresorem pro klimatizaci:
Hmotnost motoru:	Hmotnost motoru:
$m = 80,7 \text{ kg}$	$m = 84,45 \text{ kg}$
Poloha těžiště motoru vzhledem k bodu MKW:	Poloha těžiště motoru vzhledem k bodu MKW:
$x_T = -19 \text{ mm}$	$x_T = -29 \text{ mm}$
$y_T = 152 \text{ mm}$	$y_T = 158 \text{ mm}$
$z_T = 99 \text{ mm}$	$z_T = 91 \text{ mm}$
Matice momentů setrvačnosti k těžišti motoru:	Matice momentů setrvačnosti k těžišti motoru:
$\begin{vmatrix} 2,67 & 0,11 & 0,02 \\ 0,11 & 2,32 & -0,10 \\ 0,02 & -0,10 & 1,66 \end{vmatrix} [\text{kg} \cdot \text{m}^2]$	$\begin{vmatrix} 2,83 & 0,19 & -0,10 \\ 0,19 & 2,57 & -0,03 \\ -0,10 & -0,03 & 1,88 \end{vmatrix} [\text{kg} \cdot \text{m}^2]$

Pokud tyto změny vyjádříme v procentech podle vztahu $\left(\frac{I_{\text{MotorSKompresorem}} - I_{\text{Motor}}}{I_{\text{Motor}}} \right) \cdot 100$ (%), souborně nám vyjde

$$\begin{vmatrix} 6,20 & 81,37 & -618,42 \\ 81,37 & 10,75 & -69,11 \\ -618,42 & -69,11 & 13,06 \end{vmatrix} [\%].$$

Z procentuálního porovnání vidíme, že se velmi mění všechny hodnoty deviačních momentů. Ale i hodnoty osových momentů setrvačnosti se mění řádově v desítkách procent. Změny hodnot momentů setrvačnosti mají vliv na velikost i na polohu (pootočení) elipsoidu setrvačnosti. Při změně hmotnosti motoru o velikosti 4,6 % došlo k 13-ti % změně osového momentu setrvačnosti v ose Z.

Změna ES motoru je patrná na následujícím obrázku.



Obr. 55: Porovnání ES motoru s a bez kompresoru klimatizace.

7.2 Vliv filtru sání na elipsoid setrvačnosti agregátu osobního automobilu (1.4 59kW MPI-MQ200)

Dále byly změřeny dvě varianty agregátu, který se skládal z motoru 1.4 59kW MPI a převodovky MQ200. Nejdříve byl agregát měřen bez filtru sání a později byla měřena druhá varianta s filtrem. Hmotnost plastového filtru sání byla 1,17 kg (což je cca 0,9 % z celkové hmotnosti agregátu).

I při takto malé změně hmotnosti (ale na velké vzdálenosti od těžiště) došlo při všech deseti měření doby kmitu sestavy (tzn. rám+agregát) v různé poloze k naměření

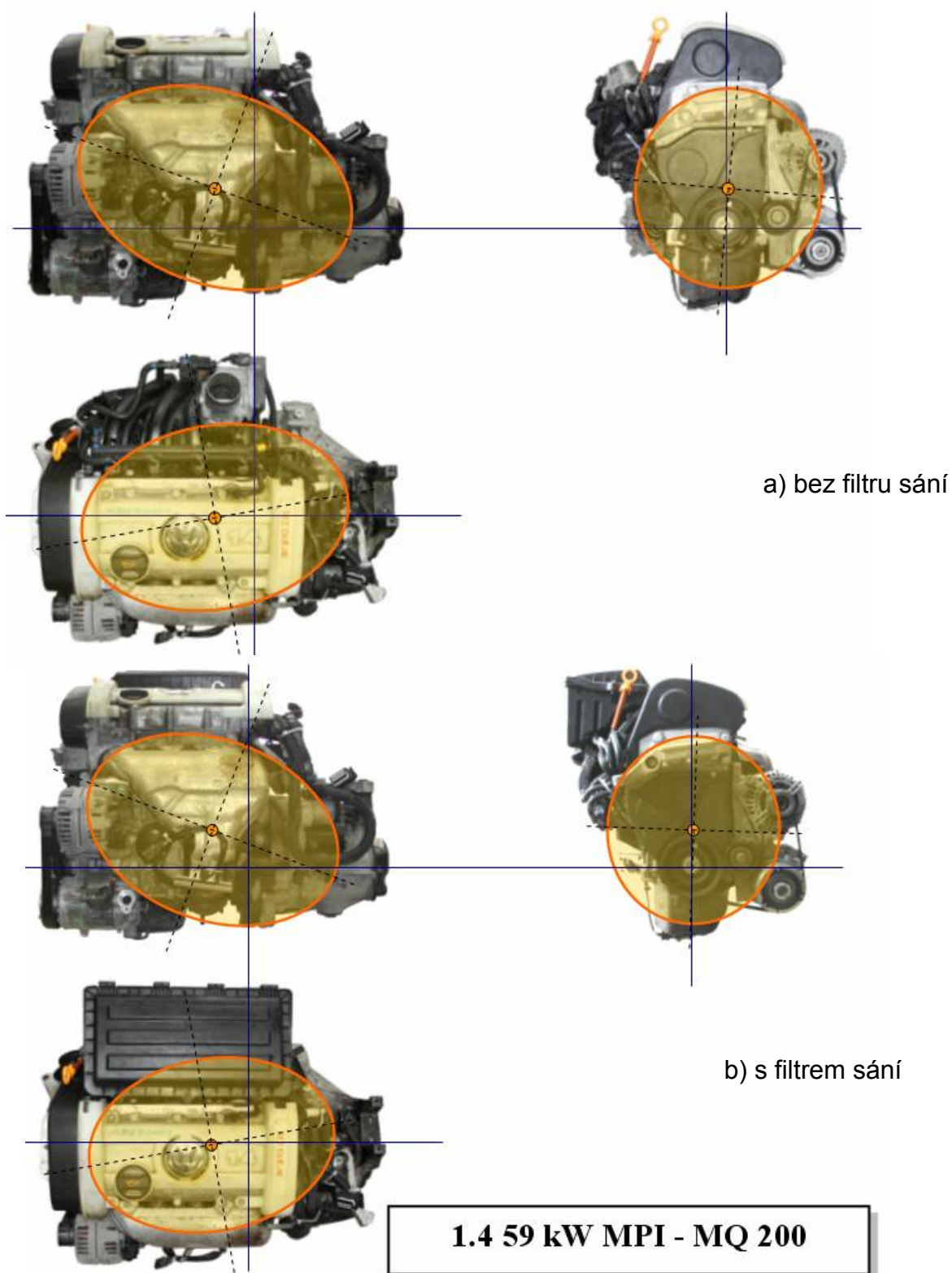
delší doby jednoho kmitu pro agregát s filtrem sání. Rozdíly naměřených dob jednoho kmitu se pohybovaly okolo 0,6%. Naměřené hodnoty jsou zobrazeny v následující tabulce.

	α (°)	β (°)	γ (°)	Motor bez krytu T_{BK} (sec)	Motor s krytem T_{SK} (sec)	$[(T_{SK}-T_{BK})/T_{BK}].100$ (%)
1	62,17	53,58	131,17	10,822	10,89	0,63
2	122,75	55,75	128,08	10,588	10,626	0,36
3	63,42	130,42	127,83	9,373	9,449	0,81
4	120,83	128,25	126,67	9,969	9,988	0,19
5	122,67	130,33	57,67	10,76	10,835	0,70
6	93,5	49,17	138,92	10,529	10,583	0,51
7	54,17	142,33	80,08	9,753	9,83	0,79
8	92	13,25	104,17	9,374	9,447	0,78
9	5,42	94,08	93,83	11,217	11,267	0,45
10	94,08	94,42	6,08	10,69	10,725	0,33

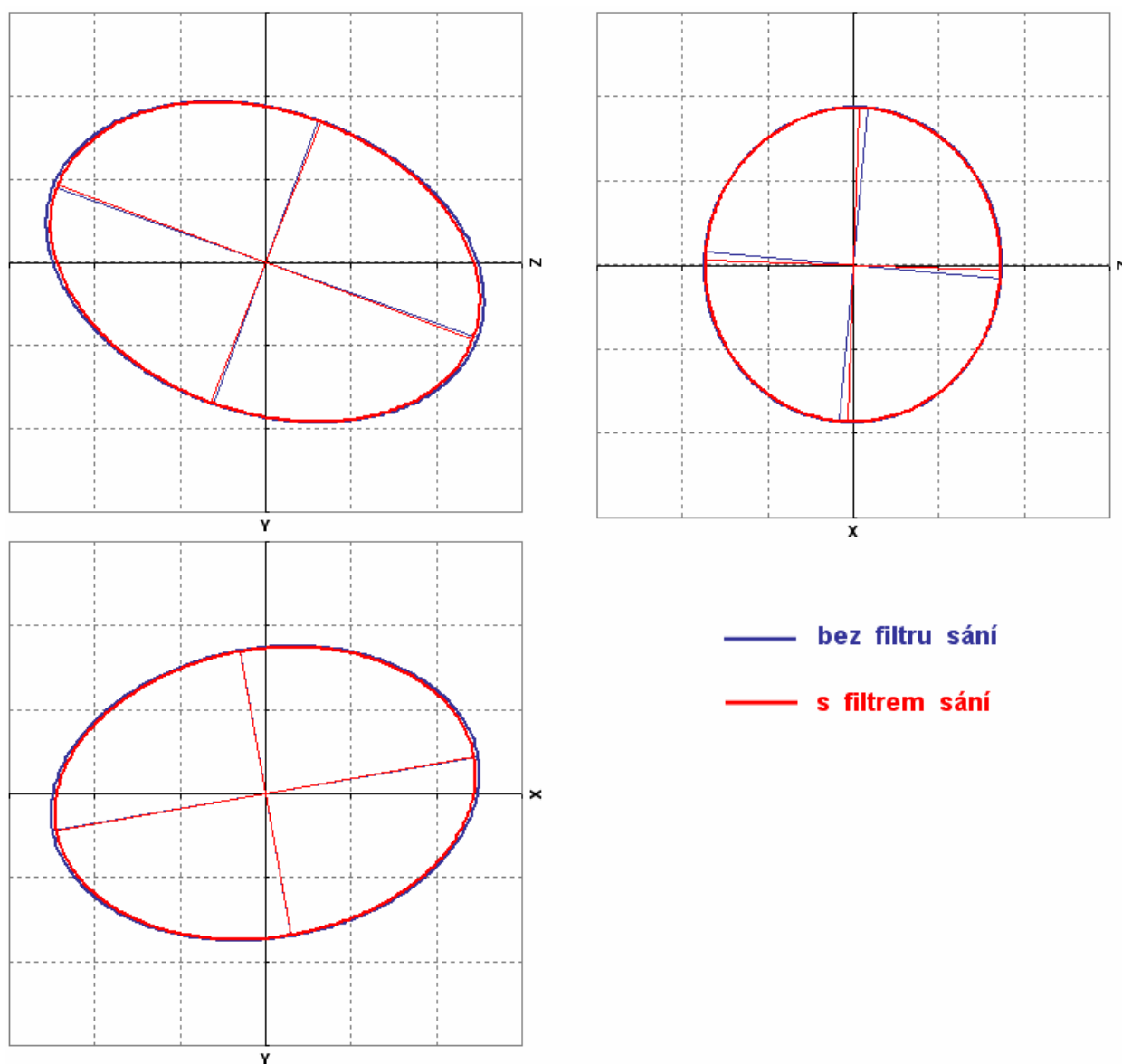
Pokud tyto změny vyjádříme procentuálně podle stejného vzorce jako v minulém případě (viz kap. 7.1), tak nám vyjde

$$\begin{vmatrix} 1,33 & 1,52 & -49,79 \\ 1,52 & 3,84 & 1,35 \\ -49,79 & 1,35 & 0,65 \end{vmatrix} [\%].$$

Změna tvaru a polohy ES motoru je patrná na následujících obrázcích.



Obr. 56: Elipsoid setrvačnosti agregátu firmy Škoda Auto (motor 1.4 59kW MPI s převodovkou MQ 200) s filtrem a bez filtru sání.



Obr. 57: Porovnání ES agregátu 1.4 MPI + MQ 200 s filtrem a bez filtru sání.

7.3 Elipsoid setrvačnosti motoru nákladního vozidla s příslušenstvím a bez něho

Úkolem bylo určení momentů setrvačnosti čtyřválcového motoru většího vozidla s označením „Avalon Engine 3.8 L“ ve třech hlavních osách. Pro měření ES byly

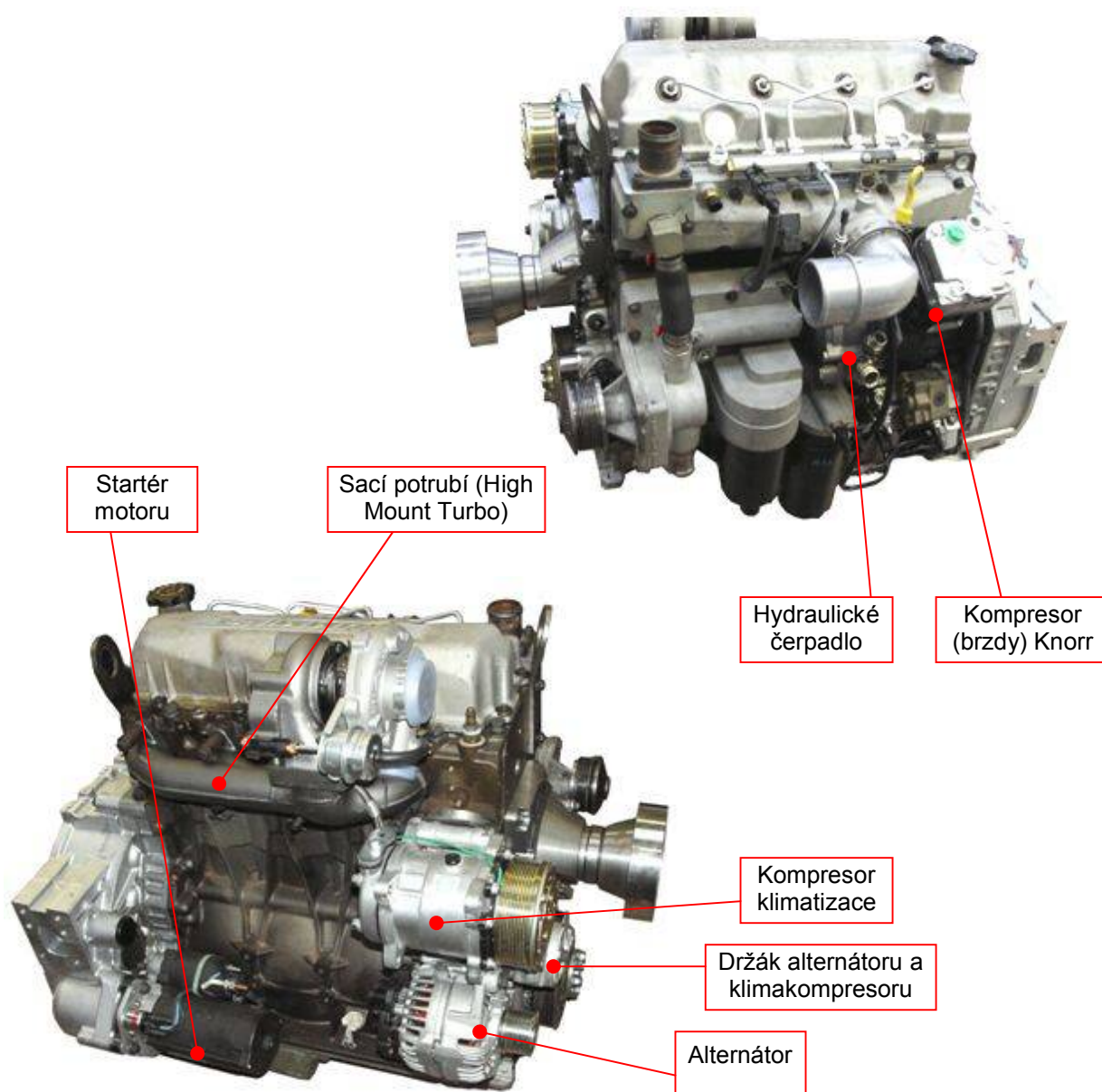


zvoleny tři varianty uspořádání příslušenství motoru, tyto varianty jsou blíže popsány v následující tabulce.

- bez příslušenství,
- s příslušenstvím (uspořádání „Standard Avalon Accessories”),
- s příslušenstvím (uspořádání „Industrial Applications Accessories”).

	Hmotnost (kg)	Bez příslušenství	Standard Avalon Accessories	Industrial Applications Accessories
Alternátor	6,934	<i>Ne</i>	<i>Ano</i>	<i>Ano</i>
Kompresor klimatizace	8,046	<i>Ne</i>	<i>Ano</i>	<i>Ano</i>
Kompresor (brzdy) Knorr	10,899	<i>Ne</i>	<i>Ano</i>	<i>Ano</i>
Držák alternátoru a klimakompresoru	5,797	<i>Ne</i>	<i>Ano</i>	<i>Ano</i>
Sací potrubí (Low Mount Turbo)	6,161	<i>Ano</i>	<i>Ano</i>	<i>Ne</i>
Hydraulické čerpadlo	2,291	<i>Ne</i>	<i>Ne</i>	<i>Ano</i>
Sací potrubí (High Mount Turbo)	4,495	<i>Ne</i>	<i>Ne</i>	<i>Ano</i>

Hmotnost motoru i s příslušenstvím je cca 370 kg. Rozdíl v hmotnosti motoru s a bez příslušenství činí přibližně 10 %. Při této změně hmotnosti měřeného motoru se nám ale osové momenty setrvačnosti měnily v rozmezí 15 až 20 %. Naměřené hodnoty jsou uvedeny dále v textu.



Obr. 58: Čtyřválcový motor Avalon Engine 3.8 L - uspořádání příslušenství „Industrial Applications Accessories“.



Bylo odebráno
hydraulické čerpadlo

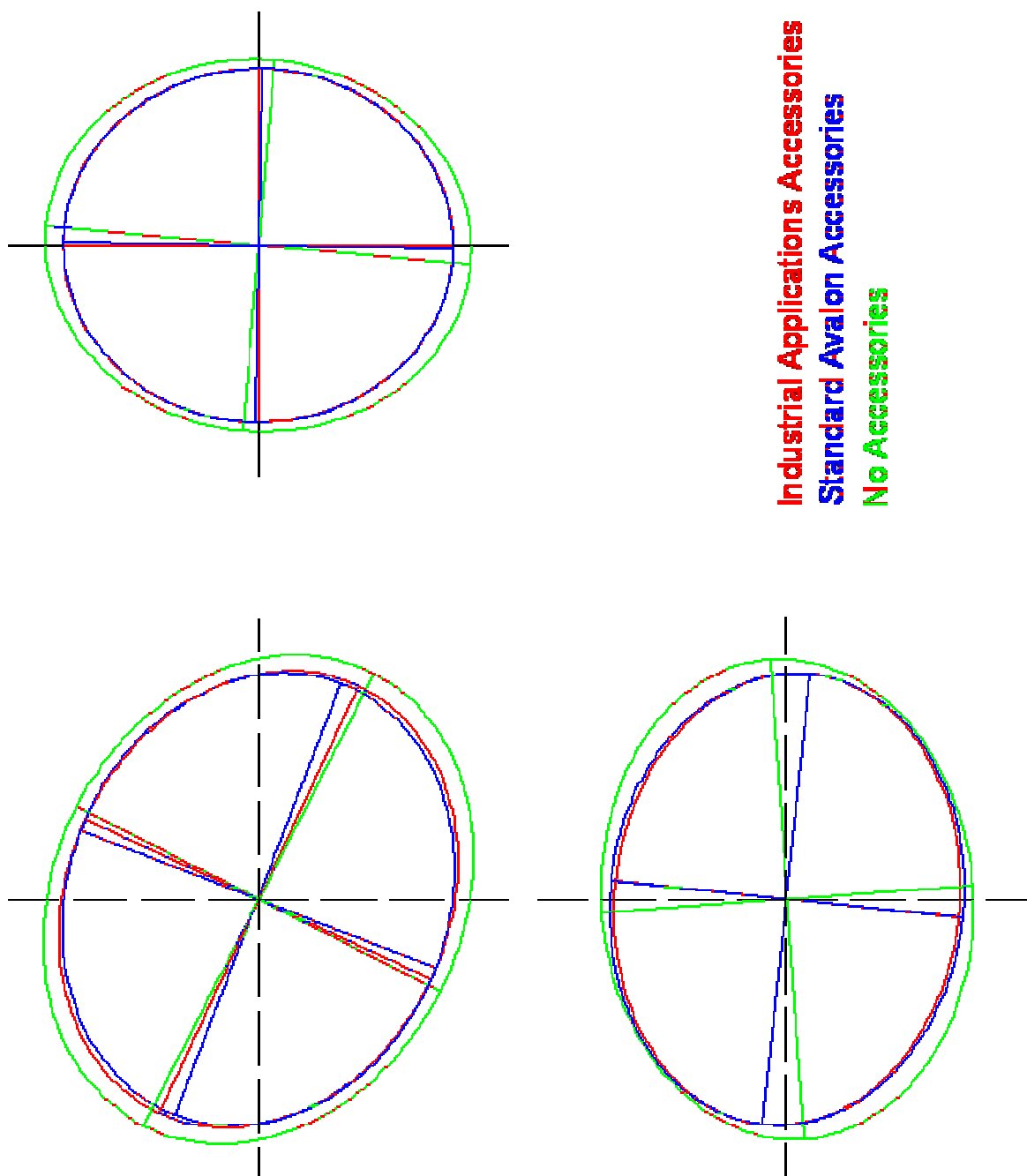


Bylo vyměněno sací
potrubí za typ
„Low Mount Turbo“

Obr. 59: Čtyřválcový motor Avalon Engine 3.8 L - uspořádání příslušenství
„Standard Avalon Accessories“.



Obr. 60: Čtyřválcový motor Avalon Engine 3.8 L - bez příslušenství.

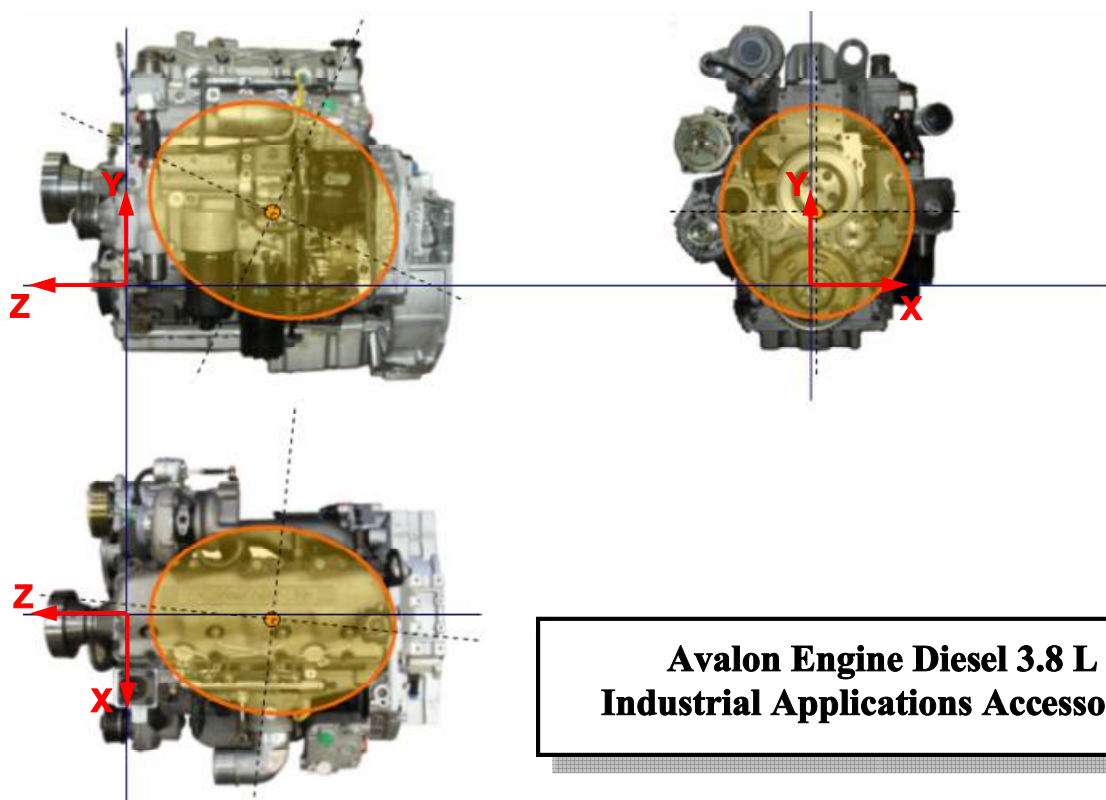


Obr. 61: Čtyřválcový motor Avalon Engine 3.8 L - porovnání ES motoru pro všechny tři varianty uspořádání příslušenství (schématické znázornění).

Rozdíl mezi ES motoru u dvou variant s příslušenstvím byl minimální, pokud změny matice setrvačnosti mezi variantami bez a s příslušenstvím vyjádříme procentuálně podle stejného vzorce jako v minulých případech (viz kap. 7.1 a 7.2), tak nám vyjde

$$\begin{vmatrix} 15,25 & -104,76 & -275,41 \\ -104,76 & 19,99 & 11,76 \\ -275,41 & 11,76 & 16,47 \end{vmatrix} [\%].$$

Změna ES motoru pro změřené varianty uspořádání příslušenství je patrná na předchozím obrázku.



Obr. 62: Ukázka ES motoru pro první variantu uspořádání příslušenství (Industrial Applications Accessories).

8 Závěr doktorské disertační práce

Předložená práce se zabývá experimentálním zjišťováním momentu setrvačnosti tělesa. Práce je orientována na vyhodnocování dat z měření na rozdílných typech agregátů, či motorů. Cílem bylo zjistit s velmi dobrou přesností polohu hlavních os setrvačnost a velikost elipsoidu setrvačnosti (kompletní matici setrvačnosti) agregátu z důvodu dalšího použití pro simulační výpočty (např. crash test vozidla) a vliv různých parametrů na velikost a polohu elipsoidu setrvačnosti.

K uskutečnění těchto cílů byla vyvinuta metodika měření k určení momentů setrvačnosti, polohy těžiště a hmotnosti agregátu, dále byly vypracovány specializované pomůcky pro měření a pro vyhodnocení naměřených dat byl zhotoven speciální software. Metodika byla ověřena při měření několika agregátů, či motorů v některých případech pro více variant uspořádání příslušenství motoru (devět agregátů a jeden motor používaných u osobních vozidel, jeden motor určený pro užitkový vůz). Měření se provádělo vždy bez náplní (tj. bez oleje a chladicí kapaliny).

Při návrhu metodiky měření byl dán velký požadavek na přesnost měření. Z tohoto důvodu bylo naměřeno vždy více hodnot a k určení elipsoidu setrvačnosti byla použita aproximace pomocí metody nejmenších čtverců. V první části kapitoly věnující se přesnosti měření bylo porovnání naměřených hodnot na tělese o známé matici setrvačnosti, dále se tato kapitola věnovala matematickému odvození přesnosti měření. U matematického odvození, kde bylo počítáno se všemi nepříznivými vlivy v maximální míře, vyšla přesnost měření řádově okolo šesti procent. U ověření měření na „známém“ tělese vyšla v prvním případě u pomocného rámu používaného pro agregáty osob. vozidel u jednoho osového momentu cca sedm procent. Po přidání dalších vhodně zvolených bodů měření se u druhého rámu zmenšila přesnost měření osových momentů setrvačnosti na dvě procenta. Dále bylo zvoleno tvarově jednoduché těleso určené ke kalibraci celého postupu měření. Relativní chyba mezi hodnotami naměřenými a vypočtenými CAD programem byla u osových momentů setrvačnosti do 1.5 % a u deviačního momentu vyšla 2.5 %.

Při sledování vlivu pootočení klikového hřídele na velikost a polohu elipsoidu setrvačnosti agregátu, či motoru bylo zjištěno, že jeden osový moment setrvačnosti samotného klikového mechanismu se změnil o 17 %. Tato nemalá změna se však do změny osových momentů setrvačnosti celého agregátu, či motoru promítla minimálně. Osové momenty setrvačnosti agregátu, či motoru se měnily jen v desetinách procenta (okolo 0,3 %), tzn. vliv polohy klikového hřídele je na celkový elipsoid setrvačnosti agregátu, či motoru zanedbatelný.

Na výsledné hodnoty momentů setrvačnosti a polohy těžiště má vliv přidávaná či odebíraná hmota v podobě příslušenství motoru. Velikost změny momentu setrvačnosti závisí na faktorech: momentu setrvačnosti dané součásti, hmotnosti (m) a vzdálenosti od těžiště (e). Uvedený vztah $I_0 = I_{0s} + m \cdot e^2$ známe jako Steinerovu větu. Velký význam má vzdálenost od těžiště, kdy poměrně i malá hmota dokáže ovlivnit celkový moment setrvačnosti agregátu. K posouzení vlivu příslušenství bylo zvoleno několik variant měření motorů, či agregátů s různým uspořádáním. Výsledky jsou uvedeny v kap. 7. Například u měření motoru nákladního automobilu 3.8 L došlo téměř k 20-ti procentní změně osového momentu setrvačnosti při přibližně 10-ti procentní změně hmotnosti. Navržená metodika měření dokázala odhalit i poměrně malý rozdíl v měření v závislosti na použití příslušenství agregátu. Například bylo možno sledovat změnu při odebrání filtru sání u motoru (viz výsledky měření agregátu - motor 1.4 59kW MPI s převodovkou MQ 200), který tvořil 0,9% celkové hmotnosti agregátu.

Závěry z výsledků disertační práce rozšiřují oblast poznání a spolu s vytvořenými postupy a nástroji k vyhodnocování naměřených dat poskytují východisko pro další experimentální výzkum v oblasti určování elipsoidu setrvačnosti motoru a vlivu na něj.

Způsob zpracování práce umožňuje použít jednotlivé kapitoly i k prezentaci ve výuce oboru konstrukce strojů a zařízení. Pokračováním práce by mohlo být se dále zabývat podrobněji některými dalšími problémy, vliv kapalinových náplní motoru, zjednodušení metody (její pracnosti) při zachování přesnosti měření. Měřicí a výpočtový systém, připravený k účelu disertace, může být vhodným nástrojem pro takové pokračování.



Seznam použité literatury

- [1] VLK, F.: Zkoušení a diagnostika motorových vozidel, Nakladatelství a vydavatelství vlk, BRNO 2001
- [2] BRADSKÝ, Z – VRZALA, R.: Mechanika III. /Dynamika/, VŠST, Liberec 1990
- [3] BRADSKÝ, Z – VRZALA, R.: Mechanika III. – Příklady z dynamiky, VŠST, Liberec 1987
- [4] KOŽEŠNÍK, J.: Dynamika Strojů. SNTL Praha 1958
- [5] KOŽEŠNÍK, J.: Základy teorie přístrojů. SNTL/ALFA Bratislava 1987
- [6] JULIŠ, K. – BREPTA, R. a kol.: Mechanika II. díl Dynamika. SNTL Praha 1987
- [7] PŮST, L. - LADA, M.: Pružné ukládání strojů. SNTL Praha 1965
- [8] BRÁT, V. – BROUSIL, J.: Dynamika, ČVUT v Praze, 1967
- [9] SLAVÍK, J. – STEJSKAL, V. – ZEMAN. V.: Základy dynamiky strojů, ČVUT v Praze 1997
- [10] BARTONÍČEK, L.: Konstrukce pístových spalovacích motorů, VŠST, LIBEREC 1992
- [11] HONCŮ, J.: Vybrané statě z částí a mechanismů strojů I. TUL Liberec 2004
- [12] 15. Aachen Colloquium, EUROGRESS Aachen, 2006
- [13] 5. Tag des Fahrwerks, Institut für Kraftfahrwesen Aachen – RWTH Aachen, 09.10.2006
- [14] Technická zpráva firmy Škoda Auto At 3374-D, odd. 1-231
- [15] Podklady firmy Škoda Auto
- [16] Podklady firmy Cummins Inc., England
- [17] Podklady firmy Hottinger Baldwin Messtechnik GmbH
- [18] CALETKA, J.: Uložení motoru na brzdovém stanovišti, Diplomová práce, TU v Liberci - KVM 2007



- [19] ČIHÁK, M.: Uložení motoru ŠKODA-LIAZ v autobusech KAROSA, Diplomová práce, TU v Liberci - KVM 1997
- [20] Technická zpráva KAROSA 108/935/Pe-Bu (zkušební protokol č. 180/69), 1969
- [21] Technická zpráva Ingersoll-Rand Equipment Manufacturing Czech Republic s.r.o., Centrum výzkumu a vývoje Praha, Určení setrvačných momentů 4-válcového motoru 2.0TDi-PD s převodovkou, 2006
- [22] www.auto.cz
- [23] BRZEZINA, M. – DVOŘÁK, M. – KALOUSEK, Z. – SALAČ, P. – STANĚK, J.: Matematika 4, TU v Liberci, Liberec 1996
- [24] www.wikipedia.cz
- [25] BASSHUYSEN, S. – SCHÄFER, F.: Handbuch Verbrennungsmotor, ATZ/MTZ Fachbuch 2005
- [26] GOERTZ, H.: Identifikation von Fahrzeugträgheitsparametern in Fahrversuchen und auf Prüfständen, Institut für Kraftfahrwesen Aachen der RWTH Aachen, ISBN 978-3-925194-89-4
- [27] PORTEŠ, P – BLAŽÁK O.: Utilization of optical systems Tritop – Atos in vehicle dynamic, Advances in Automotive Engineering (Volume II), ISBN 978-80-7399-497-6
- [28] BEST, A.: Moment of inertia measurement system, MIMS Description and Specification, Anthony Best Dynamics, 2004
- [29] SHARP, R.: The Measurement of Mass and Inertial Properties of Vehicles and Components, Cranfield University, Cranfield UK, 1997
- [30] ALLEN, R. – KLYDE, D. – ROSENTHAL T. – SMITH, M.: Estimation of passenger vehicle internal properties and their effect on stability and handling, 2003 SAE World Congress Detroit (2003-01-0966)
- [31] ANDREATTA, D. – HEYDINGER, G. – BIXEL R. – COOVERT, D.: Inertia measurements of large military vehicles, 2001 SAE World Congress Detroit (2001-01-0792)



- [32] BRABEC, P. – MALÝ, M. - VOŽENÍLEK, R.: Moment setrvačnosti agregátu. ZPRÁVA SM535/2006. TU v Liberci, Liberec 2006.
- [33] BRABEC, P. – MALÝ, M. - VOŽENÍLEK, R.: Moment setrvačnosti agregátu II. ZPRÁVA SM537/2006. TU v Liberci, Liberec 2006.
- [34] BRABEC, P. – VOŽENÍLEK, R.: Inertia ellipsoid of engine Cummins Avalon Engine Diesel 3.8 L. ZPRÁVA SM568/2007. TU v Liberci, Liberec 2007.
- [35] BRABEC, P. – VOŽENÍLEK, R.: Moment setrvačnosti kola. ZPRÁVA SM590/2008. TU v Liberci, Liberec 2008.
- [36] BRABEC, P. – VOŽENÍLEK, R.: Elipsoid setrvačnosti agregátu - Škoda Auto 1.6 76kW TDI (DPF) Common Rail + MQ250. ZPRÁVA SM595/2008. TU v Liberci, Liberec 2008.

PŘÍLOHY

1) Kalibrační protokoly

- měření modulu pružnosti ve smyku torzního drátu
- kalibrační list (váha Satorius)
- kalibrační list (závaží)
- protokol o zkoušce (měřidlo doby kmitu)
- ověřovací certifikát (měřicí karta do ústředny)
- protokol o zkoušce (snímače sil – U3, S9)

2) Protokoly z měření motoru 1.2 40 kW MPI (zobrazení zjištěného elipsoidu setrvačnosti)

3) Zjištěné elipsoidy setrvačnosti u měřených agregátů (motorů)

- agregát 1.9 96 kW TDI - MQ 350
- agregát 1.9 74 kW TDI - MQ 250
- agregát 2.0 103 kW TDI - DQ 250
- agregát 1.2 47 kW MPI - MQ 200
- agregát 1.6 77 kW MPI - MQ 200
- agregát 1.9 77 kW TDI (DPF) - MQ 250
- agregát 2.0 103 kW TDI (DPF) - MQ 350
- agregát 1.4 59 kW MPI - MQ 200
- motor 1.2 40 kW MPI
- motor Avalon Engine Diesel 3.8 L
- agregát 1.6 76 kW TDI (DPF) Common Rail- MQ 250