FAKULTA STROJNÍ TUL

Disertační práce

Využití pokročilých výpočetních modelů pro predikci odpružení výlisků

Studijní program:	P2303 Strojírenská technologie
Studijní obor:	Strojírenská technologie
Autor práce:	**Ing. David Koreček**
Školitel práce:	doc. Ing. Pavel Solfronk, Ph.D.
	Katedra strojírenské technologie

Liberec 2023

Prohlášení

Prohlašuji, že svou disertační práci jsem vypracoval samostatně jako původní dílo s použitím uvedené literatury a na základě konzultací s vedoucím mé disertační práce a konzultantem.

Jsem si vědom toho, že na mou disertační práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb., o právu autorském, zejména § 60 – školní dílo.

Beru na vědomí, že Technická univerzita v Liberci nezasahuje do mých autorských práv užitím mé disertační práce pro vnitřní potřebu Technické univerzity v Liberci.

Užiji-li disertační práci nebo poskytnu-li licenci k jejímu využití, jsem si vědom povinnosti informovat o této skutečnosti Technickou univerzitu v Liberci; v tomto případě má Technická univerzita v Liberci právo ode mne požadovat úhradu nákladů, které vynaložila na vytvoření díla, až do jejich skutečné výše.

Současně čestně prohlašuji, že text elektronické podoby práce vložený do IS/STAG se shoduje s textem tištěné podoby práce.

Beru na vědomí, že má disertační práce bude zveřejněna Technickou univerzitou v Liberci v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb., o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších předpisů.

Jsem si vědom následků, které podle zákona o vysokých školách mohou vyplývat z porušení tohoto prohlášení.

15. května 2023 Ing. David Koreček

ANOTACE

Disertační práce „Využití pokročilých výpočetních modelů pro predikci odpružení výlisků“ se zabývá možnostmi matematického modelování přechodu materiálu do plastického stavu a následného deformačního chování v oblasti rozvinutých plastických deformací a nakonec korektní predikcí odpružení materiálu. V rámci řešení práce je kladen důraz na testování nových typů materiálů se specifickými užitnými vlastnostmi s možností aplikace těchto materiálů v automobilovém, leteckém a energetickém průmyslu.

Cílem práce je stanovení vhodné metodiky získávání a vyhodnocování potřebných materiálových dat nutných pro definici pokročilých MKP modelů s jejich následnou implementací do softwaru umožňujícího numerické simulace procesu plošného tváření plechů. Prováděné experimenty a numerické simulace procesu tváření jsou cíleně zaměřeny především na verifikaci výpočetních materiálových modelů v kombinaci se sledováním vlivu vybraných technologických a procesních parametrů na průběh deformace, a po odeznění zatěžujících silových účinků, i následného odpružení materiálu. Provedené numerické výpočty procesu deformace a odpružení materiálu jsou zde porovnány s výsledky reálného procesu zhotovení výlisku z plechu. V závěru disertační práce je hodnocen význam a vliv zvolených materiálových výpočetních modelů a vybraných parametrů s ohledem na průběh deformace a následného odpružení materiálu.

KLÍČOVÁ SLOVA

Numerická simulace, tváření plechu, materiálový výpočtový model, metoda konečných prvků, analýza mechanických vlastností, deformační chování materiálu, podmínka plasticity, deformační zpevnění materiálu, odpružení materiálu, predikce deformace, predikce odpružení.

ANNOTATION

The submitted thesis "The Utilization of Advanced Computational Models for Prediction Spring-back of Stampings" deals with the possibilities of mathematical modelling the material transition into the plastic state and subsequent deformation behaviour in the area of large plastic deformations and finally the proper prediction of material spring-back. The work focuses on testing new types of materials with specific utility properties as well as with the application possibilities of these materials in the automotive, aerospace and energy industries.

The aim of the thesis is to determine a suitable methodology for obtaining and evaluating the needed material data, which are required to properly define advanced FEM models with their subsequent implementation into software enabling numerical simulations of the sheet metal forming process. Performed experiments and numerical simulations of the forming process are focused mainly on the verification of computational material models in combination with monitoring the effect of selected technological and process parameters on the course of deformation and after unloading on the subsequent spring-back of the material. The performed numerical simulations of deformation and spring-back process are compared with the results measured from real sheet metal forming. In the conclusion of the thesis, the significance and influence of the chosen material computational models as well as selected parameters with respect to the deformation process and subsequent material spring-back is evaluated.

KEYWORDS

Numerical Simulation, Sheet Metal Forming, Material Computation Model, Finite Element Method, Analysis of Mechanical Properties, Deformation Behaviour of Material, Yielding Criterion, Strain Hardening of Material, Material Spring-back, Deformation Prediction, Spring-back Prediction.

PODĚKOVÁNÍ

V první řadě bych chtěl poděkovat svému školiteli doc. Ing. Pavlu Solfronkovi, Ph.D. a Ing. Bc. Jiřímu Sobotkovi, Ph.D. za cenné rady a připomínky při vypracování této disertační práce a podporu při experimentálním výzkumu. Dále děkuji především celé své rodině za velkou trpělivost, pochopení a podporu při vypracování této disertační práce.

OBSAH

Seznam použitých zkratek a symbolů

Označení	Rozměr	Význam
A	%	tažnost
b	m	šířka
C	Pa	modul monotónního zpevnění
c	$J.Kg^{-1}.K^{-1}$	měrná tepelná kapacita
D	s^{-1}	tenzor rychlosti deformace
E	Pa	Youngův modul pružnosti
e	1	jednotkový vektor
F	N	vektor síly
F	1	funkce plasticity
f_i	$N.Kg^{-1}$	měrná objemová síla
f	J	Helmholzova volná energie
G	1	relaxační funkce
g	1	jednotkový vektor lokální báze
I	1	jednotkový tenzor
J	1	creepova funkce
K	J	kinetická energie
l	m	délka
$M^{(ob)}$	Nm	výsledný moment sil
n	1	exponent deformačního zpevnění
q	m	vektor zobecněných posuvů
r	1	součinitel normálové anizotropie
r	1	polohový vektor v kartézkých souřadnicích
$R^{(ob)}$	N	výslednice objemových sil
S	m^2	plocha
S	1	deviátor napětí
T	Pa	2. Piolův-Kirchhoffův tenzor napjatosti
T	°C	teplota
t	m	tloušťka
U	J	vnitřní energie
u	m	vektor posunutí
V	m^3	objem
v	m, m s^{-1}	složka posuvu, rychlost posuvu
x,y,z	m	globální kartézské souřadnice

Y	1	tenzor zahrnující anizotropní chování
α	°	úhel
∂	1	parciální derivace
ε	1	poměrná deformace
ε_{ij}	1	Greenův tenzor deformace
ε^{e}	1	elastická část tenzoru deformace
ε^{p}	1	plastická část tenzoru deformace
φ	1	logaritmická deformace
μ	1	součinitel smykového tření
ν	1	normálový vektor
η	$J.K^{-1}$	entropie
ρ	$kg.m^{-3}$	hustota materiálu
σ	Pa	skutečné, Cauchyho napětí
τ	Pa	1. Piolův-Kirchhofův tenzor napětí
τ	Pa	smykové složky tenzoru napětí
Ω	1	oblast kontinua
ξ	1	Almansiův deformační tenzor
MKP		metoda konečných prvků
FEM		Finite Element Method

1 ÚVOD

Na výlisky z plechů jsou v současné době kladeny vysoké požadavky především z hlediska pevnosti, kvality povrchu a rozměrové přesnosti a stálosti. Tuhost a pevnost tvářeného dílu je zásadně ovlivňována velkou mírou prostřednictvím tvarové koncepce tohoto dílu, dále zvoleným materiálem použitým na výrobu daného výlisku a samozřejmě technologickým procesem výroby. Nutnou podmínkou pro návrh správného technologického postupu výroby je tedy v první řadě vyřešení deformace zvoleného materiálu pro dosažení konečného tvaru výlisku v požadované kvalitě. S tím dále souvisí přípustné ztenčení materiálu, dostatečná deformace plechu, zvlnění materiálu, eliminace vzniku pohledových vad ad.

Problematika dosažení tvarové a rozměrové přesnosti tvářeného dílu je úzce svázána především s odpružením materiálu, které je důsledkem elastické deformace provázející proces plastického přetvoření materiálu. Nežádoucí jev, který odpružení materiálu v tvářecím procesu představuje, je možné eliminovat pouze vhodným návrhem technologických operací a tvarovou korekcí lisovacích nástrojů. Trendy dnešní doby dávají zelenou stále se vyvíjejícím designovým změnám nových typů karoserií automobilů, což významně zvyšuje požadavky na tvarovou a rozměrovou přesnost výlisků karosářských dílů a způsobuje tím nutnost zavádět nové postupy a metody vedoucí k dosažení těchto cílů na straně výrobců. Do této oblasti patří především zvyšování podílu matematického modelování technologických procesů v předvýrobních i výrobních etapách. To poskytuje možnosti rychle, proměnlivě, v čas a především ekonomicky reagovat na aktuální problematiku koncepce a výroby tvarových součástí. Tyto aspekty jsou důvodem a přímo vybízejí k výzkumu v oblasti zavádění nových typů materiálů, popisu jejich deformačního chování a také zpřesňování materiálových numerických modelů využitých v matematickém modelování těchto procesů. Řešením těchto otázek se v dnešní době zabývají univerzitní a výzkumná pracoviště po celém světě.

Výzkum numerické podpory vyráběných dílů pomocí procesu tváření plechů se v dnešní době již poměrně běžně vyskytuje v nejrůznějších odvětvích automobilového, leteckého nebo energetického průmyslu, nicméně problémem je dosažení požadované přesnosti numerického výpočtu s ohledem na tvarovou koncepci, požadovanou přesnost a jakost vyráběných výlisků v korelaci s výlisky získanými pomocí reálného výrobního procesu lisování tvarových součástí. Současné požadavky a trendy zavádění nových typů materiálů se specifickými užitnými vlastnostmi v kombinaci se stále rostoucí tvarovou náročností vyráběných dílů sebou přináší mnoho problémů provázejících samotný výrobní proces zhotovení výlisku. Jedním z největších problémů, který je nutné v procesu lisování vyřešit, je vedle porušení materiálu vlivem mezní deformace jev odpružení materiálu. Odpružení při tažení výlisků je na rozdíl od odpružení při ohýbání mnohem složitější proces, ve kterém se projevuje více jednotlivých faktorů. Při tažení výlisků je rozdíl především v průběhu samotné deformace materiálu, kdy u konvenční technologie ohýbání dochází na ohybové hraně v ohýbaném průřezu materiálu k tahové napjatosti na vnější straně ohybu a k tlakové napjatosti na vnitřní straně ohybu. V průběhu ohýbání se mění velikost těchto napětí, ale nemění se jejich smysl. Naopak při technologii tažení dochází ke změně stavu napjatosti na tažné hraně, kdy je materiál na tažné hraně nejprve ohýbán a následně opět rovnán. Dochází zde k uplatnění tzv. Bauschingerova jevu během zpevňování materiálu a tento jev do velké míry komplikuje definici a matematický popis deformačního zpevnění materiálu během numerické simulace tváření a navíc úzce souvisí a ovlivňuje definovanou podmínku plasticity použitou v numerickém výpočtu procesu deformace. Tato problematika je v dnešní době ve velkém měřítku diskutována a je možné ji nalézt uvedenou především v odborných publikacích např. prof. Henka Vegtera z Tata Steel Europe Limited TATA [1–7] nebo prof. Pavla Hory z ETH Zürich [8–13]. Dále se touto problematikou zabývají např. prof. Takeshi Uemoriho z Okayama University [14–19] nebo doc. Takeshi Yoshida z Hiroshima University [20–26], ad. Z jejich publikovaných výsledků výzkumu je možné učinit závěry a předpoklady, že pro definici a popis pokročilého matematického modelování chování materiálu během deformace a jeho následného odpružení je třeba zahrnout vliv Bauschingerova efektu, pro jehož definování je nutné provedení a implementace cyklických testů materiálu v tahu a tlaku.

S ohledem na výše diskutovanou a popsanou problematiku se disertační práce „Využití pokročilých výpočetních modelů pro predikci odpružení výlisků“ bude zabývat možnostmi matematického modelování přechodu materiálu do plastického stavu a následného deformačního chování v oblasti rozvinutých plastických deformací a nakonec korektní predikcí odpružení materiálu. Jedním z prvotních cílů této práce je stanovení vhodné metodiky získávání a vyhodnocování potřebných materiálových dat nutných pro definici pokročilých MKP modelů s jejich následnou implementací do softwaru umožňujícího numerické simulace procesu plošného tváření plechů. Tato fáze řešení disertační práce předpokládá stanovení a provedení souboru experimentálního testování materiálu za účelem získání potřebných vstupních parametrů a materiálových charakteristik pro definici materiálových MKP modelů použitých pro numerickou simulaci procesu deformace a následného odpružení materiálu. Prováděné experimenty budou cíleně zaměřeny především na verifikaci matematických modelů v kombinaci se sledováním vlivu vybraných technologických a procesních parametrů na průběh deformace, a po odeznění zatěžujících silových účinků, i následného odpružení materiálu. Provedené numerické výpočty procesu deformace a odpružení budou porovnány s výsledky reálného procesu zhotovení výlisku z plechu. V závěru disertační práce bude hodnocen význam a vliv materiálových modelů a vybraných parametrů na průběh deformace a odpružení materiálu s ohledem na možnosti aplikace těchto modelů pro proces simulace plošného tváření.

Při řešení této práce bude kladen zvláštní důraz na testování nových typů materiálů se specifickými užitnými vlastnostmi s možností aplikace těchto materiálů v automobilovém, leteckém a energetickém průmyslu. Pro testování těchto materiálů se předpokládá využití pokročilých metod bezkontaktní analýzy deformace pomocí systémů ARAMIS HS od firmy GOM GmbH nebo 3D video extenzometru od firmy Sobriety s.r.o. Vedle standardních testů jednoosého zatěžování pomocí trhacího zařízení TIRA Test 2300 pro získání základních mechanických vlastností, bude dále využíváno hydraulického zařízení pro biaxiální testy materiálu a dalšího strojního a laboratorního vybavení katedry strojírenské technologie. Pro definici pokročilých matematických modelů zahrnujících vliv Bauschingerova efektu bude využito zařízení pro cyklické zkoušky tenkých plechů. Pro samotné numerické simulace zde bude použit špičkový výpočetní software PAM STAMP 2G.

2 TEORETICKÁ ČÁST

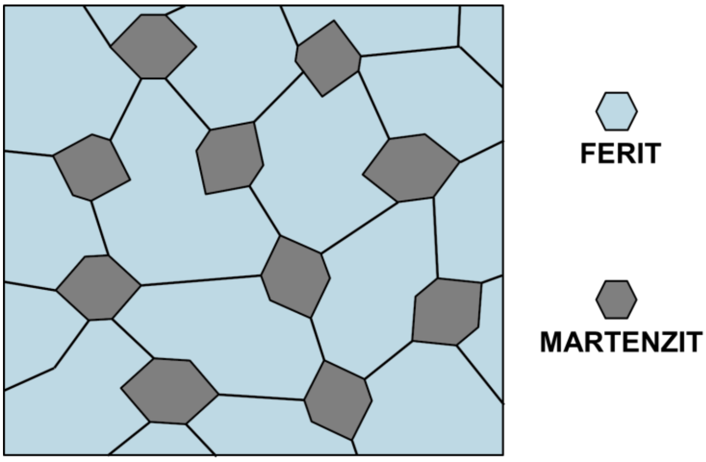
Teoretická část disertační práce se zabývá popisem a rozborem jednotlivých dílčích celků, které jsou zaměřené na jednotlivé oblasti související s problematikou disertační práce. V následujících kapitolách je provedena rešerše, charakteristika a popis vybraných materiálů se specifickými vlastnostmi, deformačního chování materiálu, materiálového testování pro popis deformačního chování materiálu a problematika numerické simulace plošného tváření materiálu.

2.1 MATERIÁLY SPECIFICKÝCH UŽITNÝCH VLASTNOSTÍ APLIKOVATELNÉ V AUTOMOBILOVÉM, LETECKÉM A ENERGETICKÉM PRŮMYSLU

Současným trendem v oblasti zpracování a použití plechů v technické praxi je získat co možná nejlepší poměr mezi pevností a tvářitelností materiálu při současném zachování požadovaných vlastností jako je například korozní odolnost, nízká měrná hmotnost a v neposlední řadě zachování přijatelné ceny materiálu. Pojmem materiály se specifickými užitnými vlastnostmi se rozumí materiál, který vykazuje nadstandardní hodnoty v oblasti mechanických vlastností, příznivý poměr pevnosti, měrné hmotnosti a tvárnosti nebo materiály se zvýšenou odolností proti korozi. Použití těchto materiálů v technické praxi je však stále do jisté míry limitováno jejich vysokou cenou a nedostatkem zkušeností s jejich zpracováním.

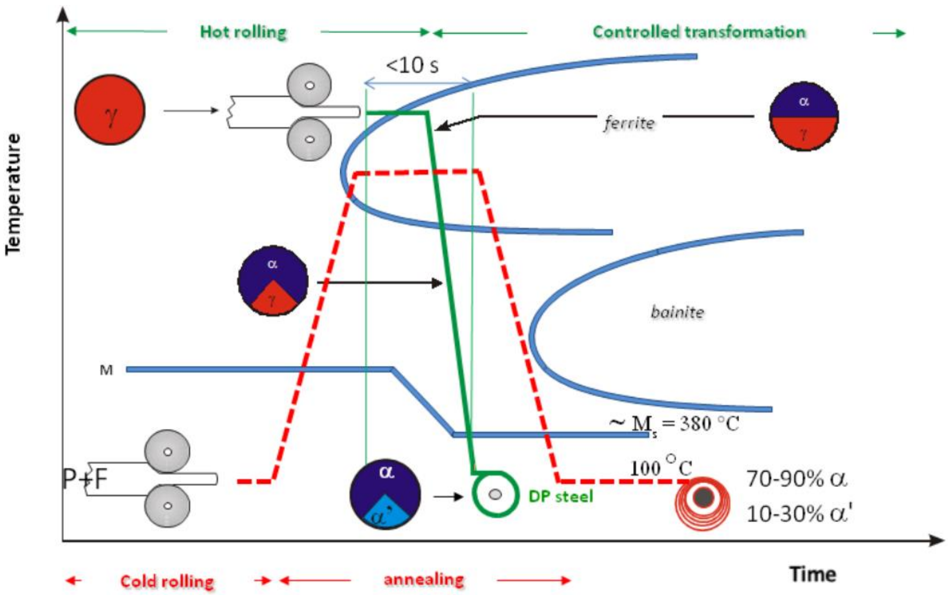
2.1.1 Dvoufázová ocel - Dual Phase Steel

Dvoufázová ocel je materiál, který je založen na bázi Mangan-Křemíkové slitiny s nízkým až středním obsahem uhlíku. Ze strukturního hlediska je tento materiál tvořen feritickou matricí. Uvnitř této matrice se vyskytují malé oblasti tvrdého martenzitu (5 až 50% objemu), které mohou obsahovat zbytkový austenit v závislosti na složení a způsobu zpracování, nebo při požadavku zvýšené tvárnosti na střižné hraně. Díky základní feritické matrici materiál vykazuje dobrou tvářitelnost a části tvrdého martenzitu v této matrici pak zajišťují vysoké hodnoty pevnosti. Tento materiál je schopen absorbovat velké množství energie. Během tváření tohoto materiálu je deformace koncentrována v oblastech feritické fáze s nižší pevností, která obklopuje ostrovy martenzitu. Díky tomu tento materiál vykazuje poměrně vysoké deformační zpevnění při tváření za studena. Příčinou tohoto jevu je shromažďování se dislokací kolem oblastí tvrdé martenzitické fáze během procesu tváření materiálu. Struktura dvoufázové oceli je zobrazena na **Obr. 2.1**, kde je možné vidět ilustrativní rozložení jednotlivých částí martenzitu v základní feritické fázi, matrici [27–29].



Obr. 2.1 Strukturní schéma dvoufázové ocele

Tyto DP oceli jsou vyráběny pomocí řízeného ochlazování austenitické nebo dvoufázové feriticko austenitické struktury v kombinaci s válcováním materiálu. U materiálů válcovaných za tepla je po válcování při protnutí křivky ferit start zahájena feritická přeměna, která probíhá tak dlouho, dokud nevznikne požadovaná dvoufázová feriticko-austenitická struktura, následuje řízené ochlazování. Během řízeného ochlazování dochází k protnutí křivky martenzit start a austenit transformuje na martenzit. U materiálů válcovaných za studena je zapotřebí provést ohřev a následné žíhání, pro tvorbu feriticko-austenitické struktury. Tato přeměna je opět následována řízeným ochlazováním a tvorbou martenzitické fáze. V závislosti na výrobním procesu může být ve výsledné struktuře přítomno malé množství bainitu nebo zbytkového austenitu [28, 30, 31].

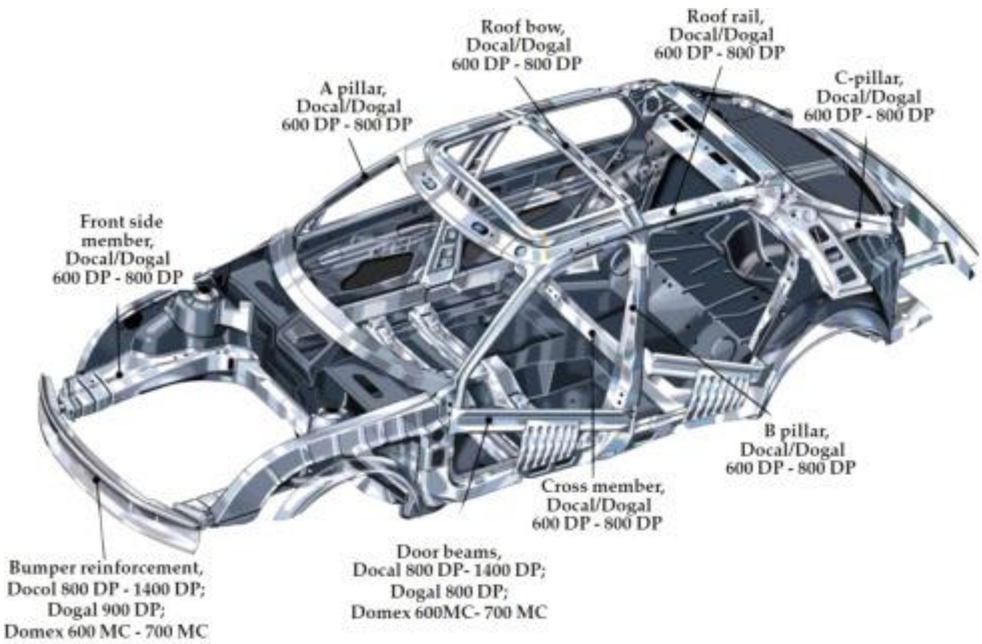


Obr. 2.2 Schéma procesu výroby dvoufázové oceli [32]

Další devízou těchto ocelí je, že vykazují tzv. „Bake hardening effect“. Tento jev se vyznačuje významným zvýšením meze kluzu během nízkoteplotního tepelného zpracování, například při vytvrzování barvy na karosářských dílech. Hlavním mechanismem zpevnění je difundování atomů uhlíku do napěťových pásem, kde se vyskytují dislokace. Velikost BH efektu závisí na velikosti deformace před tepelným zpracováním. S rostoucím stupněm předdeformace, klesá absolutní hodnota přírůstku pevnosti vlivem BH efektu [27, 28, 33].

Z pohledu chemického složení je pro dvoufázové ocele typický obsah uhlíku okolo 0,1 až 0,2 %, dále je zde obsaženo cca 1,5 - 2,5% manganu, 1% křemíku, 0,04% hliníku a příměsi dalších doprovodných prvků jako je chrom, molybden a další. Uhlík má zde funkci stabilizace austenitu a dále určuje distribuci jednotlivých fází. Mangan je austenitotvorný prvek, dále potlačuje perlitickou transformaci. Křemík a hliník jsou feritotvorné prvky, které zabraňují tvorbě cementitu. Dále křemík zpevňuje feritickou fázi a přítomnost hliníku zvyšuje teplotu martenzit start [34, 35].

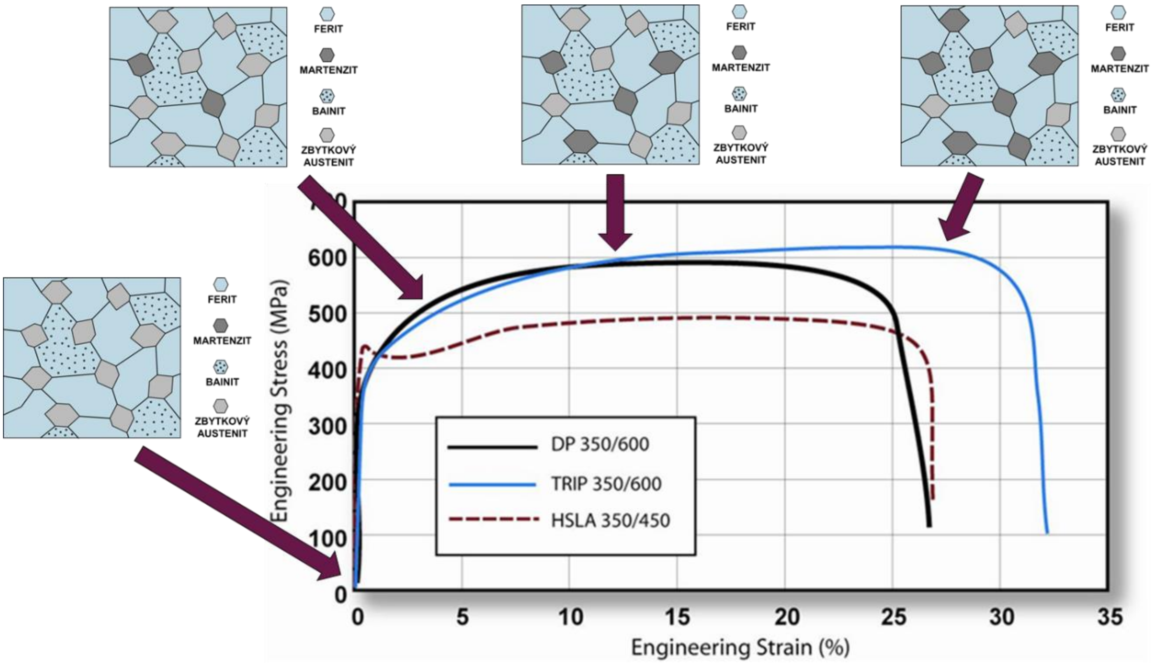
Použití a implementace těchto materiálů je nejčastější v automobilovém průmyslu, kdy se pro svou vysokou pevnost používají pro díly karoserie, které mají během případného nárazu absorbovat velké množství energie. Jedná se například o vnější dveře (DP300/500), vnější kapotu (DP350/600), B-sloupek (DP600/980) nebo střešní lišty (DP700/1000) [28, 29].



Obr. 2.3 Použití dvoufázové oceli na karoserii automobilu [28]

2.1.2 Třífázová ocel - TRIP Steel

Třífázová ocel neboli ocel s transformačně indukovanou plasticitou. Struktura tohoto materiálu je založena na feriticko-bainitické matrici. Uvnitř této matrici se dále vyskytuje ve výchozím stavu 5 až 10 procent zbytkového metastabilního austenitu, který se během následného procesu tváření vlivem deformace transformuje na martenzitickou fázi („TRIP effect“). Aby bylo možné dosáhnout této transformace, musí být ve zbytkovém austenitu přítomno dostatečné množství uhlíku, který snižuje teplotu martenzit start na úroveň pokojové teploty. Struktura třífázové oceli v průběhu procesu tváření materiálu, kdy vlivem deformace dochází k transformaci zbytkového austenitu, který se účastní deformačního procesu, na martenzit, je graficky znázorněna na [27, 36].

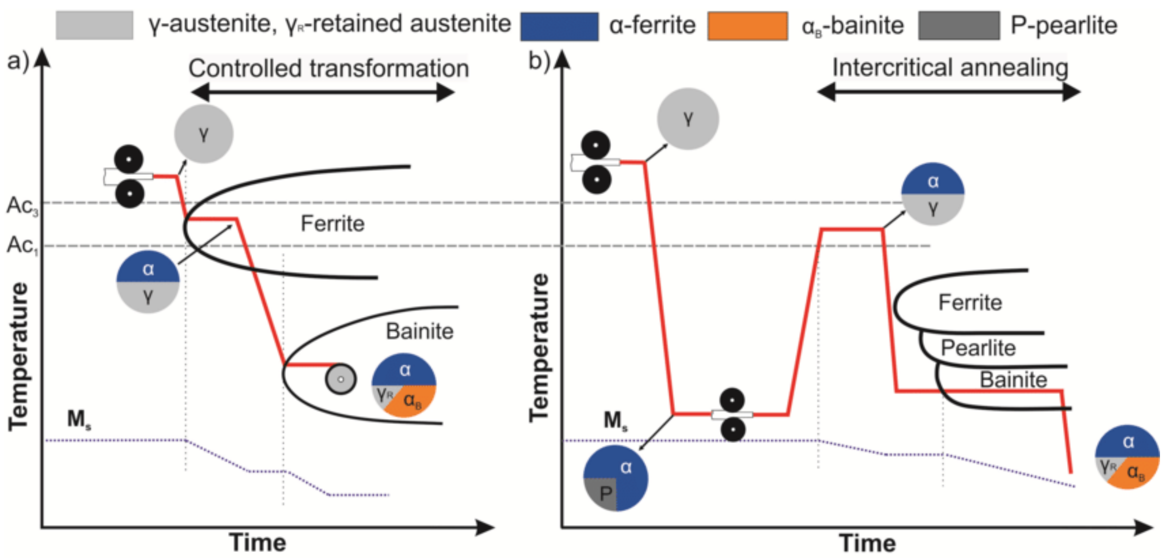


Obr. 2.4 Strukturní schéma třífázové ocele v průběhu deformace materiálu

Mechanismus zpevňování během deformace je podobný jako u dvoufázových DP ocelí, kdy opět dochází k hromadění se dislokací kolem hranic zrn martenzitické fáze uvnitř základní feriticko-bainitické matrice. U TRIP ocelí je tento jev navíc doprovázen „TRIP effectem“, kdy se zbytkový austenit s rostoucím namáháním materiálu postupně transformuje na martenzit, což zvyšuje rychlost zpevňování při vyšších stupních deformace. Rychlost zpevňování u těchto ocelí je podstatně vyšší než u konvenčních HSS ocelí, vysoká rychlost vytvrzování přetrvává i při vyšších stupních deformace, což poskytuje výhodu proti DP ocelím [36, 37].

Velikost a rychlost TRIP efektu je ovlivněna chemickým složením materiálu. Úroveň přetvoření, při které se zadržený (zbytkový) austenit začíná přeměňovat na martenzit, je řízena úpravou obsahu uhlíku. Při nižších úrovních uhlíku se zadržený austenit začne transformovat na martenzit téměř okamžitě po deformaci, což zvyšuje rychlost vytvrzování a také tvarovatelnost materiálu během procesu lisování. Při vyšším obsahu uhlíku je zadržený austenit stabilnější a začíná se transformovat pouze na úrovních přetvoření nad úrovněmi vytvářenými během tváření. Při těchto úrovních uhlíku zůstává zadržený austenit uvnitř struktury. Transformuje se na martenzit až během následné deformace [36, 37].

Důležitou podmínkou pro přítomnost zbytkového austenitu ve struktuře materiálu je i volba vhodného tepelného respektive termo-mechanického zpracování. Princip výroby těchto ocelí spočívá podobně jako u dvoufázových ocelí v řízeném ochlazování austenitické nebo feriticko-austenitické struktury v kombinaci s válcováním materiálu. U plechů válcovaných za tepla následuje po válcování při protnutí křivky ferit start feritická přeměna. Tato přeměna trvá do doby, kdy je docíleno dvoufázové feriticko-austenitické struktury. U plechů válcovaných za studena následuje pro vznik feriticko-austenitické struktury ohřev materiálu a následné žíhání při teplotě mezi Ac_1 až Ac_3. Poté přichází v obou případech ochlazení na teplotu bainit start, kde následuje výdrž na této teplotě pro vznik bainitické fáze. Transformace probíhá tak dlouho, aby vznikl požadovaný poměr jednotlivých fází (cca 15%zbytkového austenitu, 60% feritu a 25% bainitu), následuje dochlazení na teplotu okolí. Schématické zobrazení výroby TRIP oceli pomocí tepelného zpracování v kombinaci s válcováním materiálu za tepla nebo za studena je ilustrováno na **Obr. 2.5** [30, 38].

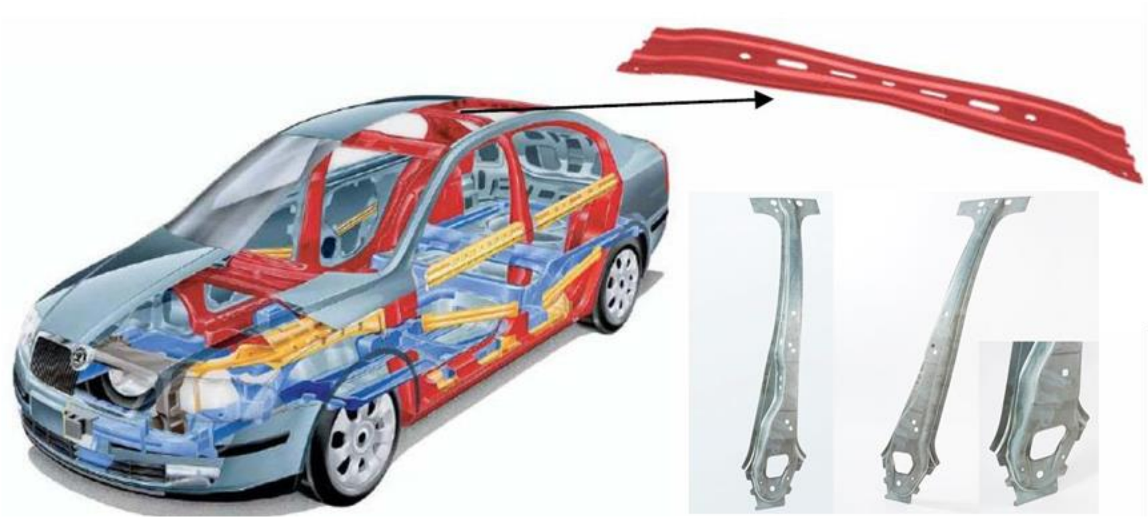


Obr. 2.5 Schéma procesu výroby TRIP ocele [39]

Oceli s transformačně indukovanou plasticitou používají větší množství uhlíku než oceli dvoufázové, obsah uhlíku je zde přibližně 0,2%. Dostatečný obsahu uhlíku je důležitý pro stabilizaci zadržené austenitické fáze při teplotě okolí. Dále je zde obsaženo okolo 1,5-2% austenitotvorného manganu, který navíc potlačuje perlitickou transformaci. Vyšší obsah křemíku okolo 1,8%, který se někdy nahrazuje hliníkem, podporuje tvorbu feritu. Oba tyto prvky pomáhají udržovat potřebný obsah uhlíku v zadrženém austenitu a potlačují vznik karbidů (tvorbu cementitu) během bainitické transformace. Toto se jeví jako zásadní pro výrobu TRIP ocelí. Dále zde může být přítomno malé množství doprovodných prvků jako je fosfor, síra, měď, chrom nebo nikl [30, 35, 37, 40, 41].

Použití těchto ocelí je má velmi široké pole působnosti, neboť je lze vyrobit nebo přizpůsobit tak, aby poskytovaly vynikající tvářitelnost pro výrobu složitých dílů nebo vykazovaly vysoké zpevnění materiálu během následné deformace, například při havárii automobilu, což umožňuje absorbovat vysoké množství energie. Tyto vlastnosti předurčují použití TRIP ocelí pro nejrůznější karosářské díly nebo jako bezpečnostní prvky deformačních zón [37].

Z produkce těchto ocelí se používá například TRIP 350/600 (výztuhy sloupků), TRIP 400/700 (boční lišta, nárazník), TRIP 450/800 (přístrojový panel, střešní lišty), TRIP 600/980 (horní sloupek B, střešní nosník, držák motoru, přední a zadní nosník, rám sedadla) a TRIP 750/980 [37].

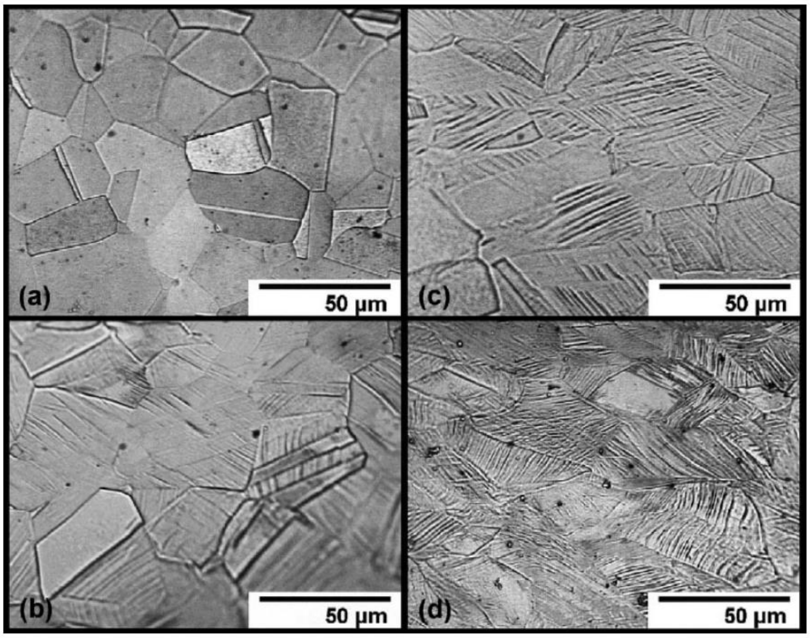


Obr. 2.6 Použití TRIP oceli na karoserii automobilu [37]

2.1.3 TWIP Steel

Ocele vykazující plasticitu indukovanou dvojčatěním neboli TWIP efekt jsou moderní materiály vzniklé pro náročné aplikace, kde je vyžadována velmi vysoká pevnost a možnost vysokého stupně deformace respektive velké tažnosti materiálu. Oceli s efektem „twinningu" patří do 2. generace AHSS ocelí. Aby bylo možné dosáhnout efektu dvojčatění během deformace jsou v těchto materiálech obsaženy prvky, které stabilizují austenit jako je mangan, nebo méně častý nikl. Tyto materiály dále vykazují nízkou energii vrstevných chyb při běžné teplotě. Twinning efekt nastává společně s deformací skluzem a způsobuje vysokou hodnotu exponentu deformačního zpevnění n. Výsledné hranice dvojčatění zvyšují pevnost materiálu [35, 42–44].

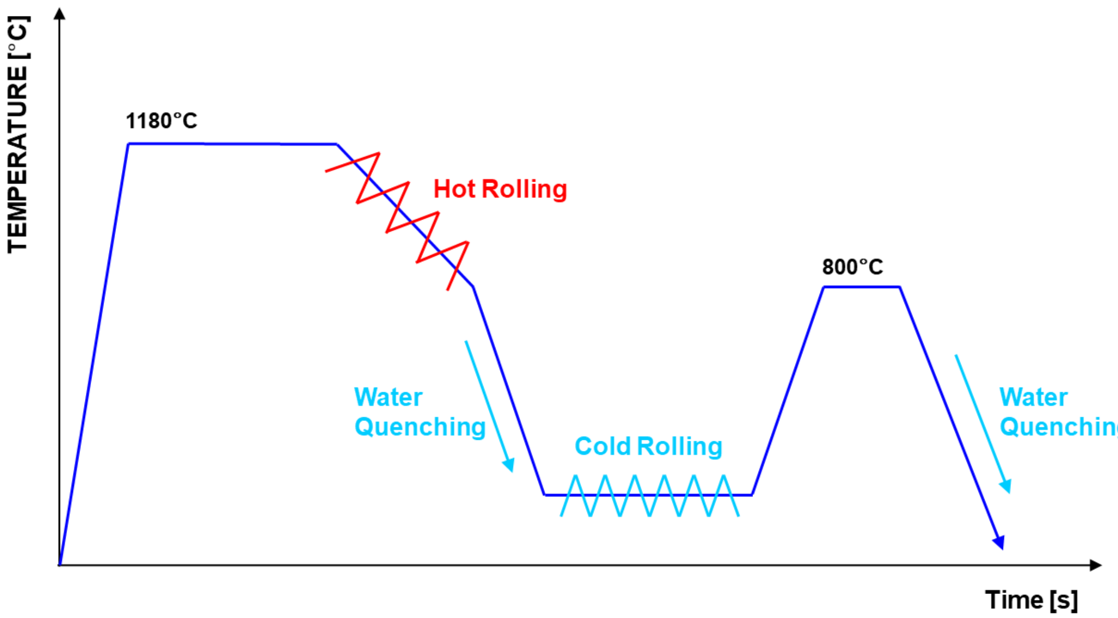
Ze strukturního hlediska mají TWIP ocele ve výchozím stavu vysoký obsah manganu (17 až 35%), to má za následek, že je ocel při běžné teplotě plně austenitická. Možnost extrémně hlubokého tažení (tažnost až 60%) společně s vysokou pevností (přes 1000 MPa) dělá tento materiál velmi progresivní pro všestranné využití v automobilovém průmyslu jak pro karosářské výlisky, tak i zejména pro bezpečností bariérové prvky karoserie automobilu. Základním mechanismem zpevnění je zjemňování se struktury vlivem vzniku „mechanických dvojčat" a tím vznikajících nových rozhraní, které fungují jako hranice zrn, a jejich následnou interakcí s dislokacemi. Na obrázku **Obr. 2.7** je zobrazena struktura TWIP oceli v průběhu deformace materiálu [35, 43, 44].



Obr. 2.7 Strukturní schéma TWIP oceli a)ε=0, b)ε=0,18, c)ε=0,26, d)ε=0,34 [45]

Mechanismus dvojčatění je umožněn za normálních teplotně - rychlostních podmínek v důsledku legování oceli velkým množstvím manganu (Mn), který snižuje energii vrstevných chyb (SFE) a tím se dvojčatění jeví oproti skluzu dislokací jako energeticky výhodnější mechanismus deformace. Právě energie vrstevných chyb určuje, který jev se při daných deformačních podmínkách materiálu bude projevovat jako dominantní. V případě, že je SFE < 20 mJ/m^2 je upřednostňována tvorba martenzitu (TRIP effect), pokud je SFE > 20 mJ/m^2 je potlačována tvorba martenzitu a upřednostňuje se systém mechanického dvojčatění (ideální stav je při 20 až 30 mJ/m^2 vysoká hustota a homogenní rozložení dvojčat) a v případě, kdy je SFE > 60 mJ/m^2 stává se dominantním procesem skluz dislokací [34, 44, 45].

TWIP ocel je zpracovávána nejprve pomocí válcování za tepla při teplotě cca 1100 až 900°C, poté následuje vodní chlazení. Dále může být materiál podroben válcování za studena pro redukci tloušťky materiálu a následnému ohřevu, po kterém nastává kontinuální (rekrystalizační) žíhání při teplotě cca 800°C a poté opět vodní chlazení materiálu.

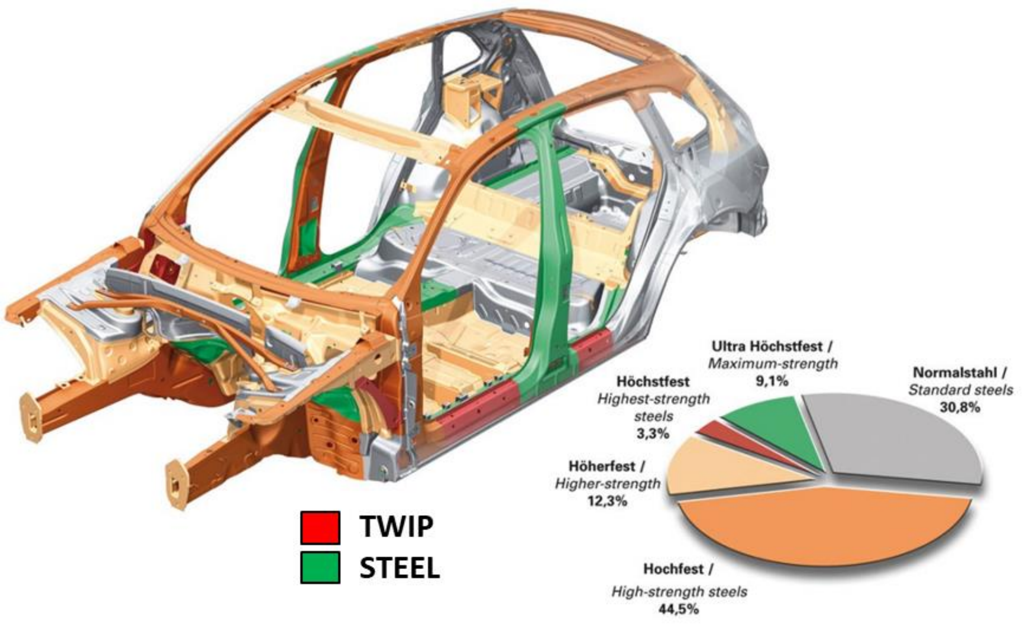


Obr. 2.8 Schéma procesu výroby TWIP oceli

Z pohledu chemického složení obsahuje tento materiál zhruba 0,3 až 0,9% uhlíku, který stabilizuje austenit a zvyšuje pevnost tuhého roztoku. Dále je zde jako hlavní legující prvek obsažen mangan v zastoupení až 35% (viz výše), díky kterému je možné dosáhnout austenitické struktury i za běžné teploty. Dalšími legujícími prvky jsou ve zvýšeném obsahu

0,2 až 3 % křemík a hliník. Křemík zvyšuje pevnost tuhého roztoku a hliník potlačuje přeměnu austenitu na martenzit. Jako doplňující legující prvky se v malých množstvích vyskytují například Cr, Ti, Ni, B, aj. [35, 44–46].

TWIP ocel se používá podobně jako TRIP a DP oceli pro výrobu různých vyztužujících členů karoserie automobilu a jako prvky deformačních zón. Tento materiál však najdeme pouze u vozů prémiových značek, neboť použití tohoto materiálu u běžných vozů vylučuje jeho vysoká cena a například jeho obtížná svařitelnost pomocí standardních metod svařování karoserie automobilu. Používá se například pro výrobu předních a bočních členů karoserie (TWIP500/900), pro nosníky, nárazníky a B-sloupek (TWIP500/980), dále podlahový příčník (TWIP600/900) nebo komponenty dveří (TWIP750/1000, TWIP 950/1200) [43].



Obr. 2.9 Použití TWIP oceli na karoserii automobilu [45]

2.1.4 Slitiny hliníku vhodné pro tváření

Obecně lze říci, že slitiny hliníku jsou jako konstrukční materiál vyhledávané a žádané pro svou nízkou měrnou hmotnost. Hustota čistého hliníku je rovna 2,69 g/cm3, avšak výhoda nízké hmotnosti je doprovázena nevýhodou nízkého modulu pružnosti oproti oceli (cca 69 GPa versus 210 GPa). Tato skutečnost musí být kompenzována např. vetší tloušťkou součásti, tudíž není možné využít potenciál nízké hmotnosti v plném rozsahu. Nicméně hliník a jeho slitiny nabízí výhodnou kombinaci nejen mechanických vlastností, ale dále také vlastností fyzikálních, chemických nebo technologických. Mezi hlavní výhody patří kromě nízké hmotnosti například korozní odolnost, tepelná a elektrická vodivost nebo recyklovatelnost. Hlavní nevýhody slitin hliníku jsou po boku nízkého modulu pružnosti dále horší tvářitelnost než u oceli, horší svařitelnost nebo vysoké náklady spojené s jejich zpracováním. Slitiny, které jsou využívány k výrobě karosářských dílů, je možné rozdělit do 2 základních skupin. První skupinou tvoří slitiny řady 5xxx, což jsou slitiny hliníku a hořčíku, druhou skupinou je řada 6xxx, kde je slitina hliníku pouze legována hořčíkem a křemíkem [27, 47–49].

Slitiny řady 5xxx jsou hojně používány pro jejich relativně nízké náklady a dobrou tvářitelnot. Díky jejich náchylnosti k tvorbě Lüdersových pásů se většinou používají pro výrobu nepohledových dílů. Pomocí přídavku hořčíku (2-5%) je zde dosaženo většího zpevnění tuhého roztoku, respektive roste pevnost materiálu [27, 36].

Slitiny řady 6xxx se vyznačují vyšší mezí kluzu než slitiny 5xxx řady s dobrým poměrem pevnosti a tažnosti materiálu. Velkou výhodou těchto slitin je možnost jejich tepelného zpracování (vytvrzování) a získání tak lepších mechanických vlastností z hlediska pevnosti. Toto tepelné zpracování probíhá při teplotách blížících se 200°C. I přes zvýšené náklady se slitiny řady 6xxx (zejména 6016) osvědčují jako nejvšestrannější a jsou hojně používány výrobci automobilů v Evropě, kteří používají hliník pro karosářské díly [27].

Další skupinou jsou slitiny 7xxx. Tyto slitiny jsou legovány až 7% zinku a dalšími doprovodnými prvky a dosahují tak společně s tepelným zpracováním oproti řadě 6xxx vyšší pevnosti. Aplikaci těchto slitin je možné najít v leteckém průmyslu nebo jako automobilové nárazníky. Nevýhodou těchto slitin je, že mají špatnou korozní odolnost a jsou náchylné k praskání vlivem koroze pod napětím [36].

2.1.5 Slitiny hořčíku vhodné pro tváření

Hořčík je nejlehčí ze všech technicky známých kovů. Jeho hustota je rovna 1,74 g/cm3, to z něj dělá velmi progresivní materiál pro široké využití v technické praxi. Z hlediska tváření kovů se nepoužívá čistý hořčík, ale jeho slitiny založené nejčastěji na přídavcích hliníku, manganu a zinku. Dále bývají tyto slitiny často legovány dalšími prvky, zejména kovy vzácných zemin [27, 50].

Limitujícím faktorem pro tváření hořčíkových slitin je krystalizace hořčíku v šesterečné soustavě s těsným uspořádáním atomů. Tato krystalová soustava se vyznačuje malým množstvím skluzových rovin a tudíž je za studena obtížně tvářitelná. Pro zlepšení tvářitelnosti hořčíkových slitin je třeba docílit jemnozrnnější struktury, toho je možno dosáhnout např. pomocí válcování za studena a za tepla s tepelným zpracováním, pomocí kterého dojde k zahájení rekrystalizace materiálu. Tvářitelnost je možno dále zlepšit pomocí zvýšené teploty během procesu tváření (200-350°C), kdy dojde k aktivaci dalších rovin skluzu, nebo vyvozením všestranné tlakové napjatosti v tvářeném tělese během deformace tvářeného materiálu [51].

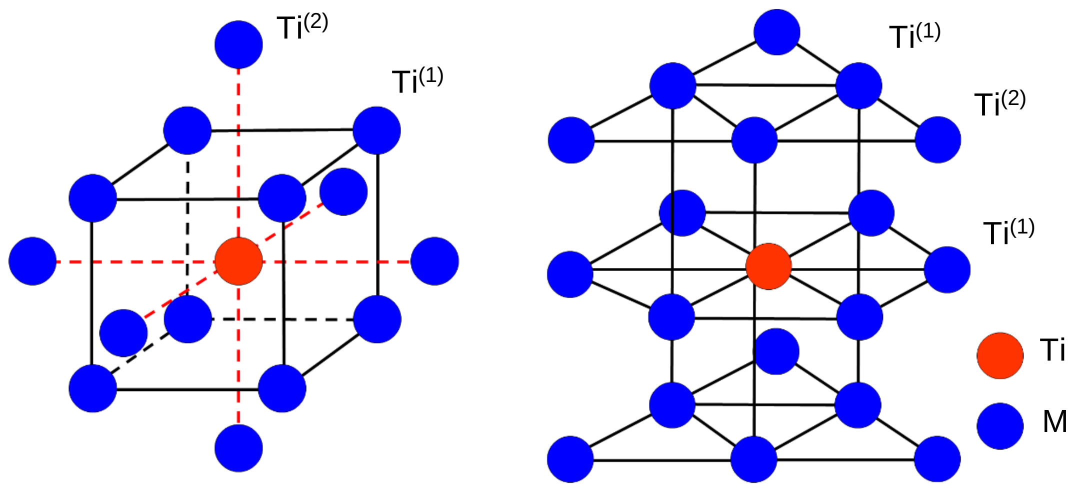
2.1.6 Slitiny titanu vhodné pro tváření

Titan byl jako prvek objeven poprvé v roce 1791. O tento objev se postaral britský chemik William Gregor a podle něho byl tento prvek původně pojmenovaný jako gregorit. O dva roky později byl titan nezávisle objeven německým chemikem MH Klaprothem, který jej pojmenoval Titanium, podle Titánů z řecké mytologie [52, 53]. Tento prvek však nebyl úspěšně izolován až do roku 1910 [52]. Vývoj slitin titanu začal hrát v historii důležitou roli zhruba od poloviny 20. století, kdy byl vyvolán a usměrňován v převážné míře požadavky konstruktérů leteckých motorů [47] a pro vojenské použití. První praktické použití titanu se uskutečnilo v roce 1948 v USA, kde byly prvně vyrobeny 2 tuny tohoto materiálu [47]. Výroba titanu dále započala v bývalém SSSR od roku 1950 [47].

V dnešní době je titan a jeho slitiny velmi vyhledávaným materiálem především pro svou korozní odolnost a chemickou stálost. Další devízou tohoto prvku a jeho slitin je velmi příznivý poměr mezi měrnou hmotností a pevností materiálu. Oproti oceli má zhruba poloviční modul pružnosti při zachování obdobné pevnosti. Díky těmto vlastnostem je titan využíván zejména v leteckém průmyslu a jiných speciálních aplikacích [47, 53, 54].

Titan je 22. prvkem v periodické tabulce a devátým nejhojnějším prvkem v zemské kůře a současně čtvrtým nejhojnějším kovovým prvkem. Minerály, ve kterých se nachází, se vyskytují v aluviálních a vulkanických formacích a ložiska obvykle obsahují 2 až 12% těžkých minerálů. Hlavní surovinou pro výrobu titanu je oxid titaničitý, který je obsažen v minerálech rutilu nebo ilmenitu. Z těchto minerálů je oxid převáděn pomocí chlorování na chlorid titaničitý a ten pak dále redukován hořčíkem na kovový titan [47, 55, 56].

Titan utváří dvě alotropické modifikace, první z nich je struktura s hexagonální krystalovou mřížkou označovaná jako Tiα. Tato struktura je stabilní do teploty 882,2°C. Druhá alotropická modifikace označovaná jako Tiβ se vyznačuje kubickou krystalovou mřížkou s prostorovým centrováním a je stabilní od 882,5°C do teploty tání 1668 ± 4°C [47, 56–58]. Fáze titanu α je primární fází a teplota její alotropické transformace na β fázi je do značné míry ovlivněna čistotou titanu. Zatímco pro jodid titan je teplota na zmiňované hranici 882,5°C, tak pro komerčně čistý titan alotropická přeměna probíhá v rozmezí teplot 860 až 960°C [59, 60]. Při nízkých rychlostech ohřevu a chlazení probíhá transformace fází nukleací a následným růstem krystalů nové fáze, zatímco při vysokých rychlostech ohřevu a chlazení má alotropická modifikace znaky martenzitické přeměny [59]. Nízká rychlost ochlazování vede k tvorbě buněčné mikrostruktury v důsledku neuspořádaného, difuzního růstu nové fáze a při vyšší rychlosti chlazení se pak vytváří jehlicovitá mikrostruktura [59].



Obr. 2.10 Alotropické modifikace titanu Ti (β-Ti) – vlevo a Ti (α-Ti) – vpravo [61]

Legující prvky používané pro slitiny titanu jsou klasifikovány podle schopnosti stabilizace určité fáze jako prvky neutrální, přísadové prvky stabilizující α fázi, nebo stabilizující β fázi [47, 54]. Přísadové prvky se v obou alotropických modifikacích rozpouštějí úplně nebo částečně a tvoří tak tuhé roztoky α a β, které zachovávají krystalovou mřížku dané modifikace titanu. Některé prvky se mohou s titanem slučovat a vytvářejí tak intermetalické sloučeniny [47]. Stabilizátory α fáze zvyšují transformační teplotu, při které dochází k alotropické přeměně na fázi β, β stabilizátory tuto teplotu naopak snižují [54].

Slitiny titanu α jsou tvořeny především CP titanem a α stabilizátory [62]. Fáze alfa je tvořena hexagonální krystalovou mřížkou. Tyto slitiny disponují velkou tepelnou stabilitou, jako stabilizátory alfa fáze se používají hliník, kyslík, dusík nebo uhlík. Tyto prvky zvyšují teplotu fázové přeměny a stabilizují tak tuhý roztok α. Největší význam jako stabilizátor má však z pohledu praktického využití pouze hliník, neboť ostatní prvky vlivem i velmi malého množství značně zvyšují tvrdost a křehkost slitiny titanu. Kromě stabilizátorů je v těchto slitinách dále obsažen neutrálně působící cín a zirkon [47, 58, 62, 63]. Slitiny titanu α jsou charakteristické pro svou dobrou pevnost, dobrou lomovou houževnatost a odolnost proti porušení i za velmi nízkých teplot, dále si disponují vysokou odolností proti tečení za vysokých teplot a zachovávají si dostatečnou pevnost při působení teploty zhruba do 300°C [47, 58, 62, 63].

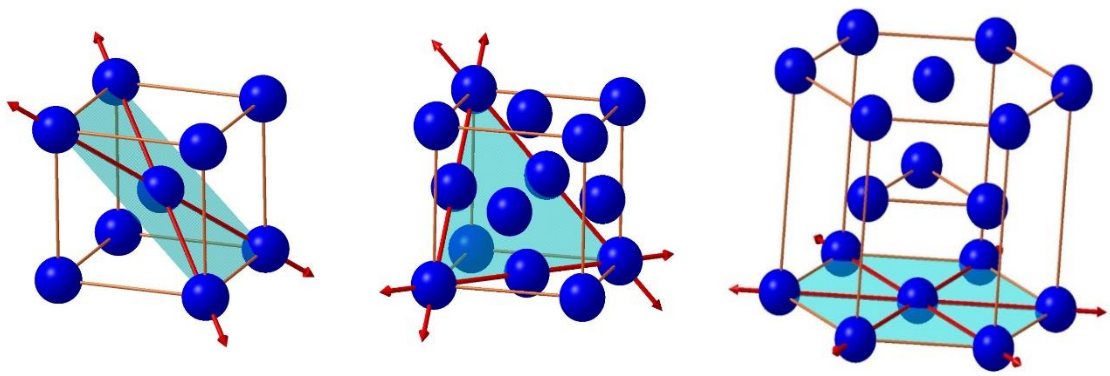
Slitiny titanu β jsou materiály, které jsou stále ve vývoji, jejich hlavní předností je vysoká odolnost proti korozi a velmi dobrá tvářitelnost za studena. Oproti alfa slitinám vykazují nízkou odolnost proti tečení a nehodí se tak pro použití za zvýšených teplot. Fáze beta je tvořena kubickou krystalovou mřížkou bcc. Jako β stabilizátory, které snižují teplotu alotropické transformace, se používají vanad, niob, molybden nebo talium. Při dostatečně velkém obsahu těchto prvků zůstává tuhý roztok β stabilní i na úrovni normální teploty okolí. Tuhý roztok se může dále vlivem prvků jako je Cu, Si, Cr, Mn, Fe, Co nebo Ni při nízké teplotě rozpadat prostřednictvím eutektoidní přeměny [47, 58, 62, 63]. U těchto slitin je dále možnost jejich vytvrzení pomocí tepelného zpracování [62].

Slitiny titanu α+β jsou tvořeny směsí obou fází s dostatkem stabilizátorů, které tyto fáze udržují při běžné teplotě okolí. Tyto slitiny se vyznačují velkým množstvím struktur a tím i jejich vlastností. Kombinace fáze α a β umožnuje docílit optimálního poměru požadovaných vlastností dané slitiny. Charakteristiky obou fází mohou být dále ovlivněny tepelného zpracováním a podmínkami tváření materiálu. Tato struktura může být tvořena rovnoosými zrny nebo lamelami obou tuhých roztoků, případně kombinací obou těchto struktur. Plně lamelární struktura se získá pomocí rekrystalizačního žíhání, kde rychlost ochlazování přímo ovlivňuje šířku lamel a velikost jejich kolonií. Kombinace struktur se objevuje po termomechanickém zpracování, při kterém dochází k plastické deformaci jednotlivých lamel a teplota žíhání určuje objemový podíl rekrystalizované α fáze. Struktura tvořena pouze rovnoosými zrny se získá pomocí rekrystalizačního žíhání s dostatečně pomalou teplotou ochlazování, kdy se je zrnu α umožněno se formovat a v zrnech β se nevytváří žádné lamely [47, 58, 62, 63].

2.2 ZÁKLADNÍ MECHANISMY DEFORMACE KOVOVÝCH MATERIÁLŮ

Deformace materiálu je proces, při kterém dochází k vratné či trvalé změně vnitřní struktury, tvaru, případně i objemu materiálu. Během tohoto procesu dochází k přemísťování atomů, respektive skupin atomů, v krystalové mřížce materiálu z jejich původní polohy do polohy nové za působení vnějších sil. Přemisťování těchto atomů je umožněno prostřednictvím pohybu čárových poruch, dislokací, uvnitř krystalové mřížky.

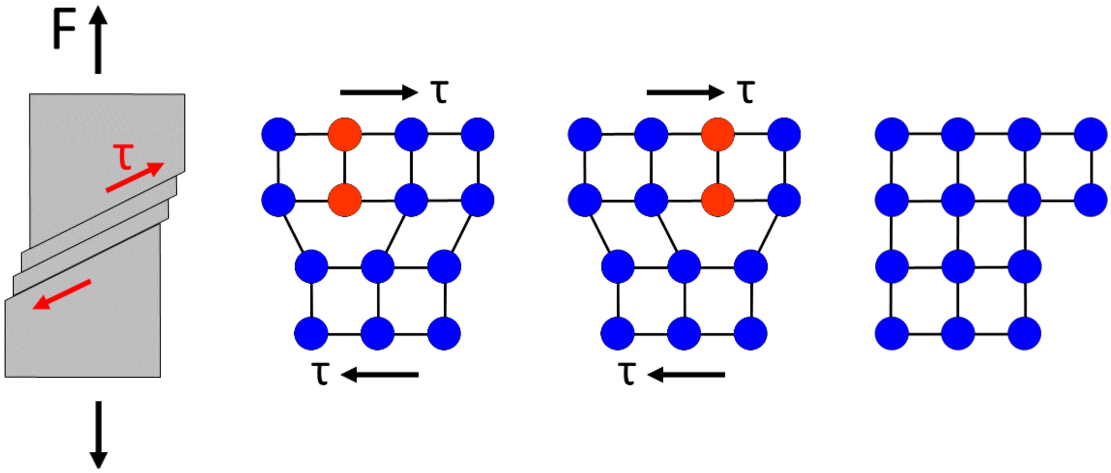
Z pohledu fyzikální povahy je deformaci možné rozdělit na deformaci elastickou (pružnou, vratnou) a deformaci plastickou (trvalou). Cílem tváření materiálu je v tvářeném tělese vyvolat takový stav napjatosti, při kterém dochází k trvalé plastické deformaci požadovaného směru a velikosti bez současného porušení materiálu. Při trvalé deformaci dochází k posunu atomů o vzdálenost rovnou nebo větší, než je mřížkový parametr krystalové mřížky materiálu. Trvalý posuv těchto atomů v krystalové mřížce nastává po překročení hodnoty kritického smykového napětí τ_{kr} a to pouze v některých činných krystalografických rovinách a výhodných směrech, kde se pohyb atomů setkává s nejmenším odporem, což jsou zpravidla roviny a směry nejhustěji obsazené atomy. Roviny skluzu, směry skluzu a skluzové systémy pro pohyb atomů v základních krystalových soustavách vyskytujících se u kovových materiálů jsou ilustrovány na obrázku **Obr. 2.11**. Kubická prostorově centrovaná mřížka obsahuje 4 roviny skluzu, jeden směr skluzu a 4 skluzové systémy, kubická plošně centrovaná mřížka 4 roviny skluzu, 3 směry a 12 skluzových systémů a nakonec hexagonální mřížka s nejtěsnějším uspořádáním obsahuje 1 rovinu skluzu, 3 směry skluzu a 3 skluzové systémy.



Obr. 2.11 Roviny, směry a skluzové systémy pro pohyb atomů v základních krystalových soustavách kovových materiálů (kubická prostorově centrovaná – vlevo, kubická plošně centrovaná – uprostřed, hexagonální s nejtěsnějším uspořádáním – vpravo)

Pohyb dislokací uvnitř krystalové mřížky materiálu je realizován jejich skluzem nebo dvojčatěním. Deformace materiálu probíhá podle toho mechanismu, který při daných podmínkách zatížení vyžaduje menší hodnoty kritického smykového napětí.

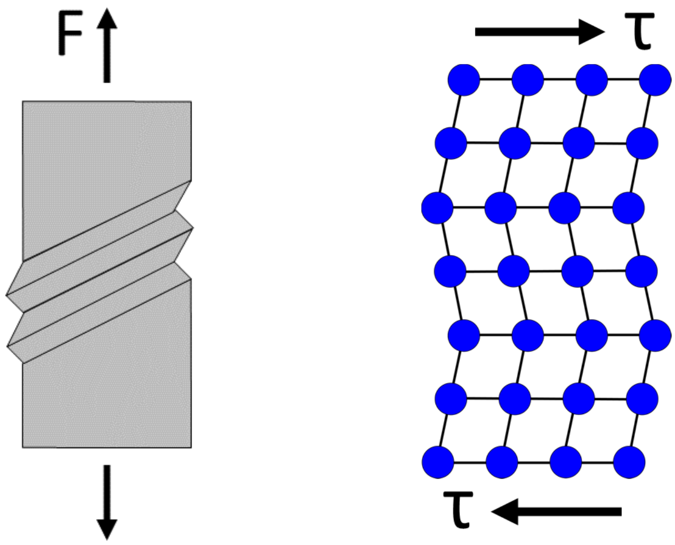
Prostý skluz neboli translace dislokací je nejčastějším mechanismem plastického přetvoření materiálu. Během tohoto procesu se plastická deformace neuskutečňuje současným přesunem všech atomů v aktivní skluzové rovině, to by vyžadovalo velmi vysoké hodnoty smykových napětí, ale probíhá postupným skluzem jen některých vhodně orientovaných skluzových systémů. Pohyb dislokace skluzem uvnitř krystalové mřížky je ilustrován na **Obr. 2.12**.



Obr. 2.12 Ilustrace deformace materiálu s využitím skluzu dislokací (vlevo) a postupný skluz dislokace v krystalové mřížce materiálu (vpravo)

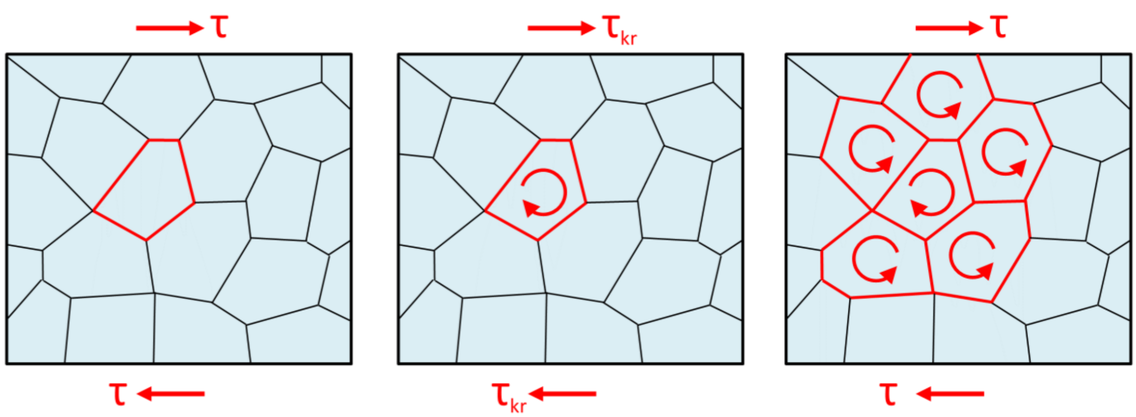
Zatímco v případě prostého skluzu je pohyb atomů v krystalové mřížce realizován postupně, v případě dvojčatění se jedná o zvláštní případ koordinovaného skluzu, kde je hodnota kritického napětí potřebného pro dvojčatění nižší než hodnota kritického napětí, které by vyžadoval skluz, a tak dochází k současnému přesunu více atomů najednou v jeden časový okamžik. V principu tedy mechanismus dvojčatění funguje tak, že se celá krystalová mřížka nejprve natočí do příznivé polohy pro skluz a následně se část natočeného krystalu deformuje, atomy v deformované části krystalu se přesunou pouze o část meziatomové vzdálenosti a vznikne taková oblast mřížky, která je zrcadlově souměrná s neposunutou oblastí podle roviny dvojčatění viz

Obr. 2.13. Dvojčatění se u běžných materiálů za běžných teplotně rychlostních podmínek vyskytuje pouze zřídka, tento jev je obecně podporován vysokými tvářecími rychlostmi a tvářením při nízkých teplotách.



Obr. 2.13 Ilustrace deformace materiálu s využitím mechanismu dvojčatění (vlevo) a deformace krystalové mřížky podle roviny dvojčatění (vpravo)

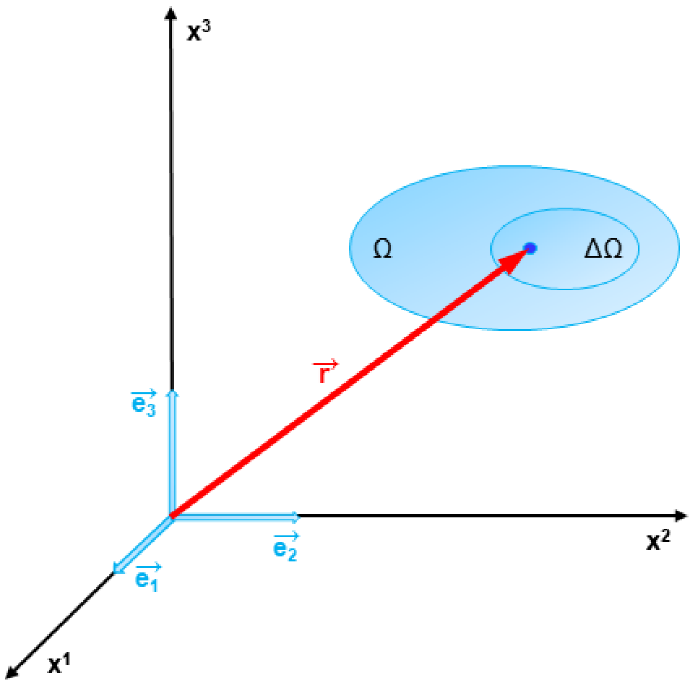
Jak bylo nastíněno výše, během deformace vzniká v materiálu vlivem působící zatěžující síly smykové napětí. Aby bylo možné uvést atomy v krystalové mřížce do pohybu a realizovat tak následnou deformaci materiálu musí být překonána kritická hodnota tohoto smykového napětí. Místo, kde je v materiálu lokalizováno překročení smykového napětí a následná plastická deformace se označuje jako oblast primárních plastických deformací. Kolem této oblasti, respektive kolem deformovaného zrna, následuje vlivem zvyšujícího se zatížení a deformace natáčení okolních zrn do výhodných pozic pro aktivaci jejich skluzových systémů a následnou deformací. Tento jev je označován jako rozvoj plastické deformace materiálu, to je směrem zleva doprava ilustrováno na **Obr. 2.14**.



Obr. 2.14 Zatížení materiálu (vlevo), primární plastická deformace (uprostřed) a rozvoj plastické deformace (vpravo)

2.3 NAPJATOST A PŘETVOŘENÍ V TVÁŘENÉM TĚLESE

Problematika napjatosti a přetvoření tělesa, které je podrobeno vnějšímu zatížení, vychází z obecných zákonů, principů a předpokladů, na nichž je postavena mechanika kontinua. Tato část mechaniky se zabývá napětím, deformací a pohybem v pevných látkách a v tekutinách [64]. Pojem kontinuum je možné chápat jako element, ve kterém je předpokládáno spojité prostředí, tzn., že všechny sledované vlastnosti uvnitř tohoto elementu se nemění a je možné tyto veličiny popsat pomocí spojitých funkcí prostorových souřadnic [64, 65]. Podle J. Křena v publikaci [66], je kontinuum množina hmotných částic, kterým lze přiřadit vzájemně jednoznačně body souvislé, otevřené a omezené oblasti Ω třírozměrného euklidovského prostoru R^3 s lipschitzovskou hranicí $\partial\Omega$, přitom rozložení hmotnosti v kontinuu se předpokládá spojité. Tato definice je ilustrována na **Obr. 2.15**.



Obr. 2.15 Definice kontinua [66]

Pohyb poddajného tělesa a stav všech stavových veličin je v mechanice poddajných těles popsán třemi skupinami rovnic. Základní rovnice v mechanice poddajných těles jsou Cauchyho pohybová rovnice, která dává do relace vnitřní, vnější a setrvačné síly, dále pak kinematické vztahy vyjadřující souvislost tenzorů přetvoření s posuvy a nakonec konstitutivní vztahy, které popisují závislost tenzoru napětí na tenzoru přetvoření [64, 65]. V následujících kapitolách budou stručně rozebrány a popsány jednotlivé „komponenty" nezbytné pro definici napjatosti a přetvoření deformovaného tělesa.

2.3.1 Tenzor napětí

Napětí je obecně definováno pomocí sil, které jsou vztaženy k elementárním plochám [64]. Síly působící na těleso, v tomto případě na zmiňované kontinuum, mohou být dvojího druhu. Nejprve to jsou síly, které jsou projevem silového pole, působí na celou oblast, resp. těleso. Tyto síly se tedy projevují uvnitř celého kontinua a na každý hmotný element působí síla, která je přímo úměrná hmotnosti tohoto elementu [64, 67]. Takové síly jsou klasifikovány jako síly objemové a působí na každý objemový element kontinua přímo, nezávisle na silách, které působí na okolní objemové elementy. Tyto síly se zpravidla vztahují na jednotku objemu [N/m^3] nebo na jednotku hmoty [N/m^3], mohou to být například síly gravitační či setrvačné [64, 67].

Objemová síla je přímo úměrná velikosti objemu elementu kontinua, resp. hmotnosti v něm obsažené, na které působí. Tato síla je vztažena na jednotku objemu elemetu dV, označí se $\boldsymbol{F}$, její kartézské složky pak budou F_i, vyjádření této síly je vidět v rovnici 2.3.1 a 2.3.1´. Obecně závisí vektor síly $\boldsymbol{F}$ na poloze elementu dV v kontinuu, tzn. síla $\boldsymbol{F}$ je tedy funkcí souřadnic bodu, kolem kterého je element dV sestrojen. Výslednici objemových sil $\boldsymbol{R}^{(ob)}$ je možné napsat ve tvaru, viz rovnice 2.3.2 a 2.3.2´. Pro výsledný moment $\boldsymbol{M}^{(ob)}$ pak platí rovnice 2.3.3 a 2.3.3´ (rovnice vztažená k osám souřadnic) [67].

$$\mathrm{d}F = \boldsymbol{F}\mathrm{d}V \tag{2.3.1}$$

$$\mathrm{d}F_i = F_{\boldsymbol{i}}\mathrm{d}V \qquad (2.3.1)$$

$$\boldsymbol{R}^{(ob)} = \int_V \boldsymbol{F}\mathrm{d}V \tag{2.3.2}$$

$$R_i^{(ob)} = \int_V F_{\boldsymbol{i}}\mathrm{d}V \tag{2.3.2´}$$

$$\boldsymbol{M}^{(ob)} = \int_V (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F})\mathrm{d}V \tag{2.3.3}$$

$$M_i^{(ob)} = \int_V e_{\boldsymbol{ijk}} x_j F_k \mathrm{d}V \tag{2.3.3´}$$

Druhou skupinou sil, které mohou působit na kontinuum, jsou síly plošné. Mezi tyto síly patří zejména síly tahového nebo tlakového charakteru. Takové síly vznikají na stykových plochách povrchu kontinua s okolním prostředím a dále se přenášejí z povrchu kontinua přes okolní elementy směrem dovnitř kontinua z jednoho elementu na druhý. Tento přenos sil probíhá prostřednictvím jednotlivých molekul, resp. vrstev molekul, kontinua z jedné na druhou. Uvnitř kontinua samozřejmě platí zákon akce a reakce, tzn., že silové působení myšlené plochy elementu uvnitř kontinua je vyrovnáno stejně velkou silou opačného charakteru vyvolanou stejnou myšlenou plochou elementu sousedního [67]. Tyto síly tedy působí na ohraničený povrch zkoumaného tělesa a mají rozměr [N/m^2] [64].

Pro vyšetření působení plošných sil v kontinuu se zavádí elementární plocha dS, která leží na povrchu vybraného objemu kontinua ΔV. S ohledem na volbu velikosti a tvaru vybraného ΔV se elementární plocha dS může vyskytovat v libovolném bodě tohoto objemu a může mít také libovolnou orientaci, výjimkou je případ, kdy plocha dS na povrchu vybraného objemu kontinua ΔV. Síla, která působí na plošný element dS, je přímo úměrná jeho plošnému obsahu, tj. d$\boldsymbol{F}^{(pl)}=\boldsymbol{T}$.d$S$, kde $\boldsymbol{T}$ je plošná síla vztažená na jednotku plochy a nazýváme ji napětím, resp. vektorem napětí [67].

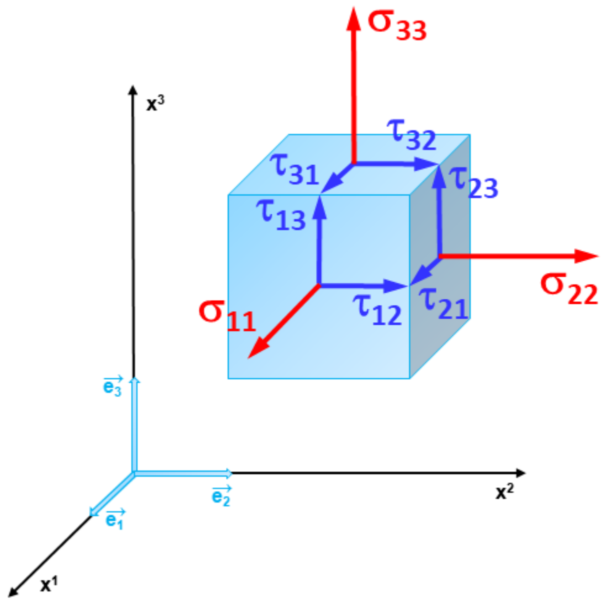
Daným místem P uvnitř kontinua je možné proložit libovolný počet ploch dS a jim příslušný vektor napětí $\boldsymbol{T}$, který se bude obecně měnit v závislosti na orientaci těchto ploch, resp. jejich normál. Pravoúhlý průmět vektoru $\boldsymbol{T}$ do směru normály $\boldsymbol{v}$ je normálovým napětím (napětí v tahu či tlaku), označí se $T^{(v)}$. Pravoúhlý průmět vektoru $\boldsymbol{T}$ do roviny kolmé k normále $\boldsymbol{v}$ je napětím tečným nebo smykovým, označí se jako $T^{(t)}$. Kartézské složky vektoru napětí $\boldsymbol{T}$ se označí jako T_i, kde i=1,2,3. Příklad zápisu vektoru $\boldsymbol{T}$ pro čtvercový element je uveden v rovnici 2.3.4. Dále je možné určit složky výslednice plošných sil a momentů podobně jak tomu je u sil objemových, tato závislost je vidět v rovnicích 2.3.5 a 2.3.6 [67].

$$T^{(\nu)2} + T^{(t)2} = T_i T_i \tag{2.3.4}$$

$$R_i^{(pl)} = \int_S T_{\boldsymbol{i}} \mathrm{d}S \tag{2.3.5}$$

$$M_i^{(pl)} = \int_S e_{\boldsymbol{ijk}} x_j T_k \mathrm{d}S \tag{2.3.6}$$

Pro kartézské složky vektoru napětí ***T*** se dále zavádí $T_i = \tau_{ij}$, kde i,j=1,2,3. Složka τ_{ij} je průmět toho vektoru napětí ***T*** do osy x_j, který působí na jednotkovou plochu kolnou k ose x_i. Zavedených 9 veličin je nazýváno jako složky tenzoru napětí nebo jen tenzor napětí. Složky vektoru napětí, kterých index nabývá téže hodnoty1, 2, nebo 3, jsou pravoúhlé průměty tohoto vektoru do směru normály jednotlivých ploch kolmých na osy souřadného sytému, proto jsou tyto složky τ_{11}, τ_{22}, τ_{33} (nebo také σ_{11}, σ_{22}, σ_{33}) nazývány normálovými napětími. Normálová napětí jsou kladného smyslu, pokud se snaží vyvolat tahové namáhání elementu, a naopak záporná, pokud se snaží vyvolat namáhání tlakové. Ostatních 6 složek τ_{ij} vektoru napětí ***T*** jsou napětí smyková (tangenciální), jejichž oba indexy nabývají různých hodnot čísel 1, 2, nebo 3. Tato napětí mají tendenci posunout jednotlivé elementární plochy v rovinách kolmých na příslušné osy daného souřadnicového systému [67]. Jednotlivé kartézské složky tenzoru napětí jsou ilustrovány na **Obr. 2.16**. Tenzor napětí daného elementu v maticovém zápisu je popsán v rovnici 2.3.7 a vztah mezi jednotlivými smykovými složkami tohoto tenzoru pak v rovnicích 2.3.8, 2.3.9 a 2.3.10.



Obr. 2.16 Normálové a tečné složky tenzoru napětí působící na element kontinua

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{bmatrix} \tag{2.3.7}$$

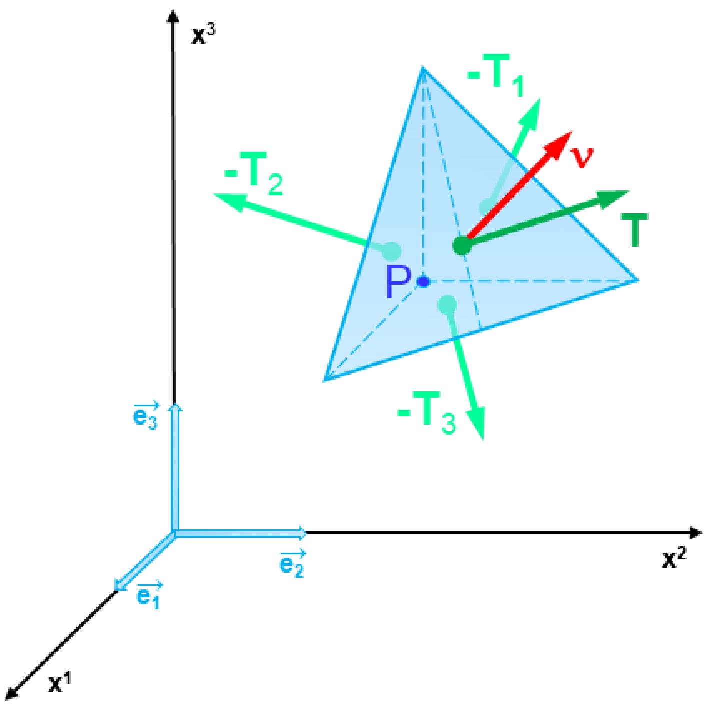
$$\tau_{12} = |\tau_{21}| \tag{2.3.8}$$

$$\tau_{13} = |\tau_{31}| \tag{2.3.9}$$

$$\tau_{23} = |\tau_{32}| \tag{2.3.10}$$

Pro rozbor napětí působících na uvažované kontinuum se vychází z podmínek rovnováhy elementárního čtyřstěnu. Jeho tři střeny jsou kolmé na osy souřadného systému x^1, x^2 a x^3 a procházejí bodem P, a jeho čtvrtá stěna je kolmá na směr jednotkového vektoru ve směru normály $\boldsymbol{\nu}$, jehož složky přenesené do souřadnicového systému ν_i (i=1,2,3) jsou směrovými kosiny této normály. Plošný obsah elementární plochy kolmé na jednotkový vektor normály se označí jako dS a plošné obsahy elementárních ploch kolmých na osy souřadného systému jsou pak dS_1, dS_2 a dS_3. Trojúhelníky s plochami dS_i (i=1,2,3) jsou kolmými průměty trojúhelníku s plochou dS do rovin rovnoběžných s rovinami souřadného systému x^1, x^2 a x^3. Tímto platí, že jejich plošný obsah je roven součinu plošného obsahu dS a kosinu úhlu, který svírá normála $\boldsymbol{\nu}$ osou souřadného systému x^i kolmou na rovinu daného trojúhelníku dS_i viz roovnice 2.3.11. [65–67]

$$\mathrm{d}S_i = \mathrm{d}S.\cos\left(\nu, x_i\right) = \mathrm{d}S.\,\nu_i \quad (i = 1{,}2{,}3) \qquad (2.3.11)$$



Obr. 2.17 Zatížení elementárního čtyřstěnu uvnitř kontinua

Na stěnách čtyřstěnu dS, dS_1, dS_2 a dS_3 působí jednotlivé vektory napětí $\boldsymbol{T}$, (-$\boldsymbol{T}_1$), (-$\boldsymbol{T}_2$) a (-$\boldsymbol{T}_3$), to je ilustrováno na **Obr. 2.17**. Mimo těchto plošných sil působí na element také objemová síla rovna 1/3dShF, kde 1/3dSh je objem čtyřstěnu a $\boldsymbol{F}$ je objemová síla působící na tento elementární čtyřstěn. [67]

Dle podmínky rovnováhy elementárního čtyřstěnu, která vyžaduje vymizení výslednice všech sil na čtyřstěn působících, je možné sestavit rovnici 2.3.12a, dále se pak s aplikací rovnice 2.3.11 přepíše do tvaru 2.3.12b. Aby bylo možné stanovit napětí v bodě *P* pro libovolnou rovinou plochu, nechá se plocha d*S* přibližovat k bodu *P*, tzn. výška *h* mezi bodem *P* a plochou d*S* klesá směrem k nule, při současném zachování geometrie uvažovaných čtyř stěn elementárního čtyřstěnu. Z tohoto tvrzení vyplývá, že poslední člen v rovnici 2.3.12b klesá směrem k nule a tím je možné ho z této rovnice vyloučit. Poté je možné rovnici přepsat na tvar 2.3.12c [65–67].

$$(-\boldsymbol{T}_1)\mathrm{d}S_1 + (-\boldsymbol{T}_2)\mathrm{d}S_2 + (-\boldsymbol{T}_3)\mathrm{d}S_3 + \boldsymbol{T}\mathrm{d}S + \frac{1}{3}\mathrm{d}Sh\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0} \qquad (2.3.12a)$$

$$(-\boldsymbol{T}_1)\nu_1 + (-\boldsymbol{T}_2)\nu_2 + (-\boldsymbol{T}_3)\nu_3 + \boldsymbol{T} + \frac{1}{3}h\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0} \qquad (2.3.12b)$$

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}_1\nu_1 + \boldsymbol{T}_2\nu_2 + \boldsymbol{T}_3\nu_3 = \boldsymbol{T}_i\nu_i \qquad (2.3.12c)$$

S využitím Einsteinova sumačního pravidla je možné rovnici 2.3.12c transformovat do tvaru rovnice 2.3.13 [67] a tím dostáváme tvz. Cauchyho vztah [68].

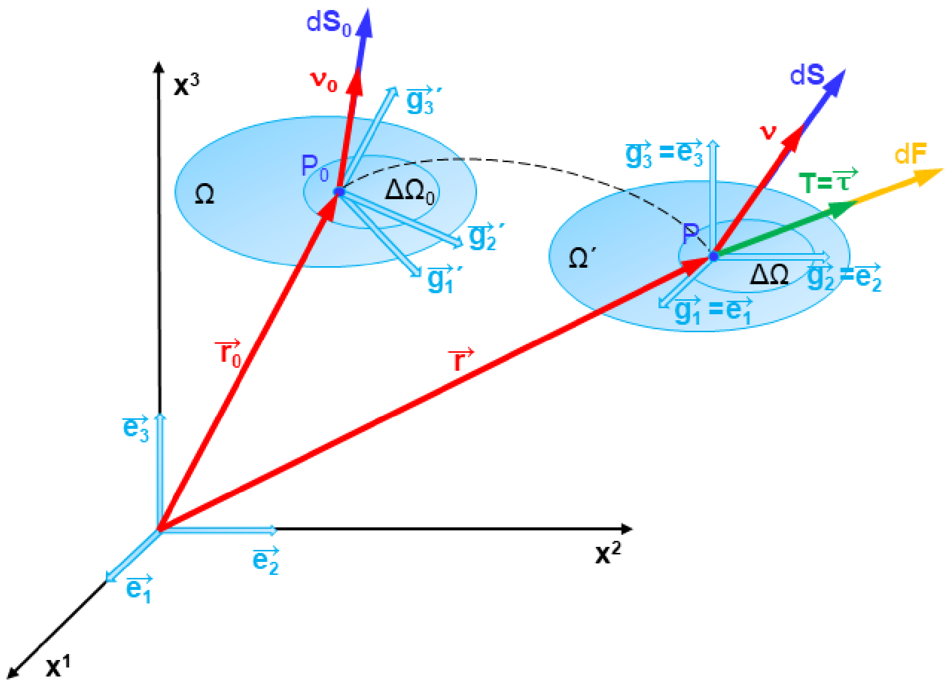
$$\boldsymbol{T}_i = \boldsymbol{\tau}_{ji}\nu_j \quad (i = 1{,}2{,}3) \qquad (2.3.13)$$

V rovnicích 2.3.12c a 2.3.13 vypadly objemové síly (včetně sil setrvačných), neboť jsou tyto síly úměrné třetí mocnině a tím pádem o řád menší než síly plošné, které jsou úměrné druhé mocnině lineárního rozměru. S ohledem na tuto skutečnost je možné objemové síly oproti silám plošným zanedbat. Rovnice 2.3.12c a 2.3.13 jsou tímto platné bez ohledu na přítomnost či nepřítomnost objemových sil a bez ohledu na to, je-li kontinuum v klidu či v pohybu [67]. Cauchyho vztah je možné dále vyjádřit v maticovém tvaru viz rovnice 2.3.14 [68].

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{bmatrix} \qquad (2.3.14)$$

Tenzor napětí v Eulerově popisu

V případě rozboru napětí pomocí Eulerova popisu, se uvažovaná podoblast kontinua $\Delta\Omega_0$ působením vnějších sil deformuje a přechází tak do okamžité konfigurace $\Delta\Omega$. Část kontinua vně zvolené hranice $\Delta\Omega$ na tuto oblast působí v každém bodě její hranice silou d$\boldsymbol{F}$. Jelikož je deformace brána jako důsledek zatížení, je tedy bezprostředně vázána na silové působení jako příčinu, tzn., v případě Eulerova popisu se tedy vychází z okamžité (zdeformované) konfigurace oblasti kontinua [66]. Napjatost kontinua pro Eulerův popis je ilustrována na **Obr. 2.18**.



Obr. 2.18 Napjatost kontinua v Eulerově popisu

Nyní nechť je přiřazen elementární ploše dS vektor d$\boldsymbol{S}$ viz rovnice 2.3.15. Dále je možné vycházet ze základního a přirozeného předpokladu, že síla d$\boldsymbol{F}$ je přímo úměrná elementární ploše dS, toto tvrzení je vidět v rovnici 2.3.16, kde τ_{ij} jsou součinitelé úměrnosti pro i-tou složku síly [66].

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{\nu}\,\mathrm{dS} = \mathrm{dS}\,\nu_i\, g_i \tag{2.3.15}$$

$$\mathrm{d}F_i = \tau_{ij}\,\mathrm{d}S_j \tag{2.3.16}$$

Lze dokázat, že součinitelé úměrnosti tvoří složky tenzoru $\boldsymbol{\tau}$. Tento se nazývá Eulerův (Cauchyův) tenzor napjatosti [66]. S využitím rovnic 2.3.15 a 2.3.16 lze elementární sílu d$\boldsymbol{F}$ vyjádřit rovnicí 2.3.17 a dále pak tenzor napětí v rovnici 2.3.18.

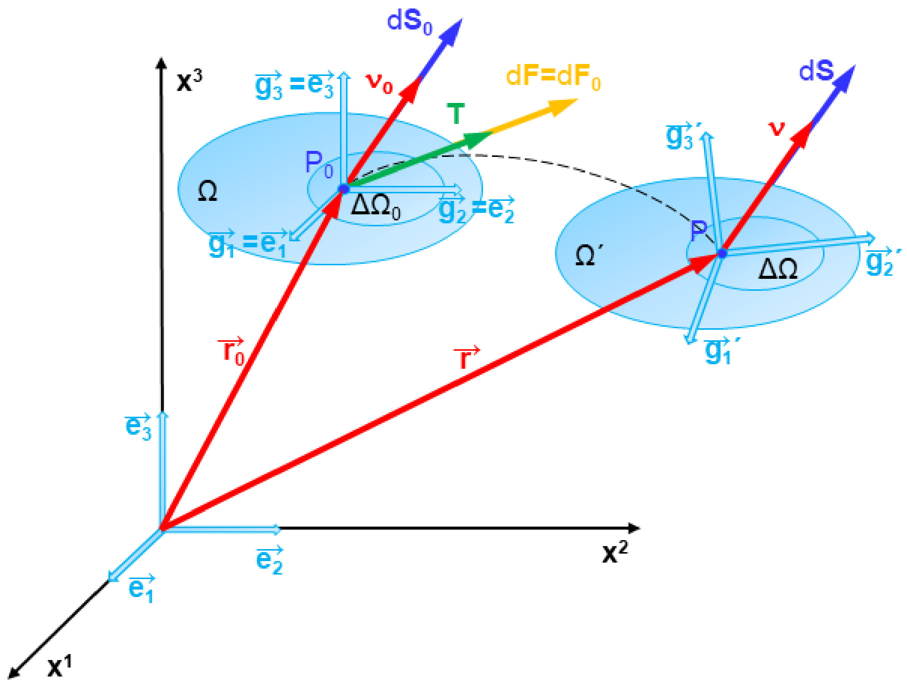
$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \tau_{ij}\,\nu_i\, g_i \mathrm{dS} \tag{2.3.17}$$

$$\boldsymbol{\tau} = \tau_{ij}\,\nu_i\, g_i = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}}{\mathrm{dS}} \tag{2.3.18}$$

Tenzor napětí $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{\tau}$ je kolineární s vektorem d***F*** a vyjadřuje okamžité síly vztažené ke geometrii okamžité konfigurace a nazývá se Cauchyho skutečným napětím [68]. Cauchyho napětí je rovno skutečné působící síle vztažené na deformovanou plochu d*S* [66]. Vzhledem k tomu, že uvažovaný elementární čtyřstěn je libovolnou oblastí vybranou z kontinua a bod *P* je libovolným bodem kontinua, je toto napětí definováno v libovolném bodu a směru daného kontinua [66].

Tenzor napětí v Lagrangeově popisu

V případě rozboru napětí v Lagrangeově popisu, je tato situace analogicky znázorněna na **Obr. 2.19**. Oproti Eulerově popisu je zde brána v úvahu počáteční konfigurace kontinua. V tomto případě působí na plochu $\mathrm{d}S_0$ skutečná síla znázorněna vektorem d***F***. V tomto tvrzení je ovšem skryt rozpor, neboť skutečná síla vyvolává jako následek deformaci a její působení na nezdeformovanou plochu $\mathrm{d}S_0$ je tedy na první pohled nelogické, ale vede k výsledku [66].



Obr. 2.19 Napjatost kontinua v Lagrangeově popisu

Analogicky ke vztahu 2.3.17 se zde vyjádří úměrnost elementární síly d***F*** na elementární plochu $\mathrm{d}S_0$ viz rovnice 2.3.19. nebo pak její složkové vyjádření v rovnici 2.3.20 [66].

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \sigma_{ij}\, \nu_{0i}\, g_j \mathrm{d}S_0 \tag{2.3.19}$$

$$\mathrm{d}F_i = \sigma_{ij}\, \mathrm{d}S_{0j} \tag{2.3.20}$$

Z rovnic 2.3.19 a 2.3.20 lze vyjádřit vektor napětí, který je roven skutečné síle vztažené na nezdeformovanou elementární plochu dS_0. Tenzor napětí $\boldsymbol{\sigma}$ zobrazen v rovnici 2.3.21 je nazýván jako 1. Piolův-Kirchhoffův (Lagrangeův) tenzor napjatosti. Tento tenzor je nesymetrický a pro výše uvedenou nelogičnost se příliš nepoužívá [66].

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{ij}\, \nu_{0i}\, g_j = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}S_0} \tag{2.3.21}$$

Ve snaze odstranit zmiňovaný rozpor, ale přitom zachovat počáteční nezdeformovanou konfiguraci kontinua jako výchozí, se zde zavádí transformovaná síla označená jako d$\boldsymbol{F}_0$. Pro transformaci vektoru síly je aplikována tzv. matice přechodu zobrazena v rovnici 2.3.22, matici přechodu zde odpovídá inverzní deformační gradient, z toho vyplývá rovnice 2.3.23. Tato síla je dále postavena do úměrnosti vůči ploše dS_0 a tím získáme analogicky ke vztahu 2.3.19 rovnici 2.3.24, ze které se vyjádří napětí $\boldsymbol{T}$ viz rovnice 2.3.25 [66].

$$\mathrm{d}x_i = \frac{\partial x_i}{\partial y_j} \mathrm{d}y_j \tag{2.3.22}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_0 = \mathrm{d}F_i \frac{\partial x_i}{\partial y_j} g_j \tag{2.3.23}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F_0} = T_{ij}\, \nu_{0i}\, g_j \mathrm{d}S_0 \tag{2.3.24}$$

$$\boldsymbol{T} = T_{ij}\, \nu_{0i}\, g_j = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}_0}{\mathrm{d}S_0} \tag{2.3.25}$$

Napětí $\boldsymbol{T}$ je nazýváno jako 2. Piolův-Kirchhoffův tenzor napjatosti. Tento tenzor je již symetrický a vyjadřuje přetransformovanou (modifikovanou) sílu d$\boldsymbol{F}_0$ vztaženou na nezdeformovanou plochu dS_0 [66].

2.3.2 Podmínky mechanické rovnováhy

V případě působení vnějších sil na kontinuum, dochází k deformaci jeho povrchu, ale vyvolávají také určitý stav napjatosti a deformaci uvnitř kontinua [67]. Během působení sil na kontinuum se jednotlivé části tohoto kontinua pohybují a kontinuum tím přechází z přirozeného stavu do stavu deformovaného [67]. Na jednotlivé částice kontinua ve zvolené oblasti $\Delta\Omega$ s lipschitzovskou hranicí $\partial\Delta\Omega$ působí síly objemové a síly plošné (hraniční). Síly plošné a jejich působení na vybranou oblast kontinua lze vyjádřit pomocí tenzorů napjatosti, viz kapitola 2.3.1, objemové síly a jejich obecné vyjádření je pak vidět v rovnici 2.3.26, kde f_i reprezentuje měrnou objemovou sílu vztaženou na jednotku hmotnosti a a_i představuje složky vektoru zrychlení kontinua [66, 67].

$$\mathrm{d}F_i = f_i\,\rho\,\mathrm{d}V - a_i\,\rho\,\mathrm{d}V \tag{2.3.26}$$

Všechny síly působící na kontinuum nebo jeho vybranou elementární část musí být v rovnováze, tzn., že všechny objemové i plošné síly na kontinuum působící musí splňovat jak složkové, tak i momentové podmínky rovnováhy [66].

Složkové podmínky rovnováhy v Eulerově popisu

Eulerův popis je často používán, jak již bylo zmíněno, pro jeho přirozenost při popisu napětí. Složkové podmínky rovnováhy pak mají tvar uvedený v rovnici 2.3.27, setrvačné síly zde z důvodu stručnosti nejsou uvedeny, na základě vztahu 2.3.26 je však možné je k objemovým silám kdykoliv přiřadit [66, 67].

$$\int_{\Delta\Omega} f_i\,\rho\,\mathrm{d}V + \int_{\partial\Delta\Omega} \tau_{ij}\,\nu_{ij}\,\mathrm{d}S = 0 \tag{2.3.27}$$

Pro úpravu integrálu obsahujícího složky plošných sil je možné použít Gaussovu-Ostrograndského větu a upravit tak na tvar zobrazený v rovnici 2.3.28 a po úpravě dále platí rovnice 2.3.29. Jelikož je oblast $\Delta\Omega$ libovolnou oblastí kontinua, tak musí platit výsledná složková podmínka rovnováhy v Eulerově popisu ve tvaru zobrazeném prostřednictvím rovnice 2.3.30 [66, 67].

$$\int_{\Delta\Omega} f_i\,\rho\,\mathrm{d}V + \int_{\Delta\Omega} \frac{\partial\tau_{ij}}{\partial y_j}\mathrm{d}V = 0 \tag{2.3.28}$$

$$\int_{\Delta\Omega} \left(f_i\,\rho + \frac{\partial\tau_{ij}}{\partial y_j}\right)\mathrm{d}V = 0 \tag{2.3.29}$$

$$f_i\,\rho + \frac{\partial\tau_{ij}}{\partial y_j} = 0 \tag{2.3.30}$$

Složkové podmínky rovnováhy v Lagrangeově popisu

Postup pro vyjádření podmínek rovnováhy v Lagrangeově popisu je zcela analogický jako v Eulerově přístupu. Zde je použit 1. Piolův-Kirchhoffův tenzor napjatosti a objemové síly F_{0i} jež jsou vztaženy k počáteční konfiguraci. Zavedením rovnice 2.3.31 je možné psát analogicky ke vztahu 2.3.30 rovnici 2.3.32 [66, 67].

$$\mathrm{d}F_{0i} = f_{0i}\,\rho_0\,\mathrm{d}V \tag{2.3.31}$$

$$f_{0i}\,\rho_0 + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0 \tag{2.3.32}$$

Dále je možné zavést 2. Piolův-Kirchhoffův tenzor napjatosti, v tomto případě se vychází z rovnic 2.3.33, kde je vidět porovnání mezi Eulerovým a 1. Piolovým-Kirchhoffovým tenzorem napjatosti, a 2.3.34, která porovnává Eulerův a 2. Piolův-Kirchhoffův tenzor napjatosti. Z porovnání těchto rovnic vyplývá vztah mezi 1. a 2. Piolovým-Kirchhoffovým tenzorem napjatosti zobrazený v rovnici 2.3.35 a 2.3.36 [66, 67].

$$\sigma_{il} = \frac{\rho_0}{\rho}\frac{\partial x_l}{\partial y_j}\tau_{ij} \tag{2.3.33}$$

$$T_{jl} = \frac{\rho_0}{\rho}\frac{\partial x_j}{\partial y_k}\frac{\partial x_l}{\partial y_m}\tau_{km} \tag{2.3.34}$$

$$T_{jl} = \frac{\partial x_j}{\partial y_k}\sigma_{kl} \tag{2.3.35}$$

$$\sigma_{kl} = \frac{\partial y_k}{\partial x_j}T_{jl} \tag{2.3.36}$$

Dosazením do podmínky rovnováhy (rovnice 2.3.32) vyjde rovnice 2.3.37. Po dosazení známého vztahu ($y_k = x_k + u_k$) se dostává výsledný tvar podmínky rovnováhy v Lagrangeově popisu, viz rovnice 2.3.38 [66, 67].

$$\frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{\partial y_k}{\partial x_j}\right)T_{jl} + f_{0k}\,\rho_0 = 0 \tag{2.3.37}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_l}\left[T_{jl}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \delta_{kj}\right)\right] + f_{0k}\,\rho_0 = 0 \tag{2.3.38}$$

Momentové podmínky rovnováhy

Momentovou podmínku rovnováhy je v Eulerově popisu možno psát analogicky k rovnici 2.3.27. ve tvaru viz rovnice 2.3.39 [66, 67]. Tento popis je zde opět vybrán pro svou názornost a přirozenost postupu.

$$\int_{\Delta\Omega} \boldsymbol{y} \times f_i\, \rho\, \boldsymbol{g}_i\, \mathrm{d}V + \int_{\partial\Delta\Omega} \boldsymbol{y} \times \tau_{ij}\, \nu_i\, \boldsymbol{g}_i\, \mathrm{d}S = 0 \tag{2.3.39}$$

K další úpravě je použito Levi-Civitova tenzoru (viz rovnice 2.3.40) a dále pak s aplikací Gaussovi-Ostrograndského věty vyplývá tvar rovnice 2.3.41 [66, 67].

$$\int_{\Delta\Omega} \varepsilon_{ijk}\, y_i\;\, f_j\, \rho\, \mathrm{d}V + \int_{\partial\Delta\Omega} \varepsilon_{ijk}\, y_i\, \tau_{jl}\, \nu_l\, \mathrm{d}S = 0 \tag{2.3.40}$$

$$\int_{\Delta\Omega} \varepsilon_{ijk}\, y_i\;\, f_j\, \rho\, \mathrm{d}V + \int_{\Delta\Omega} \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\varepsilon_{ijk}\, y_i\, \tau_{jl}\right)\mathrm{d}V = 0 \tag{2.3.41}$$

Po úpravě vychází rovnice 2.3.42. Je vidět, že člen v závorce odpovídá levé straně v rovnici 2.3.30, tzn., že je roven nule a tím z rovnice vypadne. Dále tedy zůstává v platnosti zbývající část rovnice, kterou je dále možné upravit na tvar zobrazený v rovnici 2.3.43 [66, 67].

$$\int_{\Delta\Omega} \varepsilon_{ijk}\, y_i\; \left(f_i\, \rho + \frac{\partial \tau_{jl}}{\partial y_l}\right)\mathrm{d}V + \int_{\Delta\Omega} \varepsilon_{ijk}\, \delta_{li}\, \tau_{jl}\, \mathrm{d}V = 0 \tag{2.3.42}$$

$$\int_{\Delta\Omega} \varepsilon_{ijk}\, \tau_{jk}\, \mathrm{d}V = 0 \tag{2.3.43}$$

Rovnice 2.3.43 musí být v platnosti pro libovolnou oblast *ΔΩ*, z toho vyplývá tvrzení reprezentované v rovnici 2.3.44, kde index *k* může nabývat hodnot 1,2 a 3. Z ohledem na charakteristické vlastnosti Levi-Civitova tenzoru je možné psát soustavu rovnic (viz rovnice 2.3.45 – 2.3.47) [66, 67].

$$\varepsilon_{ijk}\, \tau_{jk} = 0 \tag{2.3.44}$$

$$\tau_{12} = \tau_{21} \quad (2.3.45)$$

$$\tau_{13} = \tau_{31} \quad (2.3.46)$$

$$\tau_{23} = \tau_{32} \quad (2.3.47)$$

Z výše uvedených rovnic jasně vyplývá skutečnost (již diskutováno v minulé kapitole), že Eulerův (Cauchyův) tenzor napjatosti je symetrický. Toto tvrzení je velice důležité, neboť každý symetrický tenzor napjatosti automaticky splňuje momentové podmínky rovnováhy. S ohledem na tuto skutečnost je možno pro popis rovnováhy tohoto kontinua uvažovat pouze složkové podmínky rovnováhy [66, 67].

2.3.3 Tenzor deformace

Kinematika obecně studuje pohyb těles bez ohledu na síly, které tento pohyb způsobují [64, 68]. Vztahy definující vzájemnou závislost těchto sil a deformace kontinua, se nazývají konstitutivní rovnice (budou popsány v další kapitole). Pojem deformace neboli přetvoření vyjadřuje vzájemnou změnu polohy částic kontinua během přechodu od výchozí konfigurace daného kontinua do konfigurace aktuální [69, 70]. Pokud dojde ke změně vzájemné polohy páru částic kontinua, změní se i jejich vzájemná interakce, z toho vyplývá, že změna vnitřních sil je tedy funkcí přetvoření [69]. Tento princip se v mechanice poddajných těles lokalizuje na závislost vnitřních sil a přetvoření v diferenciálním objemu kontinua [69]. K popisu deformace je každému bodu kontinua přiřazen vektor posunutí $\boldsymbol{u}$, který definuje vzájemnou polohu bodu kontinua před deformací P a bodu kontinua po deformaci P' [67]. Tento vektor posunutí $\boldsymbol{u}$ je v mechanice poddajných těles nejčastěji definován pomocí Lagrangeova popisu tohoto pohybu (viz rovnice 2.3.48) nebo pak méně často pomocí Eulerova popisu (viz rovnice 2.3.49) [66].

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x} \quad (2.3.48)$$

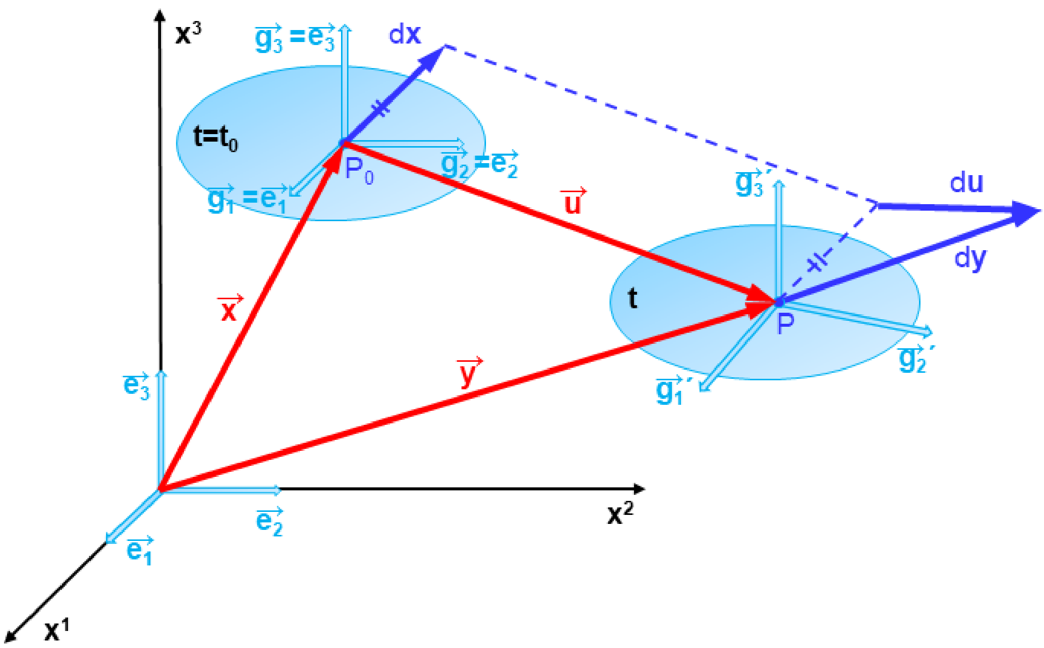
$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}(\boldsymbol{y}) \quad (2.3.49)$$

Deformace v Lagrangeově popisu

Přírůstek vnitřních sil působících na kontinuum mezi výchozí a aktuální konfigurací je funkcí změny vzájemné polohy částic kontinua [69]. Přetvoření infinitesimálního objemu kontinua v aktuálním okamžiku je pak definováno pomocí závislosti aktuální polohy částice kontinua na poloze výchozí (referenční) [69]. S ohledem na tuto skutečnost se pro popis přetvoření kontinua v Lagrangeově popisu nejprve zavádí tzv. deformační gradient, který je popsán v rovnici 2.3.50 a hraje důležitou roli při určování přetvoření kontinua [66]. Pomocí deformačního gradientu lze vyjádřit aktuální polohu částice kontinua v závislosti na poloze referenční [69].

$$F_{ij}(\boldsymbol{x}, t) = \frac{\partial y_i}{\partial x_j} = y_{ij} \tag{2.3.50}$$

Pro další postup je zde zaveden kartézský souřadnicový systém, kde *i*=1,2,3. Kartézský systém je afinní a je možné zde zavést $\boldsymbol{g}_i$ jako lokální bázi v počáteční konfiguraci daného kontinua [66]. Ilustrace referenční a aktuální konfigurace kontinua spolu s příslušnými veličinami pro její popis dle Lagrangea je zobrazena na **Obr. 2.20**.



Obr. 2.20 Deformace v Lagrangeově popisu

Dále pak pro vektor $\boldsymbol{y}$ náležící aktuální konfiguraci kontinua platí vztah uvedený v rovnici 2.3.51. Tento vektor je možné dále psát v diferenciálním tvaru jako rovnici 2.3.52. Zavedením nové lokální báze $\boldsymbol{g}_i{}'$ (viz rovnice 2.3.53) lze dále upravit na tvar uvedený v rovnici 2.3.54 a 2.3.55 [66, 67].

$$\boldsymbol{y} = y_i\, \boldsymbol{e}_i \tag{2.3.51}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{y} = \mathrm{d}y_i\, \boldsymbol{e}_i = \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \mathrm{d}x_j\, \boldsymbol{e}_i \tag{2.3.52}$$

$$\boldsymbol{g}_j{}' = \frac{\partial y_i}{\partial x_j}\boldsymbol{e}_i = F_{ij}\,\boldsymbol{e}_i = F_{ij}\,\boldsymbol{g}_i \tag{2.3.53}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{y} = \mathrm{d}x_j\,\boldsymbol{g}_j{}' \tag{2.3.54}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \mathrm{d}x_j\,\boldsymbol{g}_j \tag{2.3.55}$$

Z rovnic 2.3.54 a 2.3.55 je patrné, že zdeformovaná elementární úsečka d$\boldsymbol{x}$ má v lokálním zdeformovaném souřadnicovém systému s bází $\boldsymbol{g}_i{}'$ stejné souřadnice. Pro určení vhodné míry deformace je uvažován rozdíl kvadrátů délek nezdeformované a zdeformované úsečky viz rovnice 2.3.56, kde g_{ij} a $g_{ij}{}'$ jsou metrickými tenzory [66, 67].

$$\mathrm{d}\boldsymbol{y}^2 - \mathrm{d}\boldsymbol{x}^2 = \left(g_{ij}{}' - g_{ij}\right)\mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}x_j \tag{2.3.56}$$

Jako míra deformace kontinua v daném bodě je použita polovina rozdílu metrických tenzorů viz rovnice 2.3.57, kde ε_{ij} je Greenův deformační tenzor. Po úpravě ho lze přepsat na tvar viz rovnice 2.3.58 [66, 67].

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(g_{ij}{}' - g_{ij}\right) \tag{2.3.57}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(F_{ik}\,F_{ij}\,g_{kl} - g_{ij}\right) \tag{2.3.58}$$

Dále je vhodné tento tenzor vyjádřit pomocí vektoru posunutí $\boldsymbol{u}$ (rovnice 2.3.59), přičemž platí rovnice 2.3.60. Poté lze vyjádřit kvadrát vektoru d$\boldsymbol{y}$ viz rovnice 2.3.61 a po úpravě následně dosadit a vyjádřit rozdíl čtverců elementárních úseček v rovnici 2.3.62 [66, 67].

$$\boldsymbol{u} = u_i\,\boldsymbol{g}_i \tag{2.3.59}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{u} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j\,\boldsymbol{g}_i = u_{ij}\,\mathrm{d}x_j\,\boldsymbol{g}_i \tag{2.3.60}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{y}^2 = \left(\mathrm{d}x_i\,\boldsymbol{g}_i + u_{ij}\,\mathrm{d}x_i\,\boldsymbol{g}_j\right)\left(\mathrm{d}x_k\,\boldsymbol{g}_k + u_{lk}\,\mathrm{d}x_k\,\boldsymbol{g}_l\right) \tag{2.3.61}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{y}^2 - \mathrm{d}\boldsymbol{x}^2 = \left(u_{ki} + u_{ik} + g_{jl}\;u_{ji}\,u_{lk}\right)\mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}x_k \tag{2.3.62}$$

Dosazením do Greenova deformačního tenzoru se získá rovnice 2.3.63. Tento tenzor je nelineární a je možné ho dále zjednodušit a zúžit pro oblast pouze malých deformací.

S ohledem na tento předpoklad dochází ke zjednodušení rovnice 2.3.63 a získáváme tzv. Cauchyho deformační tenzor zobrazen v rovnici 2.3.64 [66, 67].

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{ij} + u_{ji} + g_{kl}\ u_{ki}\, u_{lj}\right) = \frac{1}{2}\left(u_{ij} + u_{ji} + u_{li}\, u_{lj}\right) \tag{2.3.63}$$

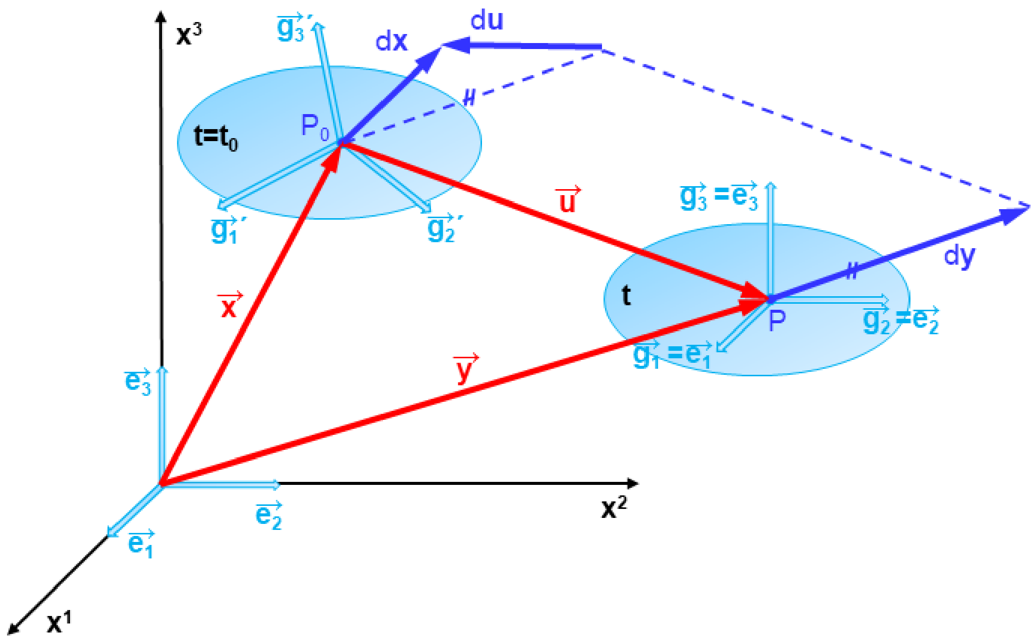
$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{ij} + u_{ji}\right) \tag{2.3.64}$$

Deformace v Eulerově popisu

V případě popisu deformace pomocí Eulerova popisu je použit gradient, který je inverzní k deformačnímu gradientu použitému v Lagrangeově popisu deformace, tento gradient je předepsán pomocí rovnice 2.3.65 [66].

$$(F_{ij})^{-1}(\boldsymbol{y}, t) = \frac{\partial x_i}{\partial y_j} = x_{ij} \tag{2.3.65}$$

Pro další postup je zde opět zaveden kartézský souřadnicový systém, kde *i*=1,2,3. Základní kartézský souřadnicový systém je zde nyní ztotožněn s lokální bází pro zdeformovanou konfiguraci [66]. Ilustrace referenční a aktuální konfigurace kontinua spolu s příslušnými veličinami pro její popis dle Eulera je zobrazena na **Obr. 2.21**.



Obr. 2.21 Deformace v Eulerově popisu

V počáteční konfiguraci daného kontinua odpovídá lokální bázi báze křivočarého souřadnicového sytému $\boldsymbol{g}_i{'}$, tuto bázi je možné popsat pomocí vztahů uvedených v rovnicích 2.3.66 a 2.3.67 [66, 67].

$$\boldsymbol{x} = x_i \, \boldsymbol{e}_i \tag{2.3.66}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \mathrm{d}x_i \, \boldsymbol{e}_i = \frac{\partial x_i}{\partial y_j} \mathrm{d}y_i \, \boldsymbol{e}_i = \mathrm{d}y_j \, \boldsymbol{g}_j{'} \tag{2.3.67}$$

Bázi $\boldsymbol{g}_j{'}$ uvedenou v rovnici výše, lze vyjádřit vztahem viz rovnice 2.3.68. Dále pak analogicky platí závislost uvedená v rovnici 2.3.69. Kvadráty elementárních úseček d$\boldsymbol{x}$ a d$\boldsymbol{y}$ jsou pak definovány rovnicemi 2.3.70 a 2.3.71 a jejich rozdíl je možné definovat pomocí rovnice 2.3.72 [66, 67].

$$\boldsymbol{g}_j{'} = \frac{\partial x_i}{\partial y_j} \boldsymbol{e}_i \tag{2.3.68}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{y} = \mathrm{d}y_j \, \boldsymbol{g}_j \tag{2.3.69}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x}^2 = g_{ij}{'} \, \mathrm{d}y_i \, \mathrm{d}y_j \tag{2.3.70}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{y}^2 = g_{ij} \, \mathrm{d}y_i \, \mathrm{d}y_j \tag{2.3.71}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{y}^2 - \mathrm{d}\boldsymbol{x}^2 = \left(g_{ij} - g_{ij}{'}\right) \mathrm{d}y_i \, \mathrm{d}y_j \tag{2.3.72}$$

Pomocí rovnice 2.3.73 je možné definovat tzv. Almansiův deformační tenzor. Dále je možné vyjádřit elementární úsečku d$\boldsymbol{x}$ (rovnice 2.3.74), přičemž platí rovnice 2.3.75, jejímž dosazením do rovnice 2.3.74 je možné vypočítat čtverec d$\boldsymbol{x}^2$ zobrazený v rovnici 2.3.76 [66, 67].

$$\xi_{ij} = \frac{1}{2}\left(g_{ij} - g_{ij}{'}\right) \tag{2.3.73}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \mathrm{d}\boldsymbol{y} - \mathrm{d}\boldsymbol{u} \tag{2.3.74}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{u} = \frac{\partial u_i}{\partial y_j} \mathrm{d}y_j \, \boldsymbol{g}_i = u_{ij} \, \mathrm{d}y_j \, \boldsymbol{g}_i \tag{2.3.75}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x}^2 = \left(\boldsymbol{g}_i - u_{ji} \, \boldsymbol{g}_j\right)\left(\boldsymbol{g}_k - u_{lk} \, \boldsymbol{g}_l\right) \mathrm{d}y_i \, \mathrm{d}y_k \tag{2.3.76}$$

Po dosazení poslední rovnice 2.3.76 do rovnice 2.3.72, kde je vyjádřen rozdíl čtverců elementárních úseček, se dostává po úpravě výsledný tvar pro Almansiův tenzor deformace uvedený v rovnici 2.3.77 [66, 67].

$$\xi_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{ki} + u_{ik} - g_{jl}\ u_{ji}\, u_{lk}\right) \tag{2.3.77}$$

2.3.4 Základní rovnice mechaniky kontinua

Následující rovnice jsou v platnosti a musí být splněny bez ohledu na vlastnosti materiálu, tzn., že platí pro libovolné kontinuum. Tyto rovnice vycházejí z obecných fyzikálních zákonů, jako jsou například zákon zachování hmotnosti, zákon zachování hybnosti a momentu hybnosti nebo zákon zachování energie.

Rovnice kontinuity

Prostřednictvím rovnice kontinuity je vyjádřen zákon zachování hmotnosti. Časová změna hustoty v daném elementárním objemu je závislá na množství hmoty, které z tohoto elementu za daný čas „vyteče.“ Pomocí kartézských souřadnic je možné tuto závislost vyjádřit v rovnici 2.3.78 [64, 66].

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho\, v_i) = 0 \tag{2.3.78}$$

Rozepsáním tohoto vztahu se dostává rovnice 2.3.79, kde D/D*t* vyjadřuje materiálovou derivaci. Tuto rovnici je dále možné přepsat na tvar viz rovnice 2.3.80, kde první člen reprezentuje substanciální a druhý konvektivní část změny, přičemž **v**=v(***x***, *t*) je rychlost částice [64, 66].

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \tag{2.3.79}$$

$$\dot{\rho} + \rho\, \mathrm{div}\, \mathbf{v} = 0 \tag{2.3.80}$$

Eulerova pohybová rovnice

Vychází ze zákona o zachování hybnosti, uvažuje se částice o dané hmotnosti a její časová změna hybnosti je pak rovna výsledné síle na tuto částici působící. Zákon zachování hybnosti kontinua pak vede na pohybové rovnice [68]. Pomocí uvolnění elementu kontinua o stranách dx_i se z vnitřních sil (reprezentovány Cauchyho napětím σ_{ij})

stávají síly vnější, které poté společně se silami objemovými f_i udílí danému elementu kontinua zrychlení viz rovnice 2.3.81 [64]. Po dosazení do rovnice kontinuity a následné úpravě se získá rovnice 2.3.82, tato rovnice se označuje jako Cauchyho (Eulerova) pohybová rovnice, v případě zanedbání objemových sil dostáváme již zmiňovanou rovnici nechanické rovnováhy [64, 68].

$$\dot{v}_i = \frac{\mathrm{D}v_i}{\mathrm{D}t} \tag{2.3.81}$$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = \rho \frac{\mathrm{D}v_i}{\mathrm{D}t} \tag{2.3.82}$$

Cauchyho okrajové podmínky

Napětí σ_{ij} působící uvnitř tělesa musí na povrchu tohoto tělesa splňovat okrajové podmínky viz rovnice 2.3.83. Tyto podmínky musí být dodrženy všude tam, kde je povrch zatížen vektorem napětí (trakčním vektorem) t_i, který může být i nulový. Uvnitř tělesa musí být dodržena podmínka symetrie $\sigma_{ij}=\sigma_{ji}$ [64].

$$\sigma_{ji}\, n_j = t_i \tag{2.3.83}$$

Zákon zachování energie

Jedná se vlastně o první zákon termodynamiky, je to v podstatě energetická bilance, která nic nevypovídá o tom, jakým směrem procesy probíhají. První zákon termodynamiky je reprezentován pomocí rovnice 2.3.84, kde Q je přivedené, resp. odvedené teplo, $\dot{A} = P$ je přivedený výkon, U je vnitřní energie a K je energie kinetická, popř. G značí energii gravitační (polohovou) [64].

$$\dot{U} + \dot{K} + \dot{G} = P + \dot{Q} \tag{2.3.84}$$

V případě, že dojde k zanedbání změny polohové energie jsou pak ostatní členy vyjádřené pomocí rovnic 2.3.85 - 2.3.88. Po dosazení těchto rovnic do rovnice 2.3.84 se s přihlédnutím k rovnicím 2.3.80 a 2.3.82 dostává zjednodušený tvar bilance uvedený v rovnici 2.3.89, kde v_{ij} představuje rychlost poměrné deformace [64].

$$\dot{K} = \rho\, v_i \frac{\mathrm{D}v_i}{\mathrm{D}t} \tag{2.3.85}$$

$$\dot{U} = \frac{\mathrm{D}u}{\mathrm{Dt}} \tag{2.3.86}$$

$$\dot{Q} = -\mathrm{div}\,\mathbf{q} = -\frac{\partial q_i}{\partial x_i} \tag{2.3.87}$$

$$P = f_i \; v_i + \frac{\partial(\sigma_{ij} \; v_i)}{\partial x_j} \tag{2.3.88}$$

$$\dot{u} = \frac{\mathrm{D}u}{\mathrm{D}t} = -\frac{\partial q_k}{\partial x_k} + \sigma_{ij} \; v_{ij} \tag{2.3.89}$$

Bilanční rovnice pro Entropii

Pokud se uvnitř tělesa nevyskytuje žádný objemový tepelný zdroj, pak je možné psát na základě lokální formy Clausiusovi-Planckovi nerovnosti rovnici 2.3.90, kde ***q*** je hustota tepelného toku a *h* je skalární tepelná výkonová hustota [64].

$$h = -\mathrm{div}\,\mathbf{q} \; = \frac{\partial q_k}{\partial x_k} \tag{2.3.90}$$

V případě předpokladu zanedbání nerovnoměrnosti teploty v elementárním objemu je dále možné psát rovnici 2.3.91, která se dosadí do vztahu 2.3.89 viz rovnice 2.3.92, kde *T* je absolutní (termodynamická) teplota, *η* je hustota entropie a *γ* je hustota produkce entropie z vnitřních zdrojů za jednotku času [64].

$$h = \frac{\partial q_k}{\partial x_k} = -T(\dot{\eta} - \gamma) \tag{2.3.91}$$

$$\dot{u} = T\dot{\eta} + \sigma_{ij} \; v_{ij} \; - T\gamma \tag{2.3.92}$$

Je-li produkce entropie z vnitřních zdrojů *γ* rovna nule, pak se z rovnice 2.3.92 stává Gibbsův vztah viz rovnice 2.3.93. Pomocí rovnic 2.3.89 a 2.3.93 je možné vyloučit derivaci vnitřní energie, z toho vyplývá rovnice 2.3.94 [64].

$$\dot{u} = T\dot{\eta} + \sigma_{ij} \; v_{ij} \tag{2.3.93}$$

$$\dot{\eta} = -\frac{\partial q_k}{\partial x_k} \frac{1}{T} \tag{2.3.94}$$

2.3.5 Konstitutivní vztahy

Konstitutivní vztahy jsou takové vztahy, které popisují odezvu daného materiálu v závislosti na určité situaci, tzn., že respektují a zohledňují vlastnosti materiálu. Jsou to rovnice popisující závislosti mezi silami, které zatěžují daný materiál, a veličinami popisujícími určitou odezvu tohoto materiálu vyvolanou působením zatěžujících sil [64, 68].

Tyto vztahy je možné rozdělit do tří základních skupin. Do první skupiny patří rovnice rovnováhy (rovnice statiky) nebo pohybové rovnice (rovnice dynamiky), do druhé skupiny se zařazují kinematické vazby (geometrické rovnice). Ve třetí skupině rovnic se nacházejí rovnice charakterizující fyzikální vlastnosti tělesa, jsou to rovnice, které popisují vazby mezi tenzorem napětí a tenzorem přetvoření, tyto konstitutivní rovnice jsou popsány dále s ohledem na „aproximační“ deformační model materiálu [64, 68].

Elastický materiál

Nejjednodušší konstitutivní vztah vychází z úvahy pro lineárně elastický materiálový model. Vzhledem k předpokladu linearity je nutné, aby se zde vyskytovaly pouze malé posuvy a malá přetvoření materiálu, potom platí rovnice 2.3.95 a Gibbsův vztah je možné upravit na tvar uvedený v rovnici 2.3.96 [64, 68].

$$v_{ij} = \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} \tag{2.3.95}$$

$$\mathrm{d}u = T\mathrm{d}\eta + \sigma_{ij}\,\mathrm{d}\varepsilon_{ij} \tag{2.3.96}$$

Rovnice 2.3.96 je stavová rovnice, kde v případě izoentropického děje je dη=0, poté lze po úpravě vyjádřit napětí σ_{ij} pomocí rovnice 2.3.97 [64, 68].

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{\partial u}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_{\eta=\mathrm{konst}} \tag{2.3.97}$$

Z výše uvedeného vztahu je tedy patrné, že vnitřní energie je potenciálem napětí během izoentropické deformace. Dále je možné zavést do výpočtu další stavovou veličinu vyjadřující Helmholzovu volnou energii *f* dle rovnice 2.3.98 [64, 68].

$$f = u - T\eta \tag{2.3.98}$$

Vyloučením *u* z rovnic 2.3.96 a 2.3.98 se po úpravě dostává rovnice 2.3.99, ze které vyplývá závislost popsána v rovnici 2.3.100 [64, 68].

$$\mathrm{d}f = -\eta \mathrm{d}T + \sigma_{ij}\, \mathrm{d}\varepsilon_{ij} \tag{2.3.99}$$

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_{T=\mathrm{konst}} \tag{2.3.100}$$

Z uvedené rovnice je zřejmé, že volná energie je potenciálem napětí při izotermickém ději. V obou výše uvedených případech výpočtu napětí tedy vyplývá, že teplota z uvedených výpočtů vypadává. Dále zbývá zavést vztah mezi tenzorem napětí a tenzorem přetvoření. Pokud je přijat fakt z úvahou lineární aproximace, pak platí, že vztah mezi tenzorem napětí a tenzorem deformace je popsán pomocí Hookeova zákona, viz rovnice 2.3.101 [64, 68].

$$\sigma_{ij} - \sigma_{ij}{}^{(0)} = D_{ijkl}(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}{}^{(0)}) \tag{2.3.101}$$

V rovnici je v exponentu indexem nula v závorce označen známý počáteční stav. Nejčastějším předpokladem, který se zde zavádí, je předpoklad, že za rovnoměrné teploty tenzor napětí a tenzor deformace současně vymizí, tzn., že je zde uvažován tzv. „přirozený stav tělesa," kde nejsou přítomny vlastní pnutí, a tento stav je stavem počátečním. Z toho vyplývá zjednodušení rovnice 2.3.101 na rovnici 2.3.102 [64, 68].

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl}\, \varepsilon_{kl} \tag{2.3.101}$$

Tenzor D_{ijkl} je tenzorem čtvrtého řádu obsahující izoentropické nebo izotermické elastické moduly. Indexy *ij*, resp. *kl*, jsou vzájemně záměnné, jelikož mezi tenzorem napětí a přetvoření platí jejich vzájemná symetrie. Dle rovnice 2.3.102 je možné vyjádřit hustotu deformační energie, ze které je ihned zřejmé, že indexy *ij* a *kl* jsou skutečně záměnitelné [64, 68].

$$W = \int \sigma_{ij}\, \mathrm{d}\varepsilon_{ij} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} D_{ijkl}\, \varepsilon_{ij}\, \varepsilon_{kl} \tag{2.3.102}$$

V tenzoru D_{ijkl} je pak tedy obsaženo pouze 21 nezávislých prvků (elastické moduly či konstanty), které jsou v případě úvahy izotropního materiálu zredukovány pouze na 2 prvky.

Ze stavových rovnic 2.3.96 a 2.3.97, resp. 2.3.99 a 2.3.100 pak vyplývá fakt, že nezávislé stavové veličiny jsou pouze ε_{ij}, η, resp. ε_{ij}, T. Dále je tedy možné totální diferenciál pro vnitřní energii a totální diferenciál volné energie vyjádřit rovnicemi 2.3.103 a 2.3.104 [64, 68].

$$\mathrm{d}u = \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)_{\varepsilon_{ij}} \mathrm{d}\eta + \left(\frac{\partial u}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_{\eta} \mathrm{d}\varepsilon_{ij} \tag{2.3.103}$$

$$\mathrm{d}f = \left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_{\varepsilon_{ij}} \mathrm{d}T + \left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_{T} \mathrm{d}\varepsilon_{ij} \tag{2.3.104}$$

Indexy u závorek označují v rovnicích veličinu, která zůstává během derivace konstantní. Porovnáním rovnic 2.3.103 a 2.3.104 s rovnicemi 2.3.96 a 2.3.99 se dostane rovnice vyjadřující teplotu a entropii [64, 68].

$$T = \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)_{\varepsilon_{ij}} \tag{2.3.105}$$

$$\eta = -\left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_{\varepsilon_{ij}} \tag{2.3.106}$$

V rovnici 2.3.105 je dokázáno, že vzrůst vnitřní energie u pružného tělesa, které neprochází deformací, je dán pouze přívodem tepla do jednotky objemu, viz rovnice 2.3.107, do této rovnice se dále dosadí diferenciál dη, získaný z rovnice 2.3.106 [64, 68].

$$\mathrm{d}Q = T\,\mathrm{d}\eta \tag{2.3.107}$$

$$\mathrm{d}Q = -T\left(\frac{\partial^2 f}{\partial T\,\partial \varepsilon_{ij}} \mathrm{d}\varepsilon_{ij} + \frac{\partial^2 f}{\partial T^2} \mathrm{d}T\right) \tag{2.3.108}$$

Pokud je dε_{ij} = 0, je možné rovnici dále přepsat do tvaru 2.3.109, kde je symbolem c_v označena měrná tepelná kapacita a to při nezměněné deformaci. S využitím rovnic 2.3.100 a 2.3.109 je možné rovnici 2.3.108 dále přepsat do tvaru 2.3.110 [64, 68].

$$\mathrm{d}Q = -\frac{\partial^2 f}{\partial T^2} \mathrm{d}T = \rho\, c_v\, \mathrm{d}T \tag{2.3.109}$$

$$\mathrm{d}Q = -T\left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial T}\right)_{\varepsilon_{ij}} \mathrm{d}\varepsilon_{ij} + \rho\, c_v\, \mathrm{d}T \qquad (2.3.110)$$

Vztah s parciální derivací napětí v závorce je definován tepelnou roztažností, pokud se při konstantní deformaci změní teplota, vzroste tlakové napětí uvnitř tělesa. V případě, že je toto těleso izotropní, bude se jednat o hydrostatický tlak dle rovnice 2.3.111 [64, 68].

$$\left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial T}\right)_{\varepsilon_{ij}} = -\beta\, \delta_{ij} \qquad (2.3.111)$$

Z posledních dvou rovnic vyplývá, pro izotropní těleso rovnice 2.3.112 [64, 68].

$$\mathrm{d}Q = T\,\beta\, \mathrm{d}\varepsilon_{ii} + \rho\, c_v\, \mathrm{d}T \qquad (2.3.112)$$

Kde ε_{ii} označuje poměrné zvětšení objemu v tepelně izolovaném tělesu ($\Delta Q = 0$) při rovnoměrném rozdělení teploty uvnitř tohoto tělesa ($T = T_0$). Integrací poslední rovnice se dostává vztah pro změnu teploty, který se nazývá Kelvinův vzorec. Tato rovnice vyjadřuje pokles teploty při elastickém zvětšení objemu a nezávislost smykových deformací při změně tvaru při stálém objemu [64, 68].

$$\Delta T = -\frac{T_0\,\beta}{\rho\, c_v}\,\varepsilon_{ii} = -\frac{T_0\,\beta}{\rho\, c_v} \cdot \frac{\Delta \mathrm{d}V}{\mathrm{d}V} \qquad (2.3.113)$$

Viskoelastický materiál

Relaxace napětí nebo creep jsou jevy, které se vyskytují a jsou typické pro viskózní materiály. Během relaxace dochází k postupnému poklesu napětí v tělese obsahující vnitřní pnutí a creep vyjadřuje naopak růst deformace za stálého napětí. Tyto jevy se uplatňují v případě chování kovů za zvýšených teplot nebo polymerních materiálech. V případě těchto jevů vstupuje do konstitutivních vztahů nová explicitní proměnná, čas. Viskoelastické vlastnosti se obecně popisují pomocí funkcionálních vztahů mezi složkami tenzoru napětí, tenzoru deformace, teplotou a časem [64, 68].

Pro popis viskoelastického chování jsou často využívány reologické modely popisující chování materiálu pomocí kombinace ideálních pružin a tlumičů. Obecněji je možné získat konstitutivní vztahy pro lineárně viskoelastický materiál pomocí tenzorové funkce čtvrtého řádu ve formě relaxační funkce $G_{ijkl}(x_r, t)$ nebo creepové funkce $J_{ijkl}(x_r, t)$ [64, 68].

Pokud se přetvoření v čase t = 0 náhle změní z nuly na hodnotu $\bar{\varepsilon}_{ij}$ a dále je konstantní, tak se napětí musí měnit úměrně s časem vzhledem k relaxační funkci podle rovnice 2.3.114 [64, 68].

$$\sigma_{ij}(x_r, t) = G_{ijkl}\,(x_r\,, t)\,\bar{\varepsilon}_{kl}\,(x_s) \tag{2.3.114}$$

Je možné předpokládat, že počáteční (okamžitá) odezva pro čas t = 0 je elastického charakteru, tzn. G_{ijkl} (x_r, 0) reprezentuje tenzor elastických modulů, kde však s rostoucím časem mají jednotlivé složky monotónně klesající časový průběh [64, 68].

Pokud v čase τ nastane změna v přetvoření o diferenciál dε_{kl}, projeví se to v čase $t > \tau$ vzrůstem napětí o G_{ijkl} (x_r, t - τ)dε_{kl}. Pomocí superpozice se dostává konstitutivní vztah pro libovolný průběh přetvoření ε_{ij} (x_r, τ), viz rovnice 2.3.115. Obdobně lze vyjádřit také deformační odezvu při předepsaném průběhu napětí pomocí creepové funkce, viz rovnice 2.3.116 [64, 68].

$$\sigma_{ij}(x_r, t) = \int_{-\infty}^{t} G_{ijkl}\,(x_r\,, \tau)\,\frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial \tau}\,\mathrm{d}\tau \tag{2.3.115}$$

$$\varepsilon_{ij}(x_r, t) = \int_{-\infty}^{t} J_{ijkl}\,(x_r\,, t - \tau)\,\frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial \tau}\,\mathrm{d}\tau \tag{2.3.116}$$

U kovů při působení vysokých teplot nastává nelineární relaxace a nelineární creep a výše uvedené vztahy není možné použít. V tomto případě lze pro ustálený creep při jednoosé napjatosti použít *Nortonův zákon*, viz rovnice 2.3.117, který byl dále zobecněn i pro případ tříosé napjatosti. Pokud nastane zároveň creep i elastická deformace, musí být výsledek roven jejich součtu, viz rovnice 2.3.118 [64, 68].

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t} = k\,\sigma^{n} \tag{2.3.117}$$

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{E}\,\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} + k\,\sigma^{n} \tag{2.3.118}$$

Ve výše uvedeném zákonu ε označuje logaritmické přetvoření a σ skutečné Cauchyho napětí. V případě předepnutí tyče počátečním napětím $\sigma_0 = E\varepsilon_0$ a ponecháním poměrného prodloužení konstantním, vychází po integraci rovnice 2.3.119. Tato rovnice umožnuje vyjádřit změnu napětí s časem $\sigma = \sigma(t)$, při zachování $\varepsilon = \varepsilon_0$ = konst. [64, 68].

$$\sigma^{-(n-1)} - \sigma_0^{-(n-1)} = (n-1)kEt \tag{2.3.119}$$

Elastickoplastický materiál

Model pružně plastického materiálu vychází z faktu, že pokud napětí v materiálu překročí určitou mezní hodnotu, stanou se deformace v tomto materiálu z části nevratné. Po odlehčení tohoto zatížení v materiálu vymizí deformace elastická, která se řídí Hookeovým zákonem, a zůstává deformace plastická, která vzniká pohybem dislokací uvnitř krystalové mřížky, viz kapitola 2.2 této práce. Uvažuje se zde předpoklad, že deformace jsou explicitně nezávislé na čase a rychlosti zatěžování. Dále je zde uvažováno, že pohyb dislokací vzniká nezávisle na střední hodnotě normálových napětí, rovnice 2.3.120, (tedy na prvním invariantu tenzoru napětí), ale je ovlivňován maximálními smykovými napětími potřebnými pro tento pohyb, tudíž je rozhodující pouze deviátor napětí, viz rovnice 2.3.121 [64, 68].

$$\sigma_m = \frac{1}{3}\sigma_{ii} \tag{2.3.120}$$

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_m\,\delta_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\,\delta_{ij} \tag{2.3.121}$$

V případě, že dojde ke vzniku plastické deformace, pak složky S_{ij} deviátoru napětí musí vyhovět kritériu vzniku plastických deformací, podmínce plasticity $F(S_{ij}) = 0$. U izotropního materiálu je vznik plastických deformací nezávislý na volbě souřadnicových os, tzn., že do podmínky plasticity vstupují pouze druhý a třetí invariant tenzoru S_{ij}, jelikož první invariant je nulový. Nejčastěji je uvažován pouze druhý invariant (viz rovnice 2.3.122) a funkce $F(\sigma_{ij})$ se předpokládá ve formě Misesovi podmínky plasticity, viz rovnice 2.3.123 [64, 68].

$$J_2 = \frac{1}{2}\,S_{ij}\,S_{ij} \tag{2.3.122}$$

$$F(\sigma_{ij}) = J_2 - k^2 = \frac{1}{2}\,\sigma_{ij}\,\sigma_{ij} - \frac{1}{6}\sigma_{kk}\,\sigma_{ll} - k^2 \tag{2.3.123}$$

Konstanta *k* v rovnici 2.3.123 má význam meze kluzu při čistém smykovém zatížení, pokud se funkce F (σ_{ij}) = 0, pak tato funkce charakterizuje mezní plochu, plochu plasticity. Tato plocha je v prostoru konstantní, neboť během plastického přetvoření nemění svůj tvar ani velikost, ani polohu. Model, kde je uplatněna takováto podmínka, se nazývá ideálně plastický, příp. ideálně elastickoplastický. V případě, že tato podmínka není splněna, pak se jedná o materiál, kde je uplatněn jev zpevnění, zatímco ideálně plastický materiál se nezpevňuje. Plastický materiál musí totiž vyhovovat přirozenému požadavku, který definuje skutečnost, že přidáním a opětovným odejmutím (cyklickým zatěžováním) nelze získat práci [64, 68].

Pro ideálně elastickoplastický izotropní materiál musí platit, že v prostoru určeném hlavními napětími, zaujímá podmínka plasticity válcovou plochu, která se u materiálu v důsledku zpevnění může měnit a přesouvat. Dle tzv. Druckerova postulátu (rovnice 2.3.124) musí však platit, že vektor plastické deformace má v každém bodě povrchu plasticity k tomuto povrchu směr normály [64, 68]. V případě ideálně plastického materiálu, bude mít tento postulát tvar, viz rovnice 2.3.125. Z tohoto tvrzení vyplývá podmínka, kde rovnice plastického tečení musí být asociativní (sdružené) s podmínkou plasticity [64, 68].

$$\mathrm{d}\sigma_{ij}\,\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{p} \geq 0 \qquad (2.3.124)$$

$$\mathrm{d}\sigma_{ij}\,\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{p} = 0 \qquad (2.3.125)$$

Po derivaci bude mít podmínka plasticity tvar zobrazen v rovnici 2.3.126. Z rovnic 2.3.125 a 2.3.126 vyplývá předpoklad uvedený v rovnici 2.3.127 [64, 68].

$$\frac{\partial F(\sigma_{kl})}{\partial \sigma_{ij}}\,\mathrm{d}\sigma_{ij} = 0 \qquad (2.3.126)$$

$$\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{p} = \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \qquad (2.3.127)$$

Funkce $F = F$ (σ_{ij}) zastupuje ve výše uvedené rovnici úlohu plastického potenciálu, jelikož se derivací této složky podle tenzoru napětí získá příslušná složka rychlosti plastického přetvoření. Při řešení MKP úloh tvoří konstitutivní rovnice 2.3.127 spolu s rovnicemi rovnováhy (nebo pohybovými rovnicemi), okrajovými podmínkami a podmínkou plasticity okrajovou úlohu plasticity [64, 68].

Viskoplastický materiál

Většina kovových materiálů se vyznačuje krychlovou soustavou. U kovů, které mají krychlovou prostorově centrovanou mřížku je obvykle průběh plastické deformace závislý na deformační rychlosti. To je obvyklý jev pozorovaný například u železa a jeho slitin za běžných teplot. Kovy s plošně centrovanou soustavou bývají k deformační rychlosti méně citlivé. Rychlost deformace je dále ovlivňována teplotou, obecně platí, že se zvyšující se teplotou roste i deformační rychlost [64, 68].

Fyzikální interpretace těchto jevů viskoplasticity je velmi obtížná, nejčastěji se pro popis tohoto chování využívají experimentálně získané hodnoty, které se popisují pomocí rovnic mechaniky [64, 68].

Deformaci tyče, která je zatížena osovou silou a nachází se v podmínkách viskoplasticity, je možné rozložit na tři složky, viz rovnice 2.3.128. Analogicky k tomu je možné psát rovnici 2.3.129, která vyjadřuje rychlost deformace [64, 68].

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p + \varepsilon^c \tag{2.3.128}$$

$$\mathrm{d}\varepsilon = \mathrm{d}\varepsilon^e + \mathrm{d}\varepsilon^p + \mathrm{d}\varepsilon^c \tag{2.3.129}$$

V této rovnici dε^e vyjadřuje pružnou složku rychlosti deformace a je možné ji vyjádřit podle Hookeova zákona. Složka dε^p vyjadřuje plastickou rychlost deformace, která vzniká při vysokých hodnotách napětí v počátečním období zatěžování nebo při dalším vývoji deformace během přeskupování napětí. Tato složka se určuje pomocí rovnic teorie tečení (rovnice 2.3.127) nebo rovnicemi tzv. deformační teorie. Poslední složka dε^c popisuje viskosní část deformační rychlosti a určuje se pomocí nelineárních závislostí. V rámci tříosé napjatosti se rovnice obvykle zobecňují a využívá se tzv. funkce plasticity *F*, která je potenciálem tečení a definuje „povrch tečení“ a funkce *f*, což je skalární funkce souřadnic tělesa. Závislost těchto veličin je zobrazena v rovnici 2.3.130 [64, 68].

$$\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^c = f\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \tag{2.3.130}$$

2.3.6 Podmínka plasticity

Podmínka plasticity je obecně funkcí vyjadřující okamžik, kdy materiál za současně se zvyšujícího zatěžování přechází z pružného do plastického stavu. Je to hranice, při jejímž překonání dochází k nevratnému plastickému přetvoření materiálu. Tato podmínka je ovlivněna především prostřednictvím materiálových vlastností, historií předchozího zpracování materiálu a také podmínkami samotného tvářecího procesu a způsobem zatěžování. Z pohledu tváření a jeho popisu je podmínka plasticity většinou využívána v kombinaci s funkcí plastického tečení, které vyjadřuje velikost deformace v závislosti na stavu napjatosti tvářeného tělesa.

V případě pružného stavu platí Hookeův zákon a složky deformačního vektoru ε jsou jednoznačně určeny pomocí složek vektoru napětí σ. Podmínku pružného stavu lze při jednoosé napjatosti psát ve tvaru, viz rovnice 2.3.131, kde σ_K vyjadřuje mez kluzu materiálu [71].

$$|\sigma| - \sigma_K < 0 \tag{2.3.131}$$

V tomto případě lze podmínku plasticity jednoduše zapsat ve tvaru, viz rovnice 2.3.132, kde *f* je funkcí plasticity. Obdobně lze podmínku plasticity přepsat do tvaru pro obecnou napjatost (viz rovnice 2.3.133), která je vyjádřena vektorem napětí σ a vlastnosti materiálu jsou popsány pomocí potřebného počtu konstant m_j = 1, 2, …, *n* [71].

$$f(\sigma, \sigma_K) = |\sigma| - \sigma_K = 0 \tag{2.3.132}$$

$$f\left(\{\sigma\}, m_j\right) = 0 \tag{2.3.133}$$

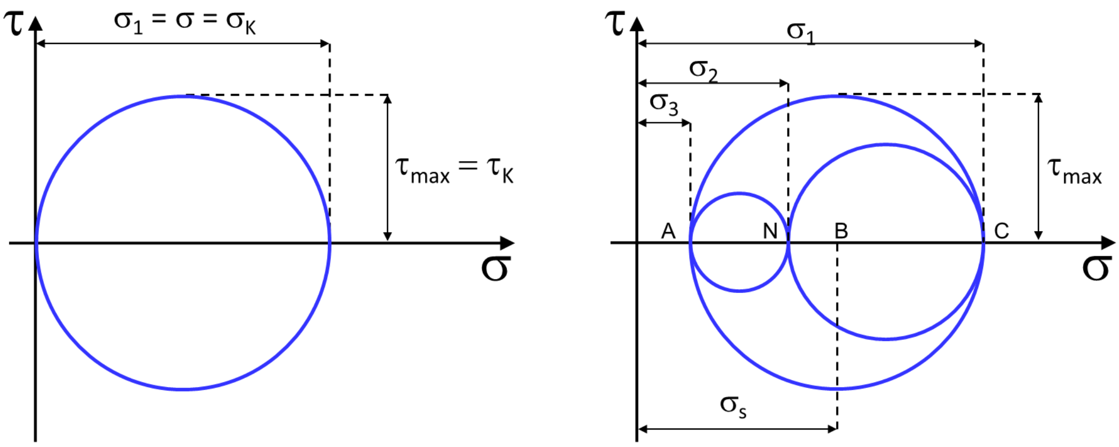
Trescova podmínka plasticity

Definice podmínky plasticity podle Trescy obecně pracuje s předpokladem, že plastického stavu materiálu je dosaženo v okamžiku, kdy smykové napětí ve skluzové rovině uvnitř krystalové mřížky dosáhne kritické hodnoty potřebné pro uvedení dislokace do pohybu, jedná se o podmínku tzv. maximálního smykového napětí [71].

Základní definice a vyjádření této podmínky plasticity je vidět v rovnici 2.3.134 [71].

$$\tau_{max} = \tau_K \tag{2.3.134}$$

Kritická hodnota tohoto maximálního smykového napětí je závislá na materiálu, teplotě a podmínkách zatěžování. Hodnotu tohoto kritického smykového napětí lze určit při podmínkách jednoosé napjatosti, což je zvláštním případem napjatosti prostorové, a platí např. $\sigma_1 = \sigma \neq 0$ a $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$. Jednoosá a obecná prostorová napjatost jsou vyobrazeny na **Obr. 2.22** v Mohrově diagramu [71].



Obr. 2.22 Mohrův diagram pro jednoosou napjatost (vlevo) a obecnou prostorovou napjatost (vpravo)

V případě jednoosé napjatosti přechází materiál do plastického stavu při dosažení meze plasticity, tzn. v okamžiku kdy napětí σ dosáhne meze kluzu materiálu. Je zde dodržen předpoklad, že počáteční meze kluzu v tahu a tlaku jsou stejné. Z **Obr. 2.22** potom vyplývá rovnice 2.3.135, která říká, že pokud dosáhne normálové napětí meze plasticity, dosáhne jí současně i maximální smykové napětí [71].

$$\tau_{max} = \tau_K = \frac{\sigma_K}{2} \tag{2.3.135}$$

Pokud se jedná o prostorovou napjatost, kde $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, pak lze podmínku plasticity jednoduše vyjádřit pomocí rovnice 2.3.136, kterou lze dále přepsat do tvaru 2.3.137 [71].

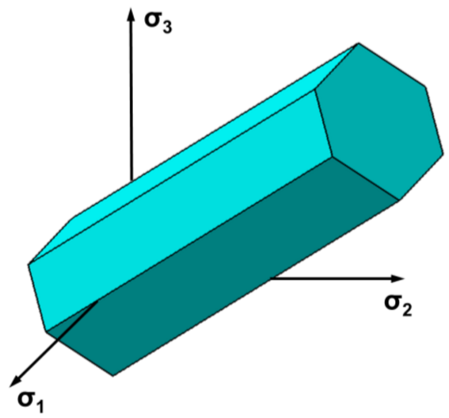
$$\tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \tag{2.3.136}$$

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_K \tag{2.3.137}$$

Pokud se jedná o prostorovou napjatost, kde není splněna výše uvedená podmínka, pak musí být v případě zahrnutí i tlakových napětí splněna jedna ze šesti podmínek, viz rovnice 2.3.138 [71].

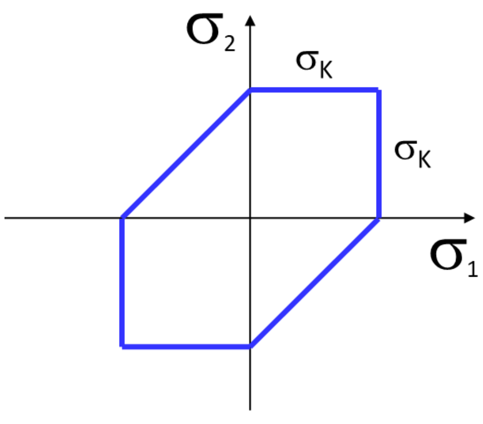
$$|\sigma_1 - \sigma_3| = \sigma_K\,; \quad |\sigma_2 - \sigma_3| = \sigma_K\,; \quad |\sigma_1 - \sigma_2| = \sigma_K \tag{2.3.138}$$

Soustava šesti rovnic podmínek plasticity (2.3.138) utváří v prostoru hlavních napětí šestiboký hranol, jehož osa je totožná s osou prvního oktantu, kde $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ a vždy dvěma povrchovými plochami, které musí být rovnoběžné. Povrchem plasticity je zde tedy šestiboký hranol, viz **Obr. 2.23** [71].



Obr. 2.23 Ilustrace povrchu plasticity dle Trescy

Pro případ rovinné napjatosti ($\sigma_3 = 0$) lze výše uvedené předpoklady a podmínku plasticity znázornit v rovině hlavních napětí σ_1 a σ_2, kde je hranicí plasticity šestiúhelník, viz **Obr. 2.24** [71].



Obr. 2.24 Podmínka plasticity dle Trescy pro rovinnou napjatost

Energetická podmínka plasticity

Definice této podmínky plasticity je vztažena k předpokladu, že plastického stavu materiálu je dosaženo v okamžiku, kdy hustota deformační energie potřebné pro změnu tvaru dosáhne kritické hodnoty (viz rovnice 2.3.139). Energetická podmínka plasticity bývá často označována také jako podmínka efektivního napětí, oktaedrická, von Misesova nebo HMH (Huber, Mises, Hencky) [71].

$$\lambda_{tv} = \lambda_{tvkr.} \tag{2.3.139}$$

Pro obecnou prostorovou napjatost je možné hustotu deformační energie potřebnou pro změnu tvaru vyjádřit ve tvaru uvedeném na levé straně v rovnici 2.3.140 a následně ji s ohledem na rovnici 2.3.139 porovnat s její kritickou hodnotou [71].

$$\frac{1+\mu}{3E}\left[{\sigma_x}^2+{\sigma_y}^2+{\sigma_z}^2-\left(\sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_z+\sigma_z\sigma_x\right)+3\left({\tau_x}^2+{\tau_y}^2+{\tau_z}^2\right)\right] = \lambda_{tvkr.} \tag{2.3.140}$$

Stejnou rovnici je možné psát také ve tvaru, viz rovnice 2.3.141 [71].

$$\frac{1+\mu}{3E}\,{\sigma_i}^2 = \lambda_{tvkr.} \tag{2.3.141}$$

Kritickou hodnotu hustoty deformační energie je možné určit s využitím úvahy jednoosé napjatosti, kdy bude plastického stavu dosaženo, když působící napětí σ dosáhne meze kluzu σ_K. Z rovnice 2.3.141 vyplývá při úvaze, že efektivní napětí je při jednoosé napjatosti rovno působícímu napětí ($\sigma_i = \sigma$), rovnice 2.3.142 [71].

$$\frac{1+\mu}{3E}\,{\sigma_K}^2 = \lambda_{tvkr.} \tag{2.3.142}$$

Porovnáním rovnic 2.3.140 a 2.3.142 a následné úpravě se dostávají finální vztahy definující energetickou podmínku plasticity.

$${\sigma_x}^2+{\sigma_y}^2+{\sigma_z}^2-\left(\sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_z+\sigma_z\sigma_x\right)+3\left({\tau_x}^2+{\tau_y}^2+{\tau_z}^2\right) = {\sigma_K}^2 \tag{2.3.143}$$

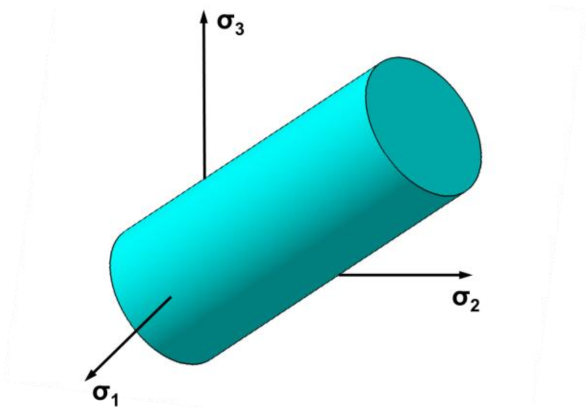
$$\sigma_i = {\sigma_K}^2 \tag{2.3.144}$$

Tyto vztahy je možné dále přepsat do tvaru, kde je pro vyjádření podmínky plasticity využito hlavních napětí, viz rovnice 2.3.145. nebo 2.3.146.

$$\sigma_1{}^2 + \sigma_2{}^2 + \sigma_3{}^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) = \sigma_K{}^2 \tag{2.3.145}$$

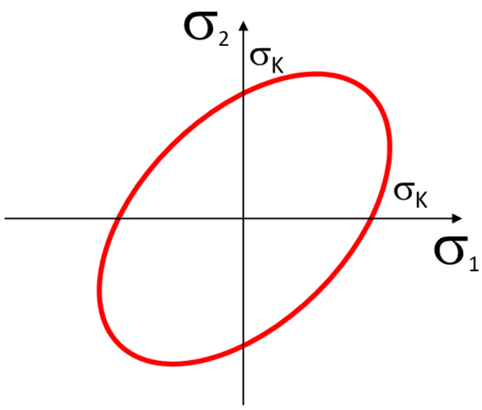
$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \sigma_K \tag{2.3.146}$$

Rovnice 2.3.145 zde vyjadřuje mezní plochu plasticity. Mezní plocha plasticity dle energetické podmínky utváří v prostoru hlavních napětí válcovou plochu, viz **Obr. 2.25**, jejíž osa je totožná s osou prvního oktantu, kde $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ a zároveň je obálkou šestibokého hranolu vyjadřujícího podmínku plasticity dle Trescy [71].



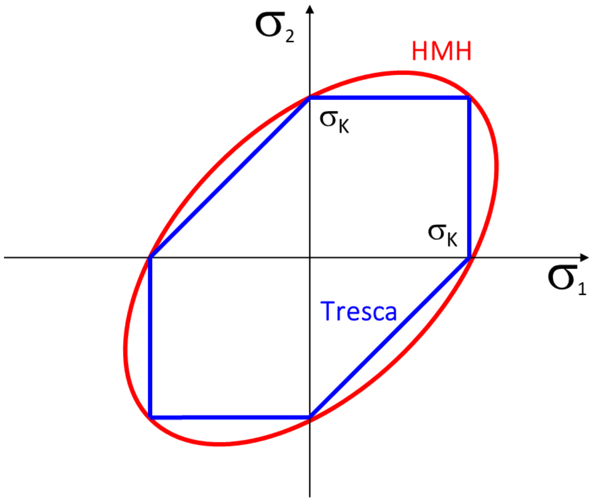
Obr. 2.25 Ilustrace povrchu plasticity dle HMH

Pro případ rovinné napjatosti ($\sigma_3 = 0$) lze podmínku plasticity opět znázornit v rovině hlavních napětí σ_1 a σ_2, kde je hranicí plasticity elipsa, viz **Obr. 2.26** [71].



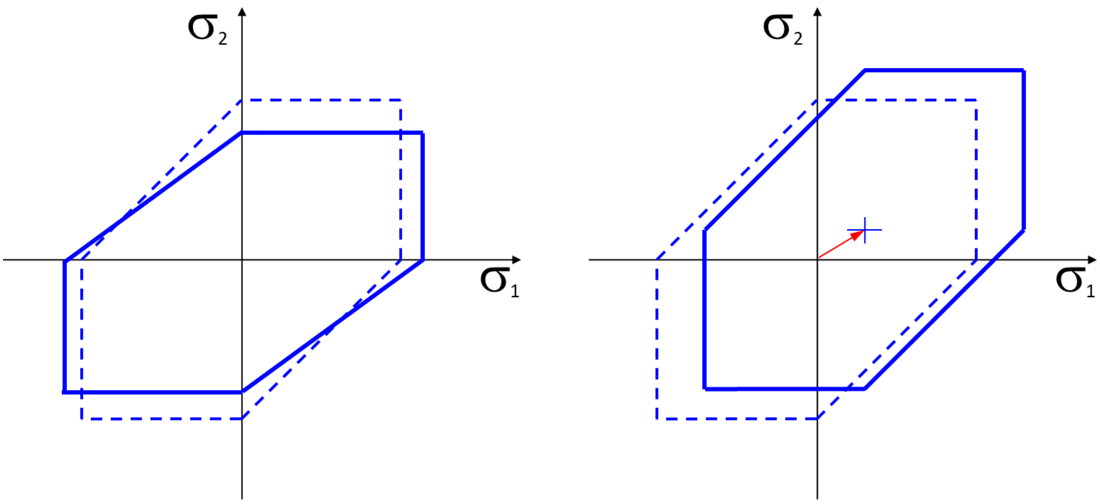
Obr. 2.26 Podmínka plasticity dle HMH pro rovinnou napjatost

Jak bylo zmíněno výše, válec vyjadřující povrch plasticity dle podmínky HMH tvoří obálku šestibokého hranolu podmínky dle Trescy, to je v rovině hlavních napětí σ_1 a σ_2 znázorněno na **Obr. 2.27**.



Obr. 2.27 Porovnání podmínky plasticity dle Trescy a HMH pro rovinnou napjatost

Na obrázku **Obr. 2.28** je ilustrován vliv anizotropie materiálu a Bauschingerova efektu na hranici podmínky plasticity v rovině hlavních napětí σ_1 a σ_2, kde je vidět, že anizotropie materiálu ruší symetrii hranice plasticity a Bauschingerův jev posouvá střed této hranice mimo počátek souřadného systému hlavních napětí σ_1 a σ_2.



Obr. 2.28 Vliv anizotropie materiálu (vlevo) a Bauschingerova efektu (vpravo) na hranici podmínky plasticity v rovině hlavních napětí σ_1 a σ_2.

2.4 NUMERICKÁ SIMULACE PROCESU PLOŠNÉHO TVÁŘENÍ

Numerická podpora výroby výlisků z tenkých plechů je dnes již běžným jevem ve všech odvětvích automobilového, leteckého i energetického průmyslu. Stále větší důraz je kladen na zvyšování podílu virtuálních technologických procesů a zpřesňování výsledků numerických simulací v korelaci s následnými výsledky reálného výrobního procesu. Vývoj nových typů materiálů a rostoucí požadavky na kvalitu vyráběných dílů sebou přináší problémy v predikci jejich chování při výrobě. Vedle porušení materiálů důsledkem mezní deformace výlisku je jedním z největších problémů tažení výlisků odpružení výlisku. Odpružení tažených výlisků se svojí technologickou podstatou výroby liší od výrobků zhotovených pouze ohýbáním. Rozdíl je zejména v průběhu deformace a napjatosti na tažné a ohybové hraně nástroje. U konvenčního způsobu ohýbání je směr hlavních napětí v ohýbaném průřezu tahové (na vnější straně) a tlakové (na vnitřní straně). Důležité je, že v průběhu ohybu se mění velikost, ale nemění se smysl těchto napětí. Neuplatňuje se tak tzv. Bauschingerův efekt. Oproti tomu u tažení výlisků je materiál na tažné hraně v první fázi ohýbán a ve druhé fázi je zase rovnán a dochází k uplatnění Bauschingerova efektu při zpevnění materiálu, což značně komplikuje sestavení matematického modelu deformačního chování tvářeného materiálu. Uvedená problematika je často diskutována a lze ji nalézt v odborných publikacích např. prof. Pavla Hory z ETH Zürich, prof. Henk Vegtera z Tata Steel Europe Limited TATA či prof. Takeshi Uemoriho z Okayama University nebo prof. Nagahiro z Osaka City University. Dle publikovaných výsledků výzkumů výše uvedených vědeckých pracovníků se ukazuje, že pro definici pokročilých matematických modelů deformačního chování zahrnujících vliv Bauschingerova efektu je při jejich sestavení nutná implementace testů cyklického zatěžování střídavým tahovým a tlakovým namáháním.

2.4.1 Metodika výpočtu numerické simulace procesu plošného tváření v softwaru PAM STAMP 2G

Hlavním nástrojem pro výpočet numerické simulace v softwaru PAM STAMP 2G jsou numerické metody mechaniky poddajných těles. Tyto metody pro výpočet využívají metodu konečných prvků (FEM – Finite Element Method). Konečno-prvková metoda je dnes klasifikována jako nejpřesnější nástroj výpočtu numerických simulací procesu tváření.

FEM metoda je na rozdíl od klasických variačních metod založena na technice aproximace průběhu hledané veličiny. Metoda konečných prvků sestavuje a předepisuje výslednou funkci pomocí nenulových aproximací pouze v omezených objemech, konečných prvcích. Tyto prvky jsou generovány rozdělením uvažované oblasti na geometricky jednoduché, navzájem disjunktní podoblasti. Rovinné oblasti se zpravidla rozkládají na troj nebo víceúhlové prvky, prostorové oblasti se rozkládají na čtyřstěny, kvádry, apod. Tento rozklad je označován jako síť konečných prvků. Podle toho kolik prvků je v této síti obsaženo, je možné nalézt právě tolik lokálních aproximací, které slouží pro „spline-ové“ modelování hledané funkce. Funkce pro aproximaci se obecně volí poměrně jednoduché, nejčastěji to bývá polynomická závislost, kde je počet argumentů závislý na typu úlohy. Za hranicemi jednotlivých prvků se funkce definují nulou. Na společných hranicích prvků musí být splněn požadavek na spojitost funkce, což podmiňuje závislost kombinačních koeficientů elementárních funkcí v jednotlivých aproximačních předpisech prvků sousedících. Tato problematika je řešena pomocí eliminace jednotlivých koeficientů prostřednictvím funkčních hodnot ve vhodně zvolených bodech prvků, nejčastěji označovaných jako uzlové nebo stykové body. Tyto body jsou přednostně umisťovány na hranice prvků, především do jejich vrcholů [69, 70].

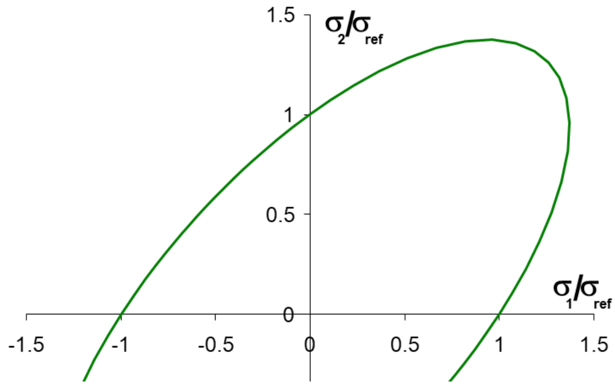
Při výpočtu v numerické simulaci jsou všechny součásti, které se podílejí na procesu tváření, převedeny na výpočtovou síť. Pro nedeformovatelný nástroj je síť pouze znázorněním jeho geometrie a konečné prvky jsou pouze aspekty, které jsou využity pouze pro popis kontaktu v kontaktních plochách. Naopak pro deformovatelné součásti procesu jsou elementy tvořící síť konečných prvků malé „kousky“ materiálu, které mají předepsané chování. Mechanické jevy, které se vyskytují v materiálu během jeho deformování, jsou reprodukovány velkým množstvím těchto elementů. Čím jemnější je generovaná síť těchto prvků, tím se zpřesňuje výpočet procesu tváření, na druhé straně však při zjemňování sítě roste i čas výpočtu. Jako konečný prvek může být použit 2-uzlový prvek (bar), 3-uzlový prvek (trojúhelník), 4-uzlový prvek (čtyřúhelník), nebo prvek svazku 6 nebo 8 uzlů. Každý uzel má dva typy stupňů volnosti, translaci a rotaci [72, 73].

V závislosti na typu numerického výpočtu simulace (implicitní nebo explicitní) je výpočet rozdělen na přírůstky nebo časové úseky. V každém uzlovém bodě je v závislosti na typu výpočtu zjišťována pozice, rychlost, zrychlení a síla. Tyto hodnoty jsou permanentně počítány v každém uzlu během simulace procesu tváření a z nich je dále zjišťována velikost aktuálního napětí a deformace materiálu. Tento algoritmus se opakuje ve všech elementech po celý průběh procesu simulace. Pro odstranění stupňů volnosti (uzamčení) se využívají okrajové podmínky procesu. Aby bylo možné skutečně popsat proces deformace, musí být simulace doplněna o materiálové charakteristiky a rozměry deformovaného polotovaru [72, 73].

2.4.2 Vybrané materiálové výpočtové modely numerické simulace plošného tváření v softwaru PAM STAMP 2G

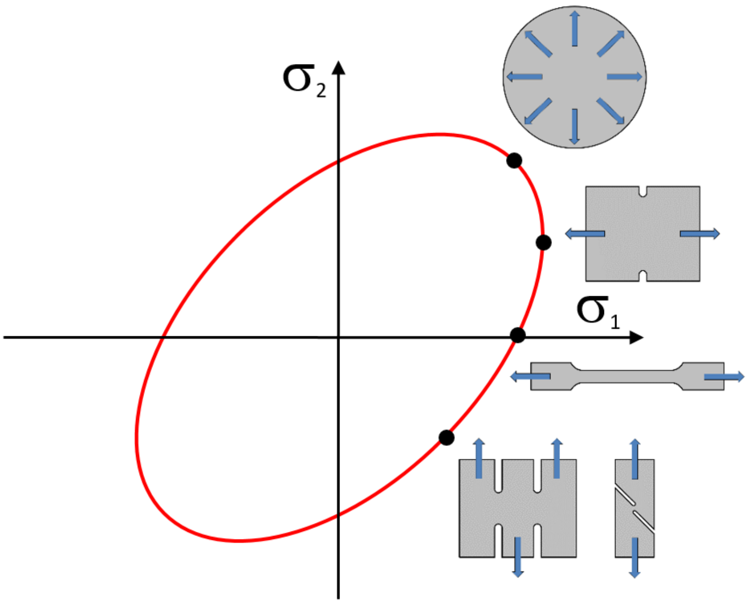
V prostředí numerických simulací jsou obecně pro definici materiálových modelů k dispozici různé podmínky plasticity. Tyto podmínky plasticity mohou pracovat s izotropní nebo anizotropní materiálovou podmínkou. K definici podmínky plasticity, ať izotropní, nebo anizotropní, je možné pro numerické výpočty procesu tváření přistupovat různým způsobem. Na jedné straně existují podmínky, které výpočet anizotropního chování materiálu během jeho deformace řeší pomocí matematického přístupu pomocí numerických vztahů (tj. například Hill 48, Barlat, atd.). Na druhé straně stojí podmínky popisující anizotropní chování materiálu během deformace pomocí externě zadaných, „nafitovaných“ materiálových charakteristik a vstupních veličin, které se získají pomocí specifického experimentálního testování materiálu (bude popsáno v dalších kapitolách).

V důsledku toho, že se jedná o technologii plošného tváření tenkých plechů, zanedbává se zde napětí ve směru tloušťky σ_3 a podmínka plasticity nabývá rovinného vyjádření a je definována pomocí elipsy (viz **Obr. 2.29**), která utváří hranici plasticity v rovině hlavních napětí σ_1 a σ_2, jak již bylo popsáno výše.



Obr. 2.29 Podmínka plasticity

Jak bylo popsáno výše, tvar elipsy, která reprezentuje podmínku plasticity materiálu, může být řízen pomocí matematických vztahů použitých pro výpočet anizotropie, nebo pomocí externích materiálových charakteristik získaných z experimentálního testování materiálu. K sestavení podmínky plasticity využívající pro popis anizotropie materiálu experimentální vstupy jsou zapotřebí řídící body elipsy, které reprezentují jednotlivé mechanické zkoušky materiálu. Pro základní podmínku plasticity (např. podle Hilla) stačí k sestavení této elipsy pouze provedení statické zkoušky tahem. K definování pokročilých výpočtových modelů, které pracují s přesnější podmínkou plasticity (např. Vegter) je však zapotřebí více materiálových vstupních charakteristik, což vede k nutnosti provedení dalších materiálových testů, jako jsou biaxiální testy, kompresní testy, smykové testy, apod., viz **Obr. 2.30**.



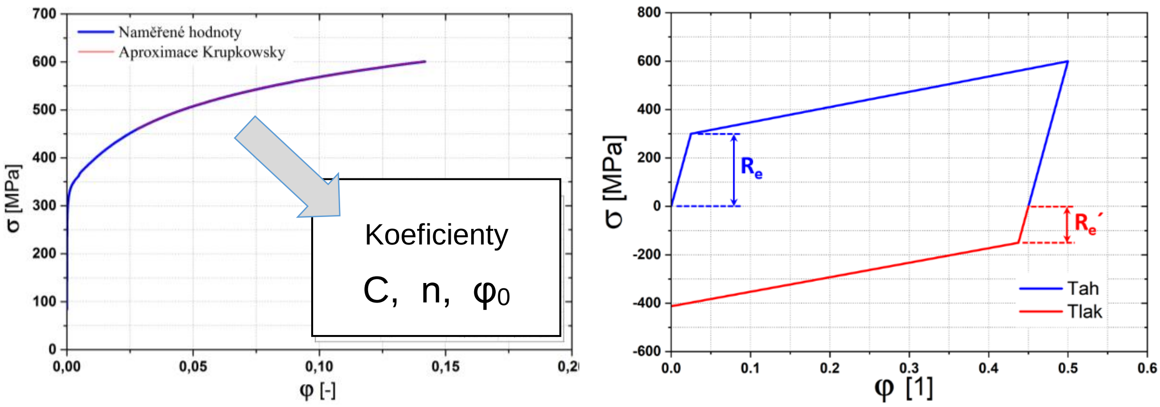
Obr. 2.30 Řídící body elipsy reprezentované materiálovými testy

Jednotlivé materiálové modely použité v numerické simulaci jsou závislé jednak na zvolené podmínce plasticity, podle které pracují, ale dále také na modelu zpevňování materiálu vlivem jeho deformace. Z toho důvodu je ve výpočtovém modelu numerické simulace procesu tváření samotná podmínka plasticity doplněna o model zpevňování materiálu během deformace. První možností tohoto zpevňování materiálu je izotropní model zpevnění, který je definován pomocí křivky zpevnění získané z Krupkowského aproximace křivky zpěvnění v referenčním směru 0° vzhledem ke směru válcování. Krupkowského aproximace křivky zpevnění (viz **Obr. 2.31** - vlevo) vychází z rovnice 2.4.1.

$$\sigma = C.(\varphi + \varphi_0)^n \tag{2.4.1}$$

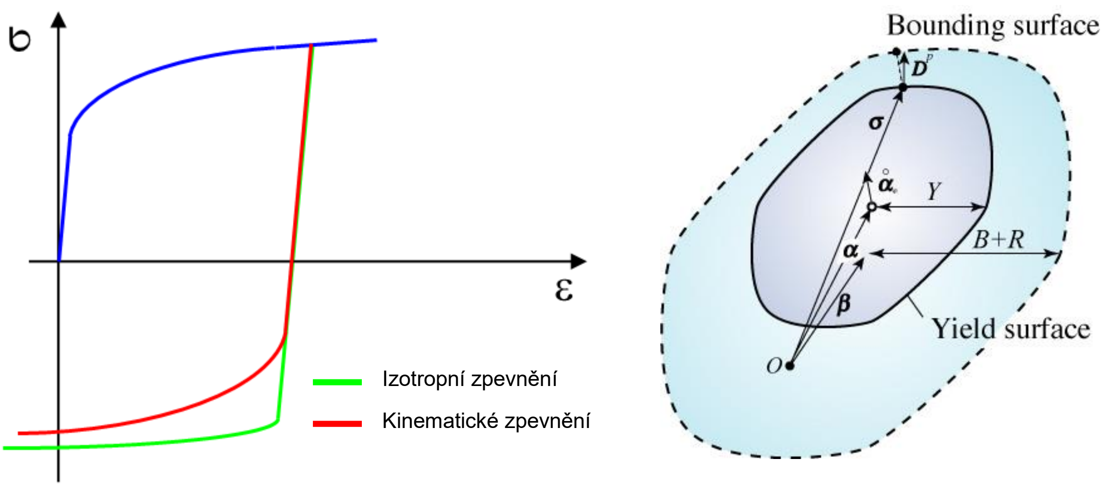
kde:

C	modul monotónního zpevnění	[MPa],
n	exponent deformačního zpevnění	[-],
φ_0	offsetová deformace	[-].



Obr. 2.31 Aproximace křivky zpevnění pro definici izotropního modelu zpevnění (vlevo) a změna meze kluzu při střídavém cyklickém zatěžování (vpravo)

Druhým pokročilejším modelem je model popisující kinematické zpevnění materiálu během deformace (Yoshida Kinematic Hardening Model). Tento model zohledňuje Baushingerův jev, což popisuje změnu meze kluzu materiálu R_e vlivem střídavého cyklového zatěžování (**Obr. 2.31** – vpravo). Tento jev se běžně vyskytuje v reálném procesu tváření, např. při ohybu a následném narovnání tvářeného materiálu na tažné hraně, apod. Tento model je definován pomocí hysterezních smyček získaných pomocí cyklického testu jednoosým zatížením střídavého tahu a tlaku. Výhoda kinematického modelu zpevnění materiálu v porovnání s izotropním je ilustrována na **Obr. 2.32** – vlevo.



Obr. 2.32 Ilustrace kinematického zpevnění (vlevo) a posun podmínky plasticity Yoshida (vpravo) [73]

Jak již bylo popsáno výše v obecných podmínkách plasticity, Bauschingerův jev vlivem měnícího se zatížení materiálu posouvá hranici podmínky plasticity, to je pro

Yoshida Kinemtic Hardening Model ilustrováno na **Obr. 2.32** – vpravo. Tento model zpevňování je obecně popsán prostřednictvím rovnic níže. Funkce podmínky plasticity je definována rovnicí 2.4.2, kde funkce Φ vyjadřuje plochu podmínky plasticity a *Y* pak její hranici [73].

$$f_0 = \phi(\sigma) - Y = 0 \tag{2.4.2}$$

Tuto funkci je možné dále přepsat do tvaru v rovnici 2.4.3, kde *σ* vyjadřuje Cauchyho napětí a *α* vyjadřuje zpětné napětí, související pravidlo toku je pak vyjádřeno v rovnici 2.4.4. Ohraničující povrch je vyjádřen rovnicí 2.4.5, kde *β* je střed ohraničující plochy a velikost této plochy je dána veličinami *B a R*. Relativní pohyb povrchu plasticity je vzhledem k ohraničujícím ploše vyjádřen rovnicí 2.4.6. Vývojová rovnice pro tento pohyb je dána vztahem 2.4.7 a $\dot{\bar{\varepsilon}}$ vyjadřuje ekvivalentní plastickou rychlost zatěžování (rovnice 2.4.8), ta je definována pomocí druhého invariantu D^p a *C* je materiálový parametr řídící rychlost deformačního zpevnění. [73]

$$f = \phi(\sigma - \alpha) - Y = 0 \tag{2.4.3}$$

$$D^p = \frac{\partial f}{\partial \sigma}\dot{\lambda} \tag{2.4.4}$$

$$F = \varphi(\sigma - \beta) - (B + R) = 0 \tag{2.4.5}$$

$$\dot{\alpha}_* = \dot{\alpha} - \dot{\beta} \tag{2.4.6}$$

$$\dot{\alpha}_* = C\left[\frac{a}{Y}(\sigma - \alpha) - \sqrt{\frac{a}{\overline{\alpha_*}}}\,\alpha_*\right]\dot{\bar{\varepsilon}} \tag{2.4.7}$$

$$\dot{\bar{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{2}{3}D^p : D^p}\,,\ \overline{\sigma_*} = \Phi(\alpha_*), a = B + R - Y \tag{2.4.8}$$

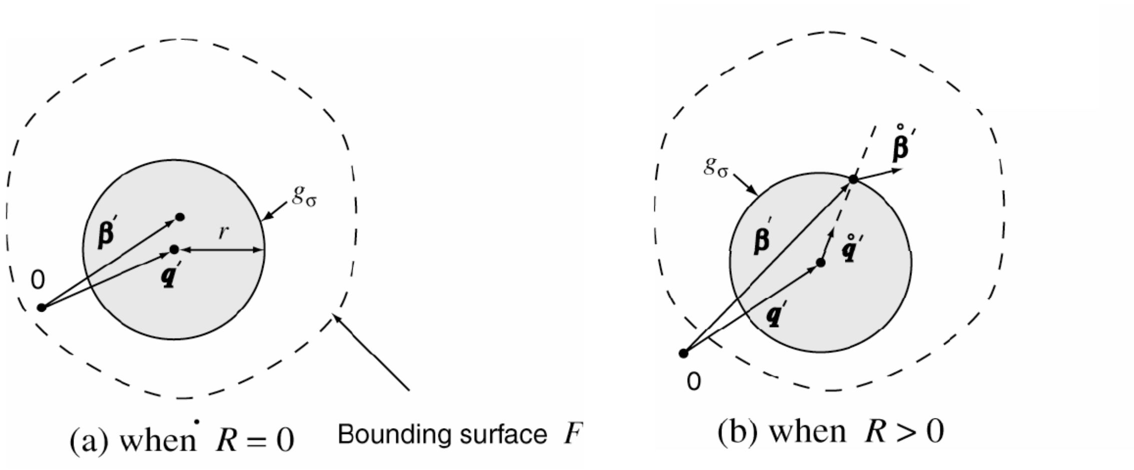
Pro popis globálního zpevnění se pro ohraničující plochu použije vývojová rovnice 2.4.9, kde R_{sat} je hodnota izotropního zpevňujícího napětí při nekonečně velké plastické deformaci a *m* je materiálový parametr řídící rychlost izotropního zpevnění [73].

Pro popis trvalého měknutí a stagnace napětí během pracovního zpevnění se používá vzorec kinematického zpevnění a oblast bez zpevnění během změny smyslu zatížení se předpokládá pro ohraničující plochu. Pro kinematické zpevnění ohraničujícího povrchu platí Armstrong-Frederickova vývojová rovnice (rovnice 2.4.10), kde β' a $\dot{\beta}'$ jsou odchylková složka a její objektivní míra tenzoru *β, b*$_{sat}$ je materiálový parametr [73].

$$\dot{R} = m\,(R_{sat} - R)\dot{\bar{\varepsilon}} \tag{2.4.9}$$

$$\dot{\beta}' = m\,(\tfrac{2}{3}\,b_{sat}\,D^p - \beta'\dot{\bar{\varepsilon}}\,) \tag{2.4.10}$$

K popisu stagnace během deformačního zpevňování se používá neizotropní zpevnění (non-IH) ohraničujícího povrchu v určitém rozsahu zpětné deformace. Definuje se zde „non-IH“ povrch v deviátorovém prostoru napětí [73].



Obr. 2.33 Definice neizotropního zpevňování v deviátorovém prostoru napětí [73]

Z některých experimentálně zjištěných údajů o křivkách napětí vyplývá, že oblast plastické deformace se během stagnace zpevňování zvětšuje s kumulovanou plastickou deformací. Zde je zaveden předpoklad, že se střed plochy plasticity pohybuje ve směru definovaném v rovnici 2.4.11. Vzhledem ke konzistentní podmínce, že středový bod ohraničující plochy by měl být buď na a nebo uvnitř povrchu g_σ [73].

$$\dot{q}' = \mu\,(\beta' - q'\,) \tag{2.4.11}$$

Dále je v rovnici 2.4.12 zaveden předpoklad uvedený v rovnici 2.4.13, kde *h* je materiálový parametr určující rychlost rozpínání povrchu g_σ, pak musí platit rovnice 2.4.14 [73].

$$\mu = \frac{3\,(\beta' - q'\,):\dot{\beta}'}{2r^2} - \frac{\dot{r}}{r} \tag{2.4.12}$$

$$\dot{r} = h\Gamma,\ \Gamma = \frac{3\,(\beta' - q'\,):\dot{\beta}'}{2r} \tag{2.4.13}$$

$$\mu = \frac{(1-h)\,\Gamma}{r} \tag{2.4.14}$$

Větší hodnota čísla *h* způsobuje rychlé rozšíření non-IH povrchu, což vede k předpovědi menšího cyklického zpevnění. Vzhledem k tomu, že se zde objevuje stagnace tohoto povrchu během zpevňování materiálu, lze přepokládat, že počáteční hodnota parametru *r* je velmi malá, tzn. $r=r_0$ [73].

Pružně plastická konstitutivní rovnice je vyjádřena vztahem 2.4.15, kde *C* označuje tenzor modulu pružnosti a H_{kin} je rychlost kinematického zpevňování, viz rovnice 2.4.16 [73].

$$\dot{\sigma} = \left[C - \frac{C{:}\frac{\partial f}{\partial \sigma} \mathrm{x} \frac{\partial f}{\partial \sigma}{:}C}{\sqrt{\frac{2}{3}} H_{kin} \left\| \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\| + \frac{\partial f}{\partial \sigma}{:}C{:}\frac{\partial f}{\partial \sigma}} \right] \tag{2.4.15}$$

$$H_{kin} = \left[\frac{C\,a + m\,b_{sat}}{Y} (\sigma - \alpha) - \left(C\,\sqrt{\frac{a}{\alpha_*}}\,\alpha_* + m\,\beta \right) \right] : \frac{\partial f}{\partial \sigma} \tag{2.4.16}$$

V tomto modelu již je velikost plochy plasticity konstantní, ale odezva napětí a deformace během odlehčení po plastické deformaci již není lineární, ale mírně zakřivená v důsledku Bauschingerova jevu. Pro popisu tohoto jevu slouží následující rovnice 2.4.17 Youngova modulu závislého na plastické deformaci [73].

$$E = E_0 - (E_0 - E_a)[1 - \exp(-\xi\varepsilon)] \tag{2.4.17}$$

V této rovnici E_0 a E_a vyjadřují modul pružnosti původní (výchozí) a modul pro nekonečně předdeformovaný materiál [73].

V následujících podkapitolách jsou popsány Vegter materiálové výpočtové modely numerické simulace procesu plošného tváření seřazené podle náročnosti sběru vstupních dat pro jejich definici. Materiálové modely Vegter „Standard“ i Vegter Lite pracují s anizotropní podmínkou plasticity. Hlavní napětí σ_1, σ_2 a úhel natočení souřadného systému

Φ v podmínce plasticity podle Vegter jsou definovány pomocí následujících vztahů 2.4.18, 2.4.19 a 2.4.20 [73].

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{2} + \sqrt{(\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2})^2 + {\sigma_{xy}}^2} \tag{2.4.18}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{2} - \sqrt{(\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2})^2 + {\sigma_{xy}}^2} \tag{2.4.19}$$

$$\cos(2\Theta) = \frac{\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}}{\sqrt{(\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2})^2+{\sigma_{xy}}^2}} \tag{2.4.20}$$

kde:

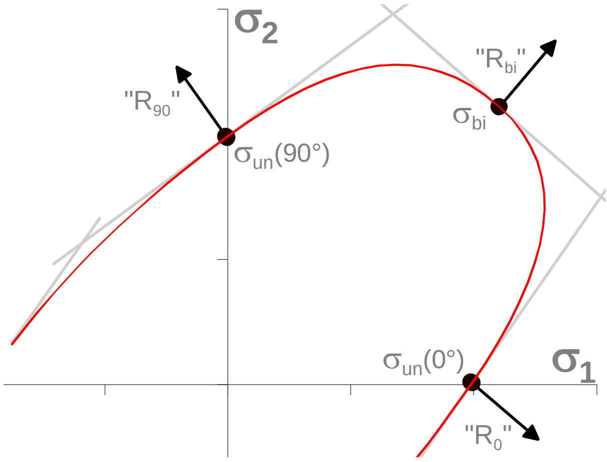
σ_1	hlavní napětí ve směru 1	[MPa]
σ_2	hlavní napětí ve směru 2	[MPa]
σ_{xx}	napětí ve směru 0°	[MPa]
σ_{yy}	napětí ve směru 90°	[MPa]
σ_{xy}	smykové napětí	[MPa]
Θ	úhel natočení souřadného systému	[°]

2.4.3 Vegter Lite Model

Tento materiálový výpočtový model zohledňuje směrově závislou anizotropii materiálu. Pro definici modelu a sestavení podmínky plasticity je zapotřebí znát jednotlivá materiálová data a charakteristiky, které se zjistí pomocí vybraných mechanických zkoušek materiálu [73].

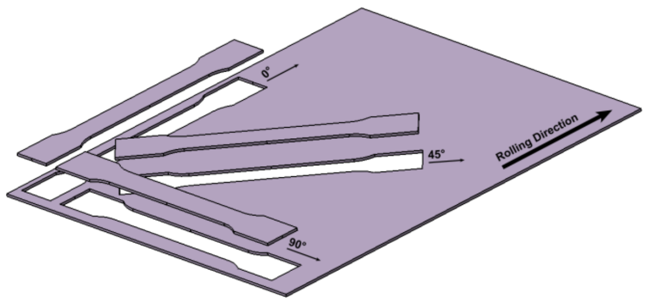
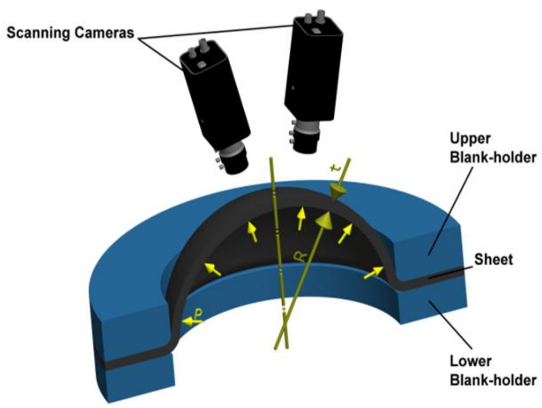
Pro definici výpočtového modelu je zapotřebí znát materiálové konstanty, které se zjistí buď experimentálně, nebo z materiálového listu testované slitiny.

- **Youngův modul pružnosti v tahu E**
- **Poissonovo číslo μ**
- **Hustota ρ**



Obr. 2.34 Podmínka plasticity Vegter Lite [3]

Dále je zapotřebí pro definici podmínky plasticity podle Vegter Lite zjistit vybrané materiálové charakteristiky testované slitiny, které se zjistí experimentálně pomocí mechanických zkoušek materiálu. Mechanické zkoušky materiálu a jejich výstupy pro definici podmínky plasticity je možné vidět na **Obr. 2.35**.

Statická zkouška tahem 	**Koeficienty normálové anizotropie** r_0 r_{45} r_{90} **Uniaxiální napětí** $\sigma_{un}(0°)$ $\sigma_{un}(45°)$ $\sigma_{un}(90°)$
Hydraulic Bulge Test 	**Koeficient biaxiální anizotropie** r_{bi} **Biaxiální napětí** σ_{bi}

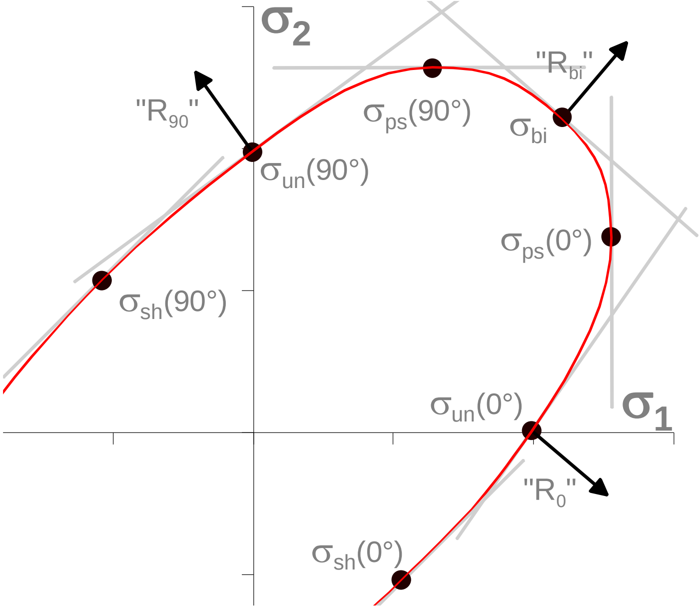
Obr. 2.35 Mechanické testování materiálu pro definici podmínky plasticity Vegter Lite

Poslední částí pro úplnou definici materiálového výpočtového modelu v numerické simulaci je zapotřebí popsat model zpevňování materiálu během deformace. Jak bylo popsáno výše, zpevňování materiálu je možné popsat pomocí aproximace průměrné křivky zpevnění získané z tahové zkoušky, nebo pomocí charakteristik získaných z cyklického testu střídavým zatížením tahu a tlaku. Pomocí těchto zjištěných materiálových charakteristik lze definovat:

- **Izotropní model zpevňování materiálu**
- **Kinematický (Yoshida) model zpevňování materiálu**

2.4.4 Vegter Model

Materiálový výpočtový model Vegter stejně jako Vegter Lite zohledňuje směrově závislou anizotropii materiálu. Pro jeho definici a sestavení podmínky plasticity je zapotřebí znát větší množství materiálových dat a charakteristik. Tyto data však přidávají další řídicí body elipsy, která reprezentuje podmínku plasticity, a pomáhají tak zpřesnit výpočet numerické simulace procesu tváření [73].

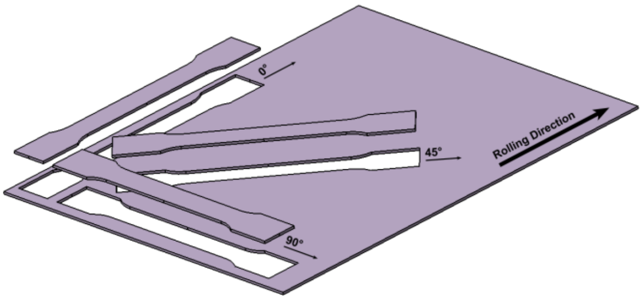
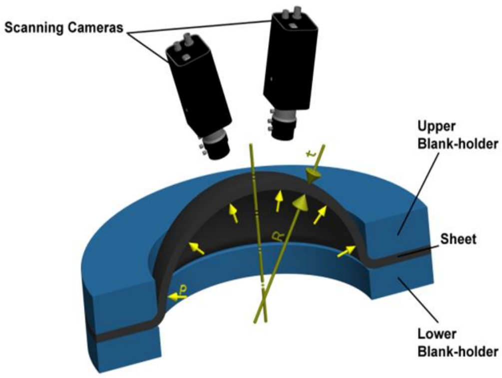
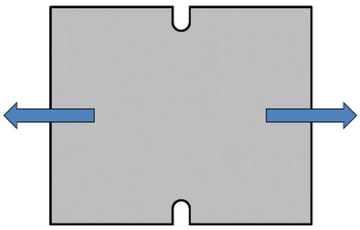
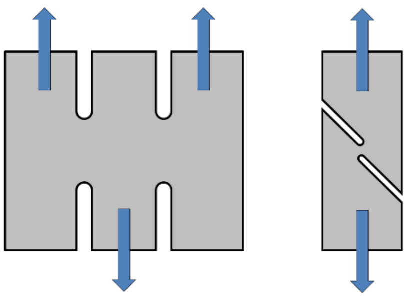


Obr. 2.36 Podmínka plasticity Vegter [3]

Pro definici výpočtového modelu je zapotřebí znát materiálové konstanty, které se zjistí buď experimentálně, nebo z materiálového listu testované slitiny.

- **Youngův modul pružnosti v tahu E**
- **Poissonovo číslo μ**
- **Hustota ρ**

Dále je zapotřebí pro definici podmínky plasticity podle Vegter zjistit vybrané materiálové charakteristiky testované slitiny, které se zjistí experimentálně pomocí mechanických zkoušek materiálu. Mechanické zkoušky materiálu a jejich výstupy pro definici podmínky plasticity je možné vidět na **Obr. 2.37**.

<table>
<tr><td>Statická zkouška tahem
</td><td>Koeficienty normálové anizotropie
r_0 r_{45} r_{90}
Uniaxiální napětí
$\sigma_{un}(0°)$ $\sigma_{un}(45°)$ $\sigma_{un}(90°)$</td></tr>
<tr><td>Hydraulic Bulge Test
</td><td>Koeficient biaxiální anizotropie
r_{bi}
Biaxiální napětí
σ_{bi}</td></tr>
<tr><td>Plain Strain Test
</td><td>Napětí
$\sigma_{ps}(0°)$ $\sigma_{ps}(45°)$ $\sigma_{ps}(90°)$
Koeficient
α(0°) α(45°) α(90°)</td></tr>
<tr><td>Shear Test
</td><td>Napětí
$\sigma_{sh}(0°)$ $\sigma_{sh}(45°)$ $\sigma_{sh}(90°)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Obr. 2.37 Mechanické testování materiálu pro definici podmínky plasticity Vegter</td></tr>
</table>

Poslední částí pro úplnou definici materiálového výpočtového modelu v numerické simulaci je opět zapotřebí popsat model zpevňování materiálu během deformace. Zpevňování materiálu je možné popsat pomocí aproximace průměrné křivky zpevnění získané z tahové zkoušky, nebo pomocí cyklického testu střídavým zatížením tahu a tlaku. Pomocí těchto zjištěných materiálových charakteristik lze definovat:

- **Izotropní model zpevňování materiálu**
- **Kinematický (Yoshida) model zpevňování materiálu**

3 EXPERIMENTÁLNÍ ČÁST

S ohledem na požadavky dnešní doby, kdy je možné sledovat stále rostoucí poptávku po plánování a zmapování výrobního procesu ještě v předvýrobních etapách, navíc při současném trendu zachování ekonomické výroby a zrychlování výrobních časů, je jistě žádoucí využití numerických simulací, které by měly dodat co možná nejpřesnější informace o predikci výrobního procesu. Prvním cílem této disertační práce je sestavení metodiky pro získávání vstupních dat do prostředí numerických simulací, která jsou zde aplikována v materiálových výpočtových modelech sloužících pro výpočet numerické simulace procesu plošného tváření. Sestavením metodiky pro získávání dat se rozumí zvolení vhodné kombinace materiálového testování pro získání potřebných materiálových napěťových a deformačních charakteristik a vybraných vlastností materiálu s ohledem na opakovatelnost prováděných testů, vyhodnocování těchto testů a validitu jednotlivých výsledků.

Dalším velkým aspektem spojeným s touto prací je stále se zvyšující poptávka průmyslu po nových typech materiálů a zlepšení tak jednotlivých požadovaných vlastností konečných výrobků a zároveň dodržet současné trendy snižování uhlíkové stopy. Tyto skutečnosti přímo vedou k požadavkům využití lehkých slitin a pevnostních materiálů. Dalším cílem této práce je tedy aplikovat sestavenou metodiku materiálového testování na výzkum deformačního chování materiálů se specifickými užitnými vlastnostmi nacházejících uplatnění v automobilovém, energetickém a leteckém průmyslu nebo v jiných speciálních aplikacích.

Pro experimentální výzkum deformačního chování materiálu byly s ohledem na výše uvedené skutečnosti vybrány typy materiálu, které vykazují nebo reprezentují určité specifické vlastnosti a stávají se tak zajímavými pro výzkum a možnost aplikace v průmyslovém měřítku. Jako zástupce pevnostních materiálů byly zvoleny ocel DP500 a HCT690. Oba tyto materiály jsou založeny na feriticko-martenzitické matrici a v případě třífázové oceli HCT navíc ještě v kombinaci se zbytkovým austenitem, který se během deformace materiálu transformuje na martenzit, tzn., že oproti dvoufázové oceli má mnohem vyšší exponent deformačního zpevnění a navíc dovoluje materiálu dosáhnout mnohem většího přetvoření. Dále byla zvolena slitina hliníku s obchodním označením AMAG6000 (EN AW611), která reprezentuje materiál v kategorii lehkých slitin použitelných pro technologii tváření a nakonec byla zvolena slitina titanu Ti-CP AMS4900, která kombinuje dostatečnou pevnost s dobrou tvárností, navíc při téměř poloviční hmotnosti oproti oceli.

Třetím cílem této práce je implementovat získaná materiálová data a vybrané charakteristiky do prostředí numerických simulací procesu plošného tváření, kde budou sloužit jako vstupní data definující vybrané materiálové výpočtové modely. Jednotlivé materiálové modely jsou voleny a testovány s požadavkem co nejpřesnější simulace průběhu deformace a následného odpružení materiálu. Budou zde testovány jednoduché i pokročilé materiálové modely zohledňující nejen anizotropní podmínku plasticity, ale například i Bauschingerův jev, který se běžně vyskytuje v reálných podmínkách procesu tváření. Konkrétně zde budou použity modely Hill48, Vegter Lite a Vegter Standard, vždy ve variantě s izotropním a kinematickým zpevněním materiálu.

Posledním krokem k naplnění cílů této práce je sledovat a hodnotit vlivy vybraných materiálových výpočtových modelů a dalších procesních parametrů ovlivňujících průběh deformace a následného odpružení materiálu během numerické simulace procesu plošného tváření plechu. Dále pak porovnat numericky zjištěná data, tzn. kontury výlisků získané prostřednictvím simulace, s reálnými výlisky zhotovenými pomocí procesu plošného tváření materiálu ve formě plechu odpovídajícímu procesu v numerické simulaci.

3.1 METODIKA ZÍSKÁVÁNÍ VSTUPNÍCH DAT PRO DEFINICI VÝPOČTOVÝCH MODELŮ NUMERICKÉ SIMULACE PLOŠNÉHO TVÁŘENÍ

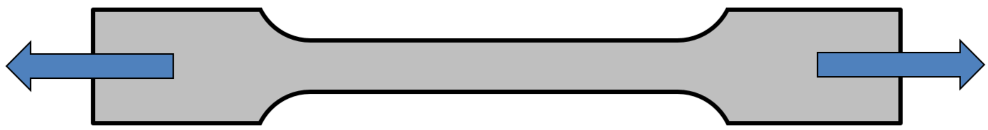
Pojmem metodika získávání vstupních dat se rozumí zvolit vhodnou kombinaci materiálového testování, které zajistí požadované údaje pro definici zvolených výpočtových modelů v numerické simulaci. Dále pak provedení těchto testů s následným vyhodnocením pro získání požadovaných materiálových charakteristik.

S ohledem na zvolené materiálové výpočtové modely, které jsou popsané v teoretické části této práce (kapitola 2.4), jsou zde aplikovány materiálové testy pro definici hranice podmínky plasticity vybraného materiálového modelu a následně pro definici zpevňování materiálu během jeho deformace. V následujících podkapitolách jsou popsány jednotlivé materiálové testy, které byly provedeny pro získání potřebných materiálových charakteristik a následnou implementaci do prostředí numerických simulací.

- **Statická zkouška tahem**
- **Hydraulic Bulge Test**
- **Plane Strain Tensile Test**
- **Shear Strain Test**
- **Cyklický test**

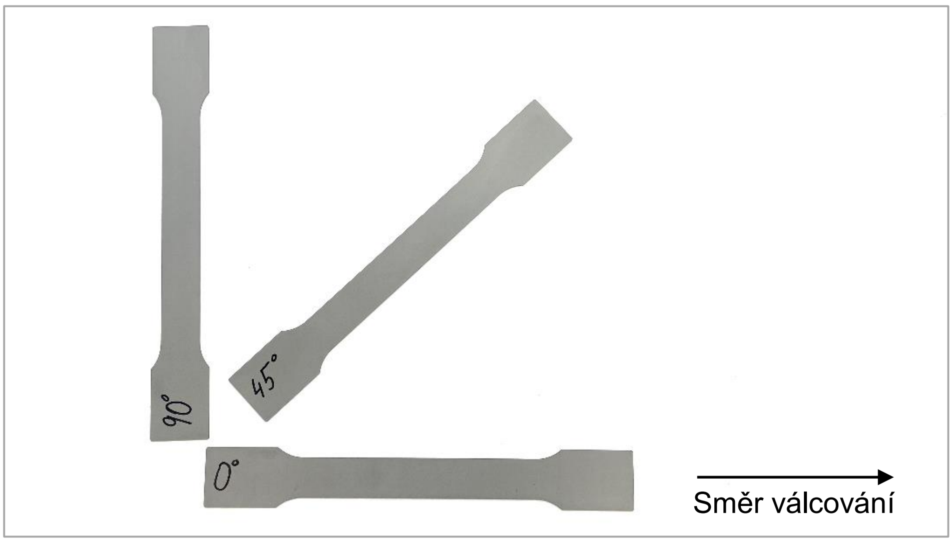
3.1.1 Statická zkouška tahem

Statická zkouška tahem byla použita pro získání základních mechanických vlastností testovaného materiálu. Pomocí této zkoušky se získají hodnoty meze kluzu v tahu R_e (popř. smluvní meze kluzu v tahu $R_{p0,2}$) a meze pevnosti v tahu R_m, dále tažnost A a Youngův modul pružnosti v tahu E. Aby bylo možné zohlednit anizotropii materiálu, je nutné zkoušku provést na vzorcích odebraných ve směrech 0°, 45° a 90° vzhledem ke směru válcování materiálu. Zkouška probíhá standardním způsobem dle normy EN ISO 6892-1. Schéma zatěžování pro vzorku při statické zkoušce tahem je vidět na **Obr. 3.1**.



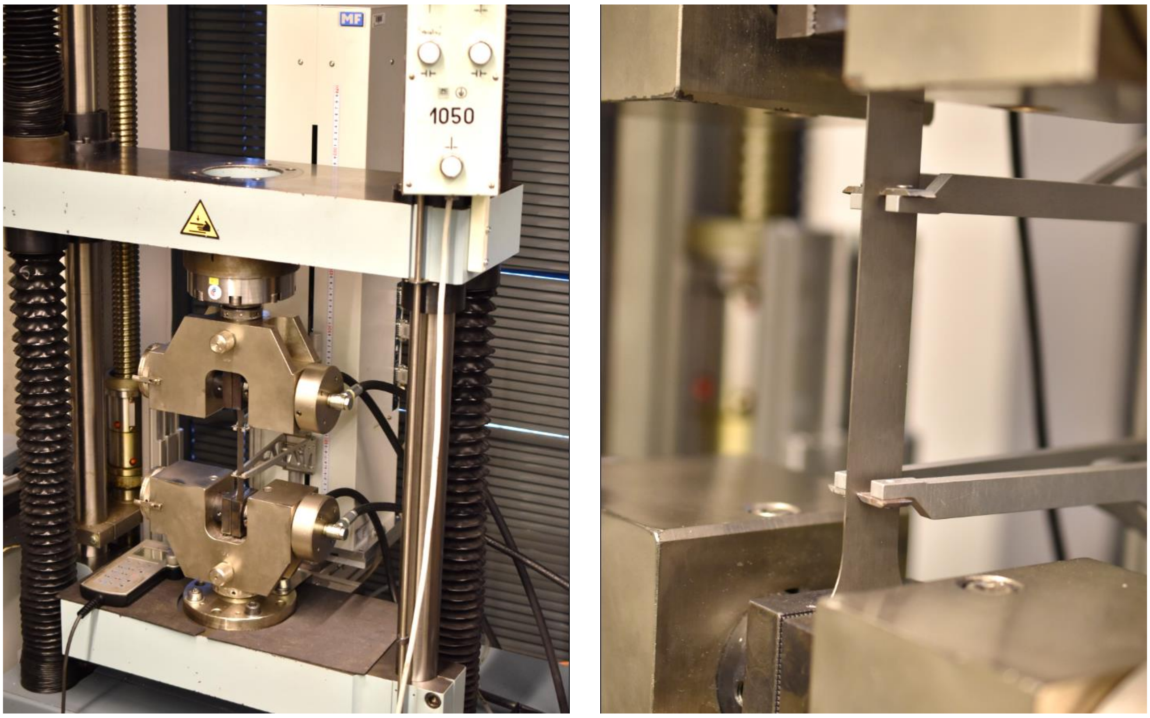
Obr. 3.1 Schéma zatěžování vzorku při statické zkoušce tahem

Zkušební tělesa použitá pro tuto zkoušku byla v případě „tenkých plechů“ zhotovena z rovinného přístřihu plechu pomocí střižného nástroje, jehož funkční části tvarově a rozměrově odpovídají normovanému zkušebnímu tělesu určenému pro statickou zkoušku tahem, zkušební tělesa s tloušťkou větší než 1mm byla zhotovena pomocí řezání vodním paprskem. Z důvodu zohlednění anizotropie materiálu byla tato zkušební tělesa zhotovena ve směrech 0°, 45° a 90° vzhledem ke směru válcování, jak již bylo popsáno výše. Tato tělesa jsou pro jednotlivé směry ilustrována na **Obr. 3.2**.



Obr. 3.2 Zhotovená zkušební tělesa pro statickou zkoušku tahem

Zkouška byla realizována prostřednictvím trhacího zařízení TIRA Test 2300 vybaveného integrovaným průtahoměrem MFN-A-4-500. Zkušební těleso zde bylo upnuto pomocí hydraulických čelistí a zatěžováno silou až do okamžiku porušení. Během testu byla prostřednictvím tenzometrické hlavy snímána síla a pomocí zmiňovaného průtahoměru bylo snímáno absolutní prodloužení zkušebního tělesa. Vyhodnocení základních veličin získaných z této zkoušky bylo provedeno pomocí přidruženého softwaru LabNET. Realizace statické zkoušky tahem je ilustrována na **Obr. 3.3**.



Obr. 3.3 Realizace statické zkoušky tahem na zařízení TIRA Test 2300

Z naměřených hodnot síly a absolutního prodloužení ze statické zkoušky tahem v jednotlivých směrech se po přepočtu dále dostávají křivky zpevnění jako funkce skutečného napětí σ v závislosti na skutečné deformaci φ. Pro definici izotropního zpevnění materiálu byla dále provedena aproximace křivky zpevnění podle Krupkowského, která vychází z rovnice (3.1.1).

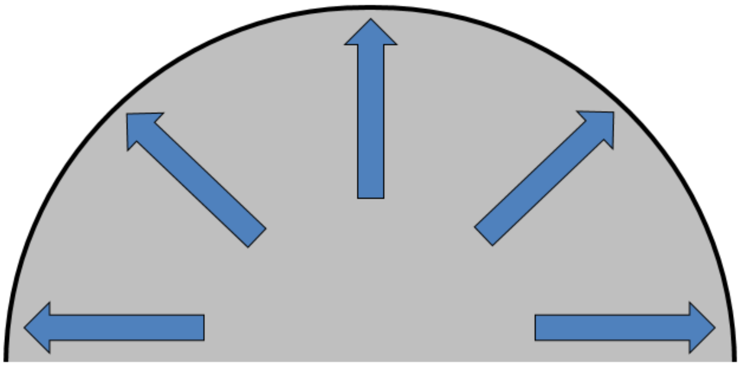
$$\sigma = C.(\varphi + \varphi_0)^n \tag{3.1.1}$$

kde:

C	modul monotónního zpevnění	[MPa],
n	exponent deformačního zpevnění	[-],
φ_0	offsetová deformace	[-].

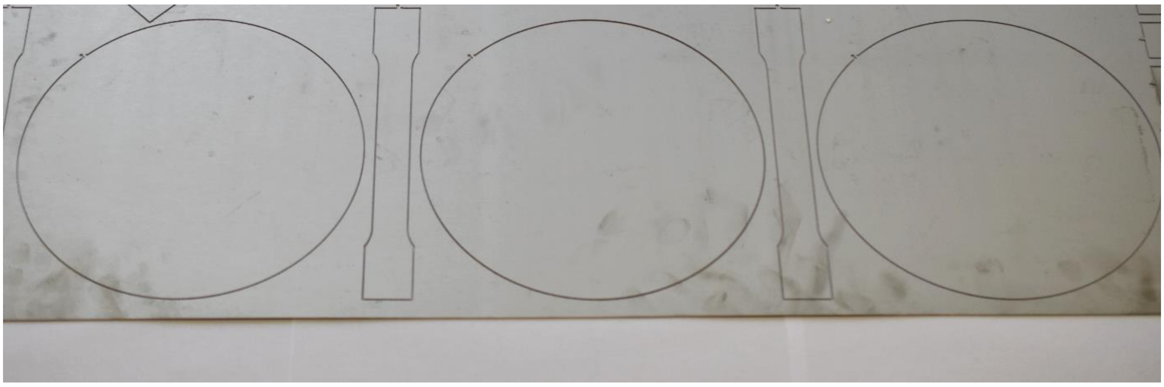
3.1.2 Hydraulic Bulge Test

Bulge test neboli zkouška materiálu rovnoosým vypínáním pomocí tlaku hydraulického média. Tento test byl proveden za účelem vytvoření stavu biaxiální napjatosti v testovaném materiálu během jeho deformace. Tato zkouška slouží pro získání základních mechanických vlastností materiálu při podmínkách biaxiálního zatížení. Zkušební vzorek je zde rovnoose vypínán pomocí tlaku kapaliny až do okamžiku jeho porušení. Schéma zatěžování je ilustrováno na **Obr. 3.4**.



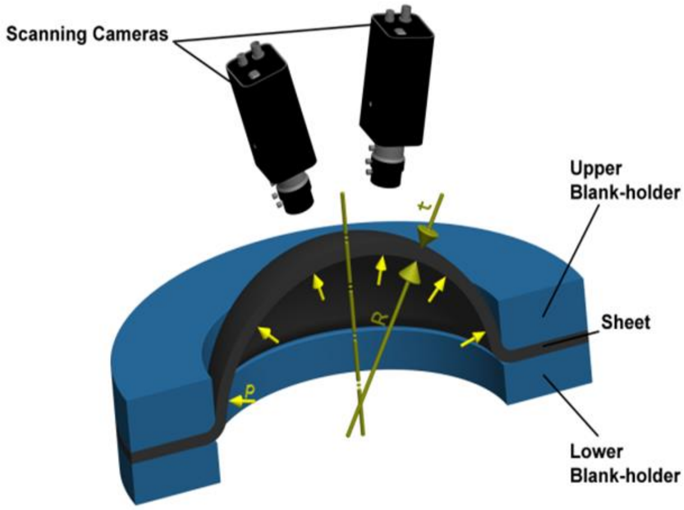
Obr. 3.4 Schéma zatěžování vzorku při Bulge testu

Zkušební vzorky použité pro tuto zkoušku byly v případě „tenkých plechů" zhotoveny z rovinného přístřihu plechu pomocí střižného nástroje, jehož funkční části tvarově a rozměrově odpovídají zkušebnímu tělesu určenému pro tento test (kruhový vzorek o průměru 210mm), zkušební vzorky s tloušťkou větší než 1mm byly zhotoveny pomocí řezání vodním paprskem, viz **Obr. 3.5**.



Obr. 3.5 Zhotovená zkušební tělesa pro Hydraulic Bulge Test

Tento test byl proveden na hydraulickém lisu CBA300/63 prostřednictvím nástroje koncipovaného pro vypínání plechu pomocí tlaku hydraulického media, kde je zkušební vzorek upnut mezi tažnicí a přidržovačem pomocí síly vyvozené hydraulickým lisem a následně je zatěžován pomocí tlaku hydraulického media vyvozeným externím hydraulickým agregátem. Princip tohoto testu je schematicky znázorněn na **Obr. 3.6**

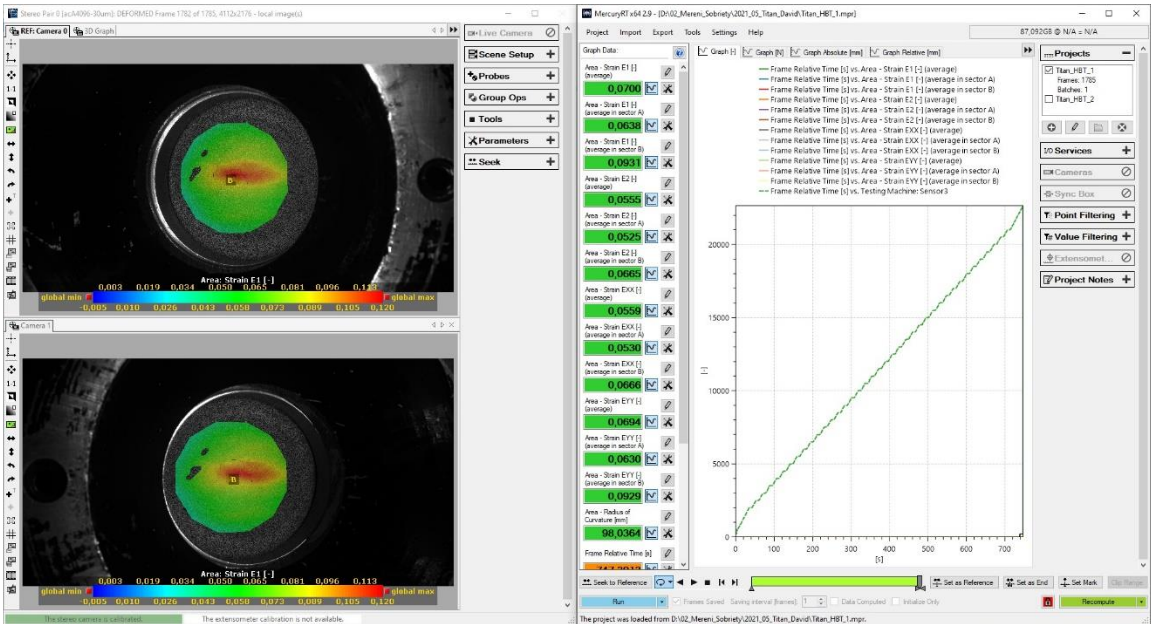


Obr. 3.6 Hydraulic Bulge test

Tlak kapaliny (hydraulického oleje) byl během testu snímán pomocí tlakového senzoru integrovaného v přípravku a průběh deformace materiálu byl snímán pomocí stereo kamer společně a optickým systémem od společnosti SOBRIETY. Realizace Hydraulic Bulge testu na hydraulickém lisu je ilustrována na **Obr. 3.7**.

Obr. 3.7 Realizace Bulge testu na hydraulickém lisu CBA300/63

Jak již bylo zmíněno výše, průběh testu byl zaznamenáván pomocí dvojice kamer a vyhodnocení deformace materiálu probíhalo na základě tzv. fotogrammetrické metody, obecně řečeno „zjišťování informací z fotografií.“ Aby bylo možné snímat a zaznamenávat povrch vzorku během testu, bylo nutné tento zkušební vzorek opatřit nástřikem ve stupních šedi, toho bylo docíleno pomocí kombinace bílého podkladu a černého nahodilého patternu. Tento pattern umožňuje kamerám na základě určitého přiřazeného stupně šedi (poměr bílé a černé barvy) identifikovat a snímat oblasti o určité dané velikosti, tzv. fazetky, jejichž velikost je vyjádřena v pixelech. Tyto fazetky jsou pak snímány a identifikovány během celého procesu deformace a na základě změny jejich polohy jsou dopočítávány a vyhodnocovány deformační a kinematické veličiny procesu deformace materiálu. Základní vyhodnocení zaznamenaných snímků a následných vybraných veličin a charakteristik materiálu, probíhalo v softwaru Mercury RT od společnosti SOBRIETY, viz **Obr. 3.8**. Následná práce s daty, vyhodnocení naměřených závislostí a tvorba grafů probíhala v softwaru Origin 2020.



Obr. 3.8 Ilustrace hodnocení Bulge testu v prostředí softwaru Mercury RT

Výstupem tohoto testu je průběh skutečného (efektivního) napětí při biaxiálním zatížení v závislosti na skutečné deformaci. Tyto hodnoty získáme dosazením zjištěných parametrů a veličin do rovnic (3.1.2), (3.1.3) a (3.1.4).

$$\sigma_{EF} = \frac{pR}{2t} \tag{3.1.2}$$

$$\varphi_{EF} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_1\varphi_2 + \varphi_2^2} = \varphi_3 \qquad (3.1.3)$$

$$t = t_0 e^{\varphi_3} \qquad (3.1.4)$$

kde:

σ_{EF}	efektivní hodnota napětí	[MPa],
p	hodnota tlaku	[MPa],
φ_{EF}	efektivní hodnota deformace	[-],
R	rádius křivosti	[mm],
$\varphi_{1,2,3}$	skutečná deformace	[-],
t, t_0	aktuální a počáteční tloušťka	[mm].

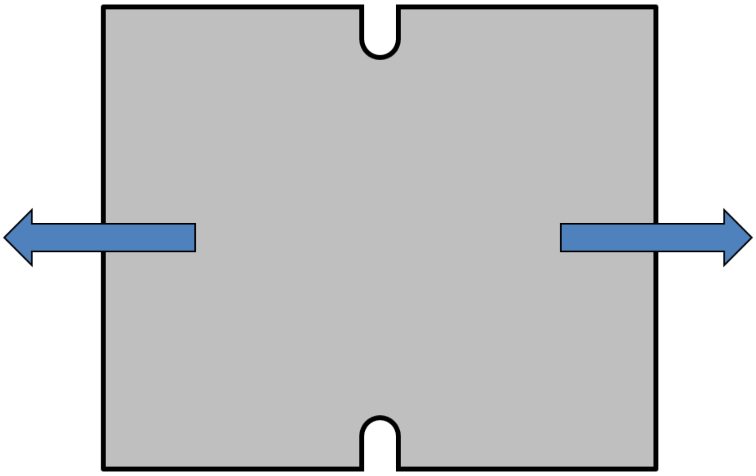
Na **Obr. 3.9** je možné vidět ukázku vzorku po provedení testu pomocí rovnoosého vypínání pomocí kapaliny, zároveň je zde vidět ukázka patternu, který umožňuje snímání během testu pomocí optického systému.

Obr. 3.9 Zkušební vzorek po provedení Bulge testu

3.1.3 Plane Strain Tensile Test

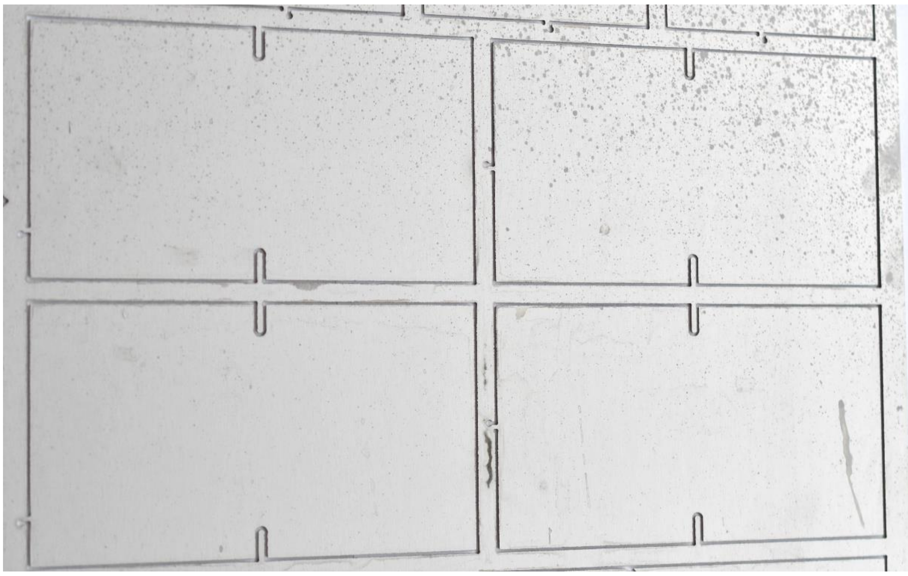
Speciální rovinný test, kde je hlavní podmínkou zajistit, aby deformace ve směru šířky plechu byla rovna nule. Toho je dosaženo pomocí speciálního tvaru vzorku, který je schematicky ilustrován na **Obr. 3.10**. Tato zkouška je realizována na trhacím zařízení TIRA

Test 2300 obdobně jako statická zkouška tahem, kde je vzorek namáhán pomocí jednoosého tahového zatížení. Průběh zkoušky je zde obdobně jako u ostatních mechanických testů zaznamenáván až do okamžiku porušení zkušebního vzorku (objevení trhliny v místě vrubu).



Obr. 3.10 Schéma zatěžování vzorku při Plane strain testu

Pro realizaci tohoto testu bylo opět nutné nejprve připravit zkušební vzorky, což bylo realizováno pomocí řezání plechu vodním paprskem. Jednotlivé zkušební vzorky byly vyhotoveny s ohledem na směr válcování plechu ve směrech 0°, 45° a 90°. Tyto zkušební vzorky jsou k vidění na **Obr. 3.11**.



Obr. 3.11 Zkušební vzorky pro Plane Strain test

Deformační podmínka, která musí být dodržena pro správný průběh a validní výsledky Plane strain testu, je charakterizována v rovnici (3.1.5). Rovnice (3.1.6) pak dále definuje výpočet výsledné axiální deformace ve směru zatěžování.

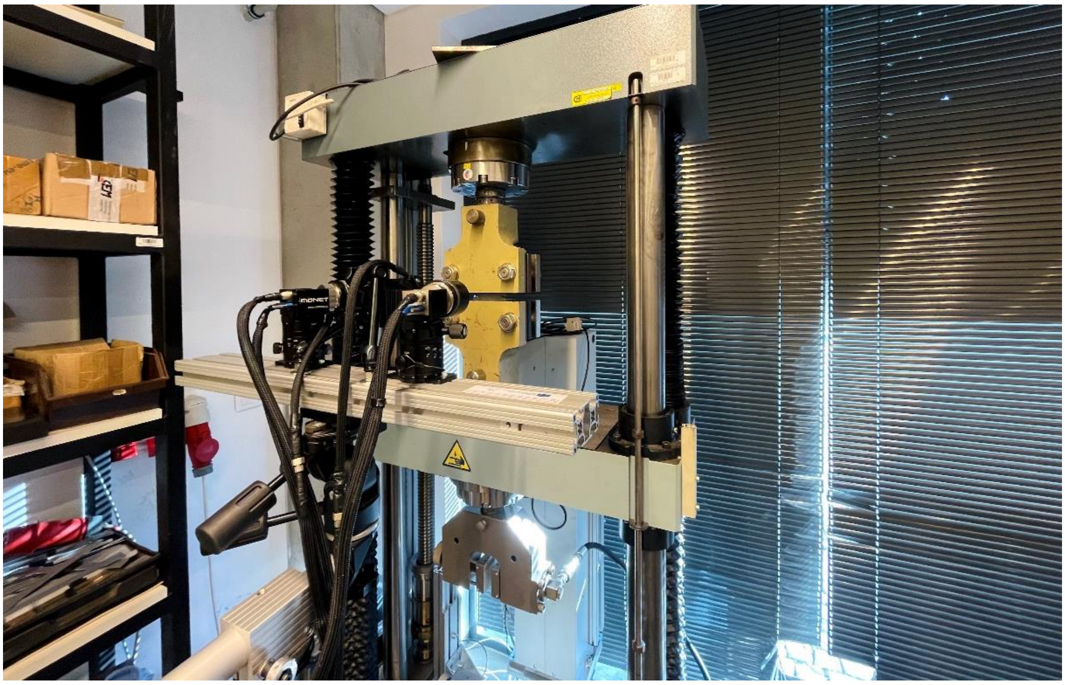
$$\varphi_1 = \varphi_3, \ \ \varphi_2 = 0 \tag{3.1.5}$$

$$\varphi_1 = \ln \frac{L}{L_0} \tag{3.1.6}$$

kde:

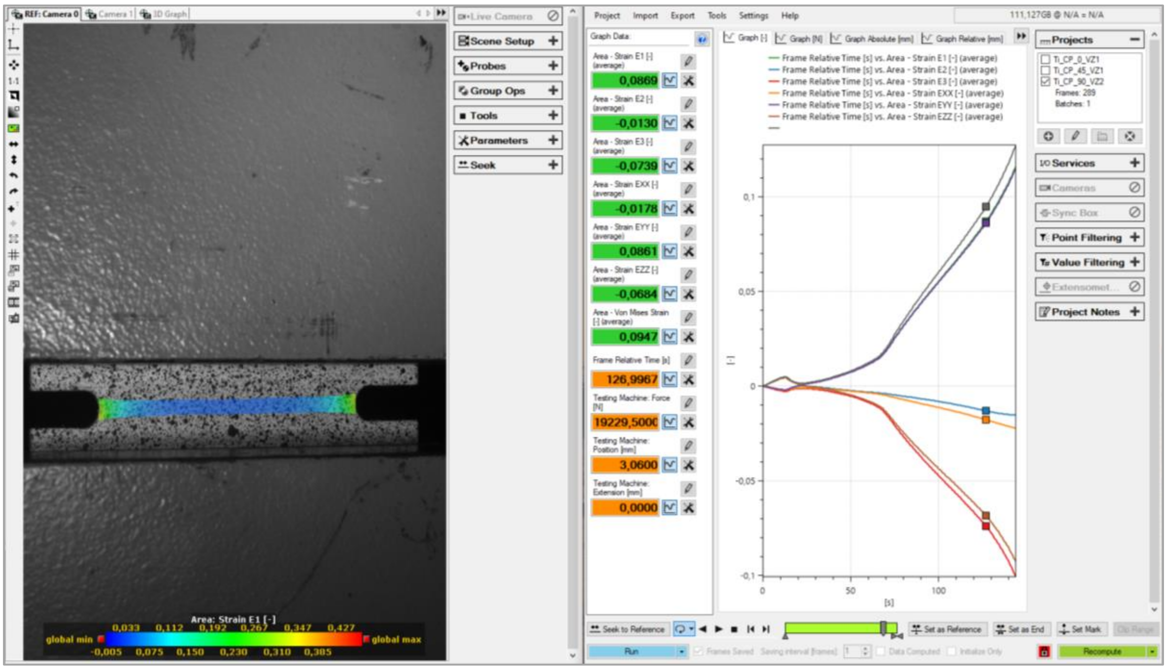
φ_1	logaritmická deformace ve směru délky	[-],
φ_2	logaritmická deformace ve směru šířky	[-],
φ_3	logaritmická deformace ve směru tloušťky	[-],
L	aktuální měřená délka vzorku	[mm],
L_0	počáteční délka vzorku	[mm].

Průběh testu na trhacím zařízení TIRA Test 2300 byl zaznamenáván pomocí tenzometrické hlavy (snímání síly) a optického systému od společnosti Sobriety, který snímal průběh deformace vzorku v zatěžované oblasti. Realizace testu na trhacím zařízení je zobrazena níže na **Obr. 3.12**.



Obr. 3.12 Realizace Plane strain testu na trhacím zařízení TIRA Test 2300

Záznam a základní vyhodnocení snímaných veličin probíhalo opět v softwaru Mercury RT od společnosti Sobriety (viz **Obr. 3.13**), ze kterého byly získány základní deformační charakteristiky materiálu a záznam síly. Tyto deformační charakteristiky byly získány na základě fotogrammetrické metody (již bylo popsáno výše). Následná práce s daty, vyhodnocení naměřených závislostí a tvorba grafů probíhala v softwaru Origin 2020.



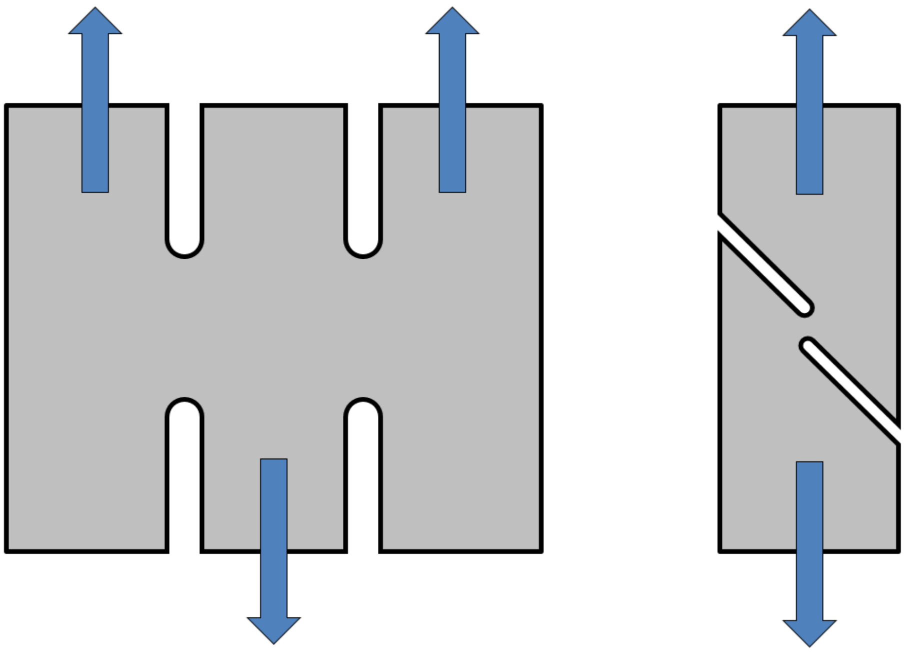
Obr. 3.13 Ilustrace hodnocení Plane Strain testu v prostředí softwaru Mercury RT

Výstupem tohoto testu je průběh skutečného napětí v zatěžovaném průřezu vzorku v závislosti na skutečné axiální deformaci v měřené oblasti. Na **Obr. 3.14** je možno vidět ukázku vzorku po provedení Plane Strain testu.

Obr. 3.14 Zkušební vzorek po provedení Plane Strain testu

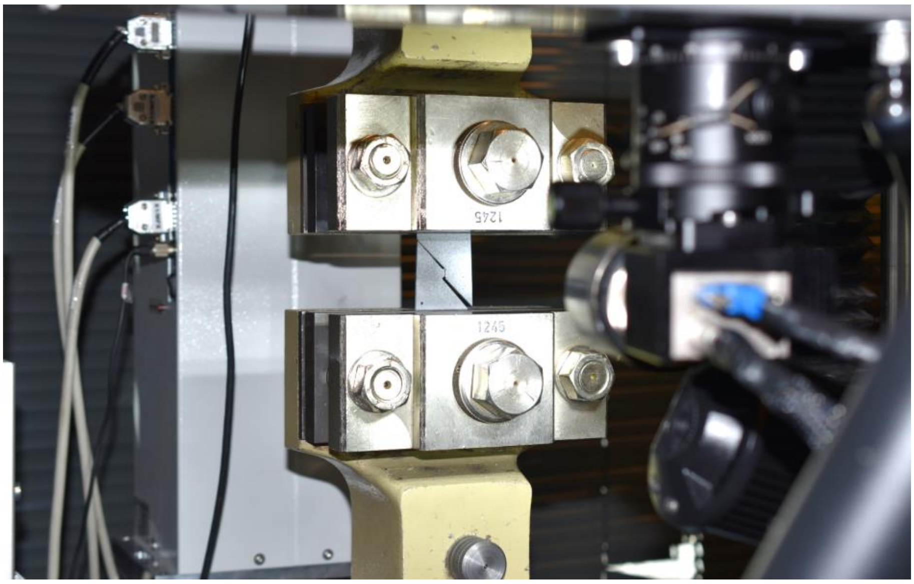
3.1.4 Shear Test – rovinný smykový test

Tento test se používá pro vyvození situace smykové napjatosti v tvářeném materiálu. Během tohoto testu je materiál ve formě zkušebního tělesa podroben smykovému zatížení, které se zde vyskytuje ve formě jednoduché smykové rovinné napjatosti v jedné střižné rovině (americká norma ASTM B831). Tohoto stavu napjatosti je zde dosaženo pomocí tvarové koncepce zkušebního tělesa, což je schematicky znázorněno na **Obr. 3.15**. Toto zkušební těleso je během testu zatěžováno spojitě vzrůstající statickou silou vyvozenou pomocí translačního pohybu čelistí zkušebního zařízení. Test probíhá až do okamžiku porušení vzorku, tzn. objevení se trhliny ve smykové rovině zkušebního tělesa.



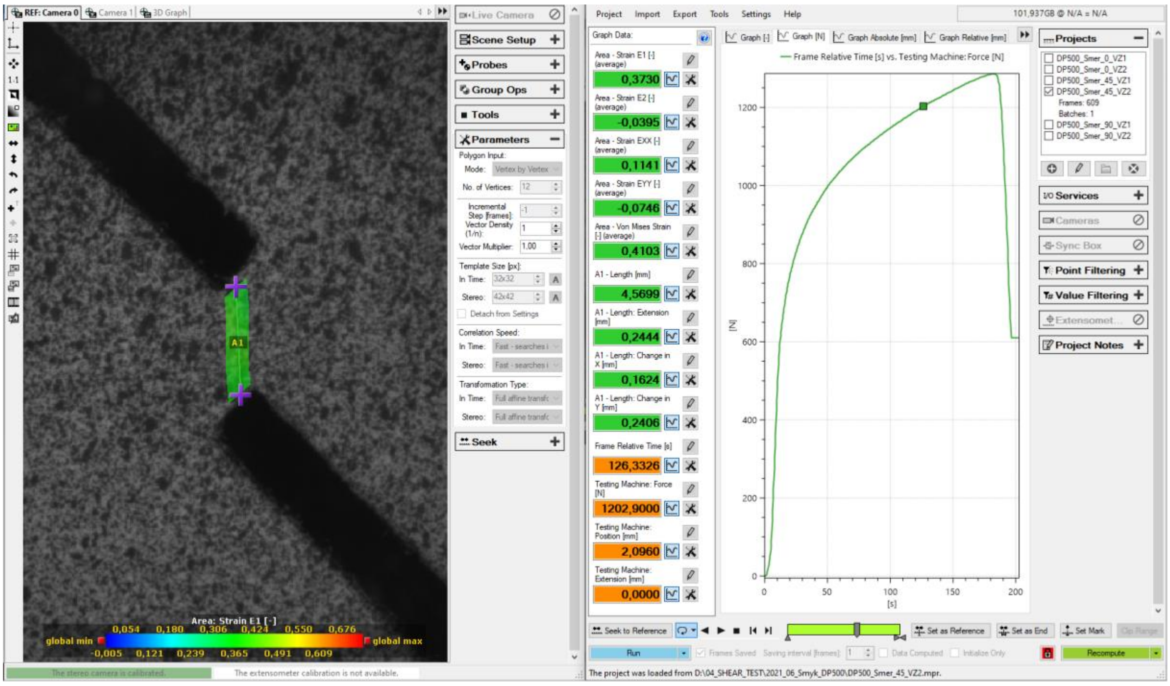
Obr. 3.15 Schéma zatěžování vzorku při rovinném smykovém testu

Pro realizaci testu bylo nutné opět zajistit výrobu zkušebních těles daného tvaru a rozměrů (viz ASTM B831). Tyto zkušební tělesa byla vyrobena opět pomocí řezání vodním paprskem a byla zhotovena ve vybraných směrech 0°, 45°a 90° s ohledem na směr válcování materiál. Test byl opět realizován na zkušebním zařízení TIRA Test 2300, kde byl zkušební vzorek upnut pomocí mechanických čelistí a podroben zatěžování. Průběh testu byl zde opět zaznamenáván pomocí tenzometrické hlavy umístěné na příčníku testovacího zařízení a optického systému od společnosti Sobriety. Ukázka koncepce smykového testu na trhacím zařízení je zobrazena na **Obr. 3.16**.



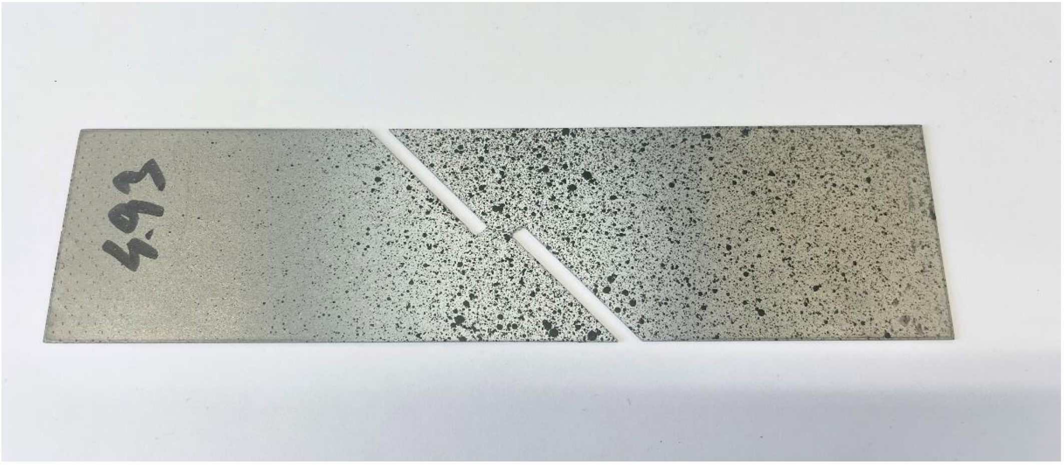
Obr. 3.16 Realizace Shear testu na trhacím zařízení TIRA Test 2300

Záznam a základní vyhodnocení snímaných veličin probíhalo opět v softwaru Mercury RT (viz **Obr. 3.17**), ze kterého byly získány základní deformační charakteristiky materiálu a záznam síly. Zmiňované deformační charakteristiky byly získány opět na základě fotogrammetrické metody (již bylo popsáno výše). Následná práce s daty, vyhodnocení naměřených závislostí a tvorba grafů probíhala opět v softwaru Origin 2020.



Obr. 3.17 Ilustrace hodnocení Shear testu v prostředí softwaru Mercury RT

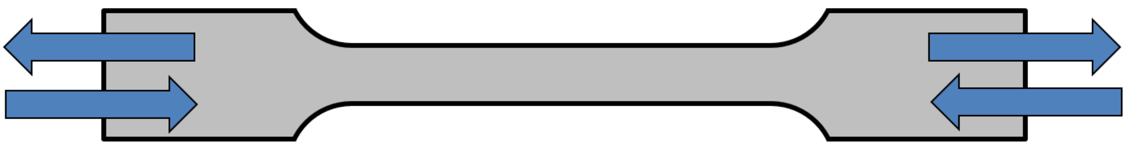
Výstupem tohoto testu je zde průběh smykového napětí v zatěžovaném průřezu vzorku v závislosti na smykové deformaci v měřené oblasti. Na **Obr. 3.18** je možno vidět ukázku vzorku po provedení rovinného smykového testu.



Obr. 3.18 Zkušební vzorek po provedení Shear testu

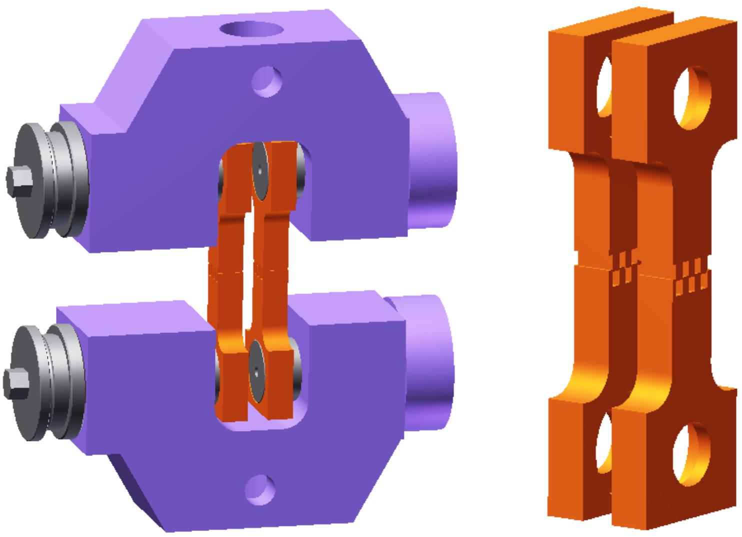
3.1.5 Cyklický Test – test cyklickým střídavým zatěžováním

Posledním z potřebných prováděných testů materiálu je test cyklickým střídavým zatěžováním, který slouží pro definici kinematického zpevnění materiálů během jeho deformace. V tomto testu je aplikováno střídavé zatěžování materiálu v tahu a tlaku (viz **Obr. 3.19**), které se pravidelně střídá ve zvolených periodách. V důsledku tohoto zatěžování se v testovaném materiálu projevuje tzv. Bauschingerův jev, tzn. změna hodnoty meze kluzu materiálu vlivem střídavého zatěžování.



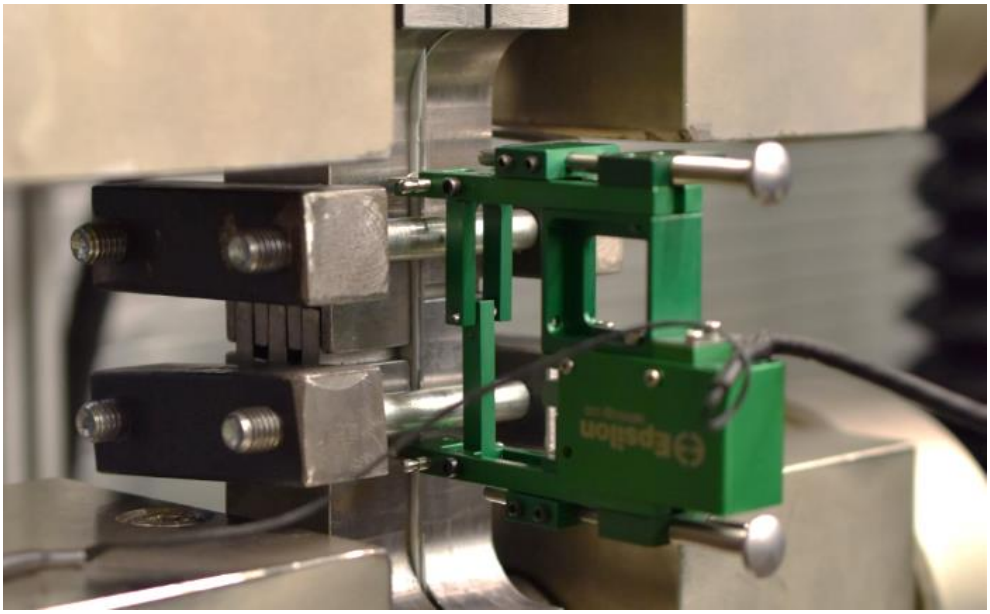
Obr. 3.19 Schéma zatěžování vzorku při cyklickém testu

Zkušební tělesa použitá pro tento test odpovídala tělesům již použitým pro statickou zkoušku tahem, která byla zhotovena pomocí stříhání nebo prostřednictvím řezání vodním paprskem. Tento test byl realizován opět na trhacím zařízení TIRA Test 2300. Zkušební těleso zde bylo upnuto pomocí speciálních hydraulických čelistí, které díky svému tvaru odpovídajícímu zkušebnímu tělesu umožňují stabilizovat vzorek proti vybočení a zborcení během jeho tlakového namáhání (viz **Obr. 3.20**).



Obr. 3.20 Tvarové čelisti pro zatěžování vzorku při cyklickém testu

Průběh testu byl zaznamenáván prostřednictvím tenzometrické hlavy, která snímala zatěžující sílu, a pomocí průtahoměru snímajícího absolutní prodloužení/zkrácení zkušebního tělesa při tahovém a tlakovém namáhání. Test byl ukončen v okamžiku dosažení stanoveného počtu předepsaných cyklů. Realizace cyklického testu na trhacím zařízení je ilustrována na **Obr. 3.21**.



Obr. 3.21 Realizace cyklického testu na trhacím zařízení TIRA Test 2300

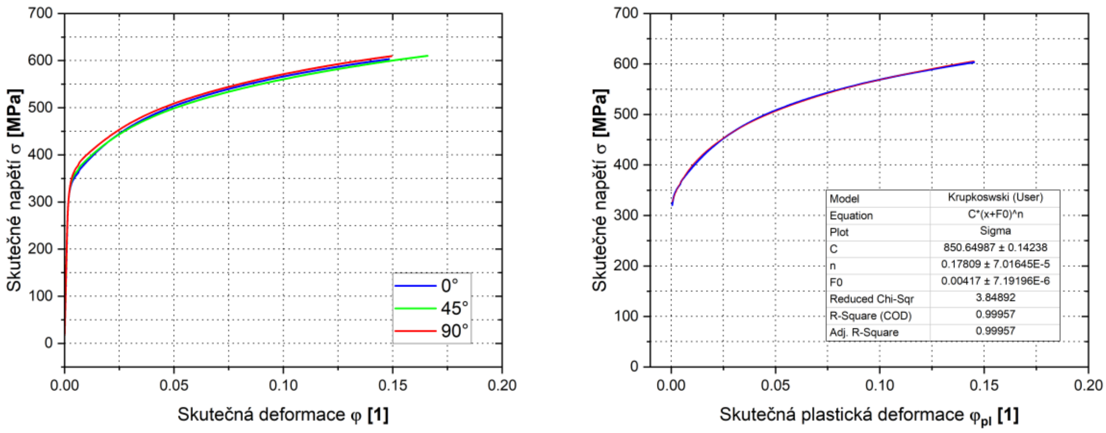
Vyhodnocení základních veličin a parametrů bylo provedeno pomocí softwaru LabNET, který je přidružený trhacímu zařízení. Následná práce s daty, vyhodnocení naměřených závislostí a tvorba grafů probíhala opět v softwaru Origin 2020. Výsledkem testu cyklickým zatěžováním je závislost skutečného napětí a skutečné deformace tvořící diagram s hysterezními smyčkami.

3.2 TESTOVÁNÍ MATERIÁLŮ SE SPECIFICKÝMI UŽITNÝMI VLASTNOSTMI

V rámci výzkumu deformačního chování materiálů se specifickými užitnými vlastnostmi byly testovány vybrané oceli, slitiny na bázi hliníků a slitiny titanu. Na těchto materiálech byly provedeny vybrané materiálové testy (viz předchozí kapitoly), které slouží pro získání potřebných materiálových veličin a charakteristik. Vždy bylo provedeno 5 měření, ze kterých byla vypočítána průměrná hodnota. V následujících podkapitolách jsou zobrazeny výsledky testování pro vybrané materiály.

3.2.1 Dvoufázová ocel DP500

Na **Obr. 3.22** jsou k vidění výsledné závislosti skutečného napětí a deformace ze statické zkoušky tahem pro jednotlivé směry válcování a Krupkowského aproximace křivky zpevnění v referenčním směru 0° sloužící pro získání aproximačních koeficientů *C, n a* φ_0.



Obr. 3.22 Křivky zpevnění materiálu DP 500 získané ze statické zkoušky tahem (vlevo) a Krupkowského aproximace (vpravo)

V **Tab. 3.1** jsou zaznamenány výsledné mechanické hodnoty materiálu získané ze statické zkoušky tahem a v **Tab. 3.2** a **3.3** jsou zaznamenány koeficienty získané z Krupkowského aproximace křivky zpevnění a koeficienty normálové anizotropie.

Tab. 3.1 Základní mechanické hodnoty materiálu DP500

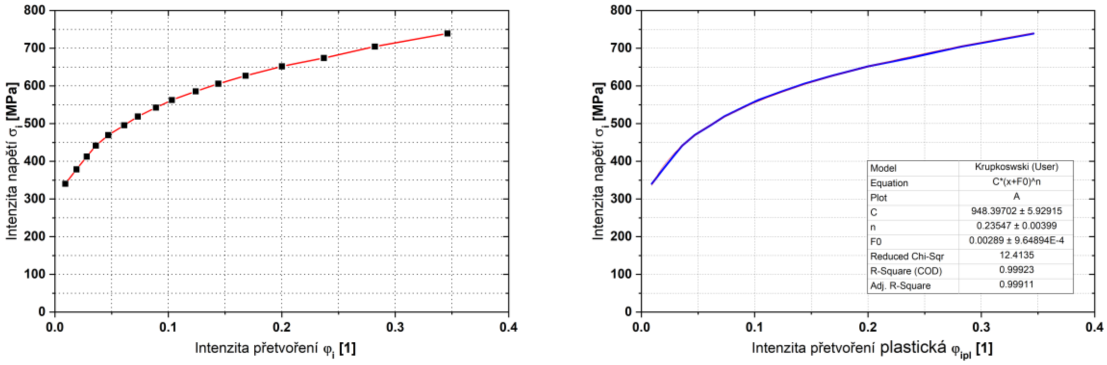
Směr válcování [°]	E [MPa]	R_e [MPa]	R_m [MPa]	A_g [-]	A_{80mm} [-]
0	190696	343.70	520.38	0.160	0.176
45	194769	347.00	516.97	0.181	0.209
90	200651	356.50	525.27	0.161	0.177

Tab. 3.2 a **3.3** Hodnoty konstant získané pomocí Krupkowského aproximace křivky zpevnění ze statické zkoušky tahem (vlevo) a z biaxiálního testu (vpravo) materiálu DP 500

Směr válcování	C [MPa]	n [-]	φ_0 [-]	R [-]
0°	850.64987	0.17809	0.00417	0.7574
45°	827.46250	0.17046	0.00431	0.9459
90°	818.93223	0.15728	0.00285	0.9076

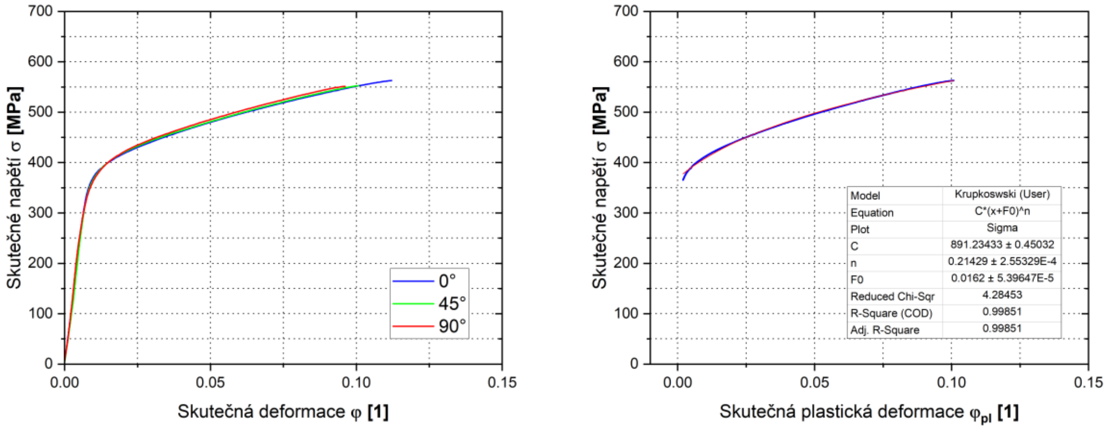
Směr válcování	C [MPa]	n [-]	φ_0 [-]	R [-]
-	948.39702	0.23547	0.00289	1.14780

Na **Obr. 3.23** jsou k vidění výsledná závislosti skutečného napětí a skutečné deformace pro biaxiální zatěžování materiálu a Krupkowského aproximace křivky zpevnění pro získání aproximačních koeficientů *C, n a* φ_0.



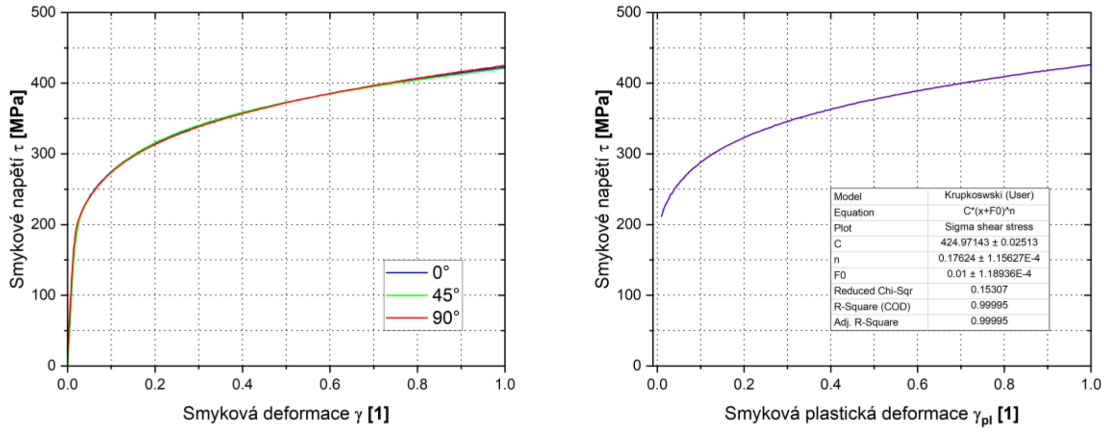
Obr. 3.23 Křivka zpevnění materiálu získaná z biaxiálního testu (vlevo) a Krupkowského aproximace křivky zpevnění (vpravo) materiálu DP 500

Na **Obr. 3.24** jsou k vidění výsledné závislosti skutečného napětí a skutečné deformace při Plane strain testu a Krupkowského aproximace křivky zpevnění v referenčním směru 0° pro získání aproximačních koeficientů *C, n a* φ_0.



Obr. 3.24 Křivky zpevnění materiálu získané z Plane strain testu (vlevo) a Krupkowského aproximace křivky zpevnění (vpravo) materiálu DP 500

Na **Obr. 3.25** jsou k vidění výsledné závislosti smykového napětí a smykové deformace při Shear testu a Krupkowského aproximace křivky zpevnění v referenčním směru 0° pro získání aproximačních koeficientů *C, n a* φ_0.



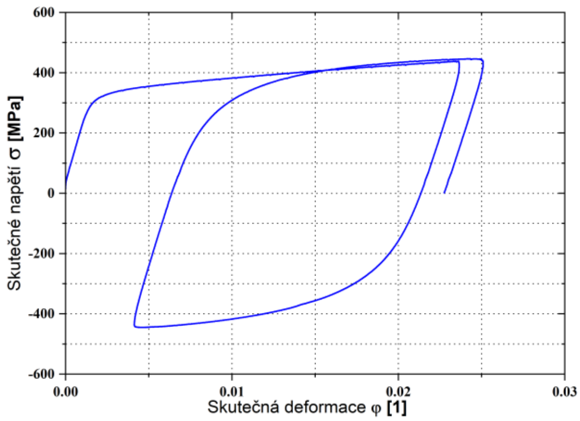
Obr. 3.25 Křivky zpevnění materiálu získané z Shear testu (vlevo) a Krupkowského aproximace křivky zpevnění (vpravo) materiálu DP 500

Tab. 3.4 a **3.5** Hodnoty konstant získané pomocí Krupkowského aproximace křivky zpevnění z Plane strain testu (vlevo) a Shear testu (vpravo) materiálu DP 500

Směr válcování	C [MPa]	n [-]	φ_0 [-]	R [-]
0°	891.23433	0.21429	0.01620	-
45°	864.34191	0.19760	0.01312	-
90°	828.34272	0.17317	0.00672	-

Směr válcování	C [MPa]	n [-]	φ_0 [-]	R [-]
0°	424.97143	0.17624	0.01000	-
45°	423.99791	0.17162	0.00676	-
90°	426.86066	0.18563	0.01410	-

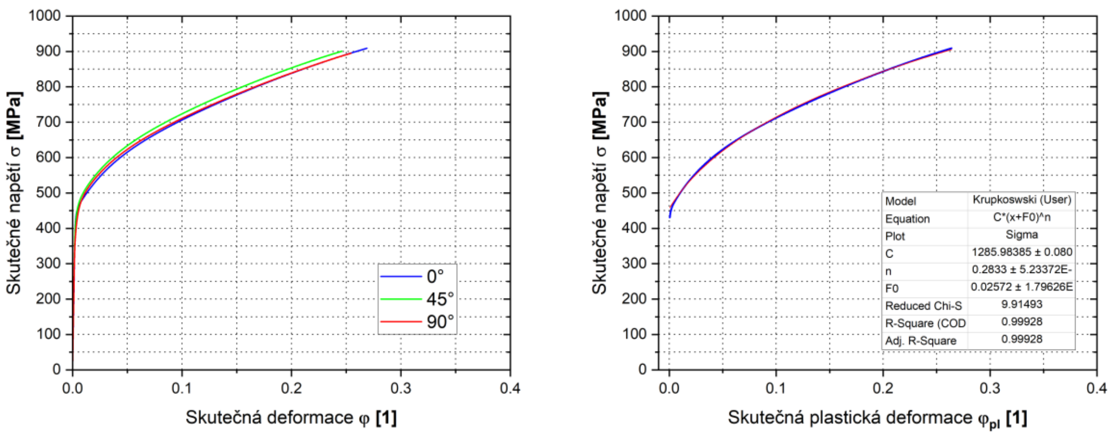
Na **Obr. 3.26** je k vidění výsledná závislost skutečného napětí a skutečné deformace při cyklickém zatěžování střídavým tahem a tlakem pro materiál DP500.



Obr. 3.26 Křivka zpevnění materiálu DP 500 získaná z cyklického testu

3.2.2 Třífázová ocel HCT690

Na **Obr. 3.27** jsou k vidění výsledné závislosti skutečného napětí a deformace ze statické zkoušky tahem pro jednotlivé směry válcování a Krupkowského aproximace křivky zpevnění v referenčním směru 0° sloužící pro získání aproximačních koeficientů *C, n a φ_0*.



Obr. 3.27 Křivky zpevnění materiálu HCT690 získané ze statické zkoušky tahem (vlevo) a Krupkowského aproximace (vpravo)

V **Tab. 3.6** jsou zaznamenány výsledné mechanické hodnoty materiálu získané ze statické zkoušky tahem a v **Tab. 3.7** a **3.8** jsou zaznamenány koeficienty získané z Krupkowského aproximace křivky zpevnění a koeficienty normálové anizotropie.

Tab. 3.6 Základní mechanické hodnoty materiálu HCT690

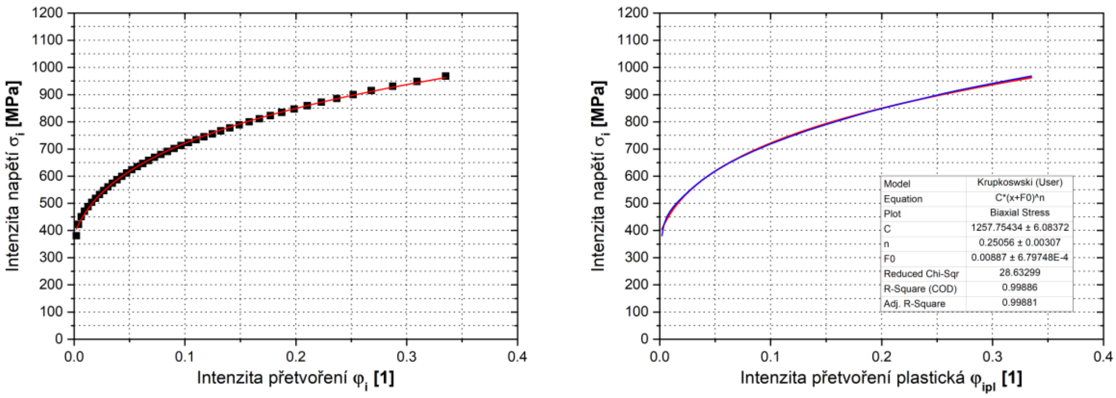
Směr válcování [°]	E [MPa]	R_e [MPa]	R_m [MPa]	A_g [-]	A_{80mm} [-]
0	181718	456.90	695.09	0.3086	0.3745
45	194229	457.65	704.43	0.2787	0.3258
90	188768	431.64	694.32	0.2896	0.3378

Tab. 3.7 a **3.8** Hodnoty konstant získané pomocí Krupkowského aproximace křivky zpevnění ze statické zkoušky tahem (vlevo) a z biaxiálního testu (vpravo) materiálu HCT690

Směr válcování	C [MPa]	n [-]	φ_0 [-]	R [-]
0°	1285.9839	0.28330	0.02572	0.8180
45°	1262.0275	0.25529	0.01914	0.7490
90°	1235.1558	0.25001	0.01647	1.1310

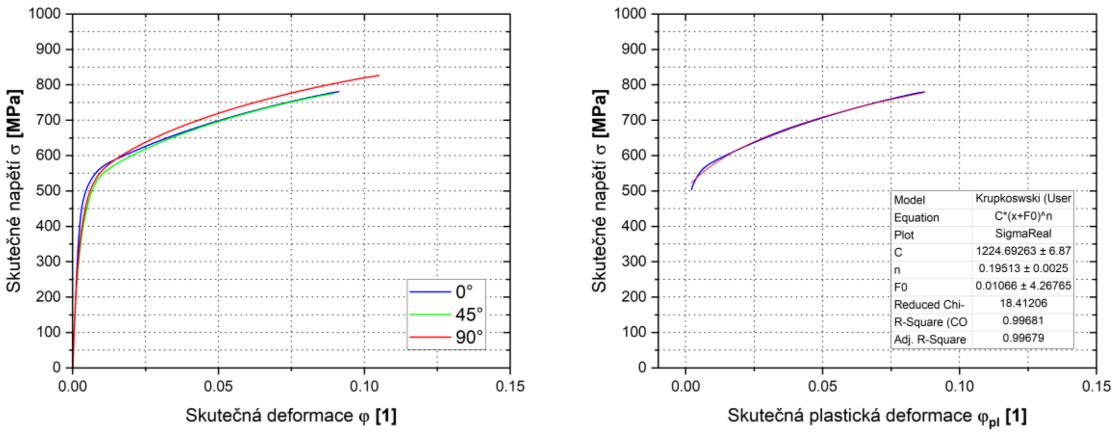
Směr válcování	C [MPa]	n [-]	φ_0 [-]	R [-]
-	1257.7543	0.25056	0.00887	1.1960

Na **Obr. 3.28** jsou k vidění výsledná závislosti skutečného napětí a skutečné deformace pro biaxiální zatěžování materiálu a Krupkowského aproximace křivky zpevnění pro získání aproximačních koeficientů *C, n a* φ_0.



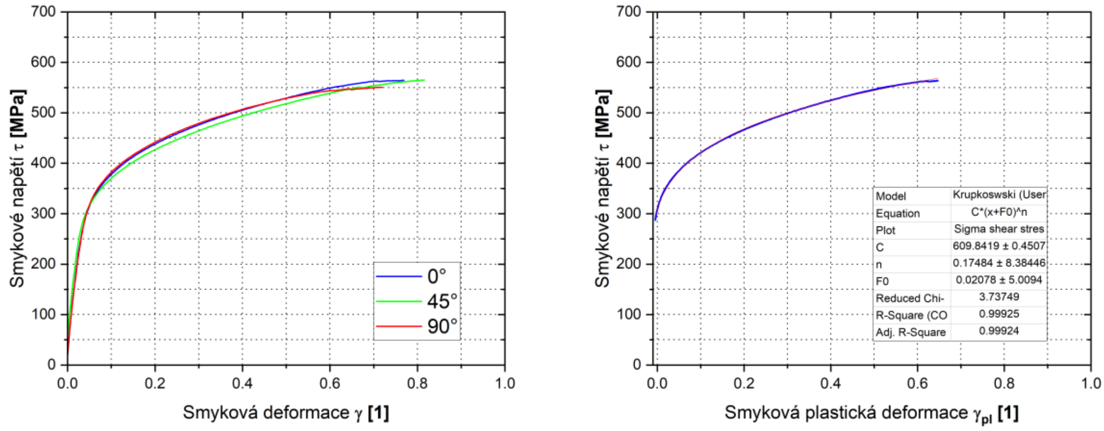
Obr. 3.28 Křivka zpevnění materiálu získaná z biaxiálního testu (vlevo) a Krupkowského aproximace křivky zpevnění (vpravo) materiálu HCT690

Na **Obr. 3.29** jsou k vidění výsledné závislosti skutečného napětí a skutečné deformace při Plane strain testu a Krupkowského aproximace křivky zpevnění v referenčním směru 0° pro získání aproximačních koeficientů *C, n a* φ_0.



Obr. 3.29 Křivky zpevnění materiálu získané z Plane strain testu (vlevo) a Krupkowského aproximace křivky zpevnění (vpravo) materiálu HCT690

Na **Obr. 3.30** jsou k vidění výsledné závislosti smykového napětí a smykové deformace při Shear testu a Krupkowského aproximace křivky zpevnění v referenčním směru 0° pro získání aproximačních koeficientů *C, n a* φ_0.



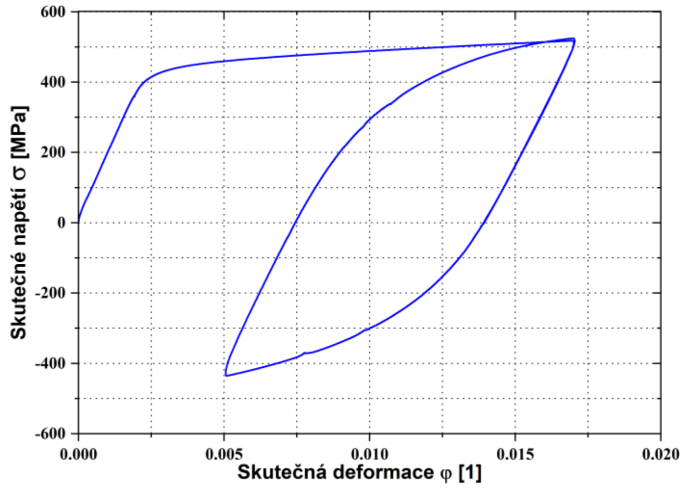
Obr. 3.30 Křivky zpevnění materiálu získané z Shear testu (vlevo) a Krupkowského aproximace křivky zpevnění (vpravo) materiálu HCT690

Tab. 3.9 a **3.10** Hodnoty konstant získané pomocí Krupkowského aproximace křivky zpevnění z Plane strain testu (vlevo) a Shear testu (vpravo) materiálu HCT690

Směr válcování	C [MPa]	n [-]	φ_0 [-]	R [-]
0°	1224.6926	0.19513	0.01066	-
45°	1138.8545	0.16041	0.00219	-
90°	1216.7021	0.17219	0.00274	-

Směr válcování	C [MPa]	n [-]	φ_0 [-]	R [-]
0°	609.8419	0.17484	0.02078	-
45°	600.7655	0.18977	0.03279	-
90°	598.0089	0.15590	0.01462	-

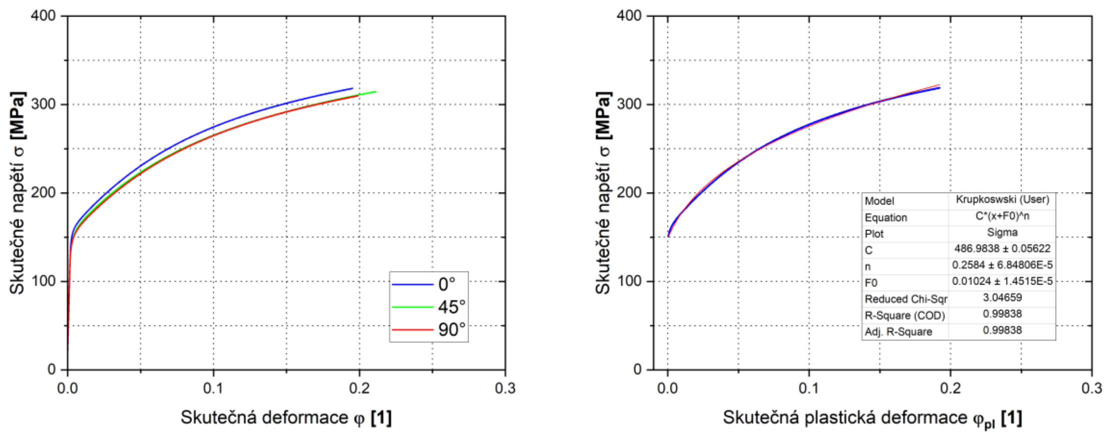
Na **Obr. 3.31** je k vidění výsledná závislost skutečného napětí a skutečné deformace při cyklickém zatěžování střídavým tahem a tlakem pro materiál HCT690.



Obr. 3.31 Křivka zpevnění materiálu HCT690 získaná z cyklického testu

3.2.3 Slitina hliníku AMAG6000 (AW6111)

Na **Obr. 3.32** jsou k vidění výsledné závislosti skutečného napětí a deformace ze statické zkoušky tahem pro jednotlivé směry válcování a Krupkowského aproximace křivky zpevnění v referenčním směru 0° sloužící pro získání aproximačních koeficientů *C, n a* φ_0.



Obr. 3.32 Křivky zpevnění materiálu AMAG6000 získané ze statické zkoušky tahem (vlevo) a Krupkowského aproximace (vpravo)

V **Tab. 3.11** jsou zaznamenány výsledné mechanické hodnoty materiálu získané ze statické zkoušky tahem a v **Tab. 3.12** a **3.13** jsou zaznamenány koeficienty získané z Krupkowského aproximace křivky zpevnění a koeficienty normálové anizotropie.

Tab. 3.11 Základní mechanické hodnoty materiálu AMAG6000

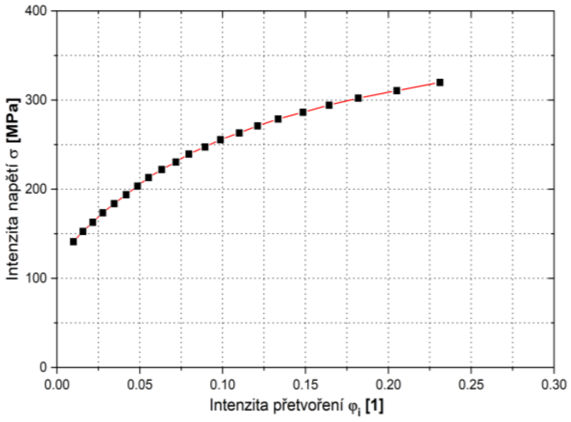
Směr válcování [°]	E [MPa]	R_e [MPa]	R_m [MPa]	A_g [-]	A_{80mm} [-]
0	62967	157.80	262.01	0.2118	0.2808
45	65559	150.09	254.97	0.2350	0.2838
90	65898	149.03	254.27	0.2201	0.2922

Tab. 3.12 a **3.13** Hodnoty konstant z Krupkowského aproximace křivky zpevnění ze statické zkoušky tahem (vlevo) a z biaxiálního testu (vpravo) materiálu AMAG6000

Směr válcování	C [MPa]	n [-]	φ_0 [-]	R [-]
0°	486.98380	0.25840	0.01024	0.7155
45°	469.31525	0.25623	0.00991	0.4631
90°	475.43606	0.26363	0.01015	0.6035

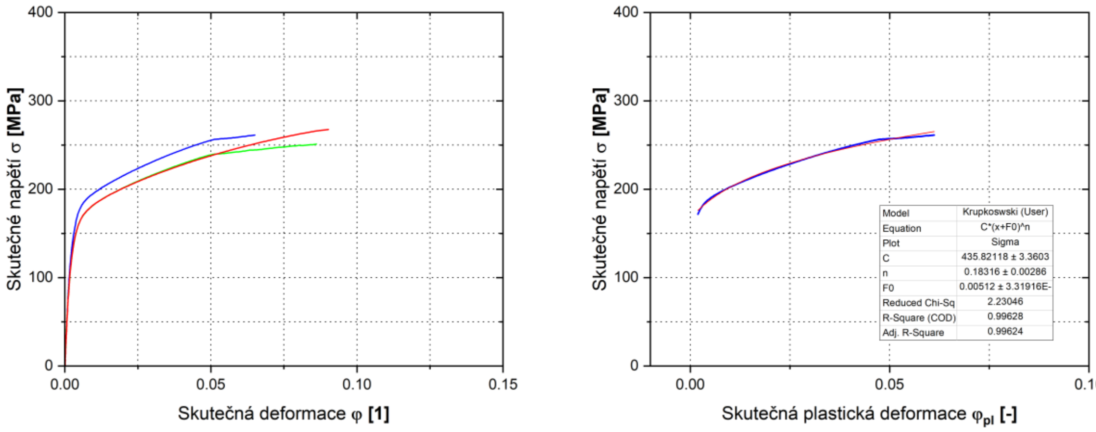
Směr válcování	C [MPa]	n [-]	φ_0 [-]	R [-]
-	504.2788	0.30334	0.00375	1.03718

Na **Obr. 3.33** jsou k vidění výsledná závislosti skutečného napětí a skutečné deformace pro biaxiální zatěžování materiálu a Krupkowského aproximace křivky zpevnění pro získání aproximačních koeficientů *C, n a* φ_0.



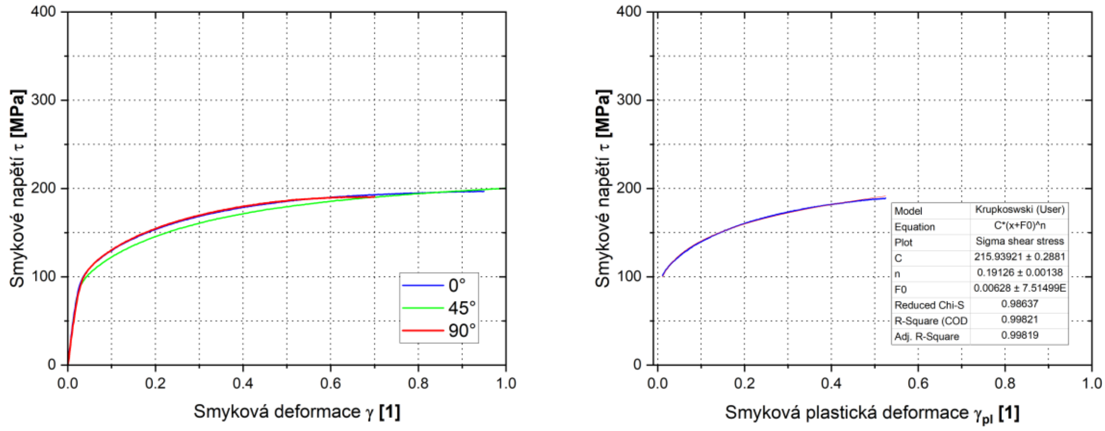
Obr. 3.33 Křivka zpevnění materiálu získaná z biaxiálního testu (vlevo) a Krupkowského aproximace křivky zpevnění (vpravo) materiálu AMAG6000

Na **Obr. 3.34** jsou k vidění výsledné závislosti skutečného napětí a skutečné deformace při Plane strain testu a Krupkowského aproximace křivky zpevnění v referenčním směru 0° pro získání aproximačních koeficientů *C, n a* φ_0.



Obr. 3.34 Křivky zpevnění materiálu získané z Plane strain testu (vlevo) a Krupkowského aproximace křivky zpevnění (vpravo) materiálu AMAG6000

Na **Obr. 3.35** jsou k vidění výsledné závislosti smykového napětí a smykové deformace při Shear testu a Krupkowského aproximace křivky zpevnění v referenčním směru 0° pro získání aproximačních koeficientů *C, n a* φ_0.



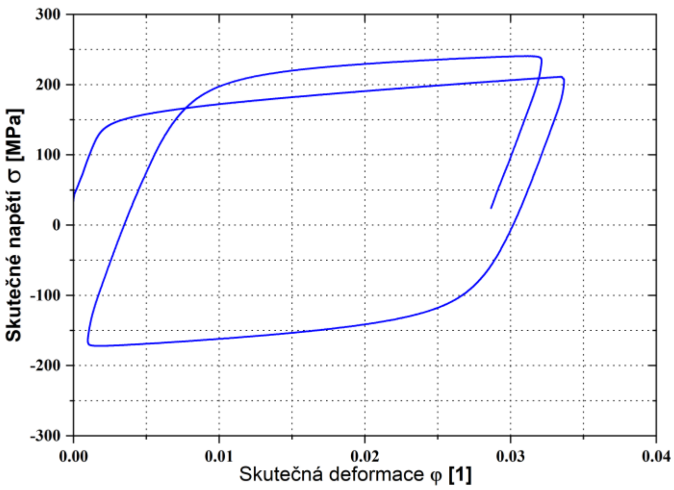
Obr. 3.35 Křivky zpevnění materiálu získané z Shear testu (vlevo) a Krupkowského aproximace křivky zpevnění (vpravo) materiálu AMAG6000

Tab. 3.14 a **3.15** Hodnoty konstant získané pomocí Krupkowského aproximace křivky zpevnění z Plane strain testu (vlevo) a Shear testu (vpravo) materiálu AMAG6000

Směr válcování	**C [MPa]**	**n [-]**	**φ_0 [-]**	**R [-]**
0°	435.82118	0.18316	0.00512	-
45°	369.40444	0.14900	0.00163	-
90°	448.95518	0.21751	0.00824	-

Směr válcování	**C [MPa]**	**n [-]**	**φ_0 [-]**	**R [-]**
0°	215.93921	0.19126	0.00628	-
45°	213.98309	0.22116	0.01373	-
90°	220.93356	0.20056	0.01139	-

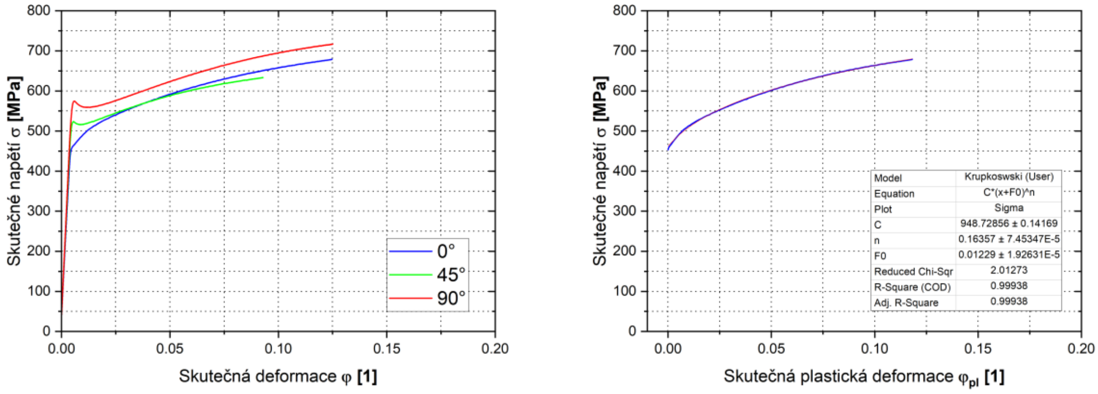
Na **Obr. 3.36** je k vidění výsledná závislost skutečného napětí a skutečné deformace při cyklickém zatěžování střídavým tahem a tlakem pro materiál AMAG6000.



Obr. 3.36 Křivka zpevnění materiálu AMAG6000 získaná z cyklického testu

3.2.4 Slitina titanu Ti-CP (AMS4900)

Na **Obr. 3.37** jsou k vidění výsledné závislosti skutečného napětí a deformace ze statické zkoušky tahem pro jednotlivé směry válcování a Krupkowského aproximace křivky zpevnění v referenčním směru 0° sloužící pro získání aproximačních koeficientů *C, n a* φ_0.



Obr. 3.37 Křivky zpevnění materiálu Ti-CP (AMS4900) získané ze statické zkoušky tahem (vlevo) a Krupkowského aproximace (vpravo)

V **Tab. 3.16** jsou zaznamenány výsledné mechanické hodnoty materiálu získané ze statické zkoušky tahem a v **Tab. 3.17** a **3.18** jsou zaznamenány koeficienty získané z Krupkowského aproximace křivky zpevnění a koeficienty normálové anizotropie.

Tab. 3.16 Základní mechanické hodnoty materiálu Ti-CP AMS4900

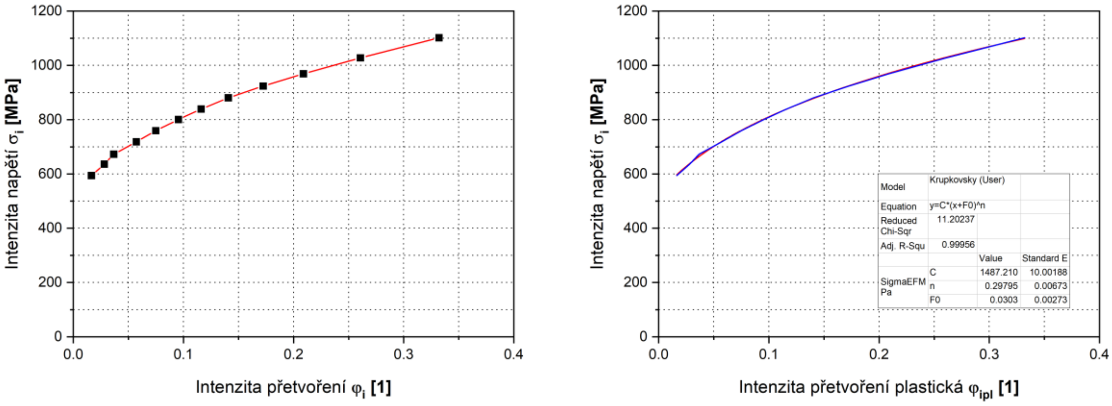
Směr válcování [°]	E [MPa]	R_e [MPa]	R_m [MPa]	A_g [-]	A_{80mm} [-]
0	102899	464.02	599.47	0.1329	0.2513
45	109420	520.73	577.38	0.0973	0.2551
90	116215	571.37	632.75	0.1294	0.2530

Tab. 3.17 a **3.18** Hodnoty konstant získané pomocí Krupkowského aproximace křivky zpevnění ze statické zkoušky tahem (vlevo) a z biaxiálního testu (vpravo) materiálu Ti-CP AMS4900

Směr válcování	C [MPa]	n [-]	φ_0 [-]	R [-]
0°	948.72856	0.16357	0.01229	0.8659
45°	887.08013	0.14822	0.01779	2.3642
90°	1089.85607	0.22264	0.03746	2.6109

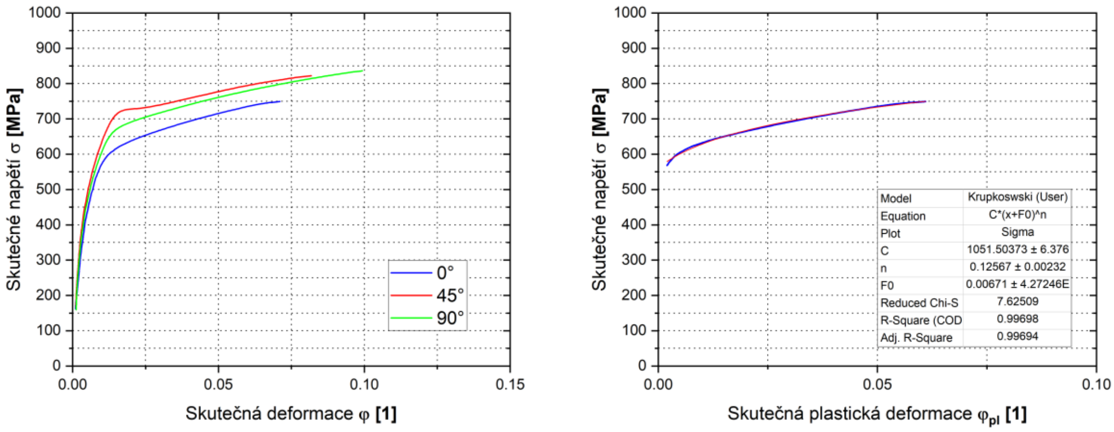
Směr válcování	C [MPa]	n [-]	φ_0 [-]	R [-]
-	1487.21054	0.29795	0.0303	1.1462

Na **Obr. 3.38** jsou k vidění výsledná závislosti skutečného napětí a skutečné deformace pro biaxiální zatěžování materiálu a Krupkowského aproximace křivky zpevnění pro získání aproximačních koeficientů *C, n a* φ_0.



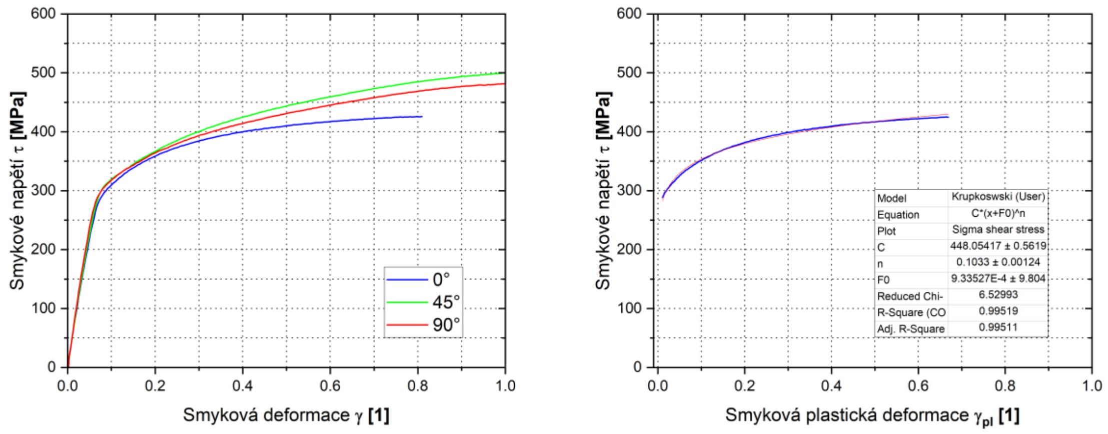
Obr. 3.38 Křivka zpevnění materiálu získaná z biaxiálního testu (vlevo) a Krupkowského aproximace křivky zpevnění (vpravo) materiálu Ti-CP AMS4900

Na **Obr. 3.39** jsou k vidění výsledné závislosti skutečného napětí a skutečné deformace při Plane strain testu a Krupkowského aproximace křivky zpevnění v referenčním směru 0° pro získání aproximačních koeficientů *C, n a* φ_0.



Obr. 3.39 Křivky zpevnění materiálu získané z Plane strain testu (vlevo) a Krupkowského aproximace křivky zpevnění (vpravo) materiálu Ti-CP AMS4900

Na **Obr. 3.40** jsou k vidění výsledné závislosti smykového napětí a smykové deformace při Shear testu a Krupkowského aproximace křivky zpevnění v referenčním směru 0° pro získání aproximačních koeficientů *C, n a* φ_0.



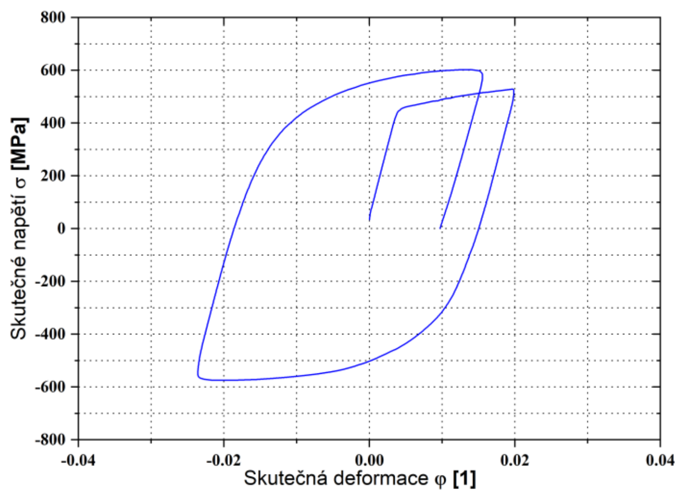
Obr. 3.40 Křivky zpevnění materiálu získané z Shear testu (vlevo) a Krupkowského aproximace křivky zpevnění (vpravo) materiálu Ti-CP AMS4900

Tab. 3.19 a **3.20** Hodnoty konstant získané pomocí Krupkowského aproximace křivky zpevnění z Plane strain testu (vlevo) a Shear testu (vpravo) materiálu Ti-CP AMS4900

Směr válcování	C [MPa]	n [-]	φ_0 [-]	R [-]
0°	1051.50373	0.12567	0.00671	-
45°	1163.13750	0.14660	0.01773	-
90°	1242.73536	0.19123	0.04621	-

Směr válcování	C [MPa]	n [-]	φ_0 [-]	R [-]
0°	448.05417	0.10330	0.00093	-
45°	509.03327	0.16677	0.02833	-
90°	491.14911	0.5935	0.03008	-

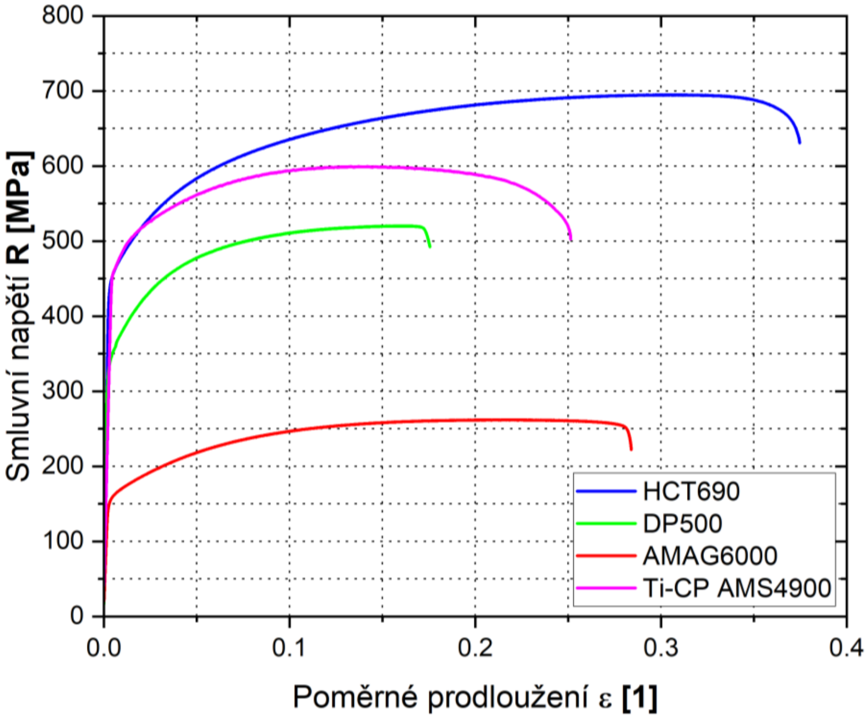
Na **Obr. 3.41** je k vidění výsledná závislost skutečného napětí a skutečné deformace při cyklickém zatěžování střídavým tahem a tlakem pro materiál Ti-CP AMS4900.



Obr. 3.41 Křivka zpevnění materiálu Ti-CP AMS4900 získaná z cyklického testu

3.3 POROVNÁNÍ MECHANICKÝCH VLASTNOSTÍ VYBRANÝCH MATERIÁLŮ

Na **Obr. 3.42** je ilustrováno porovnání křivek zpevnění získaných ze statické zkoušky tahem pro vybrané typy materiálů, jedná se o závislosti smluvního napětí a poměrného prodloužení. Je zde možné pozorovat výše diskutované diference mezi jednotlivými materiály. Dvoufázová ocel DP500 je zobrazena zelenou barvou, třífázová ocel HCT690 modrou barvou, slitina hliníku AMAG600 nese barvu červenou a nakonec slitina titanu Ti-CP AMS4900 v barvě magenta. V **Tab. 3.21** níže je k vidění porovnání základních mechanických vlastností pro jednotlivé materiály v referenčním směru 0° vzhledem ke směru válcování.



Obr. 3.42 Křivky zpevnění materiálu AMAG6000 získané ze statické zkoušky tahem (vlevo) a Krupkowského aproximace (vpravo)

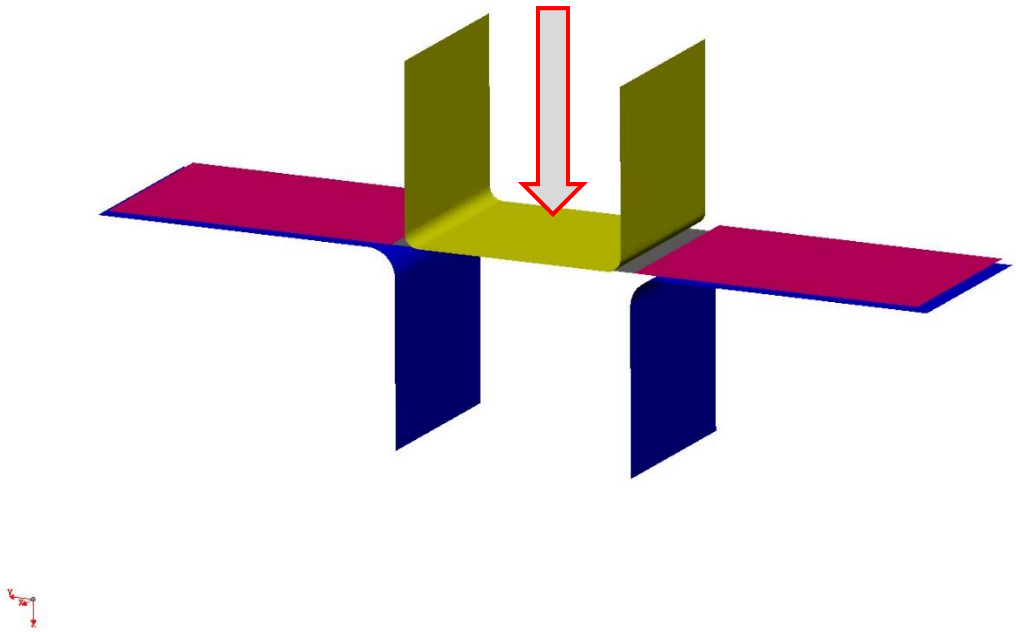
Tab. 3.21 Mechanické vlastnosti vybraných materiálů v referenčním směru 0°

Materiál	E [MPa]	R_e [MPa]	R_m [MPa]	A_g [-]	A_{80mm} [-]
DP500	190696	343.70	520.38	0.160	0.176
HCT690	181718	456.90	695.09	0.3086	0.3745
AMAG6000	62967	157.80	262.01	0.2118	0.2808
Ti-CP AMS4900	102899	464.02	599.47	0.1329	0.2513

3.4 REÁLNÝ EXPERIMENT ZHOTOVENÍ VÝLISKU ODPOVÍDAJÍCÍ PROCESU NASTAVENÉMU V NUMERICKÉ SIMULACI

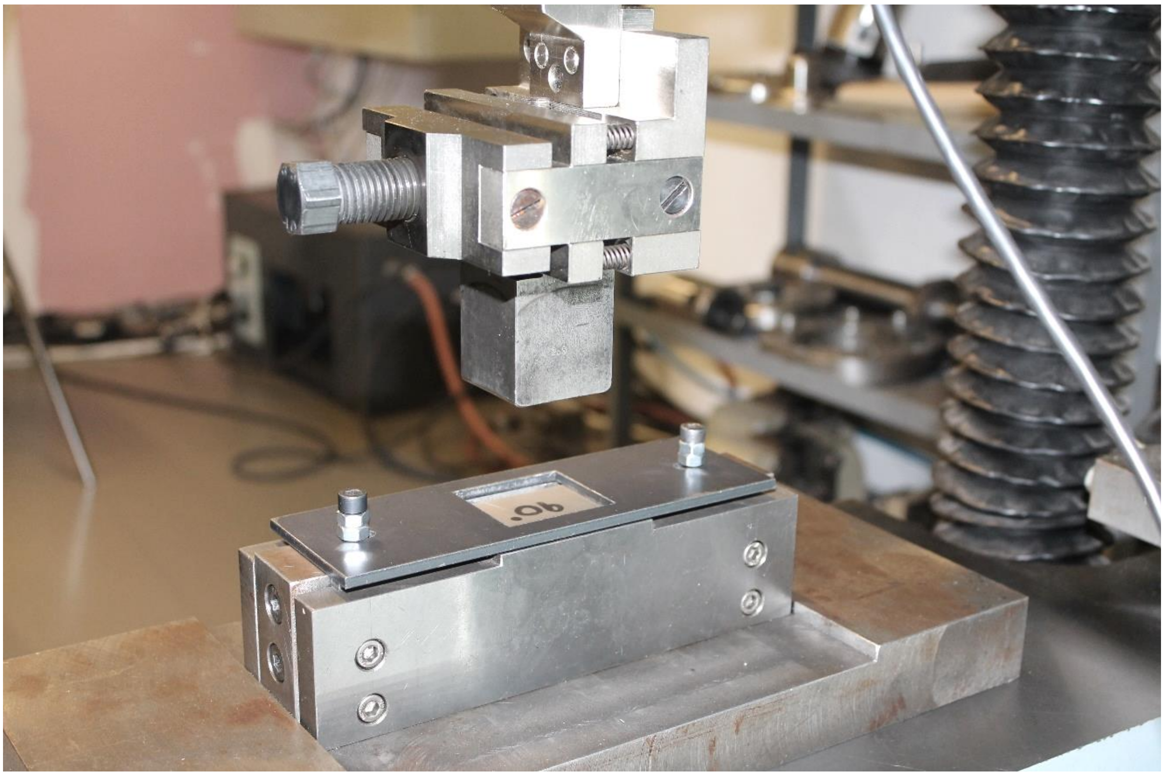
Pro ověření a prokázání validity výsledků, které se získají z numerické simulace, bylo zapotřebí zhotovit reálný výlisek plechu, který bude možné porovnat s výsledky numerické simulace. V každé variantě bylo vždy zhotoveno 5 vzorků, ze kterých byla vypočítána průměrná hodnota. Byly zde zhotoveny výlisky pomocí technologie tažení do tvaru U a pomocí protahování plechu přes tzv. brzdnou drážku. Tyto procesy byly realizovány pomocí jednoduchých tvářecích nástrojů, viz níže.

Tažení výlisku do tvaru „U“ bylo zhotoveno pomocí jednoduchého nástroje složeného z tažníku, tažnice a přidržovače. Schematické znázornění experimentu je zobrazeno na **Obr. 3.45**. Tento typ experimentu byl zvolen jako zástupce jednoduchého procesu, kde materiál prochází poměrně malým přetvořením skrze jednu deformační zónu v oblasti rádiusu na tažnici.



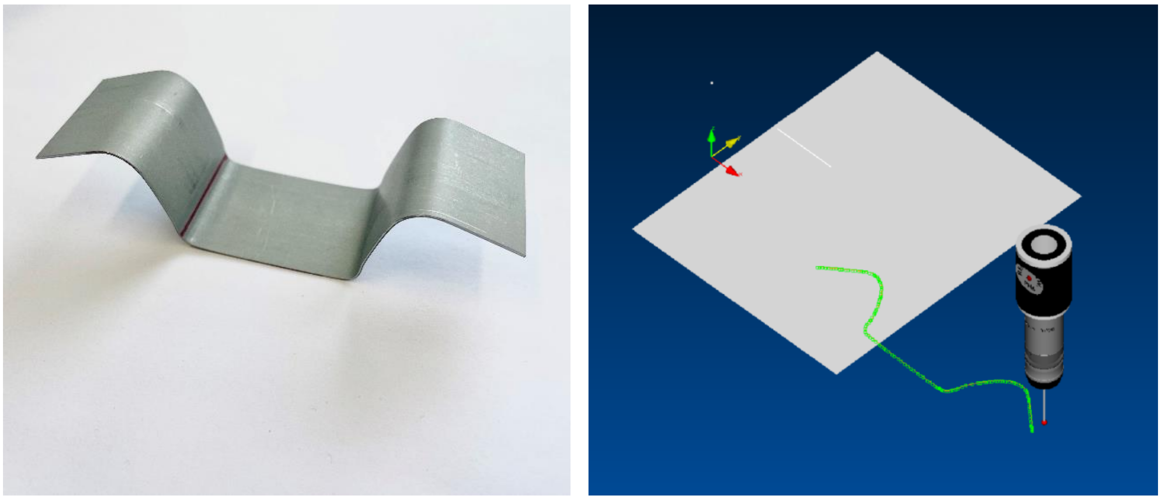
Obr. 3.43 Schéma procesu tažení plechu do tvaru „U“

Tento proces zhotovení výlisku byl realizován na zařízení TIRA Test 2300, kde bylo možné během procesu přesně ovládat a řídit rychlost pohybu funkčních částí nástroje a pracovní zdvih nástroje. Realizace tažení do tvaru „U“ na trhacím zařízení je ilustrována na **Obr. 3.44**.



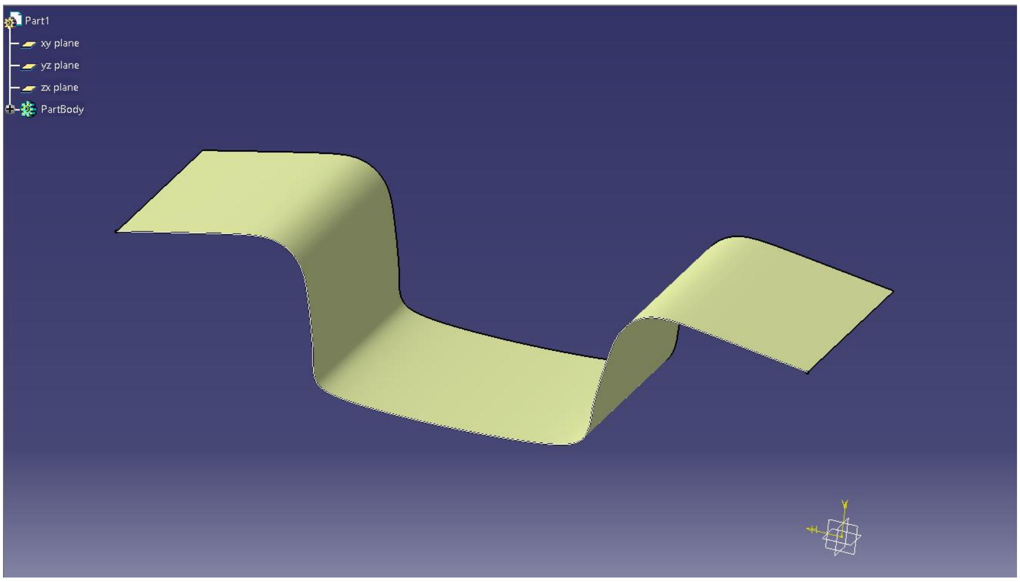
Obr. 3.44 Zhotovení reálného výlisku do tvaru „U“ na zařízení TIRA Test 2300

Lisování bylo realizováno rychlostí 5 mm/min s pracovním zdvihem 30 mm. Na takto zhotovených reálných výliscích plechu (viz **Obr. 3.45** – vlevo) bylo nutné tvarově definovat a popsat jejich konturu po celkovém odpružení materiálu. Kontura reálných výlisků byla snímána pomocí 3D měřícího souřadnicového zařízení SOMET XYZ 464 a softwaru TANGO!3D, to je ilustrováno na viz **Obr. 3.45** – vpravo.



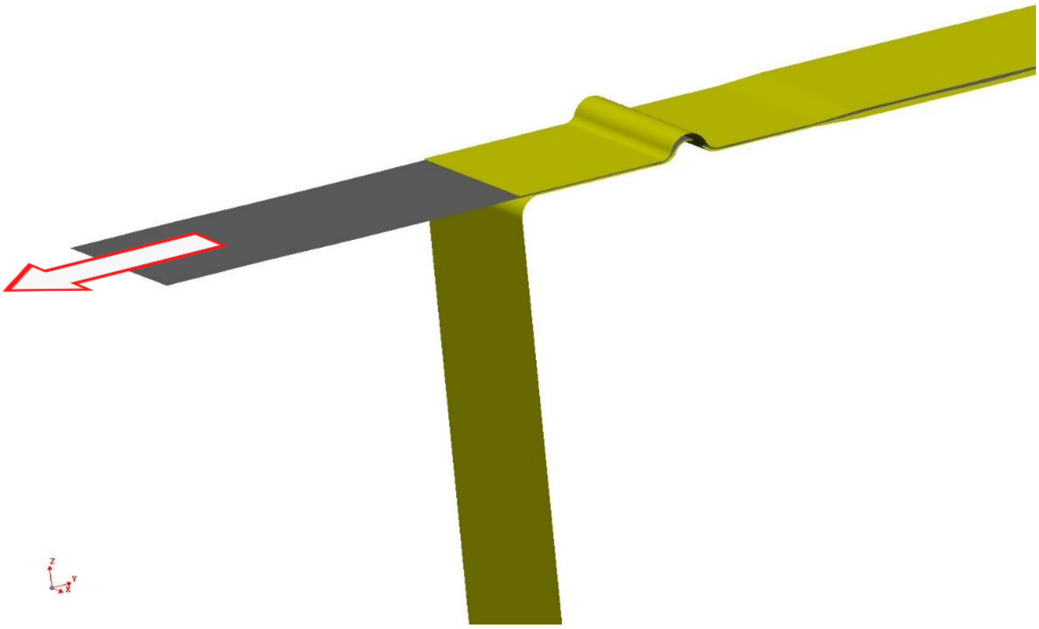
Obr. 3.45 Ilustrace výlisku plechu tvaru “U“ po odpružení (vlevo) a měření kontury tohoto výlisku (vpravo)

Naměřenými body (křivkou) byla následně v softwaru CATIA V5 proložena plocha dané šíře pro vytvoření digitální podoby reálného výlisku (viz **Obr. 3.46**), který bude dále porovnáván s výsledky výpočtu numerické simulace v softwaru PAM STAMP 2G.



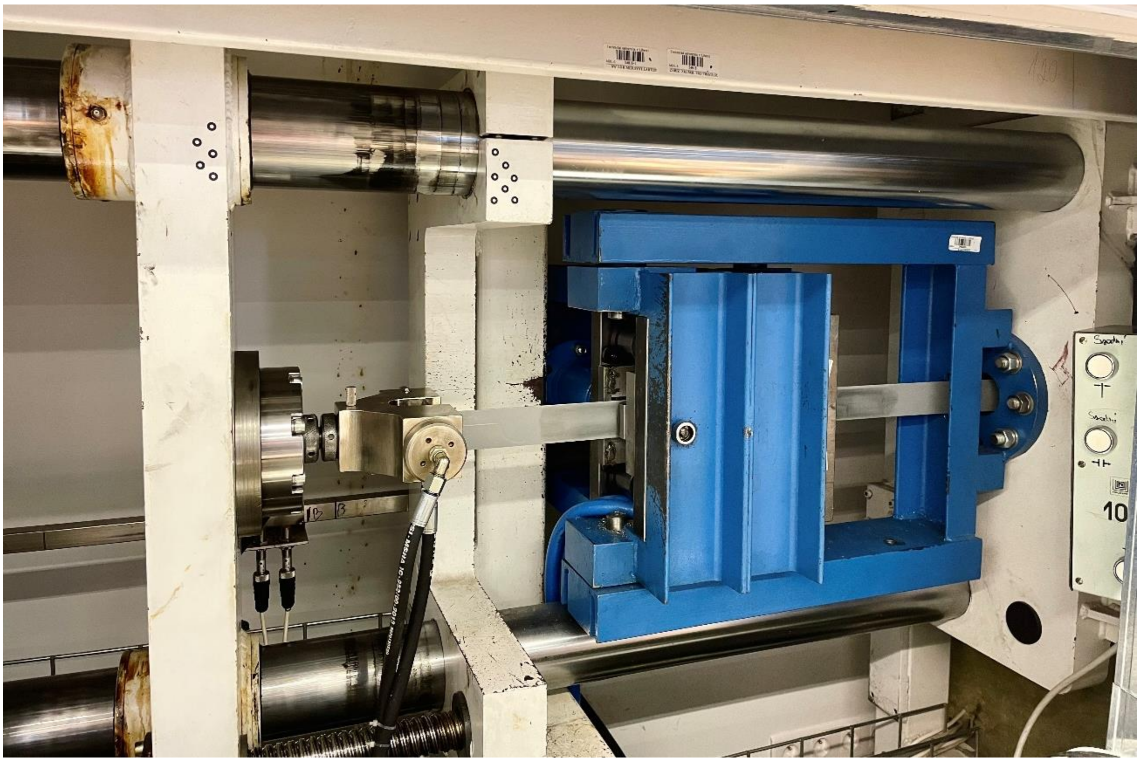
Obr. 3.46 Ilustrace digitální podoby reálného výlisku tvaru „U“ v softwaru CATIA V5

Experiment protahování plechu přes brzdnou drážku byl realizován na zařízení Sokol 400, které slouží pro tribologické testy a umožňuje prostřednictvím hydraulické čelisti a posuvného příčníku protahovat pás plechu přes výměnné tvarové vložky, tvárník a tvárnici. Schematické znázornění procesu protahování je ilustrováno na **Obr. 3.47**.



Obr. 3.47 Schéma procesu protahování pásu plechu přes brzdnou drážku

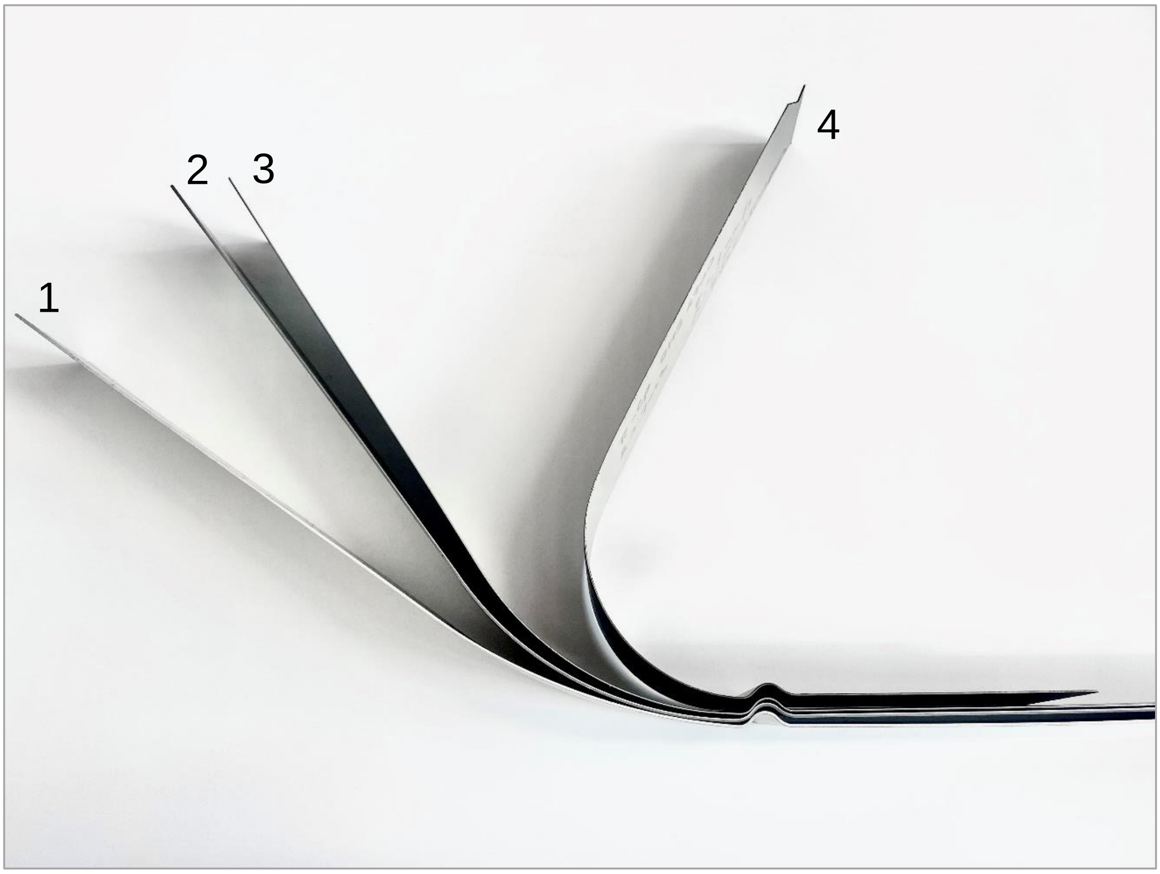
Tento experiment byl realizován pro vložku s brzdnou drážkou, kde při protahování přes drážku dochází ke změně tahového a tlakového namáhání materiálu, tzn. je zde uplatňován Bauschingerův jev, tak jako při reálném procesu lisování tvarových součástí. Tento experiment byl zvolen s ohledem na to, že zde materiál prochází poměrně velkým přetvořením s několikanásobnou změnou stavu napjatosti v tvářeném materiálu a dá se zde očekávat významné projevení vlivu rozdílných materiálových modelů numerické simulace. Realizace tohoto procesu protahování na zařízení Sokol 400 je k vidění na **Obr. 3.48**.



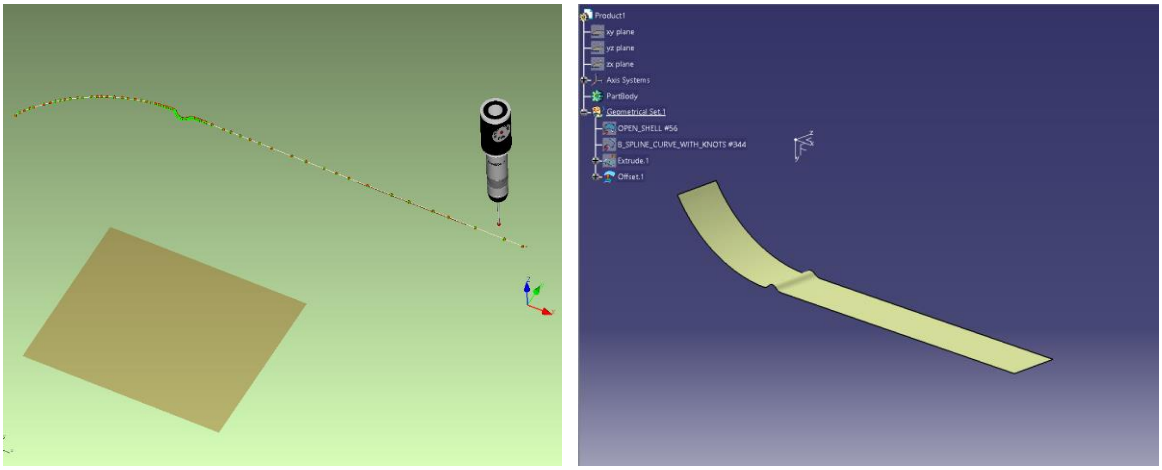
Obr. 3.48 Realizace protahování pásu plechu na zařízení Sokol 400

Experiment zhotovení reálných výlisku jednotlivých materiálů byl zde proveden pro posuv 100mm a rychlost posuvu 50mm/min. Výsledné vzorky po uvolnění z nástroje a následném odpružení materiálu (viz **Obr. 3.49**) bylo nutné opět podrobit tvarové analýze pro popis výsledné kontury výlisku, to bylo provedeno opět pomocí 3D měřícího souřadnicového zařízení SOMET XYZ 464 a softwaru TANGO!3D, to je ilustrováno na **Obr. 3.50** – vlevo.

Získaná kontura reálného výlisku ve formě naměřených bodů (křivky) byla následně opět v softwaru CATIA V5 proložena plochou dané šíře pásu plechu pro vytvoření digitální podoby tohoto reálného výlisku (viz **Obr. 3.50** – vpravo), který bude dále porovnáván s výsledky výpočtu numerické simulace v softwaru PAM STAMP 2G.



Obr. 3.49 Výlisky plechu získané pomocí protahování plechu přes brzdnou drážku a následném odpružení materiálu (1 – slitina hliníku AW6081, 2 – třífázová ocel HCT690, 3 – dvoufázová ocel DP500, 4 – slitina titanu Ti-CP AMS4900)

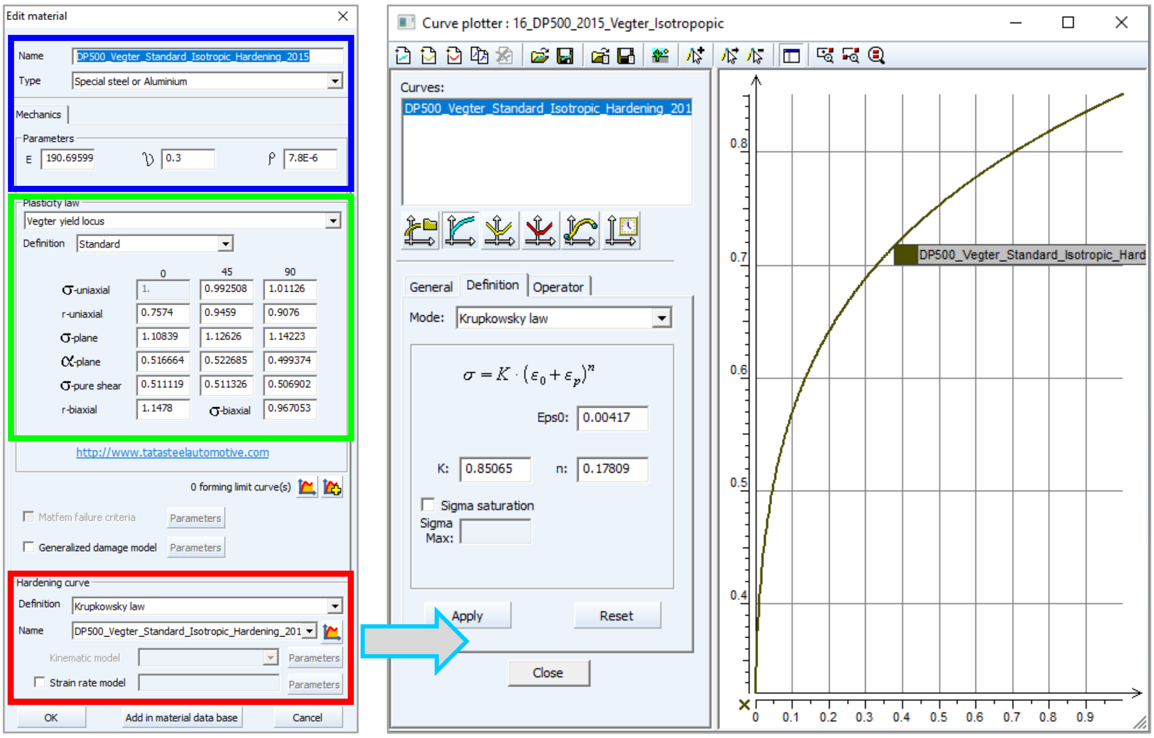


Obr. 3.50 Ilustrace měření kontury výlisku (vlevo) a digitální podoba reálného výlisku po protahování a následném odpružení v softwaru CATIA V5 (vpravo)

3.5 DEFINICE MATERIÁLOVÝCH VÝPOČTOVÝCH MODELŮ V PROSTŘEDÍ NUMERICKÉ SIMULACE SOFTWARU PAM STAMP 2G

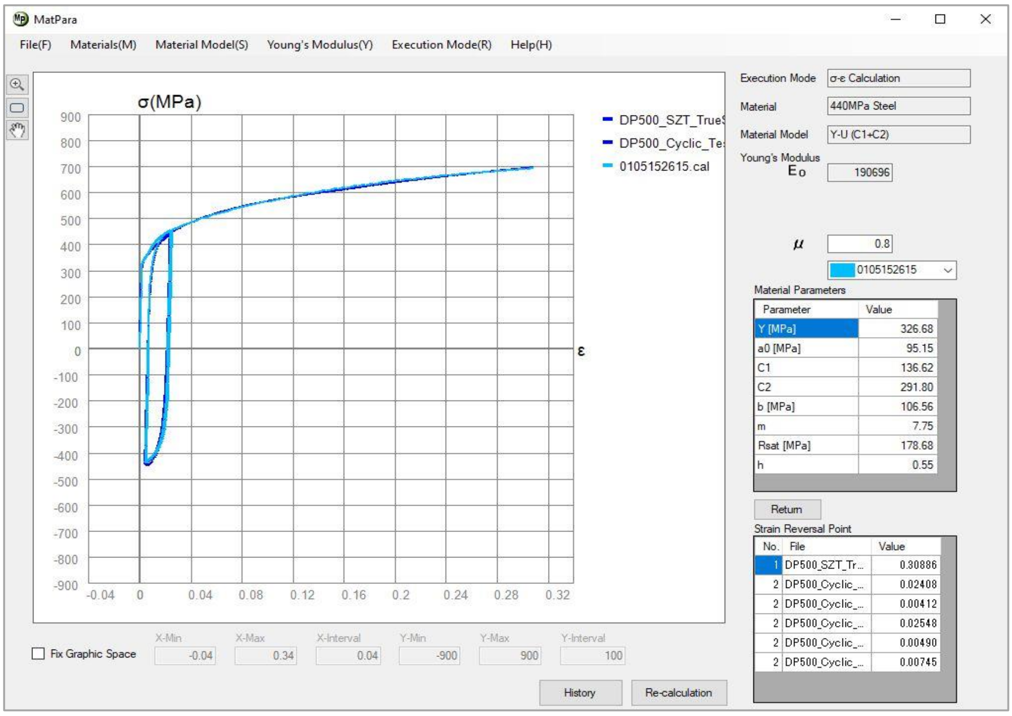
Definice materiálových modelů v softwaru PAM STAMP 2G je založena na takzvaném „fitování“ dat. Data a potřebné materiálové charakteristiky je nutné určitým způsobem implementovat do prostředí numerické simulace. Jak již bylo popsáno výše do prostředí numerické simulace v softwaru PAM STAMP 2G vstupují materiálová data do výpočtu ve formě materiálové karty, kde je třeba zadat základní materiálové vlastnosti, zvolit materiálový výpočtový model a k němu zadat příslušné veličiny pro definici podmínky plasticity a dále zvolit a definovat model zpevňování materiálu během jeho deformace.

Pro definování materiálové karty je třeba nejprve zvolit typ materiálu a zadat základní materiálové vlastnosti jako je modul pružnosti *E*, Poissonovo číslo *ν* a hustota *ρ* (viz **Obr. 3.51** – modrá oblast). Dále je třeba zvolit model podmínky plasticity a zadat k němu příslušná materiálová data z jednotlivých mechanických testů materiálu (viz **Obr. 3.51** – zelená oblast). Napěťové charakteristiky jsou zde zadávány vždy jako poměr napětí z vybraného testu ve zvoleném směru vůči referenční hodnotě napětí získané ze statické zkoušky tahem ve směru 0°.

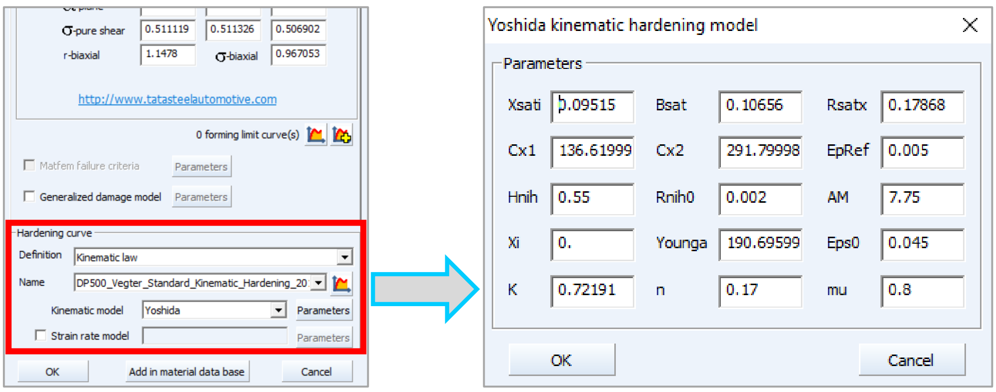


Obr. 3.51 Ilustrace definice materiálového modelu v prostředí PS2G (vlevo) a definice izotropního zpevnění materiálu (vpravo)

Izotropní model zpevňování materiálu během jeho deformace je zde zadáván pomocí koeficientů získaných z Krupkowského aproximace křivky zpevnění ze statické zkoušky tahem v referenčním směru 0° (viz **Obr. 3.51** – červená oblast). Kinematický model zpevňování, tzv. Yoshida model, je zde definován pomocí několika parametrů a konstant. Tyto jednotlivé parametry a konstanty se získají na základě rovnic popsaných v kap. 2.4.2 prostřednictvím licencovaného softwaru MatPara (ve spolupráci s MECAS ESI GROUP), kde dochází k proložení naměřené závislosti ze statické zkoušky tahem a cyklického testu vypočítanou křivkou a k „nafitování" jednotlivých parametrů, viz **Obr. 3.52**. Tyto parametry se následně zadají do materiálové karty v softwaru PAM STAMP 2G, viz **Obr. 3.53**.



Obr. 3.52 Ilustrace fitování konstant pro Yoshida model v softwaru MatPara



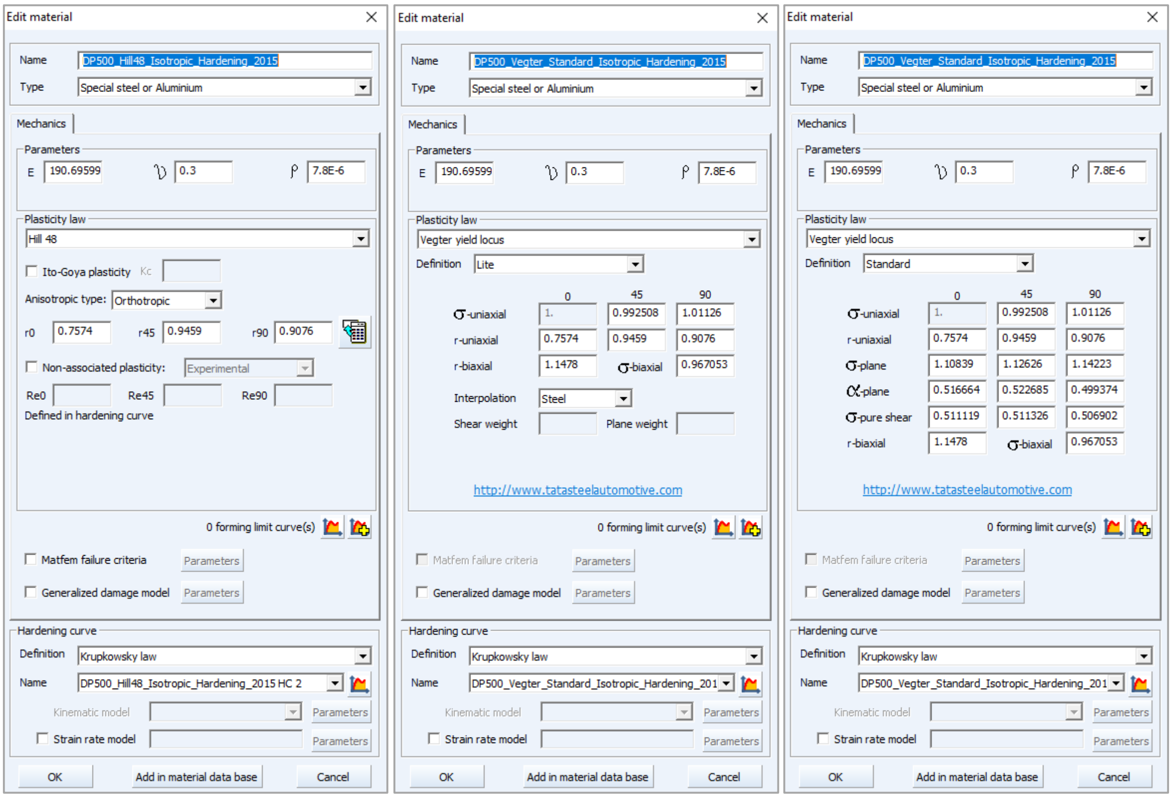
Obr. 3.53 Ilustrace definice materiálového modelu v prostředí PS2G (vlevo) a definice kinematického zpevnění materiálu (vpravo)

3.6 DEFINICE ZVOLENÝCH MATERIÁLOVÝCH VÝPOČTOVÝCH MODELŮ PRO VYBRANÉ TYPY MATERIÁLU

V následujících podkapitolách jsou zobrazeny definice jednotlivých materiálových výpočtových modelů použitých v numerické simulaci daného procesu tváření pro vybrané typy materiálů. V prostředí softwaru pro numerické simulace PAM STAMP 2G jsou v rámci této práce definovány a testovány materiálové výpočtové modely **Hill48**, **Vegter Lite** a **Vegter Standard** vždy ve variantě s **izotropním** a **kinematickým zpevněním materiálu**.

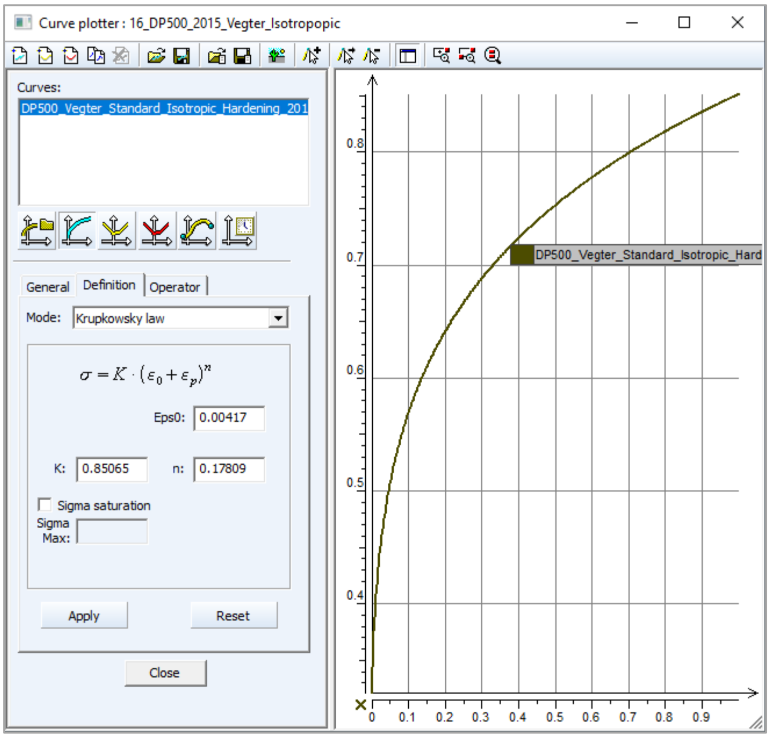
3.6.1 Dvoufázová ocel DP500

Na **Obr. 3.54** je zobrazena definice materiálového výpočtového modelu Hill48 (vlevo), Vegter Lite (uprostřed) a Vegter Standard (vpravo). Jak již bylo popsáno výše, dochází zde k zadání základních vlastností materiálu, volbě výpočtového modelu a následně k zadání mechanických hodnot z jednotlivých materiálových testů.

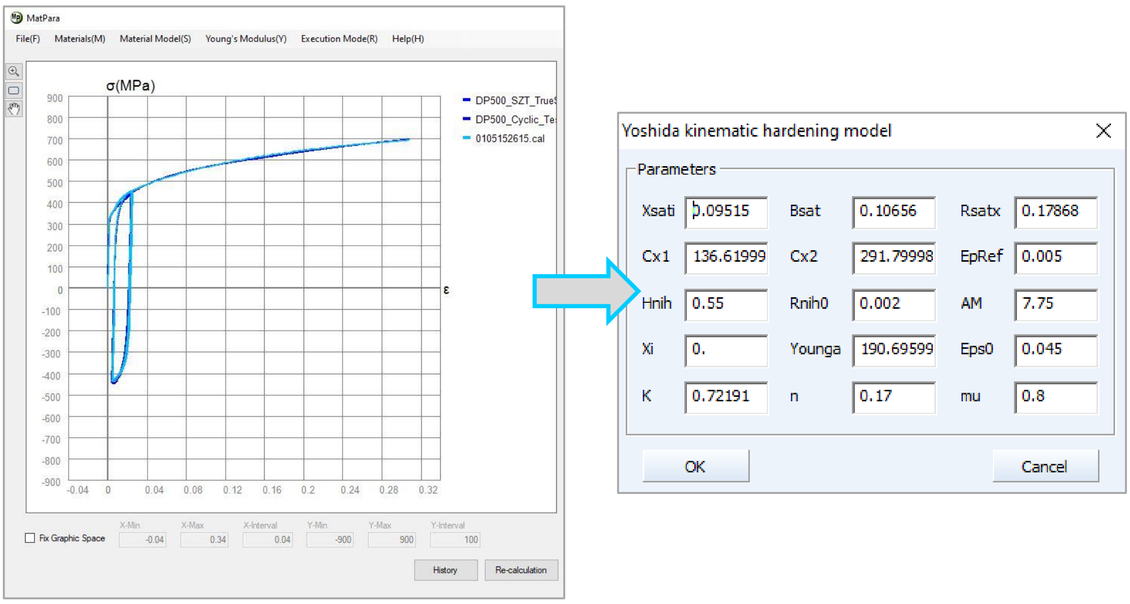


Obr. 3.54 Definice materiálového modelu Hill48 (vlevo), Vegter Lite (uprostřed) a Vegter Standard (vpravo) pro materiál DP500

Na **Obr. 3.55** je zobrazena definice izotropního modelu zpevnění materiálu pomocí konstant *C*, *n* a φ_0 získaných z Krupkowského aproximace křivky zpevnění ze statické zkoušky tahem v referenčním směru 0°. Na **Obr. 3.56** je pak zobrazeno fittování dat v softwaru MatPara pro získání parametrů definujících kinematický Yoshida model.



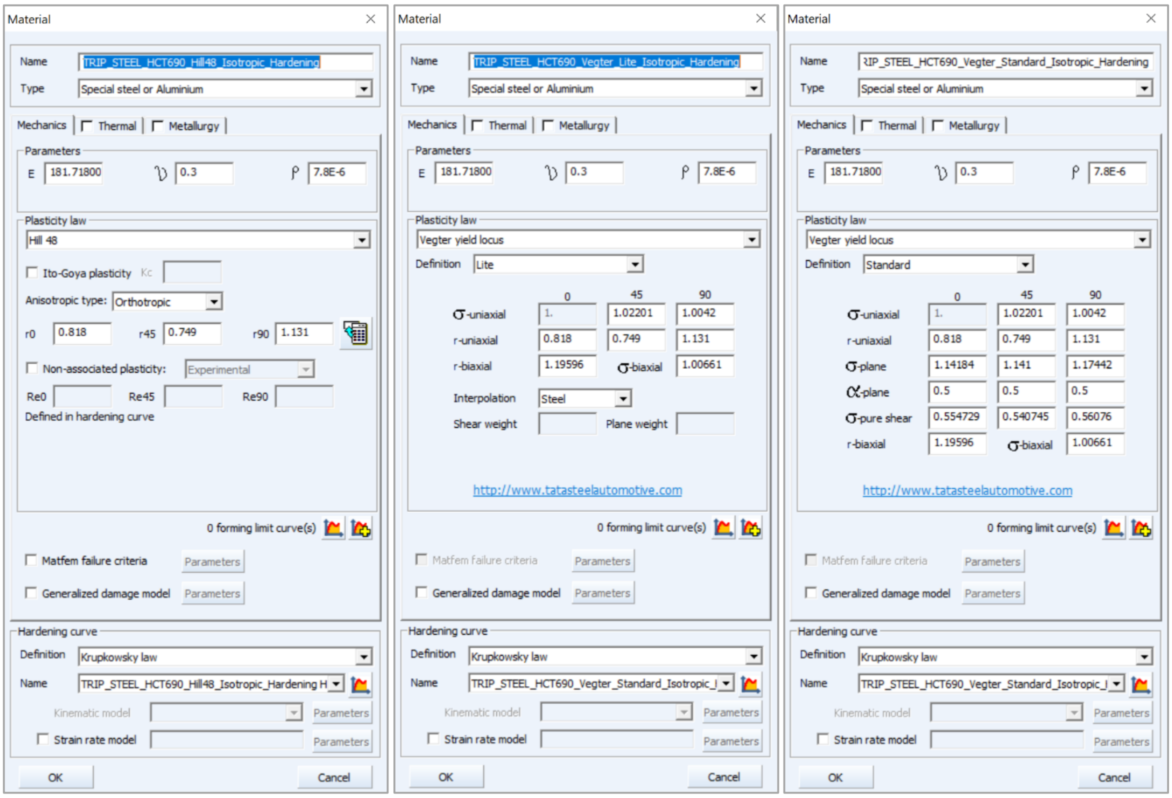
Obr. 3.55 Definice izotropního zpevnění v softwaru PAM STAMP 2G pro DP500



Obr. 3.56 Fittování parametrů pro Yoshida model v softwaru MatPara pro materiál DP500

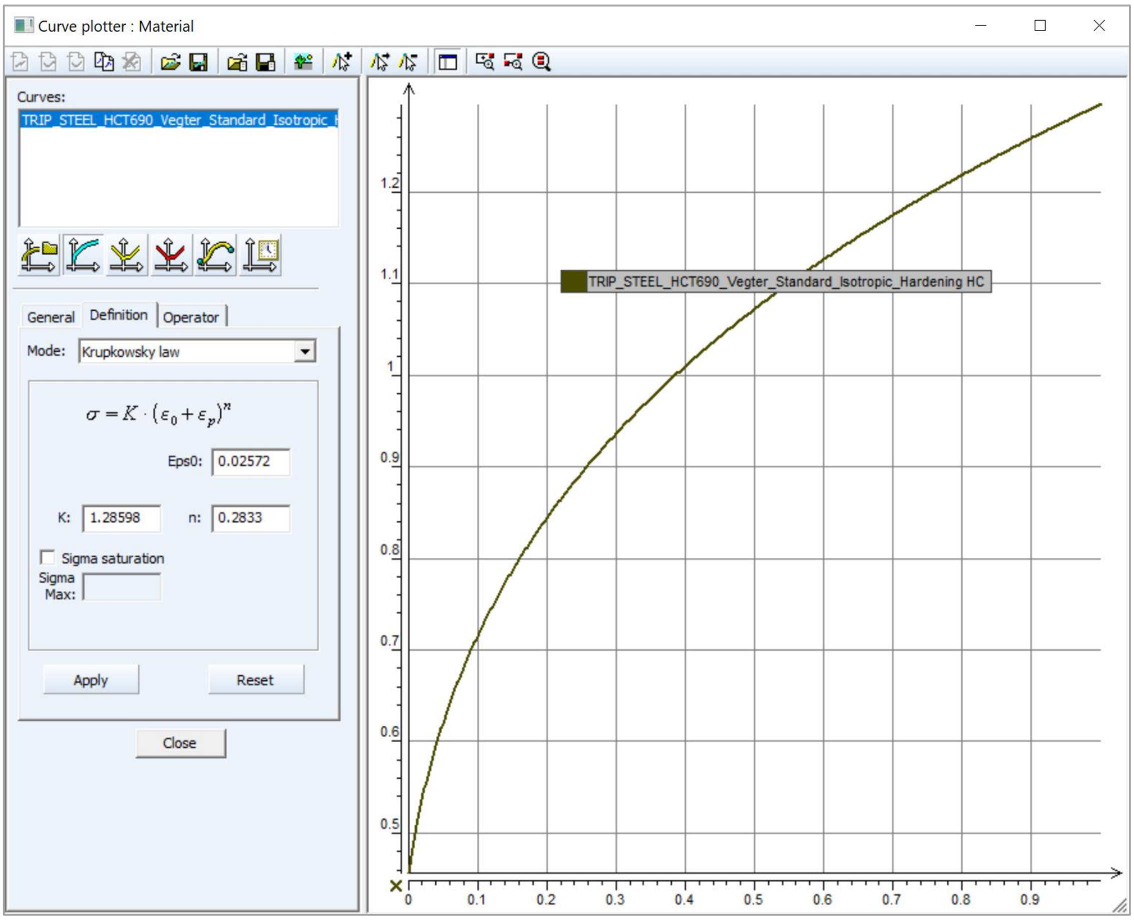
3.6.2 Třífázová ocel HCT690

Na **Obr. 3.57** je zobrazena definice materiálového výpočtového modelu Hill48 (vlevo), Vegter Lite (uprostřed) a Vegter Standard (vpravo). Jak již bylo popsáno výše, dochází zde k zadání základních vlastností materiálu, volbě výpočtového modelu a následně k zadání mechanických hodnot z jednotlivých materiálových testů.

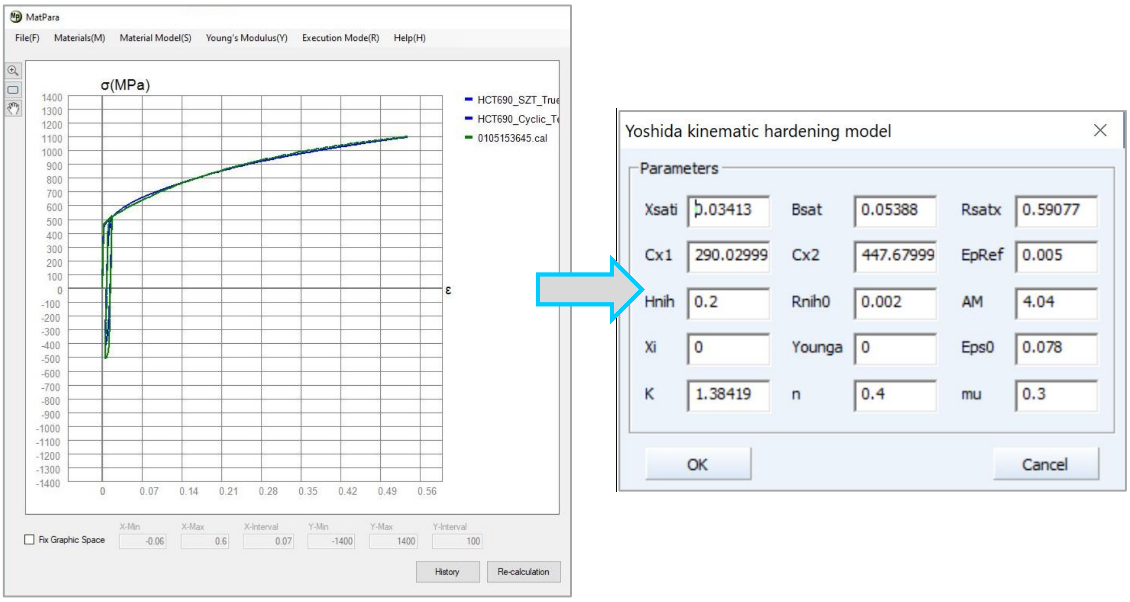


Obr. 3.57 Definice materiálového modelu Hill48 (vlevo), Vegter Lite (uprostřed) a Vegter Standard (vpravo) pro materiál HCT690

Na **Obr. 3.58** je zobrazena definice izotropního modelu zpevnění materiálu pomocí konstant *C*, *n* a φ_0 získaných z Krupkowského aproximace křivky zpevnění ze statické zkoušky tahem v referenčním směru 0°. Na **Obr. 3.59** je pak zobrazeno fittování dat v softwaru MatPara pro získání parametrů definujících kinematický Yoshida model.



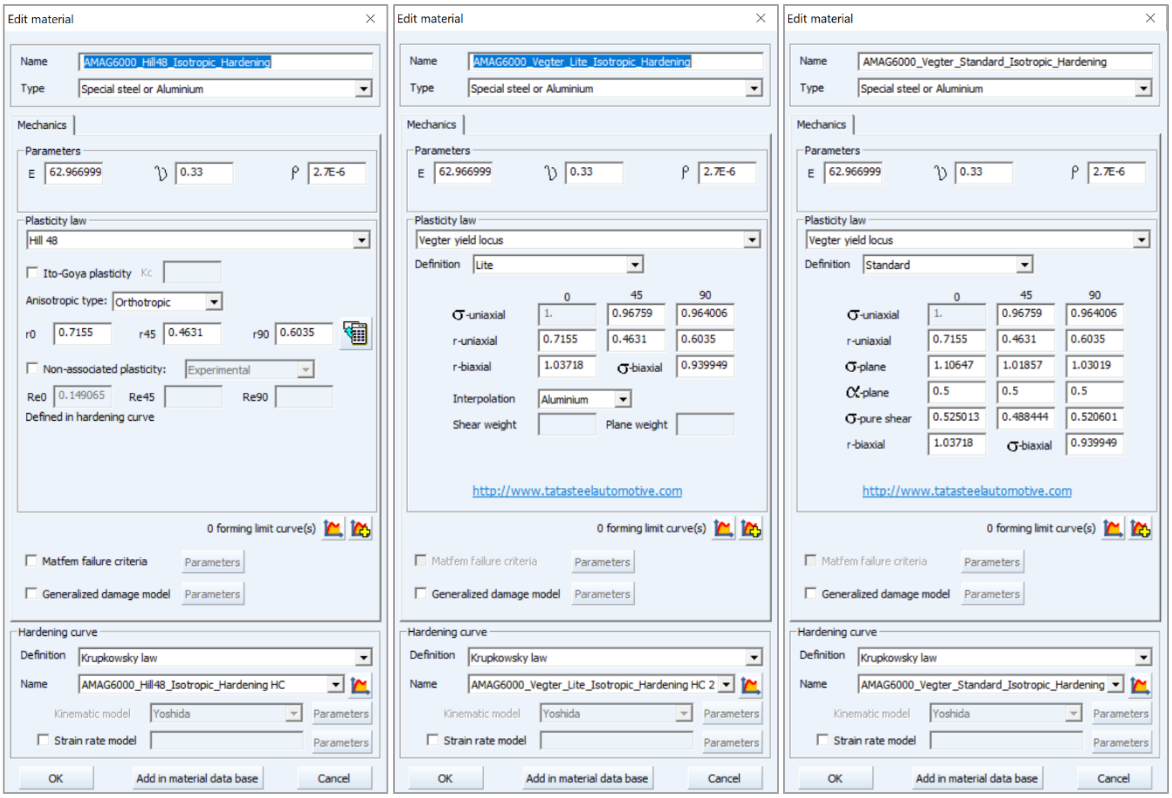
Obr. 3.58 Definice modelu izotropního zpevnění v softwaru PAM STAMP 2G pro materiál HCT690



Obr. 3.59 Fittování parametrů pro Yoshida model v softwaru MatPara pro materiál HCT690

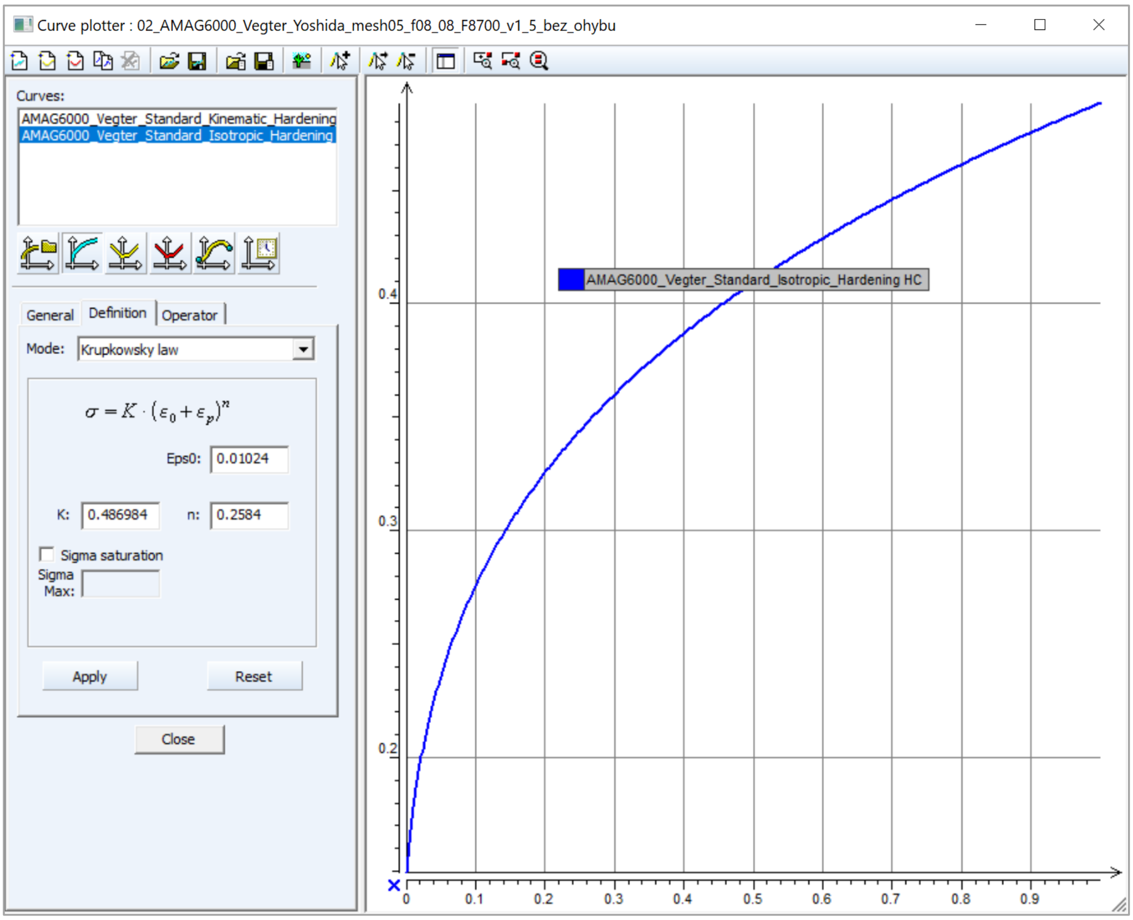
3.6.3 Slitina hliníku AMAG6000

Na **Obr. 3.60** je zobrazena definice materiálového výpočtového modelu Hill48 (vlevo), Vegter Lite (uprostřed) a Vegter Standard (vpravo). Jak již bylo popsáno výše, dochází zde k zadání základních vlastností materiálu, volbě výpočtového modelu a následně k zadání mechanických hodnot z jednotlivých materiálových testů.

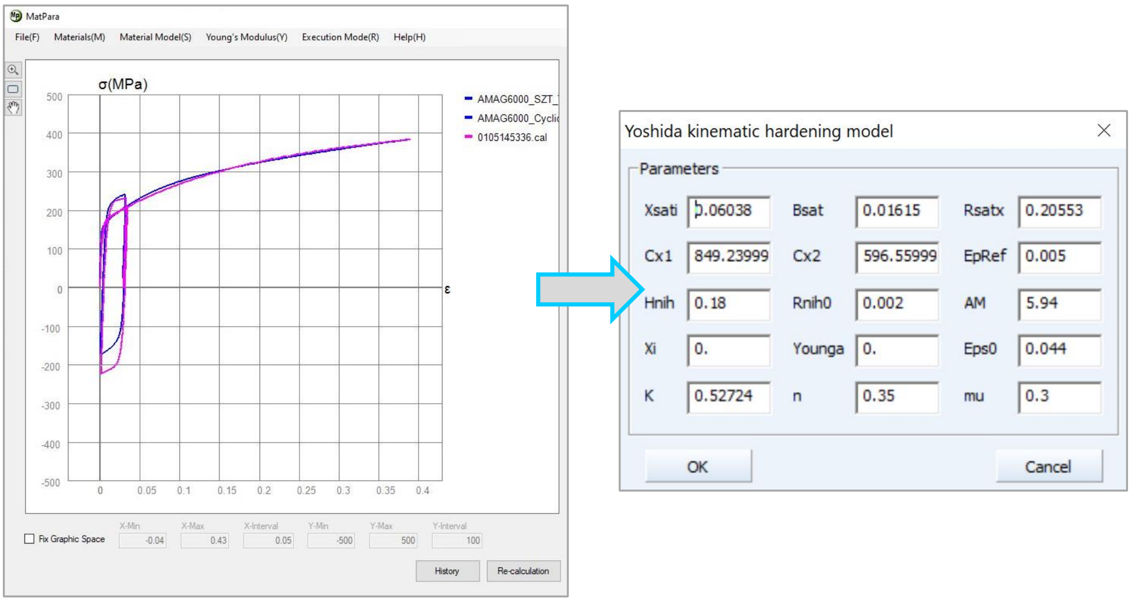


Obr. 3.60 Definice materiálového modelu Hill48 (vlevo), Vegter Lite (uprostřed) a Vegter Standard (vpravo) pro materiál AMAG6000

Na **Obr. 3.61** je zobrazena definice izotropního modelu zpevnění materiálu pomocí konstant *C*, *n* a φ_0 získaných z Krupkowského aproximace křivky zpevnění ze statické zkoušky tahem v referenčním směru 0°. Na **Obr. 3.62** je pak zobrazeno fittování dat v softwaru MatPara pro získání parametrů definujících kinematický Yoshida model.



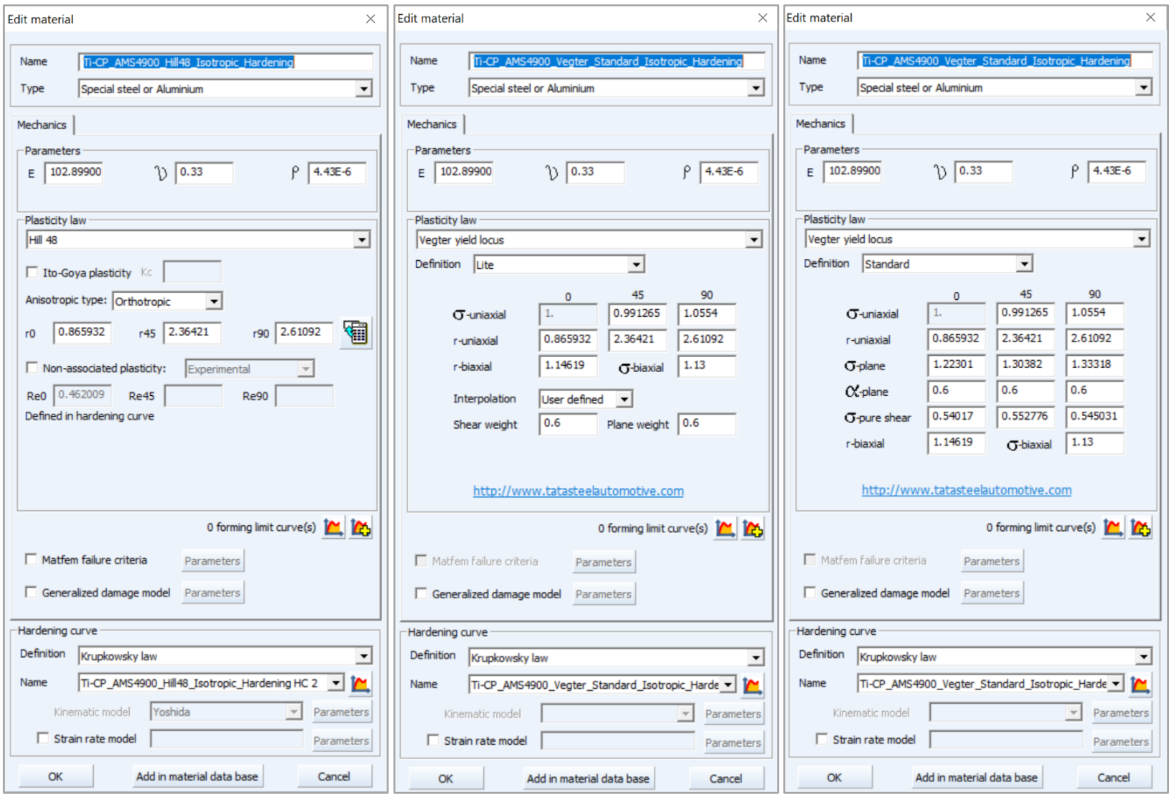
Obr. 3.61 Definice modelu izotropního zpevnění v softwaru PAM STAMP 2G pro materiál AMAG6000



Obr. 3.62 Fittování parametrů pro Yoshida model v softwaru MatPara pro materiál AMAG6000

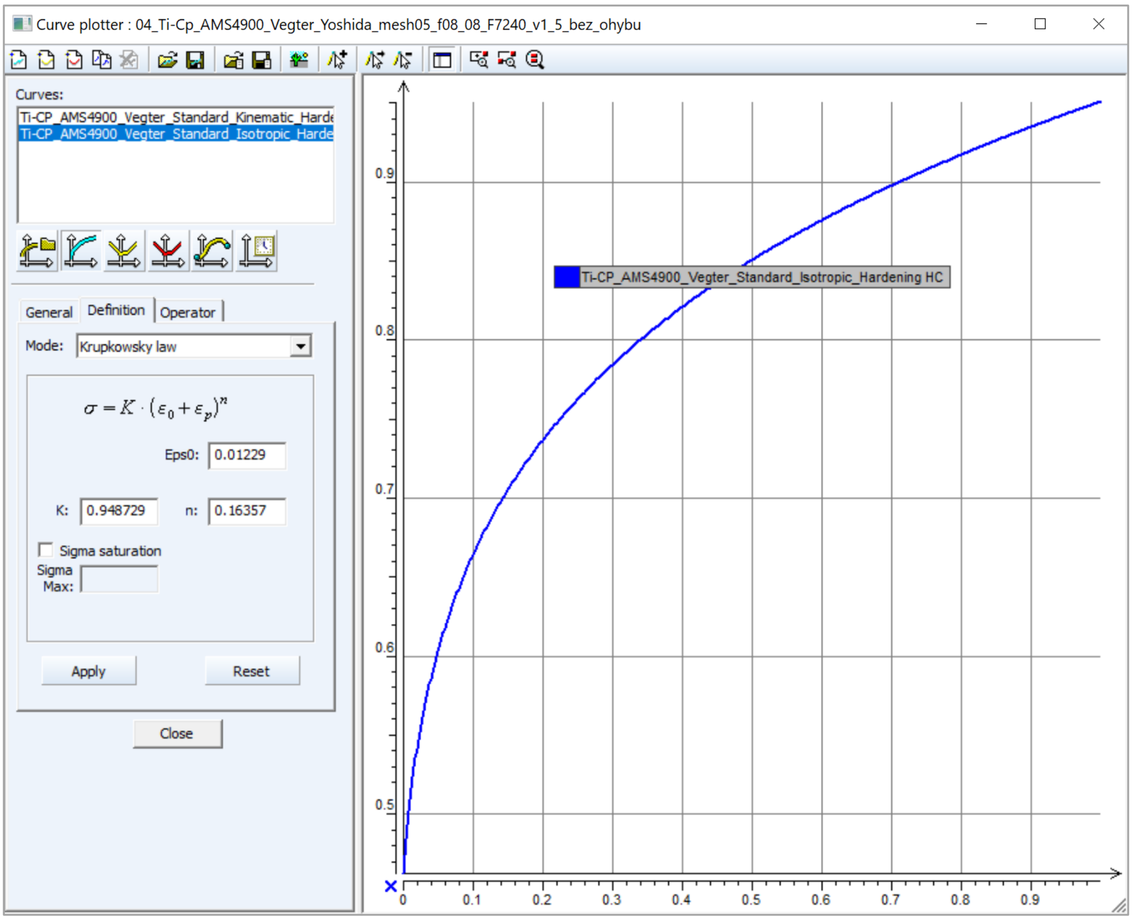
3.6.4 Slitina titanu Ti-CP AMS4900

Na **Obr. 3.63** je zobrazena definice materiálového výpočtového modelu Hill48 (vlevo), Vegter Lite (uprostřed) a Vegter Standard (vpravo). Jak již bylo popsáno výše, dochází zde k zadání základních vlastností materiálu, volbě výpočtového modelu a následně k zadání mechanických hodnot z jednotlivých materiálových testů.

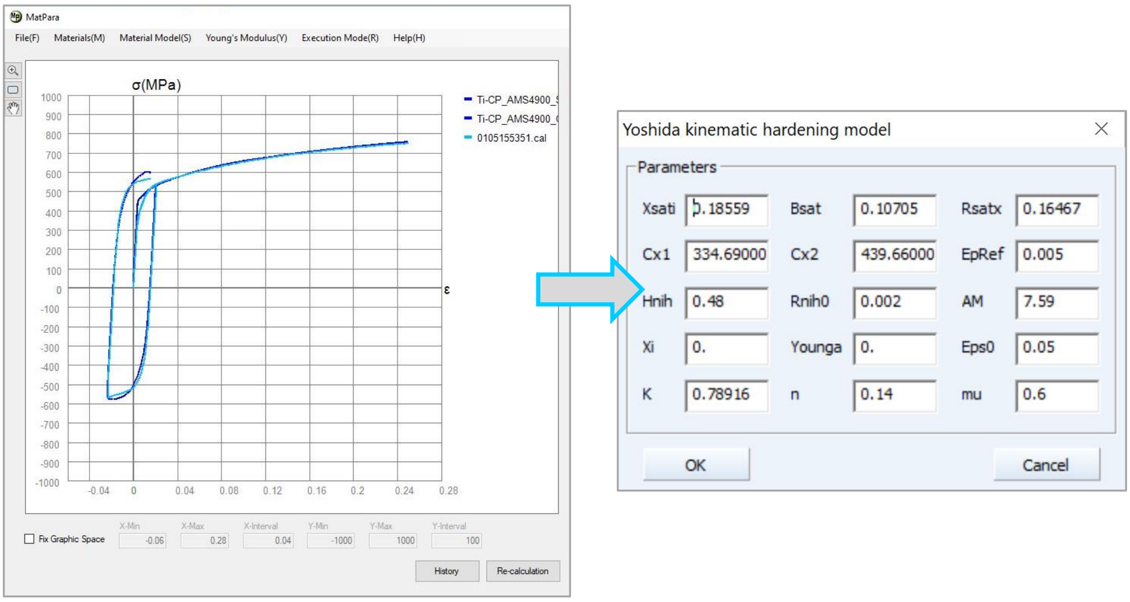


Obr. 3.63 Definice materiálového modelu Hill48 (vlevo), Vegter Lite (uprostřed) a Vegter Standard (vpravo) pro materiál Ti-CP AMS4900

Na **Obr. 3.65** je zobrazena definice izotropního modelu zpevnění materiálu pomocí konstant C, n a φ_0 získaných z Krupkowského aproximace křivky zpevnění ze statické zkoušky tahem v referenčním směru 0°. Na **Obr. 3.65** je pak zobrazeno fittování dat v softwaru MatPara pro získání parametrů definujících kinematický Yoshida model.



Obr. 3.64 Definice modelu izotropního zpevnění v softwaru PAM STAMP 2G pro materiál Ti-CP AMS4900



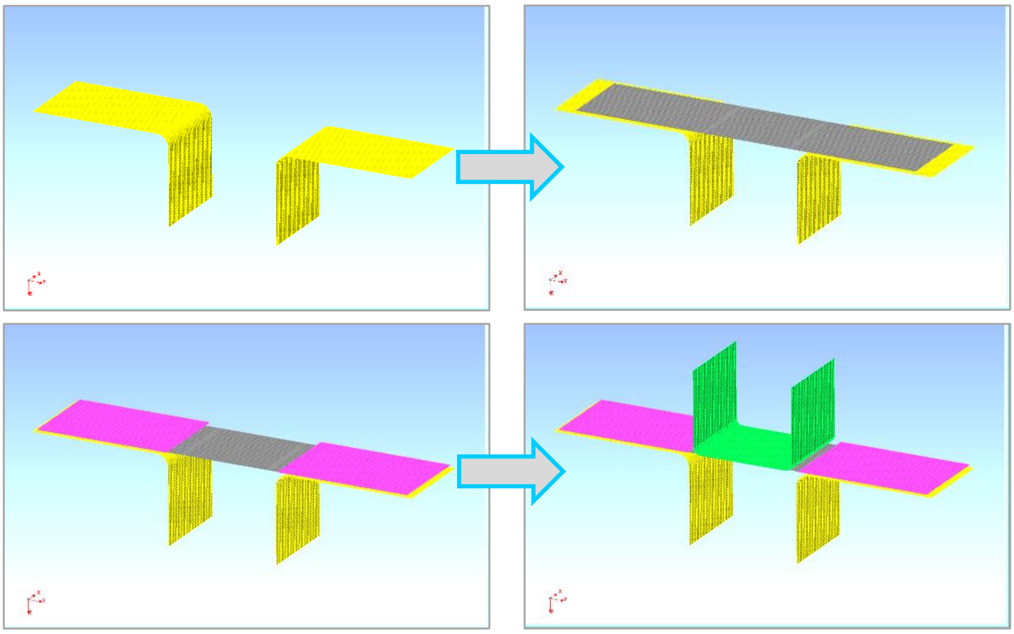
Obr. 3.65 Fittování parametrů pro Yoshida model v softwaru MatPara pro materiál Ti-CP AMS4900

3.7 NUMERICKÁ SIMULACE PROCESU PLOŠNÉHO TVÁŘENÍ

Pomocí numerické simulace v softwaru PAM STAMP 2G byl realizován proces plošného tváření odpovídající provedenému reálnému experimentu tváření (viz kapitola 3.4). Konkrétně se tedy jedná o technologii tažení plechu do tvaru „U“ a protahování pásu plechu přes tzv. brzdnou drážku.

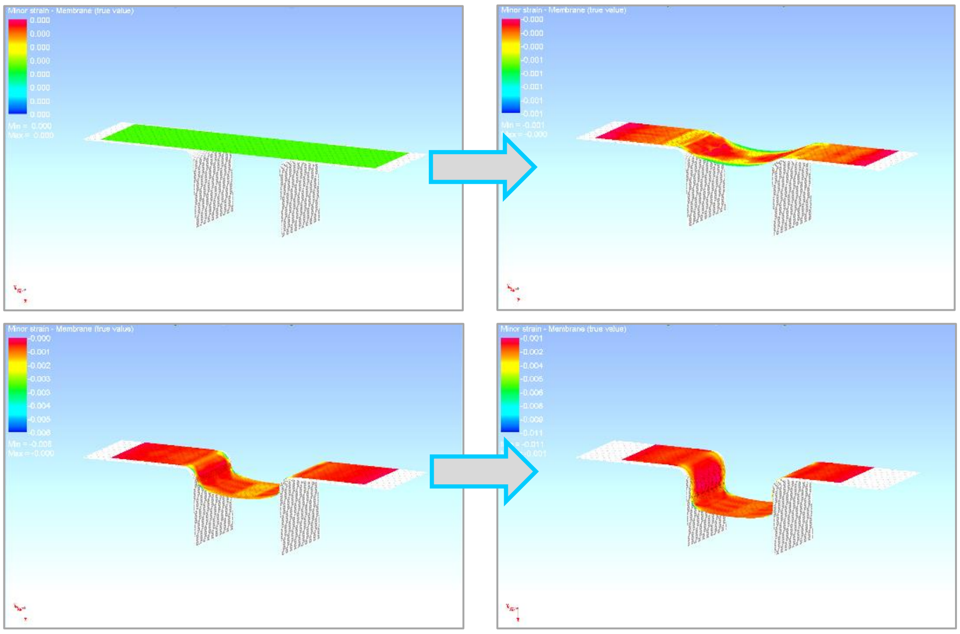
Pro nastavení numerické simulace těchto procesů tváření v prostředí simulačního softwaru PAM STAMP 2G je třeba jako první krok naimportovat jednotlivé funkční části nástroje realizující daný proces plošného tváření. V dalším kroku je třeba importovat, nebo přímo vytvořit pomocí „blank editoru“, daný přístřih plechu, který bude podrobený tvářecímu procesu. Jednotlivé funkční části nástroje a importovaný plech byly zhotoveny pomocí CAD softwaru CATIA V5. Všechny tyto části nástroje včetně tvářeného plechu svým tvarem a rozměry přesně odpovídají reálnému experimentu zhotovení výlisku.

Prvním simulovaným procesem bylo tažení plechu do tvaru „U“. Tento proces byl realizován jednoduchým nástrojem složeným z tažníku, tažnice a přidržovače, jak již bylo pospáno výše. Jednotlivé části tohoto nástroje bylo po importu do prostředí PS2G nutné nejprve nastavit do správné polohy, odpovídající reálnému procesu, dále pak zorientovat jejich normály a opatřit je sítí elementů sloužících pro budoucí MKP výpočet. Import jednotlivých částí nástroje a přístřihu plechu a jejich nastavená poloha je vidět na **Obr. 3.66**.

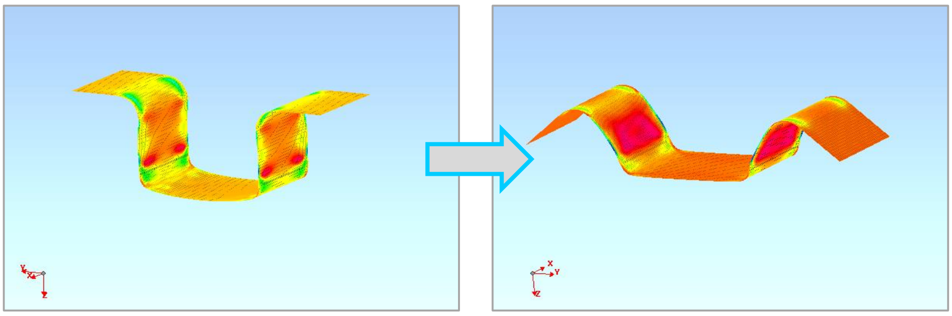


Obr. 3.66 Import nástrojů a plechu do prostředí softwaru PAM STAMP 2G

Po importu nástrojů, materiálu, nastavení jejich sítě a vzájemné pracovní polohy bylo nutné dále nastavit samotný tvářecí proces. Tzn. každé funkční části nástroje nastavit její chování vzhledem k průběhu procesu tváření a definovat podmínky ve vztahu s tvářeným materiálem. Konkrétně se jedná například o nastavení dráhy, rychlosti příp. zrychlení jednotlivých částí nástroje, nastavení vzájemného kontaktu nástroje a tvářeného materiálu ve formě tření, kontaktního tlaku, přesíťování elementů na tvářeném materiálu, apod. Po nastavení těchto a dalších parametrů numerické simulace byl proveden výpočet tvářecího procesu, který probíhal vždy s ohledem na nastavený materiálový model a model zpevnění materiálu během jeho deformace. Postupně byl takto simulován proces deformace materiálu ve formě tažení plechu (viz **Obr. 3.67**) a následně po uvolnění výlisku z nástroje vlivem elastické deformace také proces odpružení materiálu (viz **Obr. 3.68**).

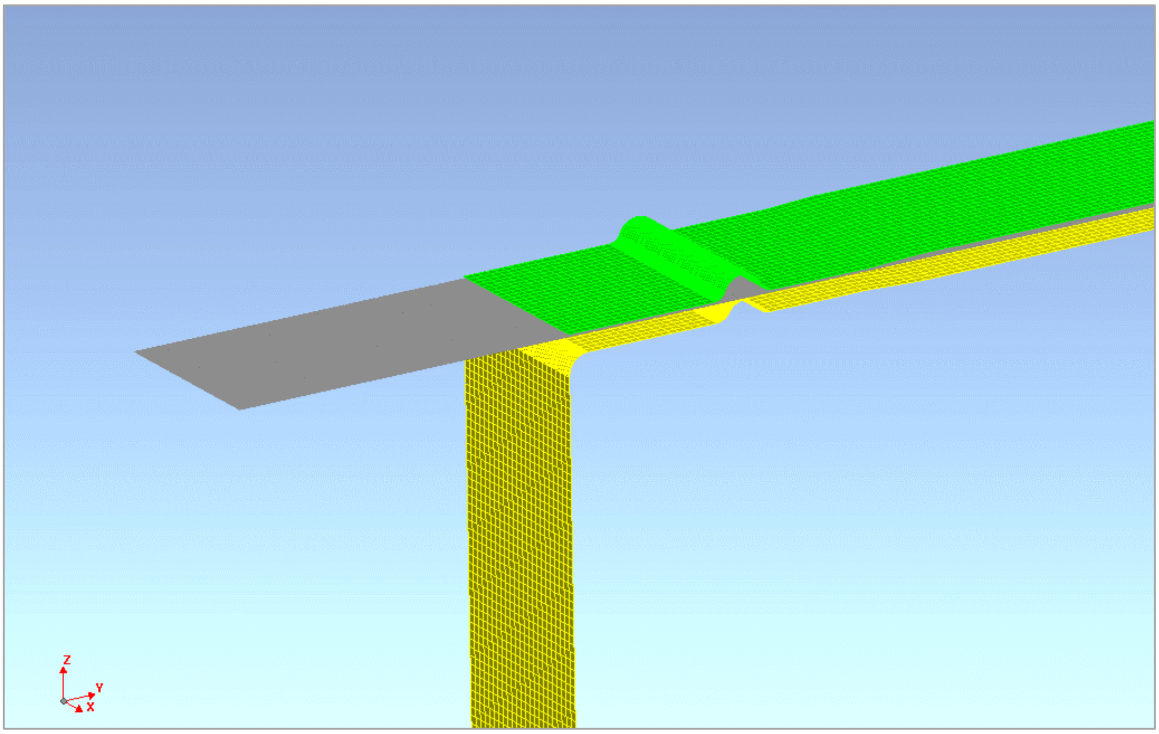


Obr. 3.67 Ilustrace průběhu tažení v numerické simulaci v prostředí softwaru PAM STAMP 2G



Obr. 3.68 Ilustrace odpružení výlisku v numerické simulaci v prostředí softwaru PAM STAMP 2G

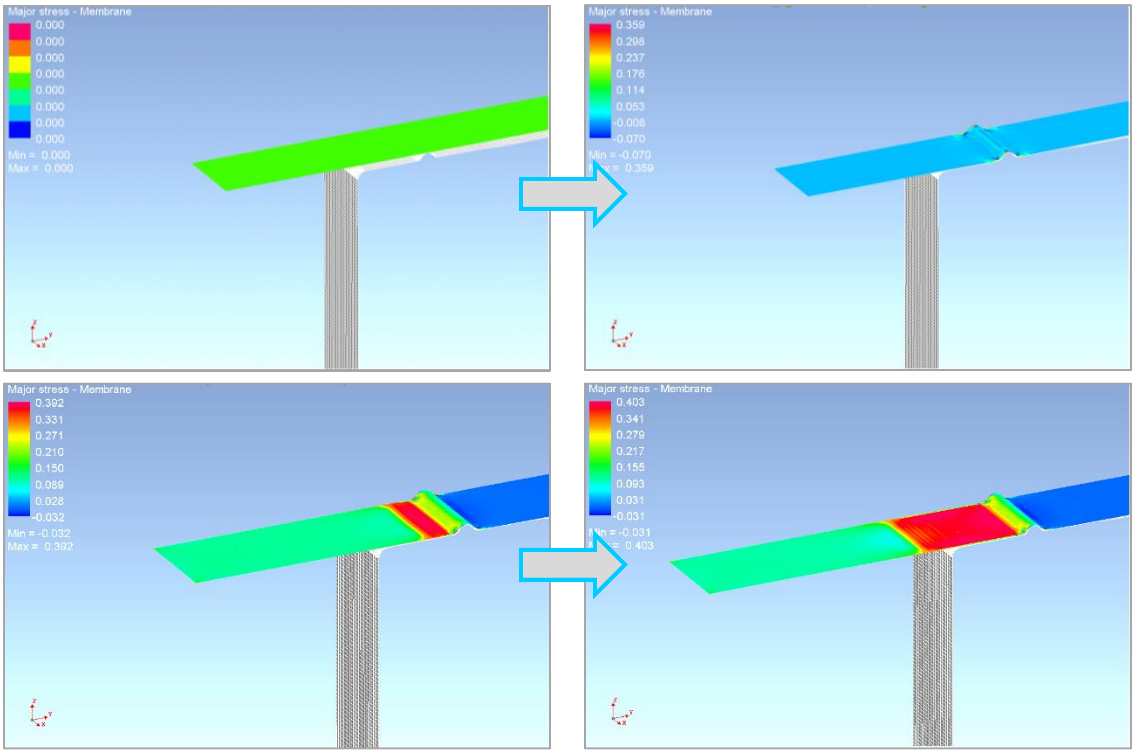
Druhým procesem, který byl simulován, bylo protahování pásu plechu přes „brzdnou drážku“. Tento proces probíhal na zařízení Sokol 400, jak již bylo popsáno výše. Na obrázku **Obr. 3.69** je pak opět zobrazen import jednotlivých částí nástroje a tvářeného pásu plechu v prostředí softwaru PAM STAMP 2G. Opět zde bylo nutné nejprve nastavit všechny části nástroje do správné polohy, zorientovat jejich normály a opatřit nástroj a tvářený materiál sítí elementů (Mesh) sloužících pro budoucí MKP (FEM) výpočet.



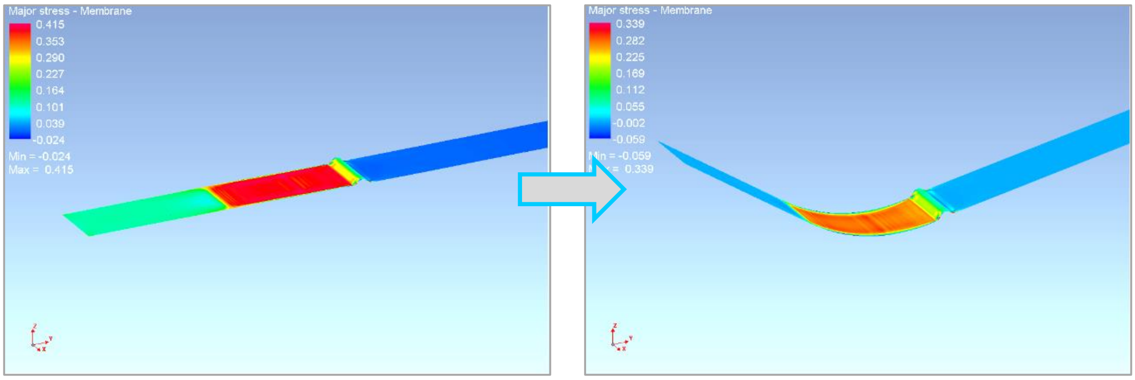
Obr. 3.69 Import nástrojů a plechu do prostředí softwaru PAM STAMP 2G

Obdobně jako u výše uvedeného prvního případu bylo dále nutné nastavit průběh a podmínky samotného tvářecího procesu. Tzn. opět každé funkční části nástroje nastavit její chování vzhledem k průběhu procesu tváření a definovat podmínky ve vztahu s tvářeným materiálem. Jednalo se tedy opět o nastavení kinematických veličin, procesních parametrů a dalších podmínek tvářecího procesu.

Po nastavení procesu a všech potřebných parametrů následoval opět samotný výpočet numerické simulace, který probíhal obdobně jako v první výše popsané variantě s ohledem na zvolený materiálový model a model zpevnění materiálu během deformace. Postupně byl takto simulován proces deformace materiálu, kde došlo nejprve k zavření nástroje, následovalo protahování pásu plechu přes brzdnou drážku (viz **Obr. 3.70**) a nakonec došlo opět k simulaci odpružení materiálu (viz **Obr. 3.71**).



Obr. 3.70 Ilustrace průběhu protahování v numerické simulaci v prostředí softwaru PAM STAMP 2G



Obr. 3.71 Ilustrace odpružení výlisku v numerické simulaci v prostředí softwaru PAM STAMP 2G

4 DISKUZE VÝSLEDKŮ

V následujících kapitolách jsou obecně hodnoceny vlivy materiálových výpočtových modelů a dalších parametrů numerické simulace na výpočet procesu tváření a následného odpružení materiálu. Dále jsou zde popsané a porovnané jednotlivé výsledky numerických simulací a reálného experimentu ve formě výlisku z plechu vždy s ohledem na zvolený typ materiálu a volbu materiálového výpočtového modelu včetně volby modelu zpevňování materiálu během deformace.

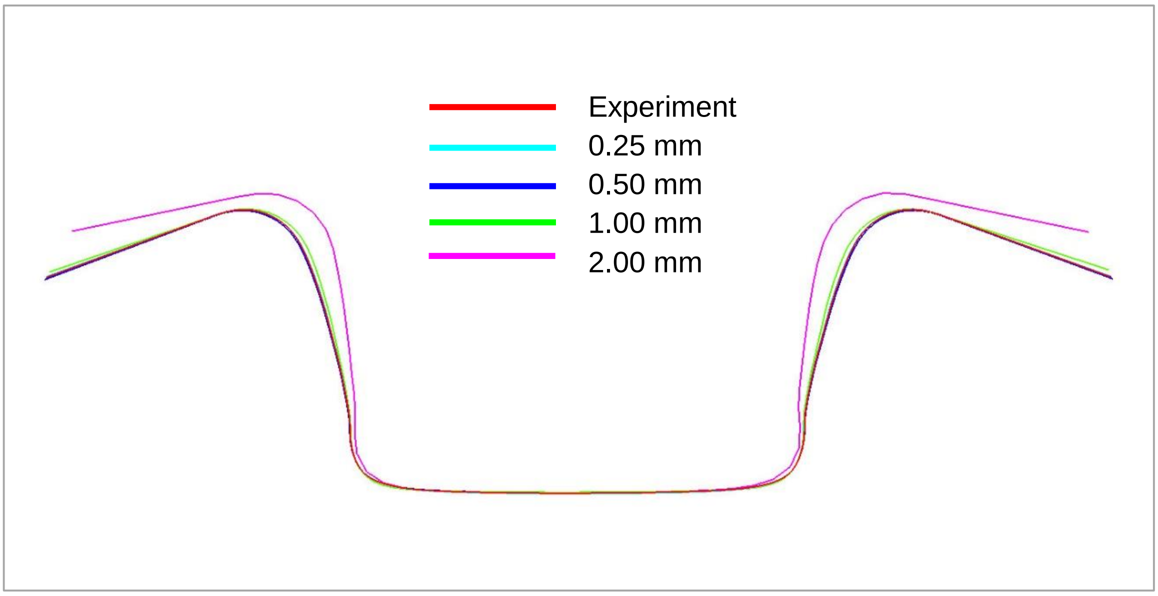
4.1 HODNOCENÍ VLIVU PROCESNÍCH A TECHNOLOGICKÝCH PARAMETRŮ V NUMERICKÉ SIMULACI NA VÝPOČET DEFORMACE A NÁSLEDNÉHO ODPRUŽENÍ MATERIÁLU

Jedním ze základních parametrů procesu výpočtu numerické simulace ji jistě volba velikosti elementů a nastavení jejich síťování. Obecně platí, že velikost elementu významně ovlivňuje přesnost výpočtu numerické simulace. S jemnější sítí elementů se obecně dostávají lepší a přesnější výsledky deformace a následného odpružení materiálu, nicméně se snižující se velikostí elementů se také výrazně prodlužuje výpočetní čas a roste celková hardwarová náročnost výpočtu. S ohledem na tyto aspekty je vhodné volit jistý kompromis mezi velikostí sítě elementů, výslednou přesností výpočtu a dostupnou hardwarovou podporou. Velikost sítě elementů musí být vždy volena s ohledem na daný proces tváření a musí co možná nejpřesněji popisovat a respektovat tvarovou koncepci na straně tvářecích nástrojů a s dostatečnou přesností popisovat proces deformace a následného odpružení na straně tvářeného materiálu.

V případě zvolených simulovaných procesů tažení plechu do tvaru „U“ a protahování plechu přes brzdnou drážku byl nástroj síťován 2 mm sítí na rovných plochách a v tvarových plochách došlo k přesíťování. To je nastaveno pomocí rozdílného úhlu odklonu normál jednotlivých elementů, kdy v případě překročení stanoveného úhlu dochází ke zjemnění sítě elementů ve stanoveném rozsahu. V případě zvolených procesů byl úhel odklonu normál nastaven na 3°, což reálně znamená např. popsání 90° rádiusu pomocí 30 elementů s odklonem 3°. Tato hodnota byla volena tak, aby byla dostatečně popsána tvarová koncepce nástroje a zachován hladký spojitý přechod tvarových ploch.

Co se týká velikosti sítě elementů na tvářeném materiálu, byla testována velikost sítě 0.25, 0.5, 1 a 2mm, kde na **Obr. 4.1** níže je možné pozorovat vliv velikosti této sítě elementů na proces deformace a následného odpružení materiálu v porovnání s reálným výliskem.

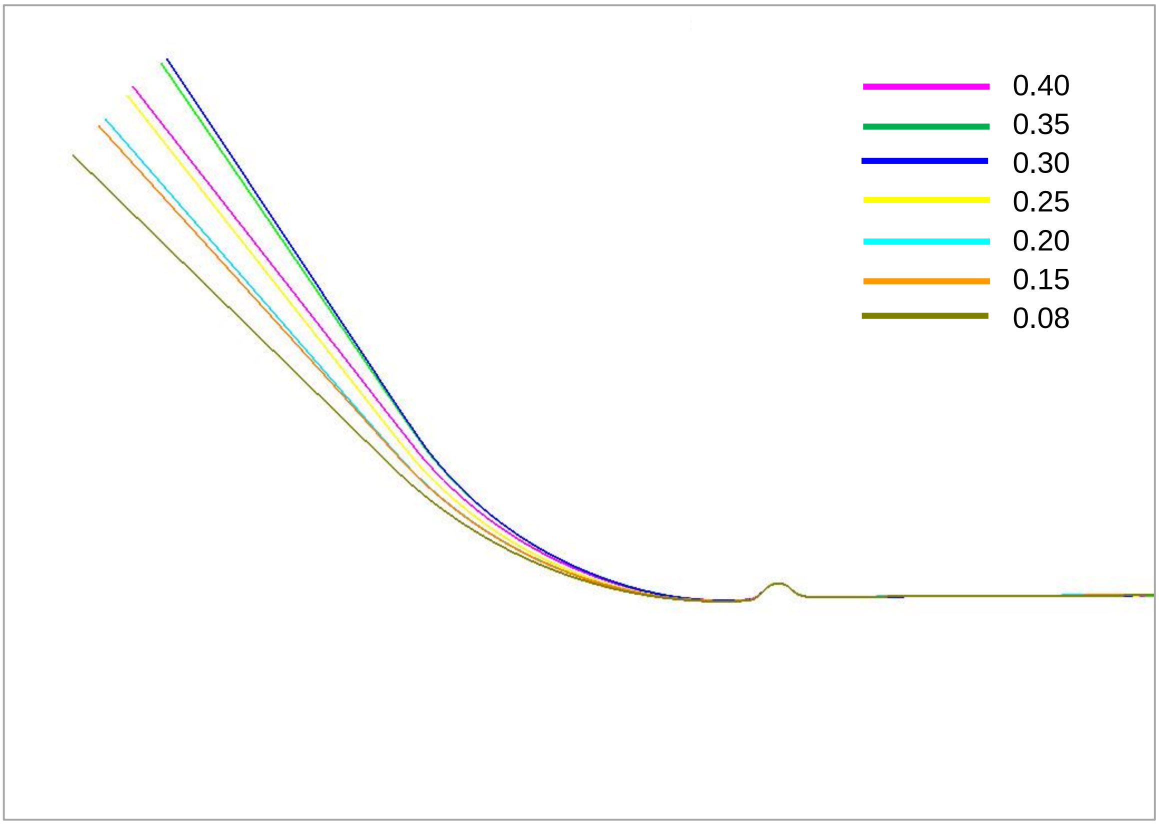
S ohledem na tento test byla pro jednotlivé výpočty numerických simulací zvolena velikost sítě 0.5 mm, která dostatečně zohledňuje tvarovou koncepci nástroje a velmi přesně popisuje průběh deformace a následného odpružení materiálu, používat jemnější síťování než 0.5 mm již nepřináší žádné benefity. V případě požadavku urychlení výpočetního času je pro běžné úlohy tváření možné s dostačující přesností používat síť 1 mm. Při mírném poklesu přesnosti je možné využít možnosti hrubší sítě s dodatečným přesíťováním elementů v průběhu deformace, které je řízeno obdobně jako u síťování nástroje pomocí nastavené odchylky odklonu normál pro jednotlivé elementy. Toto nastavení výrazně šetří výpočetní časy a snižuje hardwarovou náročnost výpočtu.



Obr. 4.1 Porovnání výpočtu deformace a následného odpružení pro různé velikosti elementů sítě

Dalším prvkem, který výrazně ovlivňuje výpočet deformace a následného odpružení materiálu a tím přesnost jednotlivých výsledků numerické simulace je popis tření mezi tvářeným materiálem a jednotlivými funkčními části tvářecího nástroje. Tento faktor do prostředí numerické simulace vstupuje ve formě koeficientu smykového tření, který by měl být definovaný jednotlivě pro každý kontakt nástroje a tvářeného materiálu.

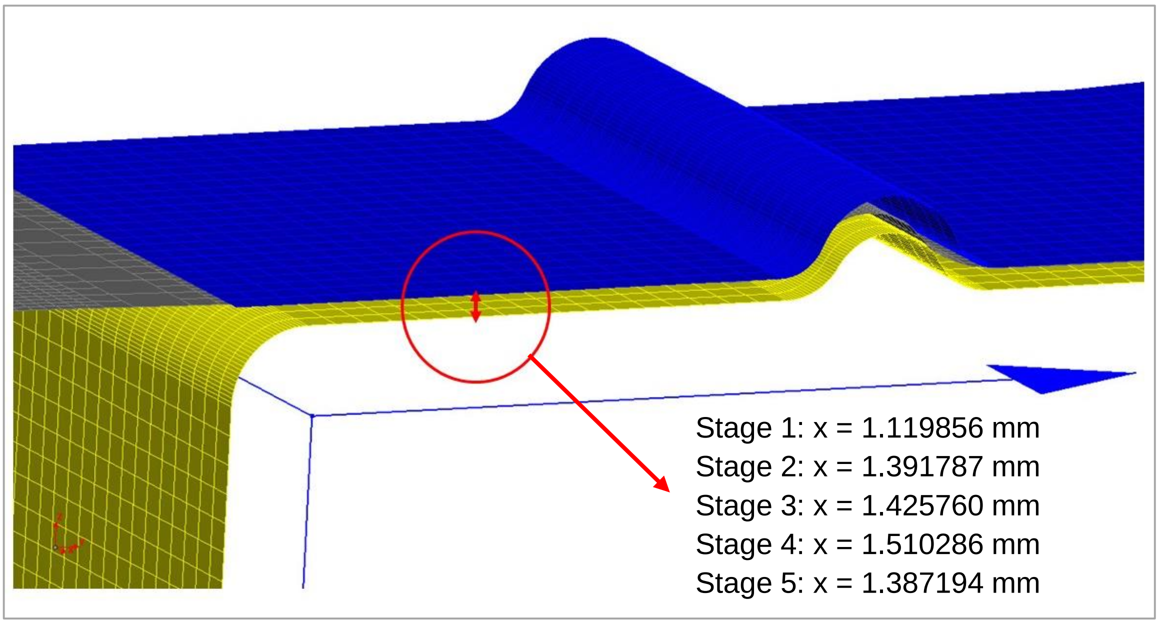
V prostředí numerické simulace proběhlo testování procesu protahování pásu plechu přes brzdnou drážku pro různé hodnoty koeficientu smykového tření pomocí modelu Vegter Standard. Je zajímavé pozorovat, že prostřednictvím početního testování je možné najít hodnoty koeficientu smykového tření, které zvětšují či naopak zmenšují výsledné odpružení materiálu a ovlivňují tak výpočet procesu numerické simulace tváření. Na **Obr. 4.2** je možné sledovat ilustraci vlivu hodnoty koeficientu smykového na výslednou deformaci a odpružení materiálu v numerické simulaci. Byly testovány koeficienty odpovídající fosfátovanému povrchu (cca 0.08) až po hodnoty odpovídající zadírajícímu se materiálu (cca 0.4) Pro testované hodnoty koeficientu smykového tření je zde možné pozorovat poměrně značné rozdíly ve výsledném odpružení materiálu, tzn. je velmi důležité tento parametr definovat přesně a v ideálním případě s ohledem na znalost jeho skutečné hodnoty, kterou je možné stanovit experimentálně pomocí tribologického testování materiálu. Pro výpočty numerických simulací pro vybrané materiály byly koeficienty smykového tření voleny s ohledem na v minulosti probíhající výzkum a testování těchto materiálů v rámci katedry strojírenské technologie. Pro dvoufázovou ocel DP500 byl zvolen koeficient 0.12, pro materiál HCT690 koeficient 0.16, pro slitinu hliníku AW6081 koeficient 0.2 a pro slitinu titanu Ti-CP AMS4900 pak 0.18.



Obr. 4.2 Ilustrace vlivu koeficientu smykového tření na proces numerické simulace protahování pásu plechu přes brzdnou drážku a následné odpružení materiálu

Dalším parametrem ovlivňujícím výpočet numerické simulace je nastavení vzájemné polohy jednotlivých funkčních částí nástroje realizujících deformaci a tvářeného materiálu. Pro validní výsledky musí tato poloha odpovídat procesu zhotovení reálného výlisku, který je porovnáván s numerickou simulací. Tuto polohu je možné řídit pomocí definovaného silového působení jednotlivých částí nástroje nebo prostřednictvím pevně definované mezery mezi těmito částmi nástroje.

Řízení polohy nástroje prostřednictvím silového působení se ukázalo jako nevýhodné, neboť dochází během výpočtu procesu deformace ke kmitání pohyblivé části nástroje, která je právě řízena silou. Tím je do jisté míry ovlivňován kontakt nástroje a deformovaného materiálu během deformace a s ohledem na hustotu sítě a rychlost deformace je do výpočtu vnášena určitá nepřesnost. Ukázka tohoto „kmitání" je při jednotlivých stádiích výpočtu ilustrována na obrázku **Obr. 4.3**, kde při kontrolním výpočtu pro pevnostní materál HCT690 přesahovala odchylka měřené mezery mezi funkčními částmi nástroje na jednotlivých „Stage" výpočtu i více než 0.1 mm.

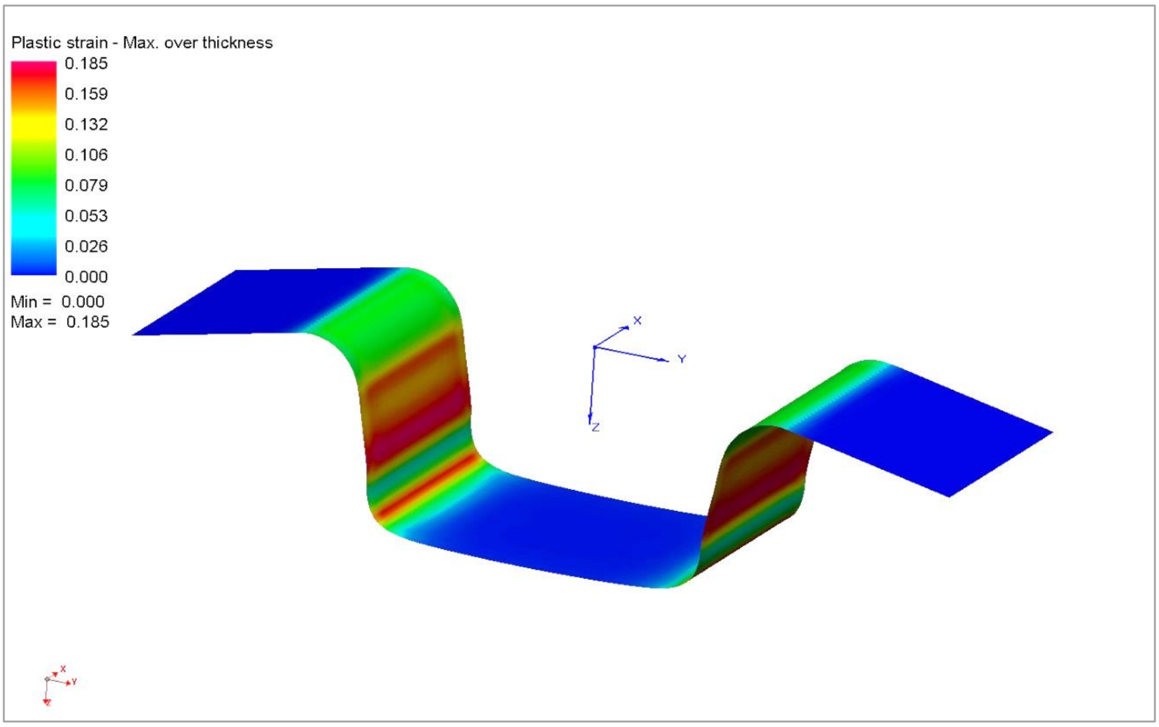


Obr. 4.3 Ilustrace kmitání nástroje při procesu numerické simulace protahování pásu plechu přes brzdnou drážku

V případě řízení polohy pomocí pevně nastavené mezery mezi funkčními částmi nástroje odpovídající reálnému procesu (v praxi je to například řízení pomocí zdvihu nástroje) nebyl v numerických simulacích jev „kmitání" pozorován, tudíž byly všechny následující výpočty realizovány ve variantě s nastavením pevné polohy nebo řízeným zdvihem jednotlivých funkčních částí nástroje. Pro testování byla mezera mezi funkčními částmi nástroje stanovena na 1.2 násobku tloušťky tvářeného materiálu.

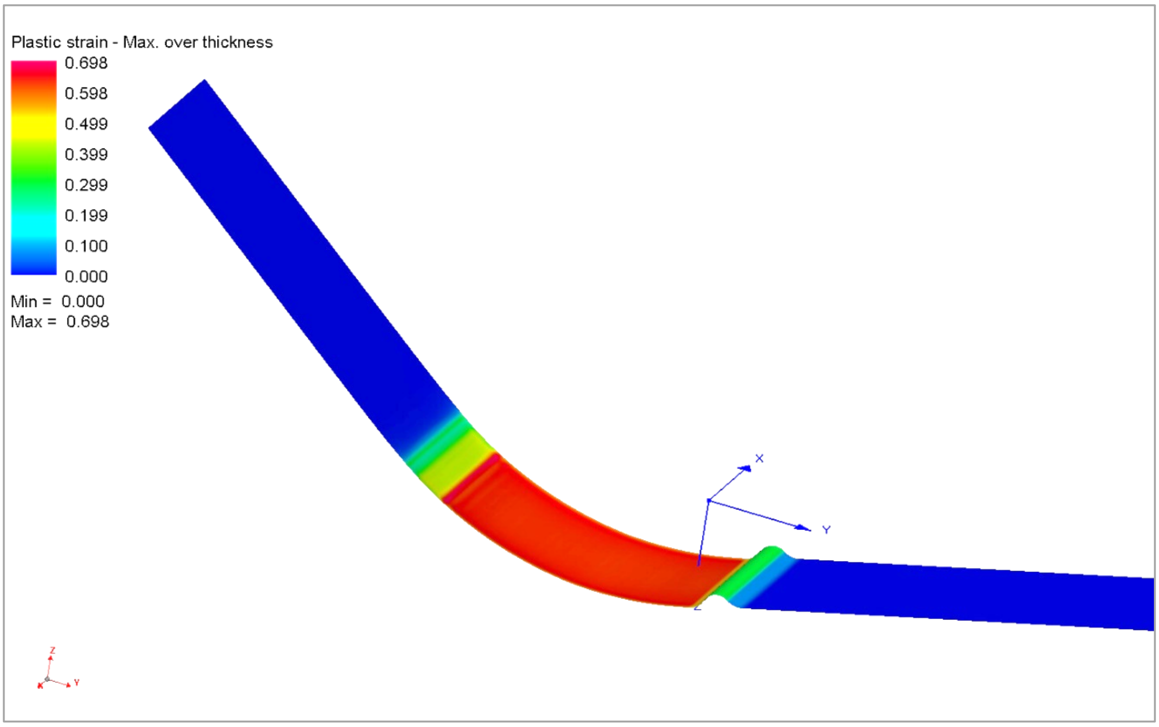
4.2 HODNOCENÍ VLIVU TVÁŘECÍHO PROCESU V NUMERICKÉ SIMULACI NA VÝPOČET DEFORMACE A NÁSLEDNÉHO ODPRUŽENÍ MATERIÁLU

Pomocí výpočtu numerické simulace byl nejprve simulován proces tažení plechu do tvaru „U“. Tento proces byl zvolen jako jednoduchý snadno realizovatelný experiment, kde nedochází k příliš velké deformaci, nicméně projevuje se zde poměrně výrazný jev odpružení materiálu, a výsledky numerické simulace budou v dalších kapitolách porovnávány s výsledky reálného experimentu. Na **Obr. 4.4** je k vidění ilustrační výpočet numerické simulace tohoto procesu pro materiál HCT690, kde je zobrazeno rozložení deformace ve výlisku. Na obrázku je vidět, že zde nedochází k nijak extrémnímu přetvoření materiálu a přesto je jev odpružení poměrně výrazný. Deformace je zde rozložena poměrně nehomogenně a její maxima jsou lokalizována pouze v určitých oblastech výlisku.



Obr. 4.4 Ilustrace rozložení deformace při tažení plechu do tvaru „U“

Druhým procesem, který byl simulován v prostředí softwaru PAM STAMP 2G, bylo protahování plechu přes brzdnou drážku. Tento proces byl zvolen s očekáváním velkého komplexní přetvoření, které je dáno průchodem materiálu přes brzdnou drážku, kde dochází v průběhu procesu deformace k několikanásobné změně stavu napjatosti materiálu a tím je zde očekáváno značné projevení se Bauschingerova efektu. V tomto procesu se vyskytuje velmi výrazný jev odpružení materiálu, který bude v následujících kapitolách opět porovnáván s výsledky reálného experimentu. Na **Obr. 4.5** je pak zobrazeno rozložení deformace ve výlisku pro materiál HCT690, kde je na první pohled vidět, že v případě tohoto procesu dochází v oblasti výlisku, která prošla procesem deformace, k velkému a poměrně komplexnímu přetvoření. Na obrázku níže je možné vidět, že je zde dosaženo téměř čtyřnásobné deformace materiálu oproti předešlému procesu tažení plechu do tvaru „U“.

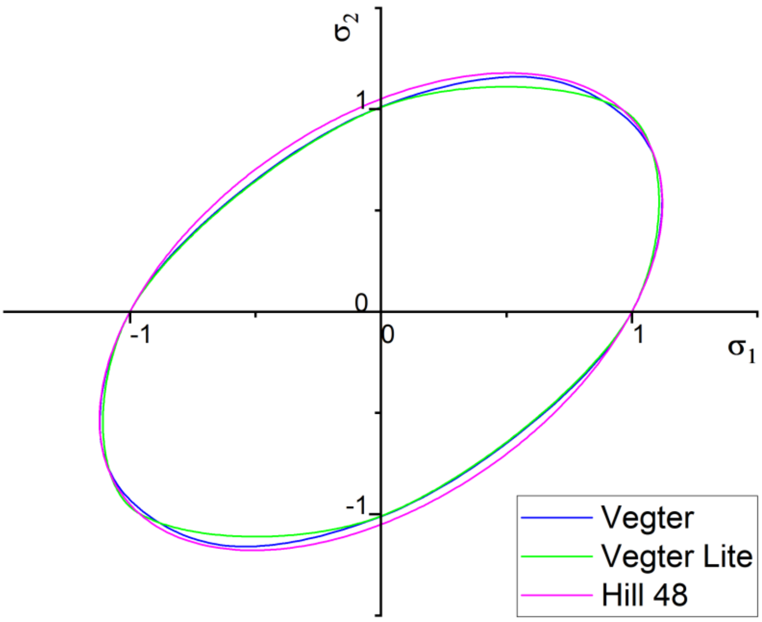


Obr. 4.5 Ilustrace rozložení deformace při protahování plechu přes brzdnou drážku

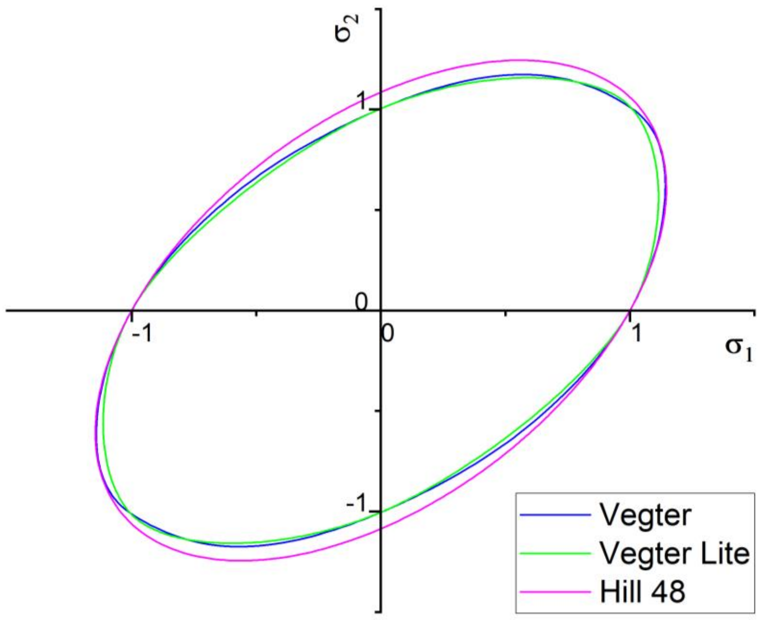
4.3 POROVNÁNÍ POUŽITÝCH MATERIÁLOVÝCH MODELŮ NUMERICKÉ SIMULACE DEFORMACE A NÁSLEDNÉHO ODPRUŽENÍ MATERIÁLU

S ohledem na provedené materiálové testování bylo provedeno porovnání výsledků jednotlivých vybraných materiálových modelů použitých v numerické simulaci pro výpočet procesu deformace a následného odpružení materiálu. Jsou zde porovnány materiálové výpočtové modely Hill48, Vegter Lite a Vegter Standard, které definují tzv. hranici plasticity pomocí jednotlivých materiálových parametrů (viz kapitola 3.5 a 3.6), určujících pozici jednotlivých řídících bodů elipsy reprezentující podmínku plasticity v rovině σ_1 a σ_2.

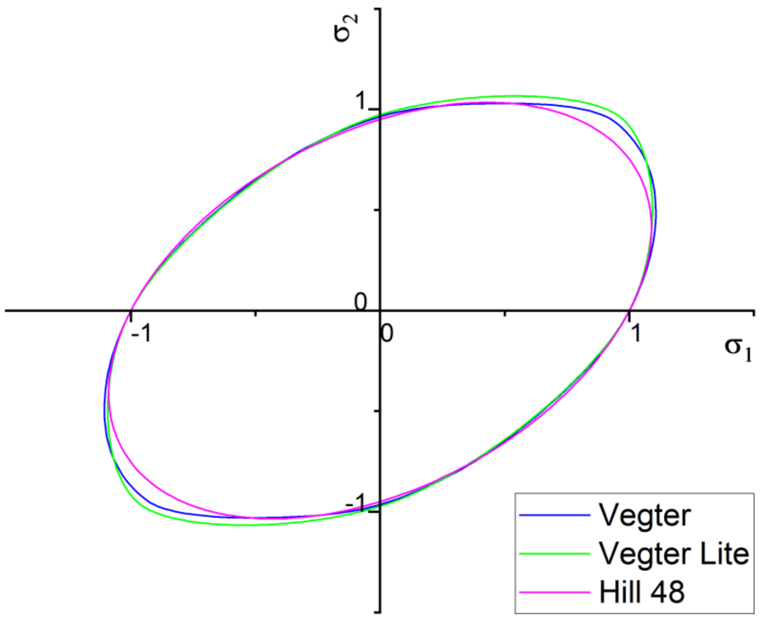
Při porovnání těchto výpočtových modelů je možné pozorovat odchylky polohy hranice podmínky plasticity vybraných materiálových modelů. Tato poloha hranice podmínky plasticity je řízena prostřednictvím jednotlivých materiálových testů při definovaném způsobu zatěžování a přímo ovlivňuje podíl elastické deformace v tvářeném materiálu a tím i velikost odpružení. Diference mezi jednotlivými materiálovými výpočtovými modely a jejich hranicemi plasticity v rovině hlavních napětí σ_1 a σ_2 jsou pro vybrané materiály k vidění na **Obr. 4.6** až **Obr. 4.9**. Zde je možné pozorovat vliv jednotlivých řídících bodů (materiálových testů – popsáno v kapitole 2.4) na tvar a velikost podmínky plasticity.



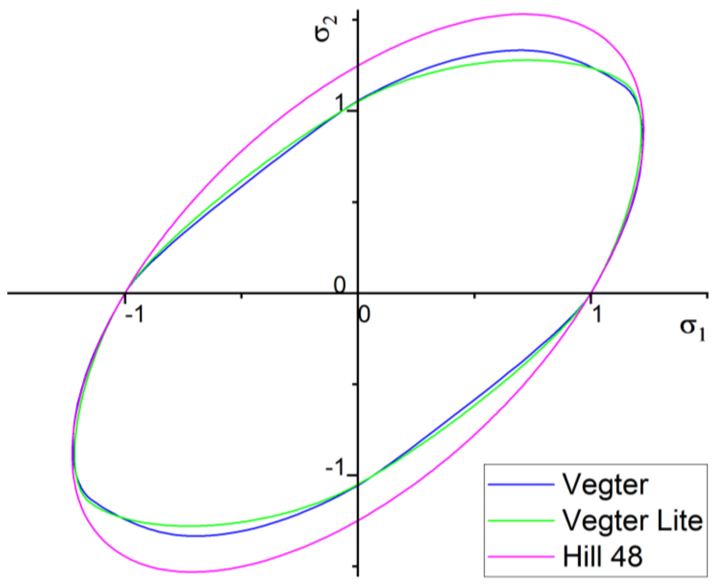
Obr. 4.6 Porovnání vybraných materiálových modelů reprezentujících podmínku plasticity v rovině σ_1 a σ_2 pro materiál DP500



Obr. 4.7 Porovnání vybraných materiálových modelů reprezentujících podmínku plasticity v rovině σ_1 a σ_2 pro materiál HCT690

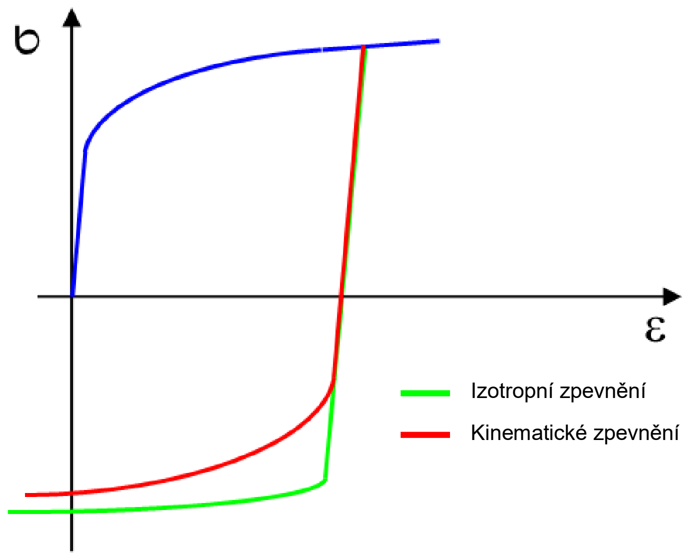


Obr. 4.8 Porovnání vybraných materiálových modelů reprezentujících podmínku plasticity v rovině σ_1 a σ_2 pro materiál AMAG6000



Obr. 4.9 Porovnání vybraných materiálových modelů reprezentujících podmínku plasticity v rovině σ_1 a σ_2 pro materiál Ti-CP AMS4900

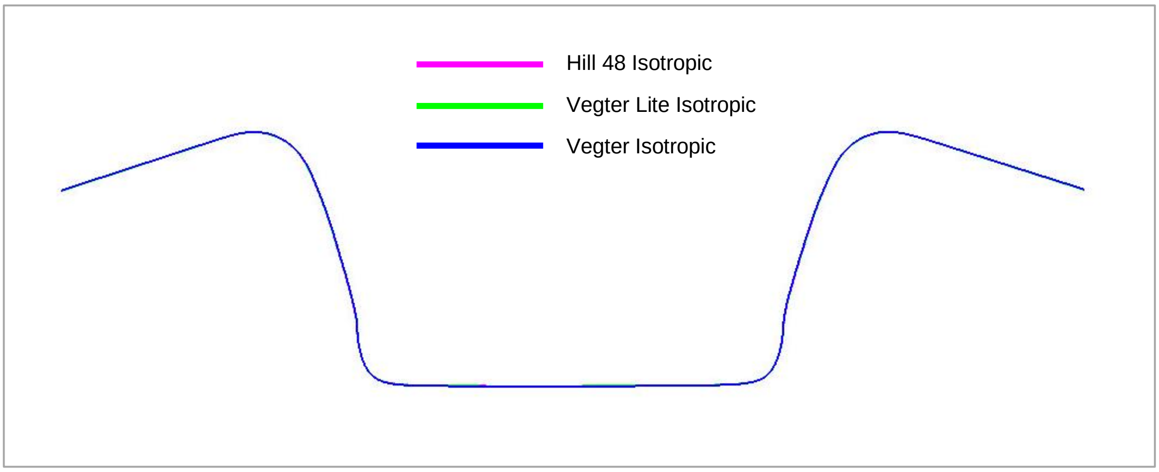
Dalším prvkem, který významně ovlivňuje výpočet odpružení materiálu v numerické simulaci je model zpevňování materiálu během jeho deformace. Jedná se buď o model izotropního, nebo kinematického zpevnění materiálu během deformace, tzv. Yoshida model, který zohledňuje vliv Bauschingerova efektu. Ilustrace vlivu modelu izotropního a kinematického zpevňování materiálu je zobrazena níže na **Obr. 4.10**. Výsledky rozdílů izotropního a kinematického zpevnění na výsledné odpružení materiálu jsou pro vybrané materiály hodnoceny v následující kapitole 4.4.



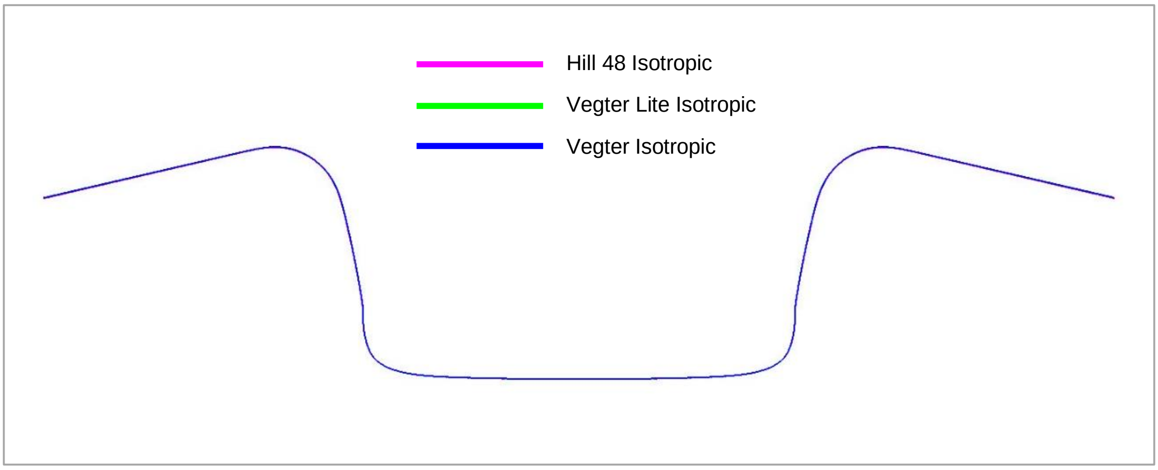
Obr. 4.10 Ilustrace izotropního a kinematického zpevnění materiálu

4.4 POROVNÁNÍ VÝSLEDKŮ NUMERICKÉ SIMULACE LISOVÁNÍ S REÁLNÝM PROCESEM ZHOTOVENÍ VÝLISKU

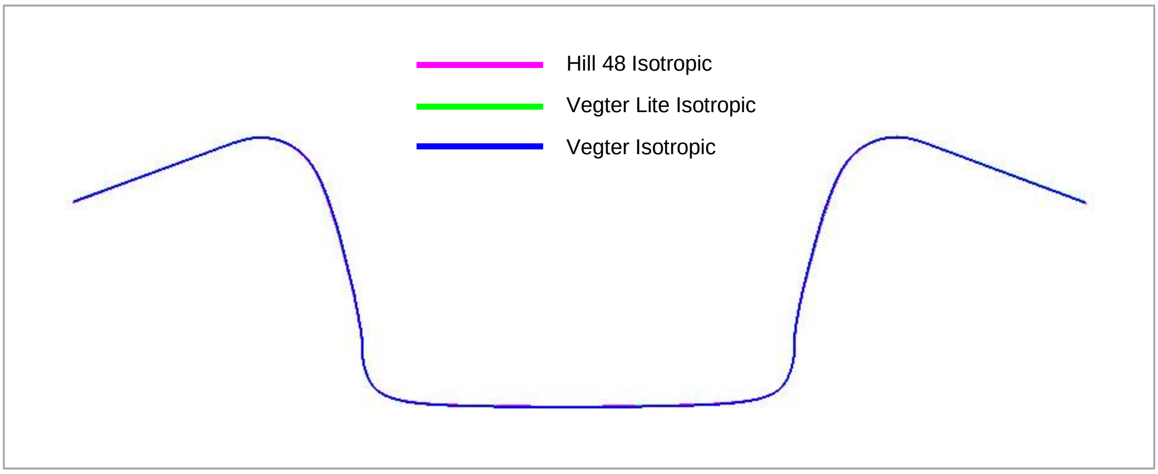
V případě výpočtu numerické simulace pro proces tažení plechu do tvaru „U“, je na obrázcích **Obr. 4.11** až **Obr. 4.14**. zobrazeno porovnání výsledné kontury plechu získané prostřednictvím výpočtu numerické simulace v softwaru PAM STAMP 2G pro jednotlivé materiálové modely. Je zde vidět porovnání materiálového výpočtového modelu Hill48 s izotropním zpevněním materiálu (magenta), Vegter Lite s izotropním zpevněním materiálu (zelená barva) a Vegter Standard s izotropním zpevněním materiálu (modrá barva). V tomto porovnání není možné pozorovat prakticky žádné odchylky mezi jednotlivými modely.



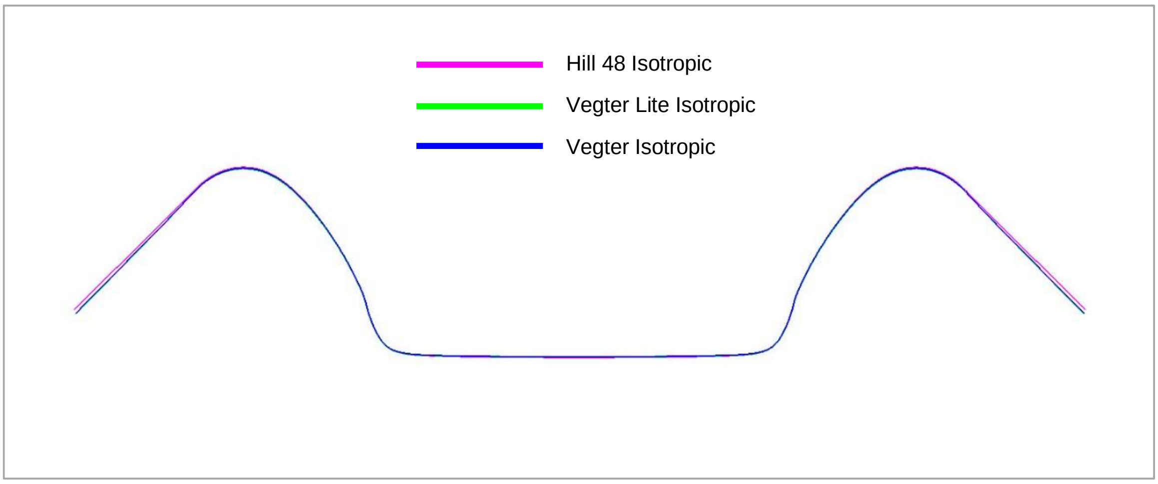
Obr. 4.11 Porovnání výsledné kontury získané pomocí numerické simulace modelu Hill48, Vegter Lite a Vegter Standard s izotropním zpevněním pro materiál DP500



Obr. 4.12 Porovnání výsledné kontury získané pomocí numerické simulace modelu Hill48, Vegter Lite a Vegter Standard s izotropním zpevněním pro materiál HCT690

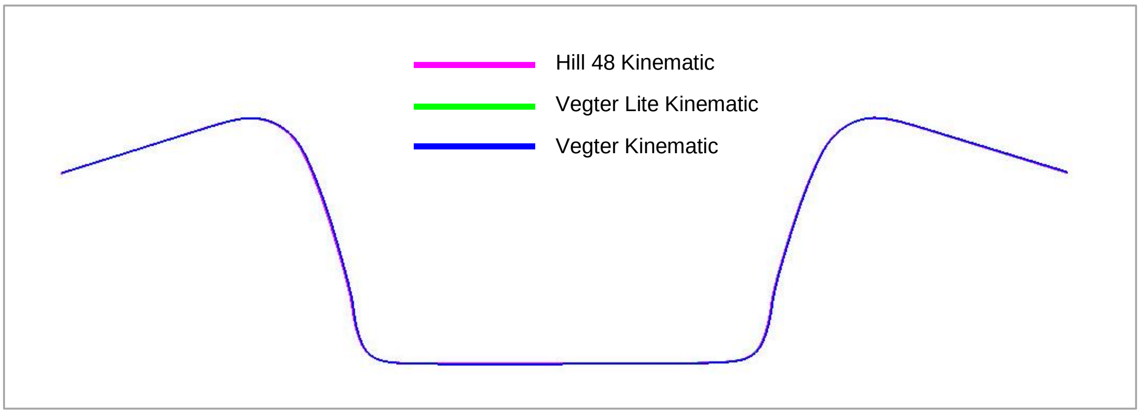


Obr. 4.13 Porovnání výsledné kontury získané pomocí numerické simulace modelu Hill48, Vegter Lite a Vegter Standard s izotropním zpevněním pro materiál AMAG6000

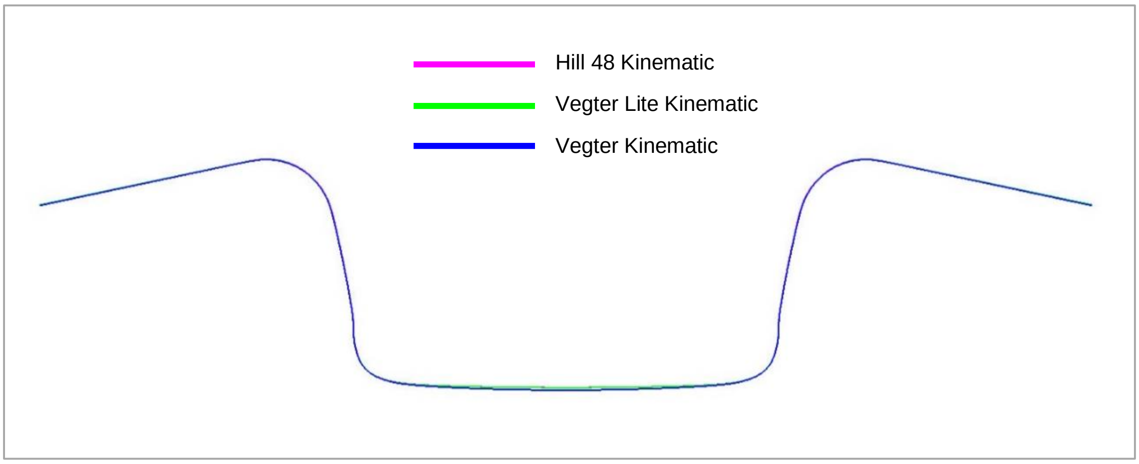


Obr. 4.14 Porovnání výsledné kontury získané pomocí numerické simulace modelu Hill48, Vegter Lite a Vegter Standard s izotropním zpevněním pro materiál Ti-CP AMS4900

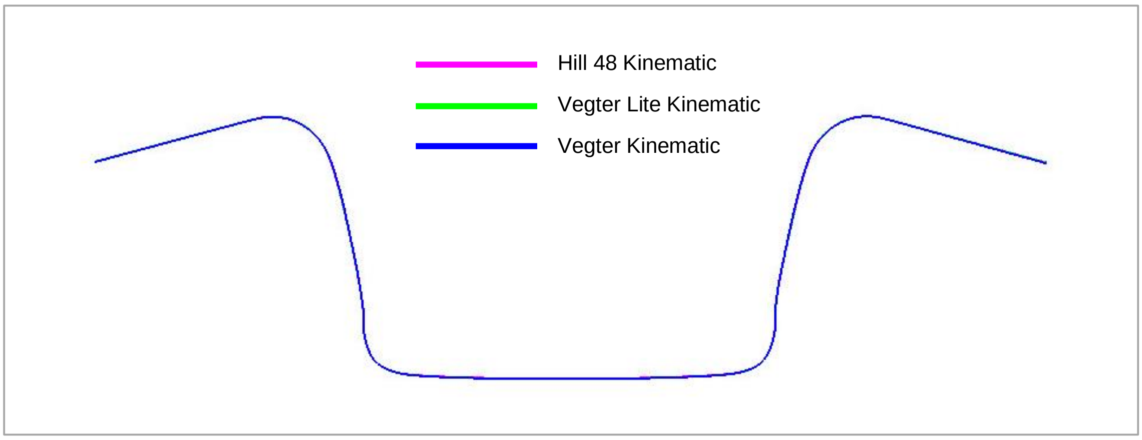
Na obrázcích **Obr. 4.15** až **Obr. 4.18**. je zobrazeno porovnání kontur plechu získaných prostřednictvím výpočtu numerické simulace v softwaru PAM STAMP 2G pro modely Hill48 s kinematickým zpevněním materiálu (magenta), Vegter Lite s kinematickým zpevněním materiálu (zelená barva) a Vegter Standard s kinematickým zpevněním materiálu (modrá barva). V tomto porovnání jsou opět vidět téměř srovnatelné výsledky pouze s drobnou odchylkou v dolní oblasti výlisku.



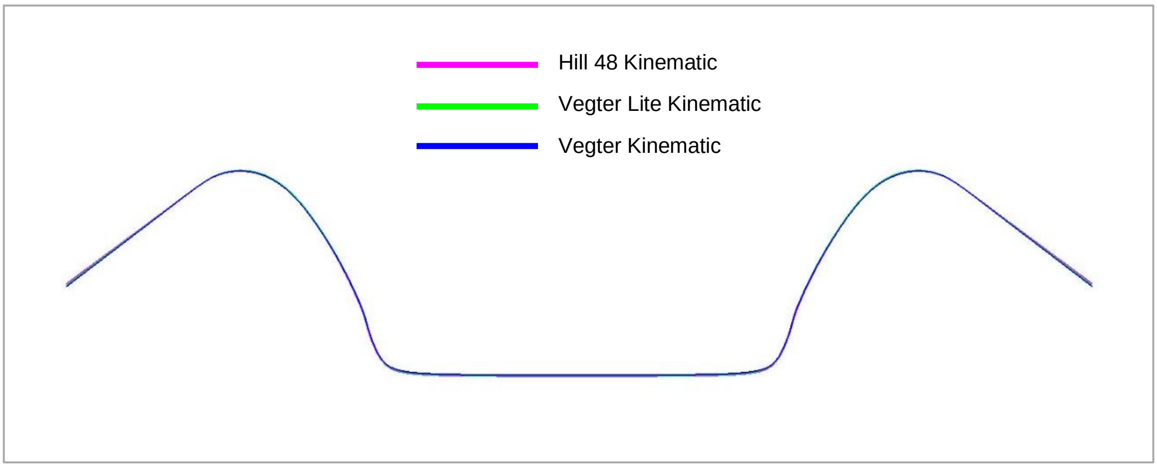
Obr. 4.15 Porovnání výsledné kontury získané pomocí numerické simulace modelu Hill48, Vegter Lite a Vegter Standard s kinematickým zpevněním pro materiál DP500



Obr. 4.16 Porovnání výsledné kontury získané pomocí numerické simulace modelu Hill48, Vegter Lite a Vegter Standard s kinematickým zpevněním pro materiál HCT690

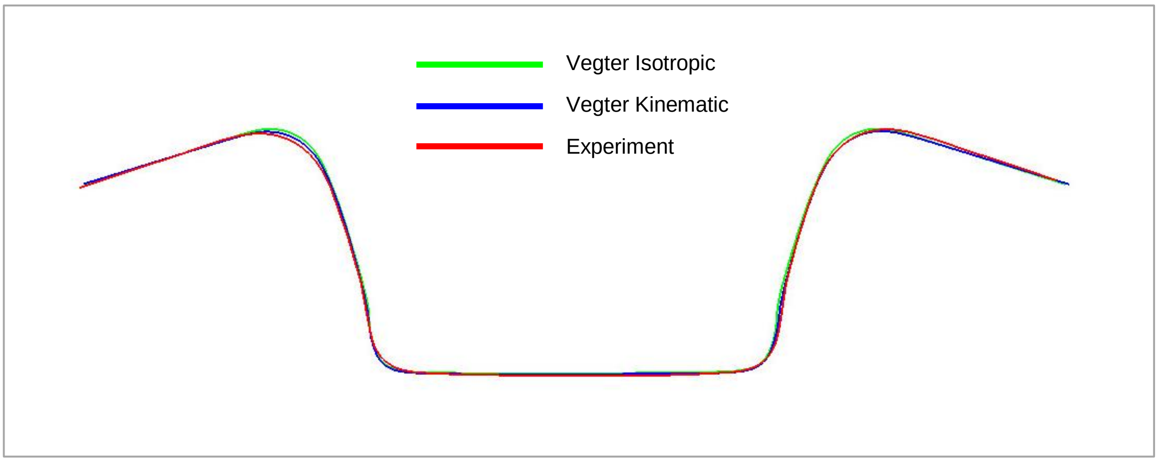


Obr. 4.17 Porovnání výsledné kontury získané pomocí numerické simulace modelu Hill48, Vegter Lite a Vegter s kinematickým zpevněním pro materiál AMAG6000

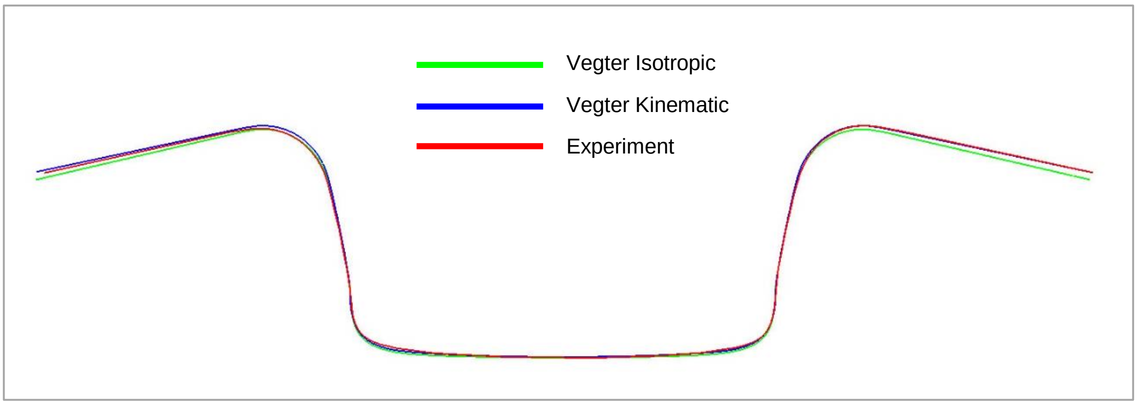


Obr. 4.18 Porovnání výsledné kontury získané pomocí numerické simulace modelu Hill48, Vegter Lite a Vegter s kinematickým zpevněním pro materiál Ti-CP AMS4900

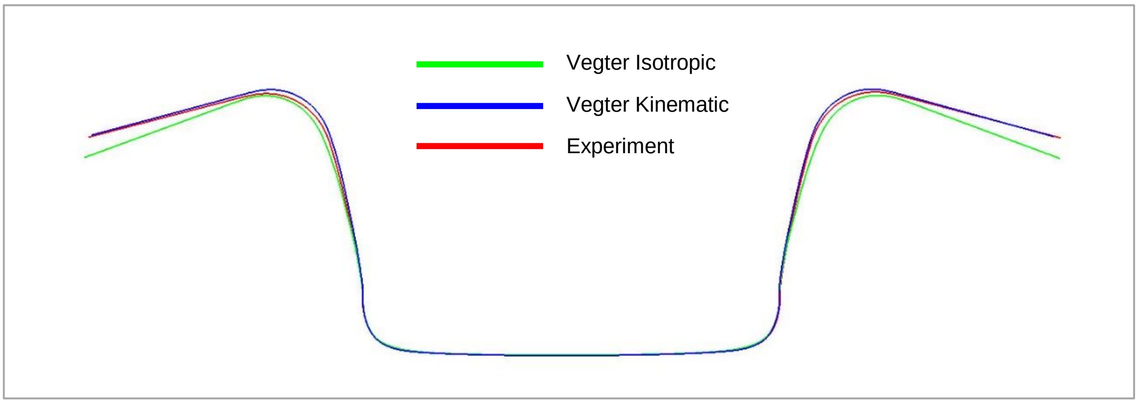
Na obrázcích výše je možné pozorovat, že v případě jednoduchého tažení plechu do tvaru „U“, kde nedochází k příliš velkému a komplexnímu přetvoření, nemá volba materiálového modelu s hledem na podmínku plasticity významný vliv na výsledný výpočet odpružení materiálu. Na **Obr. 4.19** až **Obr. 4.22** níže jsou porovnány modely izotropního (zelená barva) a kinematického (modrá barva) zpevnění materiálu během deformace a výlisku získaného pomocí reálného experimentu (červená barva). Zde je již možné pozorovat drobné odchylky výpočtu odpružení mezi jednotlivými výpočtovými modely s ohledem na porovnání s reálnou konturou výlisku, kde varianta modelu s kinematickým zpevněním materiálu během deformace lépe popisuje tvar a úhel odpružení kontury reálného výlisku.



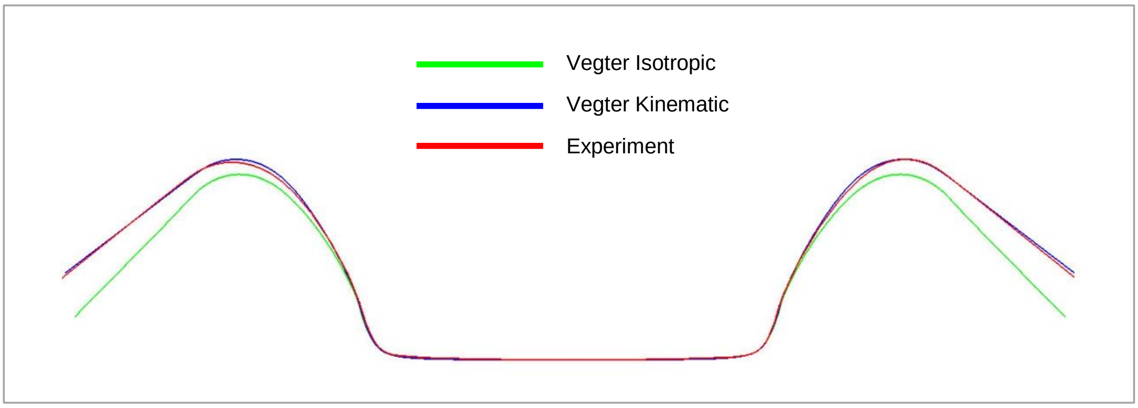
Obr. 4.19 Porovnání výsledné kontury získané pomocí numerické simulace modelu Vegter Standard s izotropním a kinematickým zpevněním a kontury výlisku z reálného experimentu pro materiál DP500



Obr. 4.20 Porovnání výsledné kontury získané pomocí numerické simulace modelu Vegter Standard s izotropním a kinematickým zpevněním a reálného experimentu pro materiál HCT690

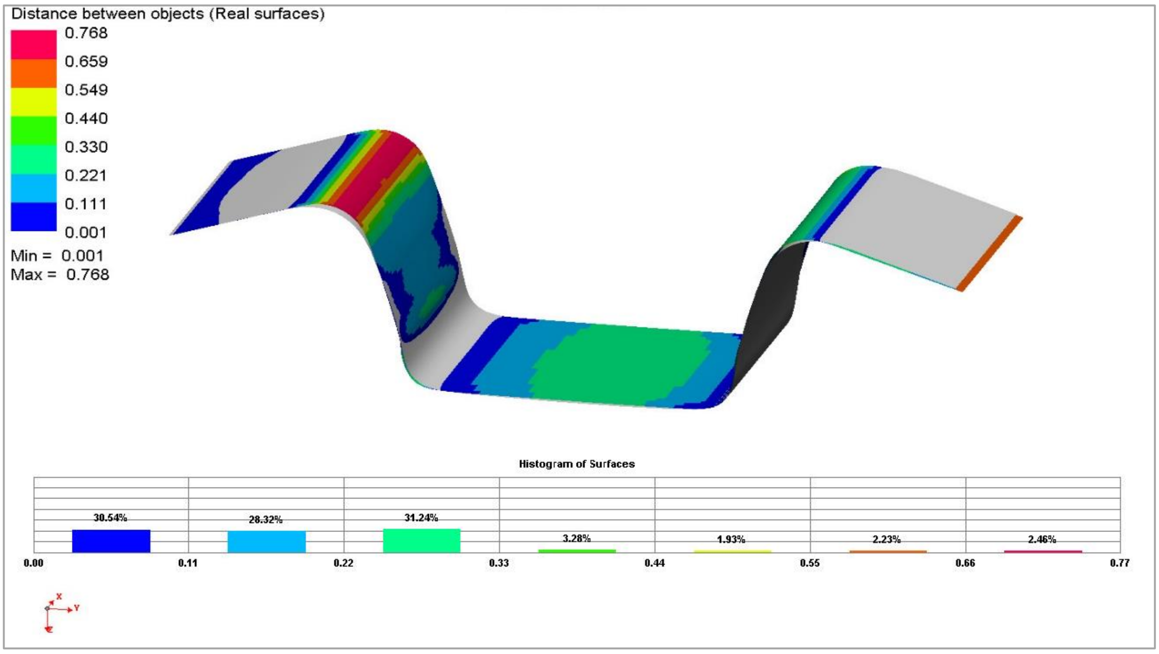


Obr. 4.21 Porovnání výsledné kontury získané pomocí numerické simulace modelu Vegter Standard s izotropním a kinematickým zpevněním a kontury výlisku z reálného experimentu pro materiál AMAG6000

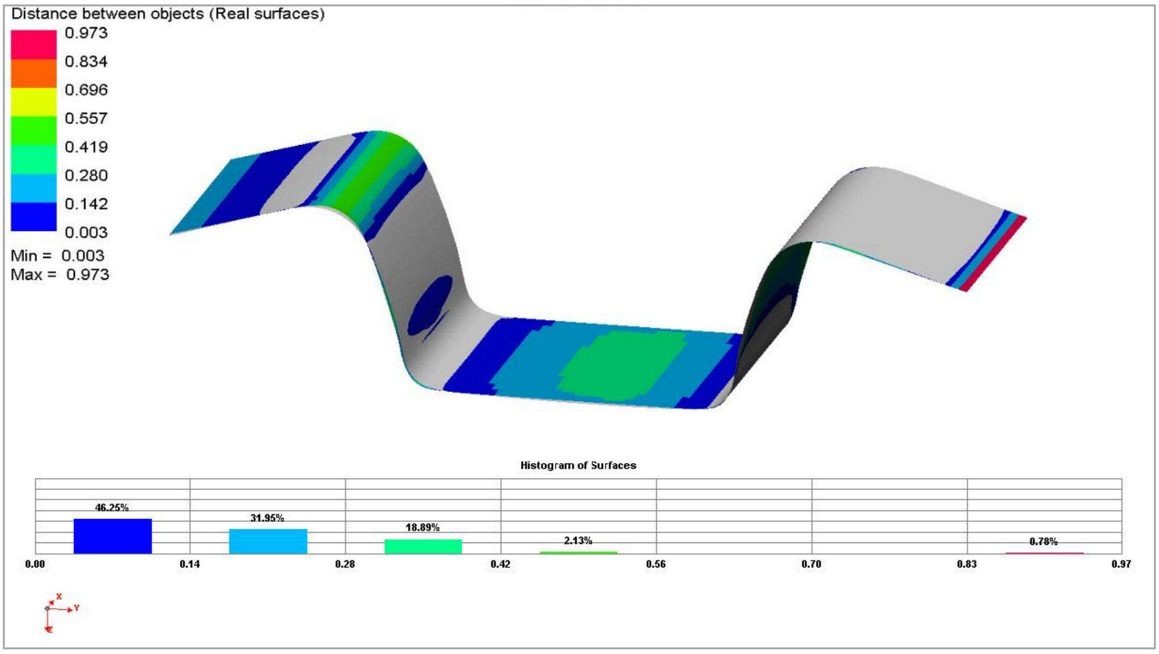


Obr. 4.22 Porovnání výsledné kontury získané pomocí numerické simulace modelu Vegter Standard s izotropním a kinematickým zpevněním a kontury výlisku z reálného experimentu pro materiál Ti-CP AMS4900

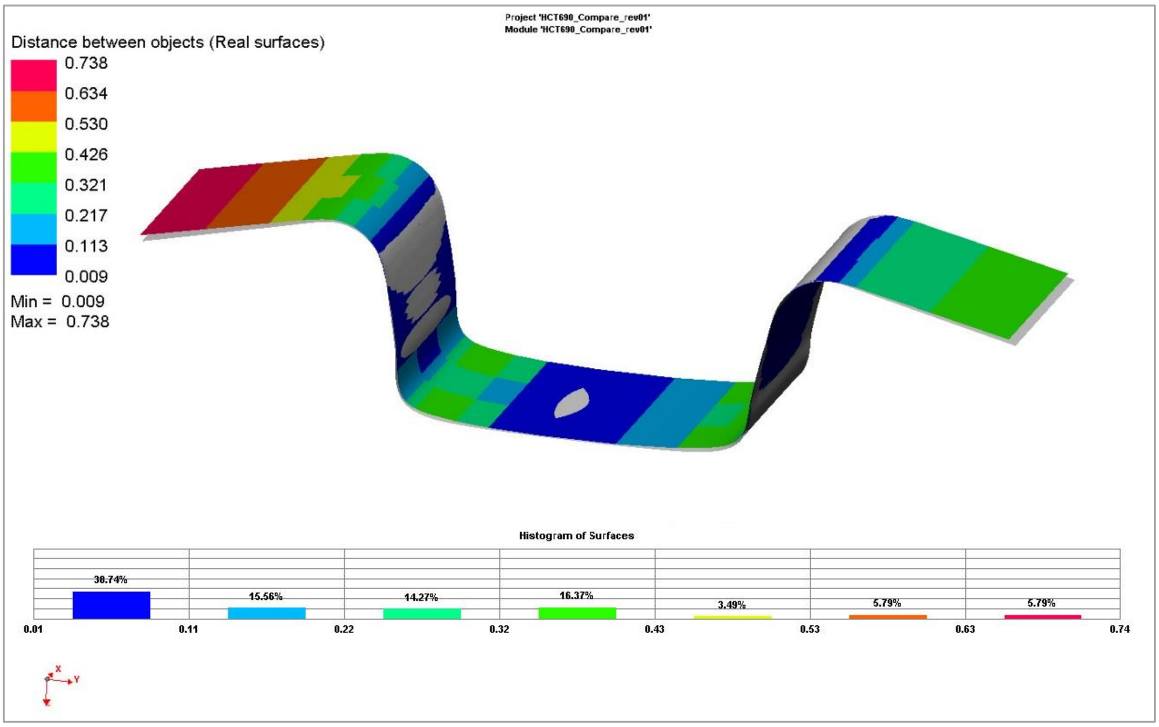
Na následujících obrázcích jsou pro vybrané materiály ilustrovány vykreslené odchylky, vždy mezi nejméně náročným materiálovým modelem Hill 48 v kombinaci s izotropním zpevněním materiálu a pokročilým modelem Vegter Standard v kombinaci s kinematickým zpevněním materiálu.



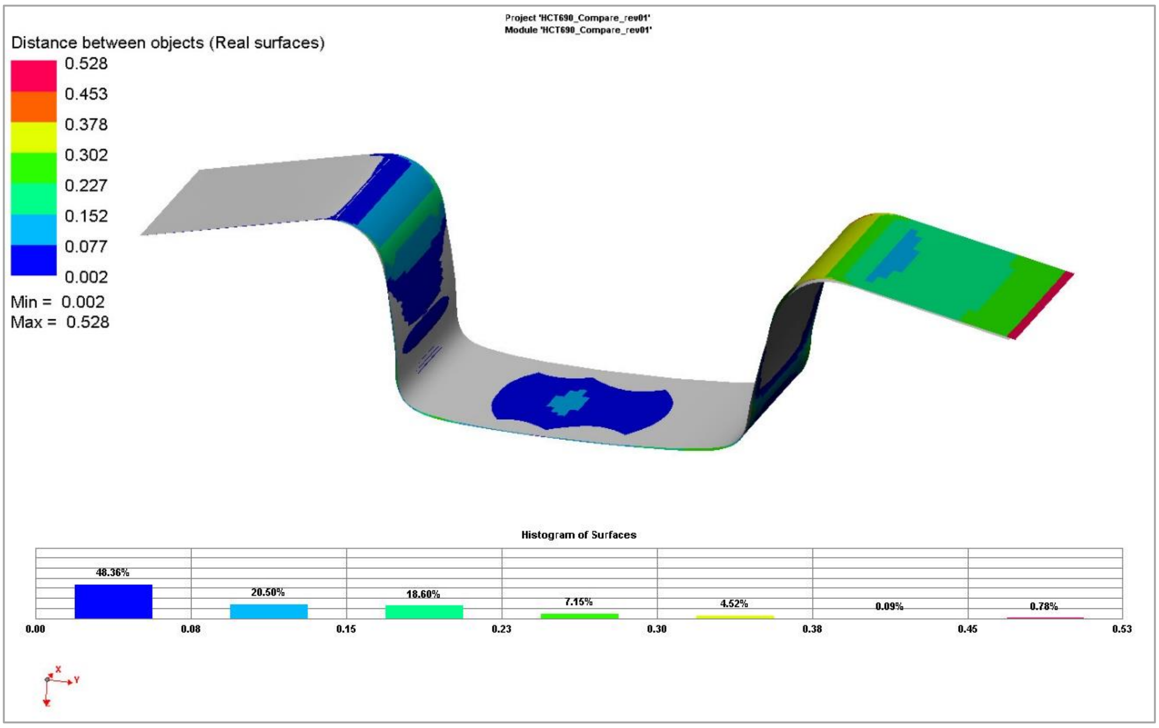
Obr. 4.23 Porovnání odchylek kontury získané pomocí numerické simulace modelu Hill48 Isotropic a reálného výlisku pro materiál DP500



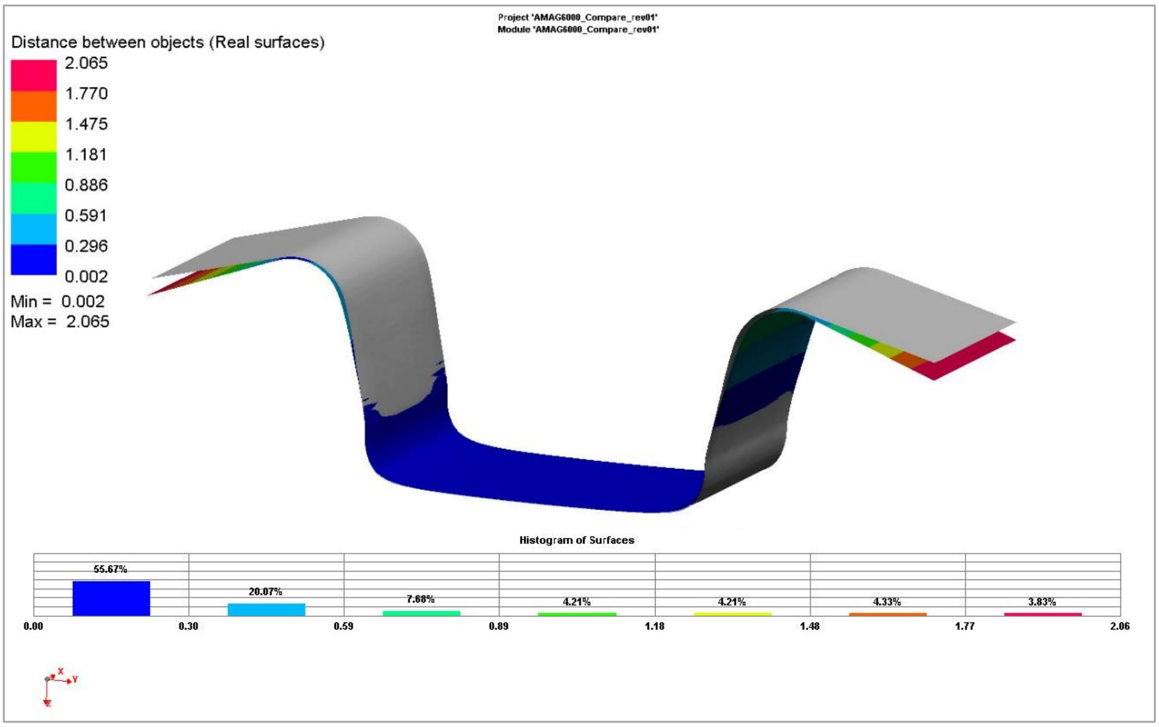
Obr. 4.24 Porovnání odchylek kontury získané pomocí numerické simulace modelu Vegter Kinematic a reálného výlisku pro materiál DP500



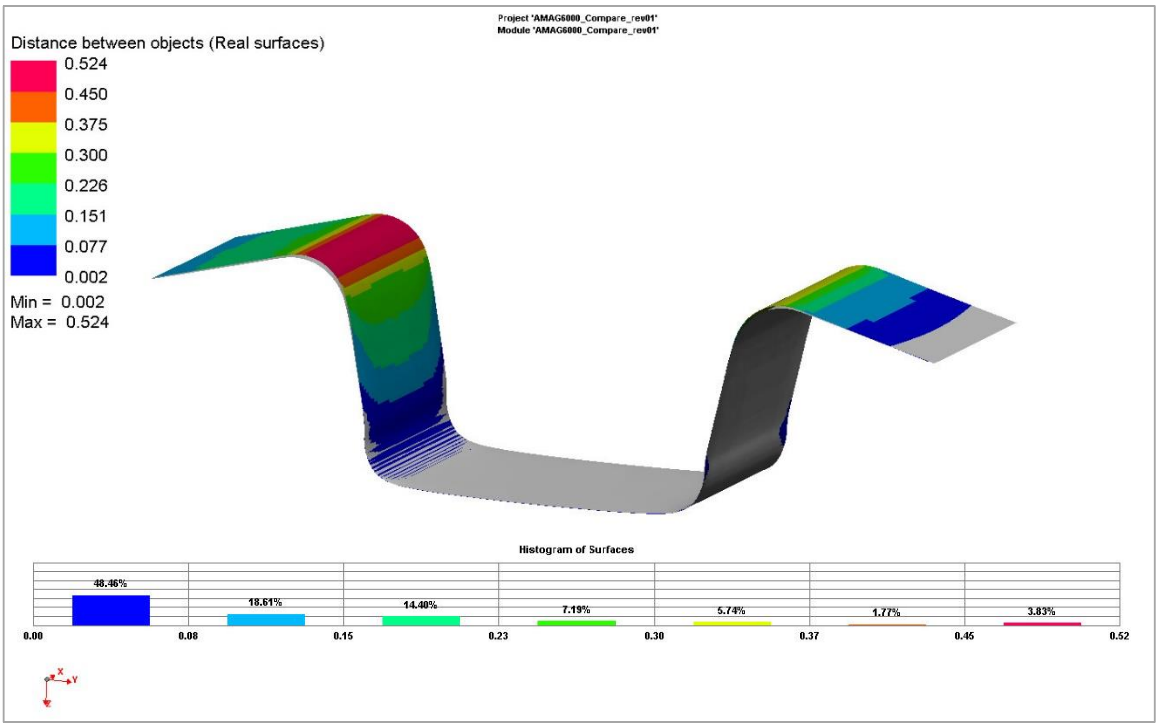
Obr. 4.25 Porovnání odchylek kontury získané pomocí numerické simulace modelu Hill48 Isotropic a reálného výlisku pro materiál HCT690



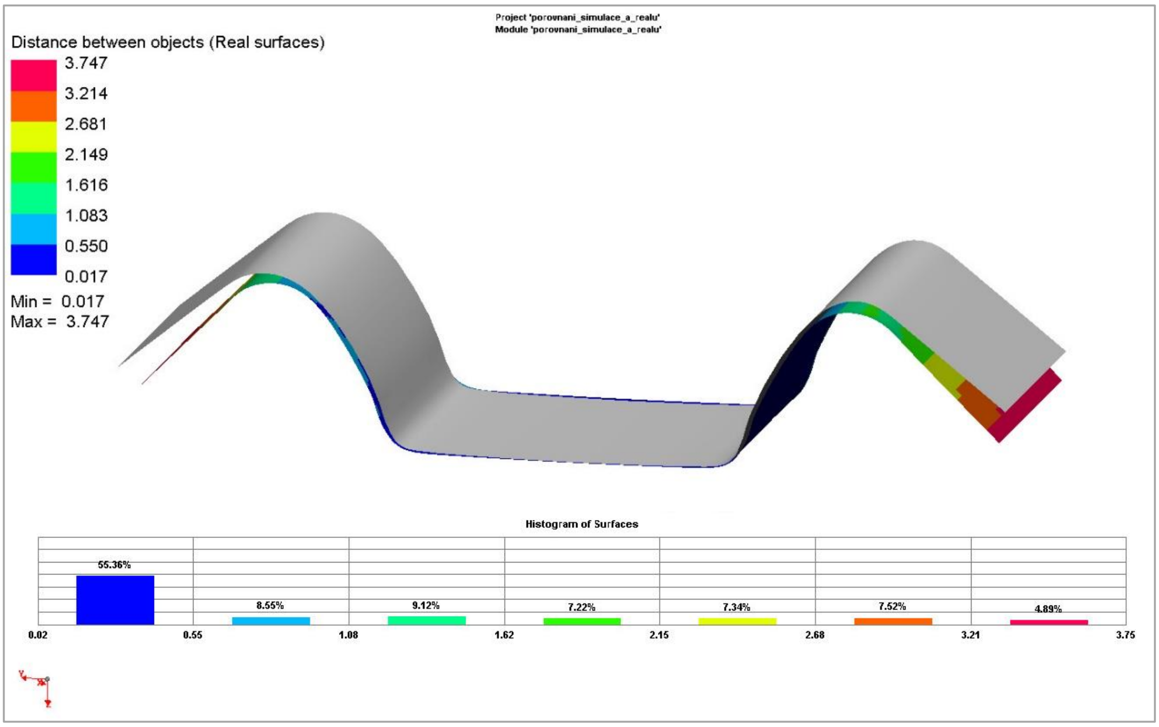
Obr. 4.26 Porovnání odchylek kontury získané pomocí numerické simulace modelu Vegter Kinematic a reálného výlisku pro materiál HCT690



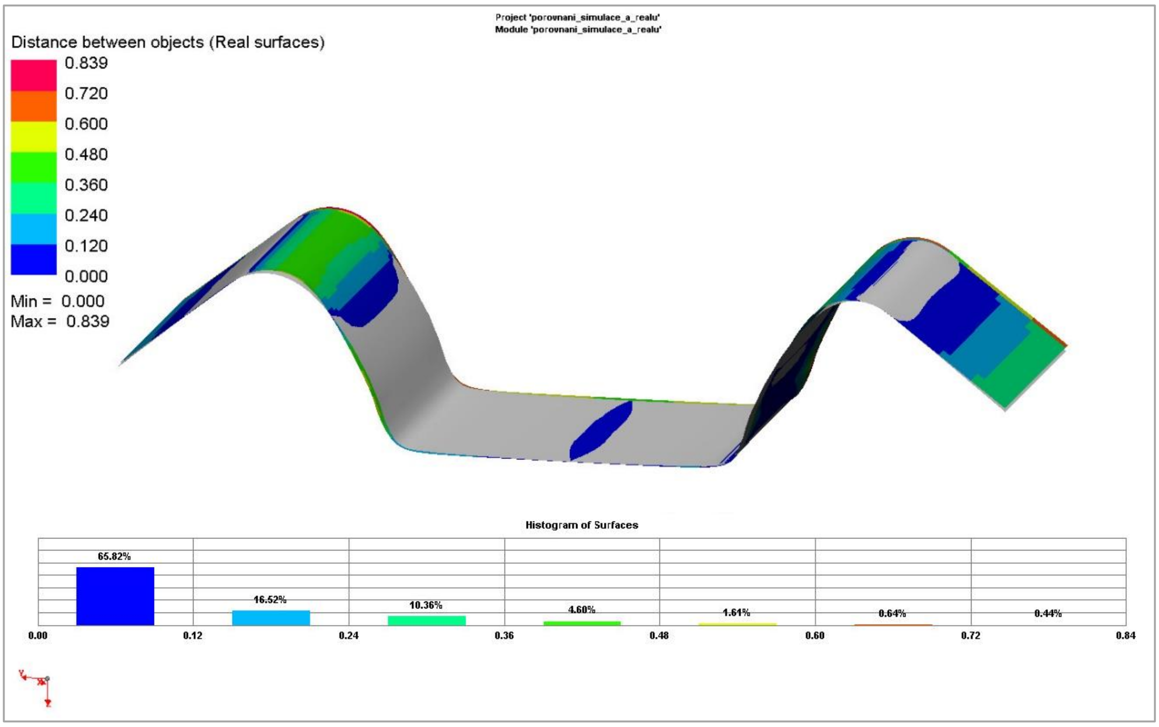
Obr. 4.27 Porovnání odchylek kontury získané pomocí numerické simulace modelu Hill48 Isotropic a reálného výlisku pro materiál AMAG6000



Obr. 4.28 Porovnání odchylek kontury získané pomocí numerické simulace modelu Vegter Kinematic a reálného výlisku pro materiál AMAG6000

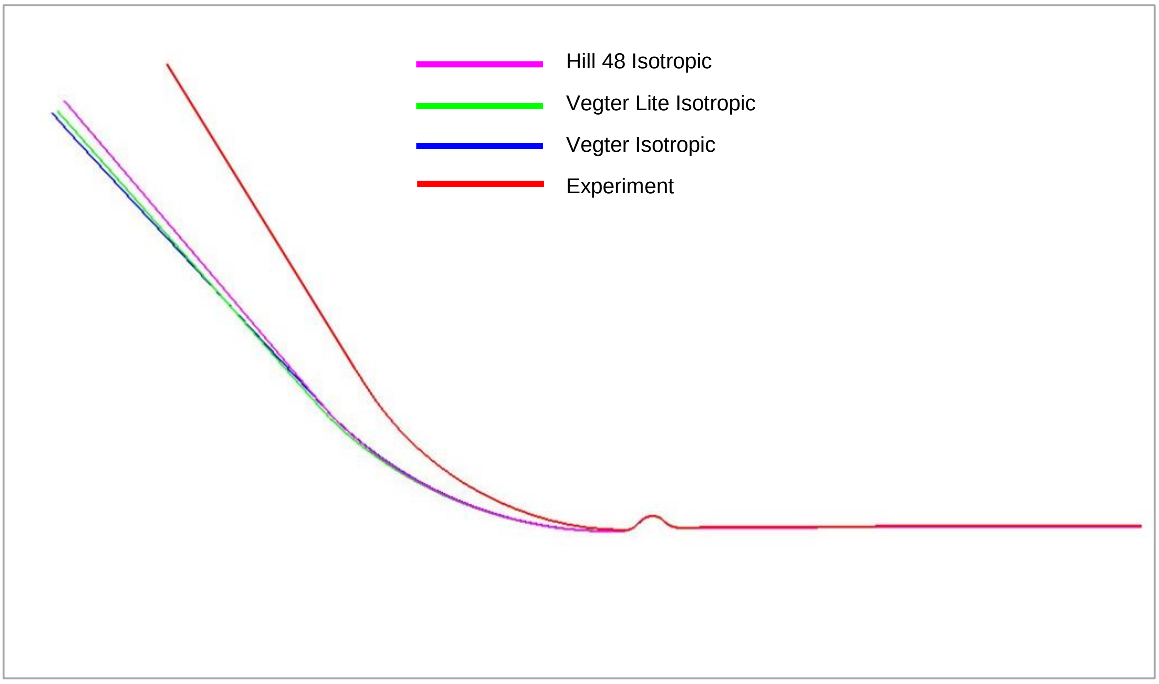


Obr. 4.29 Porovnání odchylek kontury získané pomocí numerické simulace modelu Hill48 Isotropic a reálného výlisku pro materiál Ti-CP AMS4900

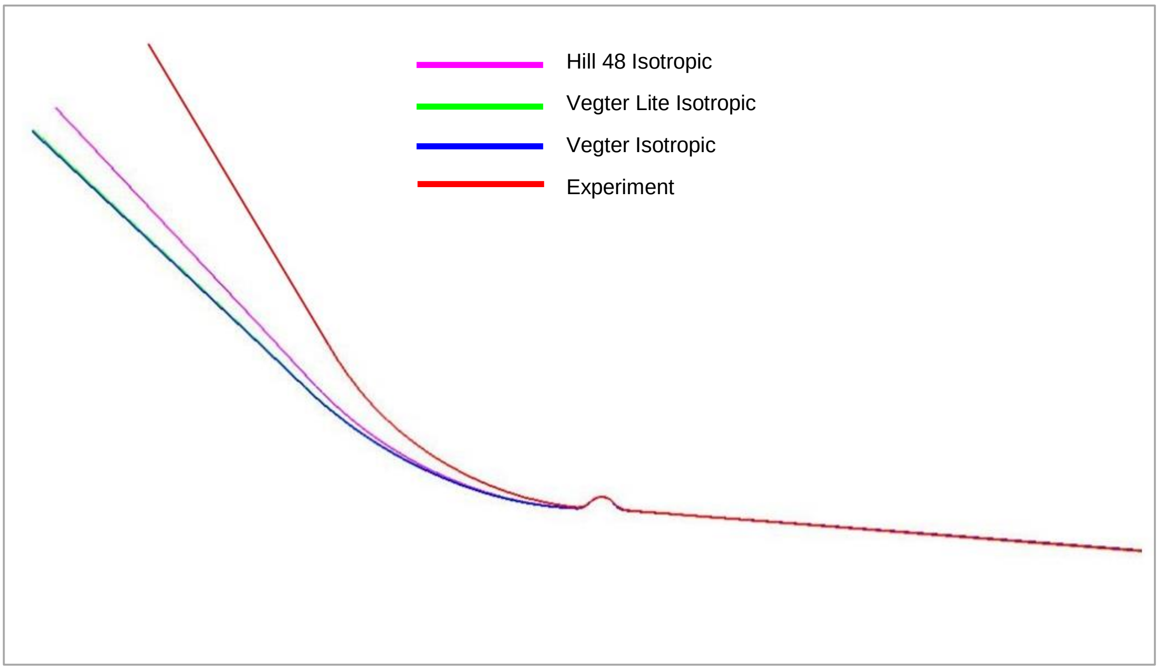


Obr. 4.30 Porovnání odchylek kontury získané pomocí numerické simulace modelu Vegter Kinematic a reálného výlisku pro materiál Ti-CP AMS4900

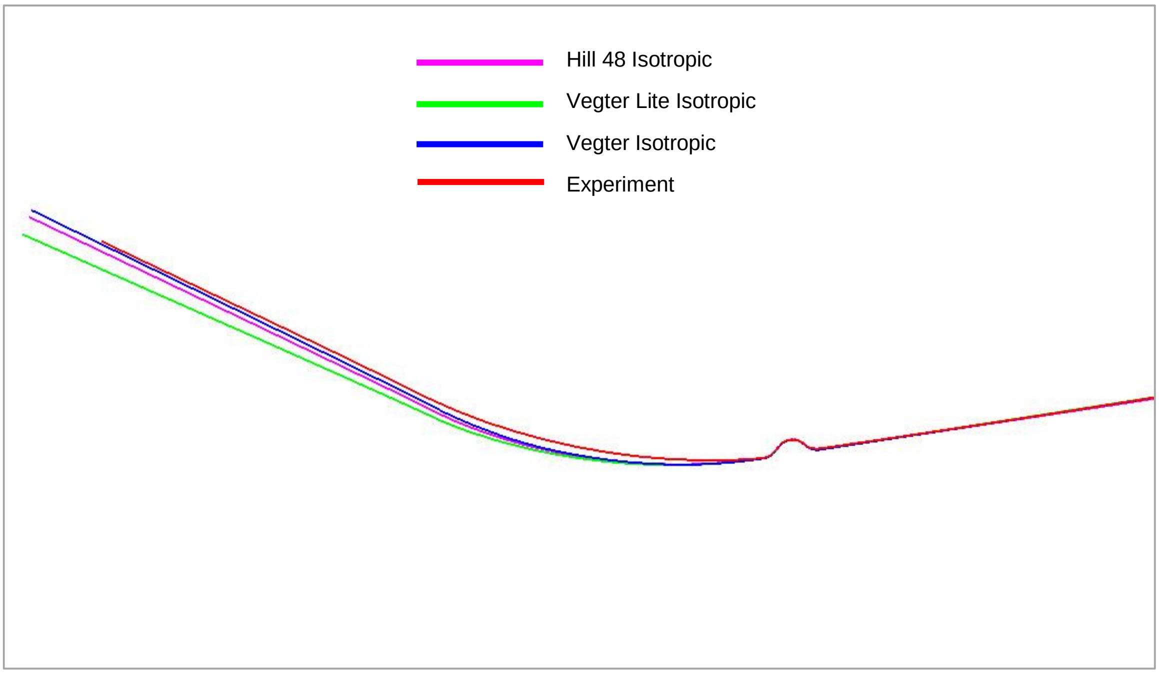
V případě výpočtu numerické simulace pro proces protahování pásu plechu přes brzdnou drážku, je na obrázku **Obr. 4.31** až **Obr. 4.33** zobrazeno porovnání výsledné kontury plechu získané prostřednictvím výpočtu numerické simulace opět pro jednotlivé materiálové modely. Jsou zde porovnány materiálové výpočtové modely Hill48 s izotropním zpevněním materiálu (magenta), Vegter Lite s izotropním zpevněním materiálu (zelená barva) a Vegter Standard s izotropním zpevněním materiálu (modrá barva). V tomto porovnání je již možné mezi jednotlivými modely oproti jednoduchému tažení plechu do tvaru „U“ pozorovat určité odchylky ve výsledném tvaru kontury výlisku po odpružení v numerické simulaci. V tomto případě totiž průchodem materiálu přes brzdnou drážku, jak již bylo popsáno výše, dochází k mnohem většímu přetvoření, které je navíc realizováno ve 100mm oblasti plechu, což odpovídá právě hodnotě posuvu. To dává větší prostor pro projevení se rozdílností v podmínkách plasticity jednotlivých materiálových modelů.



Obr. 4.31 Porovnání výsledné kontury získané pomocí numerické simulace modelu Hill48, Vegter Lite a Vegter Standard s izotropním zpevněním pro materiál DP500

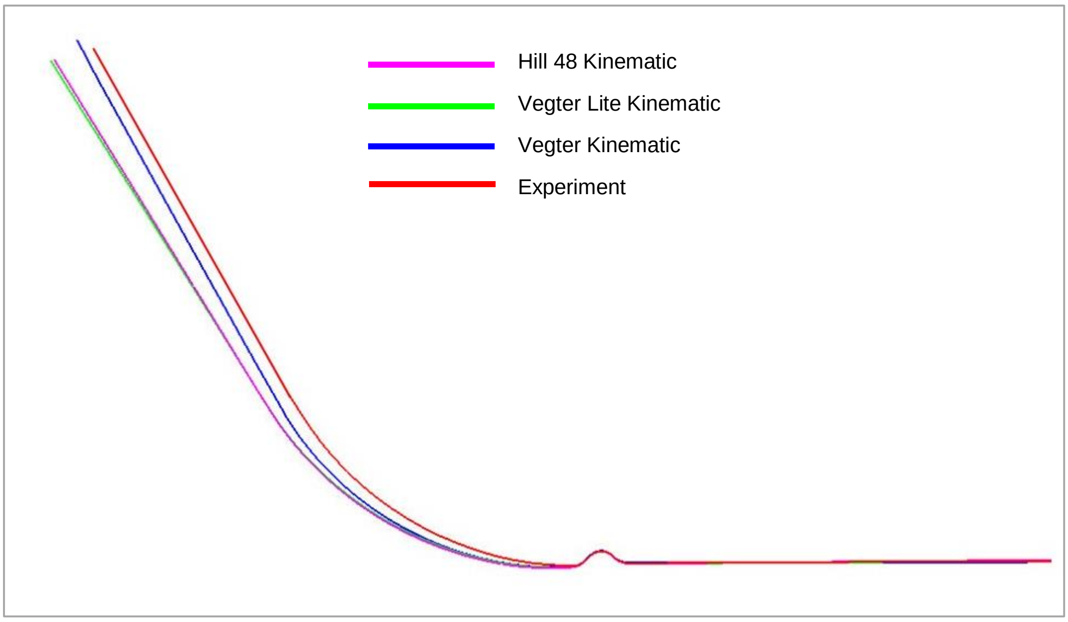


Obr. 4.32 Porovnání výsledné kontury získané pomocí numerické simulace modelu Hill48, Vegter Lite a Vegter Standard s izotropním zpevněním pro materiál HCT690

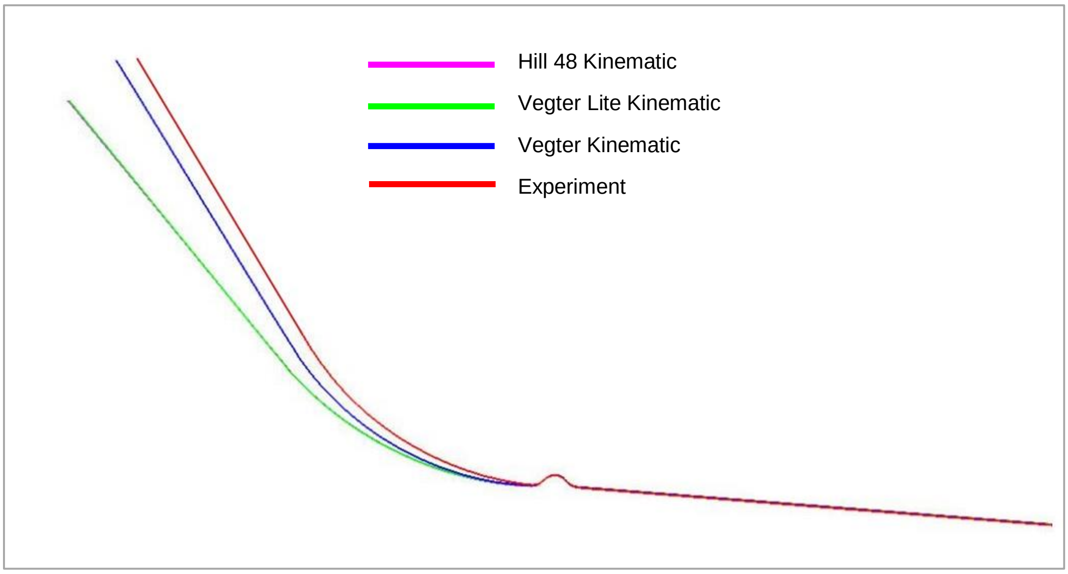


Obr. 4.33 Porovnání výsledné kontury získané pomocí numerické simulace modelu Hill48, Vegter Lite a Vegter Standard s izotropním zpevněním pro materiál AMAG6000

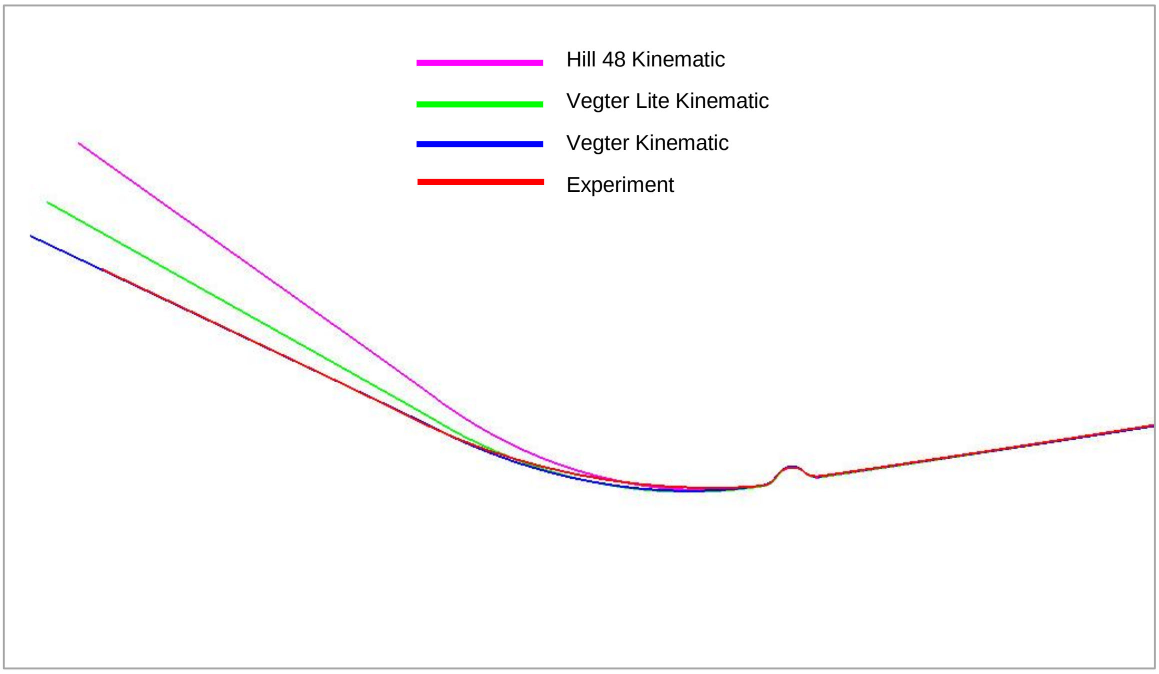
Na **Obr. 4.34** až **Obr. 4.37** je pak zobrazeno porovnání kontur plechu získaných prostřednictvím výpočtu pro modely Hill48 (magenta), Vegter Lite (zelená barva) a Vegter Standard (modrá barva) s kinematickým zpevněním materiálu. V tomto porovnání jsou již mezi jednotlivými modely vidět výraznější odchylky. Tyto diference jsou způsobeny tím, že zde při průchodu materiálu přes brzdnou drážku opakovaně dochází ke změně stavu napjatosti a přetvoření v tvářeném materiálu, což má za následek dominantní projevení se Bauschingerova jevu a kinematický model v kombinaci s danými podmínkami plasticity jednotlivých materiálových modelů lépe zohledňuje proces odpružení materiálu a projevují se zde značné rozdíly.



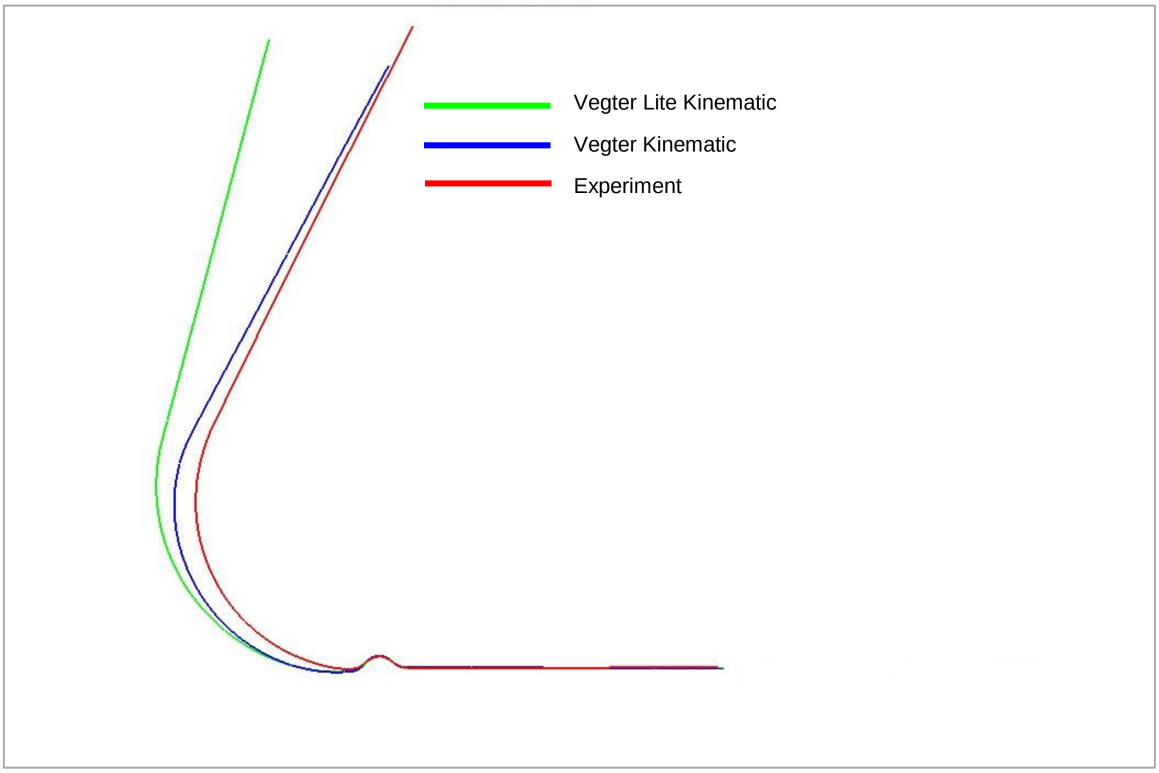
Obr. 4.34 Porovnání výsledné kontury získané pomocí numerické simulace modelu Hill48, Vegter Lite a Vegter Standard s kinematickým zpevněním pro materiál DP500



Obr. 4.35 Porovnání výsledné kontury získané pomocí numerické simulace modelu Hill48, Vegter Lite a Vegter Standard s kinematickým zpevněním pro materiál HCT690



Obr. 4.36 Porovnání výsledné kontury získané pomocí numerické simulace modelu Hill48, Vegter Lite a Vegter Standard s kinematickým zpevněním pro materiál AMAG6000

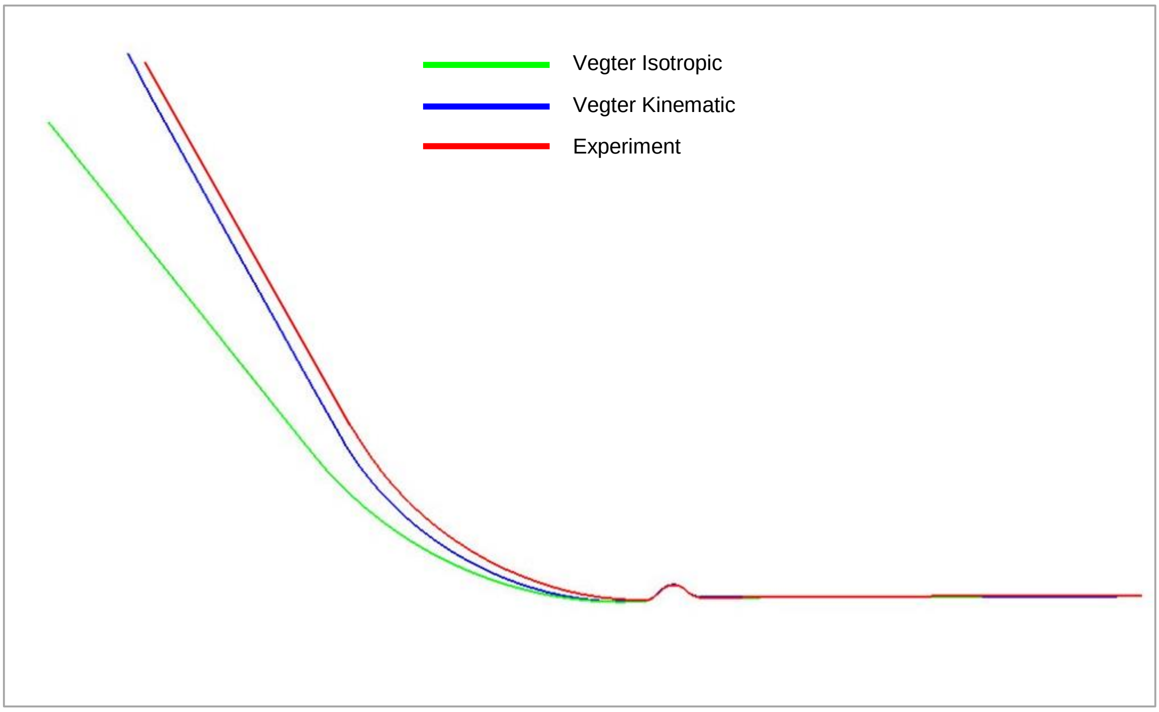


Obr. 4.37 Porovnání výsledné kontury získané pomocí numerické simulace modelu Vegter Lite a Vegter Standard s kinematickým zpevněním pro materiál Ti-CP AMS4900

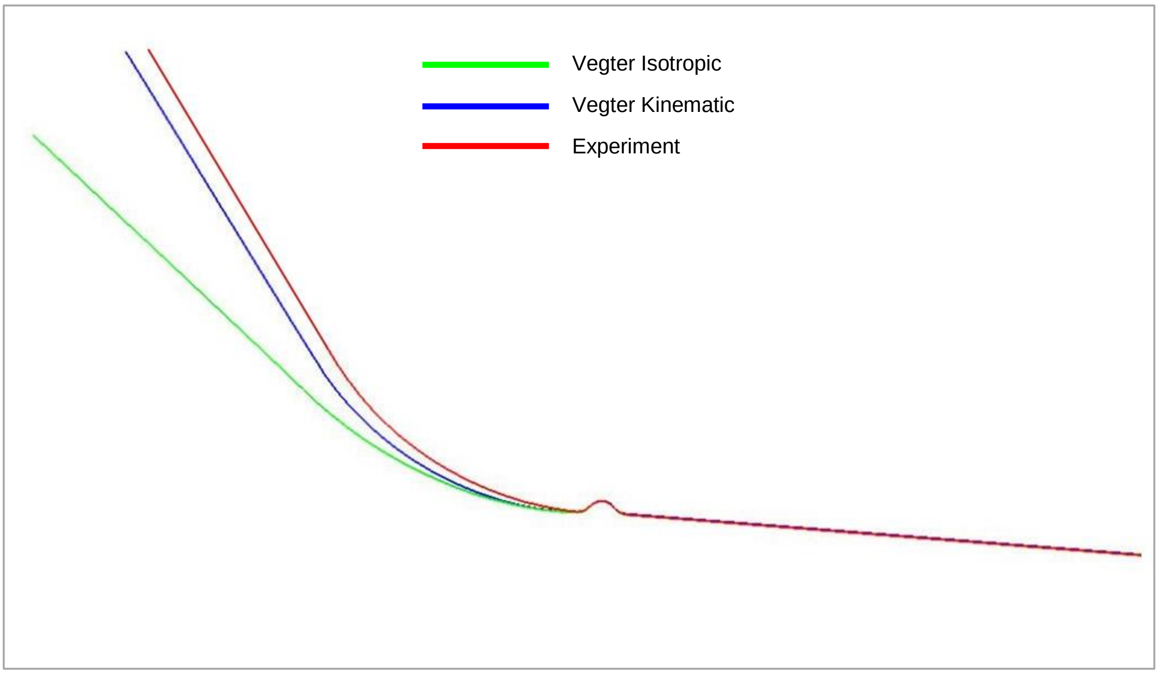
Na obrázcích výše je možné pozorovat, že v případě protahování pásu plechu přes brzdnou drážku, kde oproti tažení plechu do tvaru „U“ dochází k velkému přetvoření materiálu (viz kapitola 4.2), má volba materiálového výpočtového modelu s hledem na podmínku plasticity a model zpevňování materiálu během jeho deformace již velmi výrazný vliv na výpočet deformace a velikosti následného odpružení materiálu. Na obrázcích je výše možné pozorovat, že nejlepších výsledků je dosaženo v případě využití pokročilé podmínky plasticity modelu Vegter Standard.

V případě testování slitiny titanu Ti-CP AMS4900 izotropní modely zpevnění ve výpočtu odpružení této úlohy selhávají a výpočet končí vždy errorem. Pouze model s kinematickým zpevněním (viz **Obr. 4.37**) byl schopen si s touto úlohou poradit, dokončit výpočet a popsat průběh odpružení materiálu a to pouze v kombinaci s podmínkou plasticity modelu Vegter Standard a Vegter Lite, což opět vyzdvihuje výhody využití kinematického modelu zpevnění materiálu během deformace v kombinaci s pokročilými modely podmínky plasticity Vegter. Model Hill 48 nebyl schopen si s touto úlohou v žádné variantě poradit, čemuž nasvědčuje i velmi rozdílná hranice podmínky plasticity Hill 48 oproti modelům Vegter, to je možné pozorovat na **Obr. 4.9** v kapitole 4.3 výše.

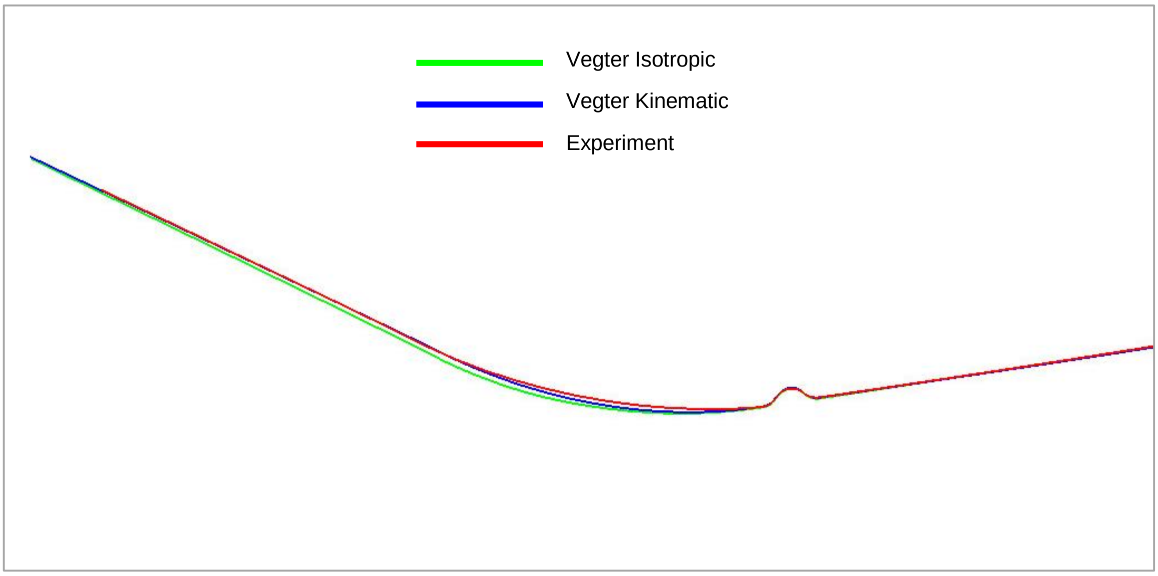
Na **Obr. 4.38** až **Obr. 4.41** níže je dále porovnán model izotropního (zelená barva) a kinematického (modrá barva) zpevnění materiálu během deformace a výlisku získaného pomocí reálného experimentu protahování plechu přes brzdnou drážku (červená barva). Zde je možné pozorovat opět velké odchylky ve výpočtu deformace a následného odpružení materiálu mezi modely izotropního a kinematického zpevnění materiálu během deformace oproti porovnání s reálnou konturou výlisku. Opět se zde ukazuje a projevuje, že model s kinematickým zpevněním materiálu během deformace lépe popisuje tvar a úhel odpružení kontury plechu získané z reálného výlisku. Nejlepších výsledků je zde dosaženo použitím nejsložitějšího modelu podmínky plasticity Vegter Standard v kombinaci s kinematickým zpevněním materiálu, tvz. Yoshida modelem.



Obr. 4.38 Porovnání výsledné kontury získané pomocí numerické simulace modelu Vegter Standard s izotropním a kinematickým zpevněním a kontury výlisku z reálného experimentu pro materiál DP500

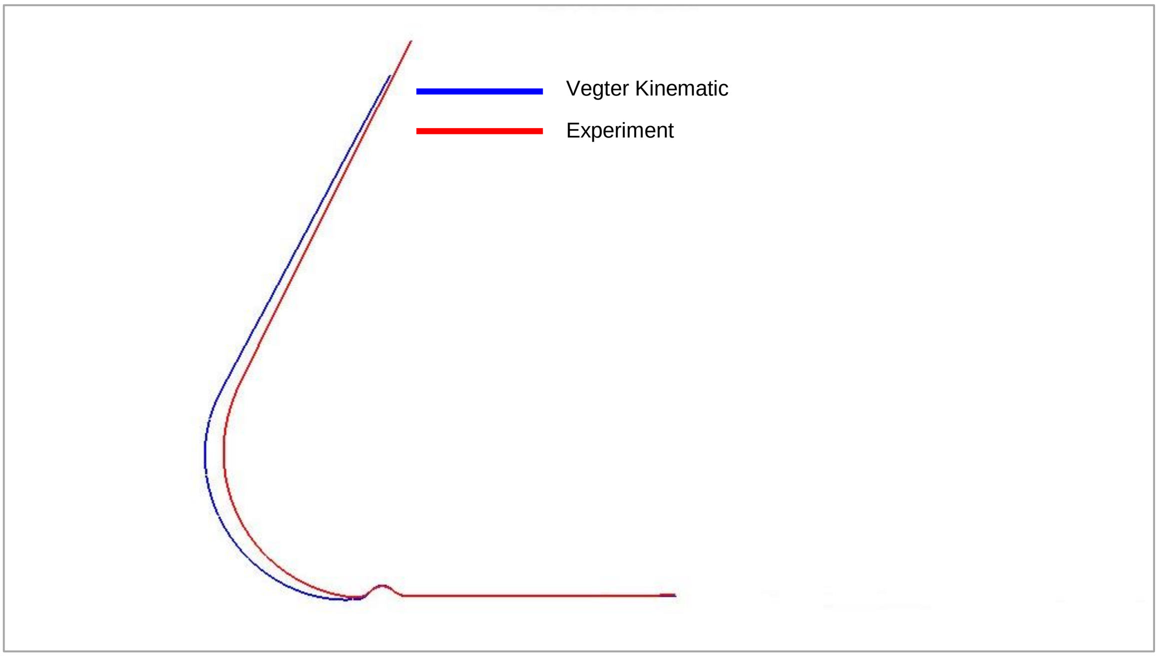


Obr. 4.39 Porovnání výsledné kontury získané pomocí numerické simulace modelu Vegter Standard s izotropním a kinematickým zpevněním a kontury výlisku z reálného experimentu pro materiál HCT690



Obr. 4.40 Porovnání výsledné kontury získané pomocí numerické simulace modelu Vegter Standard s izotropním a kinematickým zpevněním a kontury výlisku z reálného experimentu pro materiál AMAG6000

Jak již bylo popsáno výše v případě slitiny titanu Ti-CP AMS4900 nebyly modely izotropního zpevnění schopny dokončit výpočet odpružení materiálu, tudíž v tomto případě není možné udělat porovnání kontury izotropního a kinematického modelu.



Obr. 4.41 Porovnání výsledné kontury získané pomocí numerické simulace modelu Vegter Standard s izotropním a kinematickým zpevněním a kontury výlisku z reálného experimentu pro materiál AMAG6000

5 ZÁVĚR

Disertační práce „Využití pokročilých výpočetních modelů pro predikci odpružení výlisků" byla zaměřena především na problematiku výzkumu parametrů a materiálových výpočetních modelů ovlivňujících výsledky numerických simulací tažení výlisků plechu při využití materiálů se specifickými užitnými vlastnostmi. Dále pak na popis deformačního chování materiálu, definici materiálových výpočtových modelů a následnou predikci procesu deformace a následného odpružení materiálu pomocí numerické simulace. V rámci řešení této práce byl kladen důraz především na testování nových typů materiálů se specifickými užitnými vlastnostmi s možností aplikace těchto materiálů v automobilovém, leteckém a energetickém průmyslu nebo jiných speciálních aplikacích.

V úvodu práce je nejprve shrnuta současná problematika výzkumu, požadavky a vývoj v této oblasti v závislosti na současných trendech a požadavcích dnešní doby. Dále jsou zde vytyčeny hlavní cíle a oblasti výzkumu disertační práce. V následujících kapitolách je obsažena rešeršní teoretická část, která slouží jako teoretický základ a podklad pro následný výzkum. Jsou zde popsány jednotlivé typy materiálů již využívané nebo s potenciálem využití a aplikovatelnosti v technické praxi, z nichž vybrané typy jsou dále použity v rámci experimentálního výzkumu. Dále jsou zde popsány základy mechaniky kontinua a mechaniky poddajných těles. Následuje popis problematiky numerických simulací a metody konečných prvků včetně popisu a definice materiálových výpočtových MKP modelů použitých v numerické simulaci procesu plošného tváření plechu.

V dalších kapitolách navazuje experimentální část a vlastní řešení disertační práce, kde jsou nejprve konkrétně vytyčeny a podrobně popsány všechny cíle této disertační práce, následované popisem průběhu samotného experimentálního řešení. V experimentální části byla nejprve zvolena a popsána metodika materiálového testování, která byla aplikována na testování vybraných materiálů se specifickými užitnými vlastnostmi. V experimentální části byly testovány vybrané materiály na bázi Fe, Al a Ti. Jako zástupce pevnostních materiálů byly zvoleny ocele DP500 a HCT690 založeny na feriticko-martenzitické matrici a v případě třífázové oceli v kombinaci se zbytkovým austenitem. Dále byla zvolena slitina hliníku s obchodním označením AMAG6000 (EN AW611), která reprezentuje materiál v kategorii lehkých slitin použitelných pro technologii tváření a nakonec slitina titanu Ti-CP AMS4900, která kombinuje dostatečnou pevnost s dobrou tvárností, navíc při téměř poloviční hmotnosti oproti oceli.

V další části proběhlo materiálové testování dle zvolené baterie testů pro popis deformačního chování materiálu a definici materiálových výpočtových modelů. Zjištěné vlastnosti a materiálové charakteristiky byly použity jako vstupní data pro definici vybraných základních i pokročilých výpočtových modelů numerické simulace procesu tváření plechu v softwaru PAM STAMP 2G. Před zahájením části zabývající se numerickými simulacemi proběhlo zhotovení reálných výlisků procesu tažení plechu do tvaru „U“ a protahování pásu plechu přes brzdnou drážku. Tyto vzorky byly zhotoveny pro možnost porovnání výsledků numerických simulací a reálného procesu. Následovala část zabývající se numerickými simulacemi, kde probíhaly výpočty procesu, který odpovídal procesům zhotovení reálných výlisků z plechu. Tyto numerické simulace probíhaly vždy s ohledem na zvolené výpočtové modely definující hranici podmínky plasticity a model popisující zpevňování materiálu během jeho deformace. Byly zde testovány modely Hill48, Vegter Lite a Vegter Standard vždy ve variantě s izotropním a kinematickým zpevněním materiálu.

V kapitole diskuze výsledků je hodnocen a popsán vliv vybraných parametrů na průběh procesu numerické simulace. Dále je zde hodnocen a diskutován význam, vliv a vhodnost aplikace vybraných materiálových modelů použitých pro proces numerické simulace plošného tváření včetně závěrečných porovnání jednotlivých materiálových modelů s ohledem na konturu výlisku získanou provedením reálného experimentu.

Pomocí prováděných testů a numerických simulací bylo zjištěno a potvrzeno, že hustota síťování elementů v numerické simulaci je velmi důležitý faktor pro přesnost výpočtu simulace deformace a následného odpružení materiálu a jeho velikost je nutné a velmi důležité volit vždy s ohledem na aktuální simulovaný proces, geometrii nástrojů a výpočetní možnosti hardwarového vybavení. V případě simulovaných procesů bylo testováno několik velikostí sítě elementů (viz kapitola 4.1), a dle výsledků testování byla zvolena velikost sítě 0.5 mm, která dostatečně zohledňuje tvarovou koncepci nástroje a velmi přesně popisuje průběh deformace a následného odpružení materiálu, používat jemnější síťování než 0.5 mm již nepřináší žádné benefity. V případě požadavku urychlení výpočetního času je pro běžné úlohy tváření možné s dostačující přesností používat síť 1 mm. Při mírném poklesu přesnosti je možné využít možnosti hrubší sítě s dodatečným přesíťováním elementů v průběhu deformace. Dalším parametrem, který ovlivňuje výpočet a průběh numerické simulace včetně následného odpružení materiálu je koeficient smykového tření. Jak se ukázalo, hodnotu tohoto parametru je pro přesné výpočty numerických simulací nutno zadat pro konkrétní materiál co možná nejpřesněji a v ideálním případě mít tento parametr ověřený a zjištěný experimentálním testováním v konkrétním tvářecím procesu v závislosti na tlaku a rychlosti posuvu.

Pro přesné a validní výsledky je dále velmi důležité, aby proces nastavený v numerické simulaci co nejpřesněji odpovídal procesu reálného lisování. S tím souvisí samozřejmě i řízení polohy jednotlivých funkčních částí nástroje. To je možné řídit pomocí silového působení ve stykových plochách mezi částmi nástroje a materiálem nebo pomocí pevně dané příp. posuvem řízené polohy nástroje. Při testování bylo zjištěno, že řízení této polohy nástroje prostřednictvím silového působení se jeví jako nevýhodné, neboť během výpočtu procesu deformace dochází ke kmitání pohyblivých částí nástroje, které jsou právě tímto silovým způsobem řízeny. Tím je ovlivňován kontakt nástroje a deformovaného materiálu během deformace a s ohledem na hustotu sítě a rychlost deformace je do výpočtu vnášena určitá nepřesnost. V případě řízení procesu nastavením pevné nebo posuvné polohy nástrojů, nebyl v numerických simulacích jev „kmitání" nástroje pozorován, což se prokázalo jako výhodnější řešení pro zajištění přesnějších výsledků simulace.

Při výzkumu vlivu jednotlivých materiálových výpočtových modelů bylo zjištěno, že při porovnání vybraných modelů je možné pozorovat odchylky polohy hranice podmínky plasticity, které do jisté míry ovlivňují výpočet deformace a následného odpružení materiálu. Bylo zjištěno, že diference mezi těmito podmínkami plasticity v rámci vybraných materiálových modelů se významněji projevují teprve s rostoucí hodnotou deformace materiálu, což potvrzují výsledky uvedené v kapitole 4.4. V případě změny stavu napjatosti během deformace se tento jev násobí v podobě tzv. Bauschingerova efektu. V prvním experimentu tažení plechu do tvaru „U", kde nedochází k příliš velké a komplexní deformaci (viz kapitola 4.3), se rozdíly mezi testovanými modely s ohledem na podmínku plasticity téměř neprojevují. Naopak v druhém procesu protahování plechu přes brzdnou drážku, kde dochází k poměrně velkému přetvoření a komplexní deformaci (viz kapitola 4.3), se rozdíly mezi testovanými modely s ohledem na podmínku plasticity významnou měrou podílí na výsledných diferencích mezi jednotlivými modely.

Dále bylo zjištěno, že zásadní vliv na velikost a přesnost deformace a následného odpružení materiálu v numerické simulaci má model zpevňování materiálu během deformace. Byl zde testován izotropní model, definovaný aproximovanou křivkou zpevnění získanou z tahové zkoušky, a kinematický model zpevnění, kde probíhala definice jednotlivých parametrů pomocí fitování křivky zpevnění získané z cyklického testu. Bylo prokázáno (viz kapitola 4.4), že s využitím kinematického modelu zpevňování, tzv. Yoshida modelu, se již při prvním experimentu tažení plechu do tvaru „U" projevují rozdíly, které posouvají výsledky tohoto modelu směrem k lepší přesnosti výpočtu deformace a následného odpružení materiálu. Toto tvrzení se znovu potvrdilo ve druhém experimentu protahování plechu přes brzdnou drážku, kde výsledky výpočtu kinematického modelu opět posouvají výslednou deformaci a následné odpružení materiálu směrem k výsledkům reálnému procesu.

Z provedených experimentálních testů a numerických simulací je zřejmé, že výběr materiálového výpočtového modelu použitého v numerické simulaci do velké míry ovlivňuje konečnou přesnost výpočtu deformace a predikce odpružení materiálu v numerické simulaci. Při porovnaní modelů Hill48, Vegter Lite a Vegter Standard s ohledem na jejich podmínku plasticity se v případě malých deformací mezi těmito modely neprojevují téměř žádné nebo jen minimální odchylky. Diference mezi těmito modely se začínají významněji projevovat a zvětšovat teprve s rostoucí mírou deformace materiálu. To znamená, že v případě jednodušších procesů, kde nedochází k příliš velké deformaci, stojí jistě za úvahu, s ohledem na požadovanou přesnost a složitost výroby, jestli se vyplatí provedení pokročilého materiálového testování nutného pro definici složitějších materiálových modelů jako je Vegter, nebo využití jednodušších podmínek plasticity jako je Hill48. Co se týká porovnání a použití izotropního nebo kinematického modelu zpevňování materiálu, tak kinematický Yoshida model podává v provedeném testování vždy přesnější výsledky než model izotropní a to již od malých deformací. Tento jev je jistě dán zahrnutím vlivu Bauschingerova jevu, tak jako je tomu v reálném procesu tváření. Z uvedených výsledků je patrné, že pro požadavek přesného popisu deformace a následného odpružení materiálu v procesu tváření se jistě vyplatí používat kinematický Yoshida model.

Přínosem této práce, zjištěných výsledků a učiněných závěrů práce je jistě fakt, že tyto skutečnosti mohou obecně přispět ke zpřesňování výsledků numerických simulací procesu plošného tváření a následného odpružení materiálu. Tyto výsledky mohou dále přispět k možnému zvýšení ekonomičnosti výroby a snížení nákladů procesu reálné výroby výlisků nebo např. ke snižování jednotlivých výrobních časů. Pro praxi mají tyto výsledky a učiněné závěry dále význam z pohledu volby možných řešení pro vybrané typy materiálů nebo různou tvarovou koncepci vyráběných dílů. Z pohledu vědeckého přínosu tyto výsledky jistě vnášejí další užitečné aspekty a přínosy do výzkumu a poznání dané problematiky v oblasti materiálového inženýrství, testování materiálu a numerických simulací procesu plošného tváření. Dále se předpokládá, že budou tyto výsledky sloužit jako základ a opora pro další výzkum a rozvoj v řešení dané problematiky v oblasti analýzy materiálových vlastností a matematického modelování tvářecího procesu v prostředí numerických simulací.

Předpokladem budoucího výzkumu v této oblasti je pokračování v analýze vybraných vlastností dalších zajímavých a perspektivních typů materiálů vykazujících nadstandardní vlastnosti využitelné a aplikovatelné v dané oblasti výzkumu. Dále pak s ohledem na zjištěné skutečnosti, zaměření se na detailnější analýzu, výzkum a vliv jednotlivých vstupních parametrů ovlivňujících proces deformace a následného odpružení materiálu v numerických simulacích s ohledem na odpovídající parametry vyskytující se v reálném procesu tváření plechu. Pomocí zjištěných skutečností dále eliminovat co možná nejvíce nedokonalostí a ovlivňujících faktorů vstupujících do prostředí numerických simulací a tím v největší možné míře zpřesňovat výsledky numerických simulací procesu tváření plechu.

6 SEZNAM PUBLIKOVANÝCH PRACÍ STUDENTA

[1] NOVÁ, Iva, aj. Properties of Aluminium Cellular Materials Produced by Powder Metallurgy Using the Foaming Agent TiH2. MANUFACTURING TECHNOLOGY. Usti nad Labem: J. E. Purkyně University in Ústí nad Labem, 2022, roč. 22, č. 4. S. 444 – 450. ISSN 1213-2489, EISSN 2787-9402.

[2] KOREČEK, David, Pavel SOLFRONK a Jiří SOBOTKA. Analysis of the Dual-phase Steel DP500 Stress-strain Characteristics During the Plane Shear Test. MANUFACTURING TECHNOLOGY. Usti nad Labem: 2022, roč. 22, č. 1. S. 34 – 44. ISSN 1213-2489, EISSN 2787-9402.

[3] KOREČEK, David, Pavel SOLFRONK a Jiří SOBOTKA. Research of Mechanical Properties of the Aluminium Alloy Amag 6000 Under the Plane Stress State Conditions. MANUFACTURING TECHNOLOGY. Usti nad Labem: 2022, roč. 22, č. 6. S. 709 – 712. ISSN 1213-2489, EISSN 2787-9402.

[4] SOLFRONK, Pavel, Jiří SOBOTKA a David KOREČEK. Effect of the Computational Model and Mesh Strategy on the Springback Prediction of the Sandwich Material. Machines. BASEL: MDPI, 2022, roč. 10, č. 2. Stránky neuvedeny (27 stránky). ISSN 2075-1702, EISSN 2075-1702.

[5] SOBOTKA, Jiří, Pavel SOLFRONK, Martin ŠVEC a David KOREČEK. INFLUENCE OF STRUCTURE ON FORMABILITY OF STAINLESS STEELS USED AT PRODUCTION OF EXHAUST COMPONENTS. METAL. TANGER, spol. s r. o., 2021. S. 187 – 192. ISBN 978-808729499-4, ISSN 2694-9296.

[6] NOVÁ, Iva, Karel FRAŇA, Pavel SOLFRONK a David KOREČEK. Monitoring the Influence of Sodium Chloride Particle Size on the Physical. Manufacturing Technology. 2021, roč. 21, č. 1. S. 109 – 116. ISSN 1213-2489.

[7] NOVÁ, Iva, aj. Characteristics of porous aluminium materials produced by pressing sodium chloride into their melts. Materials. MDPI AG, 2021, roč. 14, č. 17. Stránky neuvedeny (22 stránky). ISSN 1996-1944, EISSN 1996-1944.

[8] SOLFRONK, Pavel, Jiří SOBOTKA, David KOREČEK a David MIZERA. Influence of Loading Rate on the Material Deformation Behaviour Under Bi-axial Loading. METAL 2020 – 29th International Conference on Metallurgy and Materials, Conference Proceedings. 1. vyd. Ostrava: Tanger Ltd., 2020. S. 265 – 270. ISBN 978-80-87294-97-0, ISSN 2694-9296.

[9] SOBOTKA, Jiří, Pavel SOLFRONK, David KOREČEK a Petr PILAŘ. Influence of Testing Methodology on Position of the Forming Limit Curve. METAL 2020 – 29th International Conference on Metallurgy and Materials, Conference Proceedings. Ostrava: Tanger Ltd., 2020. S. 234 – 239. ISBN 978-808729497-0.

[10] KOREČEK, David, Pavel SOLFRONK a Jiří SOBOTKA. Numerical Simulation as a Tool to Predict Sheet Metal Forming Process of TRIP Steel HCT690. Manufacturing Technology. Jan-Evangelista-Purkyne-University, 2020, roč. 20, č. 5. S. 625 – 631. ISSN 1213-2489.

[11] SOBOTKA, Jiří, Pavel SOLFRONK a David KOREČEK. Influence of Stress State on the Yield Strength of Aluminium Alloy. Manufacturing Technology (Engineering Science and Research Journal). 1. vyd. Ústí nad Labem: UJEP v Ústí nad Labem, 2020, roč. 20, č. 1. S. 92 – 97. ISSN 1213-2489.

[12] KOREČEK, David, Pavel SOLFRONK a Jiří SOBOTKA. Research of Trip Steel Mechanical Properties Under Conditions of Plane Shear Stress. METAL 2020 – 29th International Conference on Metallurgy and Materials, Conference Proceedings. Ostrava: Tanger Ltd., 2020. S. 405 – 409. ISBN 978-808729497-0.

[13] SOLFRONK, Pavel, Jiří SOBOTKA a David KOREČEK. Utilization of advanced computational methods to predict spring-back of aluminium alloys in automotive industry. Manufacturing Technology. 1. vyd. Ústí nad Labem: UJEP, 2020, roč. 20, č. 1. S. 98 – 103. ISSN 1213-2489.

[14] NOVÁ, Iva, aj. Production of porous aluminium using sodium chloride. Manufacturing Technology. 5. vyd. Ústí nad Labem: J. E. Purkyne University in Usti nad Labem, 2019, roč. 19, č. 5. S. 817 – 822. ISSN 1213-2489.

[15] NOVÁKOVÁ, Iva, aj. Influence of the welding process on the change of mechanical properties in the HAZ of welds at alloy AW 6005 and possibilities of their renewal by heat treatment. Manufacturing Technology. 1. vyd. Ústí nad Labem: UJEP v Ústí nad Labem, 2019, roč. 19, č. 5. S. 823 – 830. ISSN 1213-2489.

[16] SOBOTKA, Jiří, Pavel SOLFRONK, Michaela KOLNEROVÁ a David KOREČEK. Input Data Acquisition Possibilities for Numerical Simulation of Drawing Process by means of the Contact-less Optical System and Thermo-camera. Manufacturing Technology. Ústí nad Labem: UJEP, 2019, roč. 19, č. 1. S. 144 – 149. ISSN 1213-2489.

[17] KOREČEK, David, Pavel SOLFRONK, Jiří SOBOTKA a Michaela KOLNEROVÁ. Determination the Influence of Load-rate on Strain and Spring-back Magnitude for Titanium Alloy by means of Numerical Simulation. Manufacturing Technology. 5. vyd. Ústí nad Labem: UJEP, 2019, roč. 19, č. 1. S. 82 – 88. ISSN 1213-2489.

[18] NOVÁ, Iva, aj. Prediction of foaming process in the production of aluminium foams. Manufacturing Technology. Ústí nad Labem: Ústí nad Labem:Institute of Technology and Production Management University of J.E. Purkyně, 2001-, 2019, roč. 19, č. 4. S. 655 – 659. ISSN 1213-2489.

[19] SOBOTKA, Jiří, Pavel SOLFRONK a David KOREČEK. Determination of the Temperature Influence on the Change of Young`s Modulus. Metal 2019. 1. vyd. Brno: Tanger s.r.o. Ostrava, 2019. S. 483 – 488. ISBN 978-80-87294-92-5.

[20] KOLNEROVÁ, Michaela, Jiří SOBOTKA, David KOREČEK a Pavel SOLFRONK. Influence of Heat Treatment on the change of Al-Si Coating Properties at Ultra-high Strength Sheets.

Manufacturing Technology. Ústí nad Labem: UJEP, 2019, roč. 19, č. 1. S. 77 – 81. ISSN 1213-2489.

[21] ZUZÁNEK, Lukáš, Jiří SOBOTKA, Pavel SOLFRONK a David KOREČEK. Hydrogen Brittleness Analysis by X-ray diffraction. Manufacturing Technology. Institute of Technology and Production Management University of J.E. Purkyne, 2019, č. x. Stránky neuvedeny (5 stránek). ISSN 1213-2489.

[22] KOREČEK, David, Pavel SOLFRONK a Jiří SOBOTKA. Research of the Temperature Influence on the change of Titanium Alloy Mechanical Properties by means of the Optical Contact-less Analysis. Metal 2019. Ostrava: Tanger s.r.o. Ostrava, 2019. S. 421 – 426. ISBN 978-80-87294-92-5.

[23] SOBOTKA, Jiří, Pavel SOLFRONK, Michaela KOLNEROVÁ a David KOREČEK. Influence of Technological Parameters on Ageing of Aluminium Alloy AW-2024. Manufacturing Technology. Ústí nad Labem: UJEP, 2018, roč. 18, č. 6. S. 1023 – 1028. ISSN 1213-2489.

[24] SOLFRONK, Pavel, Jiří SOBOTKA, David KOREČEK a Michaela KOLNEROVÁ. Tribological properties of al-alloy designed for drawing stampings in automotive industry. MM Science Journal. MM Publishing, s.r.o., 2018, roč. 2018, č. June. S. 2354 – 2357. ISSN 1803-1269, EISSN 1805-0476.

[25] SOBOTKA, Jiří, Pavel SOLFRONK, Michaela KOLNEROVÁ a David KOREČEK. Fatigue Properties of the Aluminium Alloy AW-5182 in dependence on Deformation. Manufacturing Technology. Ústí nad Labem: UJEP v Ústí nad Labem, 2017, roč. 17, č. 6. S. 958 – 962. ISSN 1213-2489.

[26] SOBOTKA, Jiří, Pavel SOLFRONK, Michaela KOLNEROVÁ a David KOREČEK. Influence of Deformation on the Hardness Distribution for Car-bodies Materials. METAL 2017 – 26th International Conference on Metallurgy and Materials. 1. vyd. Ostrava: TANGER Ltd., 2017. S. 545 – 551. ISBN 978-80-87294-79-6.

[27] SOBOTKA, Jiří, Pavel SOLFRONK, David KOREČEK a Michaela KOLNEROVÁ. Influence of Testing Methods on the Final Values of the Modulus of Elasticity E. MM Science Journal. MM publishing Ltd., 2017, roč. Vol. 2017, č. December. S. 1942 – 1946. ISSN 1803-1269.

[28] KOREČEK, David a Pavel SOLFRONK. Numerical Models for Predicting Spring-back of Stamped Titanium Alloy. METAL 2017 – 26th International Conference on Metallurgy and Materials. 1. vyd. Ostrava: TANGER Ltd., 2017. S. 452 – 458. ISBN 978-80-87294-79-6.

[29] KOLNEROVÁ, Michaela, aj. Strength of the adhesive joints at the car-body parts from the ahss with al-si coating. MM Science Journal. MM publishing Ltd., 2017, roč. Vol. 2017, č. November. S. 1901 – 1904. ISSN 1803-1269.

[30] KOREČEK, David, Pavel SOLFRONK, Jiří SOBOTKA a Michaela KOLNEROVÁ. Utilization of Numerical Simulation to Predict Spring-back of Dual-Phase Steel Sheet at Bending. 2nd EAI International Conference on Management of Manufacturing Systems. 1. vyd. Starý Smokovec, Slovakia: 2017. Stránky neuvedeny (8 stránek). ISBN 978-1-63190-158-4.

[31] SOLFRONK, Pavel, Jiří SOBOTKA, Michaela KOLNEROVÁ a David KOREČEK. Thermal treatment influence on the change of alloy EN AW-6082 mechanical properties. Manufacturing Technology. Ústí nad Labem: Univerzita J. E. Purkyne, 2017, roč. Volume 17, č. 5. S. 848 – 853. ISSN 1213-2489.

7 LITERATURA A POUŽITÉ ZDROJE

[1] RANA, Radhakanta a Shiv Brat SINGH. *Automotive Steels: Design, Metallurgy, Processing and Applications*. B.m.: Woodhead Publishing, 2016. ISBN 978-0-08-100653-5.

[2] ABSPOEL, Michael, Marc E. SCHOLTING, Marcel LANSBERGEN, Yuguo AN a Henk VEGTER. A new method for predicting advanced yield criteria input parameters from mechanical properties. *Journal of Materials Processing Technology* [online]. 2017, 248, 161–177. ISSN 0924-0136. Dostupné z: doi:10.1016/j.jmatprotec.2017.05.006

[3] VEGTER, Henk, Carel TEN HORN a Michael ABSPOEL. The Vegter Lite material model: simplifying advanced material modelling. *International Journal of Material Forming* [online]. 2011, 4(2), 85–92. ISSN 1960-6214. Dostupné z: doi:10.1007/s12289-010-1006-7

[4] VEGTER, Henk, Hans MULDER, Peter VAN LIEMPT a Jan HEIJNE. Work hardening descriptions in simulation of sheet metal forming tailored to material type and processing. *International Journal of Plasticity* [online]. 2016, 80, 204–221. ISSN 0749-6419. Dostupné z: doi:10.1016/j.ijplas.2015.11.002

[5] AN, Y. G. a H. VEGTER. Analytical and experimental study of frictional behavior in through-thickness compression test. *Journal of Materials Processing Technology* [online]. 2005, 160(2), 148–155. ISSN 0924-0136. Dostupné z: doi:10.1016/j.jmatprotec.2004.05.026

[6] KOK, P.J.J., W. SPANJER a Henk VEGTER. A Microstructure Based Model for the Mechanical Behavior of Multiphase Steels. *Key Engineering Materials* [online]. 2015, 651–653, 975–980. ISSN 1662-9795. Dostupné z: doi:10.4028/www.scientific.net/KEM.651-653.975

[7] AN, Y. G., H. VEGTER a L. ELLIOTT. A novel and simple method for the measurement of plane strain work hardening. *Journal of Materials Processing Technology* [online]. 2004, 155–156, Proceedings of the International Conference on Advances in Materials and Processing Technologies: Part 2, 1616–1622. ISSN 0924-0136. Dostupné z: doi:10.1016/j.jmatprotec.2004.04.344

[8] HU, Qi, Jeong Whan YOON, Niko MANOPULO a Pavel HORA. A coupled yield criterion for anisotropic hardening with analytical description under associated flow rule: Modeling and validation. *International Journal of Plasticity* [online]. 2021, 136, 102882. ISSN 0749-6419. Dostupné z: doi:10.1016/j.ijplas.2020.102882

[9] KOMISCHKE, Tim, Pavel HORA a Günter DOMANI. A New Experimental Method for the Evaluation of Fracture Criteria in Bulk Forming Operations. In: *Forming Technology Forum 2018*: *Experimental and numerical methods in the FEM based crack prediction* [online]. B.m.: Institute of Virtual Manufacturing, ETH Zurich, 2018, s. 65–69 [vid. 2023-05-15]. ISBN 978-3-906916-26-2. Dostupné z: https://www.research-collection.ethz.ch/handle/20.500.11850/298593

[10] RAEMY, Christian, Niko MANOPULO a Pavel HORA. On the modelling of plastic anisotropy, asymmetry and directional hardening of commercially pure titanium: A planar Fourier series based approach. *International Journal of Plasticity* [online]. 2017, 91, 182–204. ISSN 0749-6419. Dostupné z: doi:10.1016/j.ijplas.2017.02.010

[11] HIPPKE, Holger, Sebastian HIRSIGER, Florian RUDOW, Bekim BERISHA a Pavel HORA. Optimized prediction of strain distribution with crystal plasticity supported definition of yielding direction. In: *12th Forming Technology Forum: Determination and Validation of Material Parameters for Sheet Metal Simulation (2019)* [online]. B.m.: ETH Zurich, Institute of Virtual Manufacturing, 2019 [vid. 2023-05-15]. Dostupné z: doi:10.3929/ethz-b-000377565

[12] HARSCH, D., J. HEINGÄRTNER, D. HORTIG a P. HORA. Process Windows for Sheet Metal Parts based on Metamodels. *Journal of Physics: Conference Series* [online]. 2016, 734(3), 032014. ISSN 1742-6596. Dostupné z: doi:10.1088/1742-6596/734/3/032014

[13] HORA, Pavel, Longchang TONG, Maysam GORJI, Niko MANOPULO a Bekim BERISHA. Significance of the local sheet curvature in the prediction of sheet metal forming limits by necking instabilities and cracks. In: *The 12th International Conference on Numerical Methods in Industrial Forming Processes (NUMIFORM 2016)*: *NUMIFORM 2016: The 12th International Conference on Numerical Methods in Industrial Forming Processes* [online]. B.m.: EDP Sciences, 2016, s. 11003 [vid. 2023-05-15]. ISSN 2261-236X. Dostupné z: doi:10.1051/matecconf/20168011003

[14] YOSHIDA, Fusahito a Takeshi UEMORI. Cyclic Plasticity Model for Accurate Simulation of Springback of Sheet Metals. In: A. Erman TEKKAYA, Werner HOMBERG a Alexander BROSIUS, ed. *60 Excellent Inventions in Metal Forming* [online]. Berlin, Heidelberg: Springer, 2015 [vid. 2023-05-15], s. 61–66. ISBN 978-3-662-46312-3. Dostupné z: doi:10.1007/978-3-662-46312-3_10

[15] YOSHIDA, Fusahito, Hiroshi HAMASAKI a Takeshi UEMORI. A Model of Anisotropy Evolution of Sheet Metals. *Procedia Engineering* [online]. 2014, 81, 11th International Conference on Technology of Plasticity, ICTP 2014, 19-24 October 2014, Nagoya Congress Center, Nagoya, Japan, 1216–1221. ISSN 1877-7058. Dostupné z: doi:10.1016/j.proeng.2014.10.100

[16] UEMORI, Takeshi, Satoshi SUMIKAWA, Tetsuo NAKA, Ninshu MA a Fusahito YOSHIDA. Influence of Bauschinger effect and anisotropy on springback of aluminum alloy sheets. *Keikinzoku/Journal of Japan Institute of Light Metals* [online]. 2015, 65(11), 582–587. ISSN 0451-5994. Dostupné z: doi:10.2464/jilm.65.582

[17] TADA, Naoya a Takeshi UEMORI. Microscopic Elastic and Plastic Inhomogeneous Deformations and Height Changes on the Surface of a Polycrystalline Pure-Titanium Plate Specimen under Cyclic Tension. *Applied Sciences* [online]. 2018, 8(10), 1907. ISSN 2076-3417. Dostupné z: doi:10.3390/app8101907

[18] YOSHIDA, Fusahito, Hiroshi HAMASAKI a Takeshi UEMORI. Modeling of anisotropic hardening of sheet metals including description of the Bauschinger effect. *International Journal of Plasticity* [online]. 2015, 75, Special Issue: Metal Forming – Challenges in Constitutive and Fracture Modeling, 170–188. ISSN 0749-6419. Dostupné z: doi:10.1016/j.ijplas.2015.02.004

[19] UEMORI, Takeshi, Tetsuo NAKA, Naoya TADA, Hidenori YOSHIMURA, Takashi KATAHIRA a Fusahito YOSHIDA. Theoretical predictions of fracture and springback for high tensile strength steel sheets under stretch bending. *Procedia Engineering* [online]. 2017, 207, International Conference on the Technology of Plasticity, ICTP 2017, 17-22 September 2017, Cambridge, United Kingdom, 1594–1598. ISSN 1877-7058. Dostupné z: doi:10.1016/j.proeng.2017.10.1054

[20] YOSHIDA, F. Description of elastic–plastic stress–strain transition in cyclic plasticity and its effect on springback prediction. *International Journal of Material Forming* [online]. 2022, 15(2). ISSN 1960-6206. Dostupné z: doi:10.1007/s12289-022-01651-1

[21] YOSHIDA, F. Elasto-Plasticity Models for Accurate Metal Forming Simulation II: Role of Accurate Material Model in Springback Simulation. *Zairyo/Journal of the Society of Materials Science, Japan* [online]. 2023, 72(2), 144–149. ISSN 0514-5163. Dostupné z: doi:10.2472/JSMS.72.144

[22] YOSHIDA, F. Elasto-Plasticity Models for Accurate Metal Forming Simulation III: Anisotropic Yield Function and Anisotropic Hardening Model. *Zairyo/Journal of the Society of Materials Science, Japan* [online]. 2023, 72(3), 262–267. ISSN 0514-5163. Dostupné z: doi:10.2472/jsms.72.262

[23] YOSHIDA, Fusahito, Hiroshi HAMASAKI a Takeshi UEMORI. Modeling of anisotropic hardening of sheet metals including description of the Bauschinger effect. *International Journal of Plasticity* [online]. 2015, 75, Special Issue: Metal Forming – Challenges in Constitutive and Fracture Modeling, 170–188. ISSN 0749-6419. Dostupné z: doi:10.1016/j.ijplas.2015.02.004

[24] XIA, Xuhui, Mingjian GONG, Tong WANG, Yubo LIU, Huan ZHANG a Zelin ZHANG. Parameter Identification of the Yoshida-Uemori Hardening Model for Remanufacturing. *Metals* [online]. 2021, 11(11), 1859. ISSN 2075-4701. Dostupné z: doi:10.3390/met11111859

[25] UEMORI, Takeshi, Kento FUJII, Toshiya NAKATA, Shinobu NARITA, Naoya TADA, Tetsuo NAKA a Fusahito YOSHIDA. Springback Analysis of Aluminum Alloy Sheet Metals by Yoshida-Uemori Model. *Key Engineering Materials* [online]. 2017, 725, 566–571. ISSN 1662-9795. Dostupné z: doi:10.4028/www.scientific.net/KEM.725.566

[26] CHANG, Chih-Yi, Ming-Hsiung HO a Ping-Chen SHEN. Yoshida–Uemori material models in cyclic tension–compression tests and shear tests. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part B: Journal of Engineering Manufacture* [online]. 2014, 228(2), 245–254. ISSN 0954-4054. Dostupné z: doi:10.1177/0954405413499011

[27] DAVIES, Geoffrey. *Materials for Automobile Bodies*. B.m.: Elsevier, 2003. ISBN 978-0-08-047339-0.

[28] Dual Phase (DP) Steels. *WorldAutoSteel* [online]. [vid. 2021-02-22]. Dostupné z: https://www.worldautosteel.org/steel-basics/steel-types/dual-phase-dp-steels/

[29] MARSHALL. Dual-Phase Steels: An Introduction. *National Material Company - Steel Processing Facilities* [online]. 23. březen 2018 [vid. 2021-02-22]. Dostupné z: http://www.nationalmaterial.com/introduction-dual-phase-steels/

[30] BLECK, Wolfgang. Using the TRIP effect-the dawn of a promising group of cold formable steels. In: *International conference on TRIP-aided high strength ferrous alloys*: *TRIP aided high strength ferrous alloys*. Aachen: Mainz, 2002, s. 13–22. ISBN 90-76019-17-7.

[31] KOCICH, Radim. *Termomechanické procesy tváření* [online]. B.m.: VŠB-Technická univerzita Ostrava. 2012. Dostupné z: https://www.fmmi.vsb.cz/export/sites/fmmi/modin/cs/studijni-opory/resitelsky-tym-

2-metalurgie/termomechanicke-procesy-tvareni/Kocich_Termomechanicke-procesy-tvareni.pdf

[32] SUWANPINIJ, Piyada. The complexity of ‘modelling’ depends on what ‘modelling’ means to you. nedatováno, 196.

[33] KOCH, David, Filipe ANDRADE, André HAUFE a Markus FEUCHT. Bake-Hardening Effect in Dual-Phase Steels: Experimental and Numerical Investigation. In: *15th International LS-DYNA Conference* [online]. 2018. Dostupné z: https://www.dynalook.com/conferences/15th-international-ls-dyna-conference/constitutive-modeling/bake-hardening-effect-in-dual-phase-steels-experimental-and-numerical-investigation

[34] MAZANCOVÁ, Eva. *Technické materiály I.* [online]. 2012. vyd. Ostrava: VŠB - Technická univerzita Ostrava, nedatováno. ISBN 978-80-248-2577-9. Dostupné z: http://www.person.vsb.cz/archivcd/FMMI/TM1/Technicke%20materialy%20I.pdf

[35] HAVELKA, Jan. *Moderní materiály v automobilovém průmyslu a jejich vlastnosti z hlediska tváření* [online]. 2018. Dostupné z: https://dspace.cvut.cz/bitstream/handle/10467/79941/F2-BP-2018-Havelka-Jan-Prehled%20modernich%20materialu%20v%20automobilovem%20prumyslu%20a%20jejich%20vlastnosti%20z%20hlediska%20tvareni%20Havelka.pdf?sequence=-1&isAllowed=y

[36] HOSFORD, William F a Robert M CADDELL. *METAL FORMING: Mechanics and Metallurgy, THIRD EDITION*. New York: Cambridge University Press, 2007. ISBN 978-0-521-88121-0.

[37] Transformation-Induced Plasticity (TRIP) Steel. *WorldAutoSteel* [online]. [vid. 2020-11-13]. Dostupné z: https://www.worldautosteel.org/steel-basics/steel-types/transformation-induced-plasticity-trip-steel/

[38] DE COOMAN, B. C. Structure–properties relationship in TRIP steels containing carbide-free bainite. *Current Opinion in Solid State and Materials Science* [online]. 2004, 8(3), 285–303. ISSN 1359-0286. Dostupné z: doi:10.1016/j.cossms.2004.10.002

[39] Figure 8. Processing routines to produce a) the hot rolled TRIP strips... *ResearchGate* [online]. [vid. 2020-11-19]. Dostupné z: https://www.researchgate.net/figure/Processing-routines-to-produce-a-the-hot-rolled-TRIP-strips-with-controlled-cooling_fig10_319049919

[40] ŽÁČEK, Ondřej, Jiří KLIBER a Roman KUZIAK. VLIV PARAMETRŮ TERMOMECHANICKÉHO ZPRACOVÁNÍ NA MIKROSTRUKTURU TRIP OCELI. 2006, 12.

[41] KVAČKAJ, T. Výskum Oceľových materiálov pre ultralahkú karosériu osobných automobilov. *Acta Metallurgica Slovaca*. 2005, 11(4), 389–403.

[42] RUMÍŠEK, Pavel. Plošné a objemové tváření (vícejazyčné názvosloví). 2004.

[43] *Twinning-Induced Plasticity (TWIP) Steel - WorldAutoSteel* [online]. [vid. 2021-02-24]. Dostupné z: https://www.worldautosteel.org/steel-basics/steel-types/twinning-induced-plasticity-twip-steel/

[44] *TWIP, TRIP, AHSS,stainless steel, high Mn steel, manganese, austenite,ultra fine grained steel,, atom probe tomography, ECCI, EBSD* [online]. [vid. 2021-03-05]. Dostupné z: http://www.dierk-raabe.com/twip-steels/

[45] ŠTĚPÁN, Roman. *Válcování oceli TWIP v laboratorních podmínkách za tepla a za studena* [online]. B.m.: Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava. 2014. Dostupné z: https://dspace.vsb.cz/bitstream/handle/10084/104343/STE733_FMMI_N2109_2109T034_2014.pdf?sequence=1&isAllowed=y

[46] Rozdělení ocelí pro automobilový průmysl. *Workswell* [online]. [vid. 2020-11-22]. Dostupné z: https://workswell.cz/rozdeleni-oceli-pro-automobilovy-prumysl/

[47] PTÁČEK, Luděk. *Nauka o materiálu II.* Brno: CERM, 1999. ISBN 978-80-7204-130-5.

[48] MICHNA, Štefan. *Nauka o materiálech II. - studijní opory*. B.m.: Univerzita J. E. Purkyně v Ústí nad Labem. 2012

[49] MICHNA, Štefan, Ivan LUKÁČ, Vladivoj OČENÁŠEK, Rudolf KOŘENÝ, Jaromír DRÁPALA, Heinz SCHNEIDER a Andrea MIŠKUFOVÁ. *Encyklopedie hliníku*. 2005. ISBN 80-89041-88-4.

[50] POLMEAR, I. J. *Light alloys: from traditional alloys to nanocrystals*. 4th ed. Oxford ; Burlington, MA: Elsevier/Butterworth-Heinemann, 2006. ISBN 978-0-7506-6371-7.

[51] ČERMÁK, Jan, Martin HAWELKA a František TATÍČEK. Současné trendy ve zpracování hořčíkových slitin tvářením. *MM Průmyslové spektrum*. 2005, 10, 59.

[52] *Titanium Material History: Titanium Alloy, Pure Titanium - Supra Alloys* [online]. [vid. 2021-08-10]. Dostupné z: http://www.supraalloys.com/history.php

[53] titanium processing | Technology, Methods, & Facts. *Encyclopedia Britannica* [online]. [vid. 2021-08-10]. Dostupné z: https://www.britannica.com/technology/titanium-processing

[54] VEIGA, Celestino, J. DAVIM a A. LOUREIRO. Properties and applications of titanium alloys: A brief review. *Reviews on Advanced Materials Science*. 2012, 32, 133–148.

[55] History Developments and Applications | Titanium Processing Center. *Titanium Supplier | Buy Titanium Metal* [online]. [vid. 2021-08-10]. Dostupné z: https://titaniumprocessingcenter.com/titanium-technical-data/titanium-history-developments-and-applications/

[56] WELSCH, Gerhard, Rodney BOYER a E. W. COLLINGS. *Materials Properties Handbook: Titanium Alloys*. B.m.: ASM International, 1993. ISBN 978-0-87170-481-8.

[57] LIU, Xuanyong, Paul K. CHU a Chuanxian DING. Surface modification of titanium, titanium alloys, and related materials for biomedical applications. *Materials Science and Engineering: R: Reports* [online]. 2004, 47(3), 49–121. ISSN 0927-796X. Dostupné z: doi:10.1016/j.mser.2004.11.001

[58] GHEORGHE, Doncean, D. POP, R. CIOCOIU, O. TRANTE, Claudia MILEA, Aurel George MOHAN, Horea BENEA a Vicentiu SACELEANU. Microstructure development in titanium and its alloys used for medical applications. *UPB Scientific Bulletin, Series B: Chemistry and Materials Science*. 2019, 81, 244–258.

[59] MOTYKA, M., K. KUBIAK, J. SIENIAWSKI a W. ZIAJA. 2.02 - Phase Transformations and Characterization of α + β Titanium Alloys. In: Saleem HASHMI, Gilmar Ferreira BATALHA, Chester J. VAN TYNE a Bekir YILBAS, ed. *Comprehensive Materials Processing* [online]. Oxford: Elsevier, 2014 [vid. 2021-08-11], s. 7–36. ISBN 978-0-08-096533-8. Dostupné z: doi:10.1016/B978-0-08-096532-1.00202-8

[60] EZUGWU, E. O. a Z. M. WANG. Titanium alloys and their machinability—a review. *Journal of Materials Processing Technology* [online]. 1997, 68(3), Superplasticity and Superplastic Technology in Japan, 262–274. ISSN 0924-0136. Dostupné z: doi:10.1016/S0924-0136(96)00030-1

[61] MORINAGA, Masahiko. 5 - Titanium Alloys. In: Masahiko MORINAGA, ed. *A Quantum Approach to Alloy Design* [online]. B.m.: Elsevier, 2019 [vid. 2021-08-13], Materials Today, s. 77–94. ISBN 978-0-12-814706-1. Dostupné z: doi:10.1016/B978-0-12-814706-1.00005-4

[62] AHMED, W., A. ELHISSI, M. J. JACKSON a E. AHMED. 2 - Precision machining of medical devices. In: J. Paulo DAVIM, ed. *The Design and Manufacture of Medical Devices* [online]. B.m.: Woodhead Publishing, 2012 [vid. 2021-08-13], Woodhead Publishing Reviews: Mechanical Engineering Series, s. 59–113. ISBN 978-1-907568-72-5. Dostupné z: doi:10.1533/9781908818188.59

[63] Titanium Allotropes: Definition & Examples. *Study.com* [online]. [vid. 2021-08-13]. Dostupné z: https://study.com/academy/lesson/titanium-allotropes-definition-examples.html

[64] OKROUHLÍK, M. a ÚSTAV TERMOMECHANIKY, ed. *Mechanika poddajných těles, numerická matematika a superpočítače*. Praha: Ústav Termomechaniky, 1997. Publikace Ústavu Termomechaniky Výuková řada. ISBN 978-80-85918-33-5.

[65] Skripta-Kurz fyziky pro DS. *Fyzikální sekce, Matematicko-fyzikální fakulta, Univerzita Karlova* [online]. [vid. 2021-08-18]. Dostupné z: https://physics.mff.cuni.cz/kfpp/skripta/kurz_fyziky_pro_DS/display.php/kontinuum/1

[66] KŘEN, Jiří a Josef ROSENBERG. *Mechanika kontinua*. 2. vyd. Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni, 2002. ISBN 80-7082-908-7.

[67] BRDIČKA, Miroslav, Ladislav SAMEK a Bruno SOPKO. *Mechanika Kontinua*. 2. vyd. Praha: Academia, nakladatelství AV ČR, 2000. ISBN 80-200-0772-5.

[68] STŘÍŽ, Bohuslav. *Mechanika textilií: Základy mechaniky kontinua. Část 1*. B.m.: Technická univerzita, Textilní fakulta, 2001. ISBN 80-7083-458-7.

[69] KÁNOCZ, Alexandr a Miroslav ŠPANIEL. *Metoda konečných prvků v mechanice poddajných těles*. B.m.: České vysoké učení technické, 1995. ISBN 80-01-01283-2.

[70] KANÓCZ, Alexander, Miroslav ŠPANIEL, ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE, a STROJNÍ FAKULTA. *Metoda konečných prvků v mechanice poddajných těles.* Praha: Nakladatelství ČVUT, 2007. ISBN 978-80-01-03590-0.

[71] PLÁNIČKA, František, Zdeněk KULIŠ, ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE, a STROJNÍ FAKULTA. *Základy teorie plasticity*. V Praze: České vysoké učení technické, 2009. ISBN 978-80-01-04225-0.

[72] MACHÁLEK, J, R ČADA a B FRODLOVÁ. Simulace procesů plošného tváření v softwaru Pam-Stamp 2G. 2012.

[73] ESI GROUP. *PAM-STAMP 2G 2018 User's Guide*. B.m.: ESI Group. 2018