

TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI

TEXTILNÍ FAKULTA



Ing. Bc. PAVLA VOZKOVÁ

**VÍCEÚROVŇOVÉ MODELOVÁNÍ MECHANICKÝCH
VLASTNOSTÍ TEXTILNÍCH KOMPOZITŮ**

DISERTAČNÍ PRÁCE

2008

TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI

TEXTILNÍ FAKULTA

Katedra textilních materiálů

Disertační práce

**VÍCEÚROVŇOVÉ MODELOVÁNÍ MECHANICKÝCH
VLASTNOSTÍ TEXTILNÍCH KOMPOZITŮ**

Ing. Bc. Pavla Vozková

Školitel: doc. Ing. Bohumila Košková, CSc., Fakulta textilní, TU v Liberci

Školitel specialista: doc. Ing. Bohdana Marvalová, CSc.,

Katedra mechaniky, pružnosti a pevnosti, Fakulta strojní, TU v Liberci

Rozsah práce

Počet stran: 88

Počet obrázků: 76

Počet tabulek: 7

Počet příloh: 2

UNIVERZITNÍ KNIHOVNA
TECHNICKÉ UNIVERZITY V LIBERCI



3146115299

TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI
Univerzitní knihovna
Voroněžská 1029, Liberec 1
PSČ 461 17

U 612T

K T M
J. B. [2. et. pul.
H. J. [2. et. pul.

Místopřísežné prohlášení

Prohlašuji, že jsem disertační práci vypracovala samostatně s použitím uvedených přístrojů a literatury.

V Liberci, dne 23.5. 2008

Pavla Vozková

Poděkování

Ráda bych poděkovala všem, kteří mi pomohli při vypracování disertační práce. Především děkuji své školitelce Doc. Ing. Bohumile Koškové, CSc. za odborné vedení a za pozitivní působení, kterým mě dovedla až k odevzdání této práce. Děkuji své školitelce specialistovi Doc. Ing. Bohdaně Marvalové, CSc. za trpělivost, se kterou se mi věnovala. Dále děkuji Ing. Martinu Černému, PhD. z Ústavu struktury a mechaniky hornin Akademie věd ČR za pomoc při experimentálním měření, Ing. Blance Tomkové, PhD. z Technické univerzity v Liberci za rady v oblasti popisu struktury kompozitu a prof. RNDr. Ing. Miloslavu Koškovi, CSc. z Technické univerzity v Liberci za podrobné připomínkování textu práce.

Tato práce byla finančně podporována Grantovou agenturou České republiky v rámci doktorského projektu číslo 106/03/H150.

Pavla Vozková

Summary

The thesis deals with the evaluation of mechanical properties of carbon/carbon composites with plain weave reinforcement. It is available to study their properties by non-destructive methods. The first main theme is the measurement of elastic modules using excitation of vibrations through the composite body. The next important theme is the simulation of the same state of composite sample using the finite element method by standard software Comsol MultiphysicsTM.

Textile reinforced composite is a brittle material and it is destructed without plastic deformation when Hook's law is valid. It is detected a maximum tension in the material whereat do not happen material deformation and failure. It is used method of resonant frequency evaluated spectrum longitudinal and vertical vibrations. This helps to interpret whole orthotropy in the plate.

Longitudinal vibration presents compression and dilution in the plate body. Transversal movements are presumed to absorb extremely low energy. Progression of the elements is described by Lagrange method where the displacement is judged from the rest position.

Plate would vibrate along the x -axis transversally. Deflection in the y -axis is presumed to be much small than transverse proportions and flexural curve is extremely flat. In the Bernoulli-Euler theory it is neglected displacements of the elements in the x -axis and their turning in the plane of movement. Rayleigh and Timoshenko theories included element movements.

Geometry for simulation is based on idealised structure. The assumption of iso-stress or iso-strain conditions is widely used to simplify the homogenization. Multiscale modelling is now top in the research process. It is possible to simulate tests with programming in finite element method. Relations describing stage, geometry and material properties are defined in program as precise as possible from experiment. Output is described as simulations in 2D for related properties.

For demonstration was modelled composite with Carbon graphitised reinforcement and Vitreous Carbon matrix. Fibers were premised orthotropic (transversely isotropic) and matrix was defined as isotropic. System was defined as plate sheet with free ends in 2D. To the simulation in Comsol Multiphysics were included equations of the composite state and properties of the components.

Annotation

Die Thesengeschäfte über die Einschätzung von mechanischen Eigenschaften von Zusammensetzungen des Kohlenstoff/Kohlenstoff mit einfacher Gewebeverstärkung. Es ist möglich, ihre Eigenschaften durch nichtzerstörende Methoden zu studieren. Das erste Hauptthema ist Messen von elastischen Modulen, die Erregung von Vibrieren durch den zerlegbaren Körper verwenden. Das folgende ist Simulation derselben Rahmen-Zusammensetzungsprobe, die begrenzter Element-Methode in der Standardsoftware Comsol Multiphysik hilft.

Verstärkte Zusammensetzungen des Gewebes sind sprödes Material, und es wird ohne Plastikdeformierung zerstört, wenn das Gesetz des Hakens gültig ist. Es wird eine maximale Spannung im Material entdeckt, wobei materielle Deformierung und Misserfolg nicht geschehen. Es ist verwendete Methode des bewerteten Spektrums der widerhallenden Frequenz längsgerichtetes und vertikales Vibrieren. Das hilft, ganzen orthotropy im Teller zu interpretieren.

Längsvibrieren präsentiert Kompression und Verdünnung im Teller-Körper. Transversal-Bewegungen werden angenommen, um äußerst niedrige Energie zu absorbieren. Der Fortschritt der Elemente wird durch die Lagrange Methode beschrieben, wo die Versetzung von der Ruhe-Position verhandelt wird.

Teller würde entlang der X-Achse schräg vibrieren. Die Ablenkung in der Y-Achse wird angenommen, um viel klein zu sein, als Verhältnis- und Querflexural-Kurve äußerst flach ist. In der Bernoulli-Euler Theorie ist es vernachlässigte Versetzungen der Elemente in der X-Achse und ihrem Drehen im Flugzeug der Bewegung. Theorie von Timoshenko schloß Element-Bewegungen ein.

Die Geometrie für die Simulation beruht auf der idealisierten Struktur. Die Annahme der Iso-Betonung oder Iso-Beanspruchungsbedingungen wird weit verwendet, um den Homogenization-Prozess zu vereinfachen. Es ist möglich, Tests mit der Programmierung in der begrenzten Element-Methode zu simulieren. Beziehungen, die Bühne, Geometrie und materielle Eigenschaften beschreiben, werden im Programm so genau wie möglich vom Experiment definiert. Produktion wird als Simulationen in 2. für verwandte Eigenschaften beschrieben.

Weil Demonstration Zusammensetzung mit Kohlenstoff graphitised Verstärkung und Glaskohlenstoff-Matrix modelliert wurde. Fasern waren premised orthotropic und Matrix wurde als isotropisch definiert. System wurde als Teller-Platte mit freien Enden in 2D.

Obsah

1	Předmět a cíl práce	1
1.1	Stručný přehled kapitol	2
2	Přehled současného stavu řešení problematiky	4
2.1	Testování destruktivními metodami	5
2.2	Testování nedestruktivními metodami	8
2.3	Modelování vlastností kompozitů na základě geometrických modelů	14
2.4	Obecné geometrické modely	16
2.5	Modely složitějších struktur	18
3	Použité metody	22
3.1	Podélné kmitání tenkých pružných tyčí	22
3.2	Příčné kmitání a teorie ohybových vln	26
3.3	Víceúrovňové geometrické modelování struktury	29
3.4	Definování vlastností struktury pomocí mechaniky kontinua	33
3.5	Popis metody rezonančních frekvencí	40
4	Přehled dosažených výsledků	47
4.1	Popis testovaného materiálu	47
4.2	Možnosti interpretace výsledků simulace	49
4.3	Výsledky experimentu a jejich diskuze	53
4.4	Výsledky simulace	58
4.5	Porovnání experimentu a simulace	69
5	Zhodnocení výsledků a nových poznatků	73
6	Závěr	80
7	Literatura	81
8	Práce autora se vztahem ke studované problematice	87

Přehled zkratk

1D, 2D, 3D	Jednodimenzionální, dvojdimenzionální, třidimenzionální
C/C	Uhlík/uhlík (Carbon/Carbon)
FEM, MKP	Metoda konečných prvků (Finite Element Method)
L	Podélný směr vůči vlákennému svazku či vzorku (Longitudinal)
N	Kolmý směr vůči vzorku (Normal)
RTG	Rentgenové záření
RVE	Reprezentativní objemový element (Representative volume element)
T	Příčný směr vůči vlákennému svazku či vzorku (Transversal)

Přehled symbolů

A	$[m^2]$	Plocha průřezu
a	$[-]$	Koeficienty pro charakteristickou rovnici soustavy
c	$[m.s^{-1}]$	Rychlost vlny
$c^{(j)}$	$[Pa]$	Tenzor tuhosti j -té složky ze všech složek struktury kompozitu
$c^{(S)}$	$[Pa]$	Výsledný tenzor tuhosti složený z tuhostí složek $C^{(j)}$
c_0	$[m.s^{-1}]$	Fázová rychlost vlny
C_1, C_2, C_3, C_4	$[-]$	Integrační konstanty
c_2	$[m.s^{-1}]$	Rychlost smykových vln v kontinuu
c_{ij}	$[Pa]$	Prvky matice elastických tuhostí
c_{ijkl}	$[Pa]$	Tenzor tuhosti
d	$[m]$	Poloviční šířka deskového pásu
dx	$[m]$	Velikost elementu
E	$[Pa] = [N.m^{-2}]$	Modul pružnosti v tahu
E_L	$[Pa]$	Podélný modul pružnosti v tahu
E_T	$[Pa]$	Příčný modul pružnosti v tahu
E_x	$[Pa]$	Podélný modul ve směru osy symetrie
E_y	$[Pa]$	Příčný modul ve směru osy symetrie
f	$[Hz]$	Frekvence
$f(a)$	$-$	Funkce popisující šíření podélné vlny
G	$[Pa]$	Smykový modul pružnosti
G_{LT}	$[Pa]$	Modul ve smyku vzhledem k ose symetrie
G_{xy}	$[Pa]$	Smykový modul ortotropní desky vzhledem k ose symetrie
g	$-$	Funkce popisující šíření podélné vlny
I	$[kg.m^2]$	Kvadratický moment setrvačnosti průřezu
i	$[-]$	Imaginární jednotka
K	$[-]$	Integrační konstanta
k	$[m] = [kg.m^2/kg]^{0,5}$	Poloměr setrvačnosti průřezu nosníku k ose
L	$[-]$	Integrační konstanta
l	$[m]$	Délka vzorku
M	$[N.m]$	Moment síly
$\mu_{\psi\xi}$	$[-]$	Poissonovo číslo ortotropní desky vzhledem k ose symetrie
N	$[-]$	Funkce vlastního tvaru desky
n	$[-]$	Počet složek
N	$[-]$	Funkce vlastního tvaru desky
O	$[-]$	Funkce vlastního tvaru desky
p	$[-]$	Vlnové číslo
Q	$[N] = [kg.m.s^{-2}]$	Posouvající síla
R	$[rad]$	Poloměr křivosti
S	$[N]$	Osová síla
s	$[Pa^{-1}]$	Tenzor poddajnosti
$s^{(j)}$	$[Pa^{-1}]$	Tenzor poddajnosti j -té složky ze všech složek heterogenní struktury kompozitu

$S^{(S)}$	$[\text{Pa}^{-1}]$	Výsledný tenzor poddajnosti složený ze složek $S^{(j)}$
s'	$[\text{Pa}^{-1}]$	Tenzor poddajnosti v pootočené souřadné soustavě
t	$[\text{s}]$	Čas
U_m	$[-]$	Amplituda vlny ve směru osy x
u	$[\text{m}]$	Posuv elementu ve směru osy x
u_o	$[\text{m}]$	Posuv elementu ve směru osy x v čase $t=0$
V	$[-]$	Amplituda vlny ve směru osy y
v	$[\text{m}]$	Posuv elementu ve směru osy y
v_a	$[\text{m.s}^{-1}]$	Rychlost elementu tyče v místě x , akustická rychlost
v_f	$[\text{m.s}^{-1}]$	Rychlost částice
V_j	$[\text{m}^2]$	Objemový podíl strukturní složky j
V_n	$[\text{m}^2]$	Objemové podíly jednotlivých n strukturních komponent
$w(x,t)$	$[\text{m}]$	Průhyb
x	$-$	Kartézská souřadnice ve směru osy x
x	$[\text{m}]$	Vzdálenost elementu od počátku na ose x
y	$-$	Kartézská souřadnice ve směru osy y
z	$-$	Kartézská souřadnice ve směru osy z
z_a	$[\text{Pa.s.m}^{-1}]$	Měrná akustická impedance
α	$[-]$	Součinitel tvaru průřezu
β	$[\text{rad}]$	Úhlová změna
δ	$[\text{rad}]$	Úhel sklonu výztuže
ε	$[\text{m}]$	Tahová deformace
ε_{ij}	$[\text{m}]$	Tenzor deformace
γ_{xy}	$[\text{m}]$	Deformace ve smyku
θ	$[\text{rad}]$	Úhel natočení podél jedné z os symetrie
κ	$[-]$	Faktor zohledňující rozložení smykového napětí po průřezu nosníku
λ	$[\text{m}]$	Vlnová délka
Λ	$[-]$	Vlastní číslo matice soustavy diferenciální rovnice
μ	$[-]$	Poissonovo číslo
μ_{LT}	$[-]$	Poissonovo číslo ortotropní vrstvy vzhledem k ose symetrie
ρ	$[\text{kg.m}^{-3}]$	Hustota materiálu
σ	$[\text{Pa}]$	Normálové napětí
σ_{ij}	$[\text{Pa}]$	Tenzor napětí
τ_{xy}	$[\text{Pa}]$	Napětí působící ve smykovém směru
φ	$[\text{rad}]$	Úhel tečny k průhybové čáře
ψ	$[\text{rad}]$	Úhel natočení průřezu nosníku ohybovou deformací
$\Psi(x)$	$[-]$	Funkce vlastního tvaru úhlu natočení pro nosník
ω	$[\text{rad.s}^{-1}]$	Úhlová frekvence postupné vlny

1 Předmět a cíl práce

Kompozit je špičkový materiál stále více užívaný pro speciální aplikace. Použitím kompozitu místo tradičního materiálu, jako je například ocel, dochází ke značnému snížení hmotnosti při zachování nebo zvýšení hodnot mechanických vlastností. To je dáno nízkou hmotností vlastního kompozitu, specifickými vlastnostmi jednotlivých složek a možností vytvořit kompozit přímo pro daný účel. Protože jde o kombinaci materiálů, mohou se kompozity navrhovat s ohledem na specifické vlastnosti, které přinášejí řadu výhod v porovnání s tradičními materiály, např. odolnost proti chemikáliím, elektrické a teplotní izolační vlastnosti.

Principem vlastního vláknového vyztužení je skutečnost, že vyztužující vlákna, mající o jeden až dva řády vyšší pevnost a tuhost ve srovnání s pojivem (polymerní matricí), se při vnějším namáhání deformují méně než matrice. Dochází tak ke vzniku smykových sil na rozhraní vlákno/polymer, které v případě adheze mezi oběma komponentami umožňují přenos napětí z matrice do vláken.

V posledních letech se ukazuje, že stále náročnější požadavky lidské společnosti na strojírenské výrobky je možno splnit mnohem intenzivnějším využitím kompozitů a jejich dalším vývojem s cílem dosáhnout vlastností žádaných ve strojírenství. Má-li ovšem být tento vývojový směr efektivní, je nutno do budoucna přijmout integrovanou strategii pro kompozity, na základě níž budou současně jednak inovovány stávající výrobky, jednak uváděny do praxe zcela nové výrobky využívající specifických vlastností kompozitů, bude systematicky rozvíjen trh, budou brány v úvahu ekonomické aspekty, a v neposlední řadě budou přísně sledovány produktivita výroby a kvalita výrobků (technologické aspekty), bezpečnost a životní prostředí. Bude to vyžadovat zvládnutí materiálového vývoje v požadovaných směrech, principů konstruování s těmito materiály, nedestruktivního testování, modelování a predikčních metod pro materiály i celé součásti a také nové výrobní technologie.

Testování bez nevratných deformací není jen detekce stávajících vad, ale pomocí snímání mechanických kmitů lze spolehlivě stanovit i elastické koeficienty. Jiným způsobem jak hodnotit vlastnosti budoucích konstrukcí kompozitů je i výpočet pomocí komerčních softwarů, které dovolují korekce rovnic a definování speciálních koeficientů. Nejrozšířenější je metoda konečných prvků, která je hojně používána ve všech stádiích vzniku struktury výrobku od nejjednodušších modelů vláken a matrice přes složitější

provázané struktury až po celé součástky. Modelování kompozitu je také důležitou součástí výpočtových programů. Vizualizací vnitřní struktury kompozitu se zabývají dlouhodobě nejen výzkumné ústavy, ale i výrobci kompozitů ji shledávají velmi potřebnou pro vyhodnocení konečných vlastností kompozitů. Právě modelování struktury od nejvyšších přiblížení vnitřní struktury až po celé kompozity je v zorném úhlu řady odborníků a jejich týmů.

V současné době mají kompozitní materiály největší význam v leteckém průmyslu (sekundární i primární kompozitové konstrukce), automobilovém průmyslu (interiér, exteriér i pohonná jednotka) a výrobě plavidel všeho druhu. Ve stále větší míře se prosazují ve stavbě chemických a energetických strojů a zařízení (součásti čerpadel, odsiřovacích jednotek apod.) a v konstrukci výrobních strojů (např. vřetena obráběcích strojů).

Předložená práce je zaměřena na studium elastických vlastností kompozitů uhlík/uhlík s tkaninovou výztuží vyrobených prepregovou technologií. Cílem této práce bylo pomocí nedestruktivní metody rezonančních frekvencí, založené na buzení mechanických kmitů a nalezení vlastních frekvencí, stanovit elastické vlastnosti kompozitu C/C s tkaninovou výztuží při stavu pouze elastických deformací podle Hookeova zákona.

Dále bylo cílem modelovat elastické vlastnosti kompozitu pomocí komerčního výpočetního systému metodou konečných prvků. Byl použit geometrický model založený na víceúrovňovém modelování struktury. Výpočet byl proveden v systému Comsol Multiphysics vhodném pro numerické řešení parciálních diferenciálních rovnic.

1.1 Stručný přehled kapitol

Následuje přehled kapitol a jejich stručný popis.

Kapitola 2. shrnuje poznatky autorů věnujících se problematice kompozitů, testovacích metod a zobrazování složených struktur. Nabízí obecný popis kompozitu a výhod, které poskytují. Je zde nastínění destruktivních metod a jejich nedestruktivních ekvivalentů. Nejběžnější metody jsou zde v principu popsány. Popis metody konečných prvků zohledňuje výhody i nevýhody diskretizace modelů. Modelování struktury je důležité pro výpočet

jakýchkoli vlastností a jeho popisem se zabývá mnoho autorů s různými přístupy.

Kapitola 3. se zabývá podrobnějším popisem podélného a příčného kmitání tenkých deskových útvarů. Pohybové rovnice a z nich vyplývající vztahy mezi jednotlivými veličinami jsou důležité pro zhodnocení experimentu, jehož postup je také popsán v této kapitole. Následuje přesné definování víceúrovňového modelu. Poslední podkapitolou je popis mechanických vlastností platicích pro oblast Hookeova zákona pomocí mechaniky kontinua.

Kapitola 4. nejprve definuje testovaný kompozitní materiál na úrovni vláken a struktury výztuže. Pak ukazuje možné interpretace výsledků. Dále se prezentují a diskutují výsledky experimentálního měření a simulačního výpočtu. Celý kompozit je studován z několika hledisek a přístupů tak, aby bylo možné výsledky efektivně použít. Zaměřuje se také na porovnání obou metod a tím na ověření validity získaných dat.

Kapitola 5. shrnuje výsledky celé disertační práce. Dále je zde nastíněn výhled pro budoucí práce a obzory, které odhalilo řešení.

2 Přehled současného stavu řešení problematiky

Kompozit se skládá ze dvou a více strukturních složek, jejichž vzájemnou spoluprací je vyvolán synergický (zesilující) efekt. To znamená, že vlastnosti výsledného produktu jsou lepší než jen pouhý součet vlastností složek. Nespojitou částí je textilní výztuž, která přenáší zatížení. Jejími nejdůležitějšími vlastnostmi jsou vysoká pevnost a modul pružnosti. Spojitá složka kompozitu, matrice, vyplňuje prostor kolem vláken a přenáší vnější zatížení styčným povrchem s výztuží. Adheze matrice a vláken podstatně ovlivňuje vlastnosti výsledného kompozitu. Nedokonalá adheze zpravidla vede k vytahování vláken a následnému lomu kompozitu. Vytahováním vláken však také dochází ke spotřebování nahromaděné energie a k lomu dojde až při větším napětí než u nevyztuženého materiálu. Kontaktní síly mezi výztuží a matricí mohou být chemické, fyzikální i kombinace obou [1,2].

Vlákna a matrice se vyrábějí z různých materiálů dle výsledného použití kompozitu. Použití uhlíku na vlákno i matrici představuje špičkovou aplikaci. Materiál má vysokou tahovou pevnost, lomovou houževnatost, lehce ovlivnitelnou anizotropii mechanických vlastností a vysokoteplotní odolnost s výjimkou oxidačního prostředí, dobrou tepelnou a elektrickou vodivost, chemickou odolnost, biokompatibilitu a malou tepelnou roztažnost [3,4]. Kompozity s tkaninovou výztuží jsou odolné proti šíření trhlin především ve směrech kolmých na vyztužující vlákna. Šíření delaminačních trhlin u tkaninových kompozitů je účinně zastaveno svazkem soustavy provazující kolmo ke směru šíření. O těchto materiálech bylo napsáno mnohé, ucelené shrnutí poskytují například [4,5,6,7].



Obr. 2.1 Pohled na plátňové provázání svazků z nekonečných vláken [8]

Pro modelování vlastností materiálu je třeba znát jeho strukturu. Ta je v případě tkaninových kompozitů C/C neobyčejně složitá. Vedle nepravidelně zvlněné textilní výztuže vykazuje i řadu vrozených defektů (pórů, bublin a trhlin), jejichž výskyt je především důsledkem pyrolýzy polymerního prekurzoru uhlíkové matrice a rozdílného

smršťování vláken a matrice při ochlazování kompozitu [1,4,9]. V současné době nelze zahrnout všechny aspekty této složité struktury do jednoho modelu [10]. Nejčastěji jsou využívány geometrické modely vycházející z ideální struktury (sinusového průběhu) tkaninové výztuže [10,11,12,13,14,15,16]. Tyto modely neposkytují výsledky shodné s experimentem pro příliš velkou idealizaci struktury [17,18]. V posledním desetiletí se proto snahy výzkumných pracovišť soustředily na zpřesnění popisu nepravidelně zvlněné výztuže [19,18,20]. Avšak i v tomto případě byl u kompozitů C/C zaznamenán ještě dosti velký nesoulad vypočtených a naměřených hodnot, jak u mechanických [11,12,16], tak u tepelných vlastností [5,21], neboť struktura obsahuje 20 až 25% dutin nejrůznější velikosti, od mikropórů (min. 10^{-5} mm^2) až po velké bubliny (max. 10^{-1} mm^2) [4,9,22,23].

Na Katedře textilních materiálů Technické univerzity v Liberci byla proto provedena rozsáhlá a velmi podrobná obrazová analýza dutin ve struktuře kompozitu C/C [23,24,25], která byla vysoce náročná nejen časově, ale i finančně a je zřejmě z tohoto důvodu u daného materiálu dosud ojedinělá. Na základě jejích výsledků byly formulovány základy vícestupňového geometrického modelu struktury kompozitu C/C s dutinami [23,26]. Tohoto modelu a podle něj upravených dílčích elementů struktury bylo využito i v předložené práci.

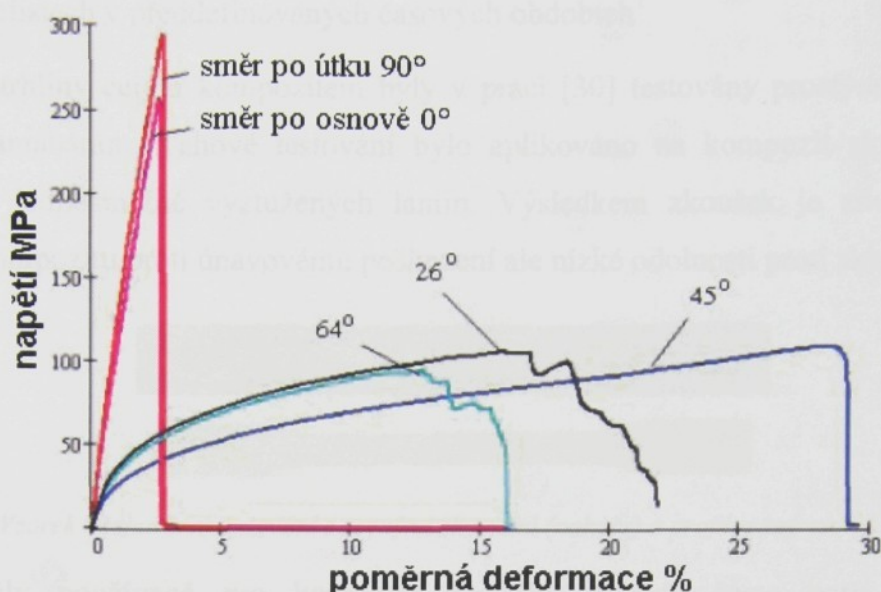
Věrohodnost modelu je třeba ověřit experimentálně. Elastické vlastnosti kompozitu lze testovat jak destruktivními, tak nedestruktivními metodami.

2.1 Testování destruktivními metodami

Přestože statické zatěžování (tahová zkouška) kompozitů je časově i finančně náročné a jedná se o destruktivní metodu, je stále široce využíváno především pro jednoznačnost získaných dat. Tato oblast často zahrnuje také dynamické a vysokozátěžové testy vláken i celých kompozitů. Nejběžnější jsou tahové, tlakové a ohybové zkoušky.

Tahové testování měří odolnost materiálu proti působení tahové síly. Materiál je upnut do čelistí a působí na něj tahová síla. Během namáhání je snímána síla a protažení. Maximální síla do přetrhu je nazývána tahová pevnost. Tažnost je nejvyšší protažení do přetržení vztažené k délce vzorku. Tímto testováním se získávají hodnoty pevnosti a tuhosti vzorku [10]. Typické průběhy tahových křivek kompozitů obsahuje **Obr. 2.2** pro kompozit sklo/polypropylen. Jsou zde znázorněny průběhy pod několika úhly vztaženými

k osnově vyztužující textilie. Nejvyšší absolutní tuhost vykazuje směr osnovy a útku. U ostatních je zase vyšší tažnost kompozitů, z toho nejvyšší je pro 45° k osnově [27].



Obr. 2.2 Průběhy tahových křivek různých stupňů namáhání vůči osám symetrie tkaninové výztuže [27]

Ohybová zkouška je vhodná pro posouzení poddajnosti a ohebnosti materiálu. Dlouhý a tenký vzorek je naplocho upnut mezi mimoběžné válečky a je na něj působeno tlakovou silou. Testování odolnosti v *tlaku* zjišťuje objemovou deformaci v tělese vzorku všestranným tlakovým působením na vzorek ve stlačené kapalině. Měří se změna objemu této kapaliny [10] a z ní se určuje stlačitelnost.

Základní zkoušky jsou zpravidla normovány. Např. firma Torayca® testuje poměrnou pevnost impregnovaných vláken, jejich tahový modul a protažení do přetržení podle vlastní normy TY-030B-01. Impregnace pryskyřicí je prováděna kontinuálně a poté fixována při teplotě kolem 130°C . Velikost vzorku je upravena podle předpisu a pak dojde k samotnému testování do přetrhu [28]. Dále zmiňme publikaci [29], která obsahuje definici testovacích vzorků. Pro jednosměrně vyztužené kompozity i příčně kladené vrstvy používá rovný vzorek nebo vzorek s profilovanými stranami (**Obr. 2.3**). Při testování nesmí docházet k prokluzu v čelistech ani k dalším nepřesnostem měření. Rozborem metody se dochází k závěru, že pro profilovaný vzorek je koncentrace napětí v zakřivených částech větší a tak rovný vzorek vykazuje o 10% vyšší hodnoty tahové pevnosti.

Práce [29] se dále zabývá *cyklickým namáháním* pro odhalení odolnosti po dlouhá časová období. Vzorek je cyklicky namáhán na přístroji s hydraulickým ovládáním změny zatížení v čelistech v předdefinovaných časových obdobích¹.

Příčné trhliny celým kompozitem byly v práci [30] testovány prostým a cyklickým tahovým namáháním. Tahové testování bylo aplikováno na kompozit složený z různě položených jednosměrně vyztužených lamin. Výsledkem zkoušek je závěr o vysoké odolnosti kompozitu proti únavovému poškození ale nízké odolnosti proti skluzu vrstev.



Obr. 2.3 Vzorek k tahovému testování s rovnými stranami (nahore) a profilovaný vzorek (dole) [29]

Materiály používané pro kompozit s textilní výztuží často patří do skupiny viskoelastických materiálů, pro které jsou charakteristické časové změny deformace nebo napětí známé po řadě jako creep a relaxace napětí. Pod creepem rozumíme odezvu vzorku ke konstantnímu napětí, deformace se s postupujícím časem zvětšuje, přírůstek je ale stále menší. Při relaxaci napětí je vzorek podroben pevné deformaci, napětí v něm však s časem exponenciálně klesá k ustálené hodnotě. Doba, z níž lze odhadnout, kdy se creep prakticky ukončí nebo napětí ustálí, se nazývá relaxační doba. Je v širokém rozmezí od sekund po hodiny a silně závisí na teplotě. Problematice viskoelaticity se např. věnuje práce ministerstva obrany USA [31], která popisuje *creepové* porušení kompozitu vztažené především k použití ve vysokých teplotách (tato zkouška je vhodná především pro kompozity s termoplastickou matricí). Při testech je kompozit upnut za konstantního předpětí a teploty a pak se sleduje materiálová odezva, čili pomalá plastická deformace materiálu vyvolaná dlouhodobým působením. Další popisovanou vlastností je *relaxace* napětí vláken. Vláknem je ohnuto do smyčky, vystaveno vyšší teplotě a poté je měřen průměr téhož vlákna. Test musí být nastaven podle aplikované teploty a poloměru smyčky [31].

¹ Z údajů v literatuře [29] vyplývá namáhání vzorku s frekvencí asi 5 Hz. Tato frekvence asi odpovídá praktickému využití. Pro dynamické měření je však příliš nízká (používají se frekvence minimálně stovek Hz) a pro statické naopak příliš vysoká (zde je maximální frekvence řádu setiny Hz). Perioda namáhání je rovněž velmi krátká v porovnání s relaxační dobou, takže se nedají zjišťovat viskoelastické vlastnosti, viz níže.

2.2 Testování nedestruktivními metodami

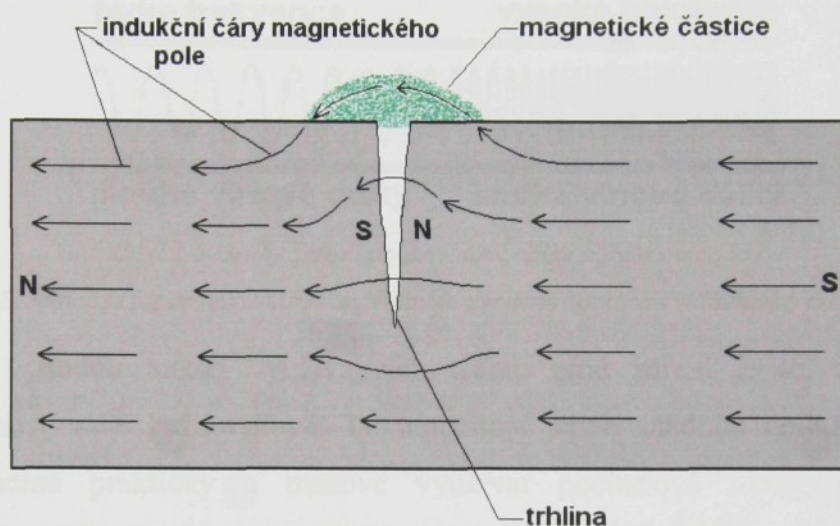
Využití nedestruktivních testů je vhodnou, paralelně využívanou a studovanou alternativou k testům destruktivním. Při těchto metodách se působí na vzorek bez vzniku nevratných deformací. Původně bylo nedestruktivní testování používáno kvůli bezpečnosti. Výhodou je ale také opakovatelnost a cena měření, protože nedochází ke zničení vzorku. Dochází ke snímání odezvy materiálu na nějaký budící signál. Většinou je nedestruktivní testování používáno pro detekci defektů a porušení v kompozitní struktuře. Je mnoho metod známých a užívaných již dlouhou dobu [2,4,6]. Vizualizačními a penetračními metodami je studována struktura povrchu. Penetračními metodami pomocí kapalin pronikajících dutinami struktury lze získat také objemové charakteristiky defektů. Pro inspekci vnitřní struktury se používá především testování pomocí ultrazvuku, RTG či ultrafialového záření. Také magnetické, elektrické, elektromagnetické, radiologické, infračervené vyšetřování, akustické emise a počítačová tomografie jsou používány pro testování především struktury kompozitů [32,33,34]. Následuje popis nejpoužívanějších metod.

Optické a vizualizační metody umožňují studovat povrch složených materiálů. Jsou nejjednodušší a nejpoužívanější. Podle použitého rozlišení se zkoumají různé úrovně struktury. Pokud jsou patrná rozhraní složek, je výhodné klasifikovat těmito metodami objemové podíly komponent, případně usuzovat na příčiny rozložení složek. Je řada pomůcek, které jsou použitelné pro studium kompozitů. Především je to klasický optický mikroskop a makroskop, také zvětšovací lupy a brýle. Pro větší zvětšení je vhodný skenovací elektronový mikroskop [33,34]. Poněvadž je však často nutné povrch vzorku obrousit a vyleštit, nelze optické metody považovat za úplně nedestruktivní.

Penetrační metody vyžadují přístup k povrchu testovaného materiálu a defekty, které zkoumají, musí být na povrchu řezu. Úzké trhliny jsou i přesto těžko rozpoznatelné a není detekována hloubka, do které tekutina pronikla. Tuto metodu je vhodné používat pouze pro neporézní strukturu. Často je nutné čištění povrchu před samotným testováním. Nejprve se nanese tekutina, která pronikne do defektu a poté se použije prášek, který vytáhne tekutinu z defektu a tím jej zvýrazní pro vizuální sledování [33,35]. I v tomto případě se však vlastnosti vzorku přítomností kapaliny v pórech mohou změnit.

Magnetické snímání se používá u feromagnetických materiálů. Je sledován povrch a vady blízko k povrchu. Není zjišťována hloubka vady. Toto testování je vhodné pro čisté a

hladké povrchy. Po magnetizaci je nutná také demagnetizace, což může být v některých případech obtížné [35,36]. Princip metody je na **Obr. 2.4**. Na testovaný vzorek jsou naneseny jemně mleté kovové částice. Pokud je feromagnetický materiál homogenní, magnetické siločáry procházejí uvnitř něho. Vně vzorku je slabé homogenní magnetické pole, takže kovové piliny jsou na povrchu rozloženy rovnoměrně. V případě povrchové trhliny siločáry pronikají ven (**Obr. 2.4**). V okolí trhliny vzniká silné magnetické pole, které do místa trhliny přitáhne piliny [33].

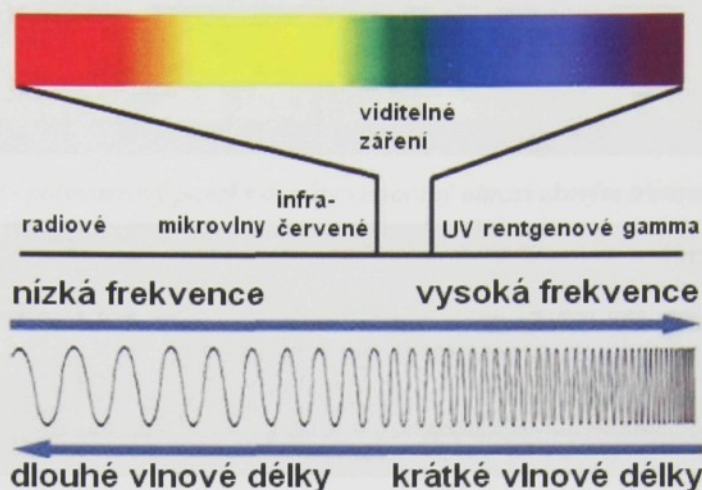


Obr. 2.4 Znárodnění detekce trhliny pomocí magnetizmu [33]

Již práce [37] z roku 1976 potvrzuje užitečnost rentgenového záření pro sledování vnitřní struktury kompozitů. Srovnává se zde rentgenové záření se sledováním kontinuálních akustických emisí v průběhu tahového namáhání. Obě metody jsou podle článku vhodné pro sledování počtu, růstu a distribuce defektů v kompozitu. *Prozařování* obecně se používá pro testování silnějších materiálů a proniká do jejich struktury [33,36]. Používané jsou neutronová, rentgenová a gamma radiografie. Podmínkou je použití dostatečně krátkých vlnových délek, aby záření proniklo materiálem. Ze spektra elektromagnetických vln² (**Obr. 2.5**) je zřejmé, že této podmínce vyhovují pouze výše uvedená vlnění. Podstatou je využití krátkých vlnových délek. Největším problémem této metody je nebezpečí ozáření. Při ozařování testované struktury dochází ke snímání intenzity prosvícení na druhé straně vzorku. Místa s nižší hustotou a s defekty se prosvítí více a takto je lze lokalizovat [33,35,36]. Využitím jiné části spektra (o delších vlnových délkách) se zabývá infračervená termografie, popsána např. v práci [38]. Při testování je xenonovou lampou vyslán ke vzorku tepelný puls. Následně se snímá porucha v materiálu

² Na **Obr. 2.5** je ve zvětšeném výřezu spektra elektromagnetického vlnění uvedeno viditelné světlo, jako jediná část tohoto vlnění plně vnímaná lidskými smysly.

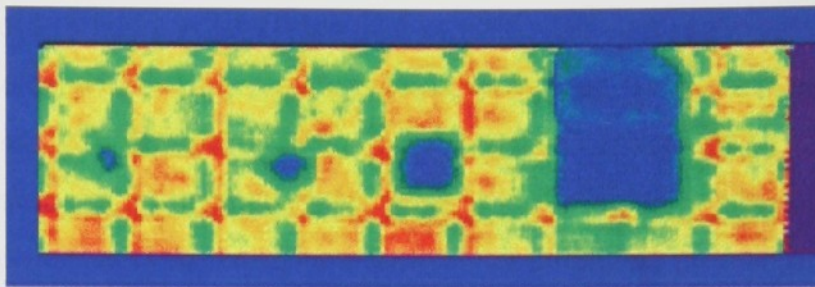
jako změna tepelného toku. Vyhodnocení je poměrně složité, vychází ze spektra rozptýleného tepelného záření.



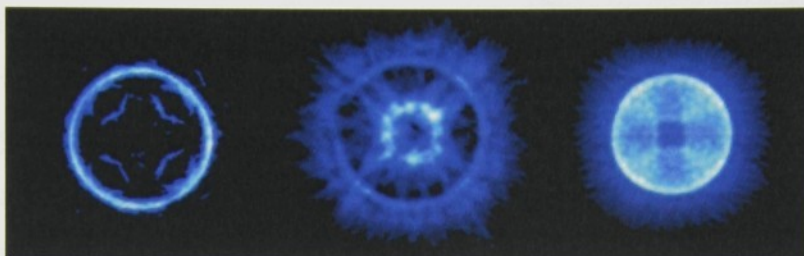
Obr. 2.5 Druhy záření podle vlnové délky a frekvence [33]

Stupnice je logaritmická. Pro srovnání je uvedeno spektrum viditelného světla.

Velkou výhodou metod využívajících těchto typů záření je to, že jsou kromě nedestruktivnosti také bezdotykové. To umožňuje jejich snadnou aplikaci. V současné době se začíná prakticky a masově využívat počítačová *tomografie* (Computer Tomography – CT), která po několikahodinovém plně automatizovaném počítačovém měření a zpracování poskytuje trojrozměrný obraz struktury. Běžné aparatury mají poněkud nižší rozlišovací schopnost (kolem 20 μm), ta se však rychle zlepšuje. Je zde též určité omezení na zkoumané materiály (složky struktury měly by mít rozdílná a vysoká atomová čísla v důsledku použití rentgenového záření). Největším omezením je však zatím vysoká cena [39].



Obr. 2.6 Skleněný - polyesterový panel s defekty vytvořený ultrazvukovým transmisním skenem [40]



Obr. 2.7 Rekonstrukce tvaru vzorku ultrazvukovým testováním [41]

Ultrazvuk, na rozdíl od elektromagnetického záření, patří mezi elastická (akustická) vlnění. Vyžaduje přítomnost látky, zatímco elektromagnetické záření se šíří i ve vakuu. Používá se pro nalezení defektů, určování tloušťky a mechanických vlastností, monitorování opotřebení a degradace materiálu. Příklady výstupů jsou na **Obr. 2.6**, **Obr. 2.7**. Také se hodí pro stanovení stupně impregnace, delaminace, hustoty, porozity, struktury kompozitu, velikosti zrn krystalů [36,41]. Poněvadž se jedná o elastické vlnění, jeho přenos do vzorku vyžaduje kontakt, při kterém se použije imersní medium³. Jedná se tedy o kontaktní měření. V případě únavových trhlin ve struktuře je možné, že se stav tělesa během testování zhorší.

Princip metody spočívá velmi zjednodušeně v tom, že ultrazvukové vlny procházejí materiálem a odrážejí se zpět od druhého konce vzorku nebo od trhliny. Tím detekují defekty a tloušťku tělesa [33]. Pokud je ultrazvuk použit pro velmi tenké materiály, snadno dojde k jejich rozkmitání a další propagaci vady [35]. Výzkumy se dnes zaměřují na rychlost provedení měření bez dalšího poškození vzorku. V práci [42] byla testována metoda pro použití v průmyslu a je založena pouze na dvou skenech⁴, jednom rychlém pro inspekci umístění vad a druhém hlubším testu jen v místě vady. Tím se do jisté míry omezí možnost propagace vady v průběhu testování.

³ Imersní medium je pasta nebo kapalina mezi měničem a vzorkem zajišťující lepší průnik ultrazvuku do vzorku. Běžně se používá v medicíně při vyšetřování ultrazvukem.

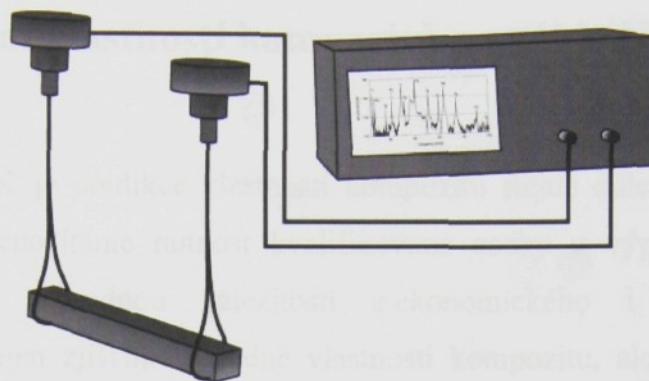
⁴ Skenem se rozumí plynulé zkoumání vlastností vzorku v určitém směru. Zdroj ultrazvuku se v tomto směru posouvá a zjištění vlastností se monitorují a uchovávají.

Ultrazvuková technika je používána také ke zjišťování elastických vlastností. Aplikace na hodnocení dřevotřískové desky je v práci [43]. Vychází se zde z ortotropní symetrie, materiálu přísluší několik elastických modulů (viz dále). Vzorky jsou vyříznuty v několika úhlech vzhledem k osám souměrnosti. Na přístroji je vzorek upnut vodorovně. Nad ním a pod ním jsou přiložena čidla emitující a zachycující ultrazvuk, po řadě měnič a detektor. K soustavě dále náleží generátor harmonického napětí budící měnič zvuku a osciloskop sloužící k detekci prošlého ultrazvuku. Touto sestavou se zjistí rychlost vlny, která prochází přes vzorek pro daný výřez. Ze znalosti hustoty se pak určí odpovídající elastický modul pro daný řez. Na základě rovnic pro transformaci souřadné soustavy aplikované na všechny řezy lze pak určit elastické moduly v základní souřadné soustavě (osy symetrie leží v osách souřadné soustavy). Vypočtené moduly se pak dosadí do matic tuhosti a poddajnosti. Celý postup je automatizován, podrobnosti jsou v práci [43].

Prověřenou experimentální metodou pro získávání mechanických vlastností je vyhodnocování vlastních frekvencí kmitů procházejících kompozitní deskou [44]. V této oblasti se nejčastěji využívají teorie podle Lagrangea, Euler-Bernoulliho, Rayleigha a Timošenka. Ve všech případech se jedná o *kmitání* tenkého deskového nosníku⁵ [45,46,47]. Teorie Lagrangeho je základem pro podélné kmitání. Teorie Euler-Bernoulliho je výchozí pro příčné kmitání a Rayleigh s Timošenkem tuto metodu doplnili o korekce. Metoda, založená na analýze podélného kmitání a příčného kmitání Timošenkovy nosníku byla zpracována v Ústavu struktury a mechaniky hornin Akademie věd ČR v Praze a byla použita pro stanovení elastických modulů kompozitů C/C v předložené práci. Popisem teorie i použitého měření se zabývá kapitola 3.

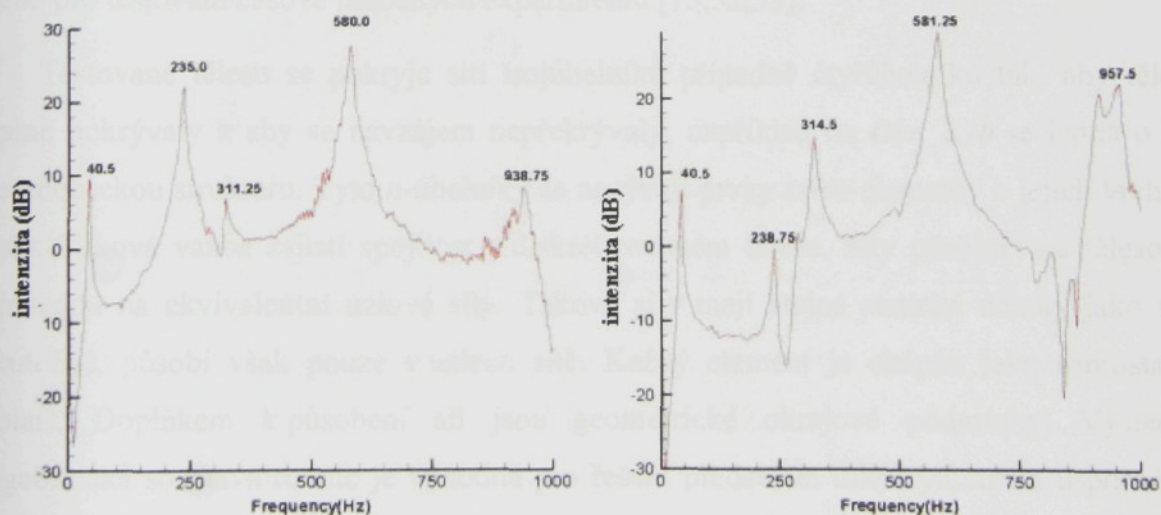
V práci [48] je použita alternativní varianta aplikovatelná na izotropní materiál. Vzorek je zavěšen na dvou uhlíkových vláknech, **Obr. 2.8**. Jeden konec vlákna je upevněn a druhý je připevněn k piezoelektrickému měniči. Na vstupní straně piezoelektrický budič pohybuje vláknem nahoru a dolů. Tento pohyb pak otáčí vzorkem, vznikají ohybové kmity. Na druhém konci vzorku, na výstupu, vzorek naopak napíná více či méně uhlíkové vlákno připojené k výstupnímu měniči, detektoru. Na něm vznikají elektrické kmity, výstupní signál, které se zobrazí na osciloskopu. Testovány jsou mosaz a hliník, tedy jednoznačně izotropní materiály. Na složitější druh materiálů zatím nebyla zkoušena. Teorie experimentu je podložena Timošenkovou teorií.

⁵ Používáme vžitého termínu kmitání, i když se jedná o vlnění. Různé body vzorku mají v daném časovém okamžiku různou fázi, jde tedy o vlnu. Při kmitání by vzorek všechny body měly stejnou fázi, vzorek by se pohyboval jako tuhé těleso.



Obr. 2.8 Soustava pro experimentální měření elastických modulů pomocí ohybových kmitů [48]

Podélné kmitání je aplikováno na testování elastických vlastností křídel letadel v [49]. Test je prováděn na křídlech s jedním koncem pevně uloženým a jedním volným. Snímací zařízení je na volném konci. Pomocí impulsní techniky jsou buzeny podélné mechanické kmity. Pomocí Fourierovy transformace lze ukázat, že dostatečně krátký impuls je složen z velkého množství harmonických vln o spojitě rozložených frekvencích s přibližně stejnou amplitudou. Každá z těchto vln se přenáší jinak, v závislosti na její frekvenci. V blízkosti vlastních frekvencí je detekovaná amplituda vysoká, jinde je nízká. Snímá se závislost amplitudy na frekvenci, frekvenční odezva. Její dva příklady jsou na **Obr. 2.9**. Maximům přísluší vlastní frekvence, které jsou vyznačeny číselně⁶. Maximům v obou částech **Obr. 2.9** přísluší téměř stejné vlastní frekvence.



Obr. 2.9 Spektrum frekvenční odezvy buzených kmitů
(závislost intenzity prošlého ultrazvukového vlnění na frekvenci) [49]

⁶ Stupnice na svislé ose Obr. 2.9 je absolutní, nulové hodnotě přísluší určitá, přesně neurčená základní hodnota intenzity. V elektrotechnice se pro tento případ zavádí absolutní decibely, např. dBm, kdy nulové hodnotě přísluší výkon 1 mW.

2.3 Modelování vlastností kompozitů na základě geometrických modelů

V současné době je predikce vlastností kompozitů stejně důležitá jako jejich přímé testování. Pokud nepočítáme nutnost kvalifikované osoby u výpočetního systému, je modelování velmi výhodnou záležitostí z ekonomického i časového hlediska. Modelováním se nejen zjišťují výsledné vlastnosti kompozitu, ale je možné navrhnout materiálové složení, vrstvení i jinou konstrukci přesně podle konečných požadavků. Aproximace vláknenných svazků i ostatních geometrických charakteristik je nezbytnou součástí přípravy výpočtu. K případné aproximaci se používá především Diskrétní Fourierova transformace, k popisu geometrie pak Metoda konečných prvků a jiné algoritmy, na jejichž podkladu pracují různé výpočetní softwary [15,50,51].

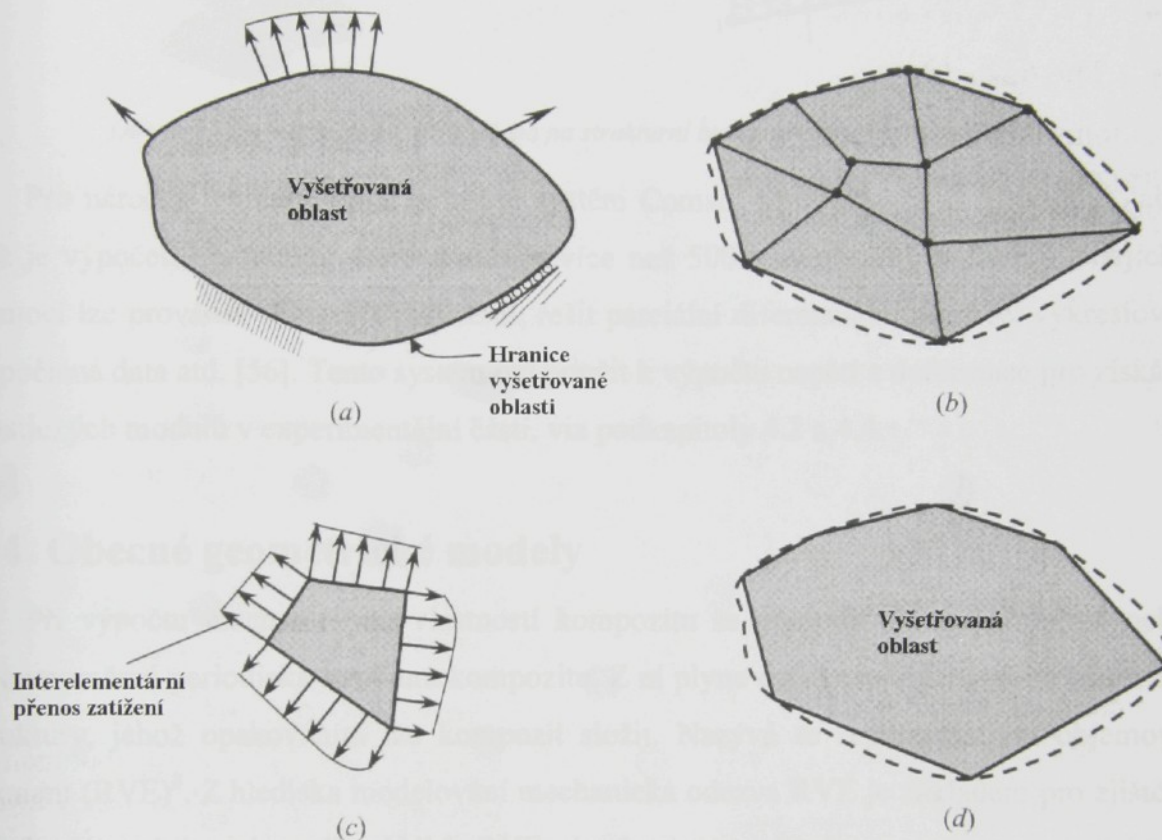
Metoda konečných prvků (FEM) je numerická metoda sloužící k numerické aproximaci průběhů elastického posunutí, jeho derivací, deformací, napětí, vlastních frekvencí a dalších elastických veličin na vytvořeném fyzikálním modelu⁷. Její princip spočívá v diskretizaci spojitého kontinua do určitého konečného počtu prvků, přičemž zjišťované parametry jsou určovány v jednotlivých uzlových bodech. FEM je užívána především pro kontrolu již navržených zařízení, pro stanovení kritického místa konstrukce nebo pro testování časově náročných experimentů [15,52,53].

Testované těleso se pokryje sítí trojúhelníků případně čtyřúhelníků tak, aby těleso úplně pokrývaly a aby se navzájem nepřekrývaly, například na **Obr. 2.10** se jedná o 2D geometrickou strukturu. Tyto n -úhelníky se nazývají prvky nebo elementy a jejich vrcholy uzly. Taková vazba zajistí spojitost v diskretizovaném tělese. Síly působící na těleso se převedou na ekvivalentní uzlové síly. Takové síly mají stejné statické účinky jako síly skutečné, působí však pouze v uzlech sítě. Každý element je chápán jako samostatná oblast. Doplňkem k působení sil jsou geometrické okrajové podmínky. Výsledná algebraická soustava rovnic je výhodná pro řešení především díky symetrii a úspornému uložení dat [50,51].

Metoda umožňuje vhodně reprezentovat vlastnosti celku složeného z různých materiálů i definovat lokální efekty a vztáhnout je k celkové ploše. Počet a poloha uzlů závisí na geometrii elementu, stupni aproximace a použitých rovnicích. Spojení elementů

⁷ Fyzikálním modelem se v případě FEM (MKP) rozumí soustava rovnice a okrajových podmínek. Neobsahuje základní elastické či mechanické prvky a nemá tedy nic společného např. s rheologickými modely.

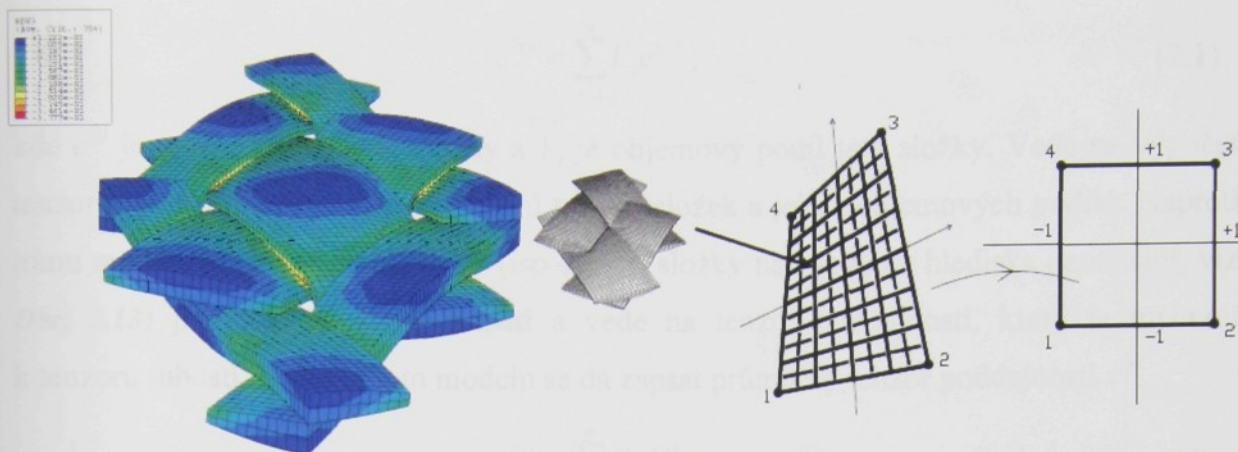
je v zásadě založeno na spojitosti mezelementárních mezí. Metoda může selhat při nevhodnosti aproximace oblasti. Odstranění chyb je pak otázkou lepší geometrické definice vyšetřované oblasti nebo nastavení vstupních vlastností. V reálných úlohách se počet rovnic pohybuje v řádech $10^4 - 10^6$ [50,51]. Pro hlubší studium pokládání sítě může sloužit publikace [54], která podrobně popisuje rovnice pro používání trojúhelníkových, čtyřbokých, pětibokých a cihlových elementů.



Obr. 2.10 Postup diskretizace vyšetřované oblasti ve 2D [51]

(a) vyšetřovaná oblast s určenými hranicemi a vnějším silovým působením, (b) rozdělení oblasti sítě elementů – konečného počtu prvků, (c) znázornění elementu se silami, které na něj působí na rozhraní s ostatními elementy, (d) konečná forma vyšetřované oblasti jak bude použita pro další operace (výpočty vlastností)

V práci [55] je ukázka testování smyku tkaniny pomocí položení sítě čtyřúhelníků. Postup začíná od definice elementu, mříže, oblasti, jejích hranic a končí grafickým zobrazením numerického řešení je na **Obr. 2.11** v pořadí zprava doleva.



Obr. 2.11 Čtyřúhelníková síť položená na strukturní buňku při testování smyku [55]

Pro náročné aplikace MKP je určen systém Comsol MultiphysicsTM (dříve Femlab), což je výpočetní prostředí, které obsahuje více než 500 matematických funkcí, s jejichž pomocí lze provádět operace s maticemi, řešit parciální diferenciální rovnice, vykreslovat vypočtená data atd. [56]. Tento systém byl použit k výpočtu napětí a deformace pro získání elastických modulů v experimentální části, viz podkapitoly 4.2 a 4.4.

2.4 Obecné geometrické modely

Při výpočtu mechanických vlastností kompozitu se předpokládá trojrozměrná nebo dvourozměrná periodická struktura kompozitu. Z ní plyne existence objemového elementu struktury, jehož opakováním lze kompozit složit. Nazývá se reprezentativní objemový element (RVE)⁸. Z hlediska modelování mechanická odezva RVE je základem pro zjištění odezvy kompozitu jako celku. Výběr RVE závisí na typu výztuže a nemůže být menší než charakteristický rozměr výztuže. V RVE je vždy obsažena matrice i výztuž. Pro RVE se určují tenzor tuhosti c a tenzor poddajnosti s , na které se váže průměrné napětí σ a průměrná deformace ε v elementárním objemu materiálu [11].

Kompozity jednosměrně vyztužené (1D) se popisují pomocí tří základních modelů, které zavádějí určité předpoklady. Model *průměrné tuhosti* (iso-strain, složky vedle sebe z hlediska namáhání, viz Obr. 2.12) předpokládá, že ve vícesložkové strukturní soustavě při zatížení, je přetvoření všech složek stejné ale napětí nikoliv. Tenzor tuhosti⁹ $c^{(s)}$ pro soustavu o n složkách lze zapsat

⁸ V analogii s krystalografickou terminologií kompozit představuje krystal (ideální) a reprezentativní objemový element (elementární buňku).

⁹ Tenzory zapisujeme symbolicky, bez indexů.

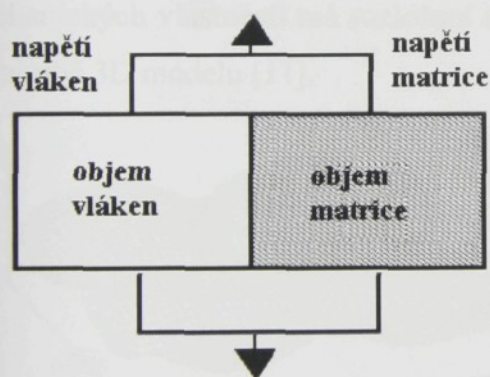
$$c^{(s)} = \sum_{j=1}^n V_j c^{(j)}, \quad (2.1)$$

kde $c^{(j)}$ je tenzor tuhosti j -té složky a V_j je objemový podíl této složky. Vede na výpočet tenzoru tuhosti, který je funkcí tenzorů tuhosti složek a jejich objemových podílů. Naproti tomu model *průměrné poddajnosti* (iso-stress, složky nad sebou z hlediska namáhání, viz **Obr. 2.13**) předpokládá stejné napětí a vede na tenzor poddajnosti, který je inverzní k tenzoru tuhosti. Podle tohoto modelu se dá zapsat průměrný tenzor poddajnosti $s^{(s)}$

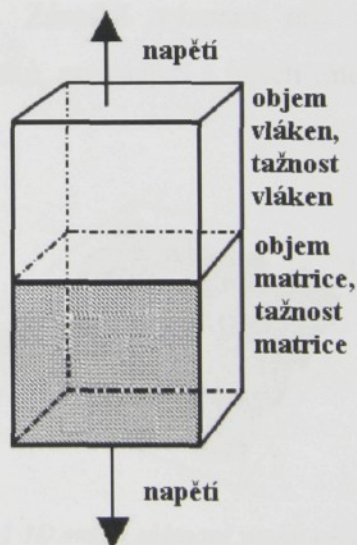
$$s^{(s)} = \sum_{j=1}^n V_j s^{(j)}. \quad (2.2)$$

Význam symbolů je analogický, $s^{(j)}$ je tenzor poddajnosti j -té složky a V_j je objemový podíl této složky pro soustavu o n složkách.

Modely iso-stress a iso-strain jsou horní a dolní hranicí elastických vlastností kompozitů. Oba modely kombinuje *směšový* model aplikovaný přímo na laminát. Stejná deformace je předpokladem v rovině laminátu a stejné napětí ve směru kolmém k rovině laminátu [3,10,12].



Obr. 2.12 Model průměrné tuhosti [57]



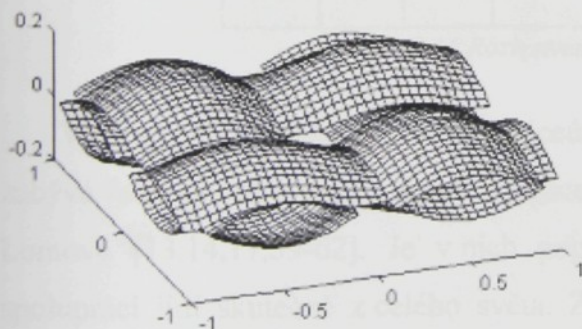
Obr. 2.13 Model průměrné poddajnosti [57]

Pro případ dvourozměrné tkaniny (2D), jako laminy v kompozitech, se používají různé kombinace základních modelů. Podobně jako pro jednosměrně vyztužené kompozity se používá model *průměrné tuhosti* pro typ atlasové tkaniny. Pro atlasovou výztuž je používán i *místkový* model, model *průměrné poddajnosti* a *směšový* model. Pro plátňové výztuže se používá *mozaikový* model a model *zvlněných vláken*. Splétané výztuže popisuje

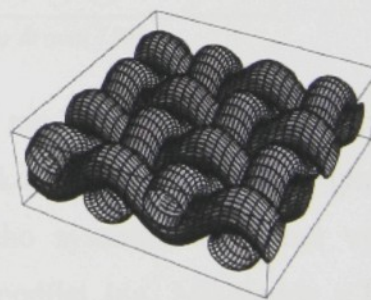
model *tkaninové geometrie* pomocí průměrné tuhosti a pracuje s nelineárním chováním matrice, detailněji v pracích [3,10].

Numerické metodologické principy popisující trojrozměrné plošně vyztužené tkaninové kompozity (3D) jsou následující. Metoda *modifikované matrice* plátnové vazby je vhodná pro předpověď v místech ortogonálně překřížených úseků. Vhodná je pro své prostorové zobrazení, nicméně stejně funkční pro takovéto jednoduché struktury je i plošný model. Každý systém výztuže se uvažuje zvlášť ve dvou navzájem kolmých směrech. Z RVE vychází metoda *vláknového zakřivení*. Je vhodná pro plátno a předpokládá lineární vlákna ve směru vyztužení a v ostatních směrech zakřivená vlákna. Dále lze pro tkaniny použít model *zvlněných vláken* a metodu *průměrné tuhosti*. Pro splétané textilie lze použít model *konečné buňky*, kde se matrice a výztuž prolínají skrze šestiúhelníkovou strukturu, více v pracích [3,10].

Mezi relativně jednoduché struktury patří kompozit s plátnovou vazbou. Výztuž tvoří ortogonální tkanina plátnové vazby, která se skládá ze dvou navzájem překřížených soustav svazků. Příklad základní buňky pro eliptický průřez je **Obr. 2.14**. Na **Obr. 2.15** je část plátnové vazby s kruhovým průřezem svazku. Zásadní význam pro určování mechanických vlastností má rozložení úhlu sklonu svazků, provázání a jejich interpretace při tvorbě 3D modelu [11].



Obr. 2.14 Základní strukturální jednotka plátnové vazby s čtverečkovým průřezem [11]

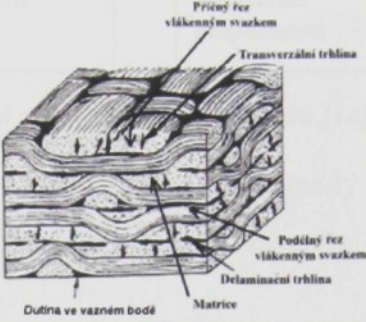


Obr. 2.15 3D model plátnové vazby s kruhovým průřezem [58]

2.5 Modely složitějších struktur

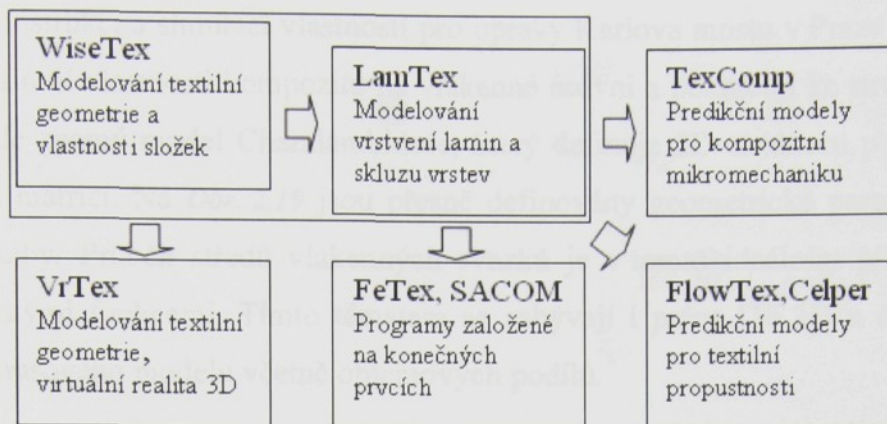
Studium mechanického chování kompozitů lze pojímat jednoduše, ale pro větší přesnost se musí brát v úvahu mnoho dalších parametrů ovlivňujících komponenty. Modelování po úrovních umožňuje rozložit složité heterogenní struktury tak, že výpočet jejich vlastností sestává z dosazování výsledků z nižších úrovní do těch následujících. Pro nejnižší úroveň je nutné zjistit výchozí vlastnosti jiným způsobem, nejčastěji měřením

reálného materiálu. Specifika z jednotlivých úrovní se v obecném součtu zahrnují do celku, čímž se docílí vyšší přesnosti konečného výsledku. Rozvrstvení struktury znázorněné na **Obr. 2.16** začíná u modelu celku v reálné formě. Tu je potřeba do dalších úrovní převést, v nejjednodušším případě až na vlákna [6,59].

Úroveň	Typický rozměr	Dimenze	Typický parametr	Obrázek
Kompozit	m	3D (2,5D)	Počet vrstev (lamin)	
Tkanina	m	2D	Počet vlákněných svazků	
Vlákněný svazek	mm	1D (1,5D)	Počet vláken	
Vlákno	μm	1D	Průměr	

Obr. 2.16 Rozvrstvení struktury do úrovní [59]

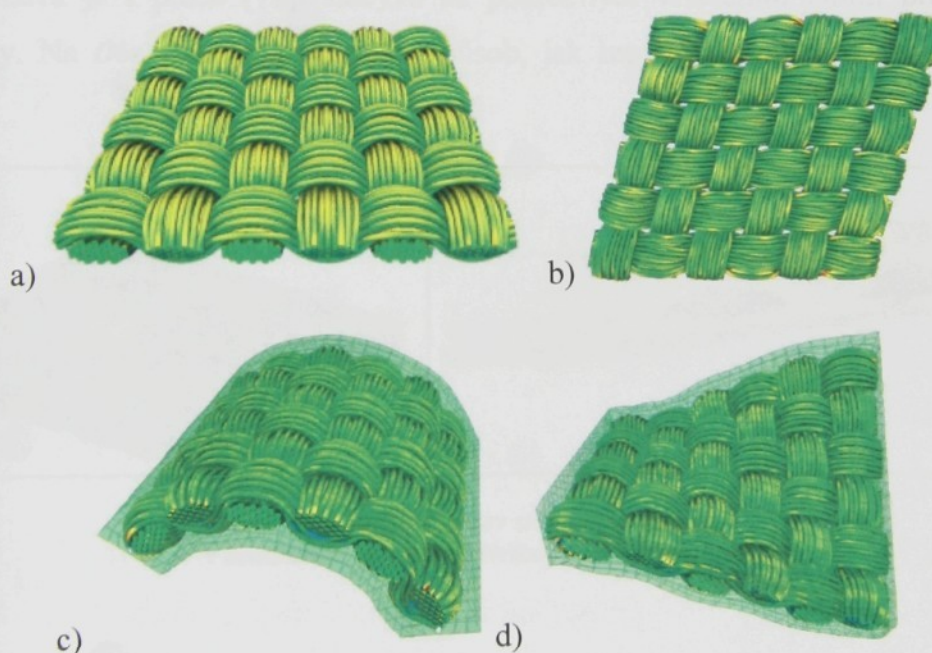
Výzkumem v oblasti struktury a víceúrovňového modelování vlastností kompozitů se zabývá řada autorů a týmů. Zmíňme práce v oblasti kompozitů publikované týmem prof. Lomova [13,14,17,59-62]. Je v nich popis složeného systému, který byl vyvinut ve spolupráci lidí skutečně z celého světa. Za ČR se podílel Ing. Mikolanda z TUL částí VrTex. Jedná se o celý soubor programů, které jsou nastaveny na konstrukci struktury, modelování složitějších geometrií, položení sítě, výpočet vlastností. Na **Obr. 2.17** je znázorněna cesta, která se musí ujit, aby došlo až ke konečnému výpočtu.



Obr. 2.17 WiseTex soubor programů pro modelování kompozitů [14]

Každý ze softwarů je specializovaný na určitou operaci a dohromady tvoří celek, který je schopen efektivně pracovat. Přehledný souhrn vlastností vláken a přízí, které jsou zahrnuty do programování, poskytuje [17].

Na toto navazuje množství autorů. Jedním z nich je i Durville [63], který pomocí předchozích programů hodnotí mechanické vlastnosti tkanin používaných pro kompozitní materiály. Na **Obr. 2.18** je ukázka strukturních modelů pro různé simulace zkoušek¹⁰.

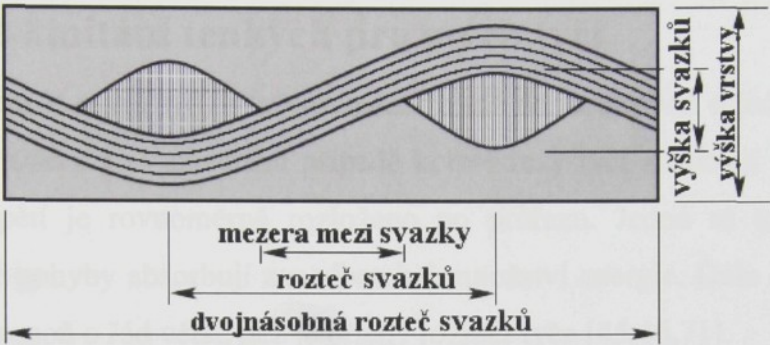


Obr. 2.18 Typické formy deformace na modelu tkaniny a) bez deformace, výchozí stav, b) smyková deformace, c) ohyb, d) krut [63]

Podobnými postupy aplikujícími víceúrovňové modelování na mikro a mesoúroveň se zabývají na ČVUT v Praze pod vedením doc. Šejnohy [64-69]. Jejich práce není soustředěna jen na modelování kompozitů, ale také na rozměrnější objekty. Studují

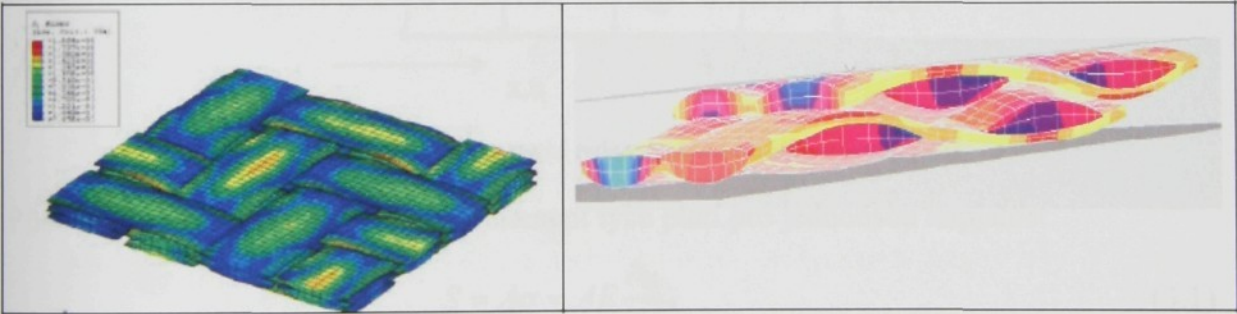
¹⁰ Použití perspektivy (až na část b), na převzatém Obr. 2.18 částečně ztěžuje pochopení typických deformací.

například konstrukci a simulaci vlastností pro opravy Karlova mostu v Praze [64]. V práci [65] pak definují vlastnosti kompozitů na vlákenné úrovni a pokračují ke struktuře tkanin. Použit je zde známý model Charalambidese, který definuje 2D strukturu plátňové vazby obklopenou maticí. Na **Obr. 2.19** jsou přesně definovány geometrické parametry ideální plátňové vazby. Průběh středů vlákenných svazků je v tomto ideálním případě popsán goniometrickými funkcemi. Tímto tématem se zabývají i práce [16,21] a definují celou strukturu sinusového modelu včetně objemových podílů.



Obr. 2.19 Model struktury plátňové vazby výztuže a matrice [65]

Zajímavá je i práce [70]. Zabývá se pokročilým vrstvením lamin pro tkaninové kompozity. Na **Obr. 2.20** je znázorněn způsob, jak lze strukturně řešit skluz vrstev při lisování.



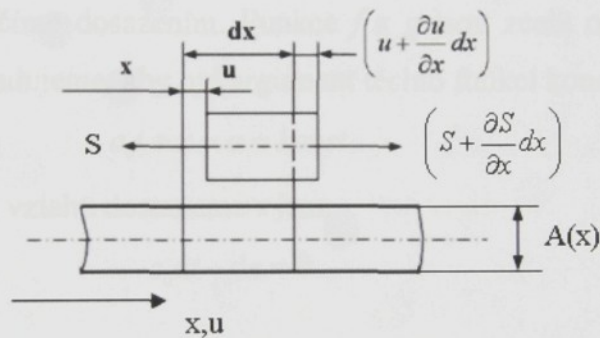
Obr. 2.20 Kladení vrstev standardní (vlevo) a v kvadratuře, posuvu o čtvrtinu vlny (vpravo) [70]

3 Použité metody

V této kapitole je podrobně popsána teorie podélného a příčného kmitání pružných tyčí a popis metody rezonančních frekvencí. Pomocí těchto metod se stanovují elastické konstanty tuhých těles. Dále je zde pomocí mechaniky kontinua definována struktura z mechanického hlediska a také je vysvětleno 2D víceúrovňové modelování struktury použité pro simulaci.

3.1 Podélné kmitání tenkých pružných tyčí

Předpokladem je tenká tyč osově souměrná u níž délka alespoň o jeden řád převyšuje příčné rozměry, **Obr. 3.1**. V obecném případě kolmé řezy tyčí zůstávají rovinné i při její deformaci a napětí je rovnoměrně rozloženo po průřezu. Jedná se tedy o jednoosou napjatost. Příčné pohyby absorbují zanedbatelné množství energie. Dále délka postupující vlny musí být alespoň o řád větší, než je příčný rozměr tyče [45,46,71].



Obr. 3.1 Deformace tenké tyče vyvolaná podélnou vlnou [45]

Působením osově síly S na hmotný element tyče platí pro jednoosou napjatost

$$S = A\sigma = AE \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (3.1)$$

kde E je modul pružnosti v tahu, A je plocha průřezu, $\partial u / \partial x$ je poměrné prodloužení.

Pohybová rovnice elementu tyče podle Lagrangea pak je

$$\rho A(x) dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(S + \frac{\partial S}{\partial x} dx \right) - S, \quad (3.2)$$

$$\rho A(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial (A\sigma)}{\partial x}, \quad (3.3)$$

kde A je plocha průřezu, ρ je hustota materiálu, σ je napětí. Toto platí i pro proměnný průřez tyče. Pro Hookeův zákon platí

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (3.4)$$

pak lze rovnici (3.3) zapsat ve tvaru

$$A(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left[A(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right], \quad (3.5)$$

kde E je Youngův modul pružnosti a průřez $A(x)$ předpokládáme konstantní $A(x) = A = konst.$ Po zavedení konstanty c_0 vztahem

$$c_0^2 = \frac{E}{\rho}, \quad (3.6)$$

se vlnová rovnice (3.3) nachází ve tvaru

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (3.7)$$

Tento tvar platí pro tyče stálého průřezu. Této rovnici vyhovuje řešení

$$u(x, t) = f(c_0 t + x) + g(c_0 t - x), \quad (3.8)$$

jak se snadno přesvědčíme dosazením. Funkce f a g jsou zcela obecné. Význam řešení pochopíme, pokud požadujeme, aby byl argument těchto funkcí konstantní, např.

$$c_0 t + x = a = konst. \quad (3.9)$$

Diferencováním tohoto vztahu dostaneme výraz

$$c_0 dt + dx = 0. \quad (3.10)$$

Odtud

$$v_f = \frac{dx}{dt} = -c_0. \quad (3.11)$$

Konstantní hodnota funkce $f(a)$ se tedy pohybuje v záporném směru osy X rychlostí $v_f = c_0$. Pro funkci g zjistíme analogicky, že popisuje pohyb konstantní hodnoty (šíření) opačným směrem. Řešení vlnové rovnice představuje dvě postupující vlny, které se pohybují v opačném smyslu fázovou rychlostí c_0 , již se pohybuje konstantní fáze. U tyčí omezené délky pak superpozicí obou vln vzniká stojaté vlnění, viz níže.

Pro první derivace posunutí platí

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= f'(c_0 t + x) + g'(c_0 t - x), \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= c_0 f'(c_0 t + x) + c_0 g'(c_0 t - x). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Z rovnic (3.12) plyne

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_0 \frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{c_0} \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (3.13)$$

Protože pro deformaci podle definice platí

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{c_0} \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (3.14)$$

Pomocí Hookeova zákona (3.4) a definice fázové rychlosti (3.6) získáme pro napětí vztah

$$\sigma = \varepsilon E = E \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{E}{c_0} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{E}{c_0} v_a = \rho c_0 v_a, \quad (3.15)$$

kde $v_a = \frac{\partial u}{\partial t}$ je rychlost elementu tyče v místě x , která se též nazývá akustická rychlost.

Důležitý vztah (3.15) popisuje souvislost mezi napětím a akustickou rychlostí. Veličina $z_a = \rho c_0$ se nazývá měrná akustická impedance a používá se v elektroakustické analogii.

Speciálním a praktickým případem je harmonická vlna, pro kterou se uvádí definiční vztah

$$u = U \sin[p(x \pm c_0 t)] = U_m \sin(\omega t \pm px), \quad (3.16)$$

kde U_m je amplituda vlny, p je vlnové číslo, $\omega = 2\pi f$ je úhlová (kruhová) frekvence, f je frekvence. Pro frekvenci a úhlovou frekvenci platí tyto vztahy

$$f = \frac{c_0}{\lambda}, \quad \omega = 2\pi f = 2\pi \frac{c_0}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda} c_0 = pc_0, \quad (3.17)$$

kde λ je vlnová délka.

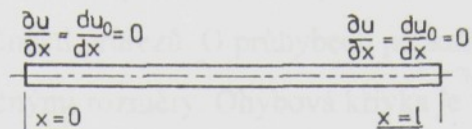
Fázová rychlost c_0 je konstantní a nezávislá na frekvenci vlny. Nevyskytuje se zde disperze vln, takže silový impuls je tyčí přenášen nedeformovaný.

Uvedené vztahy platí pro tyč nekonečné délky. Pokud je tyč konečná, je nutno mezi všemi řešeními (funkcemi f a g) najít taková, která vyhovují počátečním a okrajovým podmínkám. Počáteční podmínka udává průběh posunutí v čase $t = 0$, označujeme jej obvykle jako u_0 . Zpravidla se však omezujeme na harmonický průběh a pak je počáteční podmínka popsána vztahem (3.16) pro $t = 0$.

Okrajové podmínky udávají posunutí na okrajích tyče, $x = 0$ a $x = l$, kde l je délka tyče v libovolném čase t (**Obr. 3.2**). V krajních případech jsou okrajové podmínky dvojího typu:

1. Předepsané, obvykle nulové, posunutí pro $x = 0$ a $x = l$, tj. $u_{x=0} = 0$ a $u_{x=l} = 0$. Pokud je posunutí nulové, mluvíme o upevněném konci. Tyto podmínky se nazývají Dirichletovy.

2. Předepsané, obvykle nulové, napětí pro $x = 0$ a $x = l$, tj. $\sigma_{x=0} = 0$ a $\sigma_{x=l} = 0$. Pokud je napětí nulové, mluvíme o volném konci. Tyto podmínky se nazývají Neumannovy.



Obr. 3.2 Uložení tyče s volnými konci (okrajové podmínky) pro okamžitý (u) i počáteční (u_0) stav [45]

Použitím Hookeova zákona můžeme Neumannovu podmínku volného konce psát ve tvaru

$$E \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=0} = 0, \quad E \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=l} = 0, \quad (3.18)$$

pokud jsou oba konce tyče volné. Neumannovy okrajové podmínky obsahují prostorové derivace posunutí, zatímco Dirichletovy jen posunutí samotné.

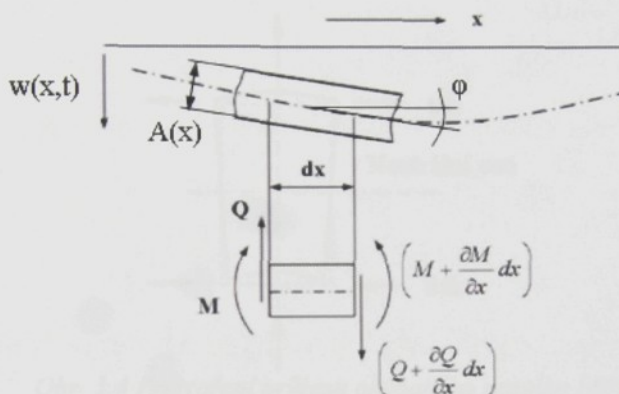
Okrajové podmínky se dají kombinovat, např. jeden konec tyče ($x = 0$) může být upnutý a druhý ($x = l$) volný, což je případ vetknutého nosníku. Pro tento případ mají okrajové podmínky tvar

$$u_{x=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=l} = 0. \quad (3.19)$$

Okrajové podmínky mohou být složitější, např. může být předepsáno časově proměnné (harmonické) posunutí nebo napětí. Pak se jedná o vynucené kmity. V případě nulového posunutí či napětí jde o kmity volné. Fyzikálně si můžeme okrajové podmínky nahradit představou, že na koncích tyče dochází k odrazu vlny a vzniká stojaté vlnění. V nejjednodušším případě jsou pak na tyči body s nulovým posunutím, které nazýváme uzly, a body s maximální amplitudou posunutí, nazývané kmitny. Kmitny a uzly se však získají jen pro určité vlnové délky a tedy i frekvence, pak mluvíme o vlastních kmitech. Vlnové délky (a frekvence) vlastních kmitů můžeme určit z okrajových podmínek (jednoduché) nebo z podmínky pro fázi odražené vlny (fyzikálně složitější). Frekvence jsou lichým, sudým nebo obecným násobkem základní (nejnižší) frekvence. Násobky nazýváme harmonické frekvence [45,46,71].

3.2 Příčné kmitání a teorie ohybových vln

V teorii Euler-Bernoulli je zaveden předpoklad, že řezy tyčí kolmo na osu zůstávají rovinné a že pohyb elementů lze považovat za posuv kolmo na nedeformovanou osu v rovině hlavních os setrvačnosti průřezů. O průhybech při kmitání se předpokládá, že jsou malé ve srovnání s jeho příčnými rozměry. Ohybová křivka je velmi plochá, tedy $\partial w / \partial x$ je mnohem menší než 1. Je také zanedbán posuv elementů ve směru osy x i natáčení v rovině pohybu [45,46,71]. Na element délky dx v řezech působí momenty a posouvající síly, **Obr. 3.3.**



Obr. 3.3 síly a momenty působící na element při příčném vlnění [45],[46]

Pohybová rovnice je

$$\rho A(x) dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial Q}{\partial x} dx. \quad (3.20)$$

Rovnice ohybové čáry k ní příslušející pro ploché křivky

$$M = -EI(x) \frac{1}{R} = -EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (3.21)$$

kde EI je ohybová tuhost, přičemž I je osový kvadratický moment průřezu vzhledem k ose kolmé k rovině kmitání, R je poloměr křivosti. Dále k ní přísluší momentová rovnice rovnováhy. Zanedbává se rotační setrvačnost elementu.

$$Q = \frac{\partial M}{\partial x}. \quad (3.22)$$

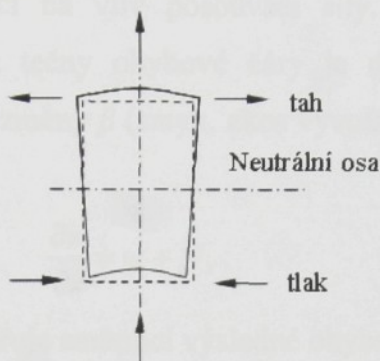
Po dosazení se získá konečný tvar pohybové rovnice

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\frac{E}{\rho} \frac{1}{A(x)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(I(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right). \quad (3.23)$$

Pro zjednodušený tvar platí $A(x) = konst.$, $I(x) = konst.$, včetně platnosti rychlosti podélných vln c_0 . Dále $k = \sqrt{I/A}$ je poloměr setrvačnosti průřezu nosníku k ose, která prochází těžištěm kolmo na rovinu pohybu

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -c_0^2 k^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}. \quad (3.24)$$

Oproti předchozímu zjednodušení je skutečný pohyb elementu tělesa dán posuvem kolmo na původní osu a ještě rotací kolem osy kolmé k rovině pohybu. Posouvací síly způsobí zvlnění rovinných řezů kolmo k ose a ovlivní průhyb. Dále je zanedbána kontrakce průřezu na **Obr. 3.4** vyvolaná tahovým a tlakovým napětím.



Obr. 3.4 Přetvoření průřezu ohýbaného nosníku [46]

Fázová rychlost vlny je funkcí délky vlny vyjádřené

$$\frac{c}{c_0} = pk = 2\pi \left(\frac{k}{\Lambda} \right), \quad (3.25)$$

kde c je rychlost vlny, k je poloměr setrvačnosti průřezu nosníku k ose, Λ je délka vlny. Podle tohoto mají kratší vlny větší rychlost než dlouhé vlny. Je to jev opačný než u podélných vln, kde je rychlost s vyšší frekvencí menší. Vztah (3.25) platí pro izotropní nosník.

Rayleigh provedl korekci na rotační setrvačnost prvků. Momentová rovnice se v tomto případě nahrazuje pohybovou rovnicí pro natáčení elementů

$$\rho I dx \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = Q dx - \frac{\partial M}{\partial x} dx. \quad (3.26)$$

Když je úhel tečny k průhybové čáře φ malý pak lze zapsat

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\partial w}{\partial x} \doteq \varphi, \quad (3.27)$$

a úhlové zrychlení

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2}. \quad (3.28)$$

Pohybová rovnice pro rotaci prvku je

$$\rho I \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} dx = Q dx - \frac{\partial M}{\partial x} dx. \quad (3.29)$$

Pak pro posouvací sílu platí

$$Q = -EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \rho I \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2}. \quad (3.30)$$

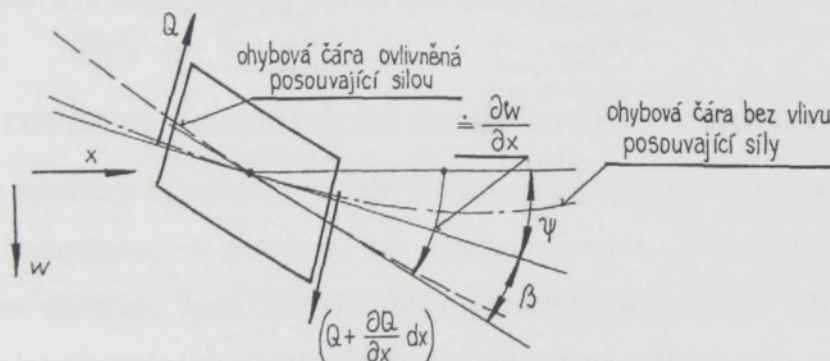
Získá se rovnice, kde poslední člen se smíšenou derivací vyjadřuje vliv natáčení prvků

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -c_0^2 k^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + k \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2}. \quad (3.31)$$

Timošenko zavedl korekci na vliv posouvací síly. Zanedbal zvlnění průřezu a předpokládal, že úhel sklonu tečny ohybové čáry je dán součtem úhlu natočení ψ (způsobený ohybem) a úhlové změny β (smyk, zkos vyvolaný posouvající silou). Výchozí je rovnice

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \psi + \beta, \quad (3.32)$$

kde podíl na pravé straně vyjadřuje směrnici výsledné ohybové křivky.



Obr. 3.5 Timošenkova korekce [71]

Pro ohybový moment platí

$$M = -EI \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (3.33)$$

kde podíl je křivostí příslušné ohybové čáry. Posouvající síla Q způsobí zkos elementu β

$$Q = \alpha AG \beta, \quad (3.34)$$

kde α je součinitel tvaru průřezu, který ovlivňuje rozložení smykového napětí v průřezu a nabývá hodnot kolem 0,8. Pohybová rovnice pro posuv elementu je

$$A\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} dx = \frac{\partial Q}{\partial x} dx. \quad (3.35)$$

Rovnice pro natáčení elementu nosníku zde je

$$\rho I \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} dx = Q dx - \frac{\partial M}{\partial x} dx. \quad (3.36)$$

Pomocí vztahu (3.32) lze rovnice upravit a získá se pro Q

$$Q = \alpha \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right) AG. \quad (3.37)$$

Pro nosníky konečné délky je vhodné vyjádřit dvě navzájem vázané rovnice vyloučením Q

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \alpha G \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right), \quad (3.38)$$

$$\rho I \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \alpha AG \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right) + EI \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}. \quad (3.39)$$

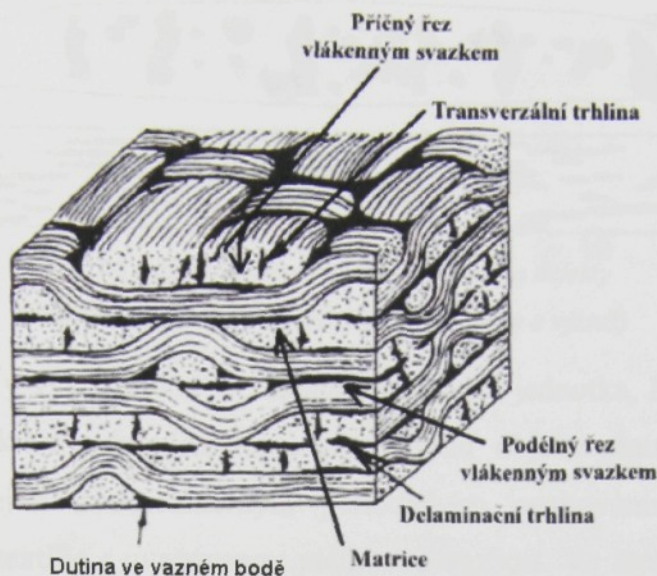
Další možností je nalezení pohybové rovnice pro průhyb $w(x,t)$. Pro další úpravy je třeba využít původní rovnici (3.20)

$$c_0^2 k^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - k^2 \left(1 + \frac{E}{G\alpha} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{1}{\alpha} \frac{k^2}{c_2^2} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} = 0, \quad (3.40)$$

kde c_2 je rychlost smykových vln v kontinuu $c_2^2 = G/\rho$ a platí $E/G = 2(1+\mu)$, μ je Poissonovo číslo. Pro štíhlé nosníky dávají tyto teorie dobré výsledky [45,46,71].

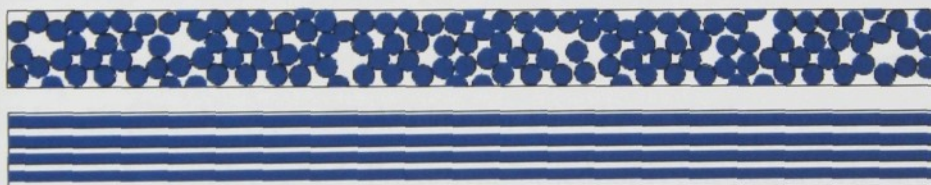
3.3 Víceúrovňové geometrické modelování struktury

Z modelu struktury kompozitu na **Obr. 3.6** je možné vyjít pro další úvahy o struktuře testovaného kompozitu. V simulaci se uvažuje pouze 2D, tedy čelní plocha prezentovaného obrázku. Jsou zde obsaženy všechny komponenty. Příčné a podélné svazky vláken jsou provázány v textilní vazbě a obklopeny matricí, příp. vzduchem dutin. Důležité je respektovat defekty ve svazcích, rozvrstvení lamin a dutin vzniklých vrstvením. Celková struktura kompozitu je tvořena geometrickými útvary.



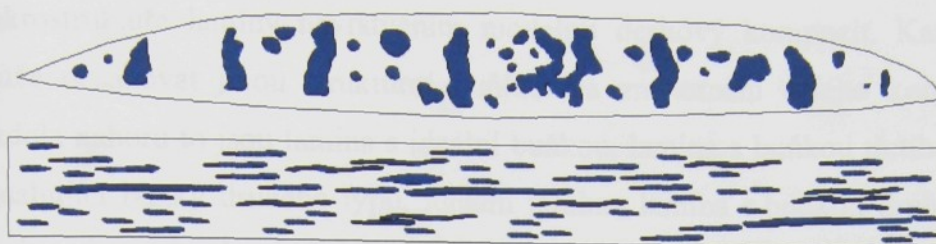
Obr. 3.6 Model prostorové struktury kompozitu s tkanou výztuží [23]

Mějme mikrostrukturu jako nejnižší uvažovanou úroveň, ve které jsou obsažena vlákna a matrice, tj. vlákněný svazek neboli kábel je ve výřezu na **Obr. 3.7**. Pro tuto nejjednodušší uvažovanou strukturu byla zvolena velikost testované oblasti taková, kde ještě není třeba uvažovat póry, nejedná se tedy o celý vlákněný svazek ale jen o jeho výřez. Vlastnosti ani struktura vláken a matrice se v průběhu testování nemění. Vlákněná jsou kruhová. Uspořádání vláken v matrici je náhodné a odpovídá zaplnění kolem 60% [23,64].



Obr. 3.7 Podélný a příčný řez částí svazku
(modrá – vlákna výztuže, bílá – matrice)

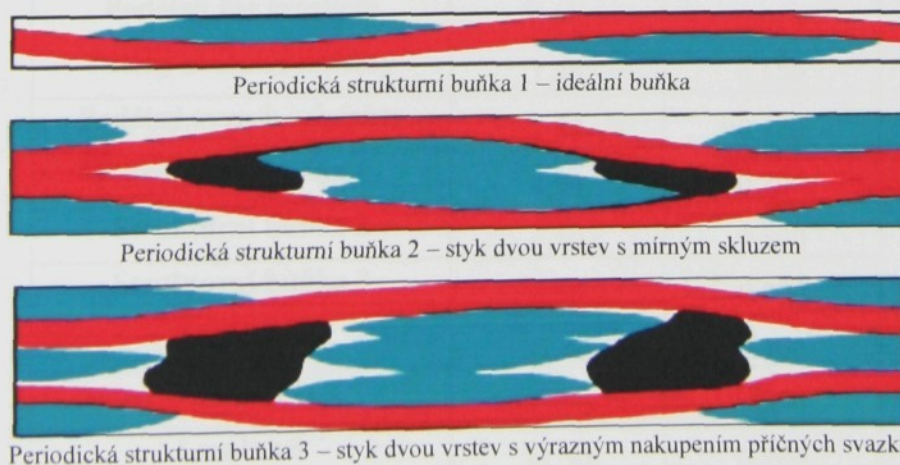
Během procesu výroby kompozitu se vytvoří ve struktuře svazku póry s nimiž je nutno počítat. Na **Obr. 3.8** je mesostrukturní úroveň celého vlákněného svazku s póry uvnitř struktury. Póry obsahují vzduch pokud se jedná o otevřené póry. Uzavřené póry obsahují pyrolitický plyn, např. CO_2 . Při výpočtech se nejprve zjistí vlastnosti materiálu bez pórů a poté se provede korekce na přítomnost pórů [23,64].



Obr. 3.8 Svazek zahrnující vlákna, matrici a defekty
(modrá – póry, bílá – uhlíkové složky matrice a výztuž)

Další hierarchicky vyšší úrovní je základní strukturní jednotka, Periodická strukturní buňka (Unit cell), která odpovídá reprezentativnímu objemovému elementu (RVE), zmíněném dříve. Jejím dvourozměrným periodickým opakováním vzniká struktura idealizované plošné textilie s uvažovanou plátňovou vazbou. Ve struktuře reálné textilie v kompozitu (jedné vrstvě, lamině) byly nalezeny tři typy jednotlivých buněk, které jsou znázorněny na Obr. 3.9. V ideálním případě jde o přísně periodickou buňku běžně používanou v literatuře. Při vrstvení a stlačování kompozitu dochází ke skluzu vrstev a jejich přemostění. Příklad skluzu vrstev zhruba do opačné fáze je u druhé strukturní buňky na Obr. 3.9. O opačné fázi svědčí to, že u dolního podélného svazku je minimum naproti maximumu a naopak. Při souhlasné fázi souhlasí maxima a minima u obou svazků. U třetí strukturní jednotky na Obr. 3.9 je mezi podélná vlákna vložena další vrstva příčných vláken. Další detaily lze nalézt v pracích [23,64].

Na nižší makroúrovni se vytváří idealizovaný model laminy, který sestává ze strukturních buněk jednoho typu. Příklad laminy s buňkami třetího typu je na Obr. 3.10. Ve skutečnosti byl však postup opačný. Pozorováním jednotlivých lamin bylo určeno několik zobecněných opakujících se elementů, z nichž pak byly vytvořeny tři typy strukturních buněk na Obr. 3.9.



Obr. 3.9 Periodické strukturní buňky 1,2,3 [23]

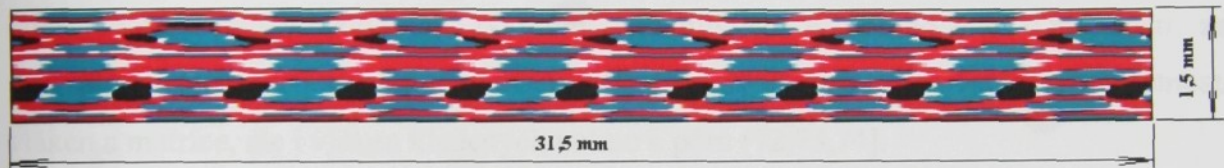
(modrá – příčné svazky výztuže, červená – podélné svazky výztuže, černá – dutiny, bílá – matrice)

V makrostruktuře laminy navrstvením modelují deskový kompozit. Každá lamina přitom může obsahovat jinou strukturní buňku. Na znázornění celého kompozitu na **Obr. 3.11** zdola nahoru to jsou lamina s ideální buňkou, lamina s buňkou třetího typu, dvě laminy obsahující buňky druhého typu, ideální lamina, lamina s buňkou druhého typu a ideální lamina. Rozměry lamin se volí tak, aby se nepřekrývaly a přitom zaplnily celý objem. Jejich počet je pak takový, aby byly rozměry vzorku pro výpočet kompatibilní s vzorky použitými pro experimentální měření. Pro vlastní výpočet to znamená, že lamina je složena z homogenních cihliček, reprezentujících vlastnosti zvolených strukturních buněk, a kompozit je složen z lamin poskládaných na sebe [23,64].



Obr. 3.10 Strukturní model laminy pro Strukturní buňku 3 [23]

(modrá – příčné svazky výztuže, červená – podélné svazky výztuže, černá – dutiny, bílá – matrice)



Obr. 3.11 Schéma kompozitní desky [23]

(modrá – příčné svazky výztuže, červená – podélné svazky výztuže, černá – dutiny, bílá – matrice)

V následující tabulce je přehled rozměrů všech definovaných strukturních modelů tak, jak byly použity pro simulaci vlastností.

Tab. 3.1 Rozměry strukturních elementů víceúrovňového modelu pro výpočet vlastností

	šířka [mm]	výška [mm]
Příčný řez svazkem	0,22	0,018
Podélný řez svazkem	0,22	0,018
Příčný svazek s defekty	1,80	0,180
Podélný svazek s defekty	1,80	0,180
Strukturní buňka 1	4,50	0,300
Strukturní buňka 2	4,50	0,500
Strukturní buňka 3	4,50	0,700
Lamina 1	31,50	0,300
Lamina 2	31,50	0,500
Lamina 3	31,50	0,700
Celá struktura kompozitu	31,50	1,500

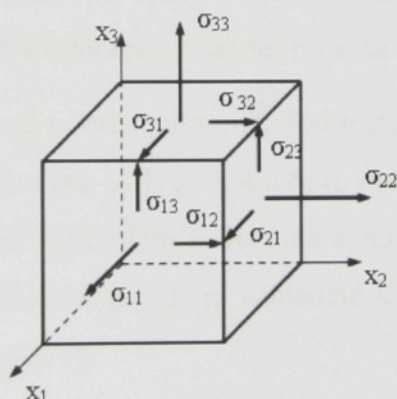
3.4 Definování vlastností struktury pomocí mechaniky kontinua

V mechanice kompozitních materiálů bývá zvykem nahradit daný nehomogenní materiál ekvivalentním homogenním materiálem, jehož chování lze popsat zobecněným Hookeovým zákonem, který spojuje tenzor napětí, viz **Obr. 3.12**, a tenzor deformace.

Obecně pro tenzory napětí σ_{ij} a deformace ε_{ij} kompozitu platí, že součet napětí nebo deformace jednotlivých komponent vztažený k příslušnému objemovému podílu je roven celkovému napětí či deformaci podle

$$\begin{aligned} [\sigma_{ij}] &= \sum_n V_n [\sigma_{ij}^n] \\ [\varepsilon_{ij}] &= \sum_n V_n [\varepsilon_{ij}^n] \end{aligned} \quad (3.41)$$

kde V_n odpovídá objemovým podílům jednotlivých n komponent v závislosti na příslušných tensorech napětí a deformace¹¹. Je tedy možné uvažovat nejen vlastnosti vláken a matrice, ale i vláken kladených kolmo a pórů [72,73,74].



Obr. 3.12 Napjatost v bodě (pro přehlednost nejsou uvedeny reakce) [72]

Při aplikaci vztahů (3.41) je však nutno být obezřetný. Nelze je totiž použít současně. První vztah v (3.41) předpokládá paralelní spojení komponent podle **Obr. 2.12**, což je případ stejné deformace iso-strain. Je ideální pro aplikaci na laminy v modelu kompozitu. Druhý vztah v (3.41) je pro případ sériového spojení komponent podle **Obr. 2.13**, kdy se předpokládá stejné napětí iso-stress. V prvním přiblížení by se dal např. aplikovat na laminu složenou se strukturních buněk.

¹¹ Vztahy (3.41) jsou pouze pro jednu složku tenzoru deformace a napětí.

Tenzory napětí σ_{ij} a deformace ε_{kl} spolu souvisí prostřednictvím zobecněného Hookeova zákona¹².

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (3.42)$$

kde c_{ijkl} je tenzor tuhosti a jeho složky popisují odezvu ve formě napětí na zadanou deformaci. Dále lze Hookeův zákon psát s tenzorem poddajnosti, který je inverzní k tenzoru tuhosti. Jeho složky umožní určit deformaci jako odezvu na působící napětí. Oba tenzory jsou čtvrtého řádu, obsahují $3^4 = 81$ složek, z nichž může být nezávislých maximálně 21. Z toho důvodu se obvykle používá zápisu složek tenzoru tuhosti a poddajnosti ve formě matice 6x6, složky mají tedy dva indexy rozmezí 1 až 6. V nejobecnějším případě jsou nezávislé složky na hlavní diagonále a nad ní [77].

Zobecněný Hookeův zákon popisuje elastické vlastnosti anizotropního prostředí, ke kterému vlákenné svazky, plošné textilie, laminy i kompozit nepochybně patří. Anizotropní prostředí se pokládá za krystal. Základní vlastností krystalu je to, že existují určité geometrické transformace, při nichž krystal přejde do polohy nerozlišitelné od původní. Tyto transformace se nazývají operace symetrie. Pro jednoduchý popis symetrie struktury kompozitu postačují dvě operace symetrie: n -četná osa a rovina symetrie [77].

Operace n -četná osa znamená pootočení o úhel $360/n$ stupňů. Do polohy nerozlišitelné od původní může krystal přejít jen pro $n=1, 2, 3, 4$ a 6 , tj. pro pootočení o $360^\circ, 180^\circ, 120^\circ, 90^\circ$ a 60° . Osa symetrie se značí symbolem n . Rovina symetrie označovaná symbolem m představuje operaci symetrie, při které zrcadlení vzhledem k této rovině převede krystal do polohy nerozlišitelné od původní [77].

Každý krystal má určité prvky symetrie, které jsou vzhledem k souřadné soustavě, odvozené z jeho struktury, pevně definovány, navzájem mohou být rovnoběžné, kolmé, svírat určitý úhel apod. Tyto kombinace prvků symetrie tvoří bodovou grupu. Lze ukázat, že mohou existovat jen určité kombinace prvků symetrie, které vedou na 32 bodových grup. Každá z bodových grup patří do jedné ze 7 krystalografických soustav. Pro každou bodovou grupu lze z operací symetrie odvodit, které elastické moduly budou nulové, či budou kombinací nezávislých modulů [77].

¹² Pro zjednodušení se v zápisu Hookeova zákona používá Einsteinova sumačního pravidla: Přes dvakrát se opakující index se sčítá od 1 do 3. V tomto případě jsou sčítacími indexy k a l .

Poněvadž prvky struktury kompozitu tvoří krystal a přísluší jim určité prvky symetrie, patří do určité bodové grupy a krystalové soustavy. Dále je popíšeme v pořadí klesající symetrie.

Předpokládá se, že materiál matrice je homogenní a izotropní se strukturou blízkou skelnému uhlíku [12]. Elastické konstanty se nemění vzhledem k otočení kolem kterékoli osy [72,75]. Materiál lze popsat pomocí matice poddajnosti či tuhosti, která má 2 nezávislé složky, třetí složka je na nich závislá [76,77]. Matice tuhosti je podle [6]

$$c = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}) \end{bmatrix}. \quad (3.43)$$

Vzduchové póry jsou oblasti, kde je hustota materiálu minimálně o tři řády nižší. Mechanické vlastnosti plynu lze popsat jediným parametrem, stlačitelností. S ohledem na zanedbatelný vliv pórů na výsledné elastické vlastnosti, díky nízké hustotě, je však budeme považovat za prázdný prostor, vakuum, stejně jako prostředí obklopující kompozit.

Vláknenné svazky považujeme za homogenní a příčně (transverzálně) izotropní [12]. Příčně izotropní těleso má v jedné rovině (rovina izotropie) vlastnosti stejné ve všech směrech. V našem případě je to rovina kolmá na osu vláknenného svazku. Při transformaci souřadné soustavy kolem osy kolmé k rovině izotropie o libovolný úhel se elastické parametry nemění [75]. Příčně izotropní těleso se řadí do šesterečné (hexagonální) krystalografické soustavy¹³. Elastické vlastnosti materiálu se popisují pomocí matice tuhosti c obsahující 9 koeficientů, z toho 5 nezávislých [76,77].

¹³ Bodová grupa symetrie pro příčnou izotropii všech materiálůvých vlastností je $6mm$. Prvky symetrie jsou šestičetná osa a s ní rovnoběžné dvě soustavy rovin symetrie. Jednotlivé roviny symetrie svírají úhel 30° . Pro transversální izotropii elastických vlastností však postačuje šestičetná osa.

$$c = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(c_{22} - c_{23}) \end{bmatrix}. \quad (3.44)$$

Symetrie ideálního kompozitu složeného z ideálních textilních lamin je určena především rovinnou symetrií lamin, která je naopak dána typem textilní vazby. Pro plátňovou vazbu a její odvozeniny je dominantní čtyřčetná osa symetrie, pro ostatní vazby (např. atlas) to je dvoučetná osa symetrie nebo rovina symetrie. Všechny tyto prvky jsou kolmé k rovině textile či laminy. Ideální kompozit s plátňovou vazbou bude spadat do čtverečné krystalové soustavy s bodovou grupou 422. Obsahuje čtyřčetnou osu kolmou k rovině tkaniny a dvě navzájem kolmé dvoučetné osy v rovině tkaniny. Matice elastických modulů pak bude mít tvar

$$c = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix}. \quad (3.45)$$

Nezávislých složek je tedy 6, o jednu více než u šesterečné soustavy [76,77].

Ve starší literatuře zabývající se vláknovými kompozity se zdůrazňuje, že kompozit tohoto typu je ortotropním materiálem. V obecné literatuře je podávána definice, kde je ortotropní materiál definován jako takový, který má ve třech navzájem kolmých směrech rozdílné elastické vlastnosti. Pak by byl ortotropním materiálem každý materiál se strukturou, která není isotropní ani nepatří do krychlové, šesterečné či čtverečné soustavy. Omezíme se však na užší definici, že ortotropní materiál patří do kosočtverečné soustavy, má tedy tři navzájem kolmé dvoučetné osy. To platí bez výjimky pro zmíněné vláknové kompozity. Tkaninový kompozit je však ortotropní pouze pokud je osnova a útek z jiných materiálů, nebo je použita atlasová vazba, tedy méně běžné případy. V praktických případech je symetrie vyšší a proto by se s termínem ortotropie u tkaninových kompozitů mělo zacházet opatrně [6,77].

V obecném případě má lamina a tedy i výsledný kompozit tři navzájem kolmé osy symetrie druhého řádu (či roviny symetrie). Může to být materiál s bodovou grupou 222 patřící do kosočtverečné soustavy. Bodová grupa má tři navzájem kolmé dvoučetné osy. Je to tedy ortotropní materiál. Nezávislých modulů je pak 9, jak plyne z teorie [77]. Hookeův zákon s elastickými moduly lze pak zapsat v maticovém tvaru takto

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix}, \quad (3.46)$$

S maticí poddajností má pak Hookeův zákon tvar

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} & 0 & 0 & 0 \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix}. \quad (3.47)$$

V těchto rovnicích můžeme tuhosti či poddajnosti nahradit známějšími parametry jako jsou Youngův modul E , modul ve smyku G a Poissonovo číslo μ [76,80]. Směry popíšeme indexy L pro směr osnovy (longitudinální, podélný), T pro směr útku (transverzální, příčný) a N pro směr kolmý k rovině textilie (normálový) [6,80].

Pokud je uvažováno tahové namáhání materiálu pouze ve směru osnovy (tedy osy X_1), jsou všechna napětí nulová kromě napětí ve směru osnovy, tj. $[\sigma] = (\sigma_1, 0, 0, 0, 0, 0)^T$. Symbolem T je označena transponovaná matice. Pro poddajnost platí po dosazení do (3.47) vztahy

$$\varepsilon_1 = s_{11}\sigma_1, \quad \varepsilon_2 = s_{12}\sigma_1, \quad \varepsilon_3 = s_{13}\sigma_1, \quad \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \varepsilon_6 = 0. \quad (3.48)$$

Podle definice lze z této soustavy rovnic odvodit vztahy pro Youngův modul a Poissonovo číslo ve směru osnovy

$$E_L = E_1 = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1} = \frac{1}{s_{11}}, \quad \mu_{LT} = \mu_{12} = -\frac{s_{12}}{s_{11}}, \quad \mu_{LN} = \mu_{13} = -\frac{s_{13}}{s_{11}}. \quad (3.49)$$

Pokud je zatížení kompozitu pouze ve směru útku (osy X_2), pak je nenulová pouze hodnota napětí σ_2 v tomto směru, tj. $[\sigma] = (0, \sigma_2, 0, 0, 0, 0)^T$. Analogickým postupem jako dříve dostaneme tyto vztahy

$$E_T = E_2 = \frac{1}{s_{22}}, \quad \mu_{TL} = \mu_{21} = -\frac{s_{12}}{s_{22}}, \quad \mu_{TN} = \mu_{23} = -\frac{s_{23}}{s_{22}}. \quad (3.50)$$

Pro tahový test vedený v kolmém směru na ortotropní vrstvu (směr kolmo k rovině výztuže přes vrstvy lamin) $[\sigma] = (0, 0, \sigma_3, 0, 0, 0)^T$ platí

$$E_N = E_3 = \frac{1}{s_{33}}, \quad \mu_{NL} = \mu_{31} = -\frac{s_{13}}{s_{33}}, \quad \mu_{NT} = \mu_{32} = -\frac{s_{23}}{s_{33}}. \quad (3.51)$$

Mezi moduly a Poissonovými čísly platí následující vztahy

$$\frac{E_L}{\mu_{LT}} = \frac{E_T}{\mu_{TL}}, \quad \frac{E_L}{\mu_{LN}} = \frac{E_T}{\mu_{NL}}, \quad \frac{E_T}{\mu_{TN}} = \frac{E_N}{\mu_{NT}}. \quad (3.52)$$

Smykový test, např. $[\sigma] = (0, 0, 0, \sigma_4, 0, 0)^T$ a další smykové namáhání, určí smykové složky matice poddajnosti

$$G_{12} = G_{LT} = \frac{1}{s_{66}}, \quad G_{13} = G_{LN} = \frac{1}{s_{55}}, \quad G_{23} = G_{TT'} = \frac{1}{s_{44}}. \quad (3.53)$$

Výsledná matice poddajnosti je pak pomocí těchto vztahů zapsána takto

$$s = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\mu_{12}}{E_1} & -\frac{\mu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\mu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu_{13}}{E_1} & -\frac{\mu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix}, \quad (3.54)$$

takže je definováno 9 nezávislých konstant (3 Youngovy moduly v tahu, 3 smykové moduly, 3 Poissonova čísla) ve směrech os symetrie materiálu [77,80].

Pokud bude uvažováno namáhání jiné než v osách symetrie, tedy v určitém úhlu k osám symetrie (osnově a útku vyztužující tkaniny, ale stále v rovině laminy), musí se elastické parametry přetransformovat. Nová souřadná soustava bude potočena kolem osy X_3 o úhel δ . Z rovnic pro transformaci tenzorů lze odvodit tyto vztahy pro prvky matice poddajnosti s' v nové soustavě [6,80]

$$\begin{aligned}
s'_{11} &= s_{11} \cos^4 \delta + s_{22} \sin^4 \delta + 2(s_{12} + 2s_{66}) \sin^2 \delta \cos^2 \delta, \\
s'_{12} &= (s_{11} + s_{22} - s_{66}) \sin^2 \delta \cos^2 \delta + s_{12} (\sin^4 \delta + \cos^4 \delta), \\
s'_{13} &= s_{13} \cos^2 \delta + s_{23} \sin^2 \delta, \quad s'_{14} = 0, \quad s'_{15} = 0, \\
s'_{16} &= (2(s_{11} - s_{12}) - s_{66}) \sin \delta \cos^3 \delta + (2(s_{12} - s_{22}) + s_{66}) \sin^3 \delta \cos \delta, \\
s'_{22} &= s_{11} \sin^4 \delta + s_{22} \cos^4 \delta + (2s_{12} + s_{66}) \sin^2 \delta \cos^2 \delta, \\
s'_{23} &= s_{13} \sin^2 \delta + s_{23} \cos^2 \delta, \quad s'_{24} = 0, \quad s'_{25} = 0, \\
s'_{26} &= (2(s_{11} - s_{12}) - s_{66}) \sin^3 \delta \cos \delta + (2(s_{12} - s_{22}) + s_{66}) \sin \delta \cos^3 \delta, \\
s'_{33} &= s_{33}, \quad s'_{34} = 0, \quad s'_{35} = 0, \quad s'_{36} = 2(s_{13} - s_{23}) \sin \delta \cos \delta, \\
s'_{44} &= s_{44} \cos^2 \delta + s_{55} \sin^2 \delta, \quad s'_{45} = (s_{55} - s_{44}) \sin \delta \cos \delta, \\
s'_{55} &= s_{44} \sin^2 \delta + s_{55} \cos^2 \delta, \quad s'_{46} = 0, \quad s'_{56} = 0, \\
s'_{66} &= 2[2(s_{11} + s_{22} - 2s_{12}) + s_{66}] \sin^2 \delta \cos^2 \delta + s_{66} (\sin^4 \delta + \cos^4 \delta).
\end{aligned} \tag{3.55}$$

Matice elastických poddajností má pro potočenou souřadnou soustavu tvar

$$s' = \begin{bmatrix} s'_{11} & s'_{12} & s'_{13} & 0 & 0 & s'_{16} \\ s'_{12} & s'_{22} & s'_{23} & 0 & 0 & s'_{26} \\ s'_{13} & s'_{23} & s'_{33} & 0 & 0 & s'_{36} \\ 0 & 0 & 0 & s'_{44} & s'_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s'_{45} & s'_{55} & 0 \\ s'_{16} & s'_{26} & s'_{36} & 0 & 0 & s'_{66} \end{bmatrix}. \tag{3.56}$$

Náleží do jednoklonné soustavy, kde je jediným prvkem symetrie dvoučetná osa totožná s osou X_3 souřadné soustavy.

Podélný Youngův modul lze vyjádřit z předešlých rovnic jako test tahové zkoušky v ose X'_1 nové souřadné soustavy

$$\frac{1}{E'_x} = s_{11} \cos^4 \delta + s_{22} \sin^4 \delta + (2s_{12} + s_{66}) \cos^2 \delta \sin^2 \delta. \tag{3.57}$$

Pomocí vztahů (3.49) až (3.53) nahradíme složky poddajnosti Youngovými moduly, moduly ve smyku a Poissonovými čísly

$$E_L = \frac{1}{s_{11}}, \quad \mu_{LT} = -\frac{s_{12}}{s_{11}}, \quad E_T = \frac{1}{s_{22}}, \quad G_{LT} = \frac{1}{s_{66}}. \tag{3.58}$$

Po dosazení z (3.58) do (3.57) vyjádříme Youngův modul pro osu X'_1 nové souřadné soustavy pomocí podélných, příčných a smykových modulů a Poissonova čísla

$$\frac{1}{E'_x} = \frac{1}{E_L} \cos^4 \delta + \frac{1}{E_T} \sin^4 \delta + \left(\frac{1}{G_{LT}} - \frac{2\mu_{LT}}{E_L} \right) \cos^2 \delta \sin^2 \delta. \tag{3.59}$$

Pro smykový modul ve směru roviny výztuže v nové souřadné soustavě se pro podobné odvození použije vztah

$$G'_{xy} = \frac{1}{s'_{66}}. \quad (3.60)$$

Pak je výpočtová rovnice

$$\frac{1}{G'_{xy}} = 2 \left(\frac{2}{E_L} + \frac{2}{E_T} - \frac{1}{G_{LT}} + \frac{4\mu_{LT}}{E_L} \right) \cos^2 \delta \sin^2 \delta + \frac{1}{G_{LT}} (\sin^4 \delta + \cos^4 \delta). \quad (3.61)$$

Tím jsou definovány vztahy, které jsou v další kapitole použity pro srovnání experimentu a simulace v působení různými směry [6].

Vztah (3.59) pro podélný Youngův modul lze použít pro statické určení všech elastických parametrů tahovou zkouškou. Zvolí se vějíř výřezů vzorku pod různými úhly δ vzhledem k osnově. Pro každý z nich se experimentálně změří podélný Youngův modul. Po dosazení hodnot úhlu δ do pravé strany vztahu (3.59) a odpovídajících naměřených hodnot do strany levé se získá soustava lineárních rovnic pro elastické parametry E_L , E_T , a kombinace G_{LT} a μ_{LT} . Stačí vějíř složený ze tří výřezů. Obvykle se volí výřezů více a přeuročená soustava lineárních rovnic se zpracuje statisticky s cílem zmenšení experimentálních chyb.

3.5 Popis metody rezonančních frekvencí

Aplikace metody rezonančních frekvencí byla aplikována v Ústavu struktury a mechaniky hornin (ÚSMH) AV ČR v Praze [78]. Na jejím základě lze z rezonančního spektra frekvencí podélných mechanických kmitů ortotropního deskového pásu určit podélný modul v tahu a Poissonovo číslo. Z rezonančního spektra příčných kmitů je potom možno získat smykový modul. Výhodou této metody je přesnost výsledků. Experiment je pro poučenou obsluhu poměrně snadný a rychlý. Metoda je to zcela nedestruktivní [22,78].

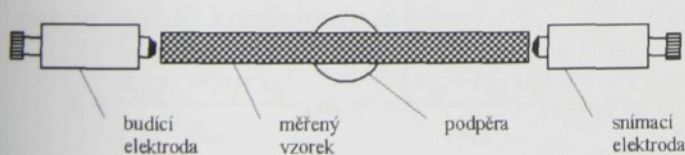
Měření vzorků se v ÚSMH provádí na přístroji Erudite (snímač rezonančních frekvencí) CNS Electronics Ltd., London, UK [79]. Obecné principiální schéma aparatury je na **Obr. 3.13** a **Obr. 3.14**.

Na budicí elektrodu je přivedeno střídavé napětí. Napětí má harmonický průběh s amplitudou 400 V o budicí frekvenci 10 Hz až 100 kHz. Na uzemněný elektricky vodivý vzorek působí elektrostatická síla, která je vyvolaná elektrickým polem mezi budicí elektrodou a uzemněným vzorkem. Elektrostatická síla potom budí ve vzorku mechanické kmity. Na snímací straně se v důsledku kmitů vzorku mění periodicky poloha koncové strany vzorku vůči snímací elektrodě. Mění se tedy periodicky kapacita mezi elektrodou a vzorkem. Elektrodynamické poměry jsou obdobné jako na kondenzátoru s proměnnou

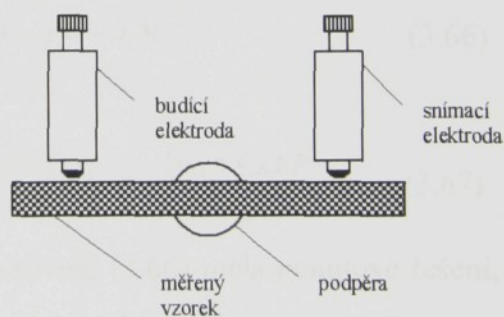
kapacitou. Při konstantním napětí na snímací elektrodě vzorkem (a výstupním obvodem) protéká harmonický elektrický proud o budící frekvenci. Lze tedy pomocí výstupního napětí snímat amplitudu buzených elastických kmitů (přesněji stojatých vln) ve vzorku [44,78].

Při měření se postupně mění budící frekvence. Při konstantním buzení se zjišťuje výstupní napětí, které je úměrné amplitudě kmitů. Závislost výstupního napětí na frekvenci nazýváme spektrum. Při určitých frekvencích dosahuje amplituda maxima, nazýváme je rezonanční frekvence. Jsou určeny elastickými vlastnostmi materiálu, geometrickými rozměry vzorku a okrajovými podmínkami. Z *Obr. 3.13* a *Obr. 3.14* je zřejmé, že při testování byla použita podpora vzorku v jeho středu, což upřesňuje, ale i komplikuje, mechanické okrajové podmínky.

Z rezonančních frekvencí lze určit elastické parametry vzorku. Pro měření je důležité, aby byl buzen jen jeden typ kmitů, čehož se snadno dosáhne pokud se vlna šíří ve směru osy nebo útku tkaniny. Pokud je měřený vzorek vyříznut tak, že osa šíření vln je pod jiným úhlem než 0° či 90° vzhledem k ose, je obtížné získat jednoduché a snadno vyhodnotitelné rezonanční spektrum a jedná se pak teoreticky o komplikovanější problém obecného podélného a příčného kmitání. Při dodržení této podmínky je tedy při vhodném buzení a ustavení vzorku možné získat spektrum buď podélných nebo příčných kmitů [44,78].



Obr. 3.13 Schéma měření (půdorys) rezonančních frekvencí podélných kmitů přístrojem RFT Erudite [44]



Obr. 3.14 Schéma měření rezonančních frekvencí příčných kmitů přístrojem RFT Erudite [44]

Dále jsou odvozeny vztahy pro šíření podélné a příčné vlny vycházející z obecného tvaru pohybových rovnic pro rovinnou napjatost v [44]

$$\rho \ddot{u} = c_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c_{12} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + c_{66} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (3.62)$$

$$\rho \ddot{v} = c_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + c_{66} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right), \quad (3.63)$$

kde u je posuv ve směru osy x , v je posuv ve směru osy y . Uvažujeme rovinné isotropní prostředí, takže za prvky matice tuhosti c_{ij} se dosazuje

$$c_{11} = \frac{E}{1-\mu^2}, \quad c_{12} = \frac{\mu E}{1-\mu^2}, \quad c_{22} = \frac{E}{1-\mu^2}, \quad c_{66} = \frac{E}{2(1+\mu)} = G_{xy}. \quad (3.64)$$

kde E je Youngův modul pružnosti, μ je Poissonovo číslo a G je modul pružnosti ve smyku. Řešení pohybových rovnic (3.62) a (3.63) pro posuv u a posuv v hledáme ve zjednodušeném tvaru

$$u = U(y) e^{ip(x+c_0 t)}, \quad v = V(y) e^{ip(x+c_0 t)}, \quad (3.65)$$

Předpokládáme, že průběh každé z výchylek je pouze funkcí příčné souřadnice y . Ve směru osy x se mění harmonicky. Ve hledaném řešení (3.65) je $U(y)$ funkce popisující průběh amplitudy ve směru kolmém k šíření pro složku posunutí ve směru osy x , $V(y)$ má stejný význam pro složku posunutí ve směru osy y , i je imaginární jednotka, p je vlnové číslo, c_0 je fázová rychlost vlny a t čas. Řešení (3.65) představuje harmonickou vlnu ve směru šíření. Předpokládáme je v komplexním tvaru, poněvadž se tím zjednoduší některé operace, zejména derivování. Fyzikální význam má však pouze jeho reálná nebo imaginární složka. Dosazením do rovnic (3.62) a (3.63) se získá soustava dvou obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu. Podle [44] se soustava převede na čtyři obyčejné diferenciální rovnice prvního řádu

$$U' = N, \quad V' = O, \quad N' = a_1 U + a_2 O, \quad O' = a_3 V + a_4 N, \quad (3.66)$$

pak se vyjádří koeficienty a_i jako

$$a_1 = \frac{c_{11} p^2 - \rho p^2 c_0^2}{c_{66}}, \quad a_2 = -\frac{(c_{12} + c_{66}) ip}{c_{66}}, \quad a_3 = \frac{c_{66} p^2 - \rho p^2 c_0^2}{c_{22}}, \quad a_4 = -\frac{(c_{12} + c_{66}) ip}{c_{22}}, \quad (3.67)$$

kde ρ je hustota materiálu¹⁴. Aby soustava lineárních rovnic (3.66) měla nenulové řešení, musí být determinantu charakteristické rovnice soustavy nulový, tj.

$$\begin{vmatrix} -\Lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\Lambda & 0 & 1 \\ a_1 & 0 & -\Lambda & a_2 \\ 0 & a_3 & a_4 & -\Lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (3.68)$$

Tento determinant vede na algebraickou rovnici čtvrtého řádu

¹⁴Koeficienty a_2 a a_4 jsou ryze imaginární. To je důsledek předpokládaného komplexního řešení. V dalších vztazích, např. (3.69), se však vyskytuje pouze jejich součin, který vede na reálné číslo. Nedochází tedy k nepřipustným fyzikálním hodnotám.

$$-\Lambda^4 + (a_1 + a_3 + a_2 \cdot a_4) \cdot \Lambda^2 - a_3 \cdot a_2 = 0 \quad (3.69)$$

jehož řešením jsou dvě vlastní čísla

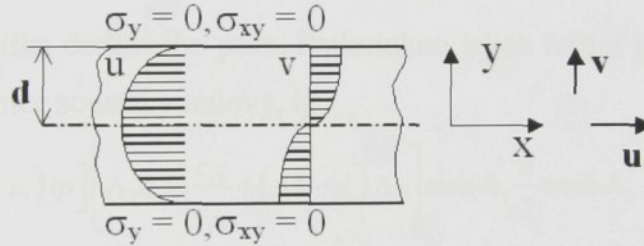
$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \pm \sqrt{\frac{a_1 + a_3 + a_2 a_4}{2} + \sqrt{\left(\frac{a_1 + a_3 + a_2 a_4}{2}\right)^2 + a_3 a_1}}, \\ \Lambda_2 &= \pm \sqrt{\frac{a_1 + a_3 + a_2 a_4}{2} - \sqrt{\left(\frac{a_1 + a_3 + a_2 a_4}{2}\right)^2 + a_3 a_1}}. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Obecné řešení pro posuvy u a v v soustavě tvořené osami x a y je

$$\begin{aligned} u &= [C_1 \Lambda_1 a_2 e^{\Lambda_1 y} - C_2 \Lambda_1 a_2 e^{\Lambda_1 y} + C_3 \Lambda_1 a_2 e^{\Lambda_2 y} - C_4 \Lambda_1 a_2 e^{\Lambda_2 y}] e^{ip(x-c_0 t)}, \\ v &= [C_1 (\Lambda_1^2 - a_1) e^{\Lambda_1 y} - C_2 (\Lambda_1^2 - a_1) e^{\Lambda_1 y} + C_3 (\Lambda_2^2 - a_1) e^{\Lambda_2 y} - C_4 (\Lambda_2^2 - a_1) e^{\Lambda_2 y}] e^{ip(x-c_0 t)}, \end{aligned} \quad (3.71)$$

kde C jsou konstanty, které je třeba určit z okrajových podmínek.

Okrajové podmínky se odvozují za zjednodušení podle **Obr. 3.15**. Z charakteru podélného vlnění a na základě symetrie materiálových a geometrických vlastností podle osy x se předpokládá, že posuv u je podle osy x symetrický a posuv v antisymetrický [44,78].



Obr. 3.15 Symetrie posuvů při podélném kmitání v tenkém neomezeně dlouhém deskovém pásu [44]

Za tohoto předpokladu lze přejít k hyperbolickým funkcím. Pro $y=0$ dostaneme podmínku $(C_1 = -C_2) \rightarrow K$ a $(C_3 = -C_4) \rightarrow L$ pro konstanty v (3.71)

$$\begin{aligned} u &= [K \Lambda_1 a_2 \cosh \Lambda_1 y + L \Lambda_2 a_2 \cosh \Lambda_2 y] e^{ip(x-c_0 t)}, \\ v &= [K (\Lambda_1^2 - a_1) \sinh \Lambda_1 y + L (\Lambda_2^2 - a_1) \sinh \Lambda_2 y] e^{ip(x-c_0 t)}, \end{aligned} \quad (3.72)$$

Symetrie a anisymetrie podle osy x je zachována.

Okrajové podmínky jsou dvě, viz **Obr. 3.15**, nulové napětí na dolní a horní straně vrstvy. Pro horní stranu vrstvy, pro $y=d$, požadujeme, aby

$$\sigma_y = 0, \sigma_{xy} = 0. \quad (3.73)$$

Při jejich aplikaci z Hookeova zákona

$$\begin{aligned} \sigma_y &= \sigma_{22} = c_{2211} \epsilon_{11} + c_{2212} \epsilon_{12} + c_{2221} \epsilon_{21} + c_{2222} \epsilon_{22}, \\ \sigma_{xy} &= \sigma_{12} = \sigma_{21} = c_{1211} \epsilon_{11} + c_{1212} \epsilon_{12} + c_{1221} \epsilon_{21} + c_{1222} \epsilon_{22}, \end{aligned} \quad (3.74)$$

přičemž pro deformace platí

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= \frac{\partial u(x)}{\partial x}, \\
\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u(x)}{\partial y} + \frac{\partial u(y)}{\partial x} \right), \\
\varepsilon_{22} &= \frac{\partial v(y)}{\partial y}.
\end{aligned} \tag{3.75}$$

Podmínka nulových napětí po dosazení do Hookeova zákona (3.74) a použití definice deformace (3.75) vede na Neumannovy okrajové podmínky

$$\sigma_{xy} = 0 = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \sigma_y = 0 = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{C_{12}}{C_{22}} \frac{\partial u}{\partial x}, \tag{3.76}$$

Pro okrajové podmínky pro dolní stranu vrstvy na **Obr. 3.15** pro $y=-d$ jsou závěry stejné.

Po dosazení řešení (3.72) do okrajových podmínek (3.76) dostaneme soustavu dvou homogenních rovnic

$$\begin{aligned}
K \left[\Lambda_1^2 a_2 - (\Lambda_1^2 - a_1) i p \right] \sinh \Lambda_1 \frac{d}{2} + L \left[\Lambda_2^2 a_2 + (\Lambda_2^2 - a_1) i p \right] \sinh \Lambda_2 \frac{d}{2} &= 0, \\
K \left[\Lambda_1 a_2 i p \frac{c_{12}}{c_{22}} + (\Lambda_1^2 - a_1) \Lambda_1 \right] \cosh \Lambda_1 \frac{d}{2} + L \left[\Lambda_2 a_2 i p \frac{c_{12}}{c_{22}} + (\Lambda_2^2 - a_1) \Lambda_2 \right] \cosh \Lambda_2 \frac{d}{2} &= 0
\end{aligned} \tag{3.77}$$

kde d je poloviční šířka deskového pásu. Podmínkou jejich řešení je, aby byl determinant charakteristické rovnice soustavy nulový, tj.

$$\begin{aligned}
&\left[\Lambda_1^2 a_2 - (\Lambda_1^2 - a_1) i p \right] \left[\Lambda_2 a_2 i p \frac{c_{12}}{c_{22}} + (\Lambda_2^2 - a_1) \Lambda_2 \right] \sinh \Lambda_1 \frac{d}{2} \cosh \Lambda_2 \frac{d}{2} - \\
&- \left[\Lambda_2^2 a_2 + (\Lambda_2^2 - a_1) i p \right] \left[\Lambda_1 a_2 i p \frac{c_{12}}{c_{22}} + (\Lambda_1^2 - a_1) \Lambda_1 \right] \sinh \Lambda_2 \frac{d}{2} \cosh \Lambda_1 \frac{d}{2} = 0
\end{aligned} \tag{3.78}$$

Vlastní čísla Λ_1 a Λ_2 určená vztahy (3.70) musí vyhovovat rovnici (3.78). Při dané frekvenci toho lze dosáhnout jen pro určitá vlnová čísla, kterým odpovídají určité vlnové délky. Jejich hodnoty však nelze určit analyticky, musí se použít numerické metody, které naznačíme pro vlnová čísla.

Při dané frekvenci se pro zvolené vlnové číslo vypočtou vlastní čísla Λ_1 a Λ_2 ze vztahů (3.70) a pro ně se přesvědčíme, zda je determinant (3.78) nulový. Obvykle tomu tak není, proto je nutno volit jiné blízké vlnové číslo a opět zjistit hodnotu determinantu okrajových podmínek. V porovnání s předchozí hodnotou se pak volí další vhodné vlnové číslo. Strategii je celá řada a jsou v každé příručce numerických metod. Hledání končí dosažením minima determinantu, poněvadž nulové hodnoty nelze dosáhnout s ohledem na zaokrouhlovací chyby. Z podmínky minima známe vlnové číslo a vlastní čísla Λ_1 a Λ_2 . Z vlnového čísla a frekvence určíme fázovou rychlost a z ní elastické parametry.

Z vlastních čísel zjistíme řešením rovnic (3.77) konstanty a z nich pak průběhy posunutí (3.72) ve směry kolmém ke směru šíření [78].

Závislost fázové rychlosti na vlnovém čísle představuje disperzi podélných vln ve vyšetřovaném tenkém pásu. Získá se pouze naznačenou numerickou metodou.

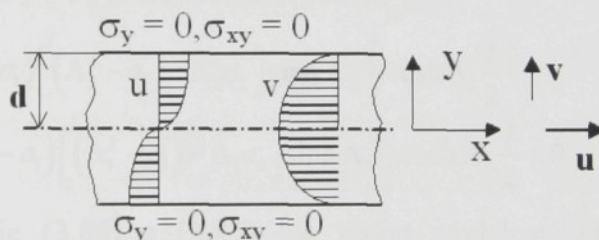
Dalším případem je podélná vlna, pro níž platí opačné tvrzení: posuv u je podle osy x antisymetrický a posuv v symetrický, viz **Obr. 3.16**, [44]. Pak pro posunutí získáme rovnice ve tvaru

$$\begin{aligned} u &= [K\Lambda_1 a_2 \sinh \Lambda_1 y + L\Lambda_2 a_2 \sinh \Lambda_2 y] e^{ip(x-c_0 t)}, \\ v &= [K(\Lambda_1^2 - a_1) \cosh \Lambda_1 y + L(\Lambda_2^2 - a_1) \cosh \Lambda_2 y] e^{ip(x-c_0 t)}. \end{aligned} \quad (3.79)$$

Z okrajových podmínek pro nulová napětí získáme determinant okrajových podmínek ve tvaru [44]

$$\begin{aligned} &[\Lambda_1^2 a_2 - (\Lambda_1^2 - a_1)ip] \left[\Lambda_2 a_2 ip \frac{c_{12}}{c_{22}} + (\Lambda_2^2 - a_1)\Lambda_2 \right] \sinh \Lambda_2 \frac{d}{2} \cosh \Lambda_1 \frac{d}{2} - \\ &- [\Lambda_2^2 a_2 + (\Lambda_2^2 - a_1)ip] \left[\Lambda_1 a_2 ip \frac{c_{12}}{c_{22}} + (\Lambda_1^2 - a_1)\Lambda_1 \right] \sinh \Lambda_1 \frac{d}{2} \cosh \Lambda_2 \frac{d}{2} = 0 \end{aligned} \quad (3.80)$$

Numerické řešení je stejné jako pro dříve.



Obr. 3.16 Symetrie posuvů při příčném kmitání v tenkém neomezeně dlouhém deskovém pásu [44]

Pro Timošenkův nosník je předpokládán řešení pro harmonickou vlnu ve tvaru

$$\psi = \Psi(x) e^{i\omega t}, \quad v = V(x) e^{i\omega t}, \quad (3.81)$$

kde ψ je úhel natočení průřezu nosníku ohybovou deformací, $\Psi(x)$ je funkce úhlu natočení, $V(x)$ je průběh posunutí ve směru osy y , i je imaginární jednotka, t je čas, ω je úhlová frekvence. Dosazením do pohybových rovnic (3.62) a (3.63) se získá soustava dvou obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu. Podle [44] se soustava převede na čtyři obyčejné diferenciální rovnice prvního řádu

$$V' = N, \quad \psi' = O, \quad N' = a_1 V + a_2 O, \quad O' = a_3 \psi + a_4 N, \quad (3.82)$$

$$a_1 = -\frac{\rho \omega^2}{\kappa G}, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = \frac{A \kappa G - I \rho \omega^2}{EI}, \quad a_4 = -\frac{A \kappa G}{EI} \quad (3.83)$$

kde κ je faktor zohledňující rozložení smykového napětí po průřezu nosníku, A je plocha průřezu, E je modul pružnosti v tahu, G je modul pružnosti ve smyku, I je kvadratický moment průřezu. Další postup je stejný jako pro podélnou vlnu. Je určena charakteristická rovnice a její vlastní čísla. Obecné řešení pro posun v ve směru osy y a natočení ψ je potom

$$\begin{aligned} v &= \left[C_1 \Lambda_1 a_2 e^{\Lambda_1 x} - C_2 \Lambda_1 a_2 e^{\Lambda_1 \tilde{a}_1 x} + C_3 \Lambda_1 a_2 e^{\Lambda_2 x} - C_4 \Lambda_1 a_2 e^{\Lambda_2 x} \right] e^{i\omega t}, \\ \psi &= \left[C_1 (\Lambda_1^2 - a_1) e^{\Lambda_1 x} + C_2 (\Lambda_1^2 - a_1) e^{\Lambda_1 x} + C_3 (\Lambda_2^2 - a_1) e^{\Lambda_2 x} + C_4 (\Lambda_2^2 - a_1) e^{\Lambda_2 x} \right] e^{i\omega t}, \end{aligned} \quad (3.84)$$

Tyto dvě rovnice popisují tvary příčného kmitání nosníku. Pro příčné kmitání nosníku s volnými konci je vlastní tvar symetrický v posuvu v a antisymetrický v natočení ψ nebo opačně [44]. Okrajové podmínky pro nosník s volnými konci jsou [43]

$$\psi' = 0, \quad v' - \psi = 0. \quad (3.85)$$

Po dosazení řešení (3.84) okrajových podmínek pro $x=l/2$, kde l je délka vzorku, získáme za předpokladu $C_1=C_2$ a $C_3=C_4$ frekvenční rovnice

$$\begin{aligned} &(\Lambda_1^2 - a_1) \left[(\Lambda_2^2 - a_1) - \Lambda_2 a_2 \right] \sinh \Lambda_1 \frac{l}{2} \cosh \Lambda_2 \frac{l}{2} - \\ & - (\Lambda_2^2 - a_1) \left[(\Lambda_1^2 - a_1) - \Lambda_1 a_2 \right] \sinh \Lambda_2 \frac{l}{2} \cosh \Lambda_1 \frac{l}{2} = 0. \end{aligned} \quad (3.86)$$

Pokud platí $C_1=-C_2$ a $C_3=-C_4$ je frekvenční rovnice

$$\begin{aligned} &(\Lambda_1^2 - a_1) \left[(\Lambda_2^2 - a_1) - \Lambda_2 a_2 \right] \sinh \Lambda_2 \frac{l}{2} \cosh \Lambda_1 \frac{l}{2} - \\ & - (\Lambda_2^2 - a_1) \left[(\Lambda_1^2 - a_1) - \Lambda_1 a_2 \right] \sinh \Lambda_1 \frac{l}{2} \cosh \Lambda_2 \frac{l}{2} = 0. \end{aligned} \quad (3.87)$$

Z frekvenčních rovnic (3.86) a (3.87) lze získat závislosti fázové rychlosti (vlastní frekvence) pro příčnou vlnu v nosníku s volnými konci obdobným způsobem, jak jsme to naznačili pro podélnou vlnu [44,78].

4 Přehled dosažených výsledků

Následují výsledky experimentálního testování a simulace ve výpočetním programu. Experiment byl proveden v Ústavu struktury a mechaniky hornin Akademie věd ČR v Praze. Pro modelování bylo použito programu Comsol MultiphysicsTM. Součástí je i porovnání hodnot z obou metod.

Experiment poskytl hodnoty podélného modulu, který charakterizuje tuhost kompozitu při tahovém namáhání, Poissonovo číslo a smykový modul. Ze simulace jsou získány hodnoty podélného Youngova modulu jako u experimentu, příčného modulu napříč vrstvami a smykového modulu, který vyjadřuje mezilaminární smykovou odolnost materiálu.

V obou případech se jedná o testování pomocí kmitání a tedy řešení dynamické úlohy.

4.1 Popis testovaného materiálu

Studovaný kompozit je osmivrstvý laminát tvořený z uhlíkových vláken v plátňové vazbě obklopený uhlíkovou maticí. Uhlíková matrice vznikla z fenolické pryskyřice Umaform LE vysokoteplotním zpracováním. Struktura matrice má izotropní strukturu a nelze ji zorientovat grafitizací. Výhodou fenolické pryskyřice je výborná rozměrová stabilita, dobrá tepelná stabilita, dobrá chemická odolnost a nízké smršťování objemu. Uhlíkový kabílek je tvořen 6000 paralelně uspořádanými vlákny bez zákrutu vysoce pevnými od firmy Toray® [6,9,23,81,82,83]. Základní fyzikální parametry uhlíkového kabílku a tkaniny jsou v následující *Tab. 4.1*.

Tab. 4.1 Parametry uhlíkového kabílku a tkaniny

svazek uhlíkových vláken		uhlíková tkanina	
počet vláken	6000	vazba	plátňová 1/1
délková hmotnost	222 tex	tloušťka tkaniny	0,36 mm
pevnost	5,49 GPa	plošná hmotnost	200 g.m ⁻²
modul elasticity	295 GPa	porozita	69 %
tažnost ¹⁵	1,9 %	dostava	450 nití/m
hustota	1810 kg.m ⁻³	zkrácení osnovy	1 %
teplotní vodivost	35 W.m ⁻¹ K ⁻¹	zkrácení útku	2 %

¹⁵ Tažnost je definována jako poměr maximální změny délky vzorku (protažení) ku upínací délce vyjádřený v procentech. Maximální protažení se získá tahovou zkouškou při přetrhu.

Nelze zapomenout ani na vrozenou porozitu kompozitu. Každý textilní kompozit během svého zpracování získá určitou míru porozity, která nejde odstranit ani opakovanou impregnací pryskyřicí. Je to způsobeno především únikem plynů při pyrolýze, strukturou výztuže, skluzem vrstev a rozdílnou tepelnou roztažností matrice a vláken. Z předchozích studií [23] vyplývá, že porozita testovaného kompozitu je kolem 20 – 25%. 10 – 15% z toho připadá na porozitu uvnitř kabílku. Je důležité porozitu zahrnout do výpočtů na všech úrovních, neboť velkou měrou ovlivňuje výsledné vlastnosti.

Podle předchozích definic byly v literatuře vyhledány vstupní veličiny, **Tab. 4.2**, pro grafitizovaná uhlíková vlákna Toray® a izotropní matrici z fenolické pryskyřice. Uhlíková vlákna byla dodána s vlastnostmi od výrobce. Pro matrici bylo nutno vlastnosti vyhledat podle měření jiných autorů [81,82,83].

Tab. 4.2 Hodnoty vstupních veličin

Komponenta	Měrná hmotnost [kg.m ⁻³]	Youngův modul ¹⁶ [MPa]	Poissonovo číslo [-]
Vlákna Toray 800 HB	1810	294 000	0,24
Matrice-Skelný uhlík	1400	89	0,30
Vzduchové dutiny	1,3	0,0	0,0

¹⁶ Pro srovnání matrice a výztuže jsou elastické moduly ve stejných jednotkách.

4.2 Možnosti interpretace výsledků simulace

K výpočtu bylo použito Strukturního mechanického modulu (Structural Mechanical Module) v programu Comsol Multiphysics 3.2 a v něm aplikace analýzy vlastních frekvencí (Eigenfrequency Analysis) [84,85]. Postup výpočtu se neliší od jiných komerčně používaných programů. Prvním stupněm je definování struktury importem nebo vlastní konstrukcí (Draw). Následně se stanoví vlastnosti složek, rozhraní a vnějšího působení (Physics). V této fázi se také definují vlastní konstanty či rovnice a pomocné veličiny (Options). Po vytvoření sítě (Mesh) dochází k samotnému výpočtu (Solve) a následně k vyjádření výsledků pomocí tabulek a grafů (Postprocessing).

Kritickým místem je část Physics, kde jsou definovány pohybové rovnice a okrajové podmínky. Zde snadno může dojít k omylu. Velká pozornost by se také měla věnovat části Options, kam se dosazují konstanty. Ostatní operace jsou snadno vizuálně kontrolovatelné, jak ukazuje např. **Obr. 4.1** pro automaticky vygenerovanou mříž vybrané části vlákenného svazku. Je vidět i správný výsledek konstrukce Draw, náhodně rozložená vlákna se nepřekrývají.

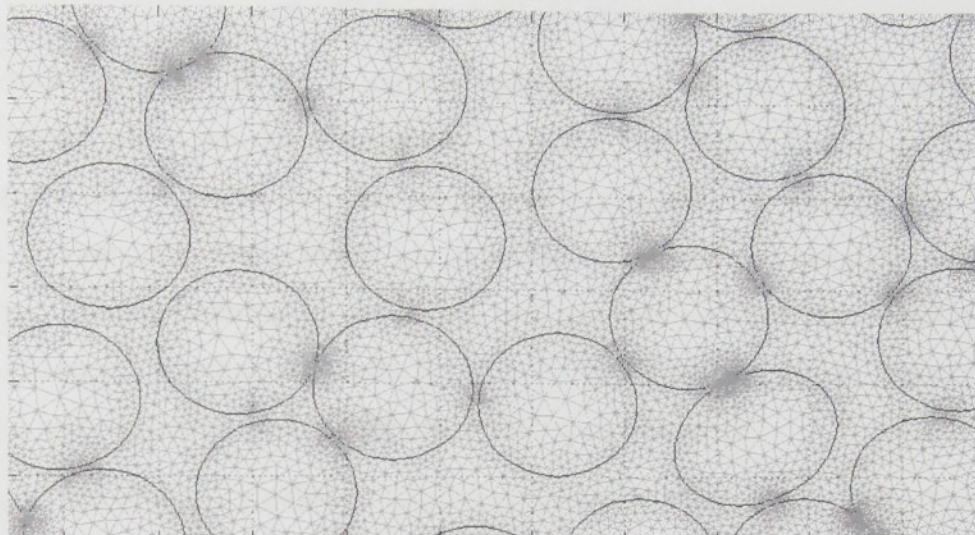
Jako příklad uvažujeme vlákenný svazek. Poněvadž vlákna jsou transversálně izotropní, v části Physics je nutno správně definovat rovnice pro příslušnou anizotropii a v části Options zavést správné hodnoty tuhostí či poddajností. Dalším problémem jsou okrajové podmínky:

1. Okrajové podmínky na povrchu vzorku jsou nulové napětí.
2. Okrajové podmínky mezi vláknem a matricí jsou složitější. Při přechodu od vlákna k matrici se vyžaduje:
 - a) Spojitost posunutí. Jinak se vzorek roztrhne.
 - b) Spojitost normálových složek napětí. Normálové složky deformace se mohou měnit skokem na rozhraní dvou prostředí.
 - c) Spojitost tečných složek deformace. Tečné složky napětí se mohou měnit skokem na rozhraní dvou prostředí.

Spojitost normálových složek napětí předpokládá orientaci napětí k rozhraní podle modelu iso-stress na **Obr. 2.13**. Všechna napětí se musí měnit při průchodu rozhraním spojitě. Složka deformace orientovaná kolmo k prostředí se může měnit skokem. Spojitost tečných složek deformace předpokládá orientaci deformace k rozhraní podle modelu iso-strain na

Obr. 2.12. Při průchodu kolmo k rozhraní se musí všechny složky deformace měnit spojitě, napětí se na rozhraní mohou měnit skokem.

Okrajové podmínky mezi vláknem a matricí jsou složité a mnohé systémy je nezpracují přesně. Proto je vhodné přesvědčit se na výsledku simulace, zda byly splněny s dostatečnou přesností.

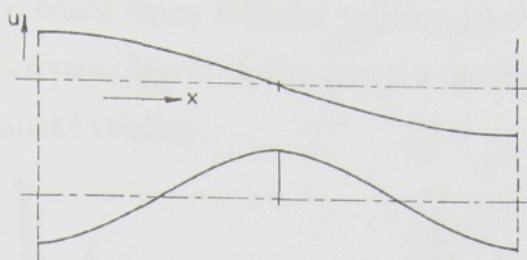


Obr. 4.1 Příklad položené sítě na strukturu vláken v řezu obklopených matricí

Jako příklad uvažujeme simulaci dynamického měření parametrů vzorku. Na **Obr. 4.2** jsou schematicky znázorněny první dva tvary kmitání podélné vlny kmitající tyče. K tomuto vlnění se vztahují výsledky simulace metodou konečných prvků¹⁷. Výsledky kmitání vzorku jsou prezentovány staticky v okamžiku, kdy posunutí nabývá maxima. Systém samozřejmě umožňuje i animaci kmitů a časového průběhu s nimi spojených elastických veličin.

Pro zjednodušení předpokládáme vláknový a nikoli tkaninový kompozit a vlna se šíří ve směru kolmém k vláknenným svazkům, viz též část průřezu na **Obr. 4.1** – vlna se šíří zleva doprava.

¹⁷ Tyč je v experimentu podepřena v jejím středu. Na kmity to má zanedbatelný vliv, proto se při simulaci tato okrajová podmínka neuvažuje. Při pevném upnutí by uprostřed tyče musel být trvale uzel a druhý typ kmitů by nemohl existovat.



Obr. 4.2 První a druhý tvar kmitání tyče [45]

V typické grafické formě je možné výsledky interpretovat znázorněním počítané veličiny v celé ploše vzorku testovaného vlněním jako škálu hodnot od minima po maximum. Na **Obr. 4.3**, **Obr. 4.4**, **Obr. 4.5** je vidět napětí příčného vlnění při prvních třech vlastních frekvencích. Škála barev jde pokaždé od modré pro nejnižší hodnotu přes zelenou pro střední hodnotu až k červené pro nejvyšší hodnotu dané veličiny. Pokud bychom znázornili všechna tři stadia do jednoho grafu, ze zkušenosti víme, že pak by maximální hodnoty obsahovalo pouze znázornění třetí frekvence.

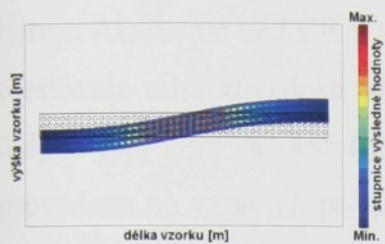
Systém umožňuje i zobrazení pomocí klasických křivkových grafů. Na **Obr. 4.6**, **Obr. 4.7**, **Obr. 4.8** jsou výsledky téhož napětí v křivkových grafech. Křivka znázorňuje napětí na ose x procházející středem vzorku. Silné zvlnění průběhu napětí je způsobeno velmi rozdílnými elastickými vlastnostmi vláken a matrice – elastické moduly se liší o čtyři řády, viz **Tab. 4.2**. Síť nebyla dostatečně jemná a proto nejsou vidět detaily. Při jemnější síti by bylo možné ověřit splnění okrajových podmínek pro napětí a deformaci. V principu jde o model stejného napětí, to by tedy mělo být spojitě. Deformace by se mohla měnit skokem

Správnost nastavení parametrů lze ověřit z napětí na kmitnách a uzlech. V uzlových bodech mění posunutí znaménko, deformace a napětí jsou tedy nejvyšší, což je splněno na všech obrázcích. Z praktického hlediska lze říci, že při vibraci vzorku jsou tato místa vystavena nejvyššímu namáhání.

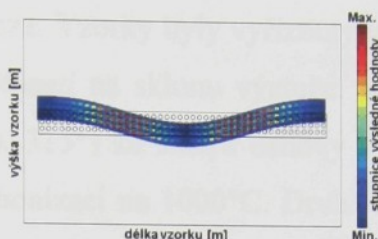
Z plošného znázornění je jasné, že napětí v podélném směru má maximum ve vláknech. Pro matrici, která vlákna obklopuje, je hodnota podstatně nižší. Při zvolené jemnosti mřížky je to však přijatelně viditelné jen při velkém zvětšení barevného grafu¹⁸. V tomto případě je možné rozdíl odhadnout z křivkového zobrazení. Kombinací plošných a klasických grafů je možné přesně stanovit průběh modelované veličiny v kterémkoli místě zobrazované oblasti, pokud je ovšem dostatečně jemná síť (nebo zvětšení na

¹⁸ Rozhodně to není viditelné na vytištěné kopii, ale je dobře viditelné na velkém monitoru.

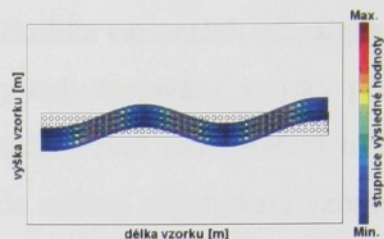
monitoru). Graficky lze zobrazit nejen základní veličiny jako napětí a deformaci, ale i posunutí, jeho parciální derivace, hlavní složky napětí a deformace a jejich polohy, atd., prostě všechny možné elastické veličiny.



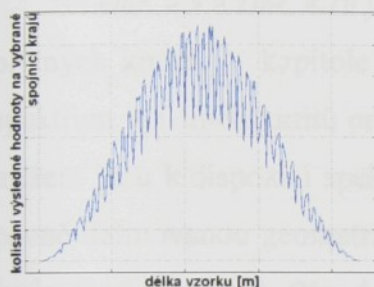
Obr. 4.3 Napětí při první vlastní frekvenci - plošné znázornění



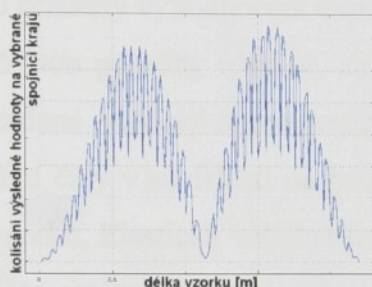
Obr. 4.4 Napětí při druhé vlastní frekvenci - plošné znázornění



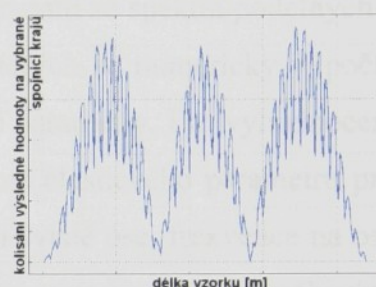
Obr. 4.5 Napětí při třetí vlastní frekvenci - plošné znázornění



Obr. 4.6 Napětí při první vlastní frekvenci - křivkové znázornění



Obr. 4.7 Napětí při druhé vlastní frekvenci - křivkové znázornění



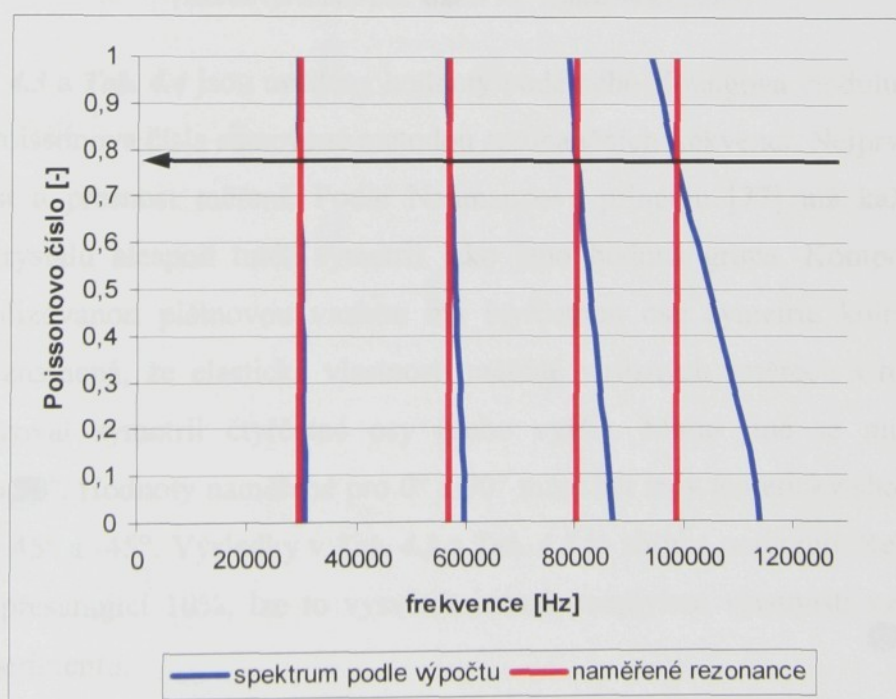
Obr. 4.8 Napětí při třetí vlastní frekvenci - křivkové znázornění

Pro izotropní materiál existuje možnost ověření simulace kmitů pomocí analytického řešení popsaného v části 3.5. Analytické řešení je použito v další části pro vyhodnocení experimentu pomocí dispersních křivek. Z nich je však již velmi snadné získat průběh posunutí v podélném a příčném řezu tyče. Této možnosti jsme nemohli využít z časových důvodů, poněvadž úplné naprogramování i v uživatelsky přijatelném systému MATLAB je časově náročné.

4.3 Výsledky experimentu a jejich diskuze

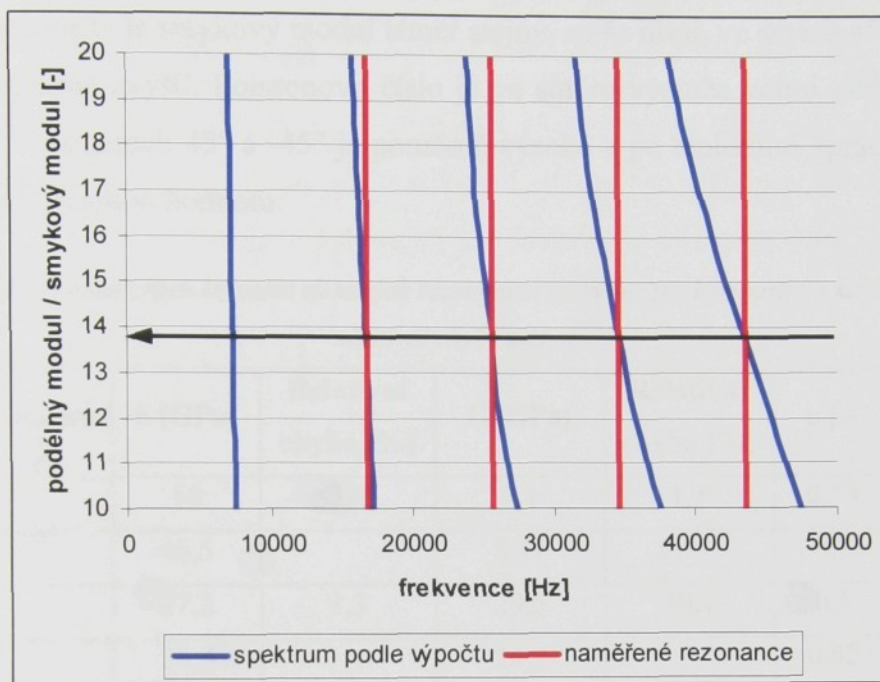
Experimentální stanovení elastických konstant z rezonančních frekvencí bylo provedeno na vzorcích C/C kompozitu s plátnovou výztuží v Ústavu struktury a mechaniky hornin Akademie věd ČR v Praze. Vzorky byly vyříznuty v několika variantách tak, aby se otestovala míra závislosti vlastností na sklonu výztuže. Byly tedy testovány vzorky pod úhly 0° , 45° , 90° a -45° (resp. 315°) ke směru osnovy výztuže. První sada měření byla provedena na vzorcích po karbonizaci na 1000°C . Druhá sada měření obsahovala vzorky po grafitizaci na 2200°C .

Na **Obr. 4.9** a **Obr. 4.10** jsou příklady vyhodnocení experimentu ze spektra podélných a příčných kmitů. V kapitole 3.5 jsou popsány rovnice, ze kterých se numericky vypočte spektrum vlastních kmitů pro zadané elastické a geometrické parametry. Pro vyhodnocení měření jsou k dispozici spektrální čáry v závislosti na hodnotě elastického parametru pro pevně definovanou geometrii vzorku. Elastická veličina je na svislé ose, frekvence na ose vodorovné, viz např. **Obr. 4.9**. Do spektra se zanesou hodnoty experimentálně změřených frekvencí jako svislé čáry. Ty by měly protnout spektrální čáry ve stejné výšce, viz např. **Obr. 4.9**. Spojnice těchto průsečíků udává hodnotu elastického parametru. V realitě je však určitý rozptyl průsečíků, který umožní posoudit přesnost měření.



*Obr. 4.9 Příklad vyhodnocení Poissonova čísla μ ze spektra podélných kmitů
(vzorek vyříznutý pod úhlem 45° vzhledem k osnově)*

Příklad určení Poissonova čísla je na **Obr. 4.9**¹⁹. Analogicky se určí Youngův modul. Protože hodnota smykového modulu G je ve spektru blízka nule, pro vyhodnocení smykového modulu z příčných kmitů se využije podílu E/G , protože E již bylo získáno ze spektra podélných kmitů, viz **Obr. 4.10**.



Obr. 4.10 Příklad vyhodnocení G_{xy} ze spektra příčných kmitů a pomocí podílu E_x/G_{xy} (vzorek vyříznutý pod úhlem 90° vzhledem k osnově)

V **Tab. 4.3** a **Tab. 4.4** jsou uvedeny hodnoty podélného Youngova modulu, smykového modulu a Poissonova čísla stanovené metodou rezonančních frekvencí. Nejprve posoudíme věrohodnost a přesnost měření. Podle Neumannova principu [77] má každá fyzikální vlastnost krystalu alespoň tutéž symetrii jako jeho bodová grupa. Kompozit s textilní výztuží realizovanou plátňovou vazbou má čtyřčetnou osu symetrie kolmou k rovině lamin. To znamená, že elastické vlastnosti měřené v různých směrech v rovině laminy musí vykazovat symetrii čtyřčetné osy (nebo vyšší). Mimo jiné se musí opakovat po otočení o 90° . Hodnoty naměřené pro 0° a 90° musí být tedy teoreticky shodné. To platí i pro směry 45° a -45° . Výsledky v **Tab. 4.3** a **Tab. 4.4** to zhruba potvrzují. Relativní chyby obvykle nepřesahující 10%, lze to vysvětlit jednak rozptylem vlastností vzorku, jednak chybou experimentu.

Nyní se soustředíme na praktický význam výsledků, tj. budeme posuzovat vliv technologie na elastické vlastnosti. Experimentem bylo zjištěno, že podélný modul

¹⁹ Naměřená hodnota je však překvapivě vysoká.

karbonizovaného vzorku v 0° a 90° (ve směru osnovy a ve směru útku) byl o polovinu nižší než vzorku grafitizovaného. Dalším teplotním působením se tedy podélný modul výrazně zlepšil. Naopak hodnoty podélného modulu ve směru 45° a -45° se prakticky nezměnily. Grafitizace zde neměla téměř vliv. Smykový modul vykazuje opačné závěry. Ve směrech výztuže je smykový modul téměř stejný, spíše nižší, ve směru 45° a -45° se po grafitizaci výrazně zvýšil. Poissonovo číslo je ve směru výztuže velmi nízké nehledě na zpracování. Ve směrech 45° a -45° je poměrně vysoké a po teplotním zpracování zvýšilo na překvapivě vysokou hodnotu.

Tab. 4.3 Hodnoty elastických konstant získaných rezonanční metodou pro kompozit po karbonizaci včetně relativní chyby měření

Orientace vzorku	E [GPa]	Relativní chyba [%]	G [GPa]	Relativní chyba [%]	μ [-]	Relativní chyba [%]
0°	50	3,6	9,1	1,8	0,18	5,3
90°	46,5		8,77		0,2	
45°	27,2	1,3	29,5	10,1	0,5	2,0
-45°	26,5		24,1		0,52	

Tab. 4.4 Hodnoty elastických konstant získaných rezonanční metodou pro kompozit po grafitizaci včetně relativní chyby měření

Orientace vzorku	E [GPa]	Relativní chyba [%]	G [GPa]	Relativní chyba [%]	μ [-]	Relativní chyba [%]
0°	108	4,7	7,55	1,1	0,25	8,3
90°	103		7,63		0,23	
45°	25	4,1	54	7,7	0,78	0,0
-45°	24		50		0,78	

Pokud známe elastické moduly v základní soustavě, v níž osa X_I má směr osnovy, lze pomocí transformačních vztahů (3.57) a (3.61) odvozených v kapitole 3.4 vypočítat elastické parametry v libovolném výřezu pootočeném o úhel δ v rovině laminy. Po malých úpravách mají vztahy pro Youngův modul a modul ve smyku pro vzorek vyříznutý pod úhlem δ vzhledem k osnově následující tvar. Pro Youngův modul platí

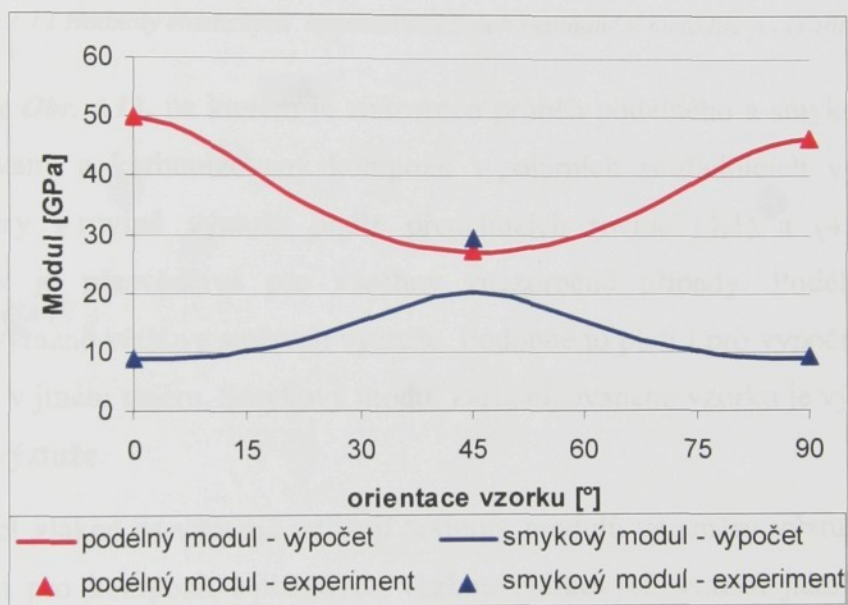
$$E_x'(\delta) = \left[\frac{1}{E} (\cos^4 \delta + \sin^4 \delta) + \left(\frac{1}{G} - \frac{2\mu}{E} \right) \sin^2 \delta \cos^2 \delta \right]^{-1} \tag{4.1}$$

Smykový modul lze vypočíst podle vztahu

$$G'_{xy}(\delta) = \left[2 \left(\frac{4(1+\mu)}{E} - \frac{1}{G} \right) \sin^2 \delta \cos^2 \delta + \frac{1}{G} (\sin^4 \delta + \cos^4 \delta) \right]^{-1}, \quad (4.2)$$

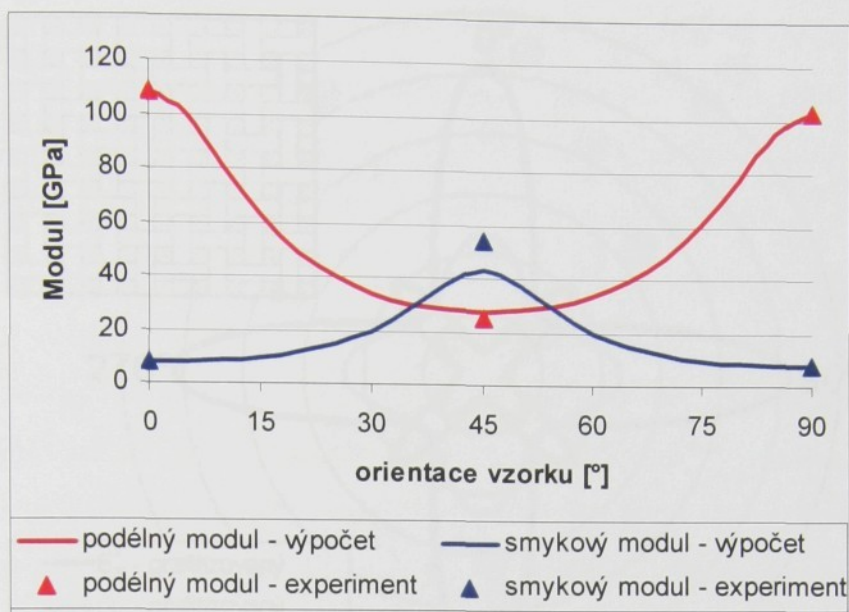
kde E , G a μ jsou pořadě Youngův modul, modul ve smyku a Poissonovo číslo pro souřadnou soustavu spojenou se vzorkem, v níž osa X_I má směr osnovy.

Průběhy obou modulů podle vztahů (4.1) a (4.2) jsou na **Obr. 4.11** a **Obr. 4.12**. Při výpočtu jsme za hodnoty E , G a μ vzali střední hodnotu pro úhly pro 0° a 90° vzhledem k osnově. Z **Obr. 4.11** a **Obr. 4.12** vyplývá, že pro podélný modul testovaného kompozitu je nejvyšší ve směru vyztužujících vláken a smykový modul naopak nejnižší. V oblasti 45° natočení struktury je dokonce v obou případech smykový modul vyšší než podélný.



Obr. 4.11 Hodnoty elastických konstant získaných rezonanční metodou po karbonizaci

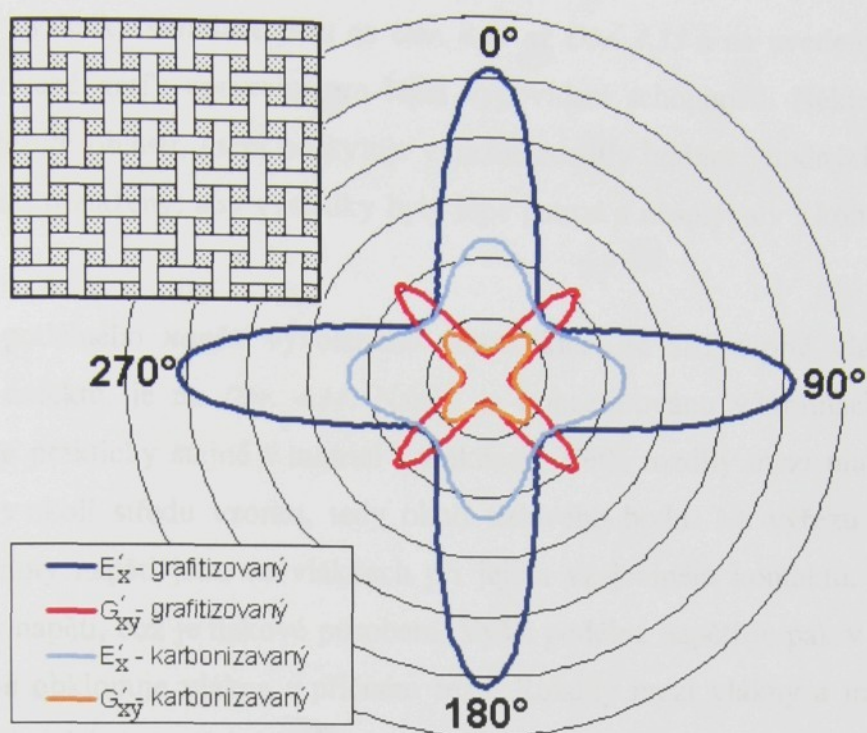
Naměřené hodnoty se dobře shodují s vypočteným průběhem podélného modulu pro karbonizovaný i grafitizovaný vzorek i v oblasti úhlu 45° . Naměřený smykový modul pro oba typy pro 45° je však výrazně vyšší než vypočtený. Výpočet ze smykových hodnot ve směru výtzuže podceňuje reálný kompozit, který má lepší smykové vlastnosti ve směru 45° od vyztužujících svazků.



Obr. 4.12 Hodnoty elastických konstant získaných rezonanční metodou po grafitizaci

Následuje **Obr. 4.13**, na kterém je znázorněn průběh podélného a smykového modulu pro grafitizovaný a karbonizovaný kompozit v polárních souřadnicích vypočítaný pro všechny směry v rovině výztuže podle předchozích rovnic (4.1) a (4.2). Existence čtyřčetné osy je přesvědčivá pro všechny znázorněné případy. Podélný modul je samozřejmě výrazně větší ve směrech výztuže. Podobně to platí i pro vypočítaný smykový modul ovšem v jiném směru. Smykový modul karbonizovaného vzorku je výrazně nižší ve směrech 45° výztuže.

Grafitizací vláken se výrazně odlišují hodnoty modulů ve směru výztuže a ve směru 45° k výztuži pro kompozit s plátňovou vazbou uhlíkových svazků jako vyztužujícího systému. Karbonizovaný kompozit s plátňovou výztuží má pod různými úhly vyrovnanější hodnoty. I tak je však podélný modul ve směru 45° o polovinu nižší než ve směrech výztuže 0° a 90°.

Obr. 4.13 Vypočtený polární diagram elastickým modulů²⁰

(0° - směr osnovy, 90° - směr útku)

4.4 Výsledky simulace

Pro simulaci jsme použili materiálová data uvedená v **Tab. 4.2** pro vlákna a matrici a některé další geometrické parametry vláken, vlákenných svazků a textilií podle **Tab. 4.1**. Elastická data uhlíkových vláken, která jsou považována za příčně izotropní, nebyla úplná, proto jsme je považovali za čistě isotropní prostředí a potřebné parametry (Poissonovo číslo) doplnili z údajů pro objemový materiál. Metoda konečných prvků byla postupně aplikována na všechny hierarchické modely uvedené v **Tab. 3.1**, tj. část vlákenného svazku bez defektů, vlákenný svazek s defekty, tři modely strukturní buňky, tři modely laminy a výsledný kompozit. Geometrické rozměry modelovaných objektů byly použity podle **Tab. 3.1**.

Poněvadž měření elastických parametrů vzorků bylo dynamické, považovali jsme za logické provést rovněž simulaci v dynamickém režimu. Při simulaci jsme uvažovali pouze nejnižší harmonickou, zatímco v experimentu bylo k vyhodnocení použito několik harmonických. Ve shodě s experimentem jsme však uvažovali jako podélné, tak příčné (ohybové) kmity.

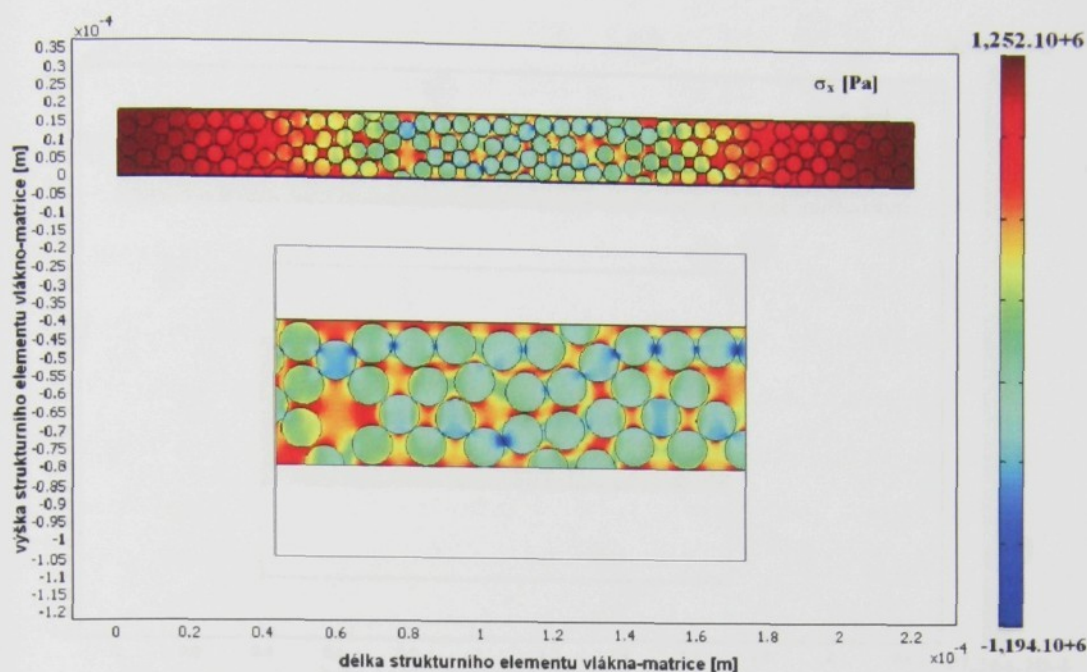
²⁰ Je nutno podotknout, že na prezentovaných polárních grafech je patrný skokový rozdíl čar. Je to proto, že se jedná pouze o spojici bodů, nikoli o spojitou křivku.

Typické výsledky simulace jsou na **Obr. 4.14** až **Obr. 4.35** a na uvedených obrázcích jsou prezentované grafy upraveny pro lepší vypovídací schopnosti. Některé grafy jsou opatřeny výřezem oblasti, která poskytuje výrazné rozdíly hodnot vhodných pro diskuzi. Jiné grafy jsou roztaženy, aby výsledky byly lépe patrné a nesplývaly s konturami oblastí struktury.

Průběh podélného *napětí* vyvolaného vlnou, která se šíří napříč vlákny v části svazku bez defektů, je na **Obr. 4.14**. Napětí je koncentrováno v kmitnách na koncích struktury a je prakticky stejné v matrici i vláknech. Větší rozdíly mezi matricí a vlákny jsou patrné v okolí středu vzorku, tedy okolí uzlového bodu. Na výřezu je patrné, že nejnižší hodnoty napětí jsou ve vláknech při jejich vzájemném kontaktu. Tam dochází k zápornému napětí, což je tlakové působení. Vyšší podélné napětí je pak v matrici, která bezprostředně obklopuje vlákna v příčném řezu. Rozdíly mezi vlákny a matricí se tedy projeví jen při slabém namáhání.

Tlakové namáhání v uzlu by nemělo překvapit. Jedná se o podélné harmonické vlnění, kde se střídají oblasti s tahem i tlakem. Proto je také barevná stupnice vpravo od grafu prakticky symetrická okolo nuly.

Během testování tedy dochází k nejvyššímu podélnému napětí na kmitajících koncích. Nezáleží na charakteru materiálu. Ve středu vzorku jsou vlákna namáhána tlakem a je obklopující matrice tahem. Napětí uvnitř vláken je zhruba konstantní.

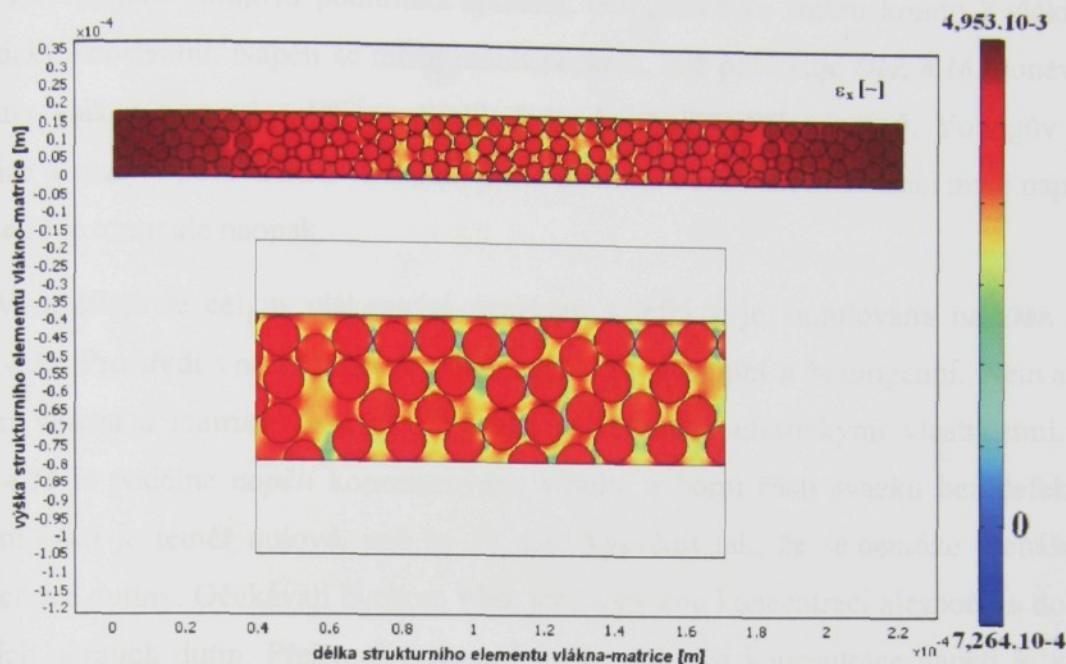


Obr. 4.14 Podélné napětí v příčném řezu svazkem

Průběh podélné deformace pro tentýž případ (vlna šířící se napříč vlákny v části svazku vláken obklopený matricí bez defektů) je na Obr. 4.15. V souladu s Hookeovým zákonem deformace odpovídá průběhu napětí. Je také koncentrována v matrici i vláknech na koncích vzorku, kde mezi nimi není rozdíl. Velmi vysoká míra deformace ovšem zůstává i ve vláknech v okolí uzlu. Deformace v matrici je v okolí uzlového bodu v průměru nejnižší, vykazuje však výraznou nehomogenitu. Lokálně nejnižší podélná deformace je v matrici v místech, kde jsou vlákna blízko u sebe.

V oblasti uzlu existují v matrici místa se zápornou deformací, tj. se stlačením (zmenšením) objemového elementu. Na detailu však není vidět korespondence mezi záporným napětím a deformací. To lze ovšem vysvětlit nedostatečnou jemností mřížky použité při MKP. Totéž platí i pro průměrná napětí a deformaci, která se používají k určení modulů.

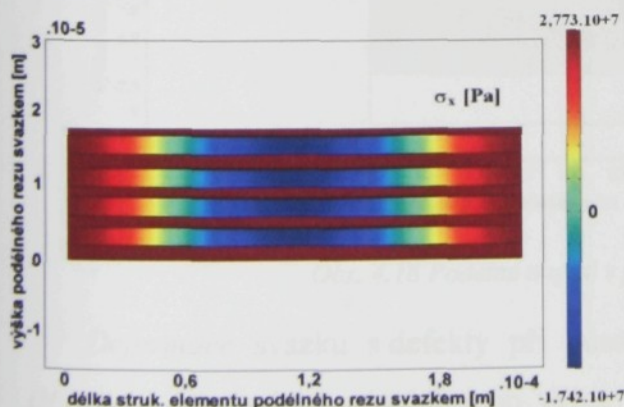
Z hlediska okrajových podmínek dochází na hranicích vláken ke skoku napětí i deformace. To lze vysvětlit tím, že na kruhových vláknech jsou okrajové podmínky složité a použitá síť není dostatečně jemná.



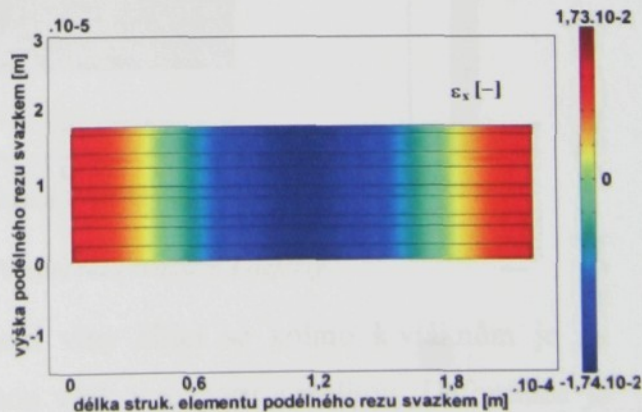
Obr. 4.15 Podélná deformace v příčném řezu svazkem

Průběh podélného *napětí* vyvolaného vlnou, které se šíří podél vláken v části svazku bez defektů, je na **Obr. 4.16**. Ve vláknech je napětí koncentrováno na koncích vzorku stejně jako ve svazku příčných vláken. Nejnižší a to záporné napětí je v uzlu a plynule stoupá až ke kmitnám na okrajích. Matrice má velmi vysoké napětí v celé ploše vzorku.

Podélná *deformace* odpovídající předchozímu případu (podélná vlna šířící se podél vláken v části svazku bez defektů) je na **Obr. 4.17**. Prakticky její průběh odpovídá isotropnímu prostředí. Nejnižší hodnotu má v uzlovém bodu ve středu vzorku a přechází do nejvyšší deformace na kmitných na volných koncích. Není viditelný rozdíl mezi vlákny a matricí.



Obr. 4.16 Podélné napětí v podélném řezu svazkem

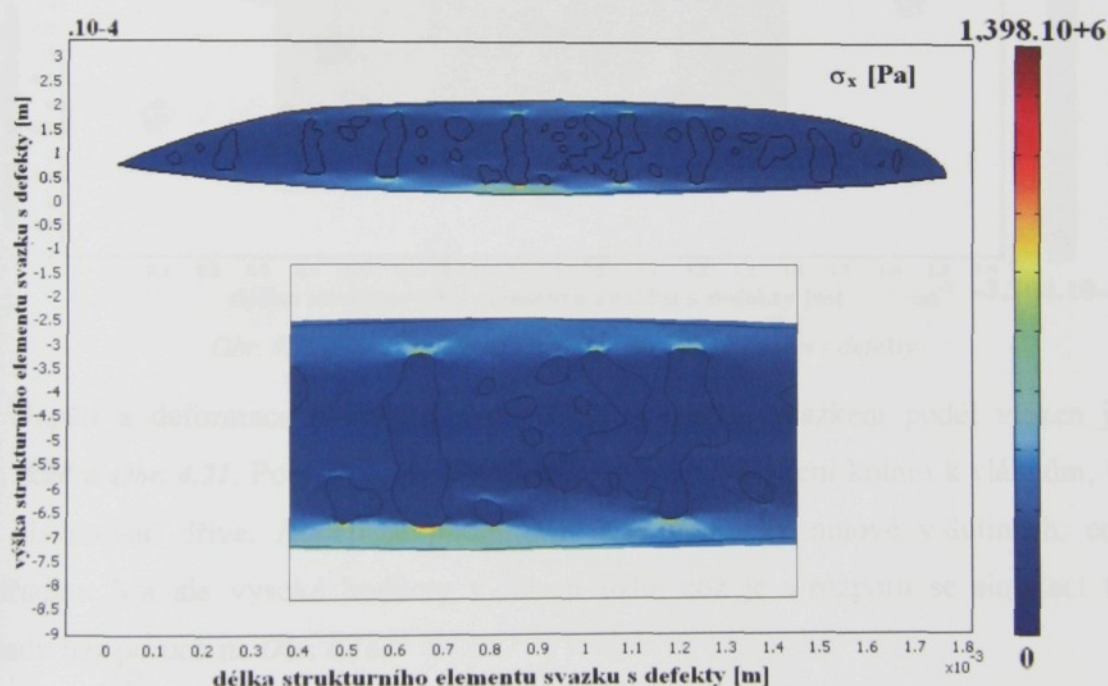


Obr. 4.17 Podélná deformace v podélném řezu svazkem

Vláknenný svazek s podélnou vlnou ve směru vláken odpovídá případu stejné deformace podle **Obr. 2.12**. Ten vyžaduje spojitost deformace na hranici vláken. Podle

Obr. 4.17 je tato okrajová podmínka splněna, deformace ve směru kolmo k vláknům je prakticky konstantní. Napětí se může měnit skokem, což potvrzuje **Obr. 4.16**. Poněvadž se moduly vláken a matrice liší o několik řádů, je skok velmi výrazný. Youngův modul matrice je malý v porovnání s vláknem, proto bychom očekávali na matrici malé napětí. Na **Obr. 4.16** je tomu ale naopak.

Vlna šířící se celým vlákněným svazkem s defekty je simulována na **Obr. 4.18** a **Obr. 4.19**. Prostředí vně defektů je považováno za izotropní a homogenní. Neuvažují se v něm vlákna a matrice, jsou ale zahrnuta průměrnými elastickými vlastnostmi. Podle **Obr. 4.18** je podélné napětí koncentrováno v dolní a horní části svazku bez defektů. Ve střední části je téměř nulové, což by se dalo vysvětlit tak, že se nemůže přenášet přes vzduchové dutiny. Očekávali bychom však jeho vysokou koncentraci alespoň na dolních a horních okrajích dutin. Překvapivé rovněž je, že nejvyšší koncentrace napětí je v širším okolí uzlového bodu první frekvence. To je v přímém rozporu se svazkem bez poruch na **Obr. 4.14**.

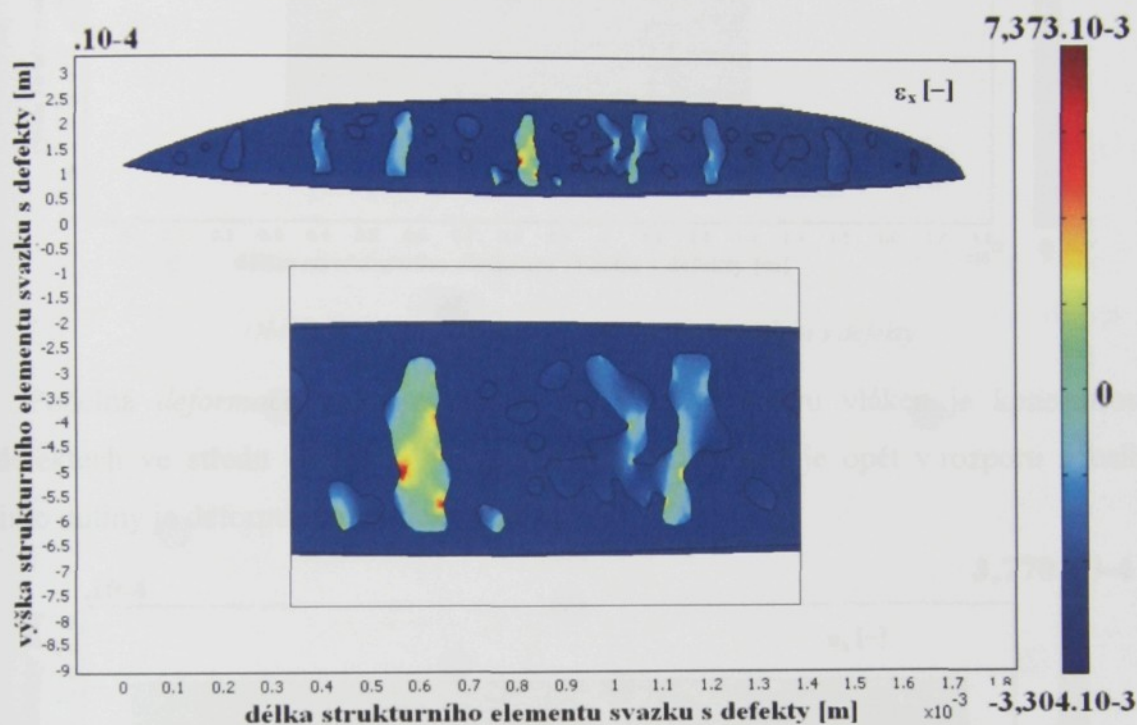


Obr. 4.18 Podélné napětí v příčném řezu svazkem s defekty

Deformace svazku s defekty při působení vlny šířící se kolmo k vláknům je na **Obr. 4.19**. Obrázek a zejména jeho výřez jsou však v rozporu s realitou. Deformace je nejvyšší v dutinách, navíc je v nich nehomogenní. Dutiny jsou naplněny plynem a z hlediska svého okolí představují prakticky prázdný prostor. Proto v nich nemůže existovat deformace, která vyžaduje pevnou látku. Další rozpor mezi **Obr. 4.18** pro napětí a **Obr. 4.19** pro deformaci je v tom, že deformace je v převážné části vzorku (i v dutinách)

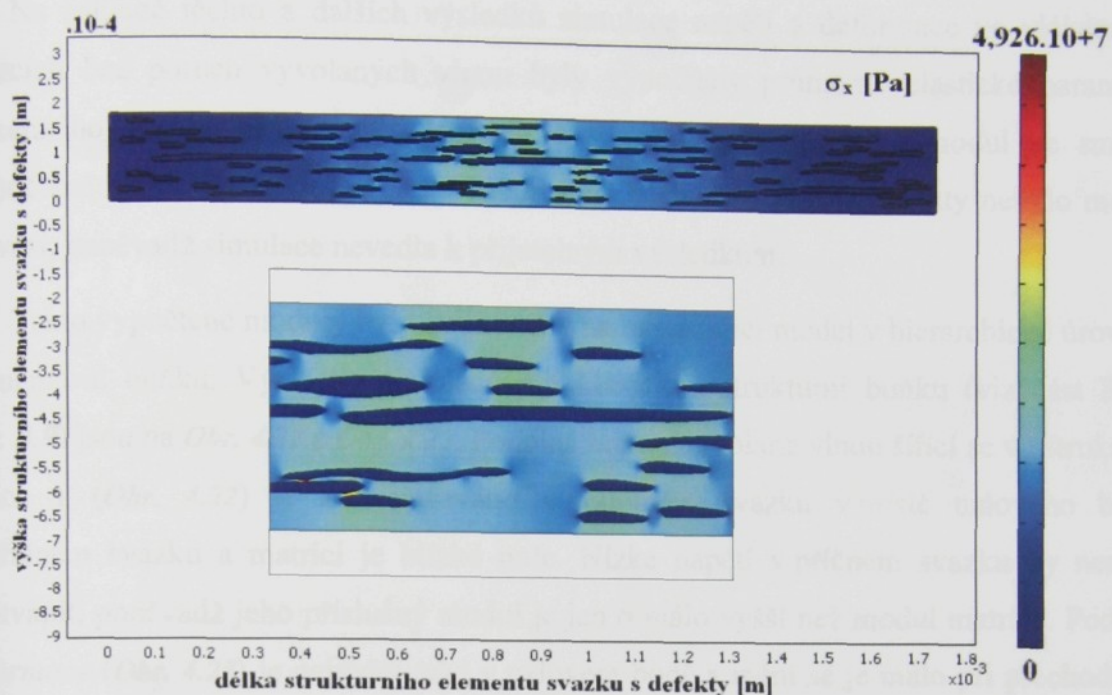
záporná, zatímco napětí je i mimo dutinu blízké nule. Lokální Youngův modul by se i pro oblasti bez dutin blížil nule.

Vysvětlení těchto rozporů je několik. Především mohlo dojít k chybě při definování modelu, tj. dutiny nebyly dostatečně popsány jako prázdný prostor. To by vysvětlilo koncentraci deformace v dutinách. Dále je to poměrně složitá úloha. Nepravidelné dutiny se popisují krátkými úsečkami, kterých musí být velký počet s ohledem na mnoho dutin. Konečně to může být nedostatečná síť.



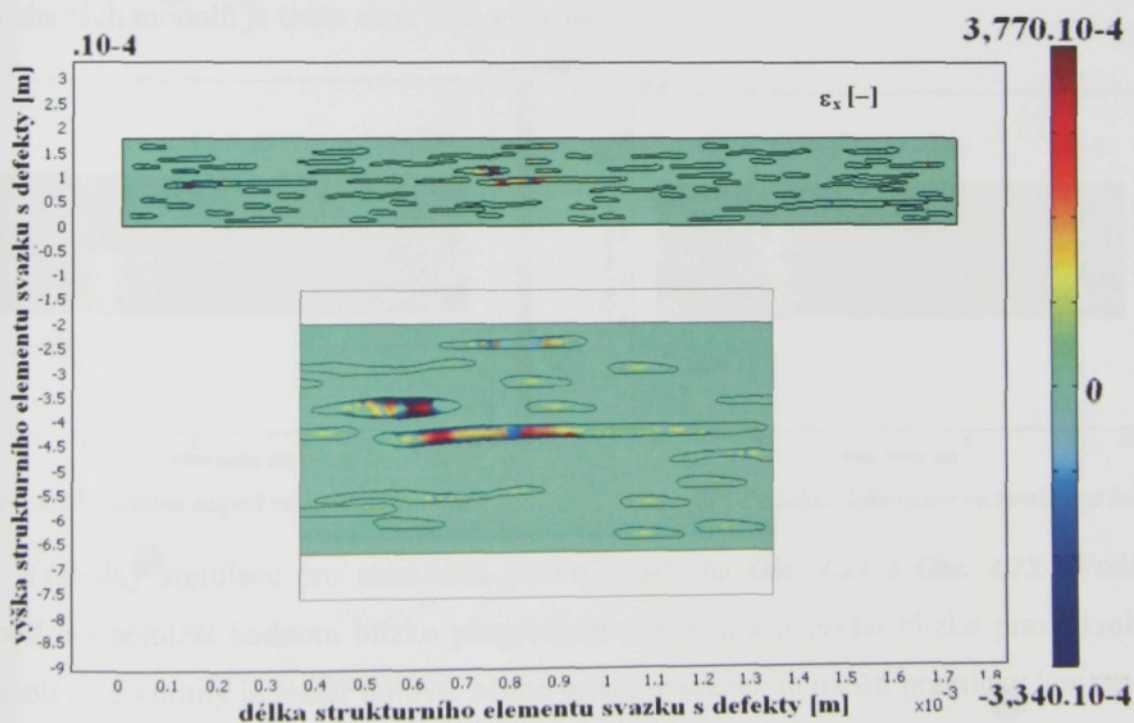
Obr. 4.19 Podélná deformace v příčném řezu svazkem s defekty

Napětí a deformace vyvolané vlnou šířící se celým svazkem podél vláken je na **Obr. 4.20** a **Obr. 4.21**. Podmínky jsou tytéž jako pro případ šíření kolmo k vláknům, který byl diskutován dříve. *Napětí* je podle **Obr. 4.20** prakticky nulové v dutinách, což je v pořádku. Má ale vysoké hodnoty v oblasti uzlu, což je v rozporu se simulací téhož případu bez poruch na **Obr. 4.16**.



Obr. 4.20 Podélné napětí v podélném řezu svazkem s defekty

Podélná deformace vyvolaná vlnou šířící se ve směru vláken je koncentrována v defektech ve středu studovaného vzorku (Obr. 4.21), což je opět v rozporu s realitou. Mimo dutiny je deformace prakticky nulová.



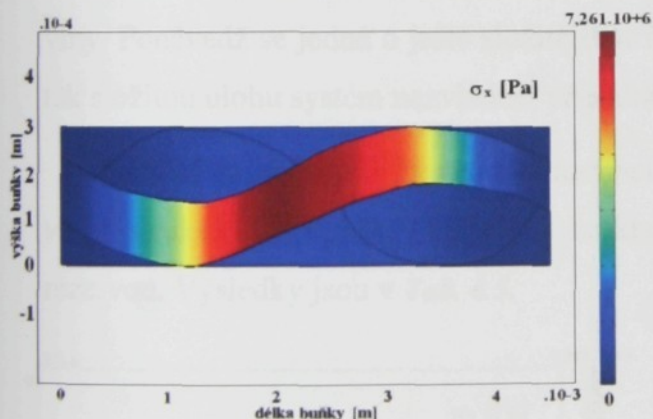
Obr. 4.21 Podélná deformace v příčném řezu svazkem s defekty

I v tomto případě jsou výsledky simulace v rozporu se skutečností. Důvody mohou být tytéž jako v předchozím případě, od kterého s tento liší jen orientací vláken.

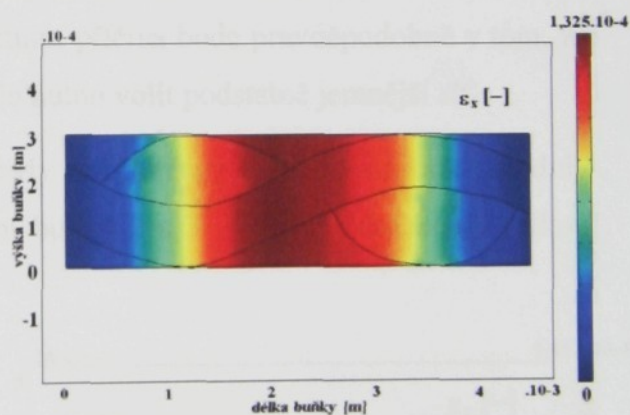
Na základě těchto a dalších výsledků simulace napětí a deformace ve vlákenných svazcích bez poruch vyvolaných vlnou byly vypočteny průměrné elastické parametry vlákenného svazku bez poruch. Jde zejména o Youngův modul a modul ve smyku. Vypočtené hodnoty jsou v **Tab. 4.5** v závěru této části. Korekci na defekty nebylo možno provést, poněvadž simulace nevedla k přijatelným výsledkům.

Takto vypočtené moduly byly aplikovány na následující model v hierarchické úrovni – elementární buňku. Výsledky simulace pro klasickou strukturní buňku (viz část 3.3 a **Obr. 3.9**) jsou na **Obr. 4.22** a **Obr. 4.23**. Podélné napětí vyvolané vlnou šířící se ve strukturní buňce 1 (**Obr. 4.22**) je koncentrováno v podélném svazku v místě uzlového bodu. V příčném svazku a matici je blízké nule. Nízké napětí v příčném svazku by nemělo překvapit, poněvadž jeho příslušný modul je jen o málo vyšší než modul matrice. Podélná deformace (**Obr. 4.23**) je nejvyšší také v uzlovém bodě a mění se je málo při přechodu od podélného svazku k příčnému nebo matici, pokud je tento přechod v příčném směru. Směrem ke krajům (kmitnám) hodnota deformace klesá až na minimum.

Na strukturu lze dobře aplikovat model stejné deformace podle **Obr. 2.12**. Při průchodu rozhraním se deformace mění spojitě a napětí skokem. S ohledem na výrazné rozdíly v hodnotách modulů je tento skok také výrazný.



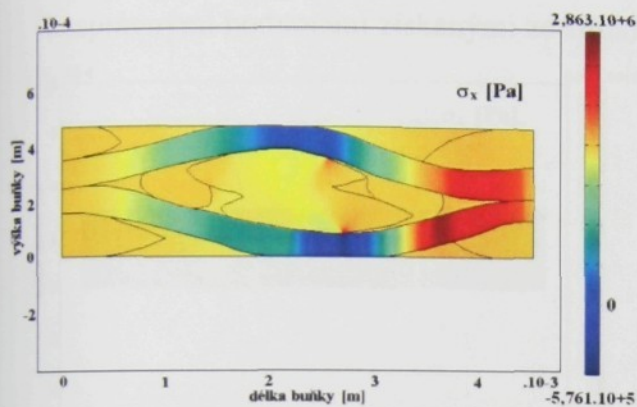
Obr. 4.22 Podélné napětí ve strukturní buňce 1



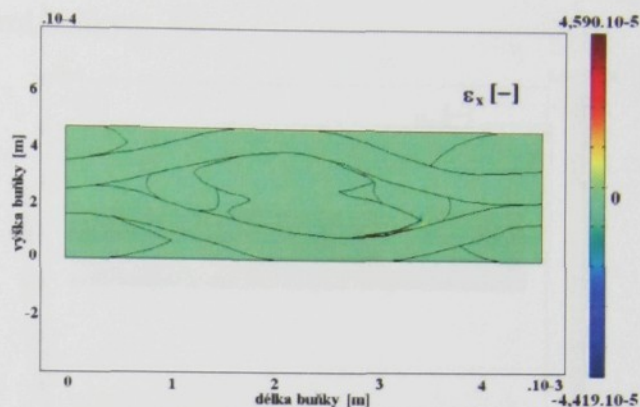
Obr. 4.23 Podélná deformace ve strukturní buňce 1

Výsledky simulace pro strukturní buňku 2 jsou na **Obr. 4.24** a **Obr. 4.25**. Podélné napětí má nejnižší hodnotu blízko přepokládaného uzlu a nejvyšší blízko pravé kmitny. V okolí levé kmitny je téměř nulové. Mimo podélný svazek je napětí prakticky konstantní. Tyto výsledky jsou v poměrně velkém rozporu v porovnání se simulací strukturní buňky 1. Napětí je nenulové i v dutinách. Podélná deformace podle **Obr. 4.25** je téměř konstantní i v podélném svazku, vyšší hodnoty jsou pouze v lokální části jeho hranice. Výsledek je v přímém rozporu se simulací strukturní buňky 1. Opět je deformace nenulová i v dutinách.

Strukturní buňka 2 je výrazně složitější než strukturní buňka 1, ale to by nemělo vést k tak výrazným rozdílům. Chybu je možno hledat v nepřesné formulaci problému. Nebyly správně popsány dutiny. To by ale nemělo mít tak výrazný vliv. Pravděpodobnější příčinou může být složitá geometrie nebo nedostatečná síť.



Obr. 4.24 Podélné napětí ve strukturní buňce 2

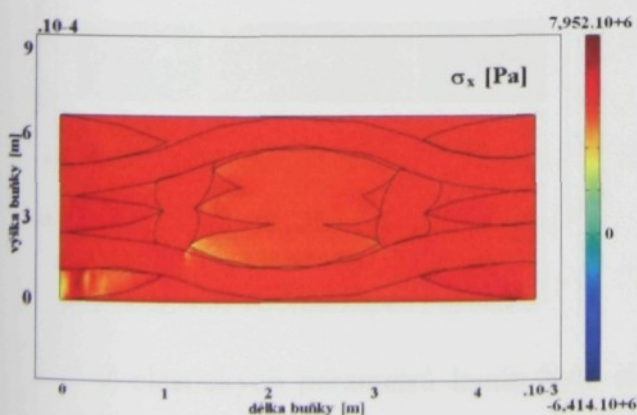


Obr. 4.25 Podélná deformace ve strukturní buňce 2

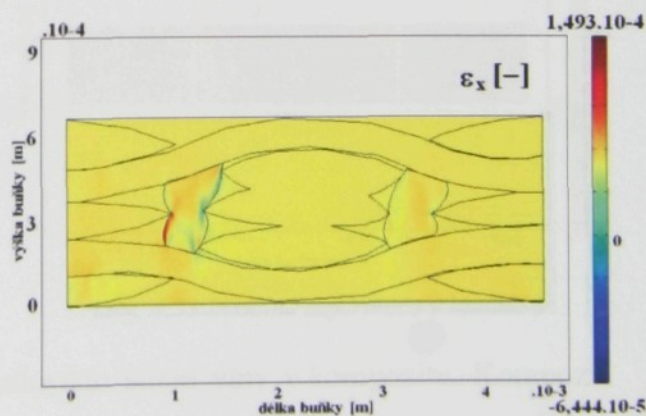
Výsledky pro strukturní buňku 3 jsou na **Obr. 4.26** a **Obr. 4.27**. Z **Obr. 4.26** plyne, že *napětí* je téměř konstantní a velmi vysoké. Nenalezneme ani uzly, ani kmitny. Relativně nižší hodnoty jsou jen v některých příčných svazcích. *Deformace* (**Obr. 4.27**) je podobně jako napětí téměř konstantní. Jiné hodnoty jsou paradoxně v dutinách.

Nedostatky simulace jsou ještě výraznější než u strukturní buňky 2, hlavně chybí vliv vlny. Poněvadž se jedná o ještě složitější strukturu, příčina bude pravděpodobně v tom, že tak složitou úlohu systém nezvládne, případně je nutno volit podstatně jemnější síť.

Pomocí průměrných napětí a deformací byly opět určeny důležité elastické moduly všech strukturních buněk. Údaje pro strukturní buňky 2 a 3 je však nutno brát s velkou rezervou. Výsledky jsou v **Tab. 4.5**.



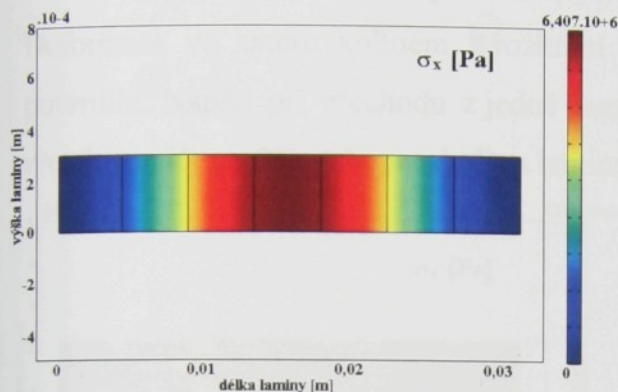
Obr. 4.26 Podélné napětí ve Strukturní buňce 3



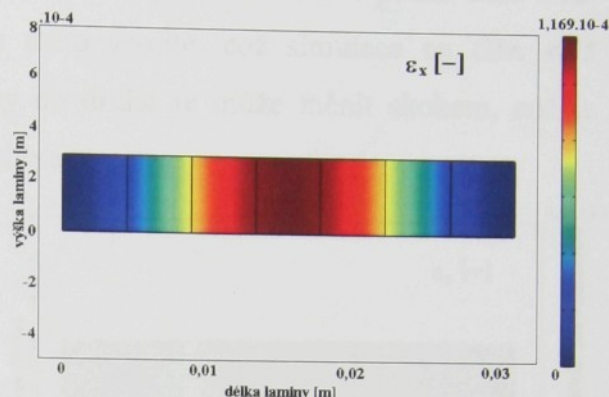
Obr. 4.27 Podélná deformace ve Strukturní buňce 3

Elastické parametry vypočtené ze strukturních buněk byly použity v simulaci odpovídajících lamin. Vliv vlny šířící se v lamině je znázorněn na **Obr. 4.28** až **Obr. 4.33**.

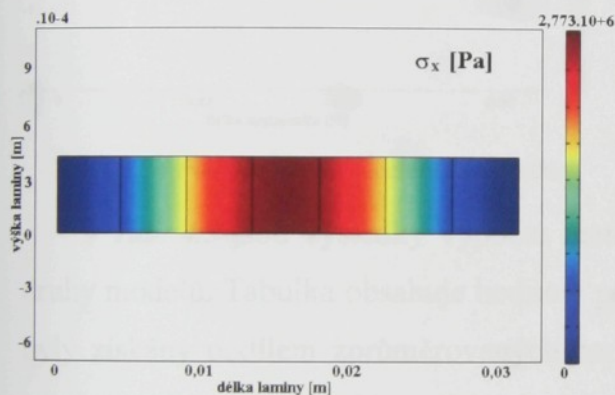
Všechny laminy (*Obr. 4.28 - Obr. 4.33*) mají napětí a deformaci koncentrovanou v místě uzlového bodu. Na volných koncích je napětí i deformace minimální a na nulové hodnotě. Laminy se chovají jako izotropní prostředí. Kvalitativně jsou průběhy stejné, kvantitativně však mají jiné hodnoty. Výsledky pro laminy typu 2 a 3 však mohou být zkresleny nesprávnými hodnotami získanými ze strukturní buňky.



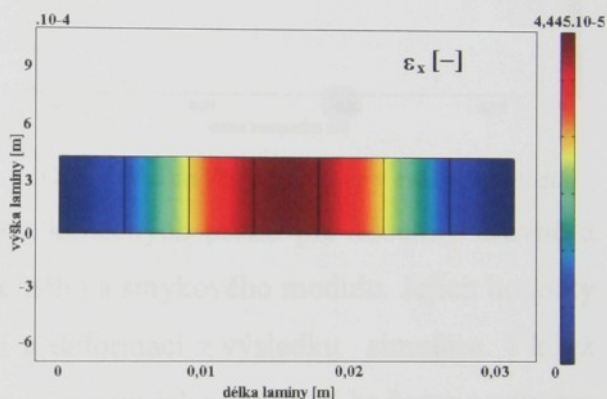
Obr. 4.28 Podélné napětí v lamině 1



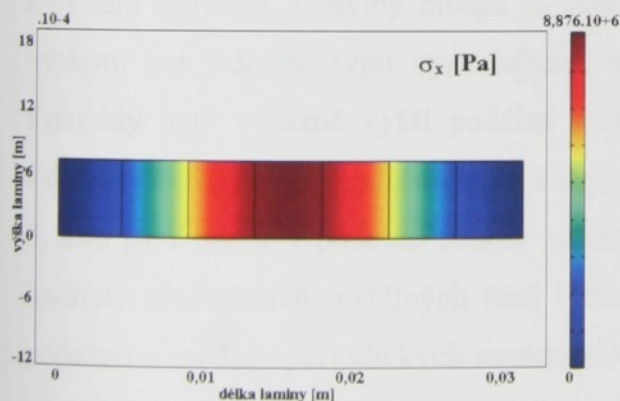
Obr. 4.29 Podélná deformace v lamině 1



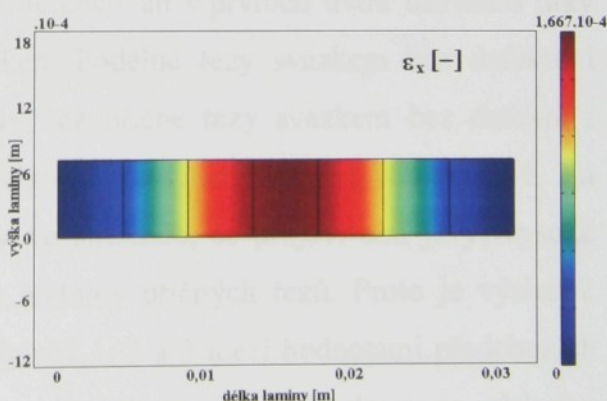
Obr. 4.30 Podélné napětí v lamině 2



Obr. 4.31 Podélná deformace v lamině 2



Obr. 4.32 Podélné napětí v lamině 3

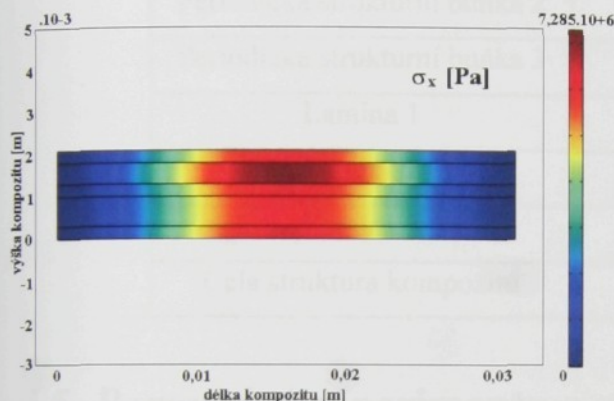


Obr. 4.33 Podélná deformace v lamině 3

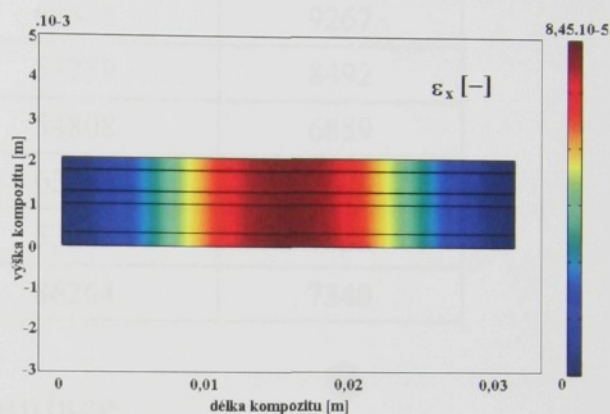
Z elastických parametrů lamin bylo simulováno šíření vlny v kompozitu. Kompozit sestával ze všech výše uvedených typů lamin. Napětí a deformace vyvolané podélnou vlnou jsou na *Obr. 4.34* a *Obr. 4.35*. Z *Obr. 4.34* a *Obr. 4.35* plyne, že podobné rozložení hodnot napětí a deformace jako pro laminy je i v celé struktuře kompozitu. Nejvyšší napětí

i deformace je obsažena ve složkách ve středu vzorku. Rozdíl je jen v rozsahu hodnoty ke krajům kompozitu. Nejdále sahá napětí v lamině s nejvyšší hodnotou podélného napětí a to v lamině 2. Přesto jsou napětí i deformace v laminách velmi vyrovnané a na výsledném kompozitu tedy nejsou větší rozdíly mezi jednotlivými složkami.

Laminy jsou upořádané paralelně, jde o případ stejné deformace, podle **Obr. 2.12**. Deformace ve směru kolmém k rozhraní se mění spojitě, což simulace na **Obr. 4.35** potvrdila. Napětí při přechodu z jedné laminy do druhé se může měnit skokem, což je zřetelně vidět na **Obr. 4.34** pro druhou laminu shora.



Obr. 4.34 Podélné napětí v celém kompozitu



Obr. 4.35 Podélná deformace v celém kompozitu

V **Tab. 4.5** jsou výsledky výpočtu metodou konečných prvků pro všechny úrovně a druhy modelů. Tabulka obsahuje hodnoty podélného a smykového modulu. Jejich hodnoty byly získány podílem zprůměrovaných napětí a deformací z výsledku simulace. I když některé hodnoty jsou problematické, je dobré si všimnout jak se vyvíjejí hodnoty postupem k vyšším úrovním. Podélný modul je velmi diferencován v prvních dvou úrovních díky výskytu jen jednoho typu vyztužujících vláken. Podélné řezy svazkem bez defektu i s defekty mají výrazně vyšší podélné moduly než příčné řezy svazkem bez defektů i s defekty²¹. Smykový modul vykazuje stejné relace. V úrovních periodických buněk 1, 2 a 3, kde jsou příčné i podélné svazky zahrnuté ve struktuře, se projeví oba jevy, vysoké hodnoty předchozích podélných řezů i nízké hodnoty příčných řezů. Proto je výsledek podélného modulu periodických strukturních buněk 1, 2 a 3 mezi hodnotami předchozích nižších úrovní²². Je zde názorně ukázán postup skládání vlastností tak, aby se na výsledku projevil synergický efekt.

²¹ Zde je však nutno mít na paměti, že vliv defektů nebyl do simulace zahrnut správně.

²² I zde však simulace nebyla zcela v pořádku pro buňku 2 a zejména buňku 3.

Tab. 4.5 Přehled výsledků simulace v Comsol Multiphysics

Úroveň a typ modelu	Podélný modul [MPa] $E = \sigma_x / \varepsilon_x$	Smykový modul [MPa] $G = \tau_{xy} / \gamma_{xy}$
Příčný řez svazkem	253	103
Podélný řez svazkem	160289	61571
Příčný řez svazkem s defekty	190	39
Podélný řez svazkem s defekty	130663	40005
Periodická strukturní buňka 1	54813	9530
Periodická strukturní buňka 2	62375	9267
Periodická strukturní buňka 3	53259	8492
Lamina 1	54808	6859
Lamina 2	62385	7608
Lamina 3	53245	6684
Celá struktura kompozitu	86264	7340

4.5 Porovnání experimentu a simulace

V této kapitole je porovnání výsledků elastických konstant z experimentu a simulace. Jsou zde obsaženy diskuze podélných a smykových modulů. Zhodnocení je vztaženo k rozložení hodnot v rovině výztuže. Porovnání výsledků experimentu a simulace je v

Tab. 4.6.

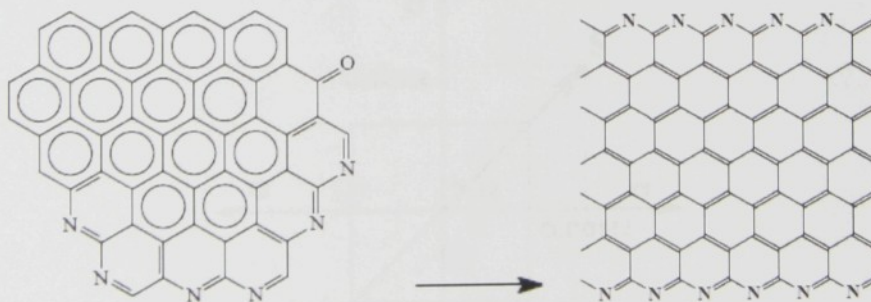
Tab. 4.6 Výsledky elastických modulů z experimentu a simulace

	Podélný modul [GPa] $E = \sigma_x / \varepsilon_x$	Smykový modul [GPa] $G = \sigma_{xy} / \varepsilon_{xy}$
Karbonizovaný kompozit z experimentu po osnově	50,0	9,10
Karbonizovaný kompozit z experimentu po útku	46,5	8,77
Grafitizovaný kompozit z experimentu po osnově	103,0	7,63
Grafitizovaný kompozit z experimentu po útku	108,0	7,55
Výsledný kompozit ze simulace	86,3	7,34

Hodnoty podélných modulů získaných experimentem se výrazně liší podle použité technologie, pro grafitizovaný kompozit jsou dvakrát vyšší. Výsledek simulace pro podélný modul, i přes některé chyby při její aplikaci, je v mezích mezi grafitizovaným a karbonizovaným vzorkem. Lze prohlásit, že simulace poskytují věrohodné výsledky. Problém dosažení lepší shody je v tom, že simulace nemohla zahrnout změny v elastických vlastnostech základních prvků struktury, uhlíkových vláken a matrice během technologie prostě z toho důvodu, že nejsou známy a nedají se prakticky měřit.

Z hlediska smykových modulů je tento závěr ještě výstižnější. Grafitizované vzorky pro experiment i simulaci poskytují stejné výsledky. Smykový modul karbonizovaného vzorku je podle experimentu vyšší.

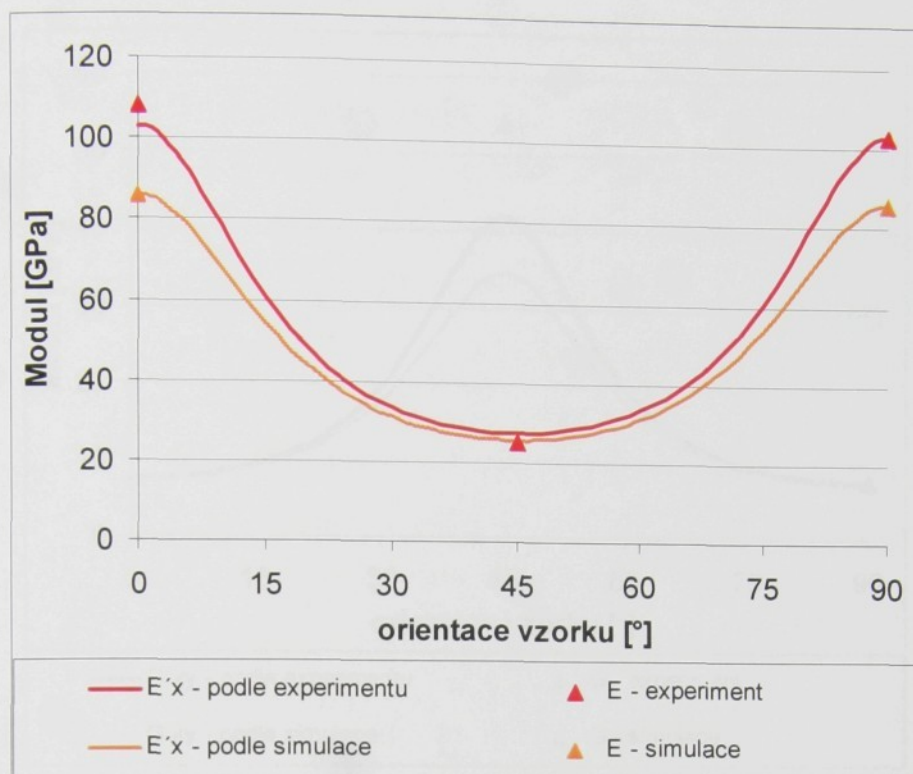
Rozdíl mezi moduly u karbonizovaného a grafitizovaného kompozitu lze vysvětlit ze změny struktury uhlíkových vláken, změnou uspořádaností a tuhostí molekulových řetězců u vyztužujících vláken. Při vyšším teplotním zpracování dochází k lepší orientaci mezimolekulárních řetězců podle **Obr. 4.36**. Ve směru vlákna (ve směru kolmém k rovině řetězců) se tak zvýší odolnost proti protažení (podélné deformaci). Podélný modul naroste. Naopak v rovině řetězců se sníží odolnost proti skluzu, smykový modul se sníží. Experiment tuto teorii podle **Tab. 4.6** naprosto potvrzuje.



Obr. 4.36 Struktura karbonizovaného vlákna přechází do grafitizované struktury [1]

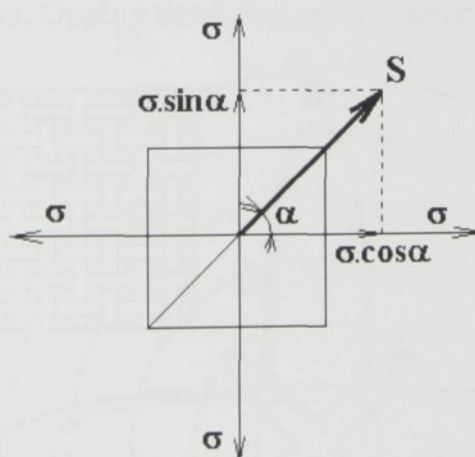
Podélný modul získaný z experimentu je ve směru vyztužujících svazků vláken vyšší než ze simulace, **Obr. 4.37**. Ostatní průběh vypočítaný podle teoretických rovnic²³ (4.1) je vyrovnaný a ve směru 45° k výztuži se hodnoty podélných modulů téměř neliší.

²³ Poissonovo číslo je dosazeno do rovnic vždy jako hodnota z experimentu i pro podélný modul ze simulace.



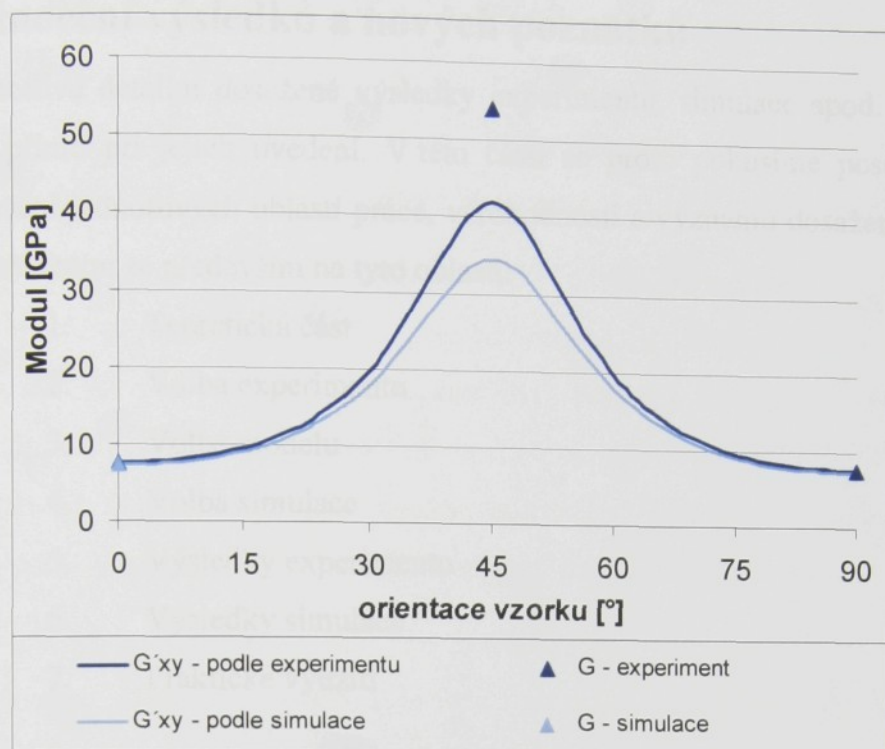
Obr. 4.37 Srovnání výsledků E experimentu a simulace v závislosti na směru silového působení

Pokud na kompozit působí síla pod jiným úhlem než v osách symetrie je možné tuto sílu převést na napětí do směrů symetrie. V případě, že tento úhel je 45° , viz **Obr. 4.38**, je výsledná hodnota napětí stejná pro oba směry symetrie, neboť $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ$ [80,86].



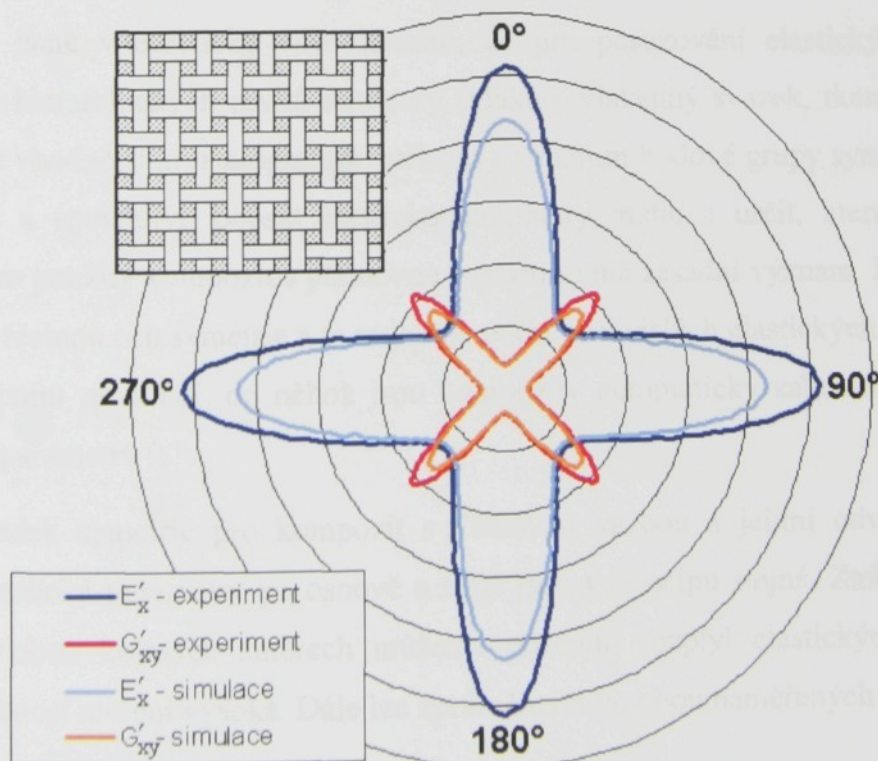
Obr. 4.38 Transformace napětí ze směru působící síly do směrů ortotropie [86]

Obr. 4.39 ukazuje výsledné smykové moduly podle experimentu i podle simulace tak, jak by působily v kompozitu podle výpočtu (4.2). Smykový modul v obou případech působí v ploše výztuže od směru osnovy až po útkový směr. Hodnoty jsou stejné pro směry svazků vláken a pro směr úhlu 45° je smykový modul nejvyšší. Smykový modul ze simulace je mírně nižší pod úhlem 45° . Trend je přesto naprosto stejný.



Obr. 4.39 Srovnání výsledků G experimentu a simulace v závislosti na směru silového působení

Na Obr. 4.40 jsou porovnání podélných a smykových modulů pro experiment i simulaci v rovině vyztužujících vláken po osnově, po útku i v různých úhlech. Předchozí závěry jsou zde pouze potvrzeny. Nejvyšší podélný modul je ve směrech výztuže, nejnižší ve směrech 45° ke svazkům. Opačný trend platí pro smykové moduly.



Obr. 4.40 Srovnání průběhů výsledků experimentu a simulace grafitizovaného kompozitu podle výpočtu

5 Zhodnocení výsledků a nových poznatků

Jednotlivé detailní dosažené výsledky experimentu, simulace apod. byly kriticky posouzeny přímo při jejich uvedení. V této části se proto pokusíme posoudit celkový přístup k řešení jednotlivých oblastí práce, věrohodnosti a významu dosažených výsledků apod. soustředěním se především na tyto oblasti:

1. Teoretická část
2. Volba experimentu
3. Volba modelu
4. Volba simulace
5. Výsledky experimentu
6. Výsledky simulace
7. Praktické využití

V teoretické části jsou poměrně podrobně popsány na základě lineární teorie pružnosti²⁴ podélné a ohybové kmity tyče jako příprava a podklady pro úplný a teoretický popis experimentální dynamické metody. Ten je nutný, poněvadž z něho vychází vyhodnocení experimentu, tj. určení elastických parametrů vzorku z naměřených rezonančních frekvencí. V první etapě byly využity výpočty provedené v Ústavu struktury a mechaniky hornin (ÚSMH) AV ČR v Praze, nyní se uvažuje o jeho dalším využití.

Dále jsme v teoretické části ukázali, že pro posuzování elastických vlastností jednotlivých hierarchických prvků struktury (vlákno, vlákenný svazek, tkanina, lamina a kompozit) je vhodnější krystalografický přístup s využitím bodové grupy symetrie. Pak lze jednoznačně a spolehlivě popsat elastické parametry matic a určit, které z nich jsou nezávislé. Pro použitý kompozit s plátňovou vazbou to má zásadní význam. Bodová grupa obsahuje čtyřčetnou osu symetrie a ta redukuje počet nezávislých elastických parametrů na 6. V ortotropním prostředí, do něhož jsou kompozity automaticky zahrnovány, je počet nezávislých parametrů 9.

Důsledek symetrie pro kompozit s plátňovou vazbou a jejími odvozeninami je v tom, že elastické parametry po osnově a útku jsou v principu stejné. Změřením těchto parametrů v obou kolmých směrech můžeme posoudit rozptyl elastických parametrů, pokud je přesnost měření vysoká. Dále lze zprůměrováním obou naměřených hodnot zvýšit

²⁴ V definici deformace se uvažují jen dva lineární členy a zanedbává s jejich součin, což je dobře splněno pro malé deformace.

přesnost určení elastických parametrů. Zůstaneme-li u ortotropního prostředí, rozdílnost vlastností po ose a útku je důsledkem struktury a tudíž zásadní. Ve skutečnosti je ale náhodná jako důsledek rozptylu vlastností či chyb experimentu. V rovině laminy má vyšetřovaný kompozit tři nezávislé elastické parametry, které byly v práci změřeny.

Elastické parametry lze měřit statickou nebo dynamickou metodou. Statická metoda má výhodu v jednoduchosti a možnosti posoudit nelinearity. Pokud se však měří za mez linearitu, je tato metoda destruktivní. V práci byly popsány vztahy, pomocí kterých lze tahovou zkouškou určit modul pružnosti a kombinaci dvou zbývajících nezávislých parametrů laminy. Poněvadž je však metoda destruktivní a nelze určit všechny nezávislé elastické parametry pouze tahovou zkouškou, od jejího použití jsme upustili.

Dynamická metoda rezonančních frekvencí má velkou výhodu v tom, že je nedestruktivní a bezdotyková, realizace je velmi blízká teoretickým předpokladům, pokud zanedbáme podepření vzorku. Dále umožňuje vybudit několik typů kmitů²⁵ a tak určit všechny tři nezávislé parametry laminy či tenkého vzorku kompozitu. Na druhé straně je obtížné zjistit energii buzených kmitů a zajistit stejnou úroveň této energie, jinými slovy stejnou úroveň buzení. S ohledem na bezdotykové buzení bude velmi nízká a tedy v oblasti linearitu. Na druhé straně to má nevýhodu v tom, že nelze zjišťovat dynamické nelinearity. Také se předpokládá, že dynamické elastické parametry nezávisí na frekvenci, tedy na rychlosti změny budící veličiny. Pro použití velmi široký rozsah měření vlastních frekvencí to nemusí být splněno. I přes tyto výhrady se dynamická metoda ukázala jako velmi úspěšná a umožnila změřit všechny elastické parametry.

Kompozit, ale i tkanina či vláknový svazek, je složitý útvar a nelze jej prostředky, které máme k dispozici, komplexně popsat. Proto se pokoušíme popsat jen nejdůležitější vlastnosti běžně známými jednoduchými objekty a používanými metodami, volíme tedy model. Úroveň modelů je rozdílná. V práci je především zmíněn složkový (směšový) model. Podle zastoupení jednotlivých strukturních prvků nahrazujeme strukturně heterogenní kompozit homogenní vrstvou podélných vláken, příčných vláken, vrstvou matrice a prázdnou vrstvou dutin. S ohledem na přítomnost dutin přichází v úvahu pouze model se stejnou deformací, tj. paralelní vrstvy. Tento nejjednodušší typ modelu jsme ale dále nerozpracovali.

²⁵ Ve shodě s běžnou praxí používáme termín kmit, ačkoliv se v experimentu jedná o stojaté vlny. Kmit je vlna šířící se nekonečnou fázovou rychlostí, což zde rozhodně není splněno. Naopak, konečná fázová rychlost se v principu měří a z její hodnoty se určují odpovídající elastické parametry.

V praxi se běžně používají tři hierarchické úrovně struktury lišící se řádově typickým rozměrem: vlákna, vlákenné svazky a tkanina či kompozit. Modelování vláken je jednoduché a dobře zvládnuto. Rovněž model vlákenného svazku, který je tvořen mnoha vlákny, je v literatuře zpracován dobře. V této práci jsme jej však rozšířili tím, že jsme zahrnuli vliv dutin na elastické vlastnosti svazku. Výstupem modelu, bez ohledu na detaily zahrnuté do modelu, je to, že se vlákenný svazek považuje za homogenní a jsou mu přiřazeny odpovídající efektivní elastické moduly. Na jejich hodnotě se podle námi použitého modelu podílejí vlákna, matrice a dutiny a samozřejmě jejich geometrie, vzájemné uspořádání.

Přechod od vlákenných svazků k lamině dává mnoho možností. Zde jsme využili aplikaci elementární buňky. S využitím fotografií řezů jsme našli tři typické buňky vyvolané lokálním skluzem dvou sousedních vrstev při výrobě v kompozitu a v důsledku jejich stlačení. Jsou to: ideální soufázová buňka (vrstvy nad sebou, typ 1), protifázová buňka (vrstvy proti sobě, typ 2) a protifázovou buňka s vtištěnými příčnými vlákny (typ 3). Uvažujeme tedy jen krajní případy, ve skutečnosti se ve struktuře naleznou buňky s každým fázovým posuvem. Existuje plynulý přechod od soufázové k protifázové buňce a lze definovat celou řadu buněk. Buňky jsme doplnili dutinami, které se často vyskytují v uzlových bodech. Heterogenní buňku na vstupu do modelu opět nahrazujeme homogenním prostředím na výstupu s odpovídajícími elastickými parametry, které se určí z parametrů vláken a matrice při respektování struktury buňky a tvaru přítomných dutin.

Jednotlivé reprezentativní buňky mají různou výšku, proto je možno model laminy sestavit jen z jednoho typu buněk. To je největší slabinou modelu, poněvadž v objemové struktuře kompozitu jsou lokálně omezené oblasti, které se svou strukturou více či méně blíží některé z definovaných buněk. Reálná struktura se tedy převede na tři diskrétní vybrané krajní případy buněk a podle jejich zastoupení se volí typ a počet lamin. V tomto kroku tedy dochází k nejhrubší aproximaci struktury.

Model laminy složený z elementárních buněk zvoleného typu je model smíšený, složený z modelů stejného napětí (sloupec buněk ve směru napětí) a stejné deformace (paralelní sloupce buněk). Lze jej již zpracovat analyticky. Model kompozitu složený z modelů lamin je pak modelem stejné deformace a lze jej opět zpracovat analyticky.

Velkou výhodou použitých modelů je malá náročnost na numerické výpočty, modelují se relativně jednoduché struktury. Nevýhodou je poměrně hrubá aproximace

struktury, částečně se zanedbává interakce mezi elementy struktury. Výsledkem je opět složkový model, je v něm však již zahrnuta i struktura kompozitu, i když dosti zjednodušeně.

Tento přístup není jediný možný, druhým extrémním případem je přejít od modelu vlákného svazku k modelu kompozitu přímo, jak je to naznačeno např. v práci [87], kde se uvažuje reálná struktura kompozitu. Pak je struktura zahrnuta podrobně nebo dokonce přesně pro daný materiál. Nároky na metodu konečných prvků a výpočetní výkon však budou extrémní, takže bude asi opět nutno hledat zjednodušení. Kompromisem se jeví úplně modelovat laminu a z lamin pak sestavit složkový model.

Použité modely, i na nízké úrovni struktury, jsou natolik složité, že aplikace metody konečných prvků je nutností. V souladu s použitou experimentální metodou jsme se pokusili simulovat kmity v realizovaných modelech. Výpočet vlastních kmitů je však hodně složitá numerická úloha i pro jednoduché struktury, proto by nemělo překvapit, že pro elementární buňky se složitou strukturou selhala. Stejně tak se projeví problémy v modelování vlivu dutin, zde však může být chyba i v zadání úlohy. I když to neodpovídá experimentu, spolehlivější a lépe použitelné výsledky bychom dostali simulací statického namáhání, k němuž v budoucnosti hodláme přejít. Zde lze např. snadno simulovat oba typy namáhání, tah i smyk.

Problémy byly i s vyhodnocením výsledků simulace. Ve shodě s experimentem měly být výstupem simulace kmitů v modelech vlastní frekvence. Elastické parametry se měly určit stejně jako u experimentu. To by ale znamenalo připravit dispersní křivky či spektrum kmitů pro všechny modely, poněvadž se liší geometrickými rozměry. Jejich získání však vyžaduje poměrně náročné programování. Z časových důvodů jsme od této možnosti upustili. Jako náhrada byly efektivní elastické vlastnosti počítány z průměrných napětí a deformací v řezu vzorkem v místě kmitny. V principu se tedy jedná o statickou metodu. Zkusmé výpočty ukázaly, že efektivní moduly vypočtené v jiných řezech se navzájem poněkud lišily, což ukazuje na to, že tento přístup není úplně v pořádku. Při statickém namáhání lze elastické parametry vypočítat tak, aby přesně odpovídaly metodě, kterou se měří. To je další důvod pro budoucí přechod ke statické simulaci. Dynamická metoda by se však neměla úplně odvrhnout, poněvadž po odladění dává možnost animace kmitů. Lze si tak učinit názornou představu o časovém průběhu elastických veličin pro jednotlivé typy kmitů, zejména ve složité struktuře, pokud ovšem MKP poskytuje přijatelné výsledky.

Pro homogenní prostředí dává teoretická metoda analytický tvar pro elastická posunutí vyvolaná stojatými vlnami. To skýtá základní ověření přesnosti a korektnosti metody konečných prvků. Analytické průběhy jsou poměrně jednoduchým vedlejším produktem programu pro výpočet spektra. Tvůrce programu však asi na tuto možnost zapomněl. Proto toto důležité porovnání se v práci nenachází.

Experiment poskytl všechny tři nezávislé elastické parametry pro kmitající vzorek kompozitu. Plocha byla přibližně čtvercová a tloušťka tvořila asi dvacetinu délky, takže teoretický předpoklad o kmitající vrstvě byl přibližně splněn a výsledky mohly být vyhodnoceny podle výsledků teorie. Ze získaných výsledků odhadujeme, že přesnost měření byla poměrně vysoká, řádu několika procent. Z mnoha důvodů, bohužel, nebyla provedena opakovaná měření na témže vzorku s cílem zjistit chybu měření (aparatury). Zjištěné odchylky jsou tedy součtem chyby měření a rozptylem parametrů vzorku. Pokud by byla spolehlivě zjištěna chyba měření, bylo by možno odhadnout rozptyl materiálových parametrů vzorku.

Poněkud překvapil velký rozsah hodnot Poissonovy konstanty, která nabývala hodnoty 0,51 a po tepelném zpracování dokonce 0,78. Pro anizotropní prostředí to je sice hodnota přípustná, nicméně by se měla blíže prozkoumat její věrohodnost.

Důležitou skutečností je i to, že se podařilo spolehlivě měřit elastické parametry i v jiných směrech než osnovy a útku, ačkoliv je zde od autorů metody varování o možných problémech. V našem případě se však spektrum podařilo správně vyhodnotit.

Měření na zjednodušeném vějíři řezů spolehlivě prokázalo, že Youngův modul (ale i ostatní elastické moduly) jsou v rovině kompozitu symetrické podle čtyřčetné osy. Podle Neumanova principu má tedy struktura kompozitu čtyřčetnou osu symetrie, což jsme teoreticky odvodili z geometrie plátňové vazby. Elastické parametry vykazují poměrně silnou anisotropii. To potvrzuje i skutečnost že tři získané elastické parametry, Youngův modul, modul ve smyku a Poissonovo číslo jsou nezávislé. V izotropním prostředí platí mezi nimi poslední ze vztahů (3.64). Po dosazení naměřených hodnot však zjistíme, že tento vztah pro vyšetřovaný kompozit neplatí ani přibližně. Dokonce dostáváme nepřipustné hodnoty pro vypočtené Poissonovo číslo, např. hodnota větší než 1, nebo nulová.

Měření prokázalo, že tkaninový kompozit s plátňovou vazbou není ortotropním prostředím, jak se všeobecně uvádí. Naopak vykazuje daleko vyšší symetrii. Toho jsme využili ke zpřesnění naměřených hodnot.

Základním cílem numerické simulace modelů bylo zjistit ze znalosti základních elastických parametrů komponent a jejich geometrie průměrné elastické parametry, které by se v principu získaly měřením. Prvním problémem byla nedostatečná znalost všech elastických parametrů. Základní stavební jednotka, vlákno, které je transversálně isotropní, má pět nezávislých elastických modulů. Výrobce však uvádí jen jediný, podélný modul, který je však na druhé straně nejdůležitější. Považovali jsem je tedy za isotropní prvek a za Poissonovu konstantu jsme dosadili typickou hodnotu 0,24. Při tepelném zpracování se mění jeho struktura a tedy určitě i elastické vlastnosti. Kvalitativně jsme změnu i její tendenci vysvětlili, kvantitativní hodnoty však chybí.

Po kvalitativní stránce se u většiny modelů podařilo simulovat kmity. Věrohodnost řešení se částečně potvrdila tím, že byly splněny okrajové podmínky na hranici použitých objektů. To jsme důsledně kontrolovali u všech výstupů. I když ve většině případů došlo k simulování kmitů, u složité struktury simulace selhala. Zhruba je tedy možno na základě našich výsledků odhadnout strukturu, pro kterou dá ještě simulace kmitů spolehlivé výsledky. Výpočet elastických parametrů byl v principu v pořádku, avšak v některých případech, v důsledku nepřesných či dokonce nesprávných výsledků simulace, jejich hodnota nemusí být správná. Proto je nutno je brát s výhradami. To je též důvod, proč plánujeme ověření takto získaných hodnot pomocí statického namáhání.

Metoda konečných prvků je velmi účinná, na druhé straně však i nebezpečná metoda. Pokud dojde při zadání k jakékoliv chybě, použijí se nesprávné údaje, vychází se z nepřipustných zanedbání apod., dostaneme numerický výsledek, který vůbec není ve shodě s realitou. Neobjeví se však žádné varování, jak to dělají relativně jednoduché programové produkty. Proto je nutno všechny výsledky kriticky posoudit. Nejjednodušší je ověřit, zda vypočtené průběhy jsou v souladu s očekáváním. Přesnější je kontrola typických grafických výstupů nebo informací získaných dalším zpracováním numerických výstupů. Zde lze poměrně snadno ověřit, zda jsou věrohodné, splňují očekávání, nejsou v rozporu s fyzikálními zákony atd. Nejlepší je však provést výpočet ještě jiným způsobem a výsledky porovnat. O kritické posouzení jsme se při prezentaci výsledků simulace důsledně pokoušeli.

V přehledné tabulce jsme uvedli vypočtené elastické parametry pro všechny úrovně modelů. I když k získaným hodnotám jsou výhrady, přesto z výsledků vyplývají některé závěry. Vlákenné svazky vykazují velmi silnou anizotropii parametrů. Ve směru kolmém na vlákna je příčný Youngův modul minimálně o řád nižší než podélný modul ve směru vláken. To lze snadno vysvětlit vlivem matrice, která má velmi malou tuhost a v příčném směru má dominantní vliv. O elastických vlastnostech svazků tedy rozhodují vlákna. Vliv poruch zhoršuje elastické vlastnosti vlákenných svazků, což se dalo očekávat. Vypočtené elastické parametry jednotlivých typů buněk se podstatně neliší, totéž platí i pro laminy. Zde je však nutné nezávislé ověření výsledků. Poměrně překvapivé je, že podélný modul kompozitu je podstatně vyšší než vstupní moduly. I v tomto případě je nutné nezávislé ověření.

Výsledky simulace lze však prakticky použít i opačným způsobem. Pokud máme jistotu, že MKP dává spolehlivé výsledky, lze měnit vstupní elastické parametry zejména vláken a matrice a porovnat shodu s experimentem. Pro nejlepší shodu lze přiřadit přesnější hodnoty vstupním parametrům, tj. vláknům a matrici. Takto lze např. nepřímě zjistit, jak se v technologickém procesu mohou změnit elastické parametry vláken. Nejlépe metoda funguje pro jeden proměnný parametr. S opatrností se dá aplikovat i pro dva proměnné parametry. Pro větší počet lze však snadno dojít k hodnotám, které nejsou v pořádku a jsou vlastně bezcenné.

Pro praxi má velký význam to, že dynamickou metodou lze získat všechny elastické parametry s vysokou přesností. Neměla by se však opomíjet ani statická metoda měření. Dále se ukázalo, že metoda konečných prvků má výrazná omezení a její výsledky se mohou použít až po důkladném ověření. Na druhé straně se dosáhlo přijatelného souhlasu mezi předpovědí modelu a experimentem.

6 Závěr

Způsob řešení a kritické posouzení dosažených výsledků bylo provedeno v předchozí diskusi, kapitole 5. V závěrečné části stručně shrneme dosažené výsledky, upozorníme na jejich praktický význam a nastíníme postup dalších prací.

V práci je použit jiný teoretický přístup, kdy jsou vlastnosti všech objektů popsány při použití metod krystalografie na základě bodové grupy odvozené z jejich struktury. Tento popis je mnohem přehlednější a ukázal, že v případě kompozitu s plátňovou vazbou je symetrie vyšší (čtyřčetná osa), než se běžně předpokládalo. Experiment tento závěr plně podpořil, podélný Youngův modul má symetrii podle čtyřčetné osy.

Dále byl v teoretické části zpřesněn složkový model kompozitu, tím že byly zavedeny tři typy strukturních buněk, které lépe zohledňují reálnou strukturu. Tyto typy buněk představují tři krajní případy. I přes to, že struktura není přesně respektována ani tímto modelem, je její vliv zahrnut do modelu daleko více, než u základního směsového modelu.

Pokud jde o experiment, dynamická měření poskytla poměrně přesné hodnoty všech tří nezávislých elastických parametrů pro rovinnou desku. Měření prokázalo, že elastické vlastnosti závisí na technologickém postupu a teorie tuto závislost kvalitativně vysvětlila.

Matematická aplikace připravených modelů byla realizována pomocí metody konečných prvků. Aplikovaná dynamická metoda simulace kmitů byla sice v souladu s experimentem, ale v případě složitějších struktur neposkytla správné výsledky. Proto nejsou zaručeny některé vypočtené elastické parametry. Vhodnější se v tomto případě jeví statická metoda, aplikace vhodného konstantního napětí. I přes tento nedostatek se však ukázalo, že shoda teoretické předpovědi s experimentem byla uspokojivá. Připravené strukturní modely umožňuje na základě vstupních elastických vlastností vláken a matrice a z předpokládané struktury spolehlivě odhadnout elastické vlastnosti produktu. Tím byly cíle práce naplněny.

V oblasti experimentu by se další práce by se měly soustředit na statická měření na vějíři řezů a získání příslušných elastických parametrů. Dále by bylo vhodné upravit model tak, aby vycházel z vlastností lamin a ne buněk. Aplikace metody konečných prvků by se měla provádět staticky, tak se získají spolehlivější hodnoty s praktickým využitím.

7 Literatura

- [1] Grégr, J.: Uhlíková vlákna. Studijní materiály, TU v Liberci, Liberec, 2002
- [2] Agarwal, B.D.; Broutman, L.J.: Vláknové kompozity. SNTL, Praha, 1987
- [3] Salačová, J.: Teoretické principy modelování elastických vlastností kompozitů s textilní výztuží. Práce PGS, TU v Liberci, Liberec, 2001
- [4] Savage, G.: Carbon-Carbon Composites. Chapman and Hall, London, UK, 1993
- [5] Cox, B.; Flanagan, G.: Handbook of Analytical Methods for Textile composites. Nasa Contractor Report 4750, Virginia, USA, 1997
- [6] Berthelot, J.-M.: Composite Materials. Mechanical Behavior and Structural Analysis. Springer-Verlag New York, USA, 1999
- [7] Kaw, A.K.: Mechanics of Composite Materials. Taylor and Francis Group, USA, 2006. ISBN 0-8493-1343-0
- [8] Kühn GbR: Mesoscopic resolution of plain-weave. Internetové stránky Fraunhofer Institute for High-Speed Dynamics, Ernst-Mach-Institut (EMI), Freiburg, Německo, Staženo dne 12.12.2007.
<http://www.emi.fraunhofer.de/EN/ResearchFieldsAndContacts/ProjectExamples/WovenFabrics.asp>
- [9] Fitzer, E.; Manocha, L.M.: Carbon reinforcement and Carbon-Carbon Composites. Springer verlag, Berlin, 1998
- [10] Bogdanovich, A.E.; Pastore, C.M.: Mechanics of textile laminated composites. Chapman and Hall, London, UK, 1996
- [11] Marvalová, B.: Určení efektivních mechanických vlastností kompozitů vyztužených tkaninou plátnové vazby. Docentská habilitační práce. TU v Liberci, Liberec, 2000
- [12] Marvalová, B.: Určení pružnostních charakteristik kompozitu vyztuženého tkaninou. Strutex 99, TU v Liberci, Liberec, 1999
- [13] Lomov, S.V.; a kol: Homogenisation of a sheared unit cell of textile composite: FEA and aproximace inclusion model. Katolická univerzita v Leuvenu, Leuven, Belgie, 2004. <http://www.mtm.kuleuven.ac.be/Research/C2/poly/index.htm>
- [14] Lomov, S.V.; a kol: Virtual textile composites software WiseTex: Integration with micro-mechanical, permeability and structural analysis. Katolická univerzita v Leuvenu, Leuven, Belgie, 2007
- [15] D'Amato, E.: Finite Element Modeling of Textile Composites. Elsevier, Composite Structures 54 (2001) p. 467-475

- [16] Kuhn, J.L; Charalambides, P.G.: Modelling of Plain Weave Fabric Composite Geometry. *J. of Composite Materials*, Vol. 33, No. 3, 1999, pp. 188-220
- [17] Lomov, S.V.; a kol: Textile composites: modelling strategies. *Composites Part A: applied science and manufacturing*. Elsevier Science Ltd., 2001, str. 1379-1394
- [18] Yurgartis, S.W.; Morey, K.; Jortner, J.: Measurement of yarn shape and testing in plain weave composites. *Composites Science and Technology*, Vol.46, No.1, 1993, 39-50
- [19] Vopička, S.: Popis geometrie vyztužujícího systému v tkaninových kompozitech. Disertační práce, Technická univerzita v Liberci, 2004
- [20] Seják, P.; Košek, M.: Analysis of Stochastic Character on Yarn Waviness in Woven Composites. *Proc. of ICCE 11*, University of New Orleans, New Orleans, USA, 2004
- [21] Palán, M.: Tepelné vlastnosti kompozitů C/C vyztužených textilní tkanou výztuží Disertační práce, TU v Liberci, Liberec, 2002
- [22] Žaloudková, M.: Sledování pórovitosti C-C kompozitů v procesu přípravy obrazovou analýzou v korelaci s jejich mechanickými vlastnostmi. Disertační práce. Technická univerzita v Liberci, Liberec, 2006
- [23] Tomková, B.: Modelling of Thermophysical Properties of Woven Composites. Disertační práce. Technická univerzita v Liberci, Liberec, 2006
- [24] Vozková, P.: Voids' System in the Woven Composite Structure. *International forum on Textile Science and Engineering for Doctoral Candidates*. Journal of Donghua University, Sanghai, China, 2006, p. 91-96, ISSN 1672-5220 English Edition
- [25] Tomková, B.; Košková, B.: The porosity of plain weave composite as an input parameter for evaluation of material properties. *Proc. of International Conference Carbon 2004*, Providence, USA, 2004, 50
- [26] Vozková, P.: Elastic Properties of Woven Composites. *CD Proceedings of the Conference 15th Annual International Conference on Composites/Nano Engineering*, Haikou, Hainan Island, China, 2007
- [27] Ivanov, S.; Ivanov, D.; Lomov, S.; Verpoest, I.: Modelling of mechanical behaviour of textile glass-polypropylene composite. *BEM-FEM Conference*, St.Petersburg, Russia, 2007
- [28] Torayca® TY-030B-01 Test Method. Method for determination of tensile strength, tensile modulus of elasticity and elongation at break. *Toray Carbon Fibers America, Inc., USA*, 2001

- [29] Broughton, B.; Lodeiro, M.J.: Environmental and Fatigue Testing of Fibre-Reinforced Polymer Composites. Centre for Materials Measurement and Technology, UK, 2000
- [30] Porter, T.R.: Evaluation of flawed composite structure under static and cyclic loading. Kniha ASTM Development in fracture mechanics test methods standardization, ASTM STP 632, USA, 1976, 04-632000-30
- [31] Kolektiv autorů: Composite material handbook. Volume 4. Metal matrix composites. Department of Defence, USA, 1999
- [32] Pipes, R.B. (Editor): Nondestructive evaluation and flaw criticality for composite materials. Kniha ASTM American Society for Testing and Materials, STP696, USA, 1979, 79-53320
- [33] Introduction to Nondestructive Testing. Prezentace organizace pro nedestruktivní testování The Collaboration for NDT Education. Vytvořeno 2002. <http://www.ndt-ed.org/GeneralResources/IntroToNDT/GenIntroNDT.htm>
- [34] Internetové stránky o nedestruktivním testování NDT net. Rolf Diederichs, vytvořeno: 2007-07-03. <http://www.ndt.net/ndtaz/ndtaz.php>
- [35] NDT Applications and Limitations. NDT Encyklopedie nedestruktivního testování, NDT net. Vytvořeno 2007. <http://www.ndt.net/ndtaz/ndtaz.php>
- [36] LaPlante, G.; a kol.: Detection of water ingress in composite sandwich structures: a magnetic resonance approach. NDT and E International, Volume 38, Issue 6, 2005, strany 501-507
- [37] Chang, F.H.; Gordon, D.E.; Gardner, A.H.: A Study of Fatigue Damage in Composite by nondestructive testing techniques. Kniha ASTM Fatigue of filamentary composite material. ASTM, USA, 1976, 04-636000-33
- [38] Kim, J.; Liaw, P.K.; Wang, H.: The NDT Analysis of Tension Behavior in Nicalon/SiC Ceramic Matrix Composites. Journal of the minerals, metals and material, JOM Society, USA, 2003
- [39] Computed tomography. (2008, May 18). In *Wikipedia, the free encyclopedia*. Retrieved May 18, 2008, from http://en.wikipedia.org/wiki/Computed_tomography
- [40] Hsu, D.K.: Nondestructive testing using air-borne ultrasound. Proceedings of Ultrasonics International (UI'05) and World Congress on Ultrasonics (WCU), Volume 44, Supplement 1, 2006, Pages e1019-e1024
- [41] Introduction to nondestructive testing. American Society for Nondestructive Testing, Inc., USA, 2008, <http://asnt.org/ndt/primer1.htm>

- [42] Toyama, N.; Takatsubo, J.: Lamb wave method for quick inspection of impact-induced delamination in composite laminates. *Composites Science and Technology*, Volume 64, Issue 9, July 2004, Pages 1293-1300
- [43] Najafi, S.K.; Bucur, V.; Ebrahimi, G.: Elastic constant of particleboard with ultrasonic technique. *Materials Letters* Volume 59, Issue 16, 1 July 2005, Pages 2039-2042
- [44] Černý, M.: Měření elastických konstant ortotropních materiálů ve tvaru desek a trubek metodou rezonančních frekvencí. *Disertační práce*. ČVUT FS, Praha, 2000
- [45] Brepta, R.; Půst, L.; Turek, F.: *Mechanika kmitání*. Technický průvodce 71. Sobotáles, Praha, 1994
- [46] Brepta, R.; Prokopec, M.: *Šíření napěťových vln a rázy v tělesech*. Academia, Praha, 1972
- [47] Internetové stránky University ve Standfordu, studijní materiály, vytvořil Stefan Bilbao 22.1.2002, <http://ccrma.stanford.edu/>
- [48] Puchegger, S. et al.: Experimental validation of the shear correction factor. Letter to editor, *Journal of Sound and Vibration* 261 (2003) p. 177-184
- [49] Cheby, S.H.; Hwu, CH.: On-line measurement of material properties for composite wing structures. *Composites Science and Technology*, Volume 66, Issues 7-8, 2006, strany 1001-1009
- [50] Hruš, T.: *Základy metody konečných prvků*. TU v Liberci, Liberec, 2005, ISBN 80-7083-896-5
- [51] Reddy, J.N.: *An Introduction to the Finite Element Method*. Third Edition, Mc Graw-Hill Higher Education, New York, 2006. ISBN 0-07-246685-5
- [52] Internetové stránky encyklopedie Wikipedia. Naposledy aktualizováno 06:37, 2.8.2007, <http://www.wikipedia.org/>
- [53] Hokr, M.: *Poznámky k přednáškám z předmětu Aplikace počítačových modelů na FM TUL*. TUL, Liberec, 2006
- [54] Elman, H.; Silverster, D.; Wathen. A.: *Finite Elements and Fast Iterative Solvers*. Numerical mathematics and scientific computation, Oxford Science Publications, Oxford, 2005, 0-19-852867-1
- [55] Boisse, P.; Hamila, N.; Badel, P.: Finite element modelling of textile deformations at meso and macro scale. *BEM-FEM Conference*, St.Petersburg, Russia, 2007
- [56] Internetové stránky distribuční společnosti pro Matlab a Femlab - <http://www.humusoft.cz/femlab/indexcz.htm>

- [57] Tomková, B.: Směšovací pravidla. 10. přednáška z předmětu Kompozity s textilní výztuží. TU v Liberci, Liberec, 2006
- [58] Adanur, S.; Liao, T.: 3D modeling of textile composite preforms. *Composites, Part B* 29B, Elsevier Science Ltd., 1998, str. 787-793
- [59] Lomov, S.V.; a kol: Meso-FE modelling of textile composites: road map, data flow and algorithms. International conference ICCM-15, Kyoto, Japan, 2007
- [60] Lomov, S.V. a kol.: Meso-FE modelling of textile composites: Road map, data flow and algorithmus. *Science Direct, Composites Science and Technology* 67 (2007) 1870-1891
- [61] Verpoest, I.; Lomov, S.V.: Virtual textile composites software WiseTex: Integration with micro-mechanical, permeability and structural analysis. *Science Direct, Composites Science and Technology* 65 (2005) 2563-2574
- [62] Mikolanda, T., Lomov, S., Košek, M.: VRTex – a System for 3D Visualization of Textile Structures, Int. Conference STRUTEX 11, Liberec, 2004, p. 109-116
- [63] Durville, D.: Finite element simulation of textile materials at mesoscopic scale. BEM-FEM Conference, St.Petersburg, Russia, 2007
- [64] Šejnoha M.: Homogenizace heterogenních materiálů – podobnost mezi textilními kompozity a historickými zděnými konstrukcemi. Přednáška v rámci Centra pro jakost a spolehlivost výroby pro TUL TF. Liberec, 2007
- [65] Skoček, J.; Zeman, J.; Šejnoha, M.: On determination of periodic unit cell for plain weave fabric composites: Geometrical modelling of real world materials. *Engineering Mechanics*, 2005
- [66] Zeman, J.; Šejnoha, M.: Homogenization of balanced plain weave composites with imperfect microstructure. Part I. Theoretical formulation. *International Journal of Solids and Structures*, 41(21–22):6549–6571, 2004
- [67] Zeman, J.: Analysis of composite materials with random microstructure. Volume 7 of CTU Reports. CTU in Prague, 2003. p. 177
- [68] Zeman, J.; Šejnoha, M.: Homogenization of Plain Weave Composites with Imperfect Microstructure Conference ICTAM XXI, Poland, 2004
- [69] Matouš, K.: Analysis and Optimization of Composite Materials and Structure. Volume 4 of CTU Reports. CTU in Prague, 2003
- [70] Hivet, G.; Boisse, P.: Consistent geometrical description and finite element modelling of woven fabrics. Application to compaction. BEM-FEM Conference, St.Petersburg, Russia, 2007

- [71] Brepta, R.: Vlny napětí a rázové jevy v lineárně elastických a viskoelastických prostředích. TU v Liberci, Lenam, s.r.o. Liberec, Liberec, 1997, ISBN 80-7083-228-2
- [72] Miravete, A.: 3-D textile reinforcements in composite materials. Book of contributors. Woodhead Publishing Ltd Cambridge England and CRC Press USA, 2000
- [73] Vinson, J.R.; Chou T.W.: Composite materials and their use in the structure. Applied science publishers Ltd., London, 1975.
- [74] Vaidyanathan, R.; Gowayed, Y.; El-Halwagi, M.: Computer-aided design of fiber reinforced polymer composite products. Pergamon, *Computers chem. Engng* Vol. 22, No. 6, p. 801408, 1998
- [75] Stráž, B.: Mechanika textilií Část 2: Aplikace mechaniky kontinua. TUL, Liberec, 2002
- [76] Stráž, B.: Mechanika kontinua. Přednášky pro magisterské studium. TUL, Liberec, 2002
- [77] Nye, J.F: Physical properties of crystals: their representation by tensors and matrices. Clarendon press, Oxford, 2004. ISBN 0-19-851165-5
- [78] Černý, M.; Glogar, P.; Manocha, L.M.: Resonant frequency study of tensile and shear moduli of carbon fibre reinforced composites. Pergamon, *Carbon* 38 (2000) 2139-2149
- [79] Internetové stránky firmy CNS Farnell – World Class Ultrasonic Test Equipment, Brožura popisující přístroj Erudite pro testování rezonančních frekvencí. 2004. <http://www.cnsfarnell.com/index.asp?pgid=16>
- [80] Laš, V.: Mechanika kompozitních materiálů. Západočeská Univerzita v Plzni, Fakulta aplikovaných věd, Plzeň, 2004. ISBN 80-7043-273-X
- [81] Internetové stránky firmy Toray. Výrobní protokoly vláken T800, 2006. <http://www.torayusa.com/>
- [82] Internetové stránky Amazon.com – o materiálech od A do Z. <http://www.azom.com/>
- [83] Taljera, R.; Manson, J.-A.E.: Polymer Matrix Composites. Pergamon, Elsevier, Amsterdam, 2001
- [84] Comsol Multiphysics. Školení programu Comsol Multiphysics. Humusoft s.r.o., 2004
- [85] Comsol Multiphysics User's Guide Version 3.2. Structure Mechanical Module. 2005
- [86] Hóschl, C.: Pružnost a pevnost I. Skripta, Vysoká škola strojní a textilní v Liberci, Liberec, 1992.
- [87] Seják. P.: Geometrické modely struktury textilního kompozitu se zaměřením na studium vlivu struktury na výsledné vlastnosti. Disertační práce, TUL, Liberec, 2008

8 Práce autora se vztahem ke studované problematice

- [1] Vozková P.: Analýza strukturních defektů v tkaninových kompozitech C/C. s atlasovou vazbou. Diplomová práce. TU v Liberci, Liberec, 2003.
- [2] Vozková, P.: Classification of Voids' System in the Woven Composite Structure. Proceedings of the Conference Reinforced Plastics 2006, Balatonvilagos, Hungary, 2006, p. 165-172
- [3] Vozková, P.; Salačová, J.: Description/Possibilities: Ideal and Real Structure of Woven Composites. Proceedings of the Conference Texco 2006 International Material Conference, Ruzomberok, Slovakia, 2006, p. 147-152, ISBN 80-7372-102-3
- [4] Vozková, P.: Vlastnosti uhlíku. Práce ke zkoušce z PGS, TU v Liberci, 2006
- [5] Vozková, P.: Voids' System in the Woven Composite Structure. International forum on Textile Science and Engineering for Doctoral Candidates. Journal of Donghua University, Sanghai, China, 2006, p. 91-96, ISSN 1672-5220 English Edition.
- [6] Vozková, P.: Relation between Structure and Properties in Woven Composites. Proceedings of the Conference Strutex 13rd International Conference, TU v Liberci, 2006, p. 99-104 ISBN 80-7372-135-X
- [7] Vozková, P.: Možnosti popisu mechanických vlastností kompozitů. Práce ke zkoušce z PGS, TU v Liberci, 2006
- [8] Vozková, P.; Salačová J.: Elastic Properties of Woven Composite. CD Proceedings of the Conference Comsol Conference, Prague, 2006, ISBN 80-239-8131-5
- [9] Vozková, P.: Elastické vlastnosti tkaninových kompozitů. Proceedings of the Conference Vyztužené plasty 2007, Karlovy Vary, 2007, p. 31-36
- [10] Vozková, P.: Simulation of Woven Composite Properties. Proceedings of the 6th International Conference Textil Science, TU v Liberci, 2007, p. 71-72, ISBN 978-80-7372-207-4
- [11] Vozková, P.: Elastic Properties of Woven Composites. CD Proceedings of the Conference 15th Annual International Conference on Composites/Nano Engineering, Haikou, Hainan Island, China, 2007
- [12] Salačová, J.; Vozková, P.: Woven Composites – from Microscope Scanning to FEM Computing. Conference ICSAM-2007, Patras, Greece, 2007
- [13] Vozková, P.: Properties Modelling in the Woven Reinforced Composites. BEM-FEM Conference, St.Petersburg, Russia, 2007

- [14] Vozková, P.: Modelling of Elastic Properties of C/C Woven Composite. Conference Strutex 14th, TU v Liberci, 2007
- [15] Vozková, P.: Víceúrovňové modelování mechanických vlastností textilních kompozitů. Práce ke státní doktorské zkoušce, TU v Liberci, 2007
- [16] Vozková, P.: Elastic modulus FEM modelling of the layered woven composite material. kapitola v knize Recent Advances in Modelling and Simulation. Editor: Aleksandar Lazinica. I-Tech Education and Publishing, Vienna, Austria, ISBN 978-3-902613-25-7. (přijato k publikaci v 2008)
- [17] Vozková, P.; Salačová J.: FE modelling of textile reinforced composites and comparison with real testing. Conference TexComp9, Newark, Delaware, USA, 2008 (přijato k prezentaci v říjnu 2008)

Seznam obrázků

Obr. 2.1 Pohled na plátňové provázání svazků z nekonečných vláken [8]	4
Obr. 2.2 Průběhy tahových křivek různých stupňů namáhání vůči osám symetrie tkaninové výztuže [27].....	6
Obr. 2.3 Vzorek k tahovému testování s rovnými stranami (nahore) a profilovaný vzorek (dole) [29].....	7
Obr. 2.4 Znárodnění detekce trhliny pomocí magnetizmu [33]	9
Obr. 2.5 Druhy záření podle vlnové délky a frekvence [33].....	10
Obr. 2.6 Skleněný - polyesterový panel s defekty vytvořený ultrazvukovým transmisním skenem [40]	11
Obr. 2.7 Rekonstrukce tvaru vzorku ultrazvukovým testováním [41].....	11
Obr. 2.8 Soustava pro experimentální měření elastických modulů pomocí ohybových kmitů [48]	13
Obr. 2.9 Spektrum frekvenční odezvy buzených kmitů.....	13
Obr. 2.10 Postup diskretizace vyšetřované oblasti ve 2D [51]	15
Obr. 2.11 Čtyřúhelníková síť položená na strukturní buňku při testování smyku [55]	16
Obr. 2.12 Model průměrné tuhosti [57]	17
Obr. 2.13 Model průměrné poddajnosti [57]	17
Obr. 2.14 Základní strukturní jednotka plátňové vazby s čočkovitým průřezem [11].....	18
Obr. 2.15 3D model plátňové vazby s kruhovým průřezem [58]	18
Obr. 2.16 Rozvrstvení struktury do úrovní [59]	19
Obr. 2.17 WiseTex soubor programů pro modelování kompozitů [14].....	20
Obr. 2.18 Typické formy deformace na modelu tkaniny a) bez deformace, výchozí stav, b) smyková deformace, c) ohyb, d) krut [63]	20
Obr. 2.19 Model struktury plátňové vazby výztuže a matrice [65].....	21
Obr. 2.20 Kladení vrstev standardní (vlevo) a	21
Obr. 3.1 Deformace tenké tyče vyvolaná podélnou vlnou [45,46]	22
Obr. 3.2 Uložení tyče s volnými konci (okrajové podmínky) pro okamžitý (u) i počáteční (u_0) stav [45].....	25
Obr. 3.3 síly a momenty působící na element při příčném vlnění [45],[46]	26
Obr. 3.4 Přetvoření průřezu ohýbaného nosníku [46]	27
Obr. 3.5 Timošenkova korekce [71]	28
Obr. 3.6 Model prostorové struktury kompozitu s tkanou výztuží [23]	30
Obr. 3.7 Podélný a příčný řez částí svazku.....	30
Obr. 3.8 Svazek zahrnující vlákna, matrici a defekty	31
Obr. 3.9 Periodické strukturní buňky 1,2,3 [23]	31
Obr. 3.10 Strukturní model laminy pro Strukturní buňku 3 [23]	32
Obr. 3.11 Schéma kompozitní desky [23]	32
Obr. 3.12 Napjatost v bodě (pro přehlednost nejsou uvedeny reakce) [72]	33
Obr. 3.13 Schéma měření (přídorys) rezonančních frekvencí podélných kmitů přístrojem RFT Erudite [44]	41
Obr. 3.14 Schéma měření rezonančních frekvencí příčných kmitů přístrojem RFT Erudite [44]	41
Obr. 3.15 Symetrie posuvů při podélném kmitání v tenkém neomezeně dlouhém deskovém pásu [44].....	43
Obr. 3.16 Symetrie posuvů při příčném kmitání v tenkém neomezeně dlouhém deskovém pásu [44].....	45
Obr. 4.1 Příklad položené sítě na strukturu vláken v řezu obklopených matricí.....	50
Obr. 4.2 První a druhý tvar kmitání podélně kmitající tyče [45]	51

Obr. 4.3 Napětí při první vlastní frekvenci - plošné znázornění.....	52
Obr. 4.4 Napětí při druhé vlastní frekvenci - plošné znázornění.....	52
Obr. 4.5 Napětí při třetí vlastní frekvenci - plošné znázornění	52
Obr. 4.6 Napětí při první vlastní frekvenci - křivkové znázornění	52
Obr. 4.7 Napětí při druhé vlastní frekvenci - křivkové znázornění.....	52
Obr. 4.8 Napětí při třetí vlastní frekvenci - křivkové znázornění	52
Obr. 4.9 Příklad vyhodnocení Poissonova čísla μ ze spektra podélných kmitů.....	53
Obr. 4.10 Příklad vyhodnocení G_{xy} ze spektra příčných kmitů a pomocí podílu E_x/G_{xy}	54
Obr. 4.11 Hodnoty elastických konstant získaných rezonanční metodou po karbonizaci ..	56
Obr. 4.12 Hodnoty elastických konstant získaných rezonanční metodou po grafitizaci	57
Obr. 4.13 Vypočtený polární diagram elastickým modulů	58
Obr. 4.14 Podélné napětí v příčném řezu svazkem.....	60
Obr. 4.15 Podélná deformace v příčném řezu svazkem.....	61
Obr. 4.16 Podélné napětí v podélném řezu svazkem	61
Obr. 4.17 Podélná deformace v podélném řezu svazkem	61
Obr. 4.18 Podélné napětí v příčném řezu svazkem s defekty.....	62
Obr. 4.19 Podélná deformace v příčném řezu svazkem s defekty.....	63
Obr. 4.20 Podélné napětí v podélném řezu svazkem s defekty	64
Obr. 4.21 Podélná deformace v příčném řezu svazkem s defekty.....	64
Obr. 4.22 Podélné napětí ve strukturní buňce 1	65
Obr. 4.23 Podélná deformace ve strukturní buňce 1	65
Obr. 4.24 Podélné napětí ve strukturní buňce 2	66
Obr. 4.25 Podélná deformace ve strukturní buňce 2	66
Obr. 4.26 Podélné napětí ve Strukturní buňce 3.....	66
Obr. 4.27 Podélná deformace ve Strukturní buňce 3	66
Obr. 4.28 Podélné napětí v Lamině 1	67
Obr. 4.29 Podélná deformace v Lamině 1	67
Obr. 4.30 Podélné napětí v Lamině 2	67
Obr. 4.31 Podélná deformace v Lamině 2	67
Obr. 4.32 Podélné napětí v Lamině 3	67
Obr. 4.33 Podélná deformace v Lamině 3	67
Obr. 4.34 Podélné napětí v celém kompozitu	68
Obr. 4.35 Podélná deformace v celém kompozitu	68
Obr. 4.36 Struktura karbonizovaného vlákna přechází do grafitizované struktury [1]	70
Obr. 4.37 Srovnání výsledků E_x experimentu a simulace v závislosti na směru silového působení.....	71
Obr. 4.38 Transformace napětí ze směru působící síly do směrů ortotropie [86]	71
Obr. 4.39 Srovnání výsledků G_{xy} experimentu a simulace v závislosti na směru silového působení.....	72
Obr. 4.40 Srovnání průběhů výsledků experimentu a simulace grafitizovaného kompozitu podle výpočtu	72

Seznam tabulek

<i>Tab. 3.1 Rozměry strukturních elementů víceúrovňového modelu pro výpočet vlastností ..</i>	<i>32</i>
<i>Tab. 4.1 Parametry uhlíkového káblku a tkaniny</i>	<i>47</i>
<i>Tab. 4.2 Hodnoty vstupních veličin</i>	<i>48</i>
<i>Tab. 4.3 Hodnoty elastických konstant získaných rezonanční metodou pro kompozit po karbonizaci včetně relativní chyby měření</i>	<i>55</i>
<i>Tab. 4.4 Hodnoty elastických konstant získaných rezonanční metodou pro kompozit po grafitizaci včetně relativní chyby měření.....</i>	<i>55</i>
<i>Tab. 4.5 Přehled výsledků simulace v Comsol Multiphysics</i>	<i>69</i>
<i>Tab. 4.6 Výsledky elastických modulů z experimentu a simulace</i>	<i>69</i>

Seznam Příloh:

Tabulky rezonančních frekvencí

Přílohy

Tabulka napětí a deformací pro podřad, příloha 1 a 2, 3 a 4, 5 a 6, 7 a 8, 9 a 10

Seznam Příloh:

Tabulky rezonančních frekvencí

Tabulka napětí a deformací pro podélné, příčné a smykové působení

Tabulky rezonančních frekvencí

Rezonanční frekvence [Hz]	Karbonizovaný kompozit 0°			Karbonizovaný kompozit 45°			Karbonizovaný kompozit 90°			Karbonizovaný kompozit -45°		
	pořadí	podélná	příčná	podélná	příčná	podélná	příčná	podélná	příčná	podélná	příčná	
1		35800	14390	32480	12390	23040	14130	31740	12560			
2		70790	29920	63780	29850	46330	23690	62900	29870			
3		105590	46460	92760	52250	69180	33470	90560	51900			
4			60000		76500	92010	43440		76000			
5			73840				53150					
6			88700									

Rezonanční frekvence [Hz]	Grafitizovaný kompozit 0°			Grafitizovaný kompozit 45°			Grafitizovaný kompozit 90°			Grafitizovaný kompozit -45°		
	pořadí	podélná	příčná	podélná	příčná	podélná	příčná	podélná	příčná	podélná	příčná	
1		52070	17800	29380	11250	33000	9100	29100	11280			
2		102380	31910	56800	27650	65970	16700	56400	27930			
3			47340	80370	49540	98750	25600	79450	49980			
4			67670	98800	74600		34600	96700	75080			
5					102000		43540		101700			

U 642 T

Ing. Pavla Vozvoda