TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI

Fakulta strojní

H A B I L I T A Č N Í   P R Á C E

Numerická simulace magnetohydrodynamických dějů v metalurgii a v technologických procesech

Ing. Karel Fraňa, Ph.D.

14.11.2006 Liberec

Prohlašuji tímto, že jsem zde předloženou práci vypracoval samostatně a že jsem uvedl veškerou literaturu a podklady, ze kterých jsem v rámci této práce čerpal. Většina obrázků vznikla v programu Tecplot a výsledný dokument je vysázen v programu LaTeX.

Nemám závažný důvod proti užití tohoto díla ve smyslu § 60 Zákona č.121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V Liberci dne 14.11.2006 ....

Karel Fraňa

Abstrakt

Tato práce je zaměřena na numerickou studii stlačitelného a isotermního proudění generovaného rotujícím a translačním magnetickým polem ve válcové nádobě s elektricky izolovanými stěnami. Matematický model je definován Navier-Stokesovými rovnicemi a vliv magnetického pole na vodivé tekutiny je vyjádřen pomocí externích sil. V případě nízké indukce a nízké frekvence lze uvážit pro výpočet pouze časově průměrovanou část magnetických sil, které jsou definovány pomocí analytického vztahu. Samotné výpočty jsou uskutečněny nejenom pomocí vlastního výpočetního programu založeného na metodě konečných prvků, ale také komerčním programem Fluent.

Předložená habilitační práce je rozdělena do 3 oblastí. První část obsahuje definici řešeného problému a numerické výsledky proudění generovaného translačním magnetickým polem. Druhá část se zabývá analýzou lineárních nestabilit proudění generovaného rotujícím a translačním magnetickým polem. Pro oba typy magnetického pole jsou definovány kritické hodnoty kriteriálních čísel (např. Taylorova čísla), kritické módy a kritické frekvence oscilací kinetické energie proudu pro poměr výšky a průměru nádoby jedna. Získané výsledky jsou v dobré shodě s výsledky Grantse a Gerbetha. Navíc provedená analýza odhalila nové detaily o vzniku lineárních nestabilit v tocích generovaných rotujícím magnetickým polem. V poslední části práce je provedena studie turbulentního proudění řešeného pomocí dvourovnicových turbulentních modelů $k-\varepsilon$ Standard a $k-\omega$ SST s konceptem lineární vírové viskozity a výsledky studie jsou vyhodnoceny porovnáním s 3d DNS studií. Jak ukazuje tato studie, turbulentní model $k-\omega$ SST je vhodný pro modelování proudění generovaného rotujícím magnetickým polem pro střední hodnoty Taylorova čísla.

Abstract

The objective of this work is focused on the numerical study of the incompressible and isothermal flows driven by a travelling and a rotating magnetic field in a cylindrical container with electrically insulated walls. The mathematical model is defined by the Navier-Stokes equations and the effect of the magnetic field on the electrically conducted fluids in included into external body force. Under assumptions of the low-frequency and low-induction conditions, the axisymmetric time-averaged part of the magnetic body force is only relevant and it is defined by the analytical form. The computation is carried out using self-developed code base on the finite element method and commercial code Fluent.

Our work is divided into three parts. The first part contains the problem formulation and numerical results of the flows driven by the travelling magnetic field. The second part deals with the linear stability analysis performed on the flow driven by the travelling and rotating magnetic fields. For both magnetic fields, the critical value of the leading parameter such as Taylor number etc., the critical mode and frequency of energy oscillations are detected for the aspect ratio one (ratio between the height and diameter of the cylinder). These results correspond well with the published results from Grants and Gerbeth. Furthermore, this analysis revealed new details about the onset of the linear instability formation in RMF flows. Finally, in the last part, the study of the turbulent flows solved using two-equations turbulent models $k-\varepsilon$ Standard and $k-\omega$ SST with the linear eddy viscosity concept is evaluated by the comparison with 3d direct numerical simulation. As a result that $k-\omega$ SST model is the appropriate turbulent model for RMF flows at moderate Taylor numbers.

Obsah

Seznam použitých symbolů a zkratek

Označení

$\mathbf{A}$,$\mathbf{A_0}$,$\mathbf{a}$	elektrický potenciál magnetického pole
$\mathrm{a_m}$	vlnové číslo magnetického pole
$\mathrm{a_1}$,$\mathrm{a_2}$	poloměry
$\mathbf{f}, \mathbf{F}$	vektor externích sil
$\mathbf{f_L}$	vektor Lorentzových sil
$\mathrm{f_x}, \mathrm{f_y}, \mathrm{f_z}$	složky externí síly v kartézských souřadnicích
$\mathrm{f}_\varphi, \mathrm{f_r}, \mathrm{f_z}$	složky externí síly v cylindrickém souřadném systému
$\Delta\mathrm{Q}$	nárůst vzruchů
$\mathbf{u}$	vektor rychlostního pole
$\mathrm{e_0}$,$\mathrm{e_r}$	kinetická energie proudění ustáleného a rušivého pole
E	kinetická energie proudění
$\mathbf{u_r}$	vektor rychlostního pole dodatečného rušivého pole
$\mathbf{u_0}$	vektor rychlostního pole ustáleného stacionárního řešení
u, v, w	složky rychlosti v kartézských souřadnících
$\Delta\mathrm{U}$	nárůst vzruchů u rychlostního pole
$\mathrm{u}_\varphi, \mathrm{u_r}, \mathrm{u_z}$	složky rychlosti v cylindrických souřadnicích
p	tlak
$\mathrm{p_r}$	tlakové pole dodatečného rušivého pole
$\mathrm{p_0}$	tlakové pole ustáleného stacionárního řešení
$\Delta\mathrm{P}$	nárůst vzruchů u tlakového pole
$\mathbf{S}$	tenzor deformačního napětí
t	čas
m	celé pozitivní číslo, mód
$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$	jednotkový vektor pro kartézské souřadnice
k	vlnové číslo
k'	turbulentní kinetická energie
x,y,z	kartézský souřadný systém
φ,r,z	cylindrický souřadný systém
l	délka
$\mathbf{B}$	celková indukce magnetického pole
$\mathbf{B_0}$	indukce magnetického pole bez vlivu fluktuace
$\mathbf{b}$	indukce magnetického pole indukovaného vodivou tekutinou
$\mathrm{B_0}$	absolutní hodnota magnetické indukce

h	souřadnice ve směru výšky
H	výška válcové nádoby
$\mathrm{J_k}$	Besselova funkce k-tého řádu
$\mathbf{J}$,$\mathbf{J_0}$,$\mathbf{j}$	hustota indukovaného elektrického proudu
R	poloměr válcové nádoby
Z	poměr výšky a průměru nádoby
$\mathbf{e}_\varphi$,$\mathbf{e_r}$,$\mathbf{e_z}$	jednotkové vektory cylindrických souřadnic
t	čas
J	Besselova funkce
$< \mathrm{u_i'u_j'} >$	Reynoldsovo napětí

Řecké označení

τ	tenzor napětí
Γ	okraj oblasti, okrajová podmínka
ξ	bezrozměrné amplitudy oscilací
λ	kořen řešení Besselovy funkce
λ_i	kritická frekvence oscilací
ν	kinetická viskozita
μ	dynamická viskozita
μ_m	magnetická permeabilita
ρ	hustota
σ	elektrická vodivost
δ_r,δ_i	amplituda oscilací, reálná a imaginární část
ε^1,ε^2	velmi malá změna, odchylka
ε	turbulentní disipace
ϕ	elektrický potenciál
ω	úhlová frekvence, specifická turbulentní disipace
Ω_1,Ω_2	úhlové rychlosti
Ω	výpočetní oblast
$d\Omega$	výpočetní podoblast
$\frac{\partial}{\partial x}$	parciální derivace
$\frac{D}{Dx}$	totální derivace

Seznam indexů

X_{cr}	kritický
X^{*}	bezrozměrný
X^{n},$X^{(n+1)}$	okamžitý, nový časový krok
X_{m}	magnetický
X_{min}	minimální
X_{max}	maximální
X'	fluktuace
$\overline{X}, < X >$	časově středovaná hodnota, časové průměrování
i, r	imaginární, reálná část

Matematické symboly

$\cdot$	jednoduchý skalární součin
∇	Nabla operátor

Seznam bezrozměrných kriteriálních čísel

Rm	magnetické Reynoldsovo číslo
Re	Reynoldsovo číslo
F	kriteriální číslo translačního magnetického pole
T_{m}	magnetické Taylorovo číslo

Seznam zkratek

2d	dvojdimenzionální
3d	třídimenzionální
CPU	Central Processing Unit - procesor stanice
DNS	Direct Numerical Simulation
URANS	Unsteady Reynolds Averaged Navier Stokes
MHD	Magnetohydrodynamics
k-ω SST	turbulentní model k-ω, Shear Stress Transport
k-ε Standard	turbulentní model k-ε Standard
UDF	User Defined Function
RMP	rotující magnetické pole

TMP	translační magnetické pole
SGI	Silicon Graphics Incorporated

Kapitola 1

Úvod

Magnetohydrodynamika (MHD) se zabývá jevy spojenými s elektricky vodivými materiály v tekutém stavu, rychlostním polem a magnetickým polem a jejich vzájemným ovlivněním. První zájem v oblasti magnetohydrodynamiky byl zaměřen na jevy v geofyzice a v astronomii. Později se zájem o poznatky z magnetohydrodynamiky rozšiřuje také do oblasti plazmové fyziky a nukleární fúze. V posledních letech se do popředí dostává také zájem o magnetohydrodynamiku v oblasti materiálového inženýrství. Společným prvkem mnoha zde zmíněných oborů je elektrická vodivost média, která by měla být co největší, neboť malá elektrická vodivost razantně snižuje účinek magnetického pole. Jako příklad lze zde uvést pokusy vojenských mocností o vývoj nového pohonu pro podmořské ponorky. Právě idea využití elektrické vodivosti slané vody k pohonu ponorek měla přinést novou možnost, jak zvýšit rychlost těchto ponorek, zamezit vznikajícímu hluku a zabránit vibracím, což mělo v konečném důsledku ztížit jejich identifikaci. Ovšem první testy přinesly velké zklamání, neboť právě slabá vodivost slané mořské vody vyžadovala velkou intenzitu magnetického pole, což se dále projevilo nejen v enormním nároku na pohon, ale rovněž v oblasti konstrukce magnetů. Navíc vznikající magnetické pole bylo natolik intenzivní, že již primitivnější přístroje dokázaly odhalit pozici takto poháněných ponorek. Z těchto důvodů byla většina projektů zastavena, i když stálý vývoj v oblasti supervodičů by mohl jednou tuto myšlenku oživit. Již dnes se k této myšlence opět vrací pozornost, ovšem vývoj zůstává zatím jen v laboratorním prostředí. Znalosti účinku magnetického pole na vodivé tekutiny, možnost predikce proudění, které je vyvoláno samotným magnetickým polem a studie tohoto proudění nabízí širokou možnost v mnoha technických aplikacích. Proudící tekutinu představuje roztavený kov o vysoké teplotě. Vliv vysoké teploty a magnetického pole má negativní dopad na přesnost mnoha měřících metod. Navíc vytvoření magnetického pole je energeticky značně náročné. Tyto faktory a mnoho dalších znesnadňují realizaci experimentů. Jelikož v současné době existuje již mnoho prací z oblasti definice matematických modelů pro problematiku magnetohydrodynamiky v klasických technických aplikacích, je možné využít těchto poznatků a celou studii magneticky buzeného proudění realizovat prostřednictvím numerické simulace.

1.1 Magnetohydrodynamika v metalurgii a v technologických procesech

Na rozdíl od neúspěchu v oblasti vývoje nových pohonů ponorek je praktické využití magnetického pole v oblasti materiálového inženýrství mnohem úspěšnější. Podnět k hledání nových technologických procesů v metalurgii byl vyvoláno dvěma požadavky. Prvním z nich byl požadavek snížit energetickou náročnost technologických procesů, která se objevila v souvislosti s energetickou krizí v 70. letech. Dalším podnětem byl stále rostoucí požadavek na kvalitu materiálu z hlediska čistoty a materiálové homogenity především v oblasti leteckého průmyslu.

Jak ukázaly první studie, nejdůležitějším pohybem roztaveného kovu během jeho zpracování je jeho rotační pohyb,který byl poprvé studován v literatuře Moffatt [12]. Otázkou tak bylo, jak tento pohyb vyvolat. Zkoušely se různé možnosti jako např. rotační pohyb nádob či pouze částí nádob, kdy pohyb těchto stěn se přenáší také na tekutinu. Z hlediska efektivnosti nebyla tato varianta příliš úspěšná, a proto se zájem upínal stále více na fakt, že většina kovů je současně velmi dobrými elektrickými vodiči, a tak se nabízela možnost využít této materiálové vlastnosti. Schopnost uvést tyto taveniny do pohybu pomocí magnetického pole bez nutnosti přímého kontaktu s tekutinou nabízí obrovské možnosti. Rotující a translační magnetická pole našla uplatnění především v metalurgii v oblasti kontinuálního slévárenství a výroby oceli a rovněž v oblasti výroby monokrystalů. Translační magnetické pole se často používá k transportu taveniny. Poněvadž se jedná o bezkontaktní metodu, nedochází k přímému kontaktu taveniny s jinými mechanickými částmi, což umožňuje zvýšit čistotu materiálu snížením oxidů v tavenině. Navíc vzniklý pohyb tekutiny je zpravidla pravidelný a bez vibrací, což se odrazí ve zpřesnění např. dávkování nebo odměřování taveniny pro odlévání. Další uplatnění je v oblasti kontinuálního odlévání oceli, kdy translační magnetické pole vyvolává pohyb odlévané oceli, což vede k zamezení nerovnoměrného tuhnutí Spitzer [23]. Promíchávání tekutého kovu je další alternativa použití magnetického pole. Během tuhnutí mají totiž slitinové materiály tendenci se separovat od dalších materiálů způsobující nehomogenitu ingotu a následkem toho se objevuje porozita v materiálu, která je formovaná obsahem bublinek plynu (např. CO v oceli). Tuto porozitu lze redukovat či úplně odstranit pomocí vhodného pohybu tekutin vyvolaného magnetickým polem Birat [17] a Takeuchi [7]. Tekutinu lze uvést do pohybu také například pomocí inertního plynu argonu, což patří mezi časté technické realizace, ovšem promíchávání tekutiny prostřednictvím rotujícího magnetického pole je mnohem účinnější (rychlejší a přispívá k lepší homogenizaci rozložení teplot). Více informací lze nalézt v literatuře Roplekar [19]. V oblasti krystalizace materiálu byl zaznamenán úspěch rovněž použitím rotujícího magnetického pole. Rotační pohyb tekutiny v Bridgmanově procesu umožnil redukovat rýhování ve slitině germania a galia, které vzniká v důsledku fluktuace proudění vyvolaného přirozenou konvekcí Dold a Benz [27]. Dosavadní výklad využití magnetického pole byl omezen na nejčastější případ generování dodatečného proudění pomocí magnetického pole.

Ovšem existuje ještě jedna významná oblast aplikace magnetického pole a to je možnost tlumení proudění působením magnetického pole. V zahraniční literatuře je tato metoda známá pod pojmem 'Magnetic Damping'. Jak napovídá název, hlavním cílem je úplné utlumení pohybu tekutiny vznikající např. v důsledku teplotního nebo tlakového gradientu. Nejčastější využití je pro aplikaci Bridgmanovy techniky, která je spojená s výrobou polovodičových materiálů a zlepšením jejich vlastností, což má významný vliv především v elektrotechnice. Více k tomuto tématu lze nalézt např. v publikaci Müller [9]. V případě zájmu o širší použití magnetického pole také např. pro problematiku generování pohybu, technologické zpracování čistého kovu hliníku a možnosti výrazného snížení energetické náročnosti tohoto procesu lze odkázat na knihu Davidson [28].

1.2 Hlavní cíle předložené práce

Hlavním cílem práce je přinést nové poznatky z oblasti studie proudění buzeného rotujícím (RMP) a translační (TMP) se magnetickým polem. Studie 3d proudění vyvolaného RMP (rychlostní pole zobrazeno v příloze 5.2) je součástí disertační práce Fraňa [21]. Zde je možné nalézt nejen velmi obsáhlý přehled o současných znalostech a vývoji výzkumu v této oblasti, ale rovněž významné výsledky numerické studie. V rámci zde předložené práce je věnována pozornost studii nestabilit v proudění vyvolaného RMP a dále obsáhlejší studii turbulentního proudění, která zohledňuje výsledky obsažené v práci Fraňa [21] a dále je rozvíjí. Významná část práce je ovšem zaměřena na proudění vyvolané translačním magnetickým polem.

Cíle této práce jsou následující:

1. Prezentace základních určujících rovnic magnetohydrodynamiky, odvození zjednodušené metody definice matematického modelu pro aplikace v metalurgii a výrobních procesech. Definice základních matematických modelů pro rotující a translační magnetické pole.

2. Numerická simulace proudění vyvolaného translačním magnetickým polem pro případy laminárního osově symetrického proudění. Identifikace základního typu proudění.

3. Numerická studie lineárních a nelineárních nestabilit v magneticky buzeném proudění. Zpracování současného přehledu znalostí a vypracování metody pro jejich identifikaci programem založeným pouze na přesnosti druhého řádu diskretizace Navier-Stokesových rovnic se všemi módy proudění. Tato studie zahrnuje následující dílčí cíle:

   - Shrnout současný stav znalostí v problematice existence nestabilit a metody jejich identifikace.
   - Identifikace kritické hodnoty kriteriálního čísla a vznik a vývoj prvních nestabilit v proudění. Součástí studie je analýza vznikajících nestabilit, určení kritického módu (tj. módu, při kterém se objevují prvotní nestability) a stanovení frekvence oscilací energie na kritickém módu. K této studii je použit vlastní výpočetní program.
   - Porovnání vlastních získaných výsledků se současnými znalostmi a definování odchylek od výsledků získaných na základě přesnějších studií nestabilit (spektrální metody a výpočetní programy speciálně navržené na studii lineárních nestabilit).
   - Vedlejším produktem této studie je rovněž prokázání úspěšné validace výpočetního programu a potvrzení správnosti implementace nelineárního konvetivního členu v hybnostních Navier-Stokesových rovnicích.

4. Rozbor možnosti numerické simulace turbulentního rotujícího proudění, problematika anizotropie Reynoldsových napětí a přehled současných znalostí. Druhá část cíle zahrnuje vlastní numerickou studii turbulentního proudění simulovaného

pomocí dvourovnicových modelů $k-\varepsilon$ Standard a $k-\omega$ SST. Zhodnocení výsledků z modelování turbulence je uskutečněno porovnáním s přesnějšími výsledky 3d DNS studie, přičemž tyto výsledky byly dále z velké části porovnány s výsledky získanými experimentálně.

1.3 Použitý výpočetní software

K numerické simulaci magnetohydrodynamického proudění byl použit vlastní výpočetní program a komerční program FLUENT. Vlastní výpočetní program umožňuje řešení Navier-Stokesových rovnic pro 3d problém s přesností diskretizace druhého řádu v čase i v prostoru pro strukturovanou a nestrukturovanou síť. Výpočetní algoritmus se skládá ze dvou kroků: explicitní řešení rovnice hybnosti a implicitní krok v řešení tlakového potenciálu. Tento výpočetní kód byl v minulosti testován na mnoha různých případech, obzvláště v režimu laminárního proudění. Více informací k tomuto výpočetnímu programu lze nalézt v literatuře Fraňa [21].

V rámci této práce byl již zmíněný výpočetní program rozšířen o nové moduly umožňující zahrnout do výpočtu rovněž studii vlivu translačního magnetického pole. Dále byly zdokonaleny procedury pro statistiku umožňující dosáhnout lepších výsledků pro výpočet Reynoldsových napětí a turbulentní kinetické energie. V neposlední řadě byly do programu zahrnuty nové procedury speciálně vyvinuté pro studii lineárních nestabilit.

Za účelem studie turbulentního proudění je použit rovněž komerční program FLUENT, který v sobě zahrnuje celou řadu turbulentních modelů. V této studii lze využít předpoklad osově symetrického proudění časově středovaných hodnot a celý problém zjednodušit na 2d případ definovaný v cylindrických souřadnicích. Dosažené výsledky jsou pak konfrontovány s výsledky 3d DNS studie. Vliv magnetického pole na proudění je rovněž zahrnut jako vlastní program do výrazu pro externí síly pomocí rozhraní UDF. V případě zájmu lze odkázat na oficiální dokumentaci FLUENTu [1].

1.4 Numerická simulace

Většina realizovaných výpočtů publikovaných v rámci této práce byla uskutečněna na víceprocesorových stanicích s architekturou SGI. Výpočet probíhá paralelně s využitím až 32 CPU na jednu výpočetní úlohu. K samotnému výpočetnímu programu jsou doprogramovány dodatečné pomocné programy pro postprocesing, které obsahují nástroje pro zpracování výsledků (Fourierova transformace, statistické metody apod.). Tyto doplňující programy jsou zpravidla založeny na sekvenciálním běhu. Všechny zde zmíněné vlastní programy byly napsány v jazyku FORTRAN 90/95.

Kapitola 2

Proudění vyvolané magnetickým polem

V rámci této kapitoly je věnována pozornost formulaci matematického modelu, který je zapotřebí ke stanovení vlivu magnetického pole na vodivé tekutiny za předpokladu relativně malé intenzity magnetického pole. Součástí této kapitoly je rovněž prezentace základních výsledků numerické studie magneticky buzených rychlostních polí účinkem translačního magnetického pole.

2.1 Matematický model pro nestlačitelné proudění

Matematický model, který popisuje chování nestlačitelné tekutiny, je dán Navier- Stokesovými rovnicemi, které obecně popisují principy zachování hmoty, hybnosti a popř. energie. V rámci zde zkoumaných problémů se předpokládá velmi malý rozdíl teplot v celém výpočetním objemu. Důsledkem těchto malých gradientů teploty je přirozená konvekce, ovšem intenzita takovéhoto proudění je zanedbatelná vůči vzniklému proudění od magnetického pole. Z tohoto důvodu se často u podobných studií uvažuje proudění jako izotermní a celý problém se tak omezí pouze na řešení rovnic zachování kontinuity hmoty a hybnosti. Vektor rychlostního pole magneticky generovaného proudění $\mathbf{u}$ je definován složkami (u, v, w) a vektor externích sil $\mathbf{f}$ je popsán složkami (f_x, f_y, f_z). Nejdůležitější rovnicí je rovnice popisují zachování hybnosti tekutiny, jejíž obecná definice je dána vztahem 2.1.

$$\rho\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \rho\left(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}\right) = -\nabla p + \rho\mathbf{f} + \nabla\cdot[\tau] \tag{2.1}$$

Tuto rovnici 2.1 je možné dále upravit do tvaru 2.2, jestliže tenzor napětí je definován jako $[\tau] = 2\mu\,[\mathbf{S}] - \frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\mathbf{u}$. Poslední výraz na pravé straně se dále neuvažuje za podmínek nestlačitelnosti tekutiny, tj. kdy $\nabla\cdot\mathbf{u} = 0$.

$$\rho\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \rho\mathbf{f} + 2\mu\nabla\cdot[\mathbf{S}] \tag{2.2}$$

Deformační tenzor napětí označený jako $\mathbf{S}$ je dále definován vztahem 2.3.

$$\nabla\cdot[\mathbf{S}] = \left[\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{\partial}{\partial y}\,\frac{\partial}{\partial z}\right]\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

Násobením operátoru ∇ první řádkou napěťového tenzoru $\mathbf{S}$ vede na jeho x-složku za předpokladu nestlačitelného proudění 2.4.

$$(\nabla\cdot[\mathbf{S}])_x = \frac{1}{2}\nabla^2 u \tag{2.4}$$

Podobně lze rozepsat tento vektor do složek y a z, přičemž výsledný vektor bude ve formě 2.5, kde $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ a $\mathbf{k}$ jsou jednotkové vektory ve směru x, y a z.

$$\nabla\cdot[\mathbf{S}] = \frac{1}{2}\left(\mathbf{i}\nabla^2 u + \mathbf{j}\nabla^2 v + \mathbf{k}\nabla^2 w\right) = \frac{1}{2}\nabla^2\mathbf{u} \tag{2.5}$$

Pomocí vztahu 2.5 se dále výraz pro smyková napětí na pravé straně rovnice 2.2 zjednoduší na formu 2.6.

$$2\mu\nabla\cdot[\mathbf{S}] = \mu\nabla^2\mathbf{u} \tag{2.6}$$

Tato forma zápisu smykových napětí 2.6 se použije pro výslednou rovnici pro zachování hybnosti ve tvaru tvaru 2.7.

$$\rho\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \rho\mathbf{f} + \mu\nabla^{\mathbf{2}}\mathbf{u} \tag{2.7}$$

Použitím předchozího vztahu 2.7 je systém určujících rovnic pro nestlačitelné izotermní proudění vazké tekutiny ve složkovém zápisu definován následujícími rovnicemi 2.8.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \\
\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho f_x + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \\
\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho f_y + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \\
\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho f_z + \mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Tyto definice rovnic platí pro kartézský souřadný systém, který je použit v řešiči pro samotnou simulaci proudění tekutiny bez vlivu magnetického pole. Vzhledem k tomu, že zde popsaný problém je vždy omezen pouze na výpočetní oblast tvořenou válcovou nádobou, jsou Lorentzovy síly zpravidla definovány v cylindrickém souřadném systému. V takovémto případě je nestlačitelné vazké proudění dáno vektorem rychlosti $\mathbf{u} = (u_\varphi, u_r, u_z)$, přičemž souřadný systém je definován azimutálními, radiálními a axiálními směry φ, r, z.

Tento cylindrický souřadný systém je přímo použit např. v numerické studii realizované v komerčním programu FLUENT, kde se využívá předpokládaná osová symetrie proudění a tvaru nádoby vůči vertikální ose.

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \tag{2.9}$$

$$\rho\left(\frac{\partial u_r}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{u_\varphi}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi}+u_z\frac{\partial u_r}{\partial z}-\frac{u_{\varphi^2}}{r}\right)=-\frac{\partial p}{\partial r}+$$
$$\mu\left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}-\frac{u_r}{r^2}\right)+\rho f_r$$

$$\rho\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_\varphi}{\partial r}+\frac{u_\varphi}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}+u_z\frac{\partial u_\varphi}{\partial z}+\frac{u_r u_\varphi}{r}\right)=-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \varphi}+$$
$$\mu\left(\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial r}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi}-\frac{u_\varphi}{r^2}\right)+\rho f_\varphi$$

$$\rho\left(\frac{\partial u_z}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{u_\varphi}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \varphi}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial \varphi}+$$
$$\mu\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)+\rho f_z$$

V případě vlastního výpočetního programu se Lorentzovy síly definované v cylindrickém souřadném systému převedou do kartézského souřadného systému dle pomocných vztahů definovaných v 2.10.

$$f_x = f_r cos\left(\varphi\right) - f_\varphi sin\left(\varphi\right), \qquad f_y = f_r sin\left(\varphi\right) + f_\varphi cos\left(\varphi\right), \qquad , f_z = f_z \tag{2.10}$$

Geometrické vztahy je možné nahradit délkovými rozměry dle závislosti $cos\left(\varphi\right) = x/r$ a $sin\left(\varphi\right) = y/r$. Pro případ rotujícího magnetickeho pole bude silový účinek v azimutálním směru rozložen do složek x a y. Naopak silový účinek translačního magnetické pole působí pouze ve směru z. Odvození a přesná definice jednotlivých Lorentzových sil pro oba typy magnetického pole lze nalézt v následujících sekcích této kapitoly.

2.2 Základní rovnice magnetohydrodynamiky

V této sekci jsou shrnuty základní určující rovnice používané v magnetohydrodynamice. Mezi tyto základní rovnice patří Maxwell-Amperova rovnice, jejíž redukovaná forma je dána rovnicí 2.11.

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_m \mathbf{J}, \qquad \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \tag{2.11}$$

V rovnici 2.11 označuje **B** magnetickou indukci, **J** je hustota indukovaného proudu a μ_m je magnetická permeabilita materiálu. Další důležitou rovnicí je tzv. Faradayova rovnice, která je definovaná vztahem 2.12.

$$\nabla \times \mathbf{A} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{2.12}$$

V této rovnici představuje A tzv. elektrický potenciál, který je určen časovou změnou magnetického pole. Na základě Faradayovy rovnice lze tak spočítat tento elektrický potenciál, který je pak zapotřebí pro řešení Ohmovy rovnice definované vztahem 2.13.

$$\mathbf{J} = \sigma \left(\mathbf{A} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} \right), \qquad \mathbf{F} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} \tag{2.13}$$

Pomocí vztahu 2.13 (vlevo) se určí hustota indukovaného proudu **J**, která je dána nejen magnetickým polem prostřednictvím elektrického potenciálu A, ale i samotným magneticky buzeným prouděním zastoupeným výrazem $\mathbf{u} \times \mathbf{B}$. Vztah 2.13 (vpravo) pak definuje tzv. Lorentzovy síly, které vyjadřují silový účinek magnetického pole na vodivou tekutinu.

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{\mu_m \sigma} \nabla^2 \mathbf{B} \tag{2.14}$$

Problém definice matematického modelu v MHD je dán skutečností, že magnetické pole vyvolává proudění tekutiny, které pak zpětně ovlivňuje původní magnetické pole. Tato závislost je dána rovnicí 2.14 odvozené na základě vztahů 2.12 a 2.13. Ve vztahu 2.14 označuje σ elektrickou vodivost materiálu. Jak ukáže další kapitola, ve většině numerických studií proudění v metalurgii lze provést výrazné zjednodušení takto komplikovaného spojení pohybu tekutiny a magnetického pole prostřednictvím Maxwellovy rovnice.

2.3 Základní rovnice a vztahy pro malé hodnoty magnetického Reynoldsova čísla

Základní rovnicí magnetohydrodynamiky je tzv. Maxwellova rovnice, prostřednictvím které se řeší vztah mezi magnetickým polem a pohybem vodivé tekutiny a obráceně. Řešení Maxwellovy rovnice je relativně složité, ovšem jak se dá dále prokázat, v běžných technických aplikacích lze nutnost řešení Maxwellovy rovnice obejít. Teorii, která to umožňuje, se říká MHD aproximace pro malé hodnoty magnetického Reynoldsovo čísla 2.15.

$$R_m = \mu_m \sigma u l \ll 1 \tag{2.15}$$

Většina technických aplikací v průmyslu a v laboratorních podmínkách pracuje s maximálními rychlostmi magneticky buzeného proudění $u \approx 0.001 - 0.1 \frac{m}{s}$, magnetická permeabilita většiny uvažovaných materiálů dosahuje řádu $10^{-7} \frac{kg\ m}{s^2 A^2}$, elektrická vodivost je v řádu $10^6 \frac{s^3 A^2}{kg\ m^3}$ a délkové rozměry se pohybují v rozmezí $0.01 - 0.1m$. Magnetické Reynoldsovo číslo se pak pohybuje v rozmezí $10^{-3} - 10^{-6}$. Jak je patrné, podmínka velmi malé hodnoty magnetického Reynoldsova čísla je vždy dodržena ve většině technických aplikací a lze proto pro tyto typické problémy odvodit zjednodušený matematický model.

Nejprve předpokládáme stacionární magnetické pole, které působí na vodivou tekutinu, která se ovšem nepohybuje $\mathbf{u} = 0$. Za těchto podmínek označíme indukci magnetického pole $\mathbf{B_0}$, elektrický potenciál $\mathbf{A_0}$ a hustotu indukovaného proudu $\mathbf{J_0}$. Jako druhý případ se předpokládá, že se tekutina pohybuje a důsledkem tohoto pohybu dochází k narušení magnetického pole. Nové magnetické pole indukované pohybem tekutiny je velmi slabé v porovnání k původnímu magnetickému poli a tato tzv. fluktuace magnetického pole se označí jako $\mathbf{b}$, elektrický potenciál $\mathbf{a}$ a hustota indukovaného proudu $\mathbf{j}$. Základní rovnice pro oba případy jsou dány vztahy 2.16 - 2.19.

$$\nabla \times \mathbf{A_0} = 0 \tag{2.16}$$

$$\mathbf{J_0} = \sigma \mathbf{A_0} \tag{2.17}$$

$$\nabla \times \mathbf{a} = -\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \tag{2.18}$$

$$\mathbf{j} = \sigma \left(\mathbf{a} + \mathbf{u} \times \mathbf{B_0} \right) \tag{2.19}$$

V rovnici 2.19 se zanedbal výraz druhého řádu $\mathbf{u} \times \mathbf{b}$. Faradayova rovnice udává, že fluktuace elektrického potenciálu je definovaná jako $\mathbf{a} \sim \mathbf{ub}$ a tak oscilace elektrického pole mohou být v rovnici 2.19 rovněž zanedbány. Známý Ohmův zákon pak bude s ohledem na zde uvedené zjednodušení definován vztahem 2.20.

$$\mathbf{J} = \mathbf{J_0} + \mathbf{j} = \sigma \left(\mathbf{A_0} + \mathbf{u} \times \mathbf{B_0} \right) \tag{2.20}$$

Elektrický potenciál $\mathbf{A_0}$ může být nahrazen gradientem elektrostatického potenciálu $-\nabla \phi$. Ohmův zákon ze vztahu 2.20 lze pak pomocí elektrostatického potenciálu přepsat na tvar 2.21.

$$\mathbf{J} = \sigma \left(-\nabla \phi + \mathbf{u} \times \mathbf{B_0} \right) \tag{2.21}$$

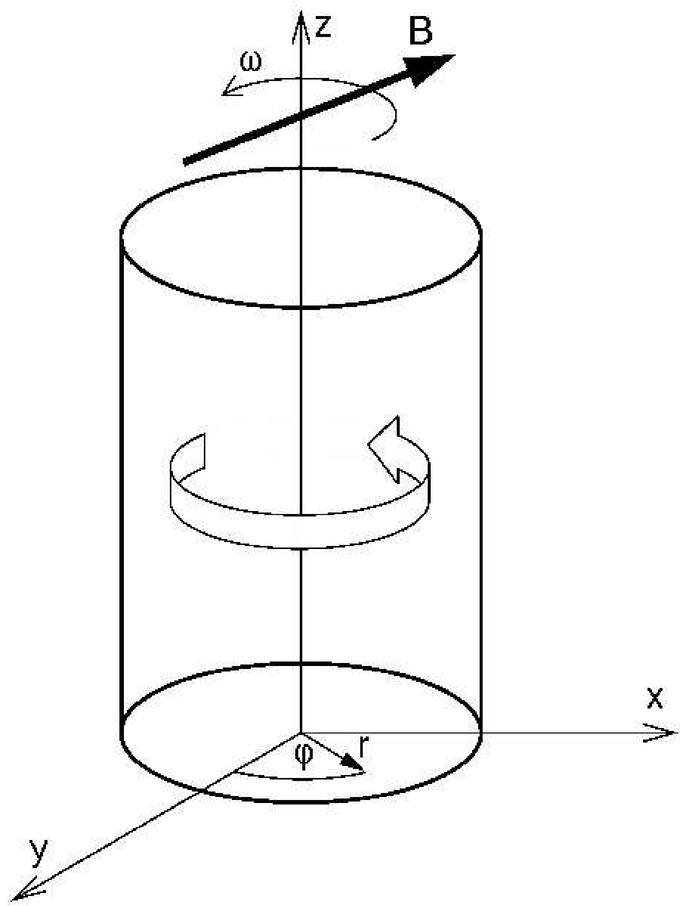
Definice Lorentzových sil na jednotku objemu jsou dány vztahem 2.22.

$$\mathbf{F} = \mathbf{J} \times \mathbf{B_0} \tag{2.22}$$

Jak je možné pozorovat ze vztahu 2.21 a 2.22, Lorentzovy síly jsou nezavislé na $\mathbf{b}$ a v případě malých hodnot magnetických Reynoldsových čísel platí, že vliv pohybu vodivé tekutiny nemá skoro žádný vliv na magnetické pole a tudíž pouze působení magnetického pole na vodivé tekutiny je jediný významný fakt MHD aproximace. Tato skutečnost má nesmírný význam pro sestavení matematického modelu rozložení Lorentzových sil, pro kterou není zapotřebí počítat Maxwellovu rovnici. Tím se výpočet výrazně zjednodušuje a přibližuje se tak praktickému využití s ohledem na kapacity současných výpočetních stanic. Jak bude dále prezentováno, lze většinu Lorentzových sil definovat pomocí analytických vztahů, které vždy vycházejí z rovnic definovaných výše.

2.4 Rotující magnetické pole

Problematika rotujícího magnetického pole a jeho účinku pro laminární stabilní a turbulentní nestabilní proudění v elektricky vodivé tekutině bylo tématem disertační práce Fraňa [21]. V rámci následující kapitoly jsou prezentovány pouze nezbytně nutné informace pro pochopení studie provedené v rámci této publikace. V případě dalšího zájmu lze odkázat právě na citovanou práci.



Obrázek 2.1: Schéma působení rotujícího magnetického pole.

Magnetické rotující pole RMP s magnetickou indukcí B_0 rotuje s konstantní frekvencí ω ve válcové nádobě s průměrem R a výškou H. Uvnitř válce se nachází elektricky vodivá tekutina s koeficientem elektrické vodivosti σ. Stěny nádoby se uvažují za elektricky dokonale izolované. Působením magnetického pole se vyvolává pohyb tekutiny, jehož hlavní složka je v azimutálním směru. Důsledkem silové nerovnováhy vzniká kromě hlavního rotujícího azimutálního proudění rovněž mnohem slabší sekundární proudění, které působí ve vertikálním směru proti gravitační síle. Tento pohyb je ve skutečnosti nejdůležitější, neboť zajišťuje transport hmoty v celém objemu válce a tak přispívá k vyrovnání teplotních rozdílů v rámci celého objemu. Bohužel sekundární proudění je v porovnání k hlavnímu proudění velmi slabé, a proto je zapotřebí použít velmi silnou intenzitu magnetického pole, aby došlo k vybuzení dostatečně silného sekundárního proudění. Na druhou stranu velmi silné magnetické pole vyvolá turbulentní režim proudění, které přináší oscilace do rychlostního pole a způsobuje např. nehomogenní rozložení teplotního pole. Aby se přesně vymezily podmínky použití rotujícího magnetického pole, je nutné znát kritickou hodnotu Taylorova čísla. Tomuto konkrétnímu problému se věnuje kapitola 3, která pojednává právě o vzniku lineárních nestabilit v tocích vyvolaných magnetickým polem.

2.4.1 Matematický model RMP

Rotující magnetické pole je definováno vztahem 2.23, kde B_0 je absolutní hodnota magnetické indukce, ω je frekvence rotujícího magnetického pole.

$$\mathbf{B} = B_0[\cos(\varphi - \omega t)\mathbf{e}_r + \sin(\varphi - \omega t)\mathbf{e}_\varphi] \tag{2.23}$$

Definice magnetických externích sil je odvozena od základních vztahů definovaných v předešlých kapitolách, ovšem z praktického hlediska se pro definici těchto užívá analytický vztah, jehož forma je uvedena vztahem 2.24.

$$\mathbf{f_L} = \frac{1}{2}\sigma\omega {B_0}^2 r[1 - \frac{R}{r}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2J_1(\lambda_k r/R)cosh(\lambda_k z/R)}{(\lambda_k^2 - 1)J_1(\lambda_k)cosh(\lambda_k H/2R)}]\mathbf{e}_\varphi \tag{2.24}$$

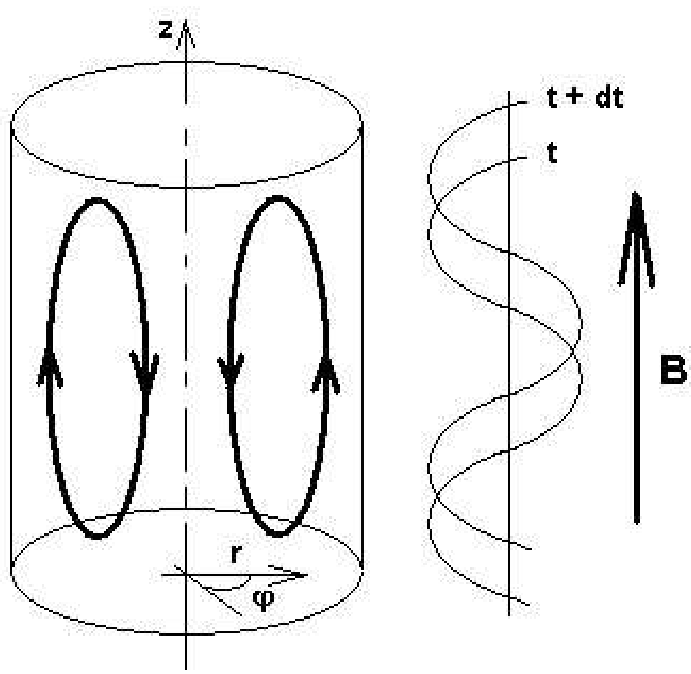
J_k představuje Besselovu funkci prvního typu a k-tého řádu a λ_k je kořen určený $\lambda_k J_0(\lambda_k) - J_1(\lambda_k) = 0$. Takto lze za určitých podmínek (malá magnetická indukce a malá frekvence rotujícího magnetického pole) definovat rozložení indukovaných sil, které odpovídá ve skutečnosti složitým rovnicím definovaných v rámci kapitoly 'Matematický model pro malé hodnoty magnetického Reynoldsova čísla'. Přesné odvození zde zmíněného analytického vztahu 2.24 je možné nalézt v literatuře GORBATCHEV [10].

$$T_m = \frac{\sigma \omega B_0^2 R^4}{2\rho\nu} \tag{2.25}$$

Stav proudění je popsán velikostí magnetického Taylorova čísla, jehož definice je dána dle vztahu 2.25.

2.5 Translační magnetické pole (TMP)

Translační magnetické pole (TMP) působí s absolutní hodnotou magnetické indukce B_0, s vlnovým číslem a a s frekvencí pohybu magnetického pole ω na vodivou tekutinu uvnitř nádoby. Stěny nádoby se uvažují za elektricky dokonale izolované.



Obrázek 2.2: Schéma působení translačního magnetického pole.

Na obrázku 2.2 je znázorněno působení translačního magnetického pole na tekutinu uvnitř válcové nádoby o poloměru R a konečné výšky H s určujícím parametrem $Z = R/2H$. V důsledku působení magnetického pole na elektricky vodivý materiál (σ) vzniká ve válcové nádobě proudění ve vertikálním směru tvořené dvěma víry ve formě dvou anuloidů viz. 2.2. Výhodou TMP je možnost vyvolat proudění přímo ve směru působení gravitační síly. Oproti rotujícímu magnetickému poli, kdy proudění ve směru působení rotace představuje slabší sekundární proudění, je možné pomocí TMP vyvolat relativně intenzivní rychlostní pole v tomto směru. To předurčuje použít toto magnetické pole u mnoha technických aplikacích spojených se stabilizací proudění např. v oblasti krystalizace materiálů či výroby monokrystalu.

2.5.1 Současný stav znalostí v oblasti aplikací TMP

Zatímco proudění dané rotujícím magnetickým polem bylo jak experimentálně, tak i numericky důkladně studováno, translační magnetické pole se dostalo do zájmu vědy až v posledních letech. Toto magnetické pole se nejčastěji používá jako elektromagnetický generátor pro pohyb elektricky vodivých tekutin. Jedna ze základních studií je 2D numerická studie matematického modelu pro translační magnetické pole v aplikaci generátoru a elektromagnetické pumpy Kamiyama [22]. V rámci tématu této práce je větší pozornost věnována aplikaci TMP v metalurgii. V práci Ramachandrana [24] je uskutečněna studie stabilního a nestabilního režimu proudění generovaného translačním magnetickým polem. Z výsledků práce vyplývá podstatný závěr a to, že tento druh magnetického pole je velmi atraktivní pro růst krystalů a jejich tvarů. Navíc intenzita TMP ovlivňuje výrazně také změny v dynamice krystalizace. Experimenty dále prokázaly, že rovněž jako u RMP i u TMP existují kritické hodnoty, při jejichž překročení vzniká nestacionární přechodové proudění. V rychlostním poli se začínají objevovat oscilace, které nejsou žádoucí pro aplikace vyžadující právě homogenní prostředí. Stanovení kritické hodnoty kriteriálního čísla je tak podstatné pro vymezení oblasti aplikovatelnosti translačního magnetického pole. Problém přesné identifikace vzniku prvních lineárních nestabilit v proudění je zpracováno v publikaci Grantse a Gerbetha [16] a Gelfgata [40]. Více na toto téma lze nalézt později v kapitole lineární a nelineární nestability. TMP lze také úspěšně použít pro Bridgmanovu technologii krystalizace materiálu. Detaily studie je možné nalézt v literatuře Yesilyurta [34], kde je problém účinku translačního magnetického pole ve spojení s přirozenou konvekcí zpracován numericky i experimentálně.

2.5.2 Matematický model TMP

Matematický model translačního magnetického pole je složitější, než je tomu u rotujícího magnetického pole. V současné době existuje několik variant, přičemž jak bude ukázáno později, za určitých okolností a zjednodušení vedou všechny tyto varianty k jedné společné formulaci rozložení externích sil vznikajících v důsledku působení magnetického pole na vodivé materiály.

Pohybující se magnetické pole ve vertikálním směru je popsáno obecně vektorovým potenciálem $\mathbf{A}$ ve vztahu 2.26.

$$\mathbf{A} = A(r)sin(\omega t - a_m z)\mathbf{e}_\varphi \tag{2.26}$$

Frekvence translačního magnetického pole je označena jako ω a a_m je v tomto případě vlnové číslo. Řešení vztahu 2.26 pro případ válcové nádoby konečných rozměrů je stejné jako analytické řešení (2.27) rozložení externích sil vznikajících působením magnetického pole ve vodivém materiálu.

$$\begin{aligned} f_\varphi &= 0 \\ f_r &= F_t \frac{Im\left[J_1(\beta r) J_0(\beta r)\right]}{|J_0(\beta)|^2} \\ f_z &= F_t a_m \frac{|J_1(\beta r)|^2}{|J_0(\beta)|^2} \end{aligned} \tag{2.27}$$

Ve vztahu 2.27 představuje F_t amplitudu, která je dále definovaná ve vztahu 2.28 a parametr β je definován jako $\beta = \sqrt{a_m^2 + i\gamma}$. Parametr γ je popsán vztahem $\gamma = \sigma\omega\mu_m R^2$, kde σ je elektrická vodivost materiálu a μ_m magnetická permeabilita.

$$F_t = A_0^2 \left(\frac{\sigma\omega R^2}{2\rho\nu^2}\right) \tag{2.28}$$

Magnetické pole budí externí síly ve vodivé tekutině, jejichž složky jsou dány vztahem 2.27. Azimutální složka síly je nulové hodnoty, radiální složka představuje potenciál, který neovlivňuje rychlostní pole tekutiny a tudíž ji lze pro výpočet pohybu tekutiny zanedbat. Pro námi uvažovaný výpočet je tak rozhodující pouze axiální složka síly, kterou je možné dále zjednodušit. Vlnové číslo a_m lze definovat jako $a_m = 2\pi R/L$, kde L je vlnová délka. Z praktického hlediska je možné považovat hodnotu $a_m \approx 1$ a $\gamma \approx 1$. Tímto způsobem se zjednoduší vztah pro axiální složku z rovnice 2.27.

$$f_z = F_t a_m |\beta|^2 \frac{r^2}{4} \tag{2.29}$$

Vztah 2.29 lze ještě dále upravit zahrnutím vztahu 2.28, takže konečná forma pro externí síly buzené magnetickým translačním polem je definována vztahem 2.30.

$$\mathbf{f_L} = \frac{B_0^2 \sigma \omega a_m}{8} r^2 \mathbf{e}_z \tag{2.30}$$

Ve vztahu 2.30 označuje B_0 absolutní magnetickou indukci. Jak dále ukazuje vztah 2.30, je rozložení externích sil dáno kvadratickou změnou radiální vzdálenosti. Toto analytické řešení bylo použito v pracích Grantse a Gerbetha [16]. V práci Gelfgata [40]. Ramachandran [24] byla zveřejněna jiná forma analytického řešení externích sil 2.31.

$$\mathbf{f} = -\mathbf{e}_r \sigma u_r < B_z^2 > -\mathbf{e}_z \sigma \left(u_z - \frac{\omega}{a_m} \right) < B_r^2 > \tag{2.31}$$

Rovnici 2.31 je možné dále zjednodušit za předpokladu, že vliv indukovaného pohybu tekutiny na magnetické pole bude zanedbatelný vůči vlivu magnetického pole na tekutinu. Tomuto předpokladu odpovídá většina technických problémů, které se řeší. Za předpokladu uvážení tohoto zjednodušení je možné vztah 2.31 dále zjednodušit.

$$f_z = \sigma \frac{\omega}{a_m} < B_r^2 > \tag{2.32}$$

Parametr $< B_r^2 >$ je definován dle vztahu 2.33.

$$< B_r^2 >= \frac{1}{2} B_0^2 I_1^2(a_m r) \tag{2.33}$$

Vztah 2.33 je nutné dále upravit za stejných podmínek jako v předchozím odvození. Velikost vlnového čísla je blízká k 1, takže $a_m \approx 1$. Za těchto podmínek je možné formu vztahu 2.33 upravit do nové podoby, takže výraz pro externí sílu 2.32 lze napsat ve tvaru 2.34.

$$\mathbf{f_L} = \frac{1}{8} B_0^2 \sigma \omega a_m r^2 \mathbf{e}_z \tag{2.34}$$

Jak dokazuje vztah 2.34 odvozený na základě vztahu 2.31 je možné považovat základní analytický vztah autorů Grantse a Gerbetha [16], Gelfgata [40] a Ramachandrana [24] za totožný. Jak ale ukazuje práce Gelfgata [40], průběh rozložení Lorentzových sil se výrazně změní, jakmile se bude předpokládat, že vlnové číslo nebude $a \approx 1$. Pro hodnoty $a \gg 1$ je nutné pro výpočet externích sil uvažovat vztah 2.31.

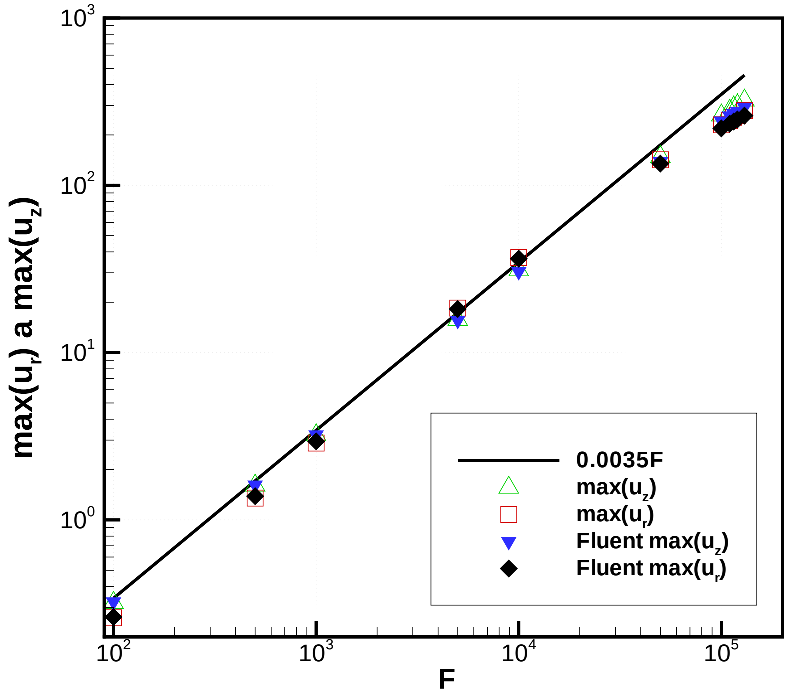
V rámci numerické simulace proudění s účinkem působení translačního magnetického pole bude použit identický vztah pro definici rozložení externích sil 2.30 nebo 2.34. Tímto způsobem se nabízí také možnost porovnat současné publikované výsledky s vlastními výsledky a tak prokázat jejich správnost. K popisu stavu proudění generované translačním magnetickým polem se nejčastěji používá tzv. kriteriální číslo označené jako F, které je definováno ve vztahu 2.35

$$F = \frac{\sigma \omega B_0^2 a_m R^5}{4 \rho \nu^2} \tag{2.35}$$

Kriteriální číslo F má obdobné použití jako Taylorovo číslo, které se běžně používá v souvislosti s rotujícím magnetickým polem. Definice kriteriálního čísla F se formuluje na základě externích sil pro translační magnetické pole. Tato formulace kriteriálního čísla byla použita v literatuře Grantse a Gerbetha [16]

2.5.3 Verifikace matematického modelu TMP

K verifikaci matematického modelu pro TMP je možné využít dosavadní znalosti o vývoji maximálních hodnot radiální a axiální složky rychlosti v oblasti axisymetrického proudění definovaného malými hodnotami kriteriálního čísla F.

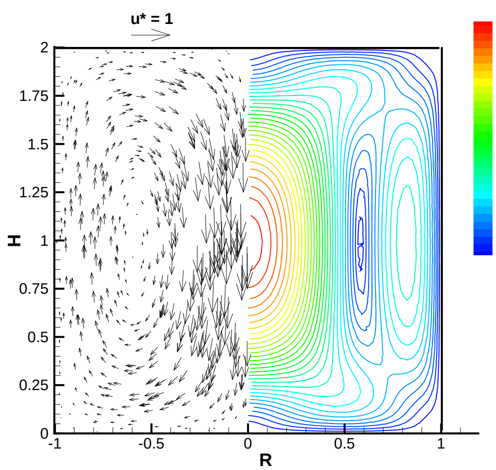


Obrázek 2.3: Vývoj maximálních hodnot radiální a axiální složky rychlosti.

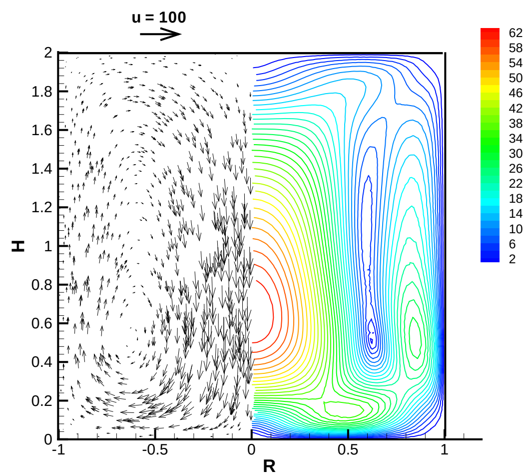
Dle práce Grantse a Gerbetha [16] je vývoj maximálních hodnot radiální a axiální složky rychlosti definován závislostí $0.0035F$. Obrázek 2.3 zobrazuje vývoj maximálních hodnot radiální a axiální složky rychlosti magneticky buzeného proudění, přičemž jednoznačně ukazuje velmi dobrou shodu výsledků vlastního výpočtu s teorií Grantse a Gerbetha [16]. Vzhledem k tomu, že je ale možné pozorovat i malé odchylky od teoretického průběhu zejména pro velmi malé či velké hodnoty kriteriálního čísla, byly výsledky porovnány ještě s výpočtem uskutečněným pomocí komerčního programu Fluent. I v případě výsledků pomocí komerčního programu Fluent existují patrné odchylky průběhu maximálních hodnot radiální a axiální složky rychlosti od teorie Grantse a Gerbetha [16] a naopak tytéž výsledky potvrzují velmi dobrou shodu s výpočtem realizovaným pomocí vlastního programu. Jak ukazují samotné výpočty Grantse a Gerbetha [16] teoretický průběh $0.0035F$ odpovídá pouze přibližně a v případě jejich výpočtů existují rovněž patrné odchylky od tohoto teoretického průběhu.

2.5.4 Výsledky numerické simulace proudění vyvolaného TMP

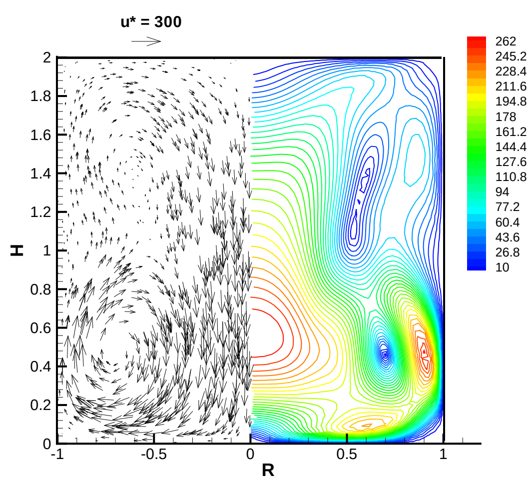
Pro oblast malých hodnot kriteriálního čísla F je magneticky generované proudění osově symetrické a v proudění nevznikají žádné oscilace v rychlostním poli. Z hlediska aplikace je tento klidný stav proudění nejvýhodnější, neboť rovnoměrně rozložené rychlostní pole přispívá k rovnoměrnému rozložení teplot, což se pozitivně odrazí v procesu tuhnutí materiálu v technologických procesech zpracování kovů.



$F = 1 \times 10^2$



$F = 1 \times 10^4$



$F = 1 \times 10^5$

Obrázek 2.4: Znázornění rychlostního pole v řezu r-z

Na obrázku 2.4 je ve vertikálním řezu r-z zobrazeno okamžité rychlostní pole v bezdimenzionální formě $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}R/\nu$. Poněvadž je proudění osově symetrické, je hlavní vertikální pohyb tekutiny zobrazen na levé straně vertikálního řezu nádobou pomocí vektorového pole, zatímco na pravé straně je vykresleno okamžité rychlostní pole pomocí izočar (rychlostní pole u dalších hodnot F jsou znázorněny v příloze na obr. 5.3). Z obrázků dále vyplývá, že se vzrůstající hodnotou F se mění výrazně rozložení rychlosti. V případě velmi malých hodnot F ($\approx 1 \times 10^2$) vzniká v proudění dominantní vír, jehož střed se nachází v polovině poloměru a výšky nádoby. Tento střed vírů se postupně posouvá směrem ke dnu nádoby s tím, jak se zvyšuje intenzita magnetického pole. Dále dochází k růstu intenzity rychlostního pole, přičemž při vyšších hodnotách F se již vytváří tenká mezní vrstva na dnu a na vertikální stěně do $1/3H$. Jak je dále patrné z obrázku 2.4, v případě vyšší hodnoty F je intenzita proudění výrazně vyšší v oblasti od dna do 1/3 výšky nádoby, kde existuje velmi silný vír, který napomáhá zesílení transportu hmoty. Na druhou stranu ovšem dochází k zeslabení účinku proudění ve zbylé části nádoby, což se prakticky projeví zhoršením intenzity promíchávání tekutiny a tím i dochází k nerovnoměrnému rozložení teplotního pole. V případě tuhnutí materiálu se může očekávat, že vzniklá struktura materiálu bude nehomogenní obzvláště v horní části nádoby.

Kapitola 3

Lineární a nelineární nestability v proudění

V rámci této kapitoly je věnována pozornost vzniku lineárních či nelineárních nestabilit v proudění, které je buzeno magnetickým polem. Vznik nestabilit v proudění označuje přechod ze stabilního režimu proudění do oblasti přechodového nebo turbulentního proudění. Z pohledu matematického modelu je zde uvažované proudění popsané Navier-Stokesovymi rovnicemi, přičemž základní rovnice hybnosti obsahuje nelineární člen, jenž je zodpovědný za vznik nestabilit v proudění. Tento člen je v případě laminárního proudění v porovnání k ostatním členům rovnice slabý, ovšem jeho vliv na rovnováhu v rovnici hybnosti roste tak, jak se zvyšuje Reynoldsovo číslo. Od určitého poměru mezi nelineárním konvektivním a třecím členem se začnou objevovat v proudění nestability, které vedou k narušení proudění a vzniku změn v proudění. Vlastností nestabilit je skutečnost, že jen malý přírůstek energie na počátku vyvolá velkou změnu energie na výstupu. V současné době existuje široká řada metod zabývajících se vznikem a identifikací lineárních nestabit od možnosti matematicky analyzovat pomocné rovnice popisující stabilitu systému (teorie lineárních nestabilit) např. Cebeci [36] a nebo přímo řešit Navier-Stokesovy rovnice prostřednictvím výpočetního kódu. Tento druhý případ je zvolen v této kapitole a prostřednictvím této metody jsou nalezeny kritické hodnoty kriteriálních čísel (Reynoldsovo číslo, Taylorovo číslo apod.).

3.1 Teorie lineárních nestabilit

Teorie lineárních nestabilit vychází z řešení (přibližné řešení) základních určujících rovnic popisující zákon zachování hybnosti. Nejprve se určuje prostřednictvím výpočtu ustálené stacionární proudění dané okamžitou rychlostí $\mathbf{u_0}$ a tlakem p_0. Po dosažení ustáleného stacionárního stavu proudění se k rychlostnímu a tlakovému poli přičítá výrazně slabší tzv. rušivé rychlostní pole $\mathbf{u_r}$ a tlakové pole p_r. Celkové rychlostní pole $\mathbf{u} = \mathbf{u_0} + \mathbf{u_r}$ a tlakové pole $p = p_0 + p_r$ se pak řeší podle určujících rovnic a materiálové konstanty se pro jednodušší vysvětlení budou uvažovat o hodnotě 1.

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u_0} \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u_0} = -\nabla \mathbf{p} + \nabla^{\mathbf{2}} \mathbf{u} + \mathbf{f} \tag{3.1}$$

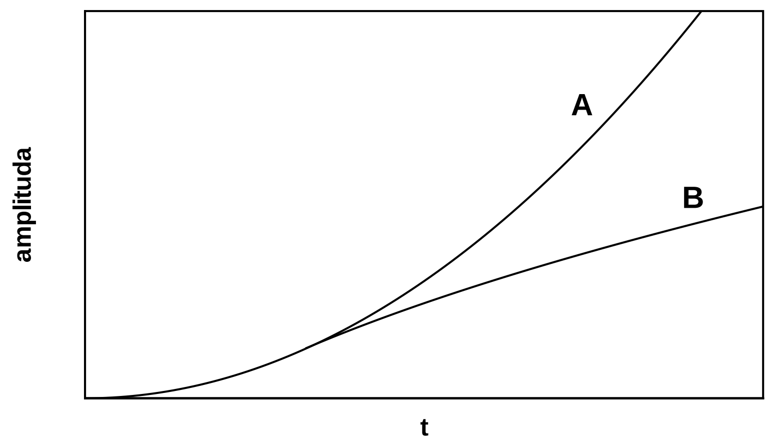
Rychlostní pole $\mathbf{u}$ musí splňovat základní rovnici kontinuity. Okrajové podmínky jsou definovány pouze jako tzv. non-slip podmínky vyjádřené výrazem $\mathbf{u}(\mathbf{x} = \mathbf{\Gamma}) = \mathbf{0}$. Daná soustava rovnic se dále řeší a pozoruje se, jak se vyvíjejí nestability v rámci časového vývoje. Jakékoliv rychlostní pole s rušivými jevy lze analyzovat pomocí Fourierovy analýzy. Předpokládá-li se pouze lineární typ nestability, pak platí, že neexistuje žádná vazba mezi jednotlivými Fourierovými komponenty. Za podmínek prostorového rušivého pole popsaného pomocí sinusového průběhu se pak časový vývoj těchto vzruchů v proudění objevuje ve formě $e^{\sigma t}$.

$$\Delta Q \approx e^{[ikr + \delta t]} \tag{3.2}$$

Parametr δ je definován reálnou a imaginární částí dle vztahu $\delta = i\delta_i + \delta_r$.

Znaménko reálné části δ_r udává, zda-li rušivé jevy budou růst (pozitivní) a nebo se utlumí (negativní). Jednotlivé Fourierovy koeficienty lze označit jako k (vlnová čísla). Jestliže δ_r je negativní pro všechny hodnoty k, pak lze jednoznačně říci, že dané proudění je stabilní. Tato podmínka se nazývá obecně podmínkou stability. Na druhou stranu při pozitivní hodnotě δ_r pro alespoň jedno libovolné k bude platit, že se rušivý jev v proudění bude zesilovat. Tato podmínka je dostatečná podmínka pro nestabilní proudění.

Obrázek 3.1 ukazuje možné vývoje amplitudy vzruchů v proudění. Jak naznačuje ilustrativní obrázek, existují různé možnosti růstu amplitudy rušení. Křivka A ukazuje



Obrázek 3.1: Ilustrační obrázek možných časových vývojů amplitudy oscilací v libovolném typu nestabilního proudění

velmi rychlý spontánní růst amplitudy, zatímco křivka B ukazuje zpočátku velmi rychlý růst, který se výrazně zpomalí postupem času.

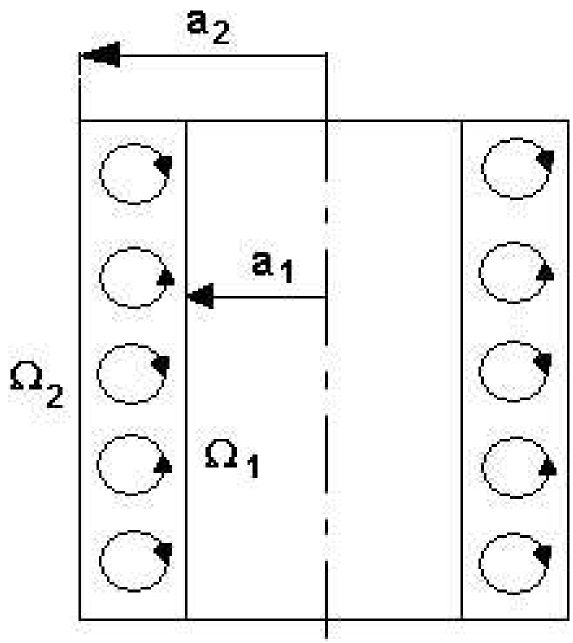
Vznik a vývoj lineárních nestabilit lze velmi názorně ukázat na případu Couettova rotačního proudění, které představuje rotaci dvou pevných stěn kolem jedné společné vertikální osy. Obrázek 3.2 ukazuje schéma Couettova proudění.

Podle úhlové rychlosti Ω_1,Ω_2 a velikosti nádoby určené poloměry a_1 a a_2 je možné nalézt několik různých režimů proudění. Pro vysvětlení lineárních nestabilit se bude dále uvažovat jednodušší případ, kdy $\Omega_2 = 0$. Reynoldsovo číslo je pak definované dle vztahu 3.3.

$$Re = \Omega_1 a_1 \left(a_2 - a_1\right)/\nu \tag{3.3}$$

Předpokládá-li se rušení rychlostního a tlakového pole dle vztahů 3.4 a 3.5, pak studie lineárních nestabilit umožňuje identifikovat hranici stabilního a nestabilního proudění.

$$\Delta U = U(r) \exp^{[i(m\varphi + kz) + \delta t]} \tag{3.4}$$



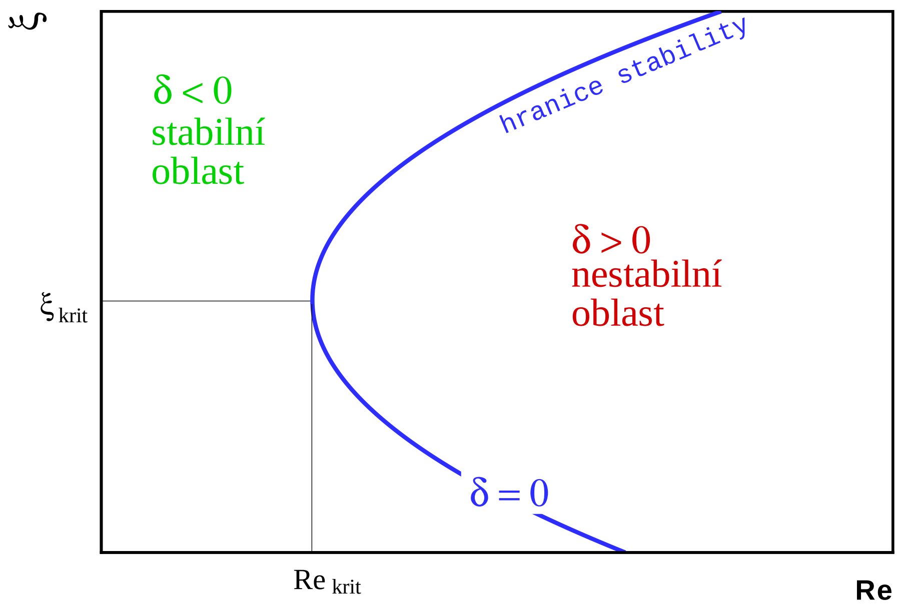
Obrázek 3.2: Schéma Couettovy úlohy s vyznačením vznikajících rotujících vírů

$$\Delta p = P(r) \exp^{[i(m\varphi + kz) + \delta t]} \tag{3.5}$$

Ve vztahu 3.4 a 3.5 označuje φ azimutální a z axiální směr proudění. Parametr m je libovolné pozitivní celé číslo. Předpokládá-li se dále případ, kdy $m = 0$, pak test lineárních nestabilit je uskutečněn pro axisymetrické podmínky a $\delta_i = 0$. Získané výsledky analýzy lineárních nestabilit lze názorně zobrazit dle ilustračního obrázku 3.3, kde amplituda δ je vyjádřena v bezdimenzionální formě dle vztahu 3.6.

$$\xi = k\,(a_2 - a_1) \tag{3.6}$$

Pro velmi nízké hodnoty Reynoldsova čísla je σ negativní pro všechny hodnoty ξ. Totéž platí nejen pro $m = 0$, ale i pro $m \neq 0$ tj. pro všechny hodnoty m se oscilace rušení utlumí a azimutální proudění zůstává stabilní. V případě vyšších hodnot Reynoldsova čísla bude amplituda δ pozitivní pro určité hodnoty ξ. To bude mít za následek stálý nárůst amplitudy oscilací. V klasickém testu lineárních nestabilit se zde



Obrázek 3.3: Ilustrační obrázek stabilních a nestabilních oblastí a hranice stability pro Couettův typ proudění

popsaná studie uskuteční pro každou hodnotu m a určí se minimální hodnota Reynoldsova čísla. Hledaná výsledná kritická hodnota Reynoldsova čísla je rovna jednotlivým minimálním Reynoldsovým číslům z jednotlivých m tj. $Re_{min} = Re_{cr}$.

3.2 Dosavadní znalosti a publikace

V následující kapitole je věnována pozornost předchozím výsledkům studie lineárních a nelineárních nestabilit v prouděních vyvolaných rotujícím a translačním magnetickým polem. Poněvadž se charakter proudění výrazně mění v okamžiku, kdy se překročí určitá hranice kritického kriteriálního čísla, je tato studie velmi důležitá pro vymezení praktické aplikovatelnosti metod magnetického buzení v technologických procesech. Zde již zmíněné skutečnosti, že při překročení určité mezní hodnoty kriteriálního čísla se výrazně mění charakter proudění, si již povšiml Richardson [2], který svoji prvotní studii zaměřil na rotující magnetické pole působící na elektricky vodivou tekutinu v nádobě o teoreticky nekonečné výšce. Snahy o přesnější identifikaci kritických hodnot proudění, při kterých se poprvé objevují nestability, přišly na řadu až později v rámci prací Kaisera a Benze [37], Marthyho a Martin Witkowskiho [29], Mössnera a Gerbetha [31] a Grantse a Gerbetha [13]. Pro tyto zde zmíněné studie je typické, že se autoři omezovali na myšlenku axisymetrického proudění a zjištěné výsledky se vzájemně mírně lišily. Určení kritické hodnoty kriteriálního čísla, kritického módu a eventuální frekvence vznikajících oscilací energie bylo uskutečněno v závislosti na hustotě výpočetní sítě a velikosti nádoby dané poměrem průměru a výšky nádoby. S pomocí těchto vyjmenovaných studií byly odhaleny oscilace proudění ve vertikálním směru, ovšem otázka existence nestabilit v azimutálním směru a jejich úloha při vzniku počátků nestabilit v proudění zůstávala tak nezodpovězena. V práci Grantse a Gerbetha [14] je řešena problematika komplexního 3d proudění. Nové získané hodnoty mezního kriteriálního čísla, kritického módu, a frekvence amplitudy oscilací nestabilit se odlišovaly od stejné studie uskutečněné za podmínek axisymetrického proudění. Nicméně bylo zjištěno, že první nestability, které se objevují v proudění, jsou spojeny s oscilacemi azimutální rychlosti, které právě předchozí studie nemohly ze své podstaty identifikovat.

Všechny zde zmíněné studie byly uskutečněny použitím numerických metod. V publikaci Grantse a Gerbetha [15] je možné rovněž najít experimentální pozorování vzniku nestabilit. Obecné poznatky o vzniku nestabilit rotujícího proudění je možné nalézt společně s teorií v publikaci Gallaireho a Chomaze [8].

Na rozdíl od rotujícího magnetického pole, je studie vzniku lineárních nestabilit pro případ translačního magnetického pole mnohem chudší. Doposud jsou známé dvě významné práce, Grants a Gerbeth [16] a Gelfgat [40]. První studie byla zaměřena na obecné určení kritických hodnot spojených se vznikem lineárních nestabilit pro různé poměry průměru a výšky nádoby. Studie Gelfgata se zaměřuje na doplňující studii pro analýzu lineárních nestabilit pro různé hodnoty vlnových čísel a elektrické vodivosti materiálu. Jak demonstrují jeho výsledky, kritické hodnoty parametrů lineárních nestabilit jsou rovněž podstatně ovlivněny těmito dvěma parametry magnetického pole a materiálovou konstantou. Další informace ohledně vzniku nestabilit v případě rotujícího proudění lze také nalézt v literatuře Görtler [11] a Saric [39].

3.3 Popis numerického testu lineárních nestabilit

Většina publikací zabývajících se studií lineárních nestabilit pomocí numerické simulace vycházejí z výsledků, které byly získány pomocí výpočetních programů postavených na diskretizačních metodách vyšších řádů. Zpravidla se využívá řešení ve 2d, přičemž třetí rozměr se počítá na základě Fourierovy transformace. Takto lze rozložit rychlostní pole na jednotlivé módy již během samotného výpočtu a počítat tak jen ty módy, které jsou významné, tj. které jsou pro analýzu nestabilit důležité. Tato metoda umožňuje nejen snížit náročnost na výpočetní čas, ale rovněž nabízí mnoho dalších možností pro studii lineárních nestabilit např. oddělení závislosti jednotlivých módů během výpočtu.

Studie prezentovaná v rámci této práce zde popsanou metodu neumožňuje, nýbrž řeší celé proudění jako skutečné 3d proudění se všemi módy zároveň. Navíc diskretizační metoda nabízí maximálně přesnost druhého řádu. Tyto skutečnosti povedou k praktickému závěru, že bude možné počítat pouze omezený počet případů.

Matematický model použitý pro test lineárních nestabilit vychází z ustáleného proudění definovaného rychlostním polem u_0. Pro definování ustáleného vyvinutého proudění se použila dvě kritéria. První kritérium 3.7 je založeno na velmi malé změně ε^1 v rychlostním poli následného (n+1) a současného (n) časového kroku. Druhé kritérium je založeno na velmi malé změně ε^2 momentu rotace 3.8.

$$\varepsilon^1 = \left| \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\mathbf{u}^n} \right| \tag{3.7}$$

$$\varepsilon^2 = \int_\Omega r \cdot \mathbf{u}_\varphi^{n+1} d\Omega - \int_\Omega r \cdot \mathbf{u}_\varphi^{n} d\Omega \tag{3.8}$$

Po dosažení ustáleného vyvinutého proudění se zavede dodatečné rušení, bez kterého by jinak rychlostní pole zůstalo bez změny. Další výpočet potom ukáže vývoj těchto vzruchů v čase. Velikost rušivého rychlostního pole $\mathbf{u_r}$, které osciluje nepravidelně v prostoru, je dáno náhodnou funkcí s definováním maximální hodnoty $\mathbf{u_r} = 0.1\%\mathbf{u_0}$. Toto rušivé pole je v podstatě, co se týče vlivu na proudění, zanedbatelné, což lze dokázat následujícím vysvětlením.

Předpokládáme-li celkovou energii proudění dle vztahu 3.9, pak podobně můžeme vyjádřit celkovou energii pro dodatečné rušivé rychlostní pole vztahem 3.10.

$$e_0 = \frac{1}{2}\int_{\Omega} \mathbf{u}_0^2 d\Omega \tag{3.9}$$

$$e_r = \frac{1}{2}\int_{\Omega} \mathbf{u}_r^2 d\Omega \tag{3.10}$$

Vztah 3.10 lze dále upravit, jestliže se bude předpokládat, že maximální hodnota rušivého rychlostního pole je dána $0.1\%\mathbf{u_0}$, takže lze vyjádřit maximální možnou hodnotu energie rušivého rychlostního pole také dle vztahu 3.11.

$$e_r = 1 \times 10^{-6}\frac{1}{2}\int_{\Omega} \mathbf{u}_0^2 d\Omega \tag{3.11}$$

Kinetická energie nového rušivého rychlostního proudění je dána hodnotou $e_r = 1 \times 10^{-6} e_0$. Tato hodnota je velmi malá ke skutečné kinetické energii ustáleného rychlostního pole, ovšem jak ukážou výsledky numerické studie vzniku lineárních nestabilit pro rotující a translační magnetické pole, vyvolají tyto malé změny energie velkou odezvu v proudění, které leží již v oblasti nestabilního režimu proudění. V případě, že se dosáhnout uspokojivé výsledky, je možné současně prokázat správnost diskretizace nelineárního konvektivního členu Navier-Stokesových rovnic. Právě jakákoliv eventuální chyba v implementaci nelineárního členu by měla hrozivý dopad na konečné výsledky.

K definici samotného testu lineárních nestabilit je nutné ještě zmínit způsob vyhodnocení výsledků. Všechny průběhy energií v jednotlivých módech proudění jsou zaneseny do grafu, přičemž znázorněné hodnoty energie E^* jsou vztaženy na průměrnou hodnotu energie v módu 0. Tím je zaručena možnost vzájemného porovnání výsledků. Hodnoty rychlostí jsou vyjádřeny rovněž bezdimenzionálně dle vztahu $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}R/\nu$, kde R je poloměr nádoby, ν je kinetická viskozita tekutiny a $\mathbf{u}$ je skutečné rychlostní pole.

3.4 Proudění vyvolané rotujícím magnetickým polem

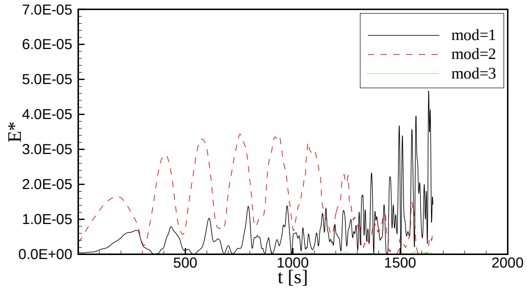
Test vzniku lineárních a nelineárních nestabilit byl uskutečněn na případu proudění generovaného rotujícím magnetickým polem. Výpočetní nestrukturovaná síť je tvořena elementy se 4 uzly (tetrahedral) s hustotou sítě odpovídající dělení $R/60$. Na této relativně jemné síti byla provedena studie vzniku nestabilit s cílem určit kritickou hodnotu Taylorova čísla, přislušný kriticky mód a frekvenci oscilací energie nebo rychlostí.

3.4.1 Velikost nádoby Z=1

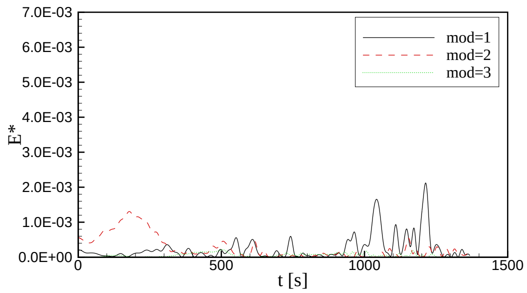
Test vzniku nestabilit v proudění byl uskutečněn na velikosti nádoby $Z = 1$, pro kterou jsou dostupné výsledky jiné numerické studie pocházející z výpočtů realizovaných přesnějšími metodami (spektrální metody s vysokým řádem interpolační funkce). Test nestabilit byl realizován na 4 případech Taylorova čísla $T_m = 1.1 \times 10^5$, $T_m = 1.2 \times 10^5$, $T_m = 1.25 \times 10^5$ a $T_m = 1.3 \times 10^5$. Tyto hodnoty Taylorových čísel byly zvoleny s ohledem na uskutečněnou studii stability proudění v případě rotujícího magnetického pole (Grants a Gerbeth [14]). Na obrázku 3.4 jsou uvedeny vývoje energií ve třech základních módech pro různou hodnotu Taylorova čísla.

Mezi hodnotou Taylorova čísla $T_m = 1.1 \times 10^5$ a $T_m = 1.2 \times 10^5$ dochází k velkému skoku v hodnotách energií až o dva řády u všech módů $m > 0$. Dalším zvýšením hodnot Taylorova čísla až na hodnotu $T_m = 1.3 \times 10^5$ se již hodnoty energií tak razantně nezvyšují. Na základě těchto testů se dá odhadnout hodnota kritického Taylorova čísla ležící přibližně kolem hodnoty $T_m = 1.2 \times 10^5$. Dle dostupných výsledků Grantse a Gerbetha [14] je hodnota kritického Taylorova čísla přibližně $T_m = 1.23 \times 10^5$. Odchylka zde prezentované studie tak činí maximálně 2.5%. To je relativně dobrý výsledek s ohledem na skutečnost, že použitá metoda konečných prvků umožňuje dosáhnout přesností maximálně druhého řádu.

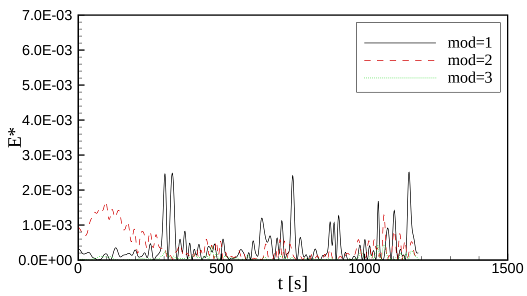
Jak dále ukazuje obr. 3.4, pro případ proudění definovaného hodnotou Taylorova čísla $T_m = 1.1 \times 10^5$ je možné pozorovat v počátku vývoje nestabilit relativně pravidelnou oscilaci energie u módu 1 a 2. Po určité době se oscilace módu 2 ovšem utlumí a dále převažují již pouze nepravidelné oscilace módu 1. Na vyšších hodnotách Taylorova čísla se ukazuje rovněž počáteční dominantní postavení módu 2 z hlediska rozložení energie a i zde později převládá mód 1. Na základě stejné studie Grantse a Gerbetha [14] je mód 2 právě hledaným kritickým módem. V případě zde uvedeného testu ovšem tento mód je co do velikosti energie s průběhem času zcela potlačen dalšími módy. Ve stejném časovém okamžiku se objevují v rychlostním poli náznaky existence Taylor-Görtlerových vírů 5.1. Tyto skutečnosti vedou k závěru, že v případě proudění generovaného rotujícím magnetickým polem není možné pozorovat vznik lineárních nestabilit nekonečně dlouho, neboť existence lineárních nestabilit se projevuje jen velmi



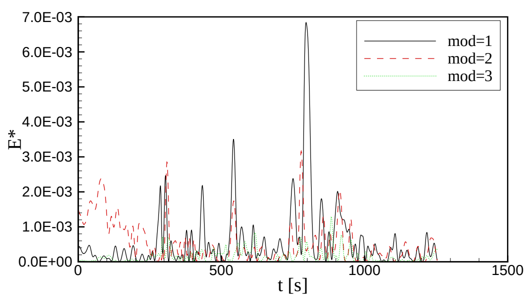
$T_m = 1.1 \times 10^5$



$T_m = 1.2 \times 10^5$

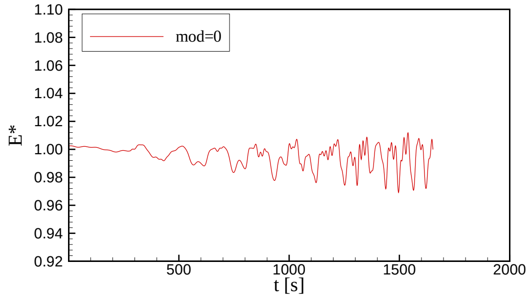


$T_m = 1.25 \times 10^5$

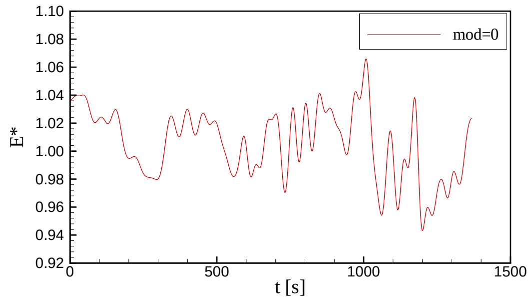


$T_m = 1.3 \times 10^5$

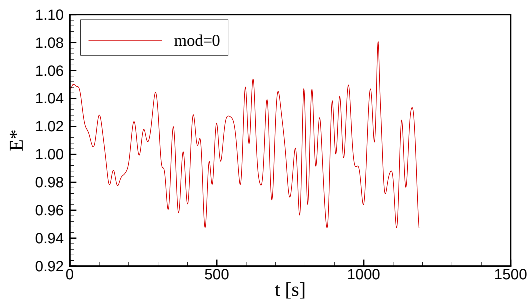
Obrázek 3.4: Vývoj energie v módech $m = 1$, $m = 2$ a $m = 3$ pro různé hodnoty Taylorova čísla T_m



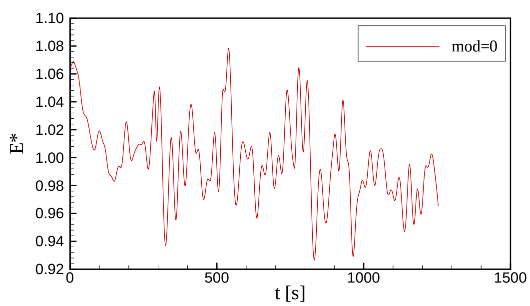
$T_m = 1.1 \times 10^5$



$T_m = 1.2 \times 10^5$



$T_m = 1.25 \times 10^5$



$T_m = 1.3 \times 10^5$

Obrázek 3.5: Vývoj energie v $m = 0$ pro různé hodnoty Taylorova čísla T_m

krátce na počátku testu. Později se objevují pouze nelineární nestability, kdy dochází k nepravidelným oscilacím energie všech zde pozorovaných módů.

Na obrázku 3.5 je možné pozorovat časový vývoj energie pro hlavní mód 0. V případě proudění definovaného hodnotou Taylorova čísla $T_m = 1.1 \times 10^5$ je amplituda oscilací energie přibližně 0.02, zatímco při vyšších hodnotách Taylorova čísla jsou již tyto hodnoty amplitud oscilací 0.1. I zde je patrný výrazný nárůstu energie při malé změně hodnoty Taylorova čísla. Vznikající oscilace energie módů 0 je nepravidelná ve všech pozorovaných případech Taylorova čísla.

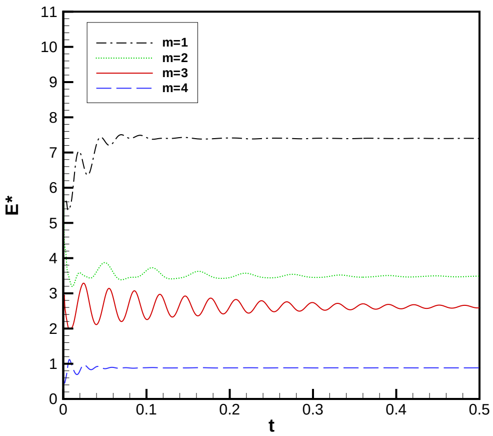
3.5 Proudění vyvolané účinkem translačního magnetického pole

Test lineárních nestabilit v proudění vyvolaného translačním magnetickým polem je studováno pro velikost nádoby $Z = H/2R = 1$ a $Z = H/2R = 0.5$. Základním cílem je opět nalézt kritickou hodnotu parametru F_{cr}, kritický mód m_{cr} a kritickou frekvenci λ_{cr} určujícího kritického módu. Získané výsledky lze porovnat s výsledky publikovanými v literatuře Grantse a Gerbetha [16] a Gelfgata [40]. Základní studie lineárních nestabilit je uskutečněna na velikosti nádoby $Z = 1$. Vliv studie sítě na vznik nestabilit včetně základního testu je uskutečněn na velikosti nádoby $Z = 0.5$.

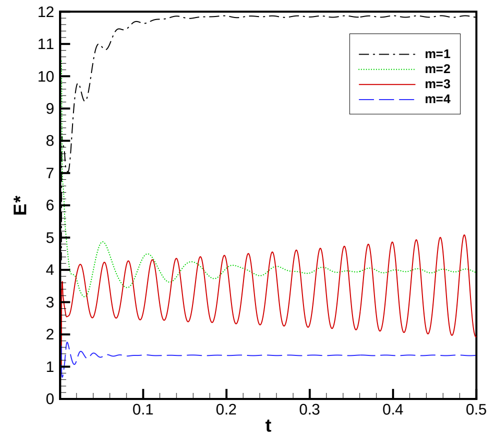
3.5.1 Velikost nádoby Z=1

Základní studie vývoje lineárních nestabilit je uskutečněna na velikosti nádoby $Z = H/2R = 1$. Výpočetní síť je dána 4 uzlovými elementy (tetrahedral) s hustotou sítě odpovídající rozdělení $R/30$. Test lineárních nestabilit byl uskutečněn na třech různých hodnotách kriteriálního čísla $F = 1.1 \times 10^5$, $F = 1.2 \times 10^5$ a $F = 1.3 \times 10^5$.

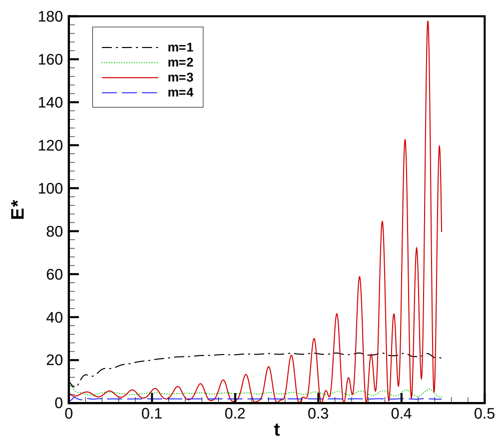
Obrázky 3.6 (a) ukazují časový vývoj energie v jednotlivých módech pro hodnotu čísla $F = 1.1 \times 10^5$. Zřetelné oscilace energie, které se objevily ve všech módech těsně po zavedení rušivých jevů do rychlostního pole, se postupně během časového vývoje utlumily. Tento fakt ukazuje na skutečnost, že proudění definované parametrem $F = 1.1 \times 10^5$ je stabilní. V případě, že se hodnota kriteriálního čísla zvýší na hodnotu $F = 1.2 \times 10^5$ vznikají opět oscilace v časovém vývoji energie.



a: F=1.1e+5



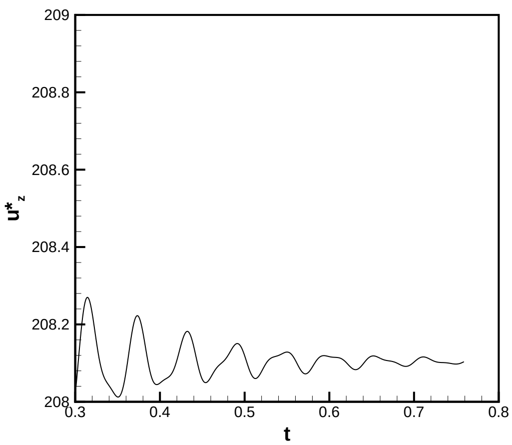
b: F=1.2e+5



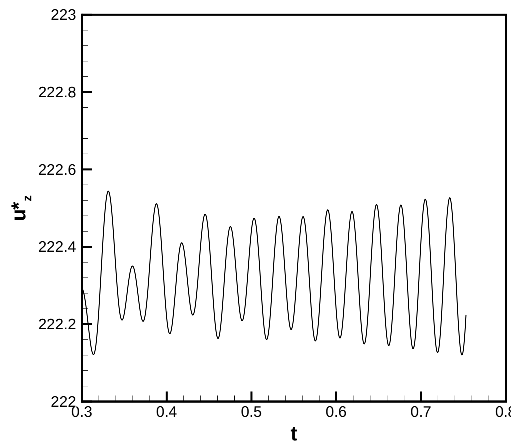
c: F=1.3e+5

Obrázek 3.6: Lineární nestability v proudění definované různými hodnotami kriteriálního čísla F

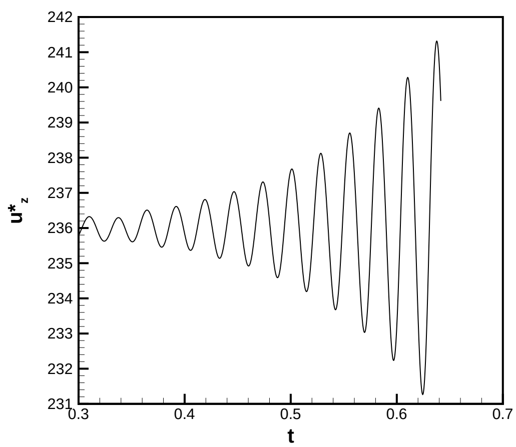
Obrázek 3.6 (b) ovšem ukazuje, že se oscilace energie v módu 3 neutlumí, zatímco ostatní módy zůstávají stabilní. Poněvadž se amplituda oscilací u módu 3 zvyšuje velmi pomalu, lze odhadovat, že proudění dané $F = 1.2 \times 10^5$ leží velmi těsně na hranici stability proudění. Jestliže se dále zvýší hodnota kriteriálního čísla na hodnotu $F = 1.3 \times 10^5$, amplituda oscilací energie prudce narůstá na módu 3 a zároveň později se objevují oscilace také u dalších módů obr. 3.6 (c).



a: F=1.1e+5



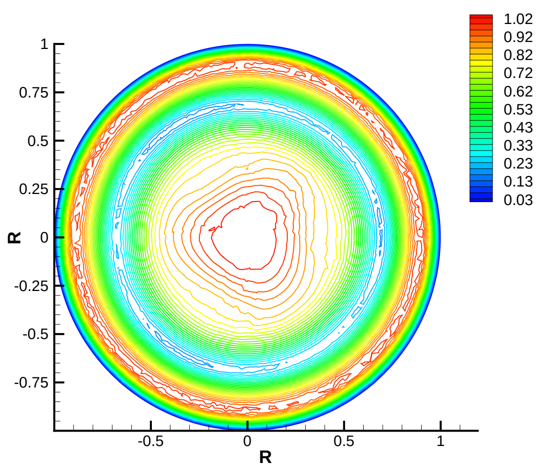
b: F=1.2e+5



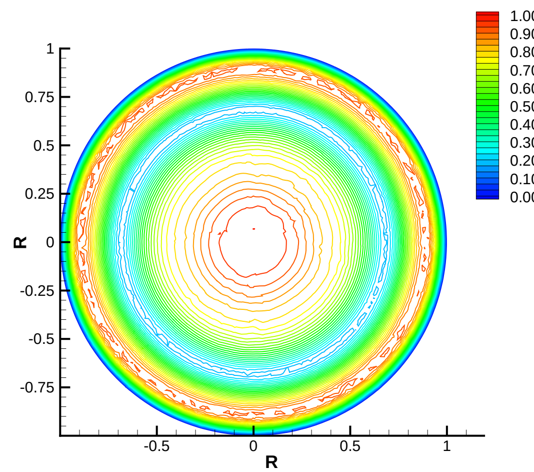
c: F=1.3e+5

Obrázek 3.7: Časový vývoj okamžité rychlosti pro různé hodnoty kriteriálního čísla.

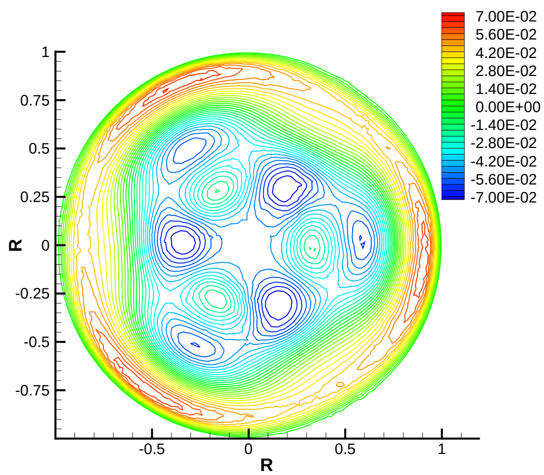
Prudký nárůst amplitudy u módu 3, a rovněž tak u dalších módů, potvrzuje, že proudění definované hodnotou $F = 1.3 \times 10^5$ leží definitivně v oblasti nestabilního proudění. Na základě obrázku 3.6 (b) lze odvodit, že kritická hodnota kriteriálního čísla pro proudění vyvolané translačním magnetickým polem leží blízko hodnoty $F_{cr} = 1.2 \times 10^5$. Kritickým módem je mód 3, kde se poprvé objevuje nárůst amplitudy oscilací energie bez útlumu amplitudy. Frekvence oscilací je dle obrázku 3.6 (b) $\lambda_i = 218$. Tyto zjištěné hodnoty jsou v dobré shodě s výsledky Grantse a Gerbetha[16], kteří



okamžité rychlostní pole



časově středované rychlostní pole



fluktuace rychlostního pole

Obrázek 3.8: Rychlostní pole pro $F = 1.3 \times 10^5$ v řezu r-r ve výšce z=0.546.

prezentovali výsledky $F_{cr} = 1.204 \times 10^5$, kritický mód 3 a kritickou frekvenci $\lambda_i = 219$.

Na obrázku 3.7 je časový vývoj okamžité rychlosti na pozici definované $h = H/3$ a $r = 2R/3$. Rovněž průběh rychlostí ukazuje vliv vznikajících nestabilit v proudění, ovšem na základě časového vývoje není možné identifikovat kritický mód. Časový vývoj rychlosti pro případ proudění s $F = 1.1 \times 10^5$ ukazuje oscilaci rychlosti, která však během výpočtu zeslábne. V případě hodnoty $F = 1.2 \times 10^5$ se amplituda oscilace rychlosti slabě zvyšuje a tento průběh okamžité rychlosti ukazuje na začínající nestabilní proudění. Z dalším zvýšením intenzity proudění na hodnotu kriteriálního čísla $F = 1.3 \times 10^5$ dochází výraznému nárůstu amplitudy oscilace. Tento závěr dokazuje, že vznik a vývoj nestabilit se projevuje rovněž v oscilaci časového průběhu okamžité rychlosti.

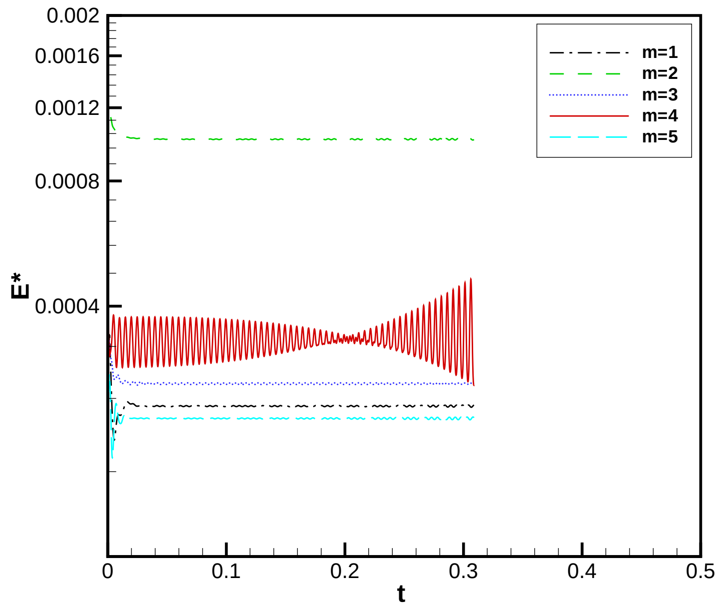
Na obrázku 3.8 je znázorněna axiální složka rychlostního pole pro případ proudění definovaného hodnotou $F = 1.3 \times 10^5$ (totéž vyhodnocení pro případ $F = 1.2 \times 10^5$ je možné nalézt v příloze na obr. 5.4). Okamžité hodnoty rychlostí a časově středované hodnoty neodhalují přítomnost kritického módu v proudění. Prostřednictvím obou druhů rychlostních polí je možné stanovit fluktuační rychlostní pole, které ukazuje přítomnost 3 maximálních a 3 minimálních hodnot rychlostí na určitém poloměru válcové nádoby. Tato tři maxima nebo minima odpovídají módu 3, který byl identifikován na základě Fourierovy transformace.

3.5.2 Velikost nádoby Z=0.5

Test lineárních nestabilit pro případ velikosti nádoby $Z = 0.5$ s hustotou výpočetní sítě $R/30$. Obrázek 3.9 ukazuje vývoj energie v jednotlivých módech po zavedení rušivého rychlostního pole pro $F = 3.9 \times 10^5$. Jak je patrno z obrázku, všechny módy až na mód 4 jsou stabilní, tj. neexistuje oscilace energie v těchto módech, na rozdíl od módu 4, kde je patrná nejprve klesající a později rostoucí amplituda ocilací energie.

Dle studie uskutečněné na různých hodnotách kriteriálního kritického čísla se dá prokázat, že existuje jeden dominantní mód, kde se poprvé objevují nestability a v případě tohoto testu je to mód 4.

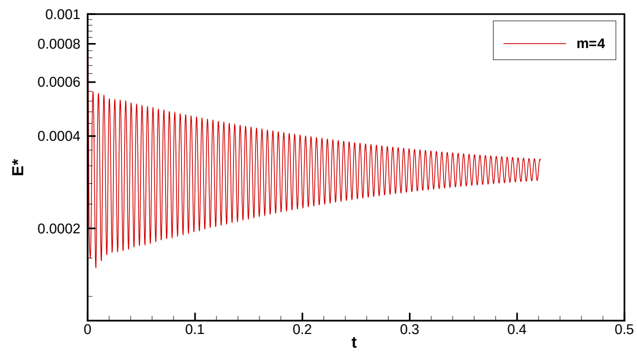
Další studie je proto zaměřena pouze na mód 4, přičemž cílem je nalézt kritickou hodnotu kriteriálního čísla a identifikovat kritickou hodnotu frekvence těchto oscilací. Na obrázku 3.10 jsou testovány případy proudění definované kriteriálním číslem $F = 3.8 \times 10^5$, $F = 3.9 \times 10^5$ a $F = 3.95 \times 10^5$ pro mód 4. Proudění definované kriteriálním číslem o velikosti $F = 3.8 \times 10^5$ vykazuje stabilitu módu 4 během celé výpočetní doby. Zpočátku vykazuje kritický mód oscilace energie, ovšem během rostoucího výpočetního času tyto oscilace zcela vymizí a mód 4 zůstává stabilní obr. 3.10 (a). Proudění definované touto hodnotou lze tak považovat za stabilní. Zvýšením hodnoty čísla F na úroveň $F = 3.9 \times 10^5$ a zavedením dodatečného rušivého jevu do proudění se objevují oscilace opět na módu 4, které se zpočátku zeslabují, ale později opět rostou obr. 3.10 (b). Tento stav vývoje energie ukazuje na režim proudění ležící v



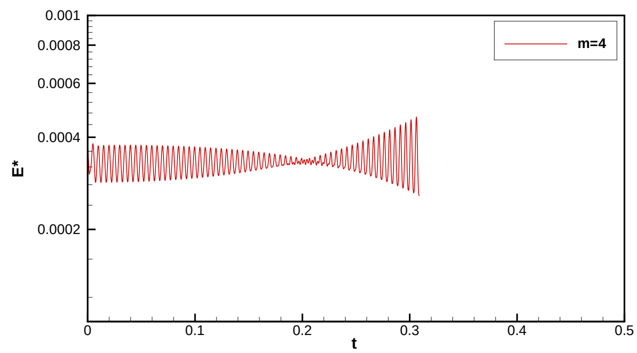
Obrázek 3.9: Analýza lineárních nestabilit pro $F = 3.9 \times 10^5$.

těsné blízkosti hranice lineární stability. Ostatní módy zůstávají stabilní po celou dobu výpočetního času. Dalším zvýšením čísla F na hodnoty $F = 3.95 \times 10^5$ a po dodatečném zavedení rušivého jevu od rychlostního pole zůstane mód 4 kritický se stále rostoucí oscilací energie obr. 3.10 (c). Tyto oscilace se slabě přenáší také na jiné módy než je kritický. Tento jev je zřetelnější s tím, jak se zvyšující hodnota F vzdaluje od kritické hodnoty F_{cr}.

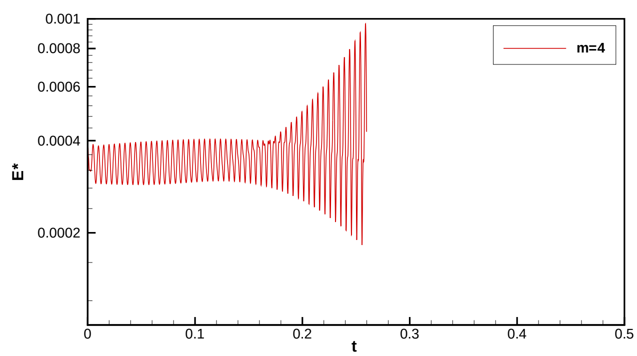
Uskutečněný test lineární stability proudění tak pomohl identifikovat kritickou hodnotu $F_{cr} = 3.9 \times 10^5$ s kritickým módem 4 a s kritickou frekvencí $\lambda_i = 619$. Tyto výsledky jsou v dobré shodě s výsledky Grantse a Gerbetha [16], kteří nalezli kritickou hodnotu $F_{cr} = 3.9 \times 10^5$, kritický mód 4 s kritickou frekvencí $\lambda_i = 630$. Rozdíl ve frekvenci oscilace energie kritického módu 4 je pouze 1.7 %. Identifikace kritické hranice kriteriálního čísla, kritického módu a frekvence oscilací pro velikost nádoby definovanou poměrem $Z = 0.5$ poslouží jako výchozí bod pro následující studii sítě.



a: $F = 3.8 \times 10^5$



b: $F = 3.9 \times 10^5$

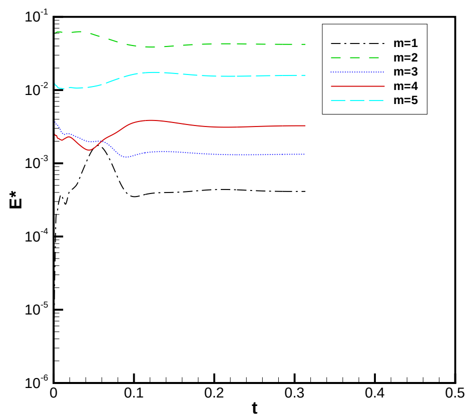


c: $F = 3.95 \times 10^5$

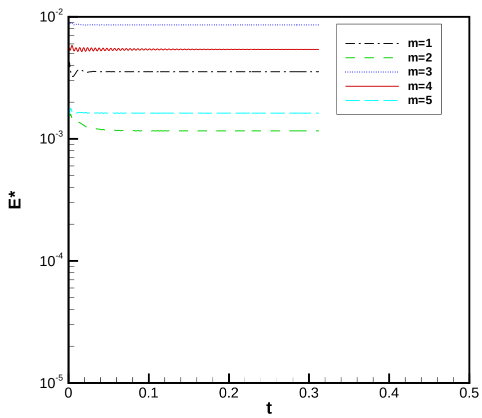
Obrázek 3.10: Analýza lineárních nestabilit v módu 4.

3.5.3 Test hustoty sítě

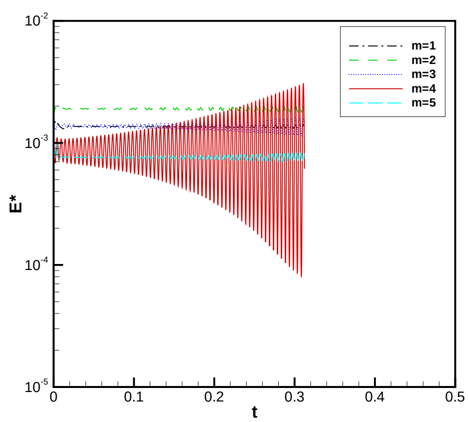
Vznik a vývoj lineárních nestabilit může být také závislý na hustotě výpočetní sítě, a proto následující obrázky 3.11 ukazují vznik a vývoj lineárních nestabilit v závislosti na hustotě výpočetní sítě pro případ $F_{cr} = 3.95 \times 10^5$. Tato studie sítě je provedena úmyslně na velikosti nádoby $Z = 0.5$, která vyžaduje o 50% méně výpočetních uzlů než standardně používaná velikost nádoby $Z = 1$ a tak lze v důsledku ušetřit výpočetní čas.



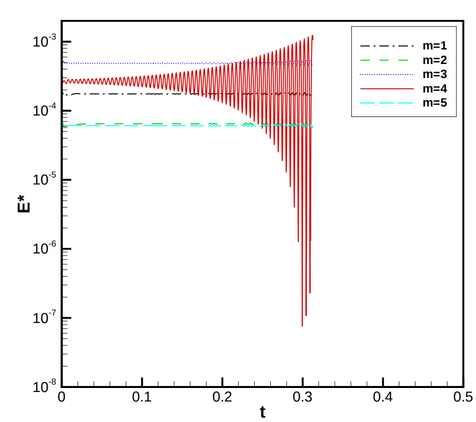
R/10



R/15



R/20



R/25

Obrázek 3.11: Studie lineárních nestabilit v závislosti na hustotě sítě.

Jak ukazují obrázky 3.11, je vznik lineárních nestabilit závislý na hustotě výpočetní sítě. V případě sítě s dělením $R/10$ a $R/15$ je patrné, že vývoj energie ve všech významných módech (1-5) zůstává stabilní po dlouhou dobu výpočetního času a to i navzdory dodatečnému rozrušení rychlostního pole na počátku studie. Jestliže tytéž podmínky studie lineárních nestabilit jsou realizovány na výpočetní síti s vyšší hustotou než $R/20$, vznikají po dodatečnému rozrušení rychlostního pole pozorovatelné lineární nestability. Ty se projevují pouze v módu 4, zatímco ostatní módy zůstávají stabilní. Z výše uvedené studie sítě tak vyplývá podstatný závěr, že při podobných testech je nutné použít hustotu sítě vyšší než $R/20$, aby nedocházelo ke zkreslení výsledků v důsledku nepřesnosti vznikající použitím příliš hrubé výpočetní sítě. Použije-li se síť s příliš hrubým dělením, nebude možné správně identifikovat kritickou hranici oddělující stabilní a již nestabilní oblast proudění.

Kapitola 4

Simulace turbulentního proudění

S nárůstem intenzity magnetického pole se zvyšuje také intenzita účinku externích sil na vodivé tekutiny, která posouvá charakter magneticky buzeného proudění do oblasti turbulentního režimu proudění. Uvažuje-li se působení rotujícího magnetického pole, vzniká tzv. hlavní rotační pohyb tekutiny kolem vertikální osy rotace a slabší sekundární proudění v meridionálním směru. Z pohledu celkové kinetické energie je dominantní rotující pohyb tekutiny, který je až 1000x intenzivnější, než je sekundární proudění. Bohužel je známo, že takovéto rotační proudění je zpravidla anizotropní, což z hlediska numerické simulace představuje problém pro mnoho běžně užívaných turbulentních modelů. Klasické turbulentní modely jako např. $k-\varepsilon$ Standard, $k-\omega$ apod. představují modely založené na lineární závislosti mezi turbulentními napěťovými tenzory a turbulentními měřítky (turbulentní kinetická energie, specifická turbulentní disipace apod.). Právě tato lineární závislost představuje problém v případě anizotropního charakteru turbulentního proudění. Na druhé straně jsou tyto jednoduché modely preferovány s ohledem na svoji jednoduchou definici, snadnou implementaci, širokou aplikovatelnost a především pro svoji výpočetní nenáročnost. Cílem následující kapitoly je tak zodpovědět tyto zásadní otázky.

- Jaké jsou současné poznatky v oblasti numerické simulace anizotropního turbulentního proudění s ohledem na klasické turbulentní modely?
- Jaký vliv na modelování turbulence má použití jednoduchých turbulentních modelů v případě rotačního pohybu tekutiny?
- Lze obecně použít tyto jednoduché turbulentní modely pro numerickou simulaci problému magneticky buzeného rotačního pohybu tekutin a tak využít jejich jed-

noduchosti i na problémy studie turbulentních toků vznikajících rotujícím magnetickým polem?

V následujících podkapitolách je vypracován stručný přehled některých důležitých prací zabývajících se tímto tématem. Rovněž je uskutečněna studie na konkrétním případu rotačního pohybu tekutiny v důsledku působení rotujícího magnetického pole na tuto tekutinu. Výsledky numerické simulace získané prostřednictvím turbulentních modelů $k-\varepsilon$ Standard, $k-\omega$ SST jsou porovnány s výsledky 3d DNS studie, u kterých došlo k výrazné shodě s experimenty Stiller,Fraňa a Cramer [18] a Fraňa [21]. Tímto způsobem jsou otestovány tyto dva nejčastěji užívané turbulentní modely a jejich závěry by měly dát odpověď na předešlé otázky. Souhrné výsledky této studie byly již publikovány v Fraňa, Stiller a Grundmann [20]

4.1 Předchozí studie a jejich závěry

Vliv anizotropie proudění v souvislosti s běžně používanými turbulentními modely (modely založené na lineární turbulentní viskozitě) je studován v literatuře Jarkilice [33], Yuana [35], Spezialeho [5] a Rubinsteina [32].

Již v definici jednoduchých turbulentních modelů $k-\varepsilon$ nebo $k-\omega$ je obsažena slabost modelu ve smyslu simulace zakřivených či rotujících proudění, neboť žádná z rovnic neobsahuje výrazy pro rotující pole. Přirozeně se sice částečně zahrne vliv zakřiveného proudu do řešení prostřednictvím rychlostního a tlakového pole, ovšem tento vliv je velmi slabý (Jarkilic [33]). Praktické numerické testy simulace tohoto druhu proudění částečně potvrzují slabost těchto turbulentních modelů Jarkilic [33], ovšem existují i práce, kde tyto jednoduché turbulentní modely dosáhly lepších výsledků než jejich složitější varianty Lai [41]. Tato skutečnost se vysvětluje existencí více různých efektů v proudění, což pak přináší nepřesnosti do řešení, které se ovšem mohou v konečné fázi vykompenzovat.

Speziale [5] se věnoval testu turbulentních modelů $k-\varepsilon$ a jeho lineární a nelineární varianty včetně RNG varianty. Studie se zaměřila na proudění složené ze smykového a rotačního pohybu tekutiny. Obecně platil závěr, že RNG varianta dosáhla nejhoršího výsledku obzvláště pro proudění, kde převládl zřetelně rotující pohyb tekutiny na smykovým pohybem. Klasický $k-\varepsilon$ poskytl nejpřesnější výsledky pro případ, kdy proudění bylo čistě rotační. Jakmile se v proudění objevuje také smykové proudění, přesnost těchto modelů se výrazně zhoršila.

V případě silné anizotropie smykových napětí v proudění jsou mnohdy výsledky z numerické simulace pomocí nelineárních turbulentních modelů $k-\varepsilon$ a to s variantou pro nízká Re čísla a s různou metodou modelování stěnové mezní vrstvy neuspokojivé [35]. Velmi zajímavé výsledky byly ovšem získány pomocí URANS modelů (Wegner [3]), resp. turbulentních modelů, kde turbulence je modelována, zatímco nestacionární časově středované toky jsou počítány přímo. Tyto modely mohou mít velmi zajímavou aplikaci rovněž i na některé případy proudění v magnetohydrodynamice, neboť nestacionární jevy jsou v proudění mnohdy významné. Všechny zde zmíněné studie neuvažovaly vznik Jouleovy turbulentní disipace, která ovlivňuje turbulentní transport tepla a hmoty v proudění. Mnohem složitější modely založené na definici $k-\varepsilon$ modelu, které podchycují zde zmíněný jev, lze nalézt v literatuře Widlunda [26]. V rámci zde prezentované práce zůstanou tyto složitější turbulentní modely pro svoji komplikovanou stavbu prozatím stranou, neboť pro praktické aplikace jsou jejich vlivy na konečné výsledky zanedbatelné.

Většina dosavadních testů věnovala velkou pozornost především skupině $k-\varepsilon$ modelů, zatímco $k-\omega$ modely nebyly dosud podrobně studovány. V rámci následující kapitoly je uskutečněna srovnávací studie, která zahrnuje nejčastěji užívané varianty obou skupin turbulentních modelů $k-\varepsilon$ Standard a $k-\omega$ SST. Tyto dva modely byly preferovány s ohledem na výše zmíněnou diskuzi a jejich použití bylo již částečně uskutečněno v Fraňa [21].

4.2 Teorie turbulentních modelů

Dvourovnicové turbulentní modely jsou založeny na dvou transportních rovnicích, ze kterých se počítají přímo měřítka turbulentní rychlosti a délky v proudění. Doposud existuje velká řada různých variací, přičemž nejčastější kombinace představuje transportní rovnice pro turbulentní kinetickou energii pro měřítko turbulentní rychlosti. Délkové měřítko je dáno transportní rovnicí pro turbulentní disipaci energie ε (model $k-\varepsilon$) a nebo pro disipaci na jednotku turbulentní kinetické energie ω ($k-\omega$).

Transportní rovnice pro turbulentní kinetickou energii pro modely $k-\varepsilon$ a $k-\omega$ je dána rovnicí 4.1.

$$\frac{Dk}{Dt} = \mathcal{P} - \varepsilon + \mathcal{D} \tag{4.1}$$

Na pravé straně rovnice 4.1 představuje první výraz transport turbulentní kinetické energie k prostřednictvím turbulentní produkce, ε je množství izotropní turbulentní disipace a $\mathcal{D}$ představuje kombinovaný efekt turbulentního transportu a viskozní difuzivity.

$$\mathcal{P} = -\overline{u_i u_j}\frac{\partial U_i}{\partial x_j} \tag{4.2}$$

Turbulentní produkce je dána vztahem 4.2, kde $\overline{u_i u_j}$ vyjadřuje tenzor Reynoldsova napětí. Rovnice 4.3 rozepisuje výraz pro příspěvek viskozní difuzivity a turbulentního transportu.

$$\mathcal{D} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k}\right)\frac{\partial k}{\partial x_j}\right] \tag{4.3}$$

V rovnici 4.3 představuje koeficient σ_k efektivní Prandtlovo číslo pro difuzi, který je případě nestlačitelné tekutiny konstantou. V případě modelu $k - \varepsilon$ je $\sigma_k = 1$ a pro model $k - \omega$ je $\sigma_k = 2$.

Dodnes existuje široká řada variací modelů $k - \varepsilon$, které se liší především v transportní rovnici pro isotropní disipaci ε. Nejznámější a také nejužívanější je původní verze transportní rovnice odvozena Jonesem (1972) [38] a Launderem (1974) [4]. Na základě této rovnice pak vesměs byly odvozeny další variace modelu.

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = \frac{\varepsilon}{k}(C_{\varepsilon 1}\mathcal{P} - C_{\varepsilon 2}\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon}\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k}\right] \tag{4.4}$$

Rovněž pro transportní rovnici 4.4 existují doplňující vztahy a konstanty, kde konstanta $C_{\varepsilon 1} \approx 1.45$ vyjadřuje hodnotu pocházející z kalibrace pro homogenní smykové proudění a $C_{\varepsilon 2} \approx 1.90$ je odvozena od rozkládání homogenní izotropní turbulence. Koeficient σ_ε je dán vztahem 4.5.

$$\sigma_\varepsilon = \frac{\kappa^2}{\sqrt{C_\mu}\,(C_{\varepsilon 2} - C_{\varepsilon 1})} \tag{4.5}$$

Turbulentní vírová viskozita se stanoví dle vztahu 4.6 na základě turbulentní kinetické energie k a izotropní disipace ε, které byly vypočteny na základě transportních rovnic.

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \tag{4.6}$$

Ve vztahu 4.6 je konstanta $C_\mu \approx 0.09$. Na základě vztahu 4.6 se spočítá turbulentní vírová viskozita, která obsahuje informace o vlivu turbulence na proudění. Vliv se projeví prostřednictvím viskozity, která se spolu s molekulární viskozitou přičítá k výrazu třecích sil v Navierov-Stokesově rovnici.

Numerická simulace turbulentních toků, kde se objevuje např. separace proudění se zpětným proudem je mnohdy kritickým bodem modelů $k - \varepsilon$. Ze snahy nalézt nové modely, které by umožňovaly přesněji řešit tyto problémy, vznikl model $k - \omega$ SST Menter [30]. Výrazným znakem tohoto modelu je použití dvou různých dvourovnicových turbulentních modelů. Pro oblasti v blízkosti pevných stěn se použije originální varianta modelu $k - \omega$ Wilcox [6] a v oblasti mimo pevné stěny či ve volném proudu se použije model $k - \varepsilon$ Standard. Tento nový model má stejnou formulaci transportní rovnice pro popis transportu turbulentní kinetické energie a liší se pouze novou formou rovnice pro transport specifické disipace $k - \omega$, která je definovaná ve vztahu 4.7.

$$\frac{D\omega}{Dt} = \frac{\gamma}{\nu_t}\mathcal{P} - \beta\omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\omega}\right)\frac{\partial \omega}{\partial x_k}\right] + 2\frac{1 - F_1}{\sigma_{\omega 2}\omega}\frac{\partial k}{\partial x_k}\frac{\partial \omega}{\partial x_k} \tag{4.7}$$

V transportní rovnici 4.7 se objevuje velmi důležitý parametr F_1, který rozhoduje o tom, jaký typ modelu se bude pro danou oblast uplatňovat. Tento parametr je definován vztahem 4.8,

$$F_1 = tanh(\Gamma^2) \tag{4.8}$$

kde

$$\Gamma = min\left[max\left(\frac{\sqrt{k}}{C_{\mu\omega d}};\frac{500\nu}{\omega d^2}\right);\frac{4\sigma_{\omega 2}k}{CD_{k\omega}d^2}\right] \tag{4.9}$$

Ve vztahu 4.9 je $CD_{k\omega}$ difuzní člen. Parametr F_1 může dosáhnout buď hodnoty 1 a pak se uplatní při výpočtu model $k-\omega$ nebo hodnoty 0 a pak se pro danou oblast použije model $k-\varepsilon$.

Transportní rovnice 4.7 musí být rovněž doplněna dalšími vztahy a konstantami, které uzavírají tuto transportní rovnici. Některé konstanty jako např. σ_k,σ_ω,β a γ jsou odvozeny dle vztahu 4.10.

$$(\sigma_k, sigma_\omega, \beta, \gamma) = F_1\left(\sigma_{k1}, \sigma_{\omega 1}, \beta_1, \gamma_1\right) + \left(1-F_1\right)\left(\sigma_{k2}, \sigma_{\omega 2}, \beta_2, \gamma_2\right) \tag{4.10}$$

Velmi důležitou vlastností SST modelu je modifikace turbulentní vírové viskozity takovým způsobem, aby odrážela schopnost zahrnout do výpočtu rovněž přechodové jevy proudění. Na základě těchto vlastností je definice turbulentní vírové viskozity mnohem složitější v porovnání k modelům $k-\varepsilon$, její definice je dána vztahem 4.11,

$$\nu_t = \frac{2b_{12}k}{max\left(2b_{12}\omega;\sqrt{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}-\frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}-\frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)\right)}F_2\right)} \tag{4.11}$$

kde $b_{12} = 0.155$ je koeficient anizotropie smykového napětí. Parametr F_2 je dán dle vztahu 4.12.

$$F_2 = tanh\left(\Gamma_2^2\right) \tag{4.12}$$

a funkce Γ_2 je definována dle vztahu 4.13.

$$\Gamma_2 = max\left(\frac{2\sqrt{k}}{C_\mu\omega d};\frac{500\nu}{\omega d^2}\right) \tag{4.13}$$

Další nutné doplňující koeficienty a vztahy potřebné pro řešení transportní rovnice 4.7 jsou definovány: $\sigma_{k1} = 1.17647$, $\sigma_{\omega 1} = 2$, $\beta_1 = 0.075$, $\sigma_{k2} = 1$, $\sigma_{\omega 2} = 1.16822$ a $\beta_2 = 0.0828$. Parameter γ_1 je dále dán vztahem 4.14.

$$\gamma_1 = \frac{\beta_1}{C_\mu} - \frac{\kappa^2}{\left(\sigma_{\omega 1}\sqrt{C_{mu}}\right)} \tag{4.14}$$

Parameter γ_2 je dán velmi podobným vztahem jako 4.14.

$$\gamma_2 = \frac{\beta_2}{C_\mu} - \frac{\kappa^2}{\left(\sigma_{\omega 2}\sqrt{C_{mu}}\right)} \tag{4.15}$$

Konstanty $\sigma_{\omega 1}$, β_1 a γ_1 jsou stejně definované jako v originálním modelu $k-\omega$ (Wilcox [6]). Konstanty σ_{k2},$\sigma_{\omega 2}$, β_2 a γ_2 jsou stejné jako u modelu $k-\varepsilon$.

$$\sigma_{k2} = \sigma_k \tag{4.16}$$

$$\sigma_{\omega 2} = \sigma_\varepsilon \tag{4.17}$$

$$\beta_2 = C_\mu \left(C_{\varepsilon 2} - 1\right) \tag{4.18}$$

$$\gamma_2 = C_{\varepsilon 1} - 1 \tag{4.19}$$

V modelu $k-\omega$ SST jsou použity koeficienty od autorů Launder-Sharma (1974), jejichž hodnoty jsou: $C_\mu = 0.09$, $C_{\varepsilon 1} = 1.44$, $C_{\varepsilon 2} = 1.92$, $\kappa = 0.41$, a $\sigma_k = 1$.

Pro případy proudění o nižších Reynoldsových číslech nabízí model $k-\omega$ SST mnohem lepší výsledky než samotný model $k-\varepsilon$, neboť SST model využívá faktu, že v oblasti v blízkosti pevné stěny způsobuje model $k-\varepsilon$ velké problémy, a proto je v modelu SST nahrazen modelem $k-\omega$. V technické praxi se stal model $k-\omega$ SST velmi oblíbený z důvodu své široké aplikovatelnosti na různé problémy proudění včetně separace proudů a možnosti zohlednit i vznik slabšího zpětného proudění. Rovněž možnost uvažování jevů spojených s přechodem proudění do turbulentní oblasti zvýšilo prestiž tohoto turbulentního modelu.

4.3 Proudění vyvolané rotujícím magnetickým polem

Porovnávací studie turbulentních modelů zahrnuje hodnocení časově středovaných rychlostí, normálových složek Reynoldsova napětí a turbulentní kinetické energie. K vyhodnocení se užívá bezdimenzionální vyjádření pro rychlosti, Reynoldsovo napětí a turbulentní kinetickou energii.

4.3.1 Definice bezrozměrných veličin

Bezrozměrné veličiny a parametry jsou použity pro porovnávací studii výsledků z turbulentních modelů. Délkové rozměry jako je poloměr nádoby R a výška nádoby H jsou definovány v bezrozměrné formě ve vztahu 4.20.

$$r^* = \frac{r}{R}\,, \qquad z^* = \frac{z}{H} \tag{4.20}$$

Časově středovaná rychlost vyjádřená v bezdimenzionální formě je uvedena ve vztahu 4.21, kde ν je kinetická viskozita tekutiny.

$$u^* = \frac{uR}{\nu} \tag{4.21}$$

Rovněž normálové složky Reynoldsova napětí a kinetická energie jsou vyjádřeny v bezdimenzionální formě dle vztahu 4.22.

$$< u_i' u_i' >^* = \frac{< u_i' u_i' > R^2}{\nu^2}\,, \qquad k'^* = \frac{k' R^2}{\nu^2} \tag{4.22}$$

4.3.2 Výpočetní síť

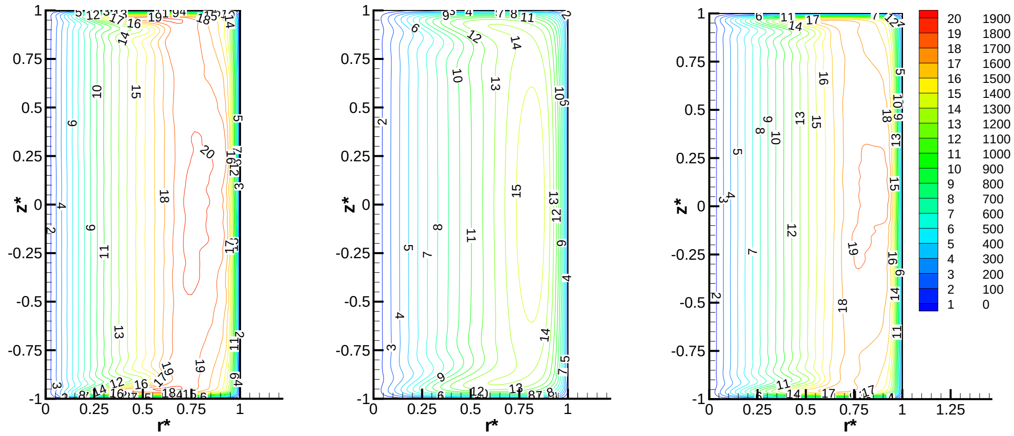
Výpočetní síť 3d DNS studie obsahuje 9.7×10^6 výpočetních elementů, přičemž síť je zjemněna na okraji pevných stěn tak, aby její hustota byla R/120 a uvnitř nádoby je hustota sítě zhruba R/60. Nerovnoměrnou výpočetní sítí se tak dosáhlo velkého rozlišení především na stěnách nádoby, kde se objevují nejvýraznější gradienty rychlostí. Výpočetní síť 2d studie je založena na axisymetrické úloze, takže síť obsahuje pouze 3×10^4 elementů s odpovídající hustotou sítě R/100 v rámci celého výpočetního objemu.

4.3.3 Časově středované rychlostní pole

V oblasti ustáleného vyvinutého proudění statisticky vyhodnocuje časově zprůměrované rychlostní pole pro azimutální, radiální a axiální složky rychlosti. V příloze jsou zobrazeny rychlostní pole v řezech válcovou nádobou 5.5, 5.6 a 5.7. Obr. 4.1 zobrazuje azimutální složku časově středované rychlosti pro DNS 3d a turbulentní modely $k-\varepsilon$ Standard a $k-\omega$ SST. Hodnoty rychlostního pole jsou v bezdimenzionálním tvaru a legenda k hodnotám je vypracována společně pro všechny řešené případy. Azimutální složka rychlosti představuje rotující proudění, přičemž z hlediska kinetické energie je toto proudění asi 1000x intenzivnější, než je tomu u zbylých dvou složek. Z tohoto důvodu je právě porovnání azimutální složky rychlosti podstatné. Na první pohled je patrné, že výsledky $k-\omega$ modelu jsou nejblíže k výsledkům 3d DNS studie. V obou případech se objevuje nesouměrnost izočar rychlostí související s časovými efekty, které i po dlouhé době časového průměrování zůstávají patrny v rychlostních polích. Azimutální rychlostní pole získané prostřednictvím modelu $k-\varepsilon$ Standard vykazuje osovou symetrii, přičemž hodnoty azimutální rychlosti jsou výrazně menší než je tomu u 3d DNS a nebo $k-\omega$ modelu.

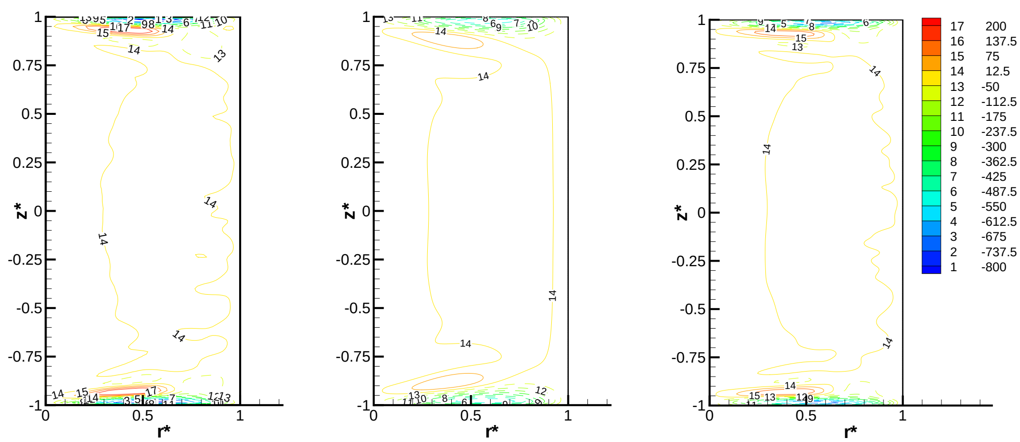
Obrázky 4.2 a 4.3 zobrazují radiální a axiální složku rychlostí vyjadřující sekundární proudění tekutiny. V obou případech je patrná dobrá shoda v rozložení rychlostních polí mezi turbulentními modely a 3d DNS. V případě $k-\varepsilon$ Standard modelu bylo opět získáno osově symetrické rozložení rychlosti. Jak ukazují výsledky 3d DNS a $k-\omega$ modelu, je ve skutečnosti radiální a axiální rychlostní pole nesymetrické. I v případě sekundárního proudění existuje stejný závěr, tj. že nejblíže ke skutečným výsledkům 3d DNS řešení jsou výsledky získané pomocí modelu $k-\omega$. Hlavní rozdíly mezi referenčními hodnotami DNS řešení a turbulentními modely se objeví při srovnání maximálních hodnot rychlostí.

V tabulce 4.1 jsou znázorněny maximální hodnoty hlavního azimutálního proudění



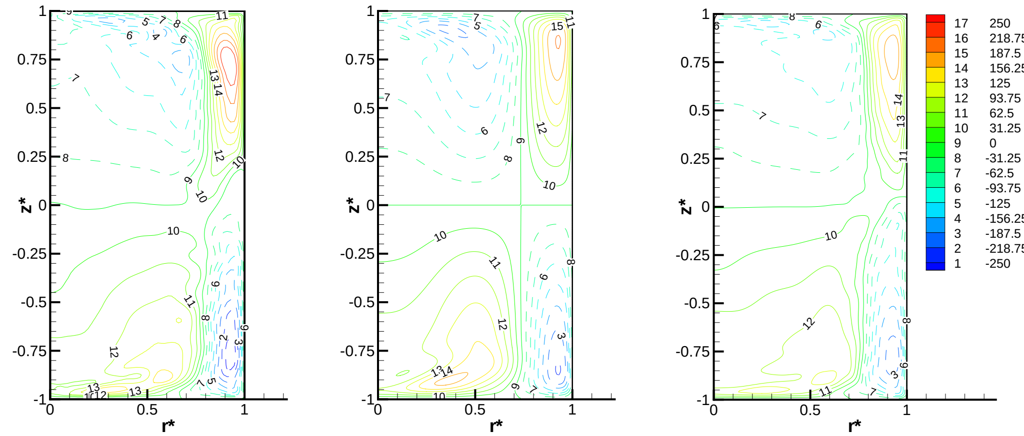
DNS 3d $\qquad$ $k-\varepsilon$ Standard $\qquad$ $k-\omega$ SST

Obrázek 4.1: Časově středovaná azimutální rychlost v r-z řezu.



DNS 3d $\qquad$ $k-\varepsilon$ Standard $\qquad$ $k-\omega$ SST

Obrázek 4.2: Časově středovaná radiální rychlost v r-z řezu.



DNS 3d $\quad$ $k-\varepsilon$ Standard $\quad$ $k-\omega$ SST

Obrázek 4.3: Časově středovaná axiální rychlost v r-z řezu.

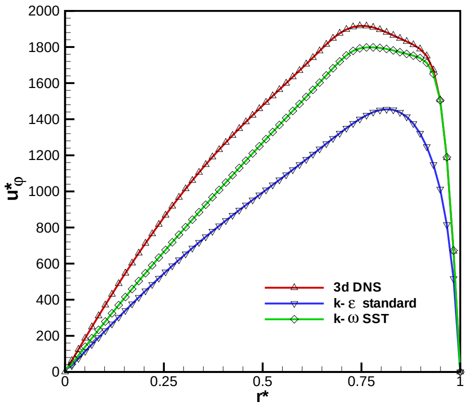
a slabšího sekundárního proudění. Maximální hodnoty azimutálního proudění se liší v případě modelu $k-\omega$ o 6 %, zatímco u modelu $k-\varepsilon$ Standard je to 25 %. Při vyhodnocení sekundárního proudění dosáhnou rozdíly v maximálních hodnotách v případě modelu $k-\omega$ 15 % a modelu $k-\varepsilon$ Standard 35 %.

Case	$\|max < u_\varphi >\|$	$\|max(\sqrt{< u_r >^2 + < u_z >^2})\|$
3d DNS	1981.7	843.4
k-ε Standard	1474.7	547.7
k-ω SST	1863.4	715.6

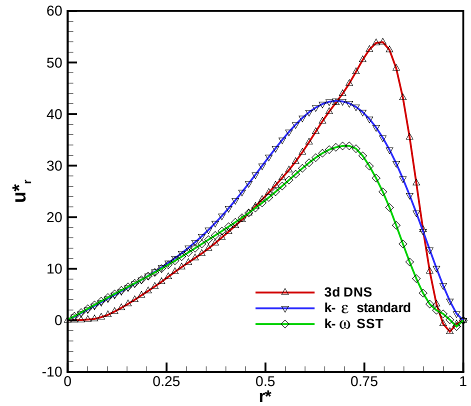
Tabulka 4.1: Maximální hodnoty rychlostí

Rychlostní pole daná obrázky 4.1, 4.2 a 4.3 poskytují globální náhled, zatímco u obrázků 4.4 a 4.5 se jedná o porovnání rychlostních profilů vyhodnocených v rovině ve výšce $h = H/3$ a $h = H/20$.

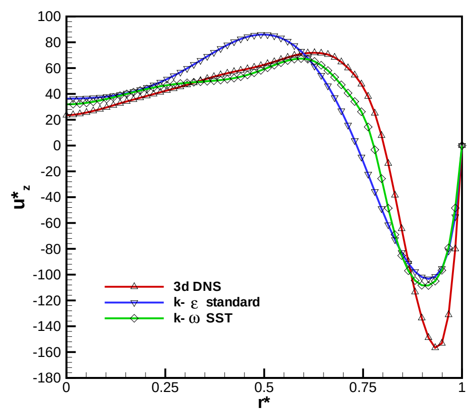
Porovnáním rychlostních profilů pro azimutální složku (Obr,. 4.4a a 4.5a) je možné pozorovat, že turbulentní model $k-\omega$ SST poskytuje velmi podobný průběh rychlosti jako u 3d DNS, ovšem hodnoty rychlostí jsou nepatrně menší. Na druhé straně u



(a) azimutální složka



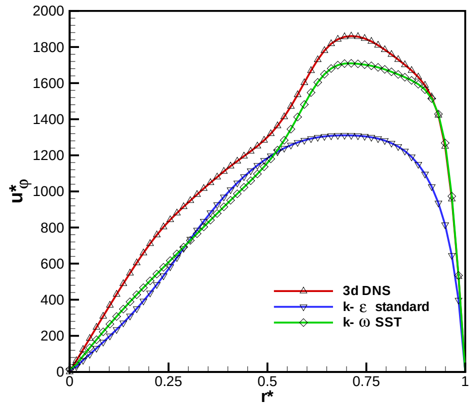
(b) radiální složka



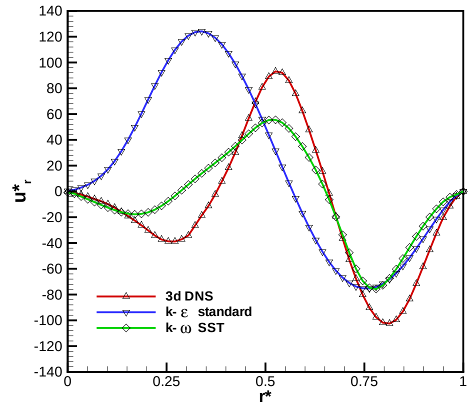
(c) axiální složka

Obrázek 4.4: Rychlostní profily časově středovaných rychlostí vyhodnocených na rovině umístěné ve výšce $h = H/3$.

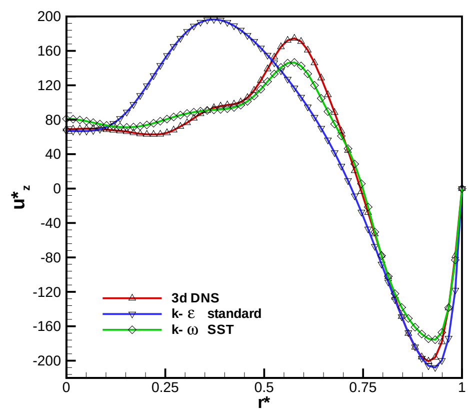
modelu $k - \varepsilon$ Standard jsou rychlostní profily pro obě pozice vyhodnocování výrazně odlišné. Poněvadž drtivý podíl kinetické energie je soustředěn v azimutální rychlosti, jsou závěry získané porovnáním azimutální složky rychlosti nejpodstatnější pro tuto studii proudění. Pro doplnění je zde uvedeno srovnání rychlostních profilů radiální a axiální rychlosti rovněž pro stejné pozice (Obr. 4.4b,c a 4.5b,c). I v tomto případě platí, že $k - \omega$ SST poskytuje nejbližší výsledky k 3d DNS studii, i když i zde jsou patrné menší rozdíly, které se nejvíce projevují v radiální složce časově středované rychlosti.



(a) azimutální složka



(b) radiální složka



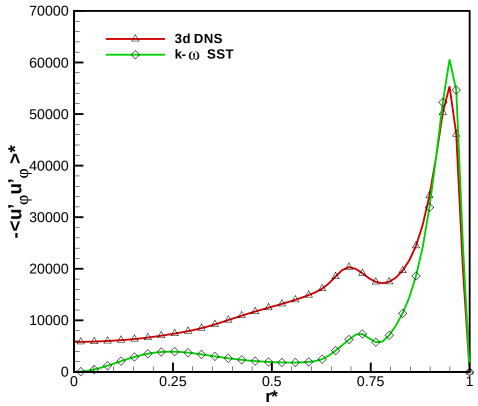
(c) axiální složka

Obrázek 4.5: Rychlostní profily časově středovaných rychlostí vyhodnocených na rovině umístěné ve výšce $h = H/20$.

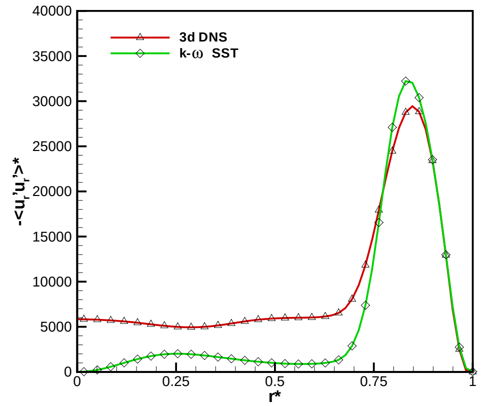
4.3.4 Reynoldsovo napětí

Porovnáním Reynoldsových napětí je možné vzájemně srovnat výsledky také z pohledu turbulentních vlastností v proudu.

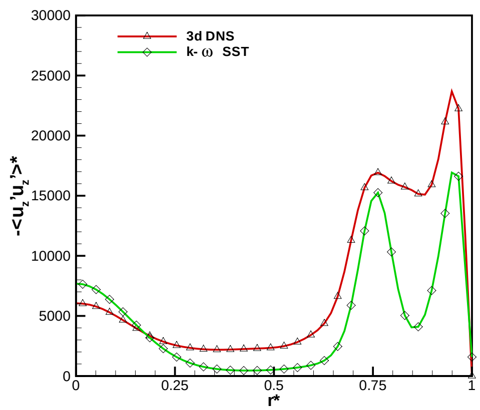
Studie 3d DNS nabízí kompletní tenzor Reynoldsova napětí $\tau_{ij} = -\overline{u_i u_j}$, zatímco klasický turbulentní model $k - \omega$ SST definuje pouze normálové složky Reynoldsova



azimutální složka



radiální složka

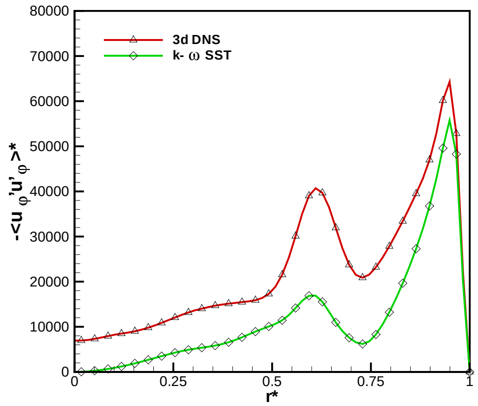


axiální složka

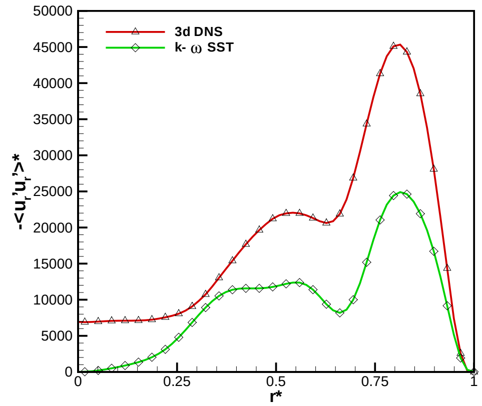
Obrázek 4.6: Normálová složka Reynoldsova napětí ve vertikální rovině h=H/3.

napětí $\tau_{ii} = -\overline{u_i u_i}$. Model $k-\varepsilon$ Standard neumožňuje stanovit hodnoty Reynoldsových napětí. Z těchto důvodů zahrnuje zde provedená porovnávací studie pouze výsledky modelu $k-\omega$ SST a 3d DNS z pohledu normálových složek Reynoldsova napětí.

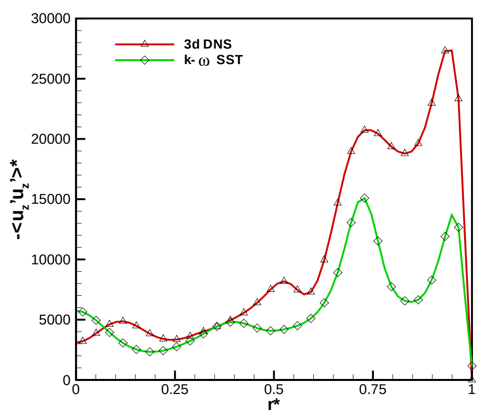
Profily normálové složky Reynoldsových napětí jsou vyhodnoceny na pozici $h = H/3$ obr. 4.6 a $h = H/20$ obr. 4.7. Toto srovnání ukazuje podobný tvar průběhu napětí u modelu $k-\omega$ a 3d DNS jak pro oblast v $h = H/3$, tak i pro oblast v blízkosti pevné stěny $h = H/20$, ovšem hodnoty všech tří normálových složek napětí jsou zřetelně menší u modelu $k-\omega$. Tento rozdíl je mnohem výraznější v blízkosti pevné stěny



azimutální složka



radiální složka



axiální složka

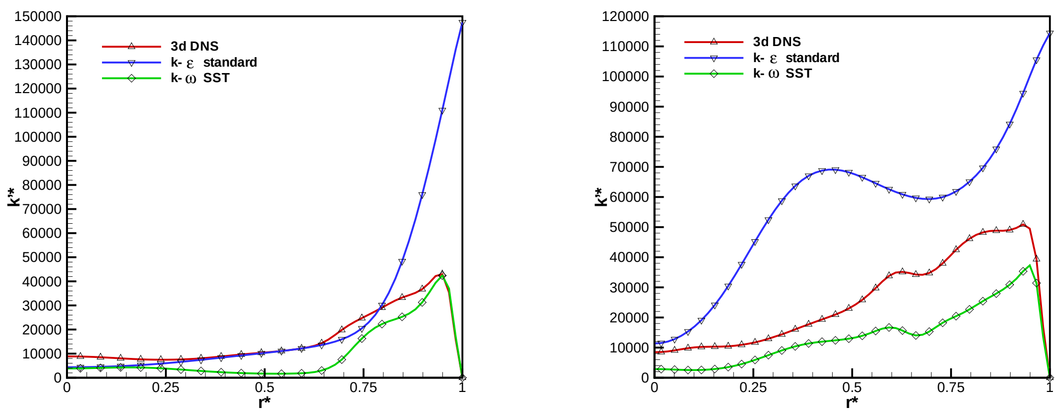
Obrázek 4.7: Normálová složka Reynoldsova napětí ve vertikální rovině h=H/20.

(viz. obr. 4.7), kde se tak projevuje zřetelně rozdíl mezi přesnými 3d DNS výsledky a turbulentním modelem $k - \omega$ SST.

Na první pohled je zřetelný ještě jeden viditelný jev a to, že v ose rotace jsou složky napětí nenulové v případě 3d DNS výpočtů. Tyto nenulové hodnoty napětí lze vysvětlit částečně existujícím tokem tekutiny středem osy nádoby, ale také jako důsledek interpolace výsledků v blízkosti osy nádoby. Na druhou stranu v případě 2d úlohy se předpokládá absolutní osová symetrie proudění a tudíž rychlosti toku tekutiny v bodech ležících na ose nádoby musí mít nulovou hodnotu.

4.3.5 Turbulentní kinetická energie

K porovnávací studii turbulentních modelů je možné použít také turbulentní kinetickou energii k. Rozložení turbulentní kinetické energie ve válcové nádobě je zobrazeno na obr. 5.8 v příloze. Na rozdíl od Reynoldsových napětí je možné vyhodnotit tuto veličinu rovněž pro model $k-\varepsilon$ Standard. Profily turbulentní kinetické energie jsou zobrazeny pro pozici $h = H/3$ a $h = H/20$ na obr. 4.8a, a b.



(a) (b)

Obrázek 4.8: Turbulentní kinetická energie v rovině h=H/3 a h=H/20.

Výsledky průběhu turbulentní kinetické energie $k-\omega$ jsou velmi podobné s výsledky 3d DNS, zatímco výsledky modelu $k-\varepsilon$ Standard ukazují velké rozdíly v porovnání s 3d DNS. Hodnoty turbulentní kinetické energie u modelu $k-\varepsilon$ Standard jsou výrazně vyšší, obzvláště v blízkosti pevné stěny, což se projeví u vertikální stěny (obr. 4.8a) nebo při vyhodnocení turbulentní kinetické energie v blízkosti dna nebo víka nádoby (obr. 4.8b), kde se navíc výrazně vyšší hodnoty projevují v celém průběhu. Srovnatelné hodnoty lze získat pomocí modelu $k-\omega$ SST, i když i zde jsou hodnoty průběhu energie menší než je tomu u výsledků 3d DNS, stejně jako se to projevilo u normálových složek Reynoldsových napětí.

4.3.6 Globální zhodnocení modelů

Porovnáním rychlostních časově středovaných polí, Reynoldsových napětí a turbulentní kinetické energie vyplývá, že turbulentní model $k-\varepsilon$ Standard není vhodný pro simulaci turbulentního proudění rotujícího rychlostního pole, což je v souladu s výsledky Jarkilice [?]. Tento neúspěch turbulentního modelu lze částečně vysvětlit nestacionárními přechodovými jevy, které se vyskytují v režimu proudění o nižší hodnotě Reynoldsova čísla. Naopak turbulentní model $k-\omega$ SST je mnohem vhodnější pro takovýto režim, a proto se potvrdil předpoklad, že takto získané výsledky budou správněji odpovídat skutečnosti. Z hlediska nestacionárních jevů spojených s Taylor-Görtlerovými víry [25], ale i z hlediska turbulentních vlastností jsou výsledky přesné 3d DNS studie a turbulentního modelu $k-\omega$ SST velmi podobné. Z tohoto důvodu je možné považovat turbulentní model $k-\omega$ SST jako velmi vhodný pro tyto typy úloh vyznačující se nižší hodnotou Reynoldsova čísla. V případě proudění, kde Reynoldsovo číslo bude výrazně vyšší, lze předpokládat, že i výsledky a závěry této práce by mohly doznat výraznějších změn.

Kapitola 5

Závěr

V rámci předložené práce byla zpracována problematika numerické simulace proudění generovaného prostřednictvím účinku magnetického pole v uzavřené válcové nádobě konečných rozměrů. Numerická studie magneticky vyvolaných toků byla uskutečněna jednak vlastním výpočetním programem, jehož popis lze nalézt v práci Fraňa [21] a dále v menší míře rovněž v komerčním programu FLUENT. Obsah práce byl rozdělen do 3 relativně samostatných kapitol.

V první části práce byl formulován matematický model pro definici účinku rotujícího a translačního magnetického pole na vodivé tekutiny, který byl v případě translačního magnetického pole dále testován. Výsledky této studie byly úspěšně porovnány s výsledky v dostupné literatuře. Součástí této kapitoly je také prezentace výsledků rychlostního pole, které je buzeno účinkem translačního magnetického pole.

Druhá část práce byla věnována vzniku lineárních nestabilit v proudění, které byly analyzovány prostřednictvím řešení Navier-Stokesových rovnic. V případě proudění vyvolaného translačním magnetickým polem bylo možné identifikovat kritickou hodnotu kriteriálního čísla, kritický mód a frekvenci amplitudy oscilací pro dvě různé velikosti nádoby. Získané výsledky jsou ve velmi dobré shodě s výsledky získané z teorie lineárních nestabilit a dostupné literatury. Analýza proudění v případě rotujícího magnetického pole byla rovněž úspěšná. Navíc výsledky přinesly zajímavé zjištění. Již na hranici stability proudění je možné jen velmi krátce pozorovat nestabilitu lineárního typu, neboť za velmi krátký časový okamžik vznikají Taylor-Görtlerovy víry, které výrazně dále mění charakter proudění. Důsledkem jejich vzniku v proudění jsou oscilace kinetické energie ve všech pozorovaných módech, přičemž intenzita kinetické energie je zhruba stejná pro všechny pozorované módy vyjma nultého módu. Závěrem této úspěšné analýzy je nalezení relativně přesných kritických hodnot kriteriálních čísel, které oddělují stabilní proudění (důležité pro praktické použití ve skutečných technologických procesech) a nestabilní oblasti (není možné dále využít tak snadno magnetické účinky v praktické aplikaci). Navíc úspěšným nalezením relativně přesných kritických hodnot bylo možné prokázat správnost implementace nelineárního konvektivního členu v Navier-Stokesově rovnici ve vlastním výpočetním kódu.

Třetí a poslední část práce se zabývá detailnější studií turbulentního proudění v případě rotujícího magnetického pole modelovaného pomocí turbulentních modelů $k-\varepsilon$ Standard a $k-\omega$ SST. Ze závěrů studie vyplynulo, že nejvhodnější turbulentní model z klasických dvourovnicových turbulentních modelů je $k-\omega$ SST. Úspěšnost tohoto modelu oproti klasickému $k-\varepsilon$ Standard lze vysvětlit mimo jiné také tím, že zde uvažovaný test proudění je uskutečněn pro střední hodnoty velikostí Reynoldsových čísel a tudíž se jedná o nevyvinuté turbulentní proudění pravděpodobně také částečně doprovázené jevy z přechodového režimu. Právě pro tento režim proudění je model $k-\omega$ vhodnější, neboť ve své definici uvažuje s existencí přechodových jevů v proudění. Na druhé straně je klasický $k-\varepsilon$ Standard vhodný pro případy vyvinutého turbulentního proudění. Vzhledem k tomu, že klasické dvourovnicové turbulentní modely s lineární vírovou viskozitou jsou nejrozšířenější metody simulace turbulentního proudění v průmyslu, má tato studie potvrdit možnost použití tohoto jednoduššího modelu pro složitější výpočty podobného charakteru. Nutné je však poznamenat, že rotující proudění je více či měně anizotropní a tudíž všechny zde testované klasické modely turbulence ovšem předpokládají izotropní turbulentní proudění. Skutečný vliv anizotropie na konečné výsledky a rovněž možnost či nemožnost použít obecně tyto jednodušší modely pro takovýto druh proudění je tématem mnoha prací a výsledky nejsou doposud tak jednoznačné.

V současné době pokračuje práce směrem ve vývoji programu pro možnost simulace magneticky buzeného proudění za účinku několika druhů magnetických polí současně. Zároveň se připravuje i nová verze výpočetního programu, který by měl umožnit numerickou simulaci také pro neizotermní proudění, ovšem validace výpočetního kódu ještě není ukončena. Vedle toho probíhají další výpočty, které vedou k vybudování DNS databáze výsledků, která by byla k dispozici ve vhodné formě pro statistické metody zpracování dat turbulentních toků.

Předložená práce v neposlední řadě přispěla k rozvoji oblasti magnetohydrodynamiky jak z věděckého tak i praktického pohledu. Získané výsledky mají rovněž význam pro výuku Mechaniky tekutin a především pak pro specializované předměty jako např. Numerické metody a Přenos tepla a hmoty.

Literatura

[1] Fluent 6.0 Documentation. Technical report, Fluent Inc., December 2001.

[2] Richardson A.T. On the stability of a magnetically driven rotating fluid flow. *J. Fluid Mech.*, 63(3):593–605, 1974.

[3] Wegner B., Maltsev A., Schneider C., Sadiki A., Dreizler A., and Janicka J. Assessment of unsteady RANS in predicting swirl flow instability based on LES and experiments. *Int. J. of Heat and Fluid Flow*, 25:528–536, 2004.

[4] Launder B.E. and Spalding D.B. The numerical computation of turbulent flows. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 3:269–289, 1974.

[5] Speziale Ch.G., Gatski T.B., and Mhuiris N.M.G. A critical comparison of turbulence models for homogeneous shear flows in a rotating frame. *Phys. Fluids A*, 2(9):1678–1684, September 1990.

[6] Wilcox D.C. Turbulence Modelling for CFD. *DCW Industries and Griffin Printing, Glendale, CA*, 1993.

[7] Takeuchi E., Masafumi Z., Takehiko T., and Mizoguchi S. *Applied MHD in the process of continuous casting.* ed. J. Szekeley, JV Evans, K. Blazek, N El-Kaddah. Miner. Met. Mater. Soc. USA. Warrendale, FL: The Metals Soc., 1992.

[8] Gallaire F. and Chomaz J.M. Instability mechanisms in swirling flow. *Physics of fluids*, 15(9):2622–2637, 2003.

[9] Müller G., Neumann G., and Weber W. Natural convection in vertical Bridgman configurations. *J. Crystal Growth*, 70:78–93, 1984.

[10] Nikitin N.V. Gorbatchev L.P. and Ustinov A.R. MHD rotation for conducting fluids in a cylindrical vessel of finite dimensions. *Magnetohydrodynamics*, 4:32–43, 1974.

[11] Görtler H. Instabilität der laminarer Grenzschichten an Konkaven Wänden gegenber gewissen dredimensionalen Strömungen. *ZAMM*, 21:250–252, 1941.

[12] Moffatt H.K. *Metallurgical Applications of Magnetohydrodynamics. In Processes and Metallurgical Applications of MHFD.* ed. MRE Proctor, Cambridge, UK: Metal Soc. UK, 1984.

[13] Grants I. and Gerbeth G. Stability of axially flow driven by a rotating magnetic field in a cylindrical cavity. *J. Fluid Mech.*, 431:407–426, 2001.

[14] Grants I. and Gerbeth G. Linear three-dimensional instability of a magnetically driven rotating flow. *J. Fluid Mech.*, 463:229–239, 2002.

[15] Grants I. and Gerbeth G. Experimental study of non-normal transition to turbulence in a rotating magnetic field driven flow. *Physics of fluids*, 15(10):2803–2809, 2003.

[16] Grants I. and Gerbeth G. Stability of melt flow due to a traveling magnetic field in a closed ampoule. *Journal of Crystal Growth*, 269, 2004.

[17] Birat J. and Chone J. Electromagnetic stirring in billet, bloom and slab casters. *Proc. Int. Iron Steel Cong. 4th, London*, pages 269–281, 1983.

[18] Stiller J., Fraňa K., and Cramer A. Transitional and weakly turbulent flow in a rotating magnetic field. *Physics of Fluids*, 18:074105, 2006.

[19] Roplekar J.K. and Dantzig J.A. A study of solidification with a rotating magnetic field. Report, November 2000.

[20] Fraňa K., Stiller J., and Grundmann R. Transitional and turbulent flows driven by a rotating magnetic field. *Journal of Magnetohydrodynamics*, 2/3:187–198, 2006.

[21] Fraňa K. *Magnetohydrodynamické toky a dominantní struktury.* Ph.D. thesis, Technická Univerzita v Liberci, 2004.

[22] Kamiyama K. and Kawai Y. Laminar flow of a conducting liquid between coaxial cylinders in a traveling magnetic field. *Journal of Magnetohydrodynamics*, 3:84–88, 1977.

[23] Spitzer K.H. and Pesteanu O. Application of traveling magnetic fields in metallurgy. The 3rd International Symposium on Elektromagnetic Processing of Materials, Nagoya, Japan, 2000.

[24] Ramachandran N., Mazuruk K., and Volz M.P. Use of traveling magnetic fields to control melt convection. *J. Jpn. Soc. Microgravity Appl.*, 17(2):98–103, 2000.

[25] Fraňa K., Stiller J., and Grundmann R. Taylor-Görtler vortices in the flow driven by a rotating magnetic field in a cylindrical container. *Journal of Visualization*, 8(4):323–330, 2005.

[26] Widlund O. and Talläck G. Modeling of anisotropic turbulent transport in simulations of luquid metal flows in magnetic field. *The 3rd International Symposium on Electromagnetic Processing of Materials*, pages 97–102, 2000. Nagoya, Japan, ISIJ.

[27] Dold P. and Benz K.W. Rotating magnetic field:Fluid flow and crystal growth application. *Progress in Crystal growth and Characterization of Materials*, pages 7–38, 1999.

[28] Davidson P.A. *An Introduction to Magnetohydrodynamics*. Cambridge University Press, 2001.

[29] Marthy Ph. and Martin Witkowski L. On the stability of rotating magnetic MHD flows. *Transfer Phenomena in Magnetohydrodynamics and Electroconducting Flows*, pages 327–343, 1999.

[30] Menter F. R. Two-Equation Eddy viscosity turbulence models for engineering applications. *AIAA Journal*, 32(8):1598–1605, 1994.

[31] Mößner R. and Gerbeth G. Buoyant melt flows under the influence of steady and rotating magnetic fields. *Journal of crystal growth*, 197:341–354, 1999.

[32] Rubinstein R. and Zhou Y. Turbulence modeling for the axially rotating pipe from the viewpoint of analytical closures. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 17:299–312, 2004.

[33] Jarkilic S., Hanjalic K., and Tropea C. Modelling rotating and swirling turbulent flows: A perpetuating challenge. *AIAA*, 2002.

[34] Yesilyurt S., Motakef S., Grugel R., and Mazuruk K. The effect of the traveling magnetic field (TMF) on the buoyancy-induced convection in the vertical bridgman growth of semiconductors. *Journal of Crystal Growth*, 263:80–89, 2004.

[35] Yuan S.P., So, and R.M.C. Turbulent rotating flow calculations: an assessment of two-equation anisotropic and Reynolds stress models. *Proc. Instn. Mech. Engrs.*, 212(Part G):193–212, 1998.

[36] Cebeci T. *Stability and transition: Theory and application.* Springer-Verlag, first edition, 2004.

[37] Kaiser Th. and Benz K.W. Taylor vortex instabilities induced by a rotating magnetic field: A numerical approach. *Physics of Fluids*, 10(5):1104–1109, 1998.

[38] Jones W.P. and Launder B.E. The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 15:301–314, 1972.

[39] Saric W.S. Görtler vortices. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 26:379–409, 1994.

[40] Gelfgat A. Y. On three-instability of a traveling magnetic field driven flow in a cylindrical container. *Journal of Crystal Growth*, 279:276–288, 2005.

[41] Lai Y.G. Predictive capabilities of turbulence models for a confined swirling flow. *AIAA Journal*, 34(8):1743–1745, 1996.

Vybrané vlastní publikace

A. Mezinárodní konference

K. Fraňa, J. Stiller, J.Unger Výpočet aerodynamiky profilu NACA 0012 Programem MG. Colloquium FLUID DYNAMICS 2001, Institute of Thermomechanics AS CR, October 24-25, 2001

K. Fraňa, J. Stiller, R. Grundmann Numerical Simulation of MHD Problems. Doktorandenkolloquium 2003, RWTH Aachen Germany, 30. September - 1. October 2003

K. Fraňa, J. Stiller, R. Grundmann DNS of Transitional and Turbulent Flow Driven by a Rotating Magnetic Field. MHD Day 2003, Freiburg, Germany, 15. October, 2003

K. Fraňa, J. Stiller, R. Grundmann Direct numerical simulation of the transitional and turbulent flow driven by a rotating magnetic field. Colloquium FLUID DYNAMICS 2003, Inst. of Thermomechanics ASCR 2003, pp.21-24

K. Fraňa, J. Stiller Direct numerical Simulation of the flow driven by a rotating magnetic field. GAMM-75th Annual Scientific Conference Dresden, March 21-27, 2004, pp. 159-160

J. Stiller, A. Cramer, K. Fraňa, K. Varshney Stirring with rotating magnetic fields - numerical and experimental results. FLOWCOMAG Dresden, April 1-2, 2004

K. Fraňa, J. Stiller Direct Numerical Simulation of the flow driven by a rotating magnetic field. XXI ICTAM Warsaw, Poland, August 15-21, 2004

K. Fraňa, J. Stiller, R. Grundmann Transitional and turbulent flow driven by a rotating magnetic field in a cylindrical container. The 15th Riga and 6th PAMIR conference on fundamental and applied MHD. Riga, Jurmala, Latvia, June 27 - July 1, 2005,

K. Fraňa, J. Stiller, J. Unger Transitional and turbulent flow driven by rotating and traveling magnetic field in a cylindrical container. Colloquium FLUID DYNAMICS 2005, Institute of Thermomechanics AS CR, Prague October 19 -21, 2005

K. Fraňa, J. Stiller, J. Unger, R. Grundmann Numerical study of turbulence models in the flow driven by a rotating magnetic field. Topical problems of fluid mechanics 2006, Institute of Thermomechanics AS CR, Prague February 22 -24, 2006

J. Stiller, K. Koal, K. Fraňa, R. Grundmann Stirring of melts using rotating and traveling magnetic fields. Fifth International Conference on CFD in the Process Industries CSIRO, Melbourne, Australia, 13-15 December, 2006

B. Mezinárodní časopisy (ISSN)

K. Fraňa, J. Stiller, R. Grundmann. DNS of Transitional and Turbulent Flow Driven by a Rotating Magnetic Field. Astronomische Nachrichten (Astronomical Notes), Vol. 324, No.3, 2003,77-78

K. Fraňa, J. Stiller, R. Grundmann Taylor-Görtler vortices in the flow driven by a rotating magnetic field in a cylindrical container. *Journal of Visualization*, vol. 8 (2005), no. 4, pp. 323–330.

K. Fraňa, J. Stiller, R. Grundmann Transitional and turbulent flows driven by a rotating magnetic field. *Journal of Magnetohydrodynamics*, vol. 2-3 (2006), pp. 187–198.

J. Stiller, K. Fraňa, A. Cramer. Transitional and weakly turbulent flow in a rotating magnetic field. *Physics of Fluids*, vol. 18 (2006), 074105

K. Fraňa, J. Stiller. A numerical study of flows driven by a rotating magnetic field in a square container. *submitted to European Journal of Mechanics B/Fluids 2006*

C. Publikace v knize

J. Stiller, K. Fraňa, R. Grundmann, U. Fladrich, W. E. Nagel. A parallel PSPG Finite Element Method for direct Simulation of Incompressible flow. Euro-Par 2004, Parallel Processing (LNCS 3149), edited by M.Danutello, D.Laforenza and M. Vanneschi (Springer 2004), pp. 726–733.

K. Fraňa, U. Fladrich,. Elektromagnetische Strömungsbeeinflussung in Metalurgie, Kristalzüchtung und Elektrochemie, Numerische Modellierung turbulenter MFD-Strömungen, TA1. Arbeits- und Ergebnisbericht 2002/2003/2004 , Sonderforschungsbereich 609,Technische Universität Dresden, 28. Juni 2004, Deutchland, pp. 25-46.

K. Fraňa, J. Stiller. Numerical study of the flow in a finite cylinder driven by a rotating, magnetic field. Mechanics of the 21st Century, Edited by W. Gutkowski and T.A. Kowalewski, Springer, 2005.

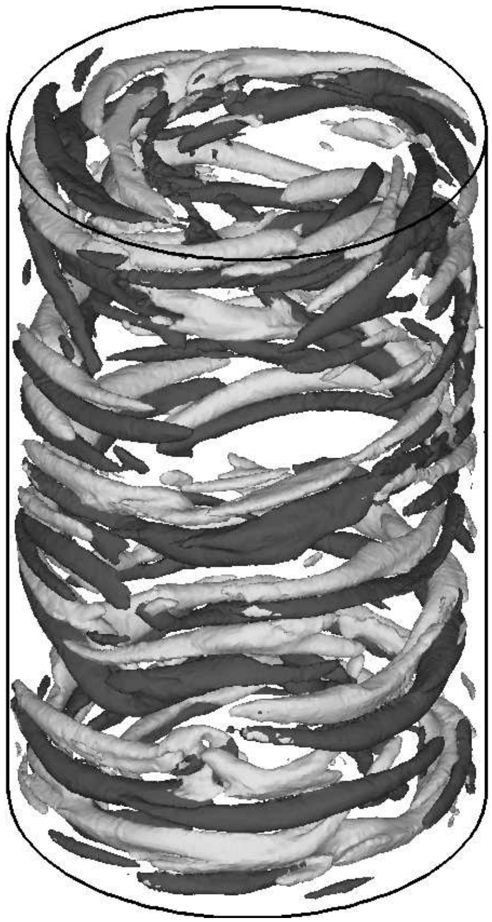
D. Domácí konference

K. Fraňa, J. Unger Řešení zpětného schodu užitím komerčního softwaru., XX. Mezinárodní konference pracovníků kateder a ústavů vyučující mechaniku tekutin a termomechaniku, 20.-22. června 2001, Slovenská republika

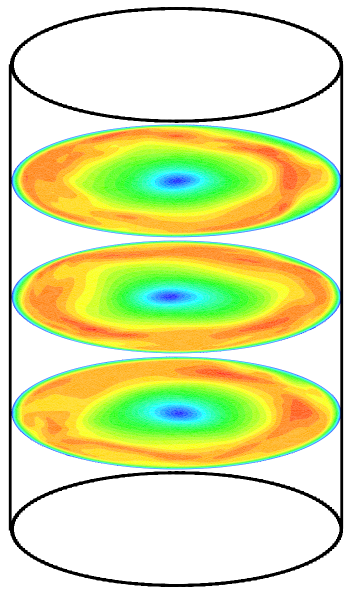
K. Fraňa, J. Stiller, R. Grundmann Linear finite element method for incompressible flow. XXII. Mezinárodní vědecká konference kateder a pracovišť mechaniky tekutin a termomechaniky, červen, 2003, Česká republika

F. Lemfeld, K. Fraňa, J. Unger Numerická simulace dvoufázového proudění v převodových skříních. XXV. Mezinárodní vědecká konference kateder a pracovišť mechaniky tekutin a termomechaniky, 28.-30. června, 2006, Modra- Harmónia, Slovenská republika

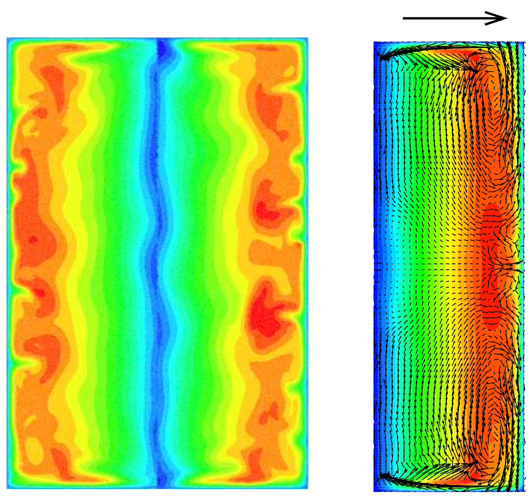
Grafická příloha



Obrázek 5.1: Vizualizace Taylor-Görtlerových vírových struktur v magnetohydrodynamických tocích, které jsou generované rotujícím magnetickým polem (RMP). Znázorněný případ odpovídá velikosti kriteriálního Taylorova čísla $Ta = 3 \times 10^5$. Orientace struktur je znázorněna barevným odstínem. Identifikace struktur je založena na fluktuačním rychlostním poli (detaily v literatuře Fraňa, Stiller a Grundmann, JOV, 2005)

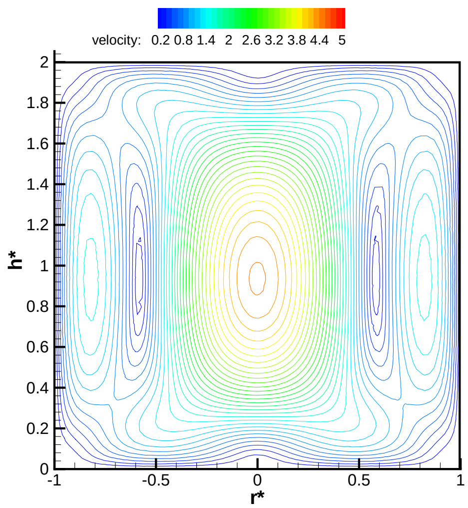


(a)

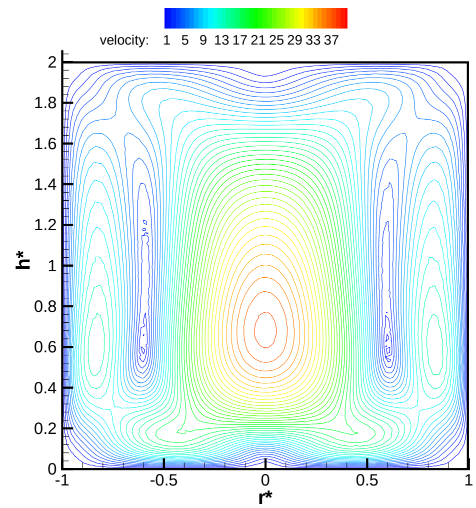


(b) (c)

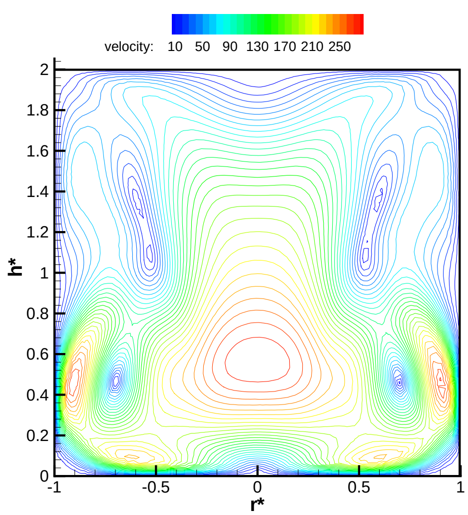
Obrázek 5.2: Azimutální složka okamžitého a časově středovaného rychlostního pole generovaného rotujícím magnetickým polem (RMP) na kriteriálním čísle $Ta = 3 \times 10^5$. Barevné označení zastupuje stupnici bezdimenzionální rychlosti v rozmezí hodnot 0 a 1. Znázornění: (a) okamžité rychlostní pole v horizontálních řezech, (b) okamžité rychlostní pole ve vertikálním řezu umístěném na ose rotace válcové nádoby a (c) časově středované rychlostní pole a znázornění sekundárního proudění pomocí vektorového pole.



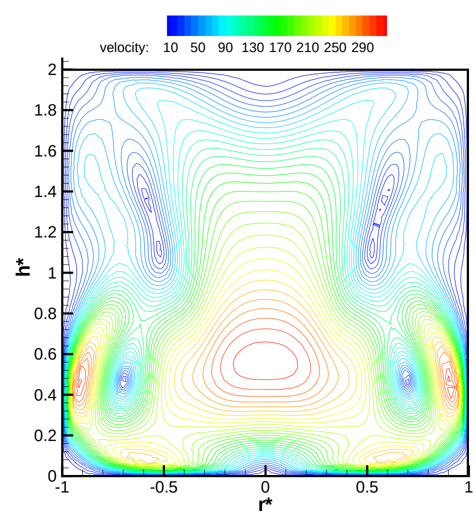
F=5 × 10^2



F=5 × 10^3

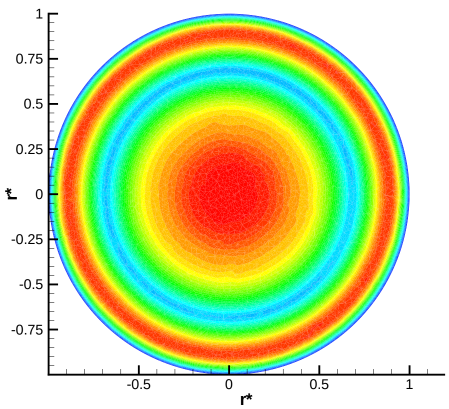


F=1.1 × 10^4

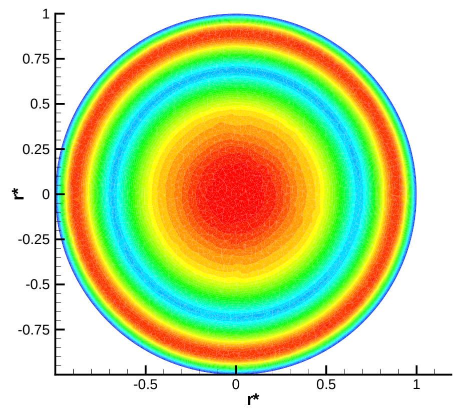


F=1.3 × 10^4

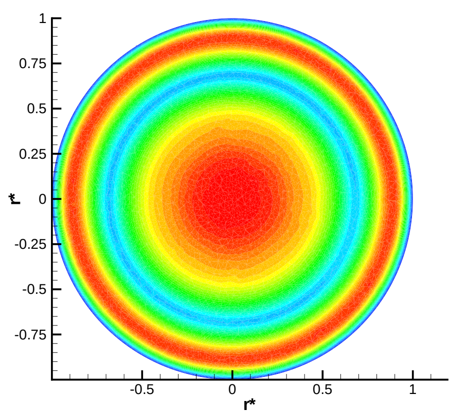
Obrázek 5.3: Okamžité rychlostní pole indukované translačním magnetickým polem (TMP) a jeho vývoj vzhledem k rostoucí hodnotě kriteriálního čísla F resp. intenzity magnetického pole. Vertikální řez je veden osou válcové nádoby. Hodnoty okamžitého rychlostního pole jsou vyjádřeny v bezdimenzionální formě odpovídající barevné stupnici.



(a)

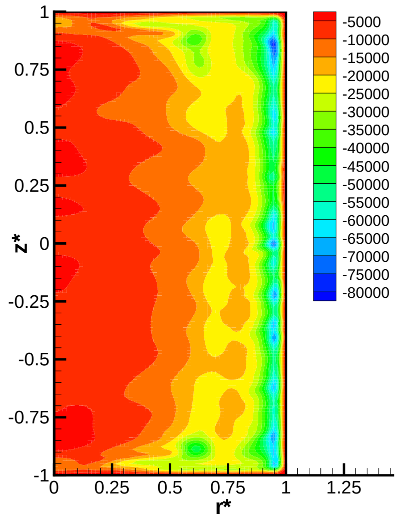


(b)

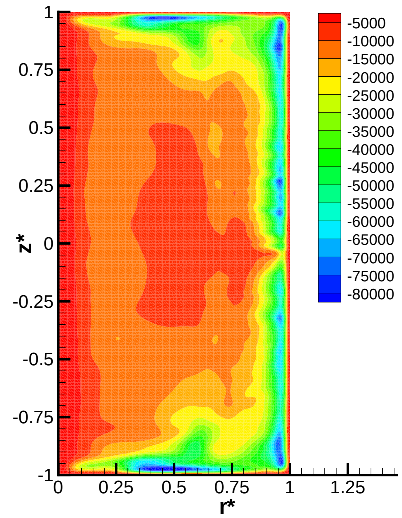


(c)

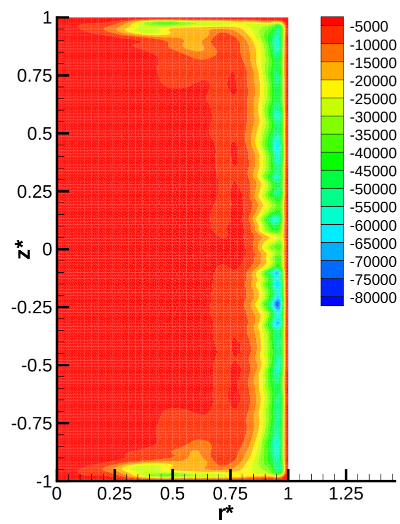
Obrázek 5.4: Výsledky rychlostních polí pro případ hodnoty kriteriálního parametru F=1.2×10^4 ve vertikálním řezu umístěném v první 1/2 výšky nádoby. Rychlostní pole jsou vyjádřena v bezdimenzionální formě: (a) okamžité rychlostní pole, (b) časově středované rychlostní pole a (c) fluktuační rychlostní pole



3d DNS

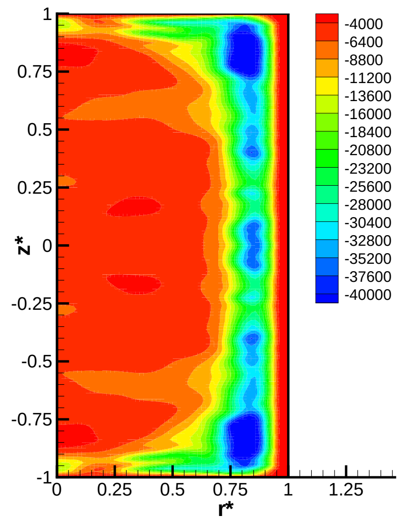


2d DNS

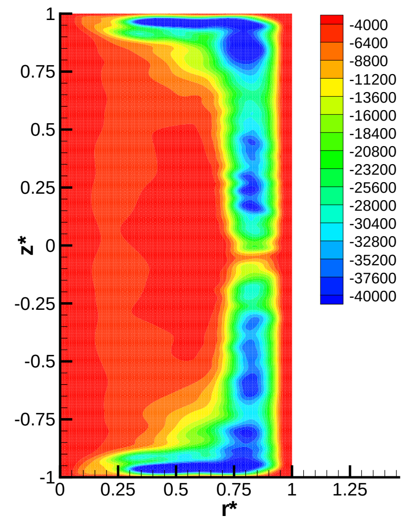


k-ω SST

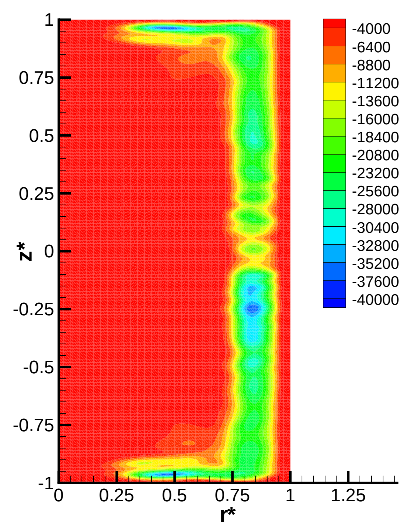
Obrázek 5.5: Azimutální složka Reynoldsova napětí v bezdimenzionálním měřítku. Testovací úloha často používaných turbulentních modelů a porovnání výsledků s reálnou skutečností v 3d DNS.



3d DNS

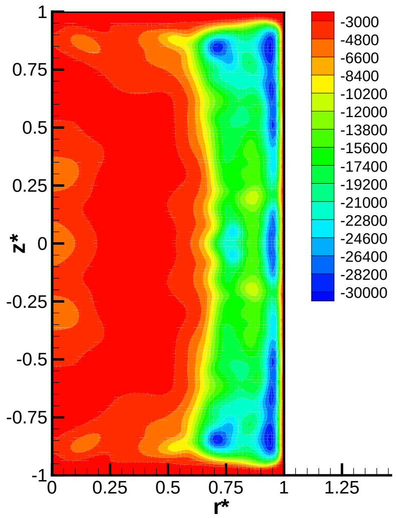


2d DNS

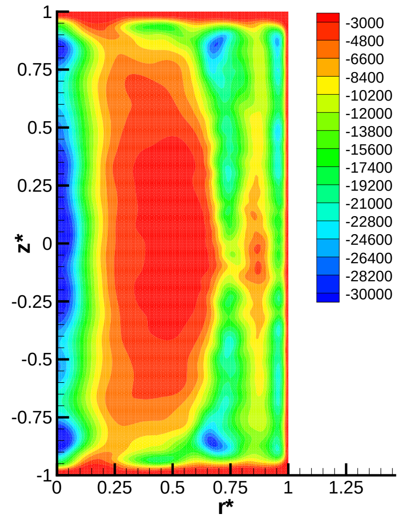


k-ω SST

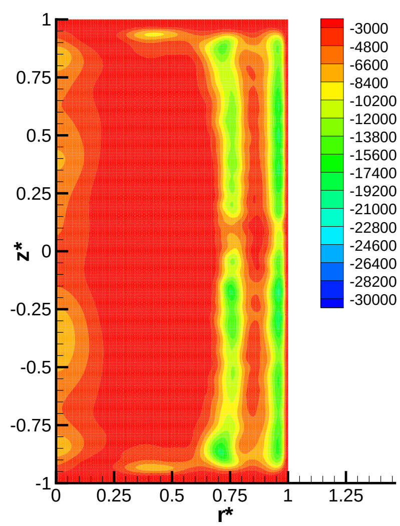
Obrázek 5.6: Radiální složka Reynoldsova napětí v bezdimenzionálním měřítku. Testovací úloha často používaných turbulentních modelů a porovnání výsledků s reálnou skutečností v 3d DNS.



3d DNS

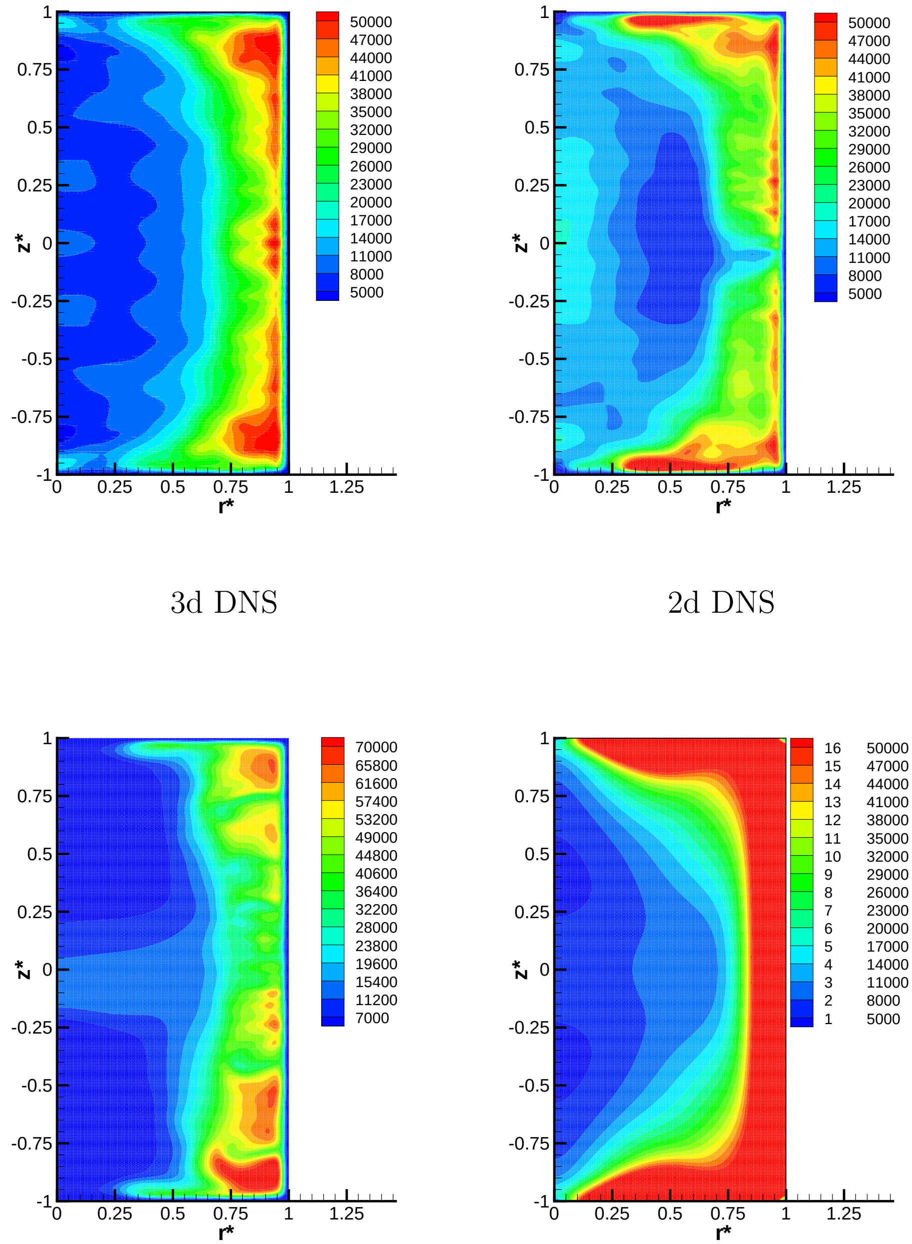


2d DNS



k-ω SST

Obrázek 5.7: Axiální složka Reynoldsova napětí v bezdimenzionálním měřítku. Testovací úloha často používaných turbulentních modelů a porovnání výsledků s reálnou skutečností v 3d DNS.



3d DNS

2d DNS

k-ω SST

k-ω SST

Obrázek 5.8: Turbulentní kinetická energie v bezdimenzionálním měřítku. Testovací úloha často používaných turbulentních modelů a porovnání výsledků s reálnou skutečností v 3d DNS.

Kapitola 6

Publikace v zahraničních časopisech