

TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI
FAKULTA STROJNÍ

DIPLOMOVÁ PRÁCE

2004

PAVEL KRYŠTŮFEK

TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI
FAKULTA STROJNÍ
Katedra energetických zařízení



Pavel Kryštůfek

Numerické řešení stlačitelného stacionárního proudění v kanále
(Numerical solution of compressible steady flows in a channel)

Vedoucí diplomové práce:

Ing. Magda Vestfálová, Ph.D.

Konzultant diplomové práce:

Prof. RNDr. Karel Kozel, DrSc

Rozsah práce: 73

Počet stran: 51

Počet obrázků: 15

Počet příloh: 6

UNIVERZITNÍ KNIHOVNA
TECHNICKÉ UNIVERZITY V LIBERCI



3146075038

Liberec 2004



ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

Jméno a příjmení	Pavek K r y š t ů f e k
Studijní program	magisterský - M2301 strojní inženýrství
Obor	Aplikovaná mechanika 3901T003
Zaměření	Mechanika tekutin a termodynamika

Ve smyslu zákona č. 111/1998 Sb. o vysokých školách se Vám určuje diplomová práce na téma:

Numerické řešení stlačitelného stacionárního proudění v kanále

Zásady pro vypracování:

(uveďte hlavní cíle diplomové práce a doporučené metody pro vypracování)

1. Formulujte problematiku řešení užitím modelu stlačitelné tekutiny (Euler 2D nevazký a N-S 2D vazký).
2. Modelujte změnu rovného kanálu dole částí kruhového oblouku či kombinací kruhového oblouku a sinusoidy.
3. Cílem práce je formulace matematického modelu a vlastní numerická aproximace (schéma ve 2D, numerická realizace podmínek na vstupu a na hranici kanálu).
4. Výsledky numerického řešení porovnejte s experimentem nebo jinými numerickými výsledky.
5. Doporučené metody pro vypracování:
 - a) pro systém Eulerových rovnic použít schéma LF, LW
 - b) pro systém N-S rovnice popsat schéma LW a RK (3S, 4S).

12/2/05 S

KEZ/MTT
59 s., [22] s. příl

Forma zpracování diplomové práce:

- původní zpráva: cca 40 stran
- grafické práce: do 20 stran příloh

Seznam literatury (uveďte doporučenou odbornou literaturu):

- Dvořák, R., Kozel, K.: Matematické modelování v aerodynamice, ČVUT Praha, 1996
- Kozel, K., Fürst, J.: Numerické metody řešení problému proudění I, ČVUT Praha, 2001
- Tesař, V.: Mezní vrstvy a turbulence, ČVUT Praha
- Maryška, J., Šembera, J.: Mechanika tekutin, TU Liberec, 2002
- Brdička, M., Samek, L., Sopko, B.: Mechanika kontinua, Academia Praha, 2000
- Feistauer, M.: Mathematical Methods in Fluid Dynamics, Longman Harlow, 1993

Vedoucí diplomové práce:

Ing. Magda Vestfálová, Ph.D.

Konzultant diplomové práce:

Prof. RNDr. Karel Kozel, DrSc.



Doc. Ing. Jiří Unger, CSc.
vedoucí katedry

Doc. Ing. Petr Louda, CSc.
děkan

V Liberci dne 30. 4. 2004

Anotace

Práce je věnována numerickému řešení systému Eulerových rovnic popisujících stacionární dvourozměrné proudění nevazké stlačitelné tekutiny ve 2D kanále a systému Navierových-Stokesových rovnic popisujících stacionární dvourozměrné laminární proudění vazké stlačitelné tekutiny ve 2D kanále.

The work deals with numerical solution of the system of Euler equations describing steady two dimensional inviscid compressible fluid flow in 2D channel and the system of Navier-Stokes equations describing steady two dimensional laminar viscous compressible fluid flow in a channel.

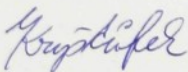
Prohlášení

Byl jsem seznámen s tím, že na mou diplomovou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 o právu autorském, zejména § 60 (školní dílo) a § 35 (o nevýdělečném užití díla k vnitřní potřebě školy).

Beru na vědomí, že TUL má právo na uzavření licenční smlouvy o užití mé práce a prohlašuji, že souhlasím s případným užitím mé práce (prodej, zapůjčení apod.).

Jsem si vědom toho, že užití své diplomové práce či poskytnout licence k jejímu využití mohu jen se souhlasem TUL, která má právo ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, vynaložených univerzitou na vytvoření díla (až do její skutečné výše).

Datum: 28.5.2004

Podpis: 

Obsah

Anotace	2
Prohlášení	3
Obsah	4
Seznam obrázků	6
Seznam symbolů	7
1. Úvod	9
2. Základní rovnice popisující proudění	10
2.1. Veličiny vystupující v rovnicích	10
2.2. Základní rovnice popisující proudění	13
2.2.1. Rovnice kontinuity	14
2.2.2. Navierova-Stokesova rovnice	15
2.2.3. Energetická rovnice	16
3. Matematický model	18
3.1. Matematický model pro nevazké proudění (Eulerovy rovnice)	19
3.2. Matematický model pro vazké proudění (Navierovy-Stokesovy rovnice)	21
4. Volba sítě	22
4.1. Dělení ve směru x	24
4.2. Dělení ve směru y	25
4.3. Plocha a těžiště elementů	26
4.4. Délky stran elementů	29
4.5. Virtuální těžiště	29
4.6. Symetrie do virtuálního těžiště	31
4.7. Interpolace hodnot	32
5. Numerické řešení	33
5.1. Schéma Laxovo-Friedrichsovo	34
5.2. Schéma Laxovo-Wendroffovo	35
5.3. Schéma Rungeho-Kuttovo	38
5.4. Umělá disipace	39
5.5. Stabilita schémat	40
5.6. Sledování konvergence ke stacionárnímu stavu	41

5.7. Okrajové podmínky	41
5.8. Počáteční podmínky	42
6. Výpočetní program	43
7. Rozbor výsledků	47
8. Závěr	50
Seznam literatury	51
Příloha č.1. – výsledky schématu L-F	52
Příloha č.2. – výsledky schématu L-W-Richtmyer	59
Příloha č.3. – výsledky schématu L-W-MacCormack	61
Příloha č.4. – průběh konvergence výpočtů	69
Příloha č.5. – ostatní výsledky	71
Příloha č.6. – CD se zdrojovými kódy programů v Matlabu	73

Seznam obrázků

Obr. 4.1 Strukturovaná síť s kruhovým obloukem	22
Obr. 4.2 Strukturovaná síť s kruhovým obloukem a sinusoidou	23
Obr. 4.3 Zobrazení těžišť elementů	26
Obr. 4.4 Výpočet plochy elementu	28
Obr. 4.5 Délky stran elementu	29
Obr. 4.6 Symetrie těžiště elementu	30
Obr. 4.7 Symetrie vektoru rychlosti	31
Obr. 5.1 Výpočetní buňka (element).....	34
Obr. 5.2 Extrapolace hodnot.....	42
Obr. 6.1 Schéma programu pro Laxovo-Friedrichsovo schéma	44
Obr. 6.2 Schéma programu pro L-W- Richtmyerovo schéma.....	45
Obr. 6.3 Schéma programu pro L-W- MacCormackovo schéma.....	46
Obr. 7.1 Průběh Machova čísla a Zierepova singularita	47
Obr. 7.2 Strukturovaná síť s 40x80 elementy	48
Obr. 7.3 Strukturovaná síť s 60x120 elementy	48

Seznam symbolů

$AD(W_{i,j}^n)$		umělá disipace
c_f	$[m]$	vektor délek úseků
d	$[\%]$	výška profilu vztažená na výšku kanálu
dS	$[m^2]$	orientovaný element plochy
dS_x, dS_y	$[m^2]$	složky orientovaného elementu plochy
D	$[m]$	výška kanálu
$D_{i,j}$		element sítě
e	$[J.kg.m^{-3}]$	hustota energie
e_f	$[-]$	vektor dělení kanálu ve směru x
E	$[J]$	energie
f_i		vektor vnějších sil
$F(J)$		vektor hustoty toku veličiny J plochou ∂V
F, G		vektory nevazkých toků
k_1, k_2	$[-]$	parametry umělé disipace
L	$[m]$	délka kanálu
L_p	$[m]$	délka profilu
L_n	$[m]$	délka vstupní části kanálu
Ma	$[-]$	Machovo číslo
n	$[m]$	vektor vnější normály
n	$[-]$	počet dělení kanálu ve směru y
p	$[MPa]$	tlak
$P(J)$		hustota produkce veličiny J
q_i	$[W]$	vektor tepelného toku
r	$[m]$	poloměr kruhového oblouku
Re	$[-]$	Reynoldsovo číslo
R, S		vektory vazkých toků
S	$[K]$	Sutherlandova konstanta, efektivní teplota

$S_{i,j}, \mu_{i,j}$	[-]	plocha elementu
t	[s]	čas
T	[K]	teplota
T_0	[K]	referenční teplota
u	[J]	vnitřní energie
V	[kg.m ⁻³]	objem
$\mathbf{w}$	[m.s ⁻¹]	vektor rychlosti
w_i	[m.s ⁻¹]	složky vektoru rychlosti
$W_{i,j}^n$		numerické řešení v bodě $x = x_i$, $y = y_j$ a $t = t_n$
$\mathbf{x}$	[m]	souřadnice vektorového pole
x_i	[m]	složky vektoru souřadnic
x_∞		veličina nabíhajícího proudu
x_n		normálová složka vektoru
x_t		tečná složka vektoru
$x_{i,j}, y_{i,j}$	[-]	x-ová, y-ová souřadnice uzlu sítě
$x_{T_{i,j}}, y_{T_{i,j}}$	[-]	souřadnice těžišť elementů sítě
z	[-]	počet úseků v kanále
δ_{ij}	[-]	jednotkový tenzor (Kroneckerovo delta)
$\varepsilon, \gamma_i, \gamma_j$	[-]	parametry umělé disipace
η	[Pa.s]	dynamická viskozita
η_0	[Pa.s]	referenční dynamická viskozita
κ	[-]	poměr měrných tepelných kapacit
ν	[m ² .s ⁻¹]	kinematická viskozita
ρ	[kg.m ⁻³]	hustota
σ_{ij}	[MPa]	tenzor napětí
τ_{ij}	[MPa]	tenzor smykových napětí
ζ	[Pa.s]	objemová (druhá) viskozita

1. Úvod

Numerické řešení problému proudění prochází v posledních letech neustálým vývojem. Stále častěji se tyto metody využívají v komerční sféře. Firmy jej používají ke snížení nákladů na vývoj nových produktů. Snižují tak náklady na experimentální měření, tvorbu modelů a hlavně zkracují potřebný čas vývoje prototypu.

Analytické řešení rovnic popisující proudění jsme schopni v dnešní době nalézt pro velmi málo případů a to ještě pro krajně jednoduché situace. Proto teoretickým řešením rozumíme vytvoření fyzikálního modelu, následně jeho matematickou analogii – numerickou aproximaci a numerické řešení.

V diplomové práci je provedeno řešení systému Eulerových rovnic popisujících stacionární dvourozměrné nevazké stlačitelné proudění tekutiny a uveden systém Navierových-Stokesových rovnic popisujících stacionární dvourozměrné laminární vazké stlačitelné proudění tekutiny v kanále daného tvaru. Numerické řešení bylo získáno pouze pro systém Eulerových rovnic. Systém Navierových-Stokesových rovnic byl zpracován pouze teoreticky.

V závěru jsou získaná data numerického řešení porovnána s daty uvedené v [1].

2. Základní rovnice popisující proudění

2.1. Veličiny vystupující v rovnicích

Rychlost:

Rychlost je limitní hodnota poměru dráhy k délce příslušného časového úseku.

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \quad (2.1)$$

Rychlost je vektorová veličina (tenzor prvního řádu). Každému bodu v prostoru je přiřazen vektor, který má obecně tři složky do směrů souřadných os. V rovinném případě, kterým se tato práce zabývá, má vektor rychlosti dvě složky, a to do směru i a do směru j . V dalším textu budeme složku vektoru rychlosti do směru i označovat jako u a složku vektoru rychlosti do směru j jako v (v prostorovém případě bychom označovali složku vektoru rychlosti do směru k jako w).

Tlak:

Tlak je obecné napětí, tj. síla připadající na jednotku plochy myšleného řezu vedeného tekutinou. Síly působící na tekutinu jsou dvojího druhu. Síly objemové, které působí na všechny částice v uvažovaném objemu V . Jsou to síly, které vytvářejí silová pole, jako např. gravitační, odstředivé, elektromagnetické. Druhým typem sil jsou síly povrchové, kterými na sebe působí molekuly ležící po obou stranách myšleného řezu, jež je od sebe „pomyslně“ oddělil.

Nyní se budeme zabývat pouze silami povrchovými.

Vytkneme-li si v prostoru elementární plošku $d\mathbf{S}$, pak na její složku dS_x , kolmou k souřadné ose x , působí silový vektor $d\mathbf{F}$, který má tři složky do směrů souřadných os, a tedy i tlak na ni působící je vektorem tlaku. Podobně je tomu i u ostatních složek elementární plošky $d\mathbf{S}$. Z tohoto poznatku vyplývá, že napětí je tenzorem druhého řádu.

Pro newtonskou kapalinu píšeme [1]:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}, \quad (2.2)$$

kde:

σ_{ij} tenzor napětí,

p normálová složka napětí,

δ_{ij} jednotkový tenzor (Kroneckerovo delta),

τ_{ij} tenzor smykových (vazkých) napětí.

Pro vyjádření účinků vazkosti v pohybující se tekutině je třeba vyjádřit závislost tenzoru vazkých napětí na rozložení vektoru rychlosti. Předpokládejme, že tenzor vazkých napětí závisí pro každý bod prostoru a každý časový okamžik jen na rozložení vektoru rychlosti. Přitom vazká napětí se uplatní jen při vzájemném posunutí dvou sousedních vrstev tekutiny, tj. smykové deformaci elementu tekutiny. Tenzor τ_{ij} tedy závisí na derivaci rychlosti podle souřadnic, tj. na $\partial w_i / \partial x_j$. Předpokládáme, že změny rychlostního pole jsou tak malé, že k jejich popisu stačí pouze první derivace rychlosti podle souřadnic, a že i jejich součiny a čtverce lze zanedbat. Uvědomíme-li si, že tenzor napětí σ_{ij} je v homogenní tekutině symetrický, můžeme zapsat tenzor tečných napětí ve tvaru [1]:

$$\tau_{ij} = \eta \left(\frac{\partial w_j}{\partial x_i} + \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \right) + \zeta \delta_{ij} \left(\frac{\partial w_j}{\partial x_j} \right), \quad (2.3)$$

kde:

δ_{ij} jednotkový tenzor (Kroneckerovo delta),

η dynamická viskozita,

ζ objemová (druhá) viskozita.

Dynamická viskozita η se uplatňuje ve vazkých napětích, která vznikají při smykové deformaci elementu tekutiny. Objemová (druhá) viskozita ζ se uplatňuje ve vazkých napětích, která vznikají mění-li se objem tekutiny při současném zachování jeho tvaru [1].

V případě nestlačitelné tekutiny lze psát tenzor napětí:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \eta \left(\frac{\partial w_j}{\partial x_i} + \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \right), \quad (2.4)$$

V ideální, nevazké tekutině působí pouze složky normálové, proto jsou prvky mimo diagonálu nulové a lze psát:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}. \quad (2.5)$$

Tento výraz platí i pro reálnou newtonskou tekutinu v klidu.

Viskozita:

Viskozita je vlastnost tekutiny způsobující vnitřní tření v tekutině a tedy i vznik tečného napětí a tím i přenos silového působení ve směru kolmém na nositelku síly.

Dynamická viskozita η závisí na teplotě a na tlaku.

Kinematická viskozita, jež je definována vztahem:

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}, \quad (2.6)$$

kde:

ρ hustota,

závisí také na tlaku a teplotě.

2.2. Základní rovnice popisující proudění

Výchozí rovnice dynamiky tekutin vycházejí ze základních fyzikálních zákonů:

- 1) zákon zachování hmoty,
- 2) zákon zachování hybnosti,
- 3) zákon zachování energie.

A poslední konstituční rovnice:

- 4) stavová rovnice.

První tři rovnice bilance zachovávané veličiny označujeme jako základní zákony zachování.

Bilanční rovnice říká, že časová změna zachovávané veličiny v kontrolním objemu V je rovna toku této veličiny kontrolní plochou ∂V do, popř. z jí vymezeného objemu, a její produkci (dojde-li k ní) uvnitř kontrolního objemu. A tedy [1]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V J dV + \int_{\partial V} \mathbf{F}_i(J) \mathbf{n}_i dS = \int_V P(V) dV, \quad (2.7)$$

kde:

$\mathbf{F}_i(J)$... vektor hustoty toku veličiny J plochou ∂V ,

$P(J)$ hustota produkce veličiny J .

Bilanční rovnice (2.7) platí bez ohledu na to, jak se veličina J mění uvnitř V . Platí i tehdy, je-li změna J nespojitou, jak je tomu např. v rázových vlnách.

Druhý člen (povrchový integrál) v rovnici (2.7) nyní převedeme pomocí Gaussovy věty na integrál objemový:

$$\int_{\partial V} \mathbf{F}_i(J) \mathbf{n}_i dS = \int_V \frac{\partial \mathbf{F}_k(J)}{\partial \mathbf{x}_k} dV. \quad (2.8)$$

Objem V byl zvolen zcela libovolně, musí platit bilanční vztah (2.7) i pro výrazy pod integrály, tedy:

$$\frac{\partial J}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_k(J)}{\partial \mathbf{x}_k} = P(J). \quad (2.9)$$

Tento diferenciální zápis bilanční rovnice pro veličinu J vyjadřuje bilanci J v infinitesimálně malém objemu dV .

Jednotlivé zákony zachování nyní dostaneme dosazením odpovídajících zachovávaných veličin (hmotnost, hybnost a energie) do bilanční rovnice (2.7) nebo (2.9).

2.2.1. Rovnice kontinuity

Dle zákona zachování hmoty je zachovávanou veličinou hustota ρ . Hustotou toku této veličiny je $\mathbf{F}_i(J) = \rho \mathbf{w}_i$. Pokud nedochází k hromadění tekutiny v objemu V , pak dosazením do rovnice (2.9) dostaneme rovnici kontinuity pro nestacionární proudění stlačitelné tekutiny ve tvaru [1]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho \mathbf{w}_i)}{\partial \mathbf{x}_i} = 0. \quad (2.10)$$

Pro proudění nestlačitelné tekutiny, v níž je $\rho = \text{konst.}$, se rovnice (2.10) zjednoduší na:

$$\frac{\partial \mathbf{w}_i}{\partial \mathbf{x}_i} = 0. \quad (2.11)$$

Rovnice (2.11) je skalární rovnicí se 3 neznámými, a to w_1 , w_2 , w_3 . V rovnici (2.10) ještě přistupuje 4. neznámá, kterou je hustota ρ .

2.2.2. Navierova-Stokesova rovnice

Zachovávanou veličinou je zde hybnost $J = \rho \mathbf{w}_i$. Je to vektorová veličina, proto bilanci hybnosti musíme provést postupně ve směru všech souřadných os.

Tok hybnosti $\mathbf{F}_i(\rho \mathbf{w}_i)$ se obecně skládá z konvektivní složky $(\rho \mathbf{w}_i) \mathbf{w}_j$ a z konduktivní složky, která je výsledkem působení vnějších sil, tj. napětími na elementu tekutiny, vyvolanými vnější (povrchovou) silou a vnější objemovou silou.

Bilanční rovnice (2.7) pro hybnost bude mít tedy tvar:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{w}_i) dV + \int_{\partial V} (\rho \mathbf{w}_i) \mathbf{w}_j \mathbf{n}_j dS - \left(\int_{\partial V} \sigma_{ij} \mathbf{n}_j dS + \int_V \rho \mathbf{f}_i dV \right) = 0. \quad (2.12)$$

Pomocí Gaussovy věty (2.8) převedeme povrchové integrály na objemové. Jelikož se vycházelo ze zcela libovolného objemu, lze vynechat operátor integrálu a zákon zachování hybnosti přepsat do diferenciálního tvaru:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{w}_i) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_j} (\rho \mathbf{w}_i \mathbf{w}_j - \sigma_{ij}) = \rho \mathbf{f}_i. \quad (2.13)$$

První člen společně s prvním členem v závorce upravíme pomocí rovnice kontinuity (2.10), druhý člen v závorce dle vztahu (2.2) a (2.3) [1]:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{w}_i}{\partial t} + \mathbf{w}_j \frac{\partial \mathbf{w}_i}{\partial \mathbf{x}_j} \right) = - \frac{\partial p}{\partial \mathbf{x}_i} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} \left[\eta \left(\frac{\partial \mathbf{w}_j}{\partial \mathbf{x}_i} + \frac{\partial \mathbf{w}_i}{\partial \mathbf{x}_j} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} \left(\zeta \frac{\partial \mathbf{w}_k}{\partial \mathbf{x}_k} \right) + \rho \mathbf{f}_i. \quad (2.14)$$

Z kinetické energie plynů lze odvodit, že $\zeta = -\frac{2}{3}\eta$. Pro konstantní hodnoty η pak lze psát tzv. Navierovu-Stokesovu rovnici:

$$\frac{\partial \mathbf{w}_i}{\partial t} + \mathbf{w}_j \frac{\partial \mathbf{w}_i}{\partial \mathbf{x}_j} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{x}_i} + \frac{1}{3} \nu \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} \left(\frac{\partial \mathbf{w}_j}{\partial \mathbf{x}_i} \right) + \nu \frac{\partial^2 \mathbf{w}_i}{\partial \mathbf{x}_j^2} + \mathbf{f}_i. \quad (2.15)$$

V nestlačitelné tekutině je $\partial \mathbf{w}_j / \partial \mathbf{x}_j = 0$ (viz. rovnice (2.11)), pak:

$$\frac{\partial \mathbf{w}_i}{\partial t} + \mathbf{w}_j \frac{\partial \mathbf{w}_i}{\partial \mathbf{x}_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{x}_i} + \nu \frac{\partial^2 \mathbf{w}_i}{\partial \mathbf{x}_j^2} + \mathbf{f}_i. \quad (2.16)$$

Pro nevazkou tekutinu ($\nu = 0$) dostaneme z rovnice (2.16) tzv. Eulerovu rovnici:

$$\frac{\partial \mathbf{w}_i}{\partial t} + \mathbf{w}_j \frac{\partial \mathbf{w}_i}{\partial \mathbf{x}_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{x}_i} + \mathbf{f}_i. \quad (2.17)$$

Pokud zanedbáme vliv objemových sil, bude v rovnicích (2.14), (2.15), (2.16), (2.17) člen $\mathbf{f}_i$ roven nule.

2.2.3. Energetická rovnice

Zachovávanou veličinou je zde celková energie, tj. $J = \rho \left(u + \frac{1}{2} w^2 \right)$, což je veličina skalární. Tok téže energie je $\mathbf{F}_i = \rho \mathbf{w}_i \left(u + \frac{1}{2} w^2 \right)$. V bilanci energie se uplatní i další energie vstupující do objemu V , a to:

práce vnějších sil

$$\int_V \rho \mathbf{w}_i \mathbf{f}_i dV,$$

práce povrchových sil (tj. práce tlakových sil a vazkých sil)

$$- \int_{\partial V} p \mathbf{w}_i \mathbf{n}_i dS + \int_{\partial V} \tau_{ij} \mathbf{w}_j \mathbf{n}_i dS = - \int_V \frac{\partial p \mathbf{w}_i}{\partial \mathbf{x}_i} dV + \int_V \frac{\partial \tau_{ij} \mathbf{w}_i}{\partial \mathbf{x}_j} dV,$$

tok tepla hranicí ∂V do objemu V

$$- \int_{\partial V} \mathbf{q}_i \mathbf{n}_i dS = - \int_V \frac{\partial \mathbf{q}_i}{\partial \mathbf{x}_i} dV.$$

Po dosazení do bilanční rovnice (2.7) s použitím (2.8) dostaneme:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \left(u + \frac{1}{2} w^2 \right) dV + \int_V \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \rho w_i \left(u + \frac{1}{2} w^2 \right) \right] dV = \\ & = \int_V \rho w_i f_i dV - \int_V \frac{\partial p w_i}{\partial x_i} dV + \int_V \frac{\partial \tau_{ij} w_i}{\partial x_j} dV - \int_V \frac{\partial q_i}{\partial x_i} dV. \end{aligned} \quad (2.18)$$

nebo v diferenciálním tvaru:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho E + \frac{\partial}{\partial x_i} \rho w_i E + \frac{\partial}{\partial x_i} (p w_i - \tau_{ij} w_j + q_i) = \rho w_i f_i, \quad (2.19)$$

který už lze formálně upravit na konzervativní zápis zákona zachování energie:

$$\frac{\partial}{\partial t} e + \frac{\partial}{\partial x_i} (e w_i - p_{ij} w_j + q_i) = \rho w_i f_i, \quad (2.20)$$

kde:

$$e = E \rho,$$

$$E = u + \frac{1}{2} w^2.$$

Pokud zanedbáme vliv objemových sil a tok tepla, bude v rovnicích (2.18), (2.19), (2.20), člen f_i a q_i roven nule.

3. Matematický model

Matematické modely popisující proudění stlačitelné tekutiny vycházejí ze základních zákonů zachování uvedené v kapitole 2 (2.10, 2.16, 2.20). Dvojměrné proudění obecně vazké stlačitelné tekutiny je popsáno následujícím systémem parciálních diferenciálních rovnic (Navierovy-Stokesovy rovnice):

$$\begin{aligned}\rho_i + (\rho w_1)_x + (\rho w_2)_y &= 0 \\ (\rho w_1)_t + (\rho w_1^2 + p)_x + (\rho w_1 w_2)_y &= (\tau_{11})_x + (\tau_{21})_y \\ (\rho w_2)_t + (\rho w_1 w_2)_x + (\rho w_2^2 + p)_y &= (\tau_{12})_x + (\tau_{22})_y \\ e_t + [(e + p)w_1]_x + [(e + p)w_2]_y &= (w_1\tau_{11} + w_2\tau_{12} + \kappa T_1)_x + (w_1\tau_{21} + w_2\tau_{22} + \kappa T_2)_y\end{aligned}\quad (3.1)$$

kde:

ρ hustota,

w_1, w_2 složky vektoru rychlosti,

e celková energie v jednotce objemu,

p tlak,

T teplota,

τ tenzor vazkých napětí.

Pro složky tenzoru vazkých napětí používáme následujících vztahů:

$$\begin{aligned}\tau_{11} &= \eta \left(\frac{4}{3} w_{1x} - \frac{2}{3} w_{2y} \right), \\ \tau_{12} &= \eta (w_{1y} - w_{2x}), \\ \tau_{22} &= \eta \left(\frac{4}{3} w_{2y} - \frac{2}{3} w_{1x} \right).\end{aligned}\quad (3.2)$$

Tento systém je doplněn stavovou rovnicí pro ideální tekutinu $p = \rho RT$, jež vede na následující vztah pro tlak:

$$p = (\kappa - 1) \left[e - \frac{1}{2} \rho (w_1^2 + w_2^2) \right]. \quad (3.3)$$

3.1. Matematický model pro nevazké proudění (Eulerovy rovnice)

Matematický model, tj. systém Eulerových rovnic, získáme za předpokladu zanedbání vazkých efektů (tedy $\eta = 0$) v systému Navierových-Stokesových rovnic (3.1). Výsledný systém v nestacionárním tvaru (3.5):

$$W_t + F(W)_x + G(W)_y = 0, \quad (3.4)$$

$$F(W)_x + G(W)_y = 0. \quad (3.5)$$

Stacionární tvar (3.5) získáme řešením problému (3.4) při stacionárních okrajových podmínkách a při $t \rightarrow \infty$. Tuto metodu nazýváme metodou ustalování [1].

Vektor konzervativních proměnných W a funkce nevazkých fyzikálních toků F, G jsou pak dány:

$$W = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho w_1 \\ \rho w_2 \\ e \end{bmatrix} \quad F(W) = \begin{bmatrix} \rho w_1 \\ \rho w_1^2 + p \\ \rho w_1 w_2 \\ (e + p) w_1 \end{bmatrix} \quad G(W) = \begin{bmatrix} \rho w_2 \\ \rho w_1 w_2 \\ \rho w_2^2 + p \\ (e + p) w_2 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Veličiny v konzervativním tvaru jsou normovány:

$$\rho \rightarrow \frac{\rho}{\rho_\infty}; \quad w_1 \rightarrow \frac{w_1}{a_\infty}; \quad w_2 \rightarrow \frac{w_2}{a_\infty}; \quad p \rightarrow \frac{p}{\rho_\infty a_\infty^2}; \quad e \rightarrow \frac{e}{\rho_\infty a_\infty^2},$$

kde index ∞ označuje hodnotu v nabíhající proudě.

Poznámka: Pro numerické řešení jsem použil značení:

$$W = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho w_1 \\ \rho w_2 \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \end{bmatrix}.$$

Zbývající vektory potom jsou:

$$F(W) = \begin{bmatrix} n_2 \\ \frac{n_2^2}{n_1} + p \\ \frac{n_2 n_3}{n_1} \\ \frac{(n_4 + p)n_2}{n_1} \end{bmatrix} \quad G(W) = \begin{bmatrix} n_3 \\ \frac{n_2 n_3}{n_1} \\ \frac{n_3^2}{n_1} + p \\ \frac{(n_4 + p)n_3}{n_1} \end{bmatrix}.$$

Stavová rovnice:

$$p = (\kappa - 1) \left[n_4 - \frac{n_2^2 + n_3^2}{2n_1} \right].$$

3.2. Matematický model pro vazké proudění

(Navierovy-Stokesovy rovnice)

Matematický model, tj. systém Navierových-Stokesových rovnic, jsme již popsalí ve tvaru (3.1), který přepíšeme do konzervativního tvaru:

$$W_t + F(W)_x + G(W)_y = R(W_x, W_y)_x + S(W_x, W_y)_y, \quad (3.7)$$

$$F(W)_x + G(W)_y = R(W_x, W_y)_x + S(W_x, W_y)_y. \quad (3.8)$$

Stacionární tvar (3.8) získáme řešením problému (3.7) při stacionárních okrajových podmínkách a při $t \rightarrow \infty$.

Vektor konzervativních proměnných W , funkce nevazkých fyzikálních toků F, G a funkce vazkých fyzikálních toků R, S jsou pak dány:

$$W = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho w_1 \\ \rho w_2 \\ e \end{bmatrix} \quad F(W) = \begin{bmatrix} \rho w_1 \\ \rho w_1^2 + p \\ \rho w_1 w_2 \\ (e + p) w_1 \end{bmatrix} \quad G(W) = \begin{bmatrix} \rho w_2 \\ \rho w_1 w_2 \\ \rho w_2^2 + p \\ (e + p) w_2 \end{bmatrix}$$

$$R(W_x, W_y) = \eta \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{11} \\ \tau_{12} \\ w_1 \tau_{11} + w_2 \tau_{12} + \frac{k}{\eta} T_1 \end{bmatrix} \quad S(W_x, W_y) = \eta \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{21} \\ \tau_{22} \\ w_1 \tau_{21} + w_2 \tau_{22} + \frac{k}{\eta} T_2 \end{bmatrix}$$

Dynamická viskozita je funkcí teploty $\eta = \eta(T)$. Tato závislost může být počítána dle Sutherlandova vztahu [7]:

$$\eta = \eta_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{T_0 + S}{T + S}, \quad (3.9)$$

kde:

η_0 referenční dynamická viskozita pro referenční teplotu T_0 ,

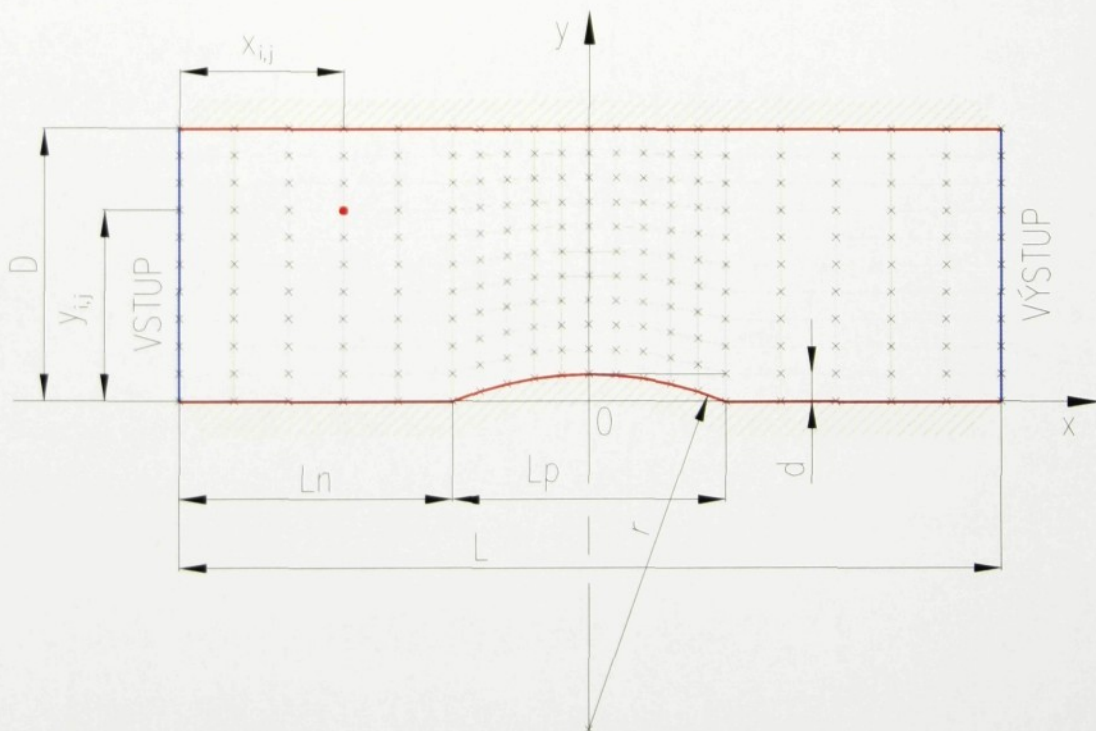
T_0 referenční teplota,

S efektivní teplota, tzv. Sutherlandova konstanta charakteristická pro plyn.

4. Volba sítě

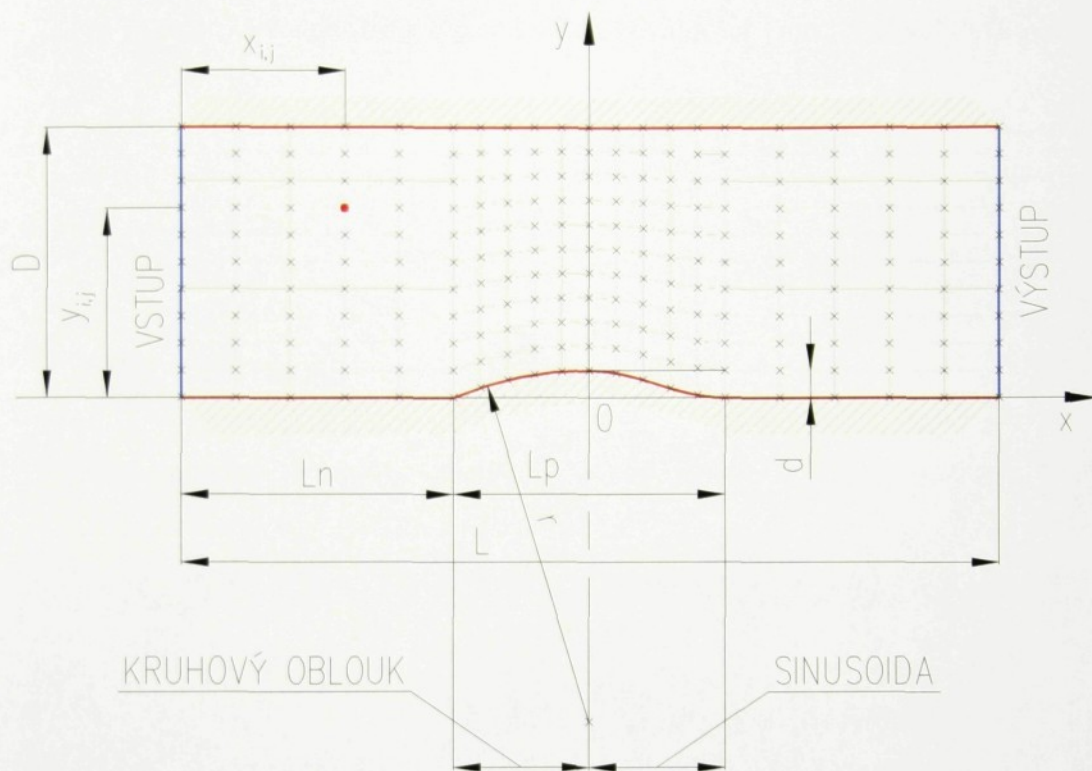
Pro numerické řešení byla zvolena strukturovaná síť tvořená čtyřúhelníkovými elementy, jež je vhodná pro metodu konečných objemů. Na obrázku 4.1 je zobrazena síť s částí kruhového oblouku, kde:

- L délka kanálu,
- L_p délka profilu,
- L_n délka vstupní části,
- D výška kanálu,
- d výška profilu v %,
- r poloměr kruhového oblouku,
- i obecná souřadnice na ose x ,
- j obecná souřadnice na ose y .



Obr. 4.1 Strukturovaná síť s kruhovým obloukem

Na obrázku 4.2 je zobrazená síť s kombinací kruhového oblouku a sinusoidy.



Obr. 4.2 Strukturovaná síť s kruhovým obloukem a sinusoidou

Poznámka: Strukturovaná síť tvořená čtyřúhelníkovými elementy umožňuje velmi výhodné uložení dat do dvojrozměrných polí.

Poznámka: Dle zadání je $D = 1$, $L_p = 1$, $L_n = 1$, $L = 3$, $d = 0,1 = 10\%$

Poznámka: r je závislé na d a L_p dle:

$$r = \frac{L_p^2 + 4(d \cdot D)^2}{8(d \cdot D)}.$$

4.1. Dělení ve směru x

Generace sítě umožňuje ve směru x rozdělit po délce kanál na úseky s různým počtem elementů.

$$x_{i,j} = x_0 + \sum_{f=1}^z \sum_{h=1}^{e_f} \frac{c_f}{e_f}, \quad (4.1)$$

$$x_0 = -\left(\frac{Lp}{2} + Ln\right), \quad (4.2)$$

$$i \Leftrightarrow \sum_f f \cdot e_f, \quad (4.3)$$

kde:

z počet úseků,

e_f počet dělení v daném úseku f , $f \in \langle 1, z \rangle$,

c_f délka daného úseku f , $f \in \langle 1, z \rangle$.

Poznámka: V obrázcích 4.1 a 4.2 byly použity tyto vektory:

$$c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} \quad e = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

4.2. Dělení ve směru y

Síť ve směru y byla generována s konstantním dělením n . Podle pozice ve směru x byly souřadnice počítány dle vztahů:

$$y_{i,j} = u \cdot (D - y_z) + y_z, \quad (4.4)$$

$$u = \frac{j}{n}, \quad (4.5)$$

pro $-\frac{Lp}{2} \leq x_{i,j} \leq 0$:

$$y_z = \sqrt{r^2 - q^2} - r + d \cdot D, \quad (4.6)$$

$$q = -\frac{Lp}{2} \cdot \frac{\sum_{l=1}^f e_l - i}{e_f}, \quad (4.7)$$

pro $0 \leq x_{i,j} \leq \frac{Lp}{2}$ a kruhový oblouk:

$$y_z = \sqrt{r^2 - q^2} - r + d \cdot D, \quad (4.8)$$

$$q = \frac{Lp}{2} \cdot \frac{i - \sum_{l=1}^{f-1} e_l}{e_f}, \quad (4.9)$$

pro $0 \leq x_{i,j} \leq \frac{Lp}{2}$ a sinusoidu:

$$y_z = \frac{d \cdot D}{2} [\cos(q) + 1], \quad (4.10)$$

$$q = \frac{\pi}{e_f} \left(i - \sum_{l=1}^{f-1} e_l \right), \quad (4.11)$$

pro $-\frac{Lp}{2} - Ln \leq x_{i,j} < -\frac{Lp}{2} \vee \frac{Lp}{2} < x_{i,j} \leq \frac{Lp}{2} + (L - Lp - Ln)$:

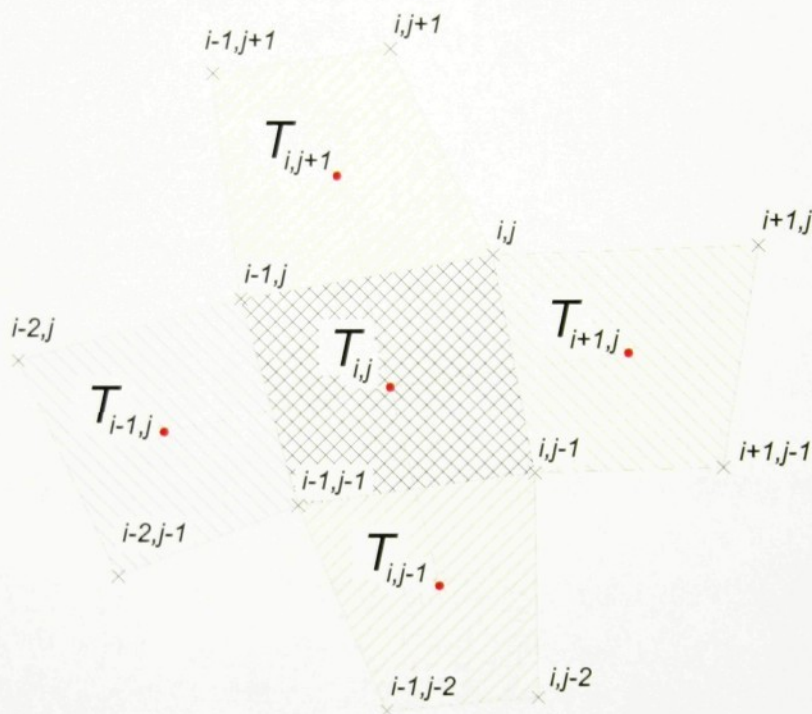
$$y_z = 0, \quad (4.12)$$

kde:

n počet dělení ve směru y.

4.3. Plocha a těžiště elementů

K odvození těžišť elementů bylo použito statických momentů k jednotlivým osám.



Obr. 4.3 Zobrazení těžišť elementů

Protože byly elementy sítě ve vertikálním lichoběžníkovém tvaru, lze psát pro statické momenty:

$$S_x = \frac{1}{2} \int_a^b \sigma y^2 dx, \quad (4.13)$$

$$S_y = \int_a^b x \sigma y dx, \quad (4.14)$$

kde:

S_x statický moment k ose x,

S_y statický moment k ose y,

σ plošná hmotnost.

S použitím rovnice přímky a $\sigma = 1$:

$$S_{x_{i,j}} = S_{x_{2,i,j}} - S_{x_{1,i,j}}, \quad (4.15)$$

$$S_{y_{i,j}} = S_{y_{2,i,j}} - S_{y_{1,i,j}}, \quad (4.16)$$

$$S_{x_{2,i,j}} = -\frac{1}{6} \left(k_{2,i,j}^2 (x_{i-1,j}^3 - x_{i,j}^3) + (3k_{2,i,j} q_{2,i,j} (x_{i-1,j}^2 - x_{i,j}^2)) + 3q_{2,i,j}^2 (x_{i-1,j} - x_{i,j}) \right), \quad (4.17)$$

$$S_{x_{1,i,j}} = -\frac{1}{6} \left(k_{1,i,j}^2 (x_{i-1,j-1}^3 - x_{i,j-1}^3) + (3k_{1,i,j} q_{1,i,j} (x_{i-1,j-1}^2 - x_{i,j-1}^2)) + 3q_{1,i,j}^2 (x_{i-1,j-1} - x_{i,j-1}) \right), \quad (4.18)$$

$$S_{y_{2,i,j}} = \frac{1}{3} k_{2,i,j} (x_{i,j}^3 - x_{i-1,j}^3) + \frac{1}{2} q_{2,i,j} (x_{i,j}^2 - x_{i-1,j}^2), \quad (4.19)$$

$$S_{y_{1,i,j}} = \frac{1}{3} k_{1,i,j} (x_{i,j-1}^3 - x_{i-1,j-1}^3) + \frac{1}{2} q_{1,i,j} (x_{i,j-1}^2 - x_{i-1,j-1}^2). \quad (4.20)$$

Potom souřadnice těžiště:

$$x_{T,i,j} = \frac{S_{y_{i,j}}}{m_{i,j}}, \quad (4.21)$$

$$y_{T,i,j} = \frac{S_{x_{i,j}}}{m_{i,j}}. \quad (4.22)$$

Pro

$$m_{i,j} = \sigma S_{i,j} = S_{i,j}, \quad (4.23)$$

$$k_{1,i,j} = \frac{y_{i,j-1} - y_{i-1,j-1}}{x_{i,j-1} - x_{i-1,j-1}}, \quad (4.24)$$

$$k_{2,i,j} = \frac{y_{i,j} - y_{i-1,j}}{x_{i,j} - x_{i-1,j}}, \quad (4.25)$$

$$q_{1,i,j} = y_{i-1,j-1} - x_{i-1,j-1} k_1, \quad (4.26)$$

$$q_{2,i,j} = y_{i-1,j} - x_{i-1,j} k_2, \quad (4.27)$$

kde:

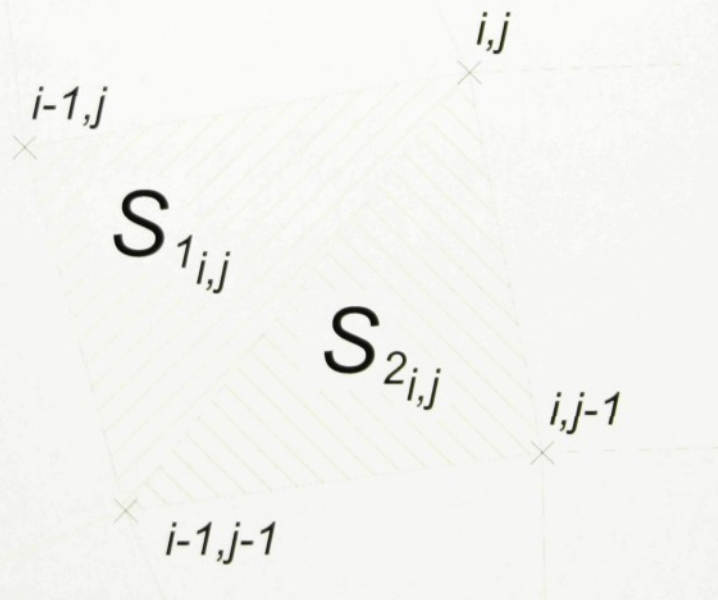
S plocha elementu.

Hodnota $S_{i,j}$ byla určena pomocí vektorové formy (viz. obr. 4.4):

$$S_{i,j} = S_{1,i,j} + S_{2,i,j}, \quad (4.28)$$

$$S_{1,i,j} = \frac{1}{2} \left| x_{i-1,j-1} (y_{i-1,j} - y_{i,j}) + x_{i-1,j} (y_{i,j} - y_{i-1,j-1}) + x_{i,j} (y_{i-1,j-1} - y_{i-1,j}) \right|, \quad (4.29)$$

$$S_{2,i,j} = \frac{1}{2} \left| x_{i-1,j-1} (y_{i,j} - y_{i,j-1}) + x_{i,j} (y_{i,j-1} - y_{i-1,j-1}) + x_{i,j-1} (y_{i-1,j-1} - y_{i,j}) \right|. \quad (4.30)$$



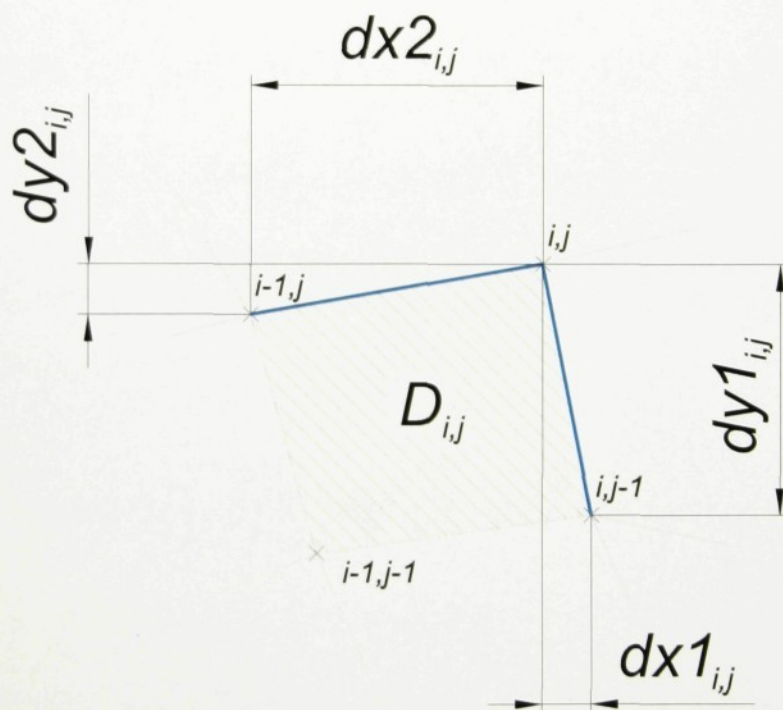
Obr. 4.4 Výpočet plochy elementu

4.4. Délky stran elementů

Délky stran byly počítány dle vztahů:

$$\begin{aligned}
 dx1_{i,j} &= x_{i,j-1} - x_{i,j}, \\
 dy1_{i,j} &= y_{i,j-1} - y_{i,j}, \\
 dx2_{i,j} &= x_{i-1,j} - x_{i,j}, \\
 dy2_{i,j} &= y_{i-1,j} - y_{i,j}.
 \end{aligned}
 \tag{4.31}$$

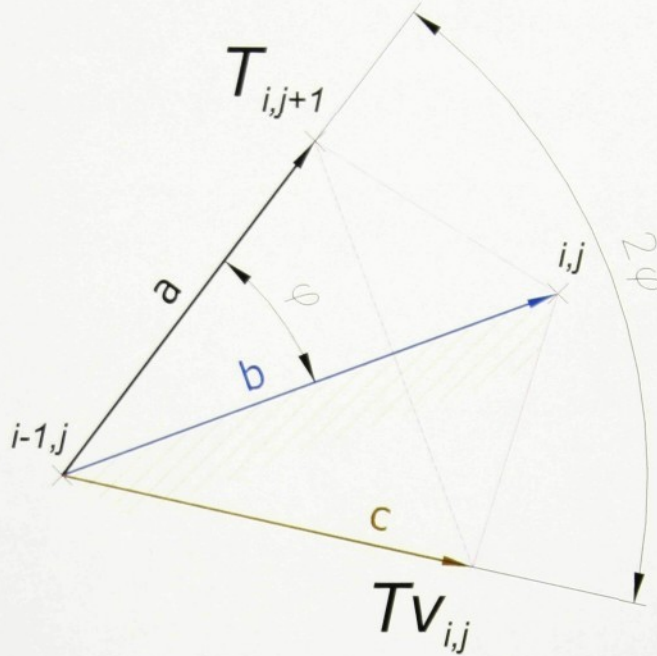
Na obrázku 4.5 je zobrazeno geometrické vyjádření délek stran elementů.



Obr. 4.5 Délky stran elementu

4.5. Virtuální těžiště

K určení souřadnic virtuálních těžišť byla použita vektorová forma. Pomocí skalárního součinu 3 vektorů – první vektor tvoří osu zrcadlení, druhý je obrazem zrcadlení a třetí je zrcadlen. Nyní zde popíšeme postup, jež je patrný z obrázku 4.6.



Obr. 4.6 Symetrie těžiště elementu

$$\begin{array}{lll}
 \mathbf{a}(a_x, a_y) & a_x = x_{T_{i,j+1}} - x_{i-1,j} & a_y = y_{T_{i,j+1}} - y_{i-1,j} \\
 \mathbf{b}(b_x, b_y) & b_x = x_{i,j} - x_{i-1,j} & b_y = y_{i,j} - y_{i-1,j} \\
 \mathbf{c}(c_x, c_y) & c_x = x_{T_{i,j}} - x_{i-1,j} & c_y = y_{T_{i,j}} - y_{i-1,j}
 \end{array} \quad (4.32)$$

Úhel φ je dán skalárním součinem vektorů $\mathbf{a}, \mathbf{b}$:

$$\cos(\varphi) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|} = \frac{a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2}} \quad (4.33)$$

Dále pak skalární součiny:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{c}| \cdot \cos(2\varphi) = |\mathbf{a}|^2 \cdot \cos(2\varphi) = K1, \quad (4.34)$$

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos(\varphi) = K2. \quad (4.35)$$

Potom:

$$\begin{pmatrix} a_x \cdot c_x & a_y \cdot c_y & K1 \\ b_x \cdot c_x & b_y \cdot c_y & K2 \end{pmatrix} \quad (4.36)$$

Řešením je hledaný vektor $\mathbf{c}$:

$$c_x = \frac{a_y \cdot K2 - b_y \cdot K1}{a_y \cdot b_x - a_x \cdot b_y}, \quad (4.37)$$

$$c_y = \frac{b_x \cdot K1 - a_x \cdot K2}{a_y \cdot b_x - a_x \cdot b_y}. \quad (4.38)$$

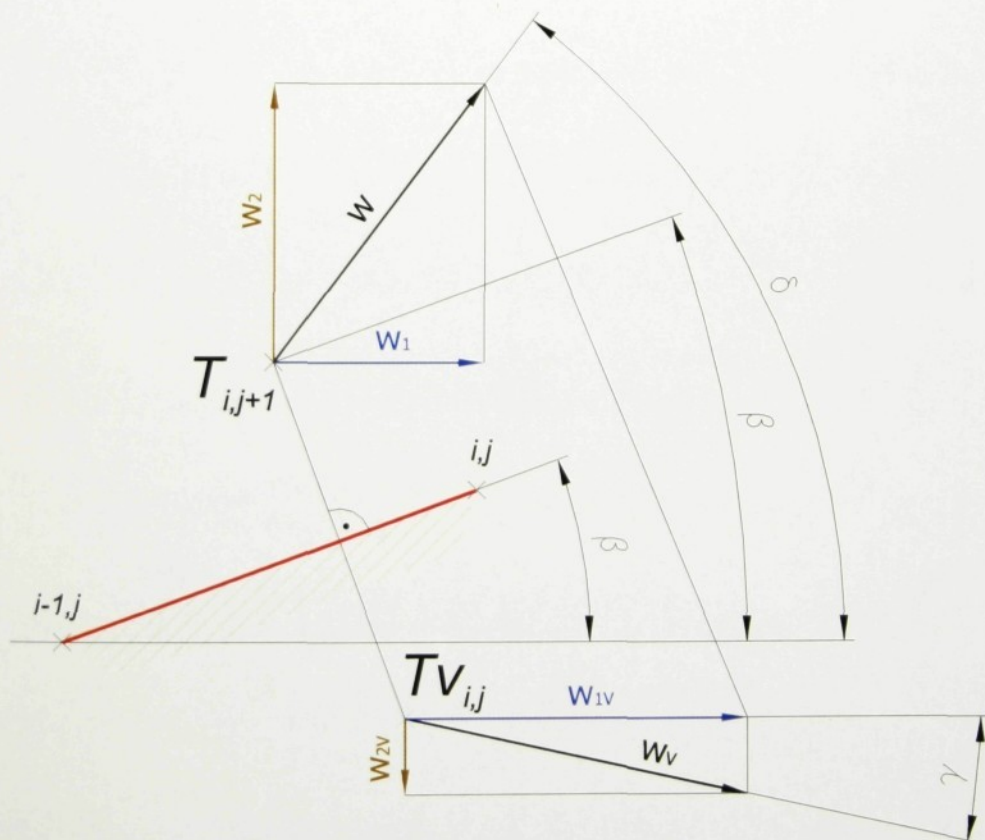
Přesná poloha virtuálního těžiště:

$$x_{TV_{i,j}} = x_{i-1,j} + c_x, \quad (4.39)$$

$$y_{TV_{i,j}} = y_{i-1,j} + c_y. \quad (4.40)$$

4.6. Symetrie do virtuálního těžiště

Vektor rychlosti musí být také symetrický (metoda odrazu na stěně). Postup je patrný z obrázku 4.7.



Obr. 4.7 Symetrie vektoru rychlosti

Pokud byly definovány úhly:

$$\gamma = \beta - (\delta - \beta) = 2\beta - \delta, \quad (4.41)$$

$$\delta = \arctg\left(\frac{w_{2,i,j}}{w_{1,i,j}}\right). \quad (4.42)$$

Potom

$$w_{1V,i,j} = \sqrt{w_{1,i,j+1}^2 + w_{2,i,j+1}^2} \cdot \cos(\gamma), \quad (4.43)$$

$$w_{2V,i,j} = \sqrt{w_{1,i,j+1}^2 + w_{2,i,j+1}^2} \cdot \sin(\gamma). \quad (4.44)$$

4.7. Interpolace hodnot

Pro elementy s úhlem $\beta \neq 0$ bylo nutné provádět interpolaci z virtuálních těžišť do reálných těžišť.

$$w_{1,i,j} = w_{1,i-1,j} + \left(y_{T,i,j} - y_{TV,i-1,j}\right) \cdot \frac{w_{1V,i,j} - w_{1V,i-1,j}}{y_{TV,i,j} - y_{TV,i-1,j}}, \quad (4.45)$$

$$w_{2,i,j} = w_{2,i-1,j} + \left(x_{T,i,j} - x_{TV,i-1,j}\right) \cdot \frac{w_{2V,i,j} - w_{2V,i-1,j}}{x_{TV,i,j} - x_{TV,i-1,j}}. \quad (4.46)$$

5. Numerické řešení

Numerické řešení získáme metodou konečných objemů pro případ strukturované čtyřúhelníkové sítě. Integrujeme-li rovnici (3.7) přes element $D_{i,j}$ (výpočetní buňka) a aplikujeme-li Greenovu větu, dostaneme:

$$\iint_{D_{i,j}} W \Big|_{t_1}^{t_2} dx dy + \oint_{\partial D_{i,j}} (F dy - G dx) = \oint_{\partial D_{i,j}} (R dy - S dx). \quad (5.1)$$

Po aplikaci věty o střední hodnotě na první integrál získáme:

$$W_{i,j}^{n+1} = W_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\mu_{i,j}} \oint_{\partial D_{i,j}} ((F - R) dy - (G - S) dx), \quad (5.2)$$

$$\mu_{i,j} = \iint_{D_{i,j}} dx dy, \quad (5.3)$$

$$\Delta t = t_2 - t_1, \quad (5.4)$$

kde:

$D_{i,j}$ zvolená výpočetní buňka (element, viz obrázek 5.1),

$W_{i,j}$ hlavní hodnota v $D_{i,j}$,

$\mu_{i,j}$ plocha výpočetní buňky,

Δt časový krok.

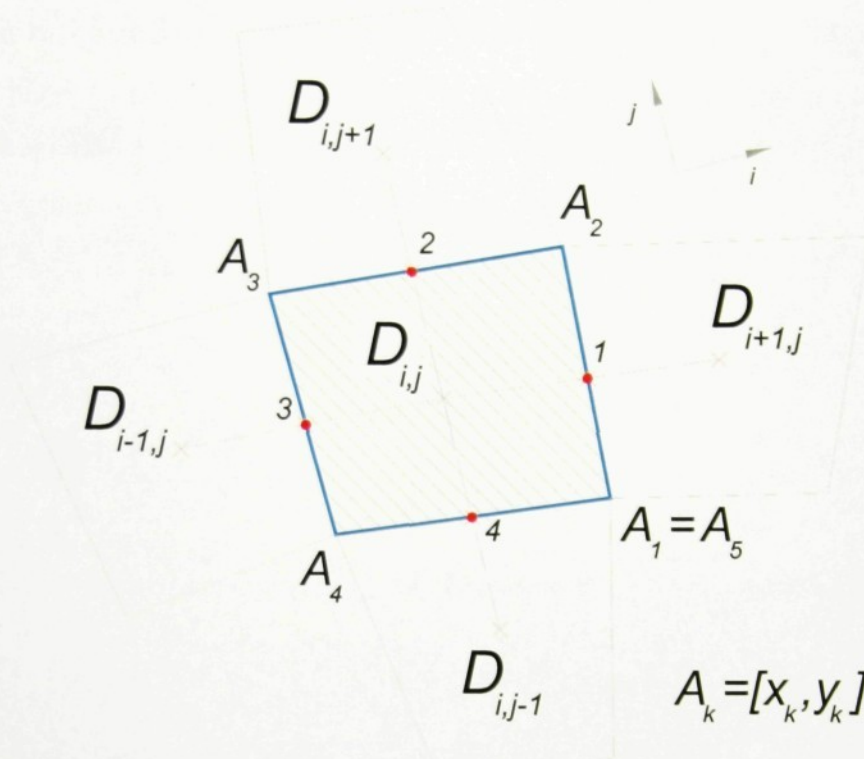
Poznámka:

Greenova věta: Necht' $X(x, y)$, $Y(x, y)$, $\frac{\partial X}{\partial x}$, $\frac{\partial Y}{\partial y}$ jsou spojitě elementární oblasti D , ∂D je uzavřená, po částech hladká Jordanova křivka, potom:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\partial D} X dx + Y dy$$

Věta o střední hodnotě pro integrály: Necht' funkce f a g jsou spojitě funkce na intervalu $\langle a, b \rangle$, na kterém g nemění znaménko, pak:

$$\int_a^b f g = f(z) \int_a^b g; \text{ pro vhodné } z \in \langle a, b \rangle$$



Obr. 5.1 Výpočetní buňka (element)

5.1. Schéma Laxovo-Friedrichsovo

Schéma Laxovo-Friedrichsovo bude mít tvar pro Eulerovy rovnice (3.5):

$$W_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N W_k^n - \frac{\Delta t}{\mu(D_{i,j})} \sum_{k=1}^N (F_k^n \Delta y_k - G_k^n \Delta x_k), \quad (5.5)$$

kde:

$$F_k^n = \frac{1}{2} [F(W_{i,j}^n) + F(W_k^n)], \quad (5.6)$$

$$G_k^n = \frac{1}{2} [G(W_{i,j}^n) + G(W_k^n)], \quad (5.7)$$

$$\Delta y_k = y_{k+1} - y_k, \quad (5.8)$$

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k. \quad (5.9)$$

Toto schéma lze zapsat také ve tvaru

$$W_{i,j}^{n+1} = W_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\mu(D_{i,j})} \sum_{k=1}^N (F_k^n \Delta y_k - G_k^n \Delta x_k) + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (W_k^n - W_{i,j}^n). \quad (5.10)$$

Nebo pro případ s parametrem umělé disipace $\varepsilon \in (0,1)$

$$W_{i,j}^{n+1} = W_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\mu(D_{i,j})} \sum_{k=1}^N (F_k^n \Delta y_k - G_k^n \Delta x_k) + \frac{\varepsilon}{N} \sum_{k=1}^N (W_k^n - W_{i,j}^n). \quad (5.11)$$

Pro případ strukturované sítě tvořené čtyřúhelníkovými buňkami bude schéma:

$$W_{i,j}^{n+1} = W_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\mu_{i,j}} \sum_{k=1}^4 (F_k^n \Delta y_k - G_k^n \Delta x_k) + \frac{\varepsilon}{4} (W_{i+1,j}^n - 2W_{i,j}^n + W_{i-1,j}^n) + \frac{\varepsilon}{4} (W_{i,j+1}^n - 2W_{i,j}^n + W_{i,j-1}^n). \quad (5.12)$$

5.2. Schéma Laxovo-Wendroffovo

Schéma Laxovo-Wendroffovo bude mít tvar pro Eulerovy rovnice (3.5) v případě Richtmyerovy modifikace:

$$W_{i,j}^{n+1} = W_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\mu(D_{i,j})} \sum_{k=1}^N (F_k^n \Delta y_k - G_k^n \Delta x_k) + \frac{\varepsilon}{N} \sum_{k=1}^N (W_k^n - W_{i,j}^n), \quad (5.13)$$

$$W_{i,j}^{n+2} = W_{i,j}^n - \frac{2\Delta t}{\mu(D_{i,j})} \sum_{k=1}^N (F_k^{n+1} \Delta y_k - G_k^{n+1} \Delta x_k) + AD(W_{i,j}^n), \quad (5.14)$$

kde:

$AD(W_{i,j}^n)$ člen umělé disipace (viz. kapitola 5.4.).

Pro případ strukturované sítě tvořené čtyřúhelníkovými buňkami bude Richtmyerova modifikace:

$$W_{i,j}^{n+1} = W_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\mu_{i,j}} \sum_{k=1}^4 (F_k^n \Delta y_k - G_k^n \Delta x_k) + \frac{\varepsilon}{4} (W_{i+1,j}^n - 2W_{i,j}^n + W_{i-1,j}^n) + \frac{\varepsilon}{4} (W_{i,j+1}^n - 2W_{i,j}^n + W_{i,j-1}^n), \quad (5.15)$$

$$W_{i,j}^{n+2} = W_{i,j}^n - \frac{2\Delta t}{\mu_{i,j}} \sum_{k=1}^4 (F_k^{n+1} \Delta y_k - G_k^{n+1} \Delta x_k) + AD(W_{i,j}^n). \quad (5.16)$$

Pro MacCormackovu modifikaci potom:

$$W_{i,j}^{n+1/2} = W_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\mu_{i,j}} \sum_{k=1}^4 (F_k^n \Delta y_k - G_k^n \Delta x_k), \quad (5.17)$$

kde:

$$\begin{aligned} F_1^n &= F(W_{i+1,j}^n), \\ F_2^n &= F(W_{i,j+1}^n), \\ F_3^n &= F_4^n = F(W_{i,j}^n). \end{aligned}$$

Podobně i pro G_k^n .

$$W_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{2} \left(W_{i,j}^n + W_{i,j}^{n+1/2} - \frac{\Delta t}{\mu_{i,j}} \sum_{k=1}^4 (F_k^{n+1/2} \Delta y_k - G_k^{n+1/2} \Delta x_k) \right) + AD(W_{i,j}^n), \quad (5.18)$$

kde:

$$\begin{aligned} F_1^{n+1/2} &= F_2^{n+1/2} = F(W_{i,j}^{n+1/2}), \\ F_3^{n+1/2} &= F(W_{i-1,j}^{n+1/2}), \\ F_4^{n+1/2} &= F(W_{i,j-1}^{n+1/2}). \end{aligned}$$

Podobně i pro $G_k^{n+1/2}$.

Schéma Laxovo-Wendroffovo bude mít tvar pro N-S rovnice (3.8) v případě MacCormackovy modifikace:

$$W_{i,j}^{n+1/2} = W_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\mu(D_{i,j})} \left\{ \sum_{k=1}^N ((F_k^n - R_k^n) \Delta y_k - (G_k^n - S_k^n) \Delta x_k) \right\}, \quad (5.19)$$

$$W_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{2} \left[W_{i,j}^n + W_{i,j}^{n+1/2} - \left\{ \frac{\Delta t}{\mu(D_{i,j})} \sum_{k=1}^N (F_k^{n+1/2} - R_k^{n+1/2}) \Delta y_k \right\} + \left\{ - (G_k^{n+1/2} - S_k^{n+1/2}) \Delta x_k \right\} \right] + AD(W_{i,j}^n) \quad (5.20)$$

Pro případ strukturované sítě tvořené čtyřúhelníkovými buňkami:

$$W_{i,j}^{n+1/2} = W_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\mu_{i,j}} \left\{ \sum_{k=1}^4 \left((F_k^n - R_k^n) \Delta y_k - (G_k^n - S_k^n) \Delta x_k \right) \right\}, \quad (5.21)$$

$$W_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{2} \left[W_{i,j}^n + W_{i,j}^{n+1/2} - \left\{ \frac{\Delta t}{\mu_{i,j}} \sum_{k=1}^4 (F_k^{n+1/2} - R_k^{n+1/2}) \Delta y_k \right\} + \left\{ - (G_k^{n+1/2} - S_k^{n+1/2}) \Delta x_k \right\} \right] + AD(W_{i,j}^n) \quad (5.22)$$

kde F_k^n , G_k^n , $F_k^{n+1/2}$, $G_k^{n+1/2}$ jsou dány dle (5.17), (5.18) a R_k , S_k v časové vrstvě jsou počítány centrálně, např.

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{1}{2} (R_{i,j} + R_{i+1,j}), \\ R_2 &= \frac{1}{2} (R_{i,j} + R_{i,j+1}), \\ R_3 &= \frac{1}{2} (R_{i,j} + R_{i-1,j}), \\ R_4 &= \frac{1}{2} (R_{i,j} + R_{i,j-1}), \end{aligned} \quad (5.23)$$

atd., podobně S_k , dle označení dané obrázkem 5.1.

5.3. Schéma Rungeho-Kuttovo

Schéma Rungeho-Kuttovo bude mít obecný tvar:

$$W_{i,j}^{(0)} = W_{i,j}^n, \quad (5.24)$$

$$W_{i,j}^{(r+1)} = W_{i,j}^{(0)} - \Delta t \alpha_r \operatorname{Re} z W_{i,j}^{(r)}, \quad (5.25)$$

$$W_{i,j}^{n+1} = W_{i,j}^{(m)}, \quad (5.26)$$

pro

$$r = 0, 1, \dots, m-1$$

kde $\operatorname{Re} z W_{i,j}^n$ je definováno jako stacionární reziduum pro Eulerovy rovnice (3.5):

$$\operatorname{Re} z W_{i,j}^n = \sum_{k=1}^N (F_k^n \Delta y_k - G_k^n \Delta x_k). \quad (5.27)$$

Pro případ strukturované sítě tvořené čtyřúhelníkovými buňkami:

$$\operatorname{Re} z W_{i,j}^n = \frac{1}{\mu_{i,j}} \sum_{k=1}^4 (F_k^n \Delta y_k - G_k^n \Delta x_k). \quad (5.28)$$

Stacionární reziduum pro N-S rovnice (3.8):

$$\operatorname{Re} z W_{i,j}^n = \frac{1}{\mu_{i,j}} \sum_{k=1}^4 ((F_k^n - R_k^n) \Delta y_k - (G_k^n - S_k^n) \Delta x_k). \quad (5.29)$$

Pro 3. krokovou (3S) Rungeho-Kuttovu metodu je parametr $m=3$ a pro 4. krokovou (4S) $m=4$.

Koeficienty α_r se volí tak, aby se dosáhlo požadované přesnosti v čase. Často používanými metodami jsou (viz [2]):

1. Metoda s koeficienty $\alpha_0 = \alpha_1 = \frac{1}{2}$ a $\alpha_2 = 1$. Tato metoda je lineárně stabilní pro

$CFL = 2$ a je druhého řádu.

2. Metoda s koeficienty $\alpha_0 = \frac{1}{4}$, $\alpha_1 = \frac{1}{3}$, $\alpha_2 = \frac{1}{2}$ a $\alpha_3 = 1$. Tato metoda je lineárně

stabilní pro $CFL = 2\sqrt{2}$ a je čtvrtého řádu.

5.4. Umělá disipace

Umělá disipace vyhlazuje nežádoucí oscilace.

$$AD(W_{i,j}^n) = k_1 \gamma_i (W_{i+1,j}^n - 2W_{i,j}^n + W_{i-1,j}^n) + k_2 \gamma_j (W_{i,j+1}^n - 2W_{i,j}^n + W_{i,j-1}^n) \quad (5.30)$$

$$\gamma_i = \frac{|p_{i+1,j}^n - 2p_{i,j}^n + p_{i-1,j}^n|}{|p_{i+1,j}^n| + 2|p_{i,j}^n| + |p_{i-1,j}^n|} \quad (5.31)$$

$$\gamma_j = \frac{|p_{i,j+1}^n - 2p_{i,j}^n + p_{i,j-1}^n|}{|p_{i,j+1}^n| + 2|p_{i,j}^n| + |p_{i,j-1}^n|} \quad (5.32)$$

Koeficienty k_1 , k_2 nejsou pevně dány. Měly by se zjišťovat porovnáním výsledků získaných výpočtem s výsledky experimentů. V této práci byly použity tyto hodnoty:

- 1) $k_1 = k_2 = 0.2$,
- 2) $k_1 = k_2 = 0.8$,
- 3) $k_1 = k_2 = 1$,
- 4) $k_1 = k_2 = 2$.

Pro parametr umělé disipace ε byly použity hodnoty:

- 1) $\varepsilon = \frac{1}{10}$,
- 2) $\varepsilon = \frac{1}{5}$,
- 3) $\varepsilon = 1$.

5.5. Stabilita schémat

Volba časového kroku je dána požadavkem stability na základě lokální spektrální metody (von Neumanova kriteria).

Pro Eulerovy rovnice (3.5) lze psát:

$$\Delta t \leq \frac{K.CFL}{\frac{|w_s| + a}{\Delta s} + \frac{|w_n| + a}{\Delta n}}. \quad (5.33)$$

Pro N-S rovnice (3.8) obdobně:

$$\Delta t \leq \frac{K.CFL}{\frac{|w_s| + a}{\Delta s} + \frac{|w_n| + a}{\Delta n} + 2\eta \left(\frac{1}{\Delta s^2} + \frac{1}{\Delta n^2} \right)}. \quad (5.34)$$

kde:

K konstanta určená z numerických experimentů,

w_s rychlost ve směru tečny,

w_n rychlost ve směru normály,

CFL Courantovo číslo (závisí na volbě schématu).

U oblastí kde se předpokládá větší vliv vazkosti (tedy u N-S) jako např. u stěny, je nutné volit podstatně kratší krok v tom směru, kde se očekává velká změna, tj. pro náš případ:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \ll 1, \quad (5.35)$$

volí se

$$\Delta y \sim \frac{k}{\sqrt{\text{Re}}}, \quad (5.36)$$

$$k \in R \quad k \in (0, 1),$$

kde:

Re Reynoldsovo číslo.

5.6. Sledování konvergence ke stacionárnímu stavu

Konvergence byla sledována pomocí reziduí, která mohou být počítána různými způsoby:

$$\text{Re } z W_{i,j}^n = \frac{1}{m.n} \sqrt{\sum_{i,j} \left(\frac{W_{i,j}^{n+1} - W_{i,j}^n}{\Delta t} \right)^2}, \text{ v } L_2(\Omega), \quad (5.37)$$

$$\text{Re } z W_{i,j}^n = \max_{i,j} \left(\frac{W_{i,j}^{n+1} - W_{i,j}^n}{\Delta t} \right), \text{ v } C(\Omega), \quad (5.38)$$

$$\text{Re } z W_{i,j}^n = \frac{1}{m.n} \sum_{i,j} \left| \frac{W_{i,j}^{n+1} - W_{i,j}^n}{\Delta t} \right|, \text{ v } L_1(\Omega), \quad (5.39)$$

kde:

$$m = \sum_{f=1}^{e_f} c_f.$$

Rezidua se vynášejí do grafu v logaritmické stupnici v závislosti na čase, resp. na počtu iterací.

5.7. Okrajové podmínky

Na vstupu jsou zadávány hodnoty nabíhajícího proudu. Na výstupu byla použita extrapolace, při $p_{n+1} = k.p_\infty$.

Potom při uvažovaném shodném dělení ve směru x je (viz. obr. 5.2):

$$W_{i+1,j}^{(l)} = 2W_{i,j}^{(l)} - W_{i-1,j}^{(l)}, \quad (5.40)$$

pro

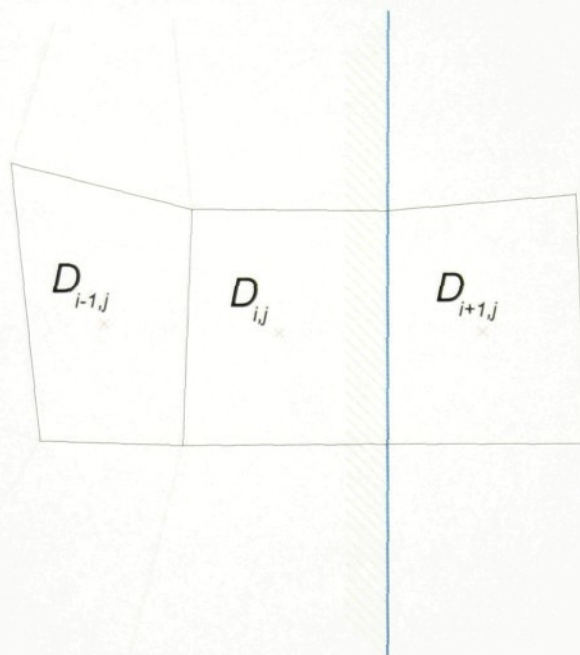
$$l = 1, 2, 3,$$

a $W_{i+1,j}^{(4)}$ se určilo ze známého tlaku, $W_{i+1,j}^{(1)}, W_{i+1,j}^{(2)}, W_{i+1,j}^{(3)}$ a stavové rovnice (3.3).

Na pevné hranici byli použity podmínky:

$$\frac{\delta \mathbf{w}}{\delta \mathbf{n}} = 0. \quad (5.41)$$

Tyto podmínky byli aplikovány metodou odrazu [2].



Obr. 5.2 Extrapolace hodnot

5.8. Počáteční podmínky

Počáteční podmínky musí vyhovovat požadavku rovnoměrného vstupního nabíhajícího proudu. Ten byl definován Machovým číslem, velikostí hustoty a absolutní velikostí rychlosti.

$$W = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ Ma \cdot \cos(\alpha) \\ Ma \cdot \sin(\alpha) \\ \frac{1}{\kappa(\kappa-1)} + \frac{1}{2} Ma^2 \end{bmatrix}, \quad (5.40)$$

kde:

α úhel mezi těžišti sousedních elementů ve směru osy x.

6. Výpočetní program

Program pro výpočet matematického modelu s Eulerovými rovnicemi byl zpracován dle vývojového diagramu na obrázku 6.1 pro schéma Laxovo-Friedrichsovo, 6.2 pro schéma L-W-Richtmyerovo, a 6.3 pro schéma L-W-MacCormackovo.

Zadávanými veličinami jsou:

z počet úseků dělení ve směru x ,

c vektor počtu dělení úseků,

e vektor délek úseků,

L délka kanálu,

L_p délka profilu,

L_n délka vstupní části,

D výška kanálu,

d výška profilu v %,

Ma vstupní Machovo číslo,

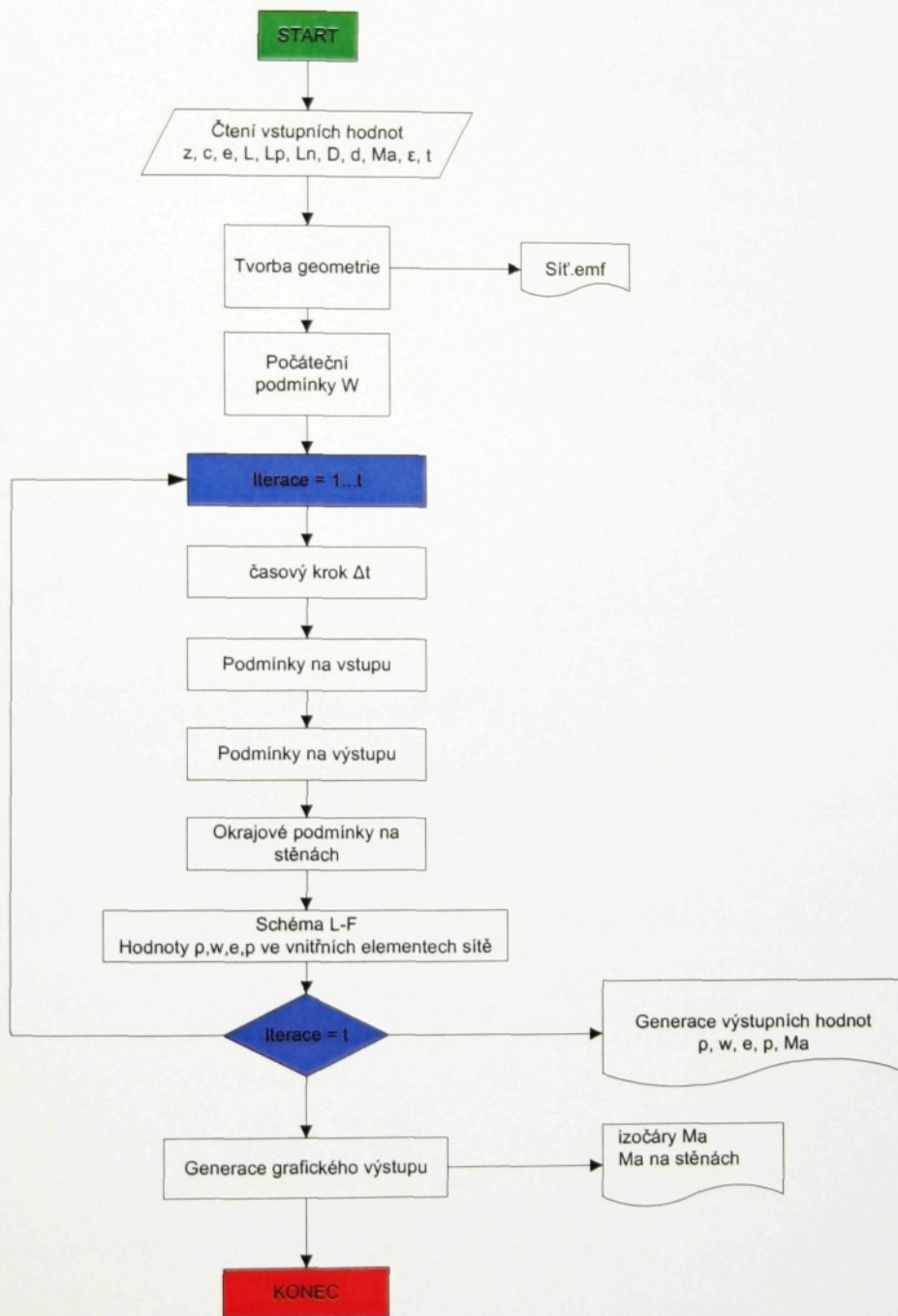
ε parametr umělé disipace,

t počet iterací.

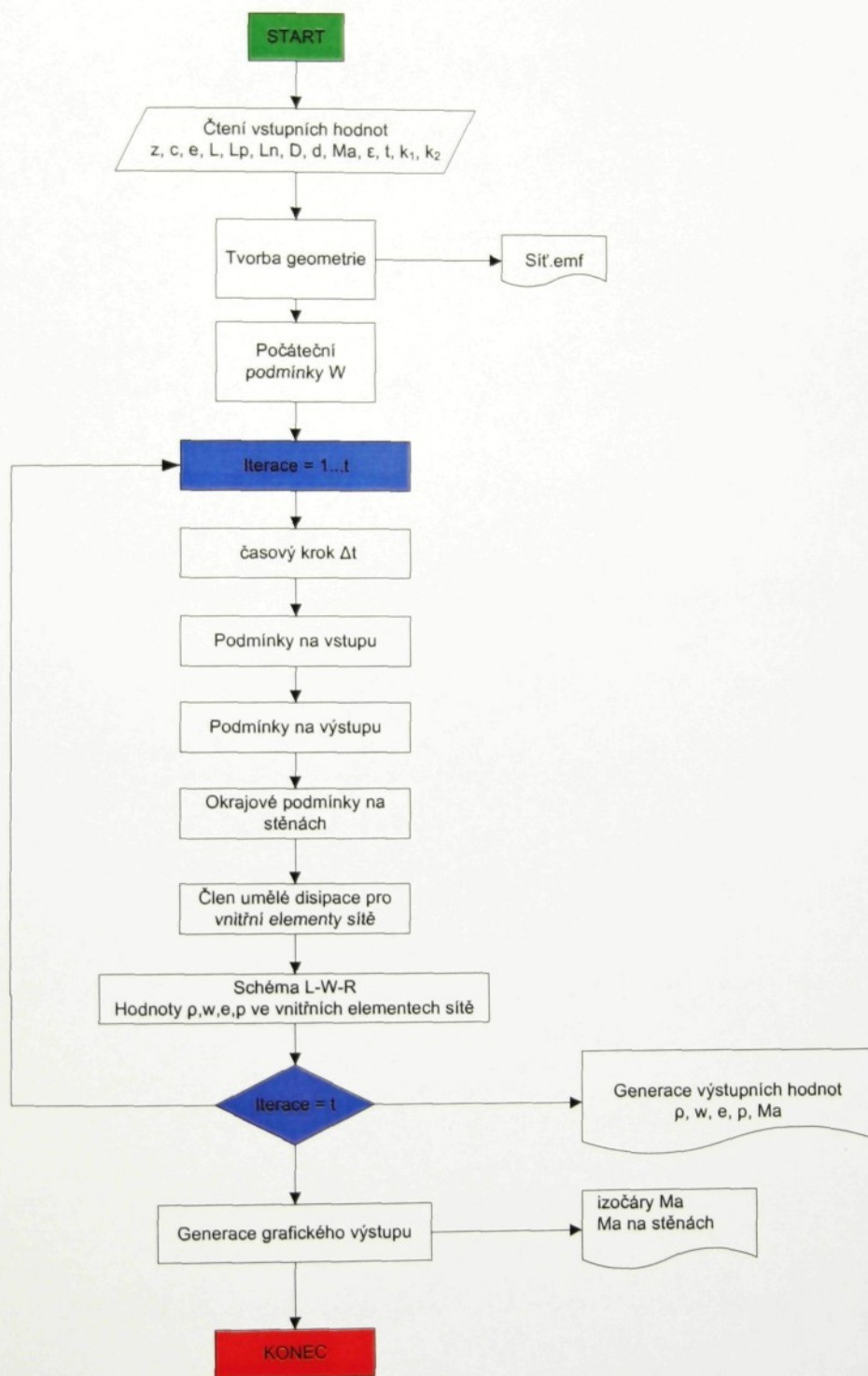
Pro schémata L-W navíc:

k_1, k_2 parametry umělé disipace.

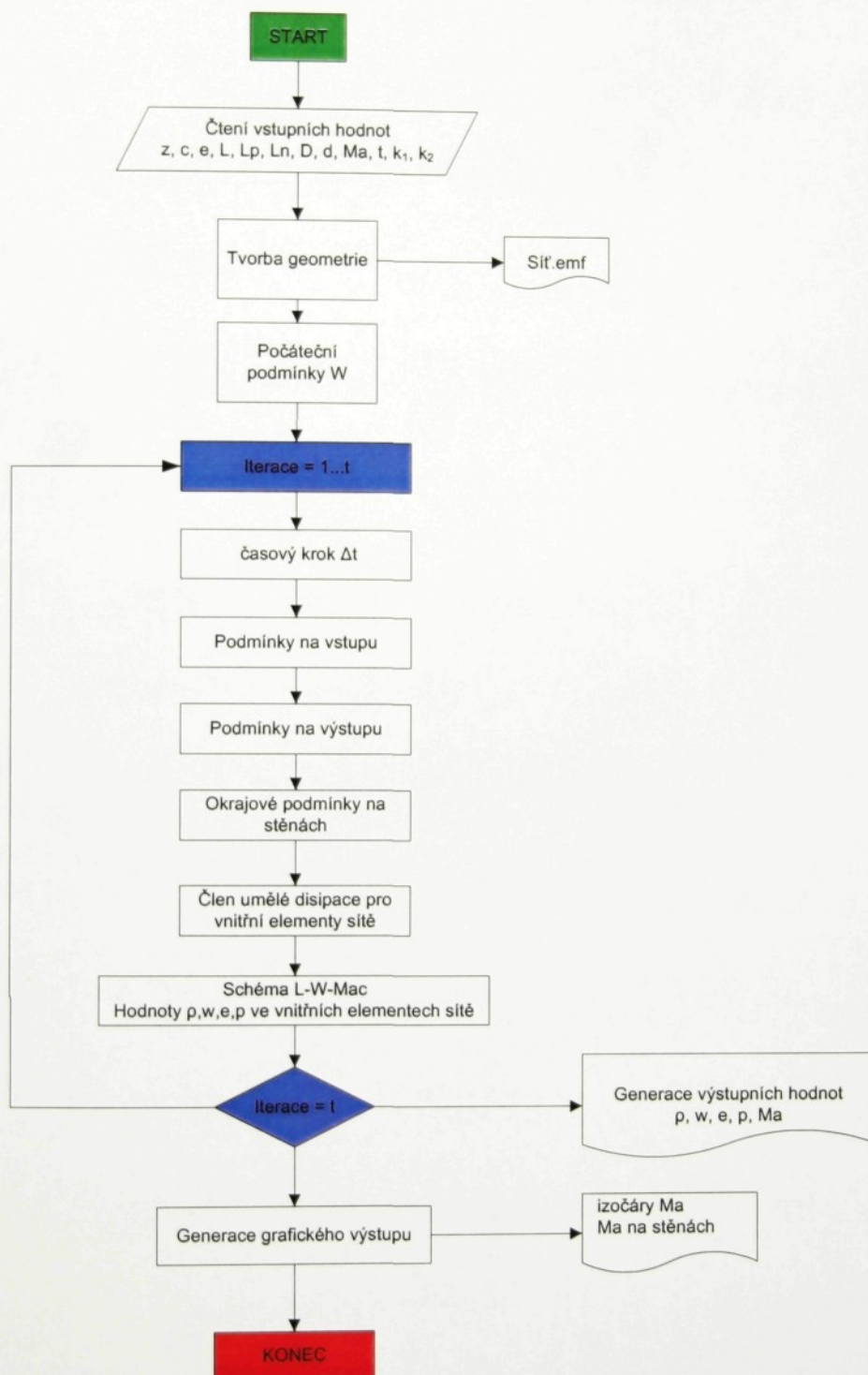
Výstupními veličinami jsou hodnoty tlaků (p), vektor rychlosti (w), energie (e) ve všech elementech sítě.



Obr. 6.1 Schéma programu pro Laxovo-Friedrichsovo schéma



Obr. 6.2 Schéma programu pro L-W- Richtmyerovo schéma

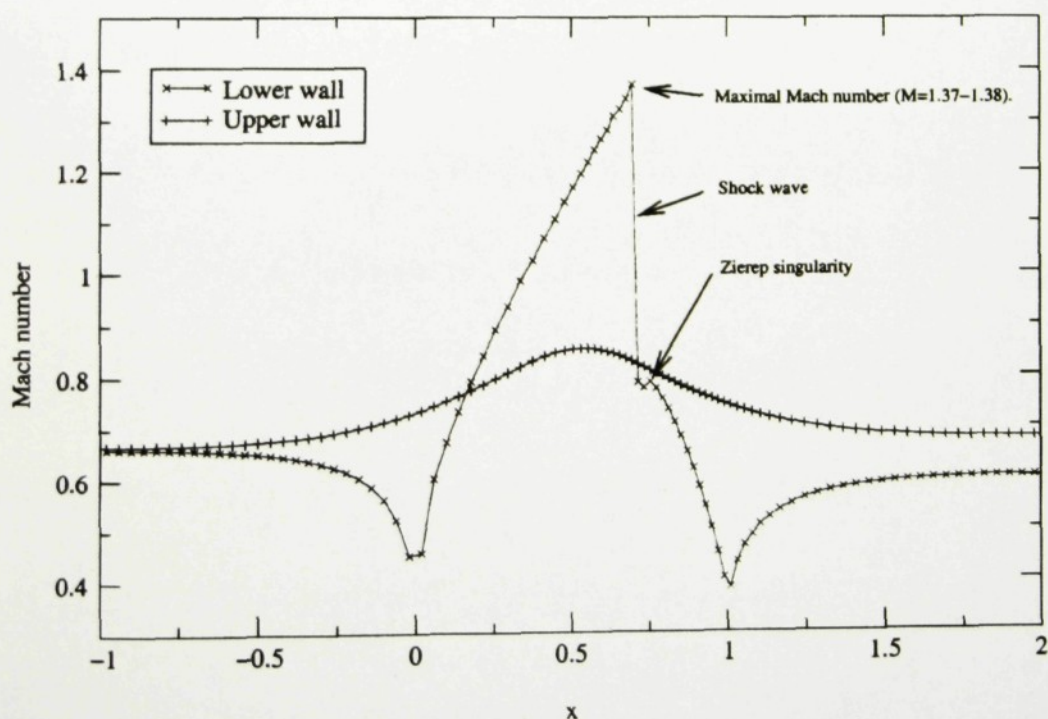


Obr. 6.3 Schéma programu pro L-W- MacCormackovo schéma

7. Rozbor výsledků

Řešený problém proudění v kanále je dobře popsán v [1], kde jsou také uvedena numerická řešení pro různá schémata. Tato řešení jsou uvedena v příloze č.5.

Na vstupu jsme předepisovali parametry proudu tak, aby vstupní Machovo číslo $M_1 \approx 0.675$. Tlak na výstupu jsme volili stejný jako na vstupu. Jedná se o velmi známý případ, který je často používán k testování numerických metod. Z numerických experimentů je známo, že maximální Machovo číslo by mělo být dosaženo na spodní stěně kanálu ve druhé polovině profilu (tj. v rozšiřující se části) a že jeho hodnota by měla být $M_{\max} = 1.37 \div 1.38$. Dále je známo, že na dolní stěně by za rázovou vlnou mělo vzniknout další lokální maximum Machova čísla (tzv. Zierepova singularita viz. obr. 7.1). Tato dvě hlediska se používají spolu s rozlišením rázové vlny k posouzení kvality numerického řešení.

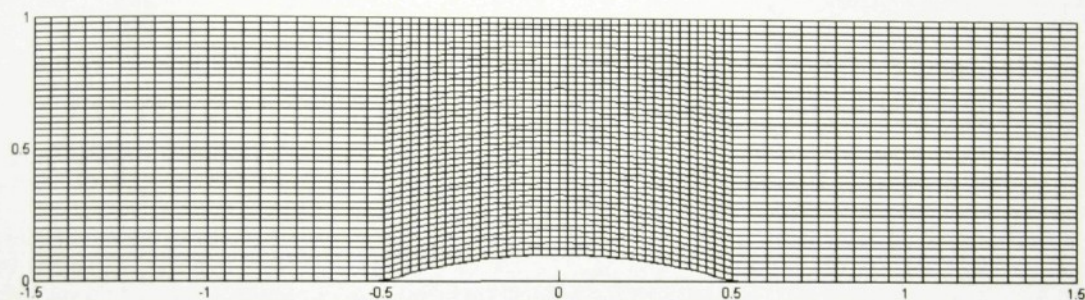


Obr. 7.1 Průběh Machova čísla a Zierepova singularita

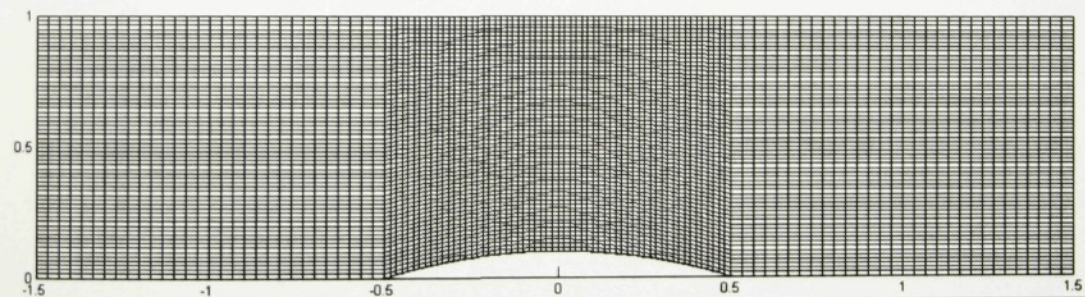
Získané výsledky numerického řešení jsou v grafické podobě uvedeny v příloze. Jsou to:

- 1) izočáry Machova čísla,
- 2) průběh Machova čísla na stěnách,
- 3) průběh konvergence výpočtu.

Numerické řešení bylo prováděno na strukturované síti s 40x80 a 60x120 elementy (viz. obr. 7.2 a 7.3).



Obr. 7.2 Strukturovaná síť s 40x80 elementy



Obr. 7.3 Strukturovaná síť s 60x120 elementy

U schématu Laxe-Friedrichse byl testován vliv umělé disipace ε a vliv hustoty sítě. U modifikací schématu Laxe-Wendroffa byl testován vliv parametrů umělé disipace k_1 , k_2 a vliv hustoty sítě. Pro MacCormackovu modifikaci byly provedeny výpočty se zvyšujícím se M_∞ . Na výsledcích je pozorovatelný vznik rázové vlny se zvyšující se hodnotou M_∞ .

Schéma 1.řádu

Porovnáváme-li výsledky získané pomocí schématu Laxe-Friedrichse (Příloha č.1.), zjišťujeme že na řešení má podstatný vliv umělá disipace ε a hrubá či jemná síť. Se snižující se hodnotou ε je vliv umělé disipace menší a tím se také zvýrazňuje na spodní stěně rázová vlna (zvyšuje se také $M_{\max}$). Je patrný i vliv hustoty sítě, jež charakterizuje přesnost schémat prvního řádu. Pro přesnější určení řešení je vždy potřeba vytvářet jemnou síť v oblastech s očekávanými vysokými gradienty hodnot. Dále je vidět, že schéma je schopno zachytit nespojitosti v řešení (rázovou vlnu) bez nežádoucích oscilací (např. pro síť 60×120 a $\varepsilon = 1/10$). V porovnání s výsledky z [1] jsou získané výsledky v dobré shodě.

Schémata prvního řádu vykazují silný vliv umělé disipace obsažené přímo ve schématu. Tato umělá disipace „vyhlazuje“ numerické řešení, což se projevuje v okolí nespojitostí (rázových vln), rázové vlny jsou však rozmazány více než je vhodné!

Schéma 2.řádu

U schématu Laxe-Wendroffa v Richtmyerově tvaru je patrné zlepšení zobrazení rázové vlny. Zierepova singularita je také zřetelná. Vliv umělé disipace ε zde pořád zůstává a dále je přidána umělá disipace $AD(W_{i,j}^n)$. Velikost umělé disipace $AD(W_{i,j}^n)$ zde byla řízena pomocí hodnot k_1 a k_2 . Pro nízké hodnoty k_1, k_2 řešení v okolí nespojitostí velmi osciluje. Dále zde muselo být zpřísněno kritérium stability a to změnou hodnoty K na $K = 0.4$. Pro hodnotu $K = 0.8$ numerické řešení ztrácelo stabilitu.

U schématu Laxe-Wendroffa v MacCormackově tvaru již není zahrnuta umělá disipace s ε , ale pouze umělá disipace $AD(W_{i,j}^n)$. Ze získaných výsledků je patrný vliv umělé disipace $AD(W_{i,j}^n)$. Pro nízké hodnoty řešení osciluje v okolí nespojitostí. Se zvyšujícími se hodnotami tyto oscilace zanikají. Určení parametrů k_1 a k_2 je věcí numerických experimentů a porovnáním s již existujícími výsledky. Pro naše řešení na uvedené síti se jeví jako nejvhodnější hodnoty $k_1 = k_2 = 1$. Uvedené výsledky v příloze č.5 pro MacCormackovo schéma jsou v dobré shodě se získanými výsledky.

8. Závěr

V této práci se podařilo formulovat matematický model, jeho numerickou aproximaci a numerické řešení; naprogramovat a odladit program a získat přehledné výsledky pro systém Eulerových rovnic pro stacionární dvourozměrné proudění neviské stlačitelné tekutiny. Byla použita metoda konečných objemů, metoda ustalování, jedno schéma prvního řádu (L-F) a dvě schémata druhého řádu (L-W-Richtmeyer, L-W-MacCormack). Pro program bylo vybráno programové rozhraní software Matlab 6 R12.

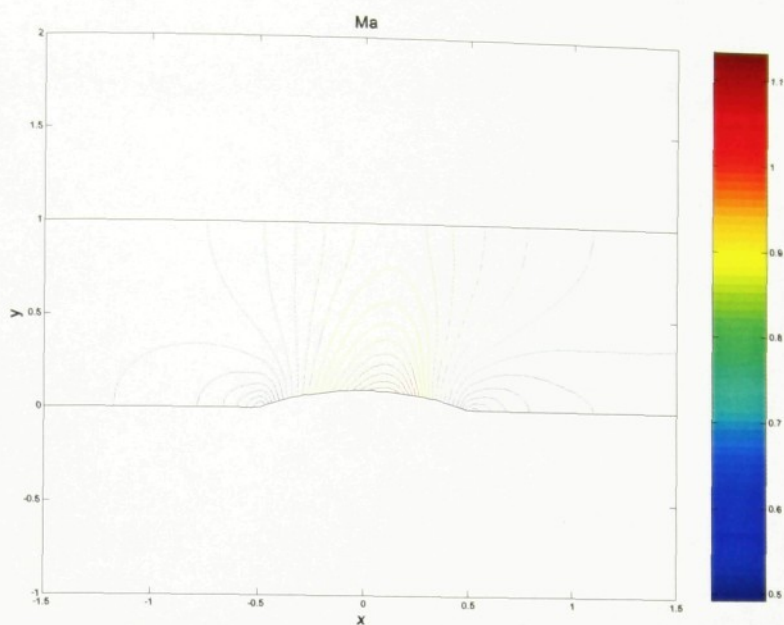
Výsledky potvrdily vlastnosti použitých schémat a podařilo se určit vhodné parametry pro umělou disipaci ε a k_1, k_2 . U schématu L-F byl prokázán silný vliv umělé disipace na „vyhlazování“ numerického řešení a nutnost vytvářet jemnější síť pro zvýšení přesnosti. U schémat druhého řádu byla dosažena dobrá přesnost i na hrubších sítích. Taktéž byly získány zkušenosti s volbou parametrů k_1, k_2 pro umělou disipaci a parametru K .

V budoucnu by chtěl autor přejít od software Matlab k vlastnímu programovému prostředí (jeho součástí bude vlastní matematická a grafická knihovna), které v současné době programuje ve spojení programovacích jazyků Visual C++ a Visual Basic. Výpočty by se měly tímto krokem urychlit. Dále pak k rozšíření metod pro výpočet turbulentního transsonického proudění.

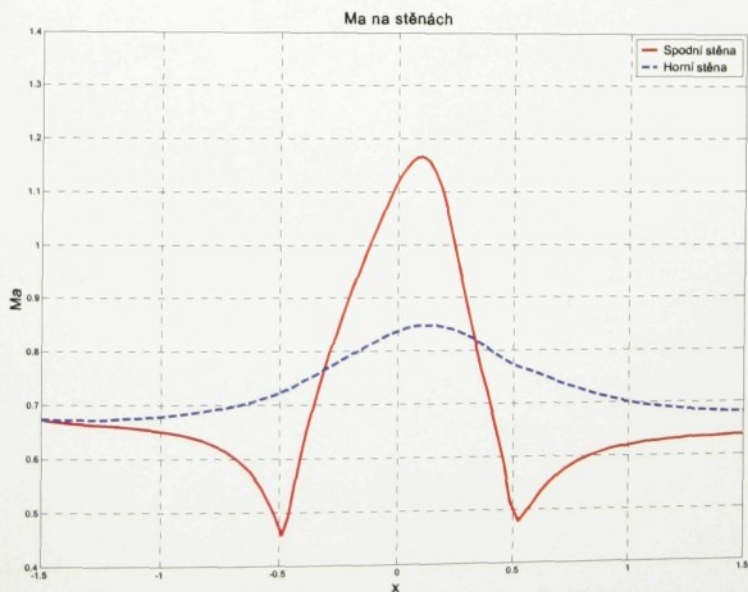
Seznam literatury

- [1] Dvořák, R. – Kozel, K. : Matematické modelování v aerodynamice, ČVUT, Praha 1996
- [2] Kozel, K. – Fürst, J. : Numerické metody řešení problému proudění I, ČVUT, Praha 2001
- [3] Tesař, V. : Mezní vrstvy a turbulence, ČVUT, Praha 1996
- [4] Maryška, J. – Šembera, J. : Mechanika tekutin, TU Liberec 2002
- [5] Brdička, M. – Samek, L. – Sopko, B. : Mechanika kontinua, Academia Praha 2000
- [6] Feistauer, M. : Mathematical Methods in Fluid Dynamics, Longman Harlow 1993
- [7] White, Frank M. : Fluid Mechanics – Fourth Edition, McGraw-Hill, 2001

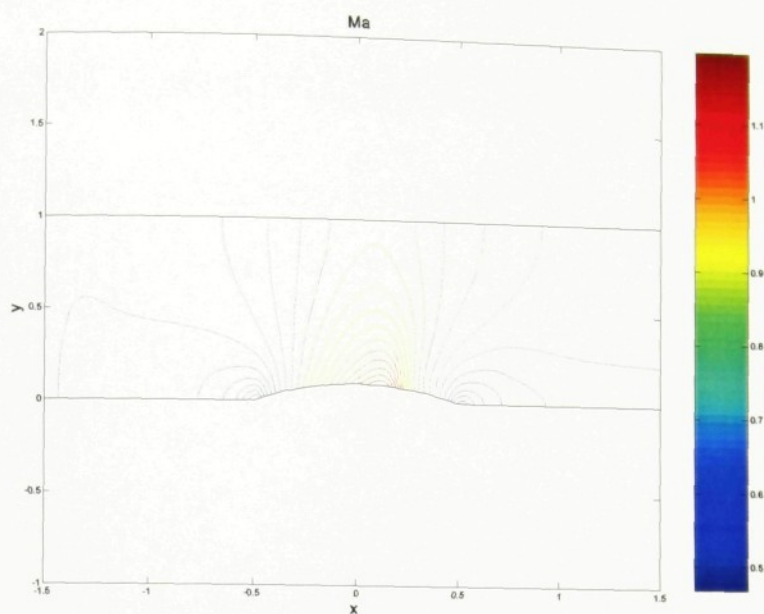
Příloha č.1. – výsledky schématu L-F



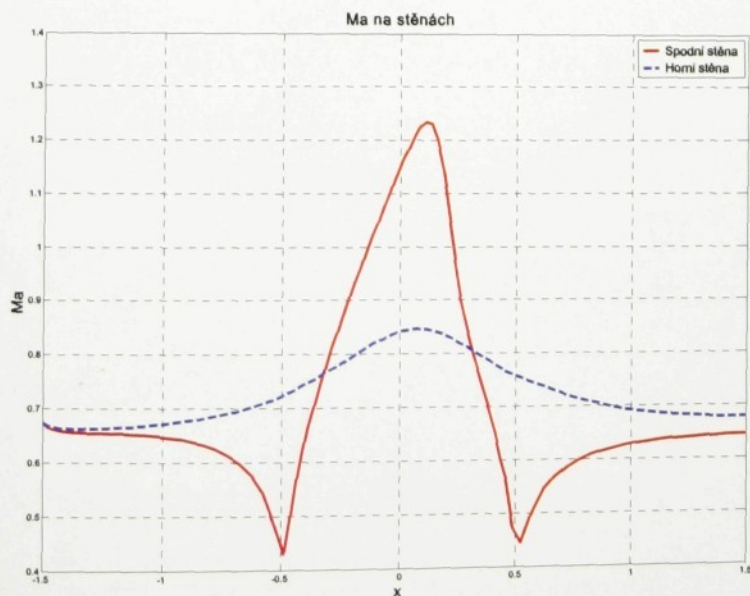
Izočáry Machova čísla pro schéma L-F, $K = 0.8$, $M_\infty = 0.675$,
vysoká umělá disipace $\varepsilon = 1$, hrubá síť (40x80)



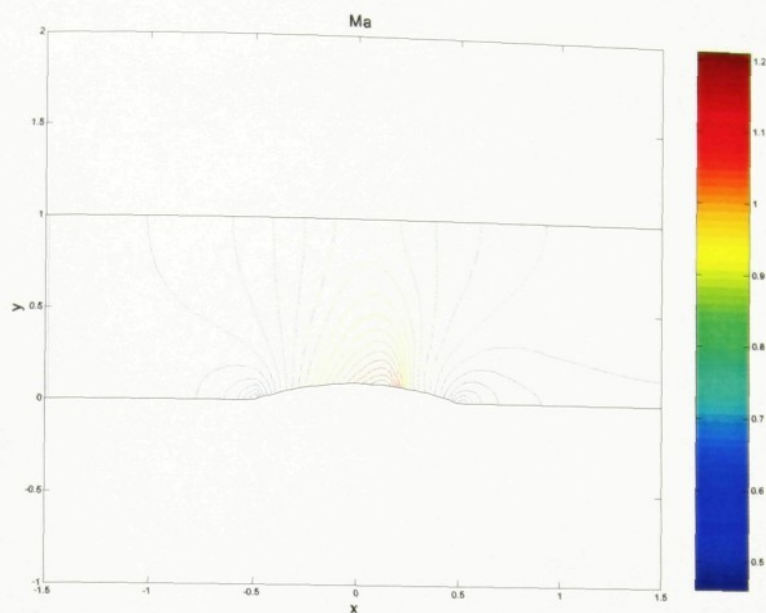
Průběh Machova čísla pro schéma L-F, $K = 0.8$, $M_\infty = 0.675$,
vysoká umělá disipace $\varepsilon = 1$, silné vyhlazení rázové vlny, hrubá síť (40x80)



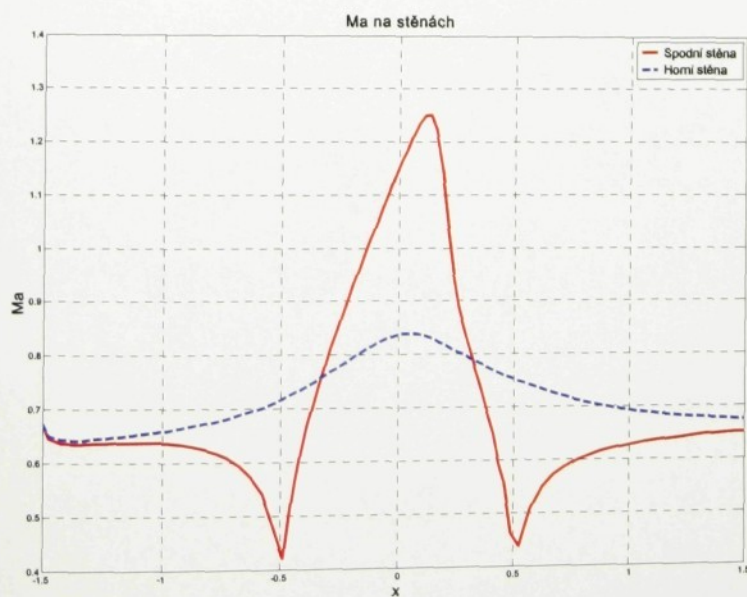
Izočáry Machova čísla pro schéma L-F, $K = 0.8$, $M_\infty = 0.675$,
střední umělá disipace $\varepsilon = 1/5$, hrubá síť (40x80)



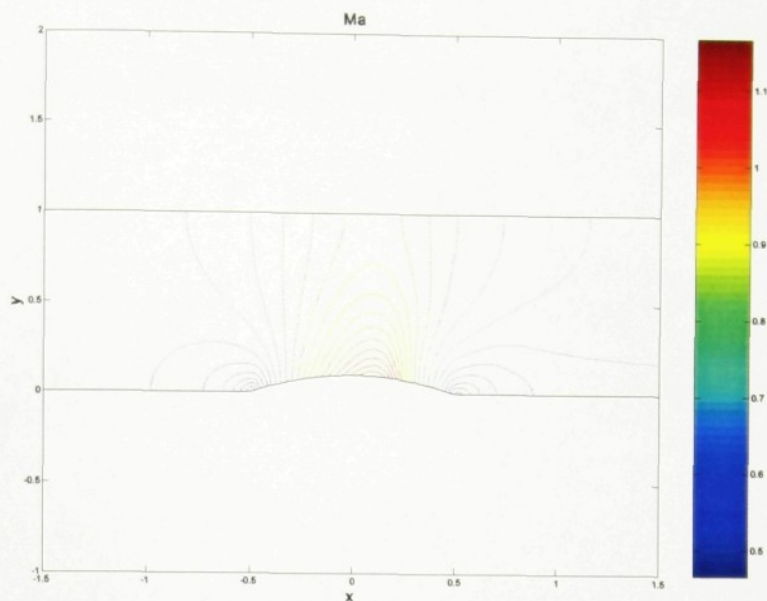
Průběh Machova čísla pro schéma L-F, $K = 0.8$, $M_\infty = 0.675$,
střední umělá disipace $\varepsilon = 1/5$, menší vyhlazení rázové vlny, hrubá síť (40x80)



Izočáry Machova čísla pro schéma L-F, $K = 0.8$, $M_\infty = 0.675$,
nízká umělá disipace $\varepsilon = 1/10$, hrubá síť (40x80)



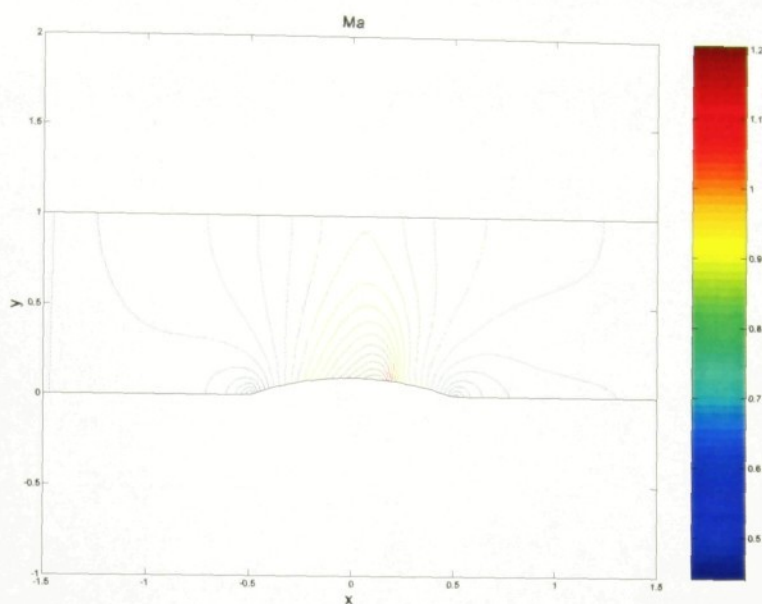
Průběh Machova čísla pro schéma L-F, $K = 0.8$, $M_\infty = 0.675$,
nízká umělá disipace $\varepsilon = 1/10$, rázová vlna nejvýraznější, hrubá síť (40x80)



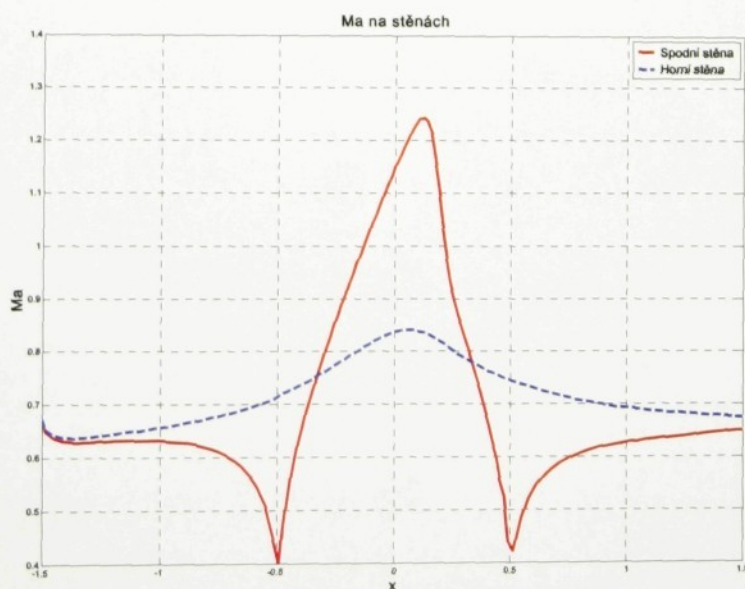
Izočáry Machova čísla pro schéma L-F, $K = 0.8$, $M_\infty = 0.675$,
vysoká umělá disipace $\varepsilon = 1$, jemná síť (60x120)



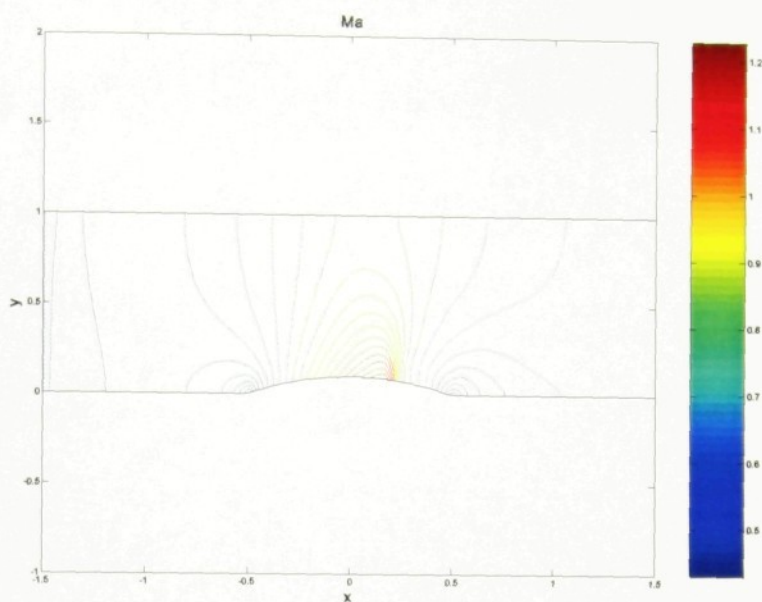
Průběh Machova čísla pro schéma L-F, $K = 0.8$, $M_\infty = 0.675$,
vysoká umělá disipace $\varepsilon = 1$, silné vyhlazení rázové vlny, jemná síť (60x120)



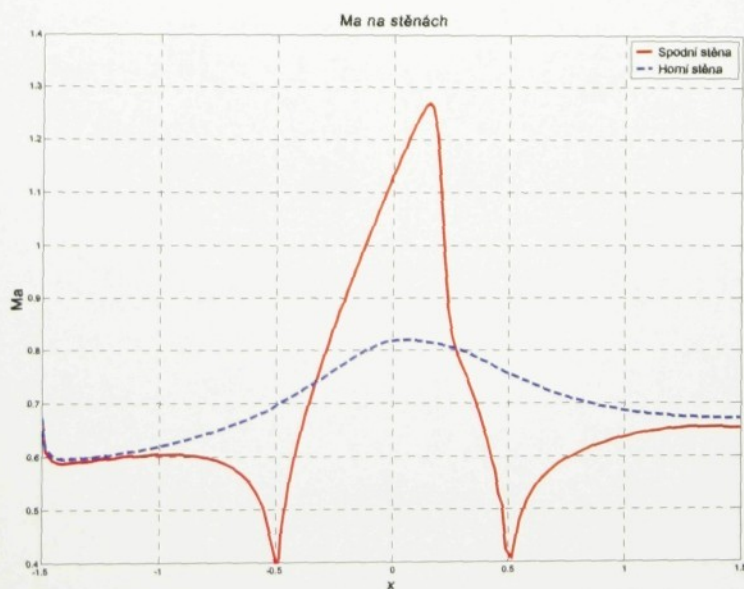
Izočáry Machova čísla pro schéma L-F, $K = 0.8$, $M_\infty = 0.675$,
střední umělá disipace $\varepsilon = 1/5$, jemná síť (60x120)



Průběh Machova čísla pro schéma L-F, $K = 0.8$, $M_\infty = 0.675$,
střední umělá disipace $\varepsilon = 1/5$, menší vyhlazení rázové vlny, jemná síť (60x120)

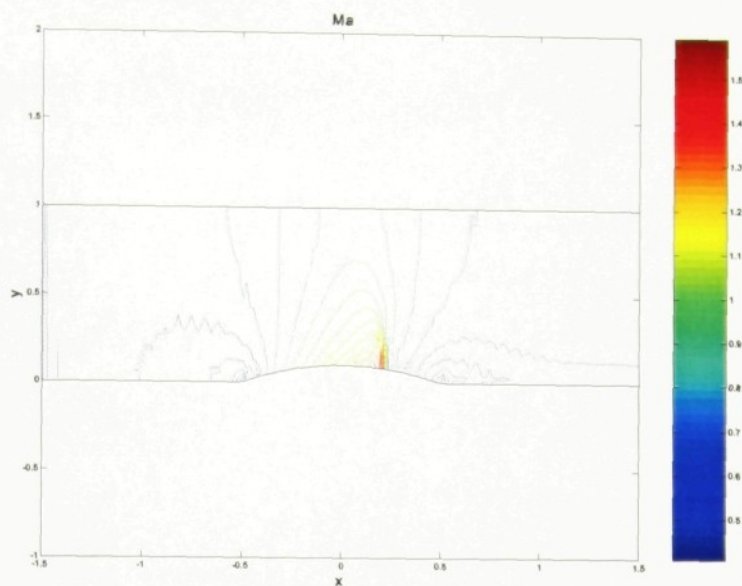


Izočáry Machova čísla pro schéma L-F, $K = 0.8$, $M_\infty = 0.675$,
nízká umělá disipace $\varepsilon = 1/10$, jemná síť (60x120)

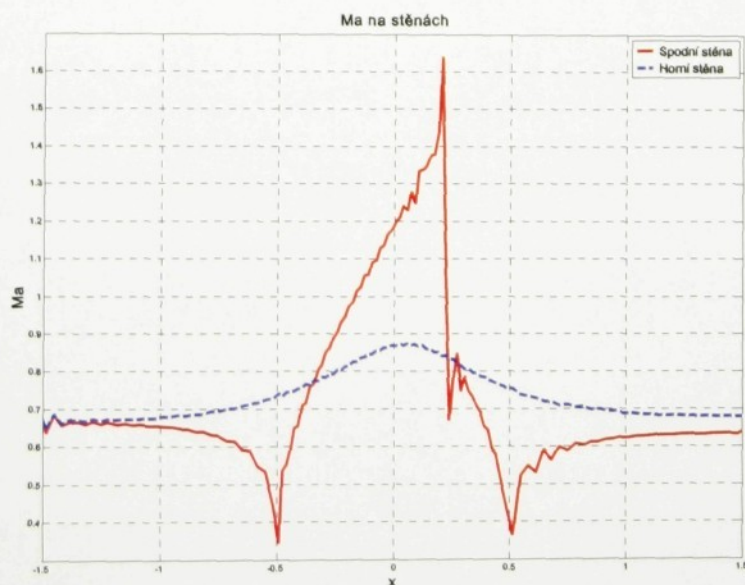


Průběh Machova čísla pro schéma L-F, $K = 0.8$, $M_\infty = 0.675$,
nízká umělá disipace $\varepsilon = 1/10$, rázová vlna nejvýraznější, jemná síť (60x120)

Příloha č.2. – výsledky schématu L-W-Richtmyer

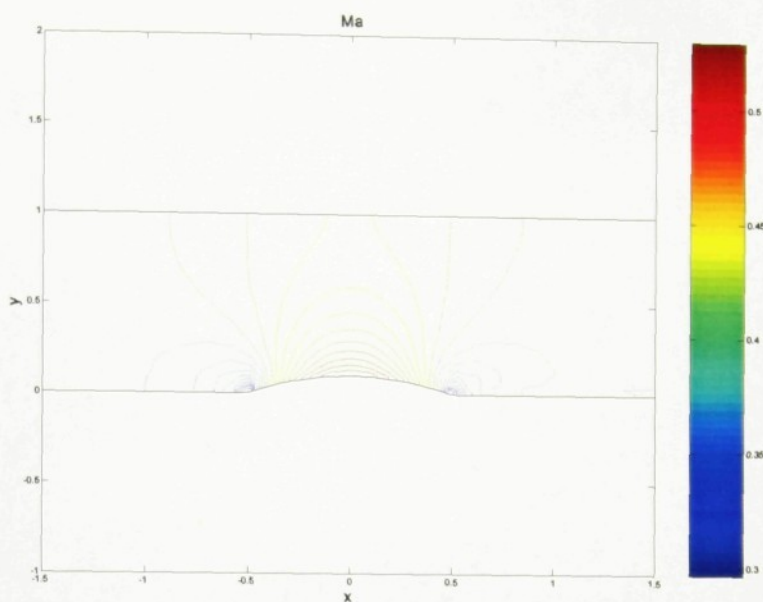


Izočáry Machova čísla pro schéma L-F-R, $K = 0.6$, $M_\infty = 0.675$,
nevhodná umělá disipace $k_1 = k_2 = 0.2$, $\varepsilon = 1$, jemná síť (60x120)

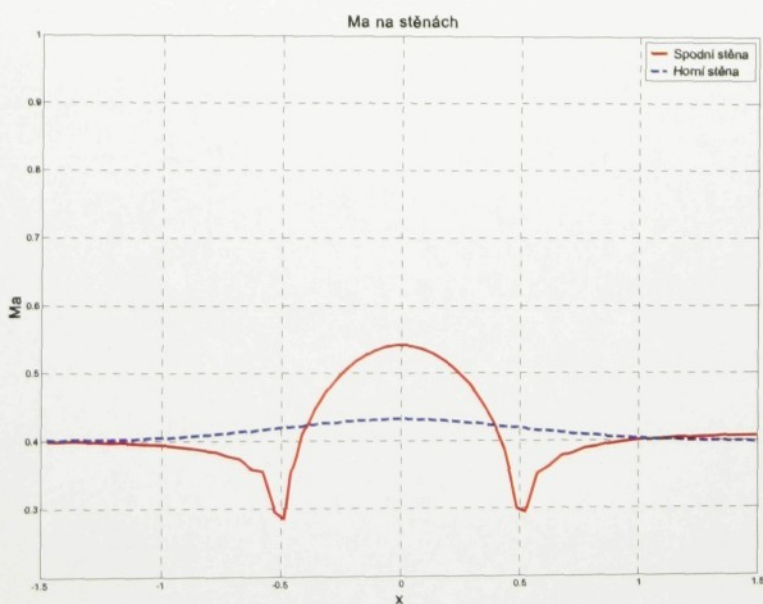


Průběh Machova čísla pro schéma L-F-R, $K = 0.6$, $M_\infty = 0.675$,
nevhodná umělá disipace $k_1 = k_2 = 0.2$, $\varepsilon = 1$, velké oscilace, jemná síť (60x120)

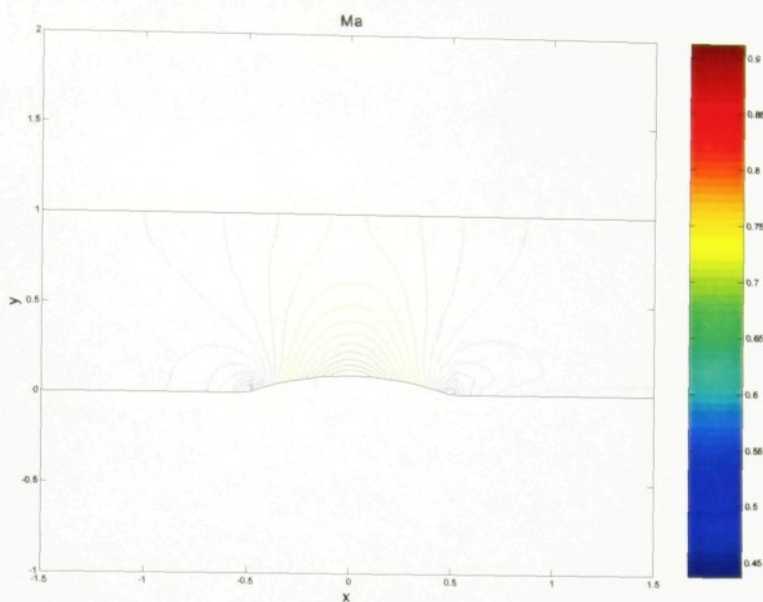
Příloha č.3. – výsledky schématu L-W-MacCormack



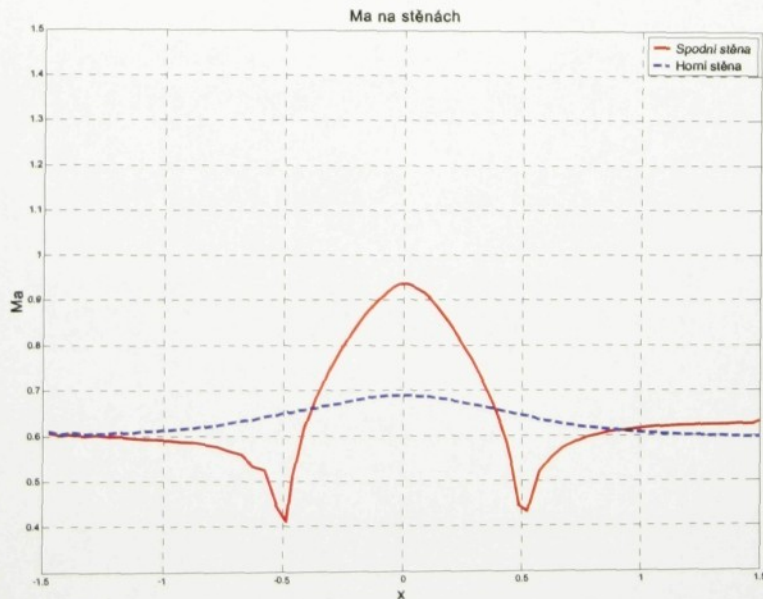
Izočáry Machova čísla pro schéma L-F-MacCormack, $K = 0.4$, vhodná umělá disipace $k_1 = k_2 = 1$, jemná síť (60×120), $M_\infty = 0.4$



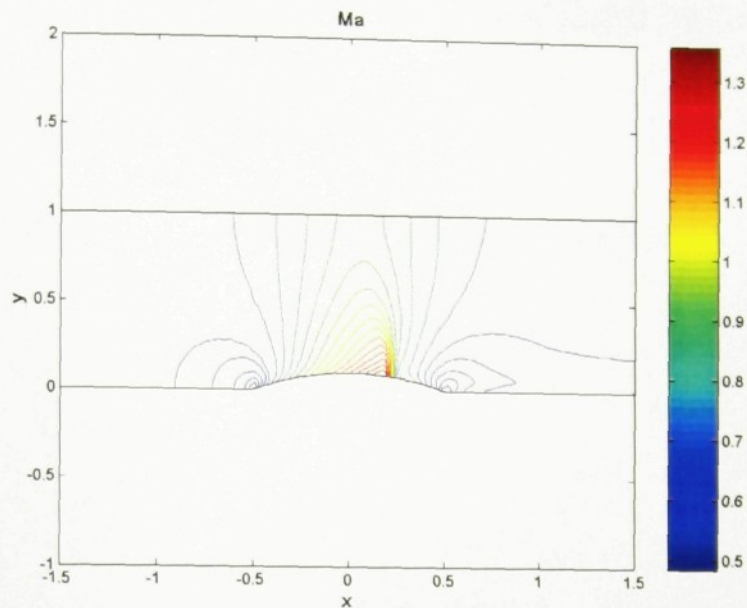
Průběh Machova čísla pro schéma L-F- MacCormack, $K = 0.4$, vhodná umělá disipace $k_1 = k_2 = 1$, jemná síť (60×120), $M_\infty = 0.4$



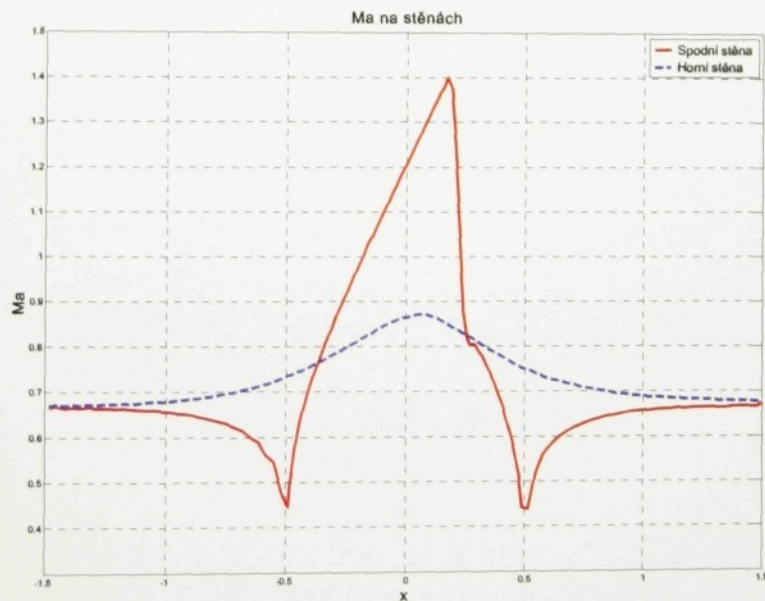
Izočáry Machova čísla pro schéma L-F-MacCormack, $K = 0.4$, vhodná umělá disipace $k_1 = k_2 = 1$, jemná síť (60x120), $M_\infty = 0.6$



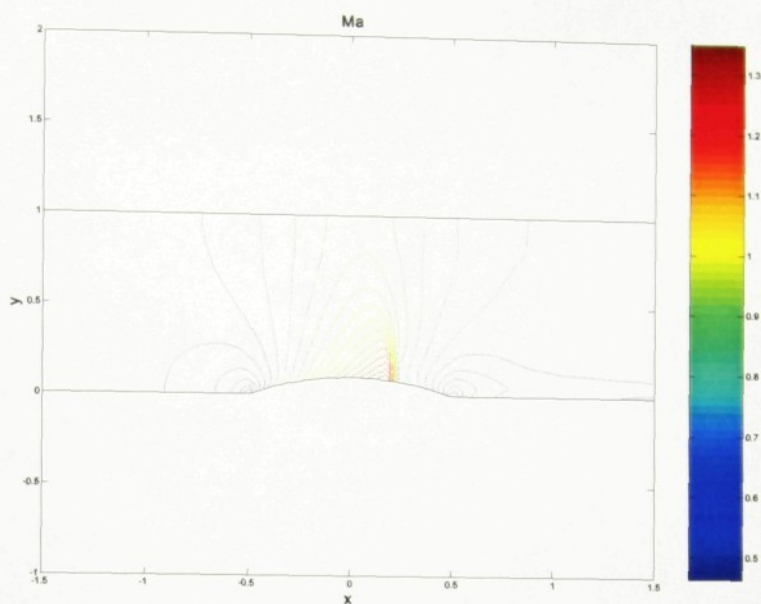
Průběh Machova čísla pro schéma L-F- MacCormack, $K = 0.4$, vhodná umělá disipace $k_1 = k_2 = 1$, jemná síť (60x120), $M_\infty = 0.6$



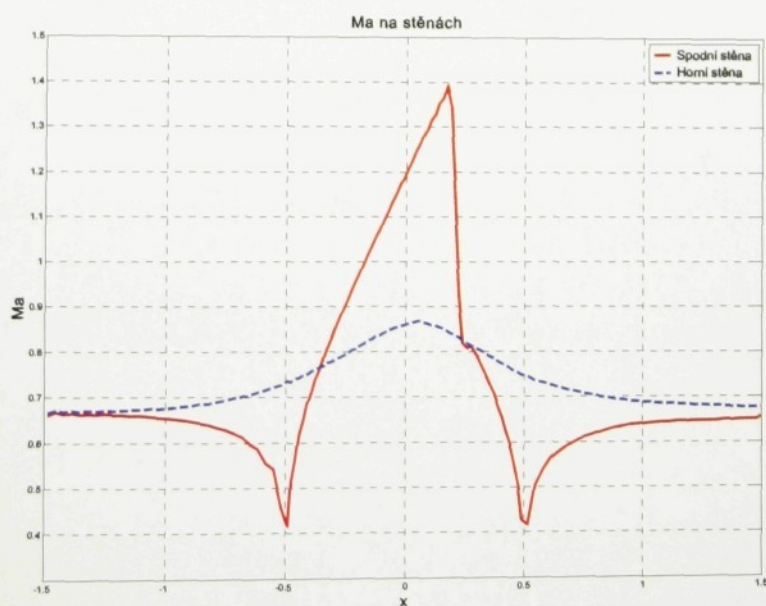
Izočáry Machova čísla pro schéma L-F-MacCormack, $K = 0.4$,
výrazná umělá disipace $k_1 = k_2 = 2$, jemná síť (60x120), $M_\infty = 0.675$



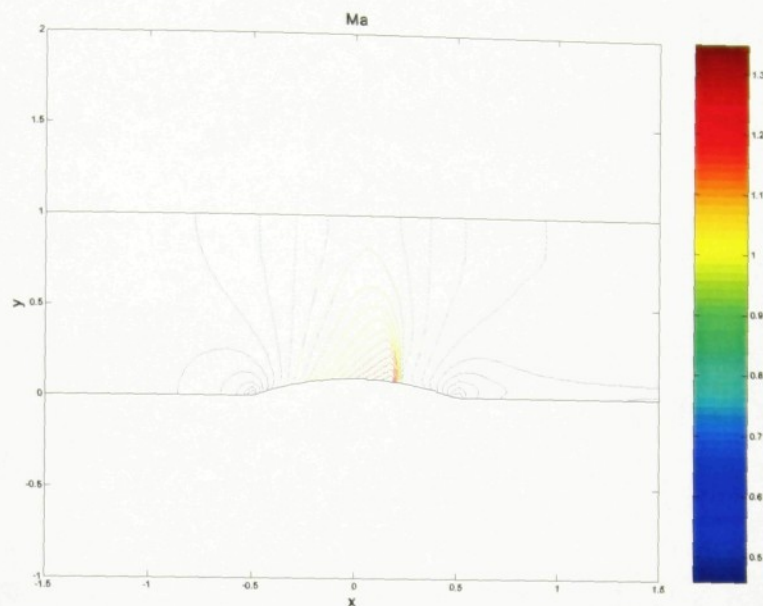
Průběh Machova čísla pro schéma L-F-MacCormack, $K = 0.4$,
výrazná umělá disipace $k_1 = k_2 = 2$, vyhlazené, jemná síť (60x120), $M_\infty = 0.675$



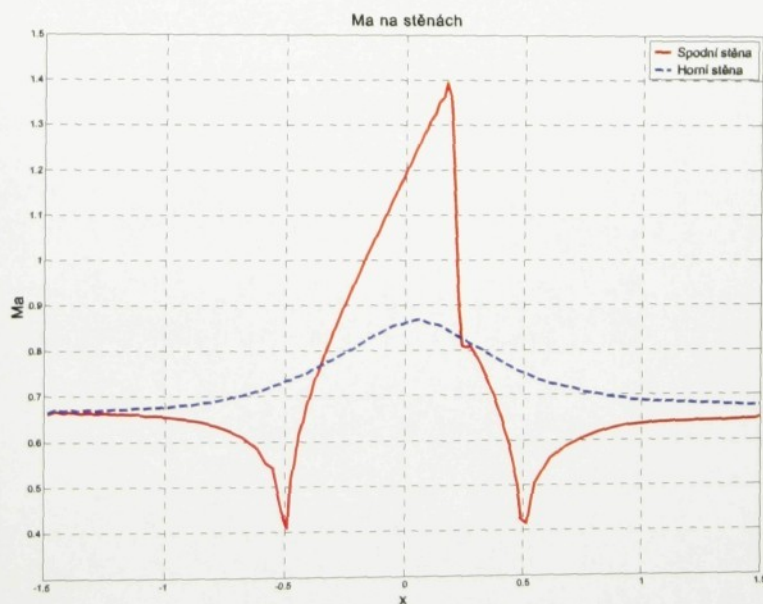
Izočáry Machova čísla pro schéma L-F-MacCormack, $K = 0.4$,
vhodná umělá disipace $k_1 = k_2 = 1$, jemná síť (60x120), $M_\infty = 0.675$



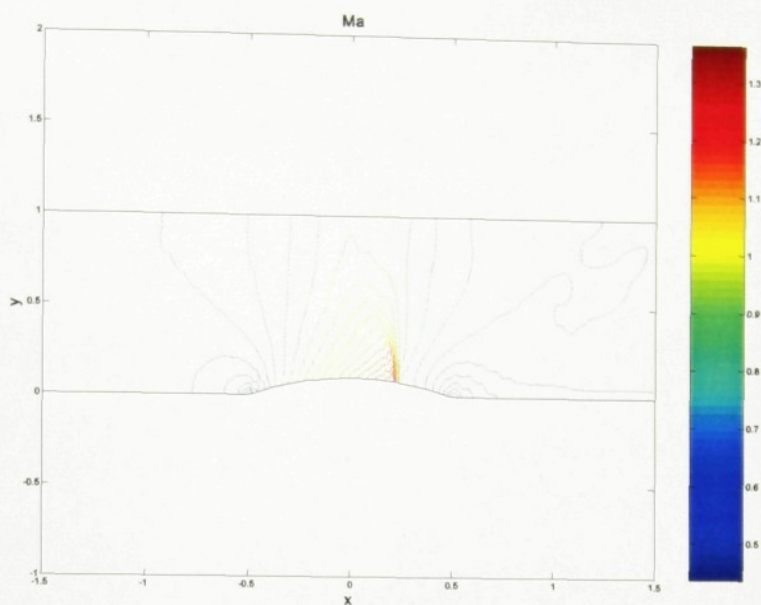
Průběh Machova čísla pro schéma L-F- MacCormack, $K = 0.4$,
vhodná umělá disipace $k_1 = k_2 = 1$, jemná síť (60x120), $M_\infty = 0.675$



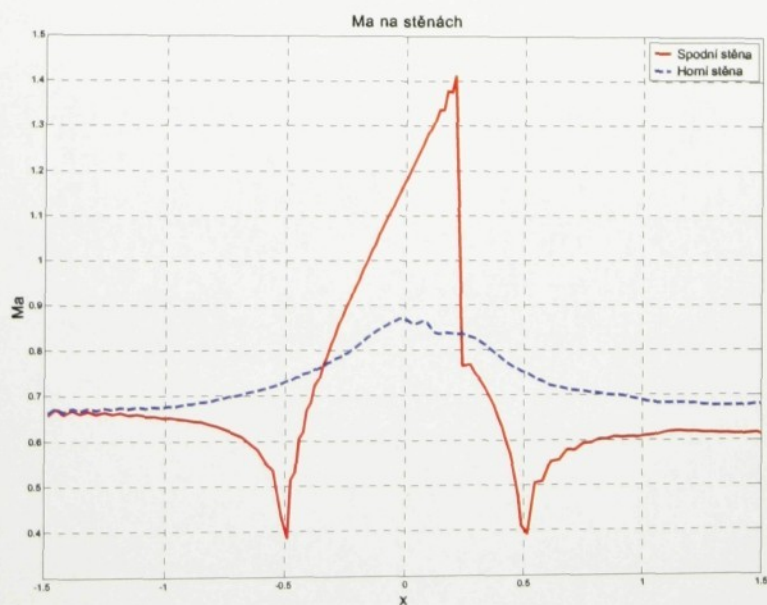
Izočáry Machova čísla pro schéma L-F-MacCormack, $K = 0.4$,
vhodná umělá disipace $k_1 = k_2 = 0.8$, jemná síť (60x120), $M_\infty = 0.675$



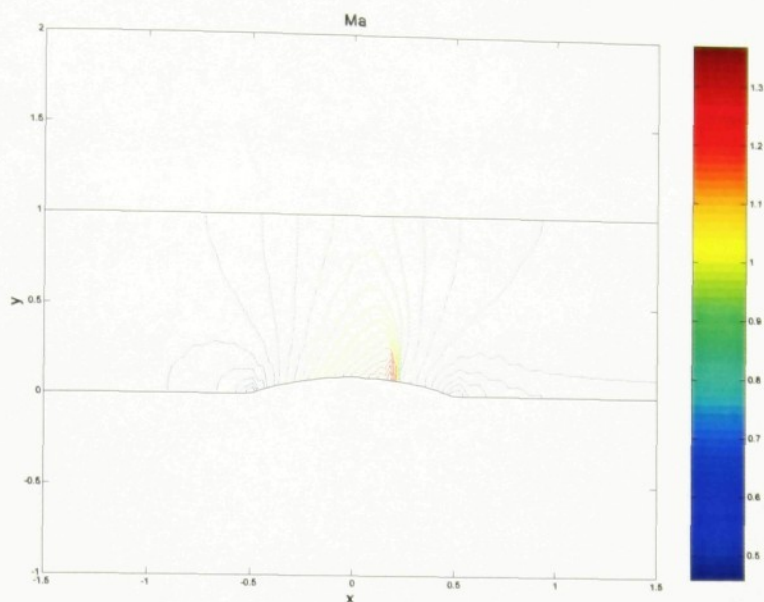
Průběh Machova čísla pro schéma L-F- MacCormack, $K = 0.4$,
vhodná umělá disipace $k_1 = k_2 = 0.8$, jemná síť (60x120), $M_\infty = 0.675$



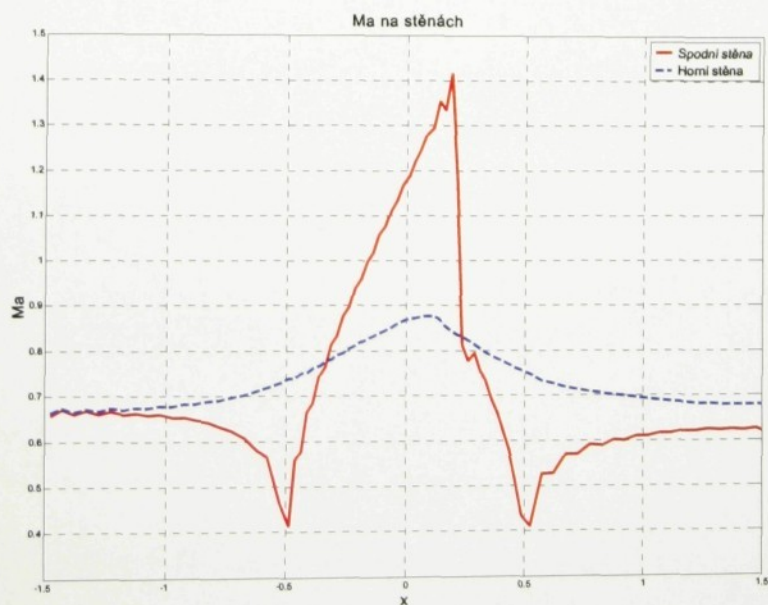
Izočáry Machova čísla pro schéma L-F-MacCormack, $K = 0.4$,
nevhodná umělá disipace $k_1 = k_2 = 0.2$, jemná síť (60x120), $M_\infty = 0.675$



Průběh Machova čísla pro schéma L-F- MacCormack, $K = 0.4$,
nevhodná umělá disipace $k_1 = k_2 = 0.2$, oscilace, jemná síť (60x120), $M_\infty = 0.675$

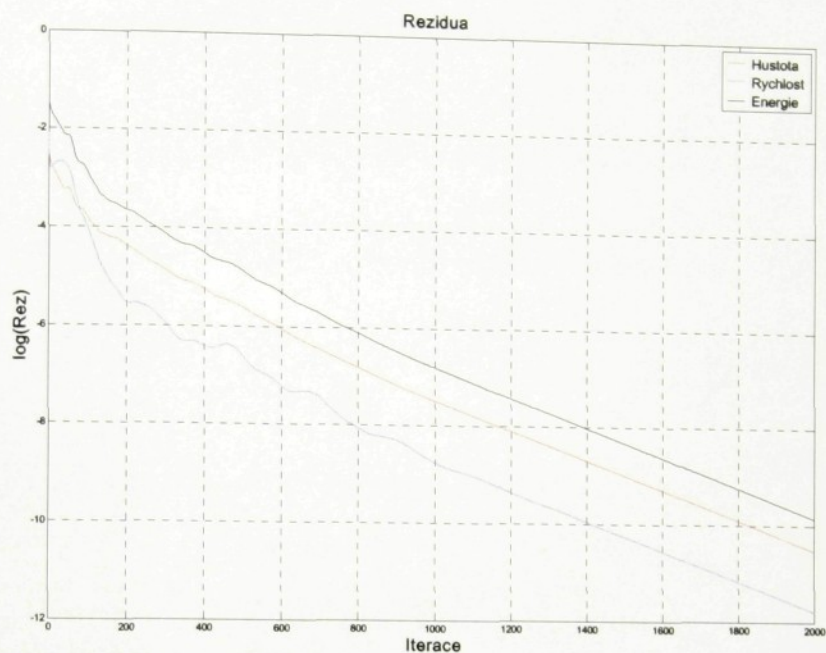


Izočáry Machova čísla pro schéma L-F-MacCormack, $K = 0.4$,
nevhodná umělá disipace $k_1 = k_2 = 0.2$, hrubá síť (40x80), $M_\infty = 0.675$

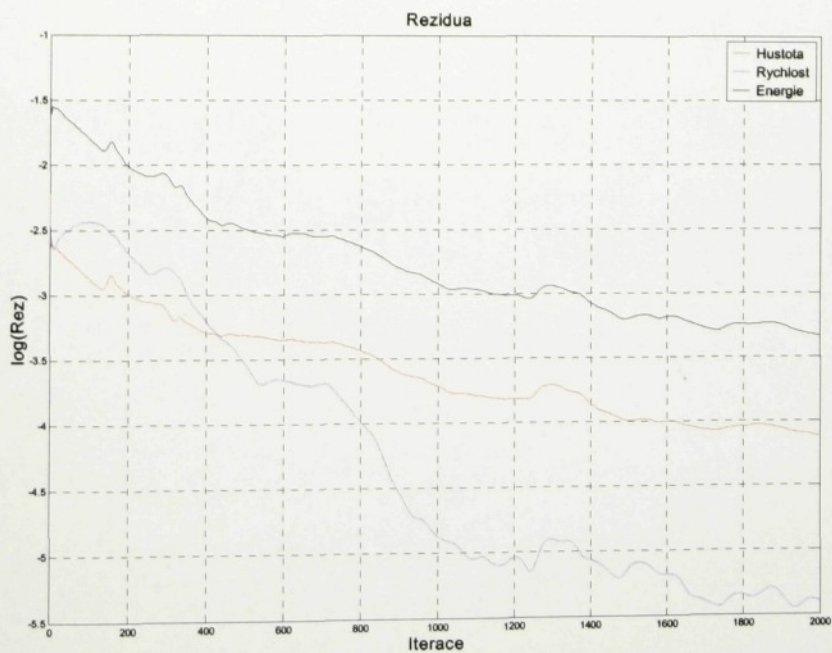


Průběh Machova čísla pro schéma L-F-MacCormack, $K = 0.4$,
nevhodná umělá disipace $k_1 = k_2 = 0.2$, oscilace, hrubá síť (40x80), $M_\infty = 0.675$

Příloha č.4. – průběh konvergence výpočtů

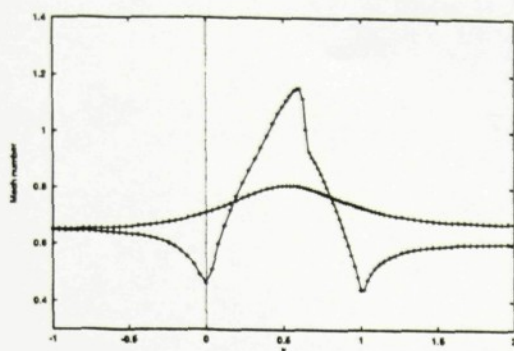


Reziduum pro schéma L-F, hrubou síť 40x80, $K = 0.8$, $\varepsilon = 1$

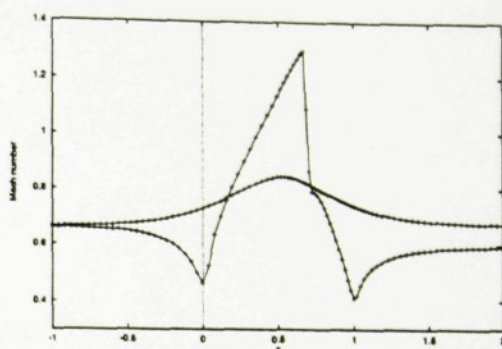


Reziduum pro schéma L-W-MacCormack, jemná síť 60x120, $K = 0.4$, $k_1 = k_2 = 1$

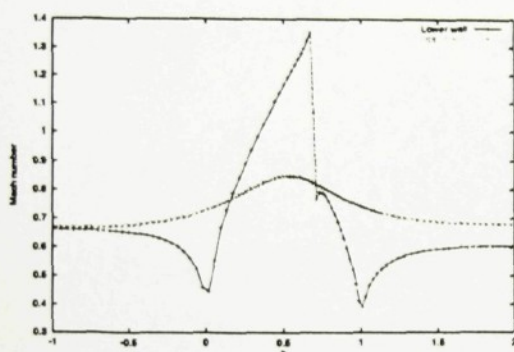
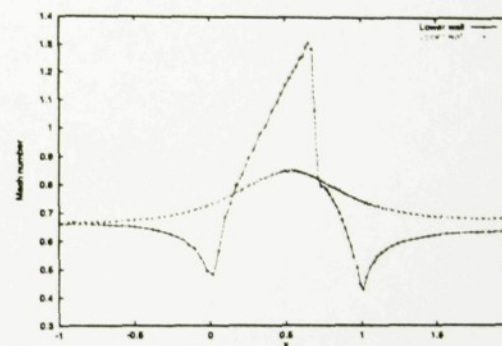
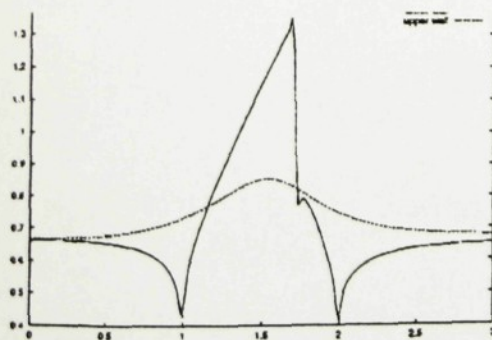
Příloha č.5. – ostatní výsledky



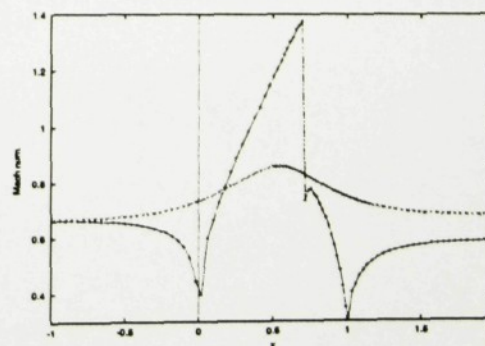
Oscherovo schéma (1. řád)



Oscherovo schéma (2. řád)

Plné TVD MacCormackovo schéma
(2. řád)TVD MacCormackovo schéma
v Caussonově úpravě

Kompozitní schéma



WENO schéma (5. řád)

Příloha č.6. – CD se zdrojovými kódy programů v Matlabu

