Technická univerzita v Liberci

FAKULTA PEDAGOGICKÁ

Katedra: numerické a aplikované matematiky

Kombinace oborů: matematika - německý jazyk

DUÁLNÍ GEOMETRICKÉ SOUSTAVY

Diplomová práce 97-PF-KNA-001

Autor: Marek Hejzlar

Adresa: Bystré 118

517 81

Podpis: Marek Hejzlar

Vedoucí práce: RNDr. Zdeněk Kalousek, CSc.

Počet	stran	obrázků	tabulek	příloh
	40	28	1	2

V Liberci dne 30.05.1997

Technická univerzita v Liberci
PEDAGOGICKÁ FAKULTA
461 17 LIBEREC 1, Hálkova 6 Telefon: 329 Telefax: 21301

Katedra: numerické a aplikované matematiky

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

(závěrečného projektu)

diplomant: Marek H e j z l a r

adresa: 517 81 Bystré 118

obor: MA - NJ

Název: Duální geometrické soustavy

Vedoucí práce: RNDr. Zdeněk Kalousek, CSc.

Termín odevzdání: 30. května 1997

Pozn. Podmínky pro zadání práce jsou k nahlédnutí na katedrách. Katedry rovněž specifikují zadání: východiska, cíle, předpoklady, metody zpracování, základní literaturu (zpravidla na rub tohoto formuláře). Zásady pro zpracování DP jsou k dispozici ve dvou verzích (stručné, resp. metodické pokyny) v UK TUL, na katedrách a na Děkanátě Pedagogické fakulty.

V Liberci dne 4. listopadu 1996 19..

vedoucí katedry děkan

Převzal (diplomant):
Datum: 4. 12. 1996 Podpis: Marek Hejzlar

Prohlášení o původnosti práce:

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracoval samostatně a že jsem uvedl veškerou použitou literaturu.

Liberec, 1997.-05.-30.

Marek Hejzlar

Marek Hejzlar

Poděkování:

Děkuji vedoucímu práce RNDr. Z. Kalouskovi, CSc. za odborné vedení a podnětné rady.

Prohlášení k využívání výsledků DP:

Jsem si vědom těchto skutečností:

a) diplomová práce je majetkem školy,

b) s diplomovou prací nelze bez svolení školy disponovat,

c) diplomová práce může být zapůjčena či objednána (kopie) za účelem využití jejího obsahu.

Beru na vědomí, že po pěti letech si mohu diplomovou práci vyžádat v Univerzitní knihovně TU v Liberci, kde bude uložena.

Marek Hejzlar

Bystré 118

517 81

DUÁLNÍ GEOMETRICKÉ SOUSTAVY

Resumé

Práce sleduje cíl, přiblížit pojem "dualita" žákům střední školy. Větší část práce je věnována zavedení a objasnění pojmu dualita, které vycházejí z teorie grafů. Zmapován je i výskyt duality v různých odvětvích matematiky. Následují konkrétní úlohy ze středoškolské geometrie, v nichž je duality použito k jejich řešení. Uvedeno je též doporučení k zařazení této učební látky do výuky. Přílohu tvoří dvě úlohy z teorie grafů s podrobně popsaným řešením.

DUALE GEOMETRISCHE SYSTEME

Zusammenfassung

Die Arbeit verfolgt den Ziel, den Begriff "Die Dualität" den Schülern der Mittelschule näherzubringen. Der größere Teil dieser Arbeit ist der Einführung und der Erläuterung des Begriffes Dualität gewidmet, die aus der Graphentheorie ausgehen. Kartiert ist auch das Vorkommen der Dualität in verschiedenen Teildisziplinen der Mathematik. Es folgen konkrete Aufgaben der Mittelschulgeometrie, zu deren Lösung die Dualität benutzt wird. Eingeführt ist auch die Empfehlung der Einordnung dieses Lehrstoffes in den Unterricht. Die Beilage bilden zwei Aufgaben der Graphentheorie, deren Lösung detailiert beschrieben ist.

DUAL GEOMETRICAL SYSTEMS

Summary

The aim of the diploma thesis is drawing near a term duality for secondary school students. The major part of work deals with introduction and clarifying of the term duality which come from graph theory. It also covers occurrence of duality at various branches of mathematics. Specific exercises in secondary school geometry follow and duality is used for solving. There is also mentioned a recommendation how to include this theme into classes. The supplement consists of two exercises on graph theory with a detailed solution.

Obsah

Seznam označení

I. Teorie grafů

G	graf
u	uzel
h	hrana
K_n	úplný graf o n uzlech
R	řez grafu
$\omega(G)$	uzlový stupeň souvislosti grafu G
$R(G)$	rovinná reprezentace grafu G
f	oblast rovinné reprezentace
G^*	duální graf ke grafu G
G(M)	graf mnohostěnu M

II. Euklidovská geometrie

Obecná označení:

$A, B, C, \ldots$	body v rovině
$a, b, c, \ldots$	přímky v rovině
AB	přímka procházející dvěma různými body A, B
$\|AB\|$	vzdálenost bodu A od bodu B

Označení v trojúhelníku:

ABC	trojúhelník s vrcholy A, B, C
a, b, c	délky stran v trojúhelníku, $a = \|BC\|$, $b = \|CA\|$, $c = \|AB\|$
S	střed kružnice vepsané
S_a, S_b, S_c	středy kružnic připsaných
T	těžiště
T_a, T_b, T_c	středy stran BC, CA, AB
V	ortocentrum (tj. průsečík výšek)
V_a, V_b, V_c	paty výšek z vrcholů A, B, C
v_a, v_b, v_c	délky výšek, $v_a = \|AV_a\|$, $v_b = \|BV_b\|$, $v_c = \|CV_c\|$

1. Úvod

Matematika hraje důležitou roli v životě člověka. Spektrum jejího výskytu je široké. Setkáváme se s ní ve všedních drobných situacích, jako je např. nákup, či ve složitých situacích, v nichž se ocitáme a na jejichž řešení máme zájem. A právě vyučování matematice se může stát dobrou školou k řešení takovýchto problémů.

Přes to všechno si nestojí matematika v žebříčku oblíbenosti předmětů zrovna nejlépe. Z výzkumu též vyplývá, že až 71% žáků základních škol má z matematiky strach. Nemyslím, že by učivo bylo moc těžké, chápání žáků nedostupné. Příčina leží jistě jinde. Není třeba měnit obsah matemetiky, ale spíše metody práce učitele a žáka ve třídě. Jak často převažuje verbální předávání poznatků nad bádáním či problémovým vyučováním, ve kterých se žák aktivně podílí na získání poznatků.

Obsah práce je věnován geometrickému tématu. Místo geometrie ve vyučování matematice je nezastupitelné a geometrie jako ukázka spojení matematiky s realitou neztrácí na významu.

Práce je rozdělena do dvou celků. První, teoretický, celek tvoří kapitoly 2 a 3, druhý, praktický, celek tvoří kapitoly 4 a 5.

Ve druhé kapitole je přiblíženo zavedení duality v teorii grafů. K tomu se neobejdeme bez znalosti základních pojmů. Proto jsou v této kapitole některé základní, pro tuto práci potřebné pojmy teorie grafů, připomenuty. Třetí kapitolu tvoří příklady výskytu duality z jiných odvětví matematiky.

V praktické části práce, kapitola čtvrtá, je využito duality k řešení vybraných úloh pro střední školu a k důkazu některých geometrických pouček. Kapitolu pátou tvoří doporučení k zařazení obsahu této práce do výuky geometrie na střední škole.

2. Zavedení duality na grafech

2.1 Nástin historie teorie grafů

Teorie grafů je část moderní matematiky, která bývá zařazována do kombinatorické analýzy, nebo do topologie. Za nejstarší grafový problém je označována známá úloha o sedmi mostech města Královce (viz příloha), kterou se zabýval v 18. století L.Euler.

Za dobu skutečného vzniku teorie grafů se ale považuje období kolem roku 1936, kdy maďarský matematik Dénes König (1884 - 1944) vydal první knihu o grafech. Od té doby doznala tato teorie značného vývoje a stále více se uplatňuje i v jiných vědních oborech, např. fyzice, chemii, biologii, kybernetice a dalších.

Velký zájem si získala v souvislosti s problémem čtyř barev (viz příloha). Tento problém, jehož historie začíná koncem 19. století, patří mezi ty otázky, které se dají snadno formulovat, ale řešení je nesmírně těžké. Problém čtyř barev byl rozřešen až v roce 1976, kdy K.Appel a W.Haken z univerzity v Illinais (USA) dovršili svou snahu úspěchem.

Nebudeme již více tuto vědu přibližovat, to již udělali jiní [Zel], [Šed]. Připomeneme jen několik pojmů a zavedeme dualitu na grafech.

2.2 Základní pojmy teorie grafů

Pod pojmem graf se nám každému vybaví graf funkce v souřadnicovém systému os *x,y*. S těmito grafy má však teorie grafů společný jen název, odvozený z řeckého slova "grafein", což znamená v češtině "psáti".

Co je tedy grafem z hlediska teorie grafů?

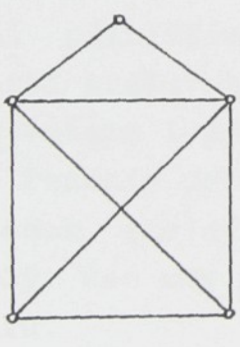
Def.2.2.1 Nechť je dána libovolná neprázdná množina **U**. Označme písmenem **K** množinu všech dvouprvkových částí množiny **U** a zvolme libovolnou část **H** množiny **K**. Potom uspořádanou dvojici [**U**,**H**] nazýváme *neorientovaným grafem*. Prvky množiny **U** se nazývají *uzly* grafu, prvky množiny **H** se nazývají *hranami* grafu.

Je-li u z **U**, v z **U**, h z **H**, $h=\{u,v\}$, říkáme, že hrana h spojuje uzly u,v a že uzly u,v jsou její koncové uzly. Říkáme, že hrana h je incidentní s uzlem u a v , rovněž uzly u i v jsou incidentní s hranou h.

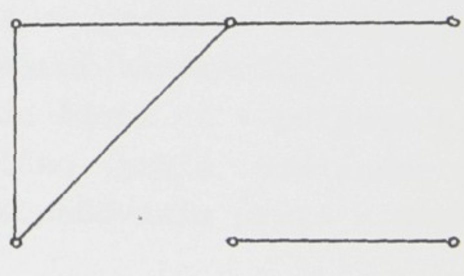
Každý se s takovýmto grafem již setkal, možná si to ani neuvědomuje. Bylo to např. při hře "Člověče nezlob se", při pohledu na síť tratí vlaků či metra, nebo při snaze nakreslit obrázek jedním tahem.

Ve výše uvedených příkladech se vždy jednalo o souvislý graf. Viz též obr.1*a*. Na obr.1*b* je zobrazen graf nesouvislý.

Def.2.2.2 Graf, v němž libovolné dva uzly spolu souvisí, se nazývá *souvislý*.



obr.1*a*

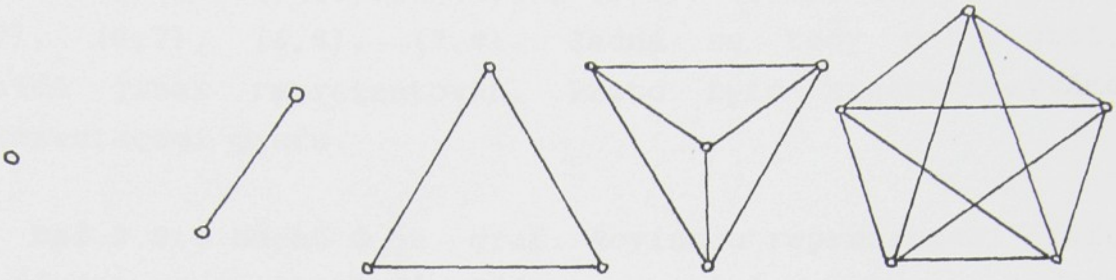


obr.1*b*

Další pojem, který připomeneme, bude úplný graf. Snadno pochopíme o co se jedná, vzpomeneme-li si na turnaje hrané způsobem "každý s každým".

Def.2.2.3 Nechť **G** je graf, v němž každá dvojice různých uzlů je spojena hranou. Pak se graf **G** nazývá *úplný graf*.

Úplný graf o *n* uzlech značíme symbolem K_n (obr.2).



K_1 K_2 K_3 K_4 K_5

obr.2

Kolik zápasů bude odehráno v turnaji s *n* účastníky, hrají-li každý s každým? Jinak: Kolik hran obsahuje K_n?

Každý uzel grafu K_n má stupeň n-1 (je spojen hranami se všemi uzly grafu kromě sama sebe), součet stupňů všech uzlů je tedy $n(n-1)$, což je dvojnásobek počtu hran. Počet hran grafu K_n je tedy $(1/2)n(n-1)$.

Pozn.: Stupněm uzlu rozumíme počet hran s ním incidentních.

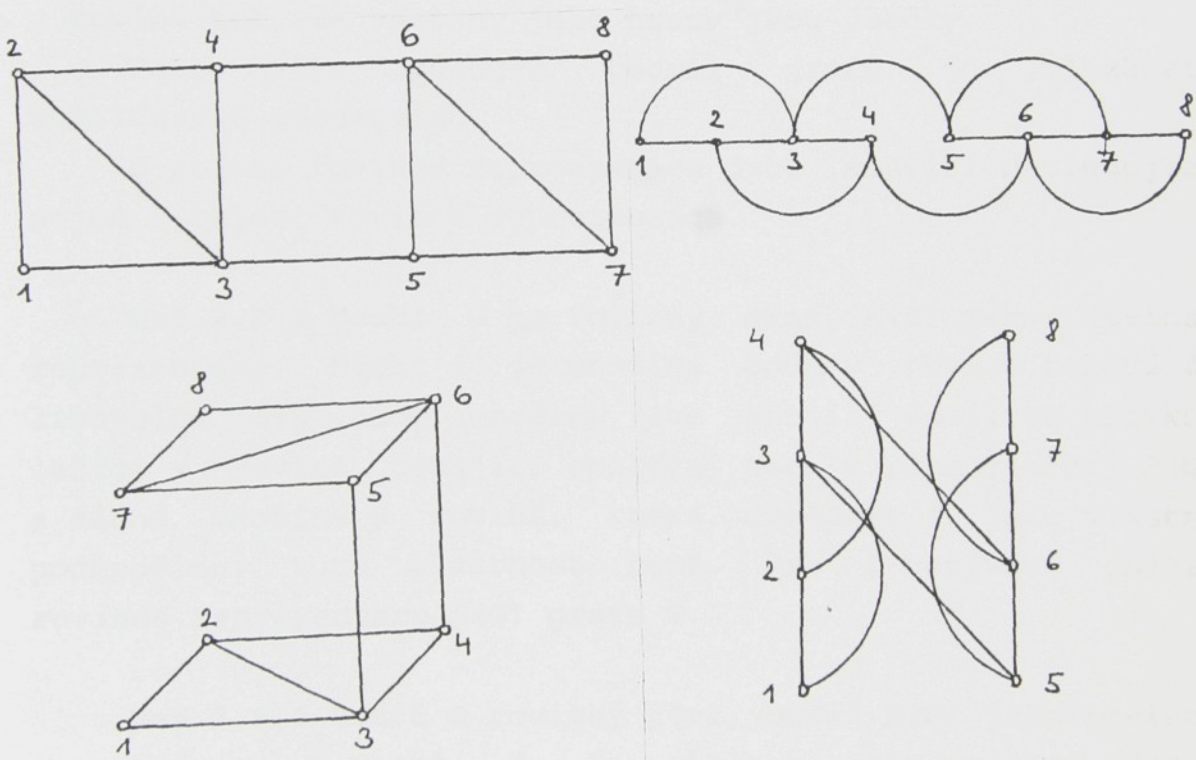
Nyní přiblížíme pojmy řez grafu a následně stupeň souvislosti grafu. Ani zde nevzniknou problémy s pochopením, neboť se můžeme i zde opřít o vlastní zkušenosti s řezáním. Víme, že řezáním dělíme materiál na části. I v případě grafu je výsledek stejný, ze souvislého grafu dostaneme graf nesouvislý. Řez zde provádíme odstraňováním prvků z množiny uzlů grafu.

Def.2.2.4 Budiž **G** souvislý graf, budiž **R** vlastní podmnožina jeho množiny uzlů. Budiž **G´** graf který získáme z **G** odstraněním množiny **R**. Je-li **G´** nesouvislý graf, pak množina **R** se nazývá *řez grafu* **G**.

Def.2.2.5 Budiž **G** graf, který není úplným grafem. Nejmenší počet uzlů řezu grafu **G** se nazývá *uzlový stupeň souvislosti* grafu **G** a značí se ω(**G**).

Na obr.3 vidíme čtyři různé "grafy". Prozkoumáme-li je ale blíže, zjistíme, že ve všech najdeme hrany incidentní s uzly (1,2), (1,3), (2,3), (2,4), (3,4), (3,5), (4,6), (5,6), (5,7), (6,7), (6,8), (7,8). Jedná se tedy o týž graf, pokaždé jinak reprezentován. Proto tyto kresby nazýváme reprezentacemi grafu.

Def.2.2.6 Nechť **G** je graf. *Rovinnou reprezentací* grafu **G** nazýváme množinu bodů *R*(**G**) v rovině složenou jednak z takzvaných uzlových bodů vzájemně jednoznačně přiřazených uzlům grafu **G**, jednak z oblouků spojujících ty dvojice uzlových bodů, které odpovídají dvojicím uzlů spojených hranou grafu **G**, přičemž žádné dva z těchto oblouků nemají společný bod, který by byl vnitřním bodem některého z nich.



obr.3

Na obr.3 se jedná pouze v prvních dvou případech o rovinné reprezentace grafu.

Na základě výše definovaného pojmu můžeme rozhodnout, kdy je graf rovinný.

Def.2.2.7 Graf, k němuž existuje rovinná reprezentace $R(\mathbf{G})$, se nazývá *rovinný* graf.

Přiznejme, že otázka, zda je graf rovinný, není zas až tak jednoduchá. Z definice víme,že existuje-li rovinná reprezentace grafu, pak je graf rovinný. Jak ale zjistíme, že alespoň jedna rovinná reprezentace grafu existuje? Odpověď nám dá např. věta Kuratowského [Zel-77:49[13-16]]. Nebudeme ji uvádět. Nepotřebujeme ji pro naši další práci. Budeme pracovat pouze s rovinnými grafy.

Řekli jsme, že rovinný graf se dá znázornit v rovině tak, že uzly jsou body, hrany jsou oblouky a žádné dvě různé hrany nemají společný vnitřní bod. Jednu zajímavou větu dokázal K.Wagner. Říká, že každý rovinný graf lze zakreslit v rovině tak, že všechny jeho hrany jsou úsečky.

Tato věta posouvá teorii grafů do blízkosti euklidovské geometrie.

S pojmem rovinné reprezentace úzce souvisí nasledující pojem - oblast rovinné reprezentace.

Def.2.2.8 Nechť **G** je rovinný graf, $R(\mathbf{G})$ jeho rovinná reprezentace. Nechť f je množina bodů v rovině taková,že libovolné dva body množiny lze spojit spojitou křivkou ležící v rovině, nemající společný bod s reprezentací $R(\mathbf{G})$ a žádná množina v rovině, která obsahuje f jako vlastní podmnožinu, tuto vlastnost nemá. Pak f nazýváme *oblast rovinné reprezentace* $R(\mathbf{G})$ grafu **G**.

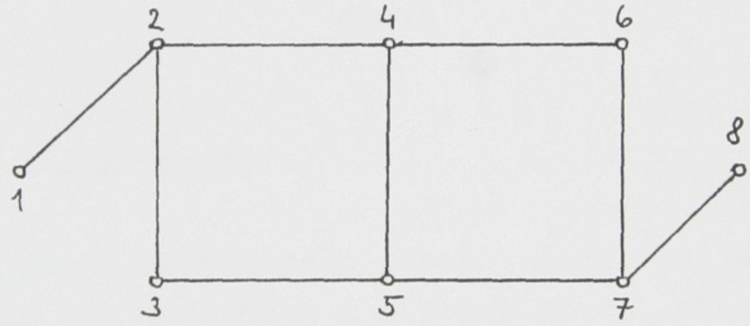
Def.2.2.9 Budiž **G** rovinný graf, budiž $R(\mathbf{G})$ jeho rovinná reprezentace. Nechť f je oblast reprezentace $R(\mathbf{G})$. Podmnožina reprezentace $R(\mathbf{G})$ složená z oblouků odpovídajících hranám incidentních s oblastí f a z uzlových bodů odpovídajících uzlům grafu **G** incidentních s oblastí f se nazývá *hranicí* oblasti f.

Opět nebude těžké pojmy oblast rovinné reprezentace a hranice oblasti žákům názorně přiblížit. Přiblížíme je pomocí intuitivního chápání těchto pojmů.

Každý si snad pod pojmem oblast představí např. chráněnou přírodní rezervaci, průmyslovou zónu města nebo stát či konkrétní území na mapě. Ve všech případech se jedná o část nějakého vyššího celku a tato část je přesně vymezena, ohraničena.

V případě rovinné reprezentace tomu není jinak. Hrany (ne všechny) tvoří tyto hranice. Představme si, že máme rovinnou reprezentaci grafu nakreslenou na listu papíru a že tento list rozstříháme podél všech oblouků této reprezentace. Kusy papíru, které po rozstříhání vzniknou, představují oblasti rovinné reprezentace.

Rovinná reprezentace znázorněná na obr.4 má tři oblasti. Jednu tvoří vnitřek čtverce 2354, druhou vnitřek čtverce 4576 a třetí vnějšek. Také vidíme, že hrany incidentní s uzly (1,2), (7,8) nejsou hranicí žádné oblasti.



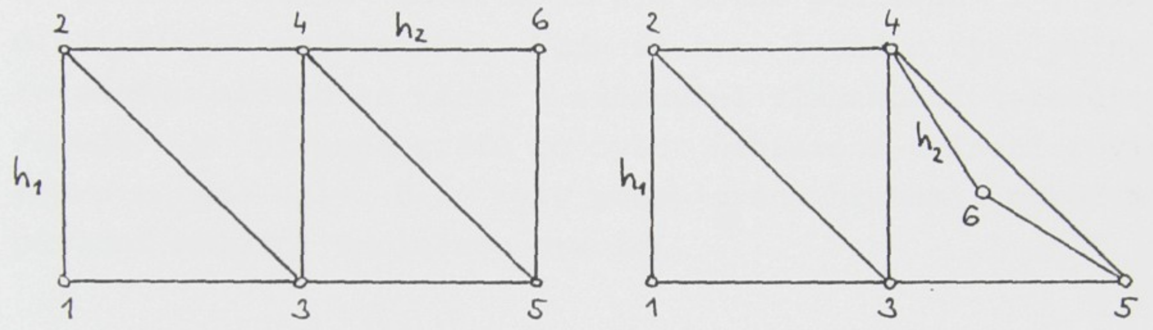
obr.4

Podívejme se ještě na obr.5, kde máme dvě rovinné reprezentace téhož grafu. Po důkladném prozkoumání zjistíme, že se v jedné věci liší. Počet oblastí reprezentací je stejný, ale např. hrany h_1, h_2, incidentní v prvním případě s vnější oblastí, jsou v případě druhém incidentní s různými oblastmi. Říkáme, že takovéto rovinné reprezentace nejsou ekvivalentní.

Def.2.2.10 Budiž **G** rovinný graf, buďtež R_1(**G**), R_2(**G**) dvě rovinné reprezentace grafu **G**. Reprezentace R_1(**G**) a R_2(G) se nazývají *ekvivalentní*, jestliže pro každé dvě hrany h_1, h_2 grafu **G** platí, že v reprezentaci R_1(G) existuje oblast incidentní s h_1 i s h_2 právě tehdy, jestliže takováto oblast existuje v R_2(G).

Věta 2.2.1 Nechť **G** je rovinný graf a nechť ω(G) $\geq$ 3, nebo **G** je úplný graf o čtyřech uzlech. Pak všechny rovinné reprezentace grafu **G** jsou spolu ekvivalentní.

Důkaz uvádět nebudeme. Proveden je v [Zel-77:61[12-28]].



obr.5

2.3 Duální grafy

Jistě jsme nevyčerpali zásobu všech základních pojmů. Žáci by měli být seznámeni i s pojmy strom, sled, tah, cesta a kružnice. Zpestřením jistě bude eulerovský tah, kde žáci sami mohou objevovat, jaké grafy je možno nakreslit jedním tahem.

Objasnili jsme pojmy, které potřebujeme k definování duality na grafech.

Def.2.3.1 Nechť **G** je rovinný graf takový, že ω(G)$\geq$3, nebo **G** je úplný graf o čtyřech uzlech. Nechť **F**(G) je množina oblastí grafu **G**. Sestrojíme graf **G*** tak, že každé oblasti z **F**(G) přiřadíme uzel grafu **G*** a dva uzly grafu **G*** spojíme hranou právě tehdy, existuje-li v **G** hrana, která je incidentní s oběma oblastmi odpovídajícími těmto uzlům. Pak graf **G*** nazýváme *duálním grafem* ke grafu **G**.

Následující věta je velmi důležitá. Dozvídáme se v ní, že duální graf G^* zachovává určité vlastnosti grafu **G**.

Věta 2.3.1 Nechť **G** je rovinný graf takový, že $\omega(G) \geq 3$ nebo **G** je úplný graf o čtyřech uzlech. Budiž G^* duální graf ke grafu **G**. Pak G^* je rovinný.

Důkaz: Viz [Zel-77:64$^{1-15}$].

V této kapitole jsme se seznámili se zavedením duality na grafech. Pojem dualita je ale běžně používán i v jiných disciplínách matematiky. Vždy se ale jedná o týž princip, "o záměnu něčeho za něco" a zachování vlastností "starého" v "novém". V případě grafů to bylo nahrazení oblastí rovinné reprezentace uzly. Uzly byly pospojovány hranami, pokud měly původní oblasti společnou hranici.

2.4 Konvexní mnohostěny

Studujme nyní mnohostěny (polyedry), neboť s rovinnými grafy úzce souvisí. Zaměříme se především na mnohostěny konvexní. Pro úplnost uveďme definici konvexní množiny.

Def.2.4.1 *Konvexní množina* v euklidovském prostoru je množina, která s každými dvěma body *A,B* obsahuje i celou úsečku *AB*.

Konvexní množinou je například přímka, trojúhelník, koule.

Konvexní mnohostěn lze popsat následovně: Jedná se o průnik určitých poloprostorů. *Hranice* mnohostěnu je sjednocení konečně mnoha konvexních mnohoúhelníků, z nichž žádné dva neleží v téže rovině; tyto mnohoúhelníky se nazývají *stěny mnohostěnu*. Strany těchto mnohoúhelníků jsou *hrany mnohostěnu*. Vrcholy mnohoúhelníků jsou *vrcholy mnohostěnu*. Stěny, které mají společnou hranu, nebo její část, nazýváme *sousední*. Hrany, které mají společný vrchol, nazýváme *sousední*. Vrcholy ležící na téže hraně jsou *sousední*. Pod pojmem *povrch mnohostěnu* rozumíme součet obsahů všech jeho stěn.

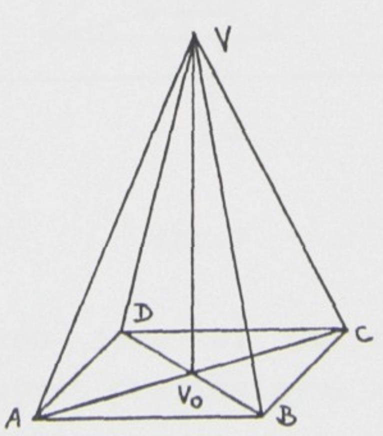
Vidíme, že hrany a vrcholy mnohostěnu mají podobné vlastnosti jako hrany a uzly grafu. Každá hrana mnohostěnu spojuje dva vrcholy, každé dva vrcholy mnohostěnu jsou spojeny nejvýše jednou hranou, žádná hrana mnohostěnu nespojuje vrchol se sebou samým. Zaveďme proto pojem grafu mnohostěnu.

Def.2.4.2 Nechť M je mnohostěn. *Grafem mnohostěnu* M nazýváme graf **G**(M), jehož množinou uzlů je množina vrcholů mnohostěnu M a jehož množinou hran je množina hran mnohostěnu M, přičemž hrana *h* grafu **G**(M) spojuje uzly *u*, *v* právě tehdy, spojuje-li odpovídající vrcholy mnohostěnu M.

Graf mnohostěnu je definován pro všechny mnohostěny, nikoli pouze pro konvexní. Pro konvexní mnohostěny dokázali E.Steinitz a H.Rademacher velmi důležitou větu.

Věta 2.4.1 Graf **G** je grafem konvexního mnohostěnu právě tehdy, je-li rovinný a $\omega(\mathbf{G}) \geq 3$.

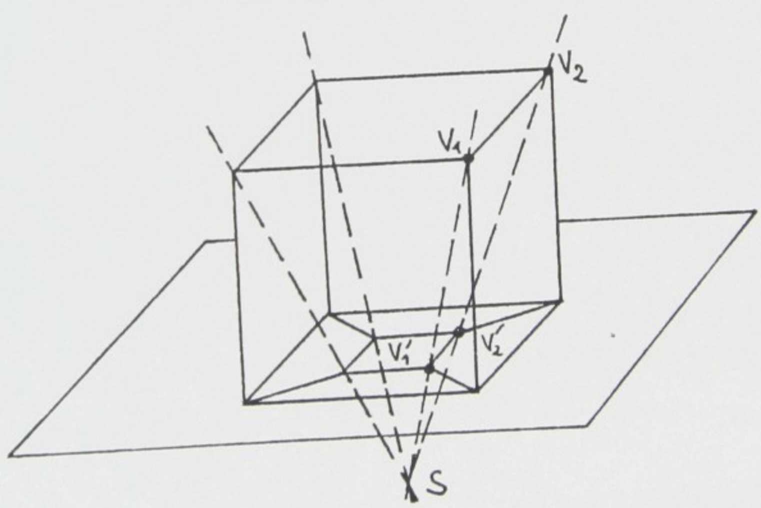
Na tento problém se můžeme podívat i z druhé strany. Jak můžeme co nejjednodušeji sestrojit rovinný graf odpovídající danému konvexnímu mnohostěnu?



obr.6

Požadovaný graf získáme někdy pravoúhlým promítáním hran a vrcholů mnohostěnu do roviny podstavy (obr.6). S tímto řešením se ale nespokojíme, neboť nelze použít vždy. Pravoúhlým promítáním získáme např. graf čtyřbokého jehlanu, ne však např. graf krychle. Hledáme tedy univerzálnější rozřešení problému.

Zvolíme-li bod *S* vně mnohostěnu tak, aby pata kolmice z bodu *S* na rovinu podstavy byla bodem vnitřku podstavy, můžeme přiřadit každému vrcholu V_i mnohostěnu průsečík V_i' přímky V_iS s rovinou podstavy (obr.7) tak, že obrazy všech vrcholů krychle mimo vrcholy dolní podstavy jsou body vnitřku dolní podstavy. Hraně V_iV_j pak přiřadíme úsečku $V_i'V_j'$, která je hranou grafu topologicky ekvivalentní s grafem vrcholů a hran mnohostěnu. V rovině dolní podstavy mnohostěnu dostáváme graf, který se nazývá **Šlegelův diagram** mnohostěnu. Jedná se vlastně o obraz hran a vrcholů mnohostěnu získaný středovým promítáním do jedné ze stěn mnohostěnu.



obr.7

Touto kapitolkou jsme si připravili cestu pro to, abychom se mohli zabývat pravidelnými konvexními mnohostěny, neboli platónskými tělesy.

2.5 Platónská tělesa

Def.2.5.1 *Pravidelný mnohostěn* je takový mnohostěn, jehož všechny stěny jsou shodné pravidelné n-úhelníky a v každém jeho vrcholu se stýká stejný počet m hran.

Proč se pravidelné konvexní mnohostěny též někdy nazývají platónská tělesa, není těžké uhodnout.

Ano, již starořečtí matematici počátkem 4. století př.n.l. věděli, že existují výše popsaná tělesa, a že jich je právě pět (Důkaz viz např.[Ihr-94:34^{13}-36_7]).

Řecký filozof Platón (427-347 př.n.l.) jich dokonce používal k objasňování svého učení o podstatě hmotného světa tím, že krychli, osmistěn, čtyřstěn a dvacetistěn považoval za představitele čtyř základních živlů, jimiž byly podle jeho učení země, vzduch, oheň a voda a dvanáctistěn za představitele jsoucna, neboli všeho, co existuje.

Podle hvězdáře Keplera se tehdy šest známých planet pohybovalo okolo Slunce po kulových plochách vepsaných a opsaných jednotlivým pravidelným mnohostěnům. Například Země po kulové ploše procházející středy stěn pravidelného dvanáctistěnu (vepsaná kulová plocha) a Mars po kulové ploše procházející vrcholy pravidelného dvanáctistěnu (opsaná kulová plocha).

Jak souvisejí platónská tělesa s touto prací?

V tab.1 máme přehled všech pěti platónských těles i s uvedenými důležitými číselnými charakteristikami. Těmi je myšlen např. počet stěn, počet vrcholů aj. .

Dříve než zodpovíme výše položenou otázku, podívejme se jak jednotlivá platónská tělesa vypadají. Přiblížíme si i jejich grafy, pro úplnost i jejich sítě (obr.8,9,10,11,12).

název		*m*	*n*	*s*	*v*	*h*
čtyřstěn	(tetraedr)	3	3	4	4	6
krychle	(hexaedr)	3	4	6	8	12
osmistěn	(oktaedr)	4	3	8	6	12
dvanáctistěn	(dodekaedr)	3	5	12	20	30
dvacetistěn	(ikosaedr)	5	3	20	12	30

m - počet hran jednoho vrcholu

n - počet hran jedné stěny

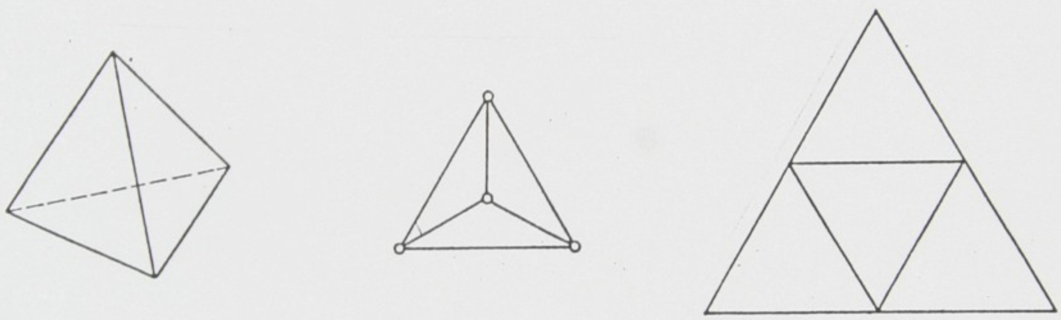
s - počet stěn

v - počet vrcholů

h - počet hran

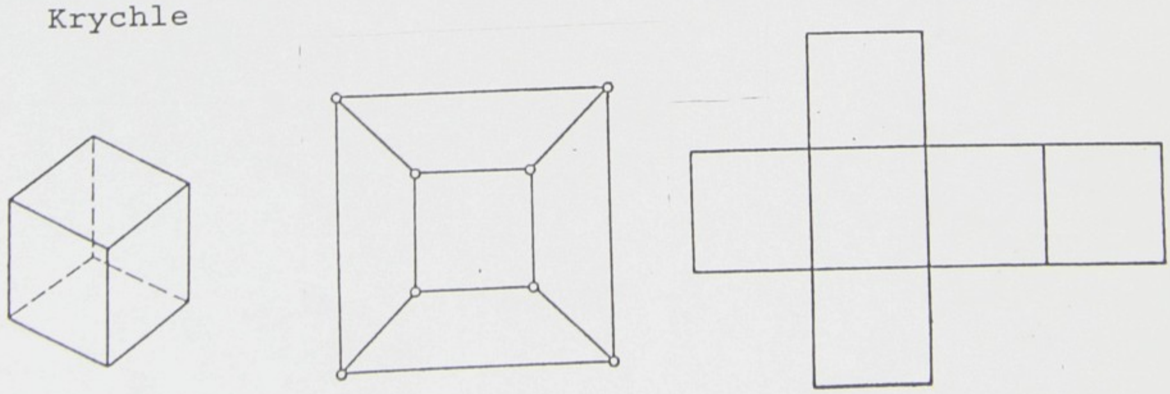
tab.1

Čtyřstěn



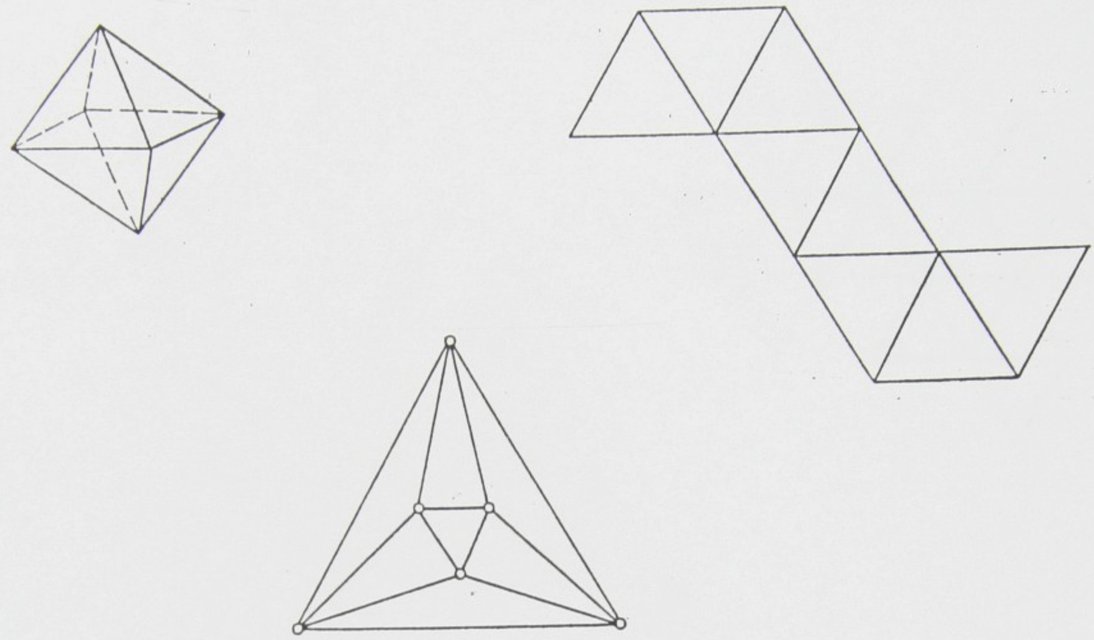
obr.8

Krychle



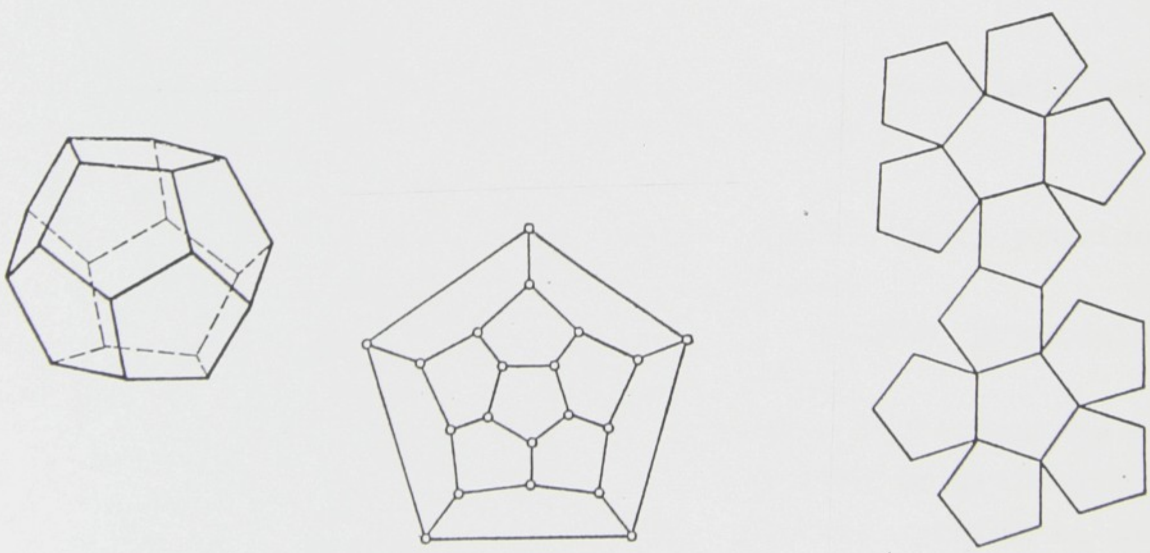
obr.9

Osmistěn



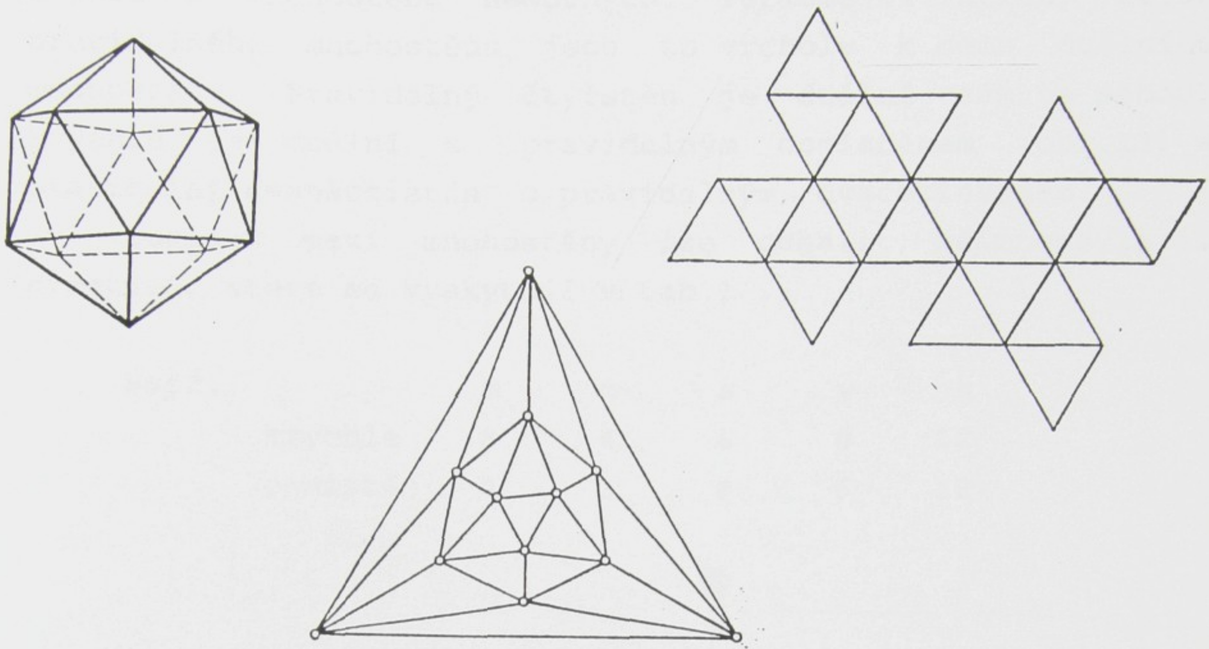
obr.10

Dvanáctistěn



obr.11

Dvacetistěn



obr.12

Podíváme-li se na grafy platónských těles, zjistíme, že v každém z těchto grafů jsou vždy všechny uzly stejného stupně.

Def.2.5.2 Graf **G**, v němž všechny uzly mají tentýž stupeň *r*, se nazývá *pravidelný graf* stupně *r*.

Asi nás to moc nepřekvapí, neboť je-li pravidelný mnohostěn, musí být pravidelný i jeho graf.

Sestrojíme-li duální grafy ke grafům pravidelných mnohostěnů, docházíme k zajímavému závěru:

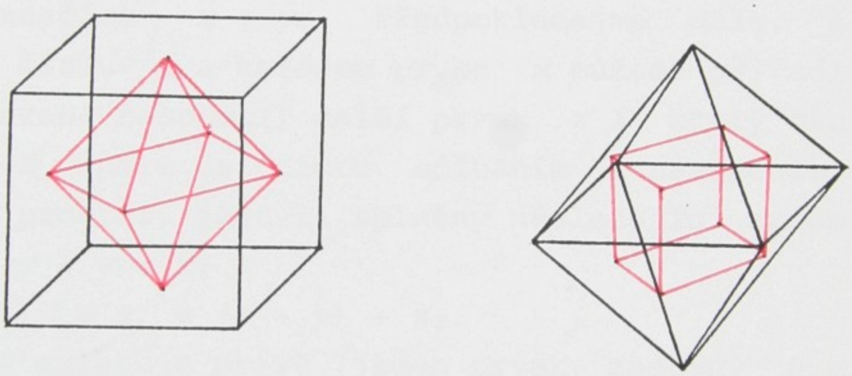
Duálním grafem ke grafu pravidelného čtyřstěnu je opět graf pravidelného čtyřstěnu. Duálním grafem ke grafu krychle je graf pravidelného osmistěnu, duálním grafem ke grafu pravidelného osmistěnu je graf krychle. Duálním grafem ke grafu pravidelného dvanáctistěnu je graf pravidelného dvacetistěnu a duálním grafem ke grafu pravidelného dvacetistěnu je graf pravidelného dvanáctistěnu.

Tato dualita se tedy netýká pouze grafů, ale v jistém smyslu i mnohostěnů samotných. Vezmeme-li středy stran pravidelného mnohostěnu, jsou to vrcholy k němu duálního mnohostěnu. Pravidelný čtyřstěn je duální sám se sebou, krychle je duální s pravidelným osmistěnem (obr.13) a pravidelný dvanáctistěn s pravidelným dvacetistěnem.

Dualitu mezi mnohostěny lze odhalit, všimneme-li si symetrií, které se vyskytují v tab.1 .

Např.:

	m	*n*	*s*	*v*	*h*
krychle	3	4	6	8	12
osmistěn	4	3	8	6	12



obr.13

3. Výskyt duality v ostatních disciplínách matematiky

3.1 Duální vektorové prostory

V této kapitole nám nepůjde o získávání nových znalostí z oblasti vektorových prostorů. Půjde nám o pouhé představení duality v tomto odvětví matematiky. Budeme přitom navazovat na základní znalosti. Přesto budou pro přehlednost důležité definice a vztahy připomenuty.

Def.3.1.1 Nechť X je nějaká množina prvků, které budeme někdy nazývat *body* a značit malými kurzívními písmeny $x, y, \ldots$. Předpokládejme, že každé dvojici prvků x, y můžeme přiřadit (pomocí operace zvané *sčítání*) další prvek z X, který označíme $x + y$. Předpokládejme dále, že každému reálnému číslu α a každému prvku x můžeme přiřadit (pomocí operace zvané *násobení*) další prvek z X, který označíme αx. Množina X spolu s tímto sčítáním a násobením se nazývá *lineární prostor*, jsou-li splněny následující axiomy:

1. $x + y = y + x$;
2. $x + (y + z) = (x + y) + z$;
3. v X existuje právě jeden prvek, značený 0 a nazývaný *nulový prvek*, takový, že $x + 0 = x$ pro každé x z X;
4. pro každé x z X existuje právě jeden prvek, značený $-x$, takový, že $x + (-x) = 0$;
5. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$;
6. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$;
7. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$;
8. $1.x = x$;

Lineární prostor se často nazývá vektorový prostor a prvky tohoto prostoru nazýváme vektory.

Def.3.1.2 Neprázdná podmnožina M lineárního prostoru X se nazývá *lineární podprostor* prostoru X, jestliže pro každé x, y z M a pro každý skalár α je $x + y$ z M a αx z M.

Lineární podprostor M v X je sám o sobě opět lineárním prostorem.

V axiomech definice 3.1.1 jsme předpokládali, že při operaci násobení bylo použito reálných čísel α,β. Je-li nutné tuto skutečnost zdůraznit, říkáme, že se jedná o *reálný lineární prostor*.

Jiný druh lineárního prostoru dostaneme, budeme-li předpokládat, že lze spolu násobit každé komplexní číslo α a každý prvek x z X, čímž vzniká další prvek αx. Axiomy přitom zůstávají stejné jako dříve. Vzniklý prostor se pak nazývá *komplexní lineární prostor*.

Def.3.1.3 Nechť X je vektorový prostor. Předpokládejme, že existuje celé kladné číslo n tak, že X obsahuje n vektorů, které jsou lineárně nezávislé, a že každá množina $(n + 1)$ vektorů z X je lineárně závislá. Pak se X nazývá *konečně dimenzionální* a n se nazývá *dimenze* prostoru X. Vektorový prostor obsahující jeden prvek (který je nutně nulovým prvkem) se také nazývá konečně dimenzionální s dimenzí nula. Jestliže prostor X není konečně dimenzionální, budeme říkat, že je *nekonečně dimenzionální*.

Def.3.1.4 Konečná množina S prostoru X se nazývá *báze* lineárního prostoru X, je-li S lineárně nezávislá a je-li lineárním obalem množiny S celý prostor X.

Novým pojmem pro nás bude *lineární operátor*. Jedná se o jistý druh zobrazení, jehož definiční obor je lineární prostor a jehož obor hodnot je obsažen v dalším lineárním prostoru.

Def.3.1.5 Nechť X a Y jsou lineární prostory (oba reálné nebo oba komplexní). Nechť A je zobrazení s definičním oborem X a s oborem hodnot obsaženým v Y. Řekneme, že A je *lineární operátor z X do Y*, jsou-li splněny tyto podmínky:

$$A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2, \quad (1)$$

$$A(\alpha x) = \alpha Ax, \quad (2)$$

kde α je libovolný skalár a x_1, x_2, x jsou libovolné prvky z X.

Def.3.1.6 Budiž X reálný nebo komplexní lineární prostor a Y lineární prostor tvořený tělesem skalárů prostoru X. Lineární operátor z X do Y se pak nazývá *lineární funkcionál* na X.

Je-li X lineární prostor a x obecný symbol pro prvky prostoru X, budeme užívat x' jako obecného symbolu pro lineární funkcionály na X. Protože x' je operátor (zobrazení), můžeme mluvit o jeho hodnotě v bodě x; hodnotu funkcionálu x' v bodě x zapíšeme ve tvaru $\langle x', x\rangle$.

Jsou-li x_1' a x_2' lineární funkcionály na X a je-li α skalár, definujeme $x_1' + x_2'$, $\alpha x_1'$ předpisem

$$\langle x, x_1' + x_2'\rangle = \langle x, x_1'\rangle + \langle x, x_2'\rangle \quad (3)$$

$$\langle x, \alpha x_1'\rangle = \alpha\langle x, x_1'\rangle \quad (4)$$

Def.3.1.7 Nechť X je lineární prostor a nechť X^f je množina všech lineárních funkcionálů na X. Podle předešlých odstavců je X^f lineárním prostorem. Nazveme ho *algebraicky duálním prostorem* k prostoru X.

Prostor X^f hraje důležitou roli při studiu lineárních operátorů s definičním oborem X.

Jelikož X^f je lineární prostor, můžeme také uvažovat jeho algebraicky duální prostor, který označíme $(X^f)^f$, nebo jednodušeji X^{ff}. Prvky prostoru X^{ff} budeme značit symbolem x'' a hodnotu funkcionálu v bodě x' zapíšeme ve tvaru $\langle x'', x'\rangle$.

Každému prvku x z X přiřadíme jednoznačně určený prvek x'' z X^{ff}, definovaný vztahem

$$\langle x', x''\rangle = \langle x, x'\rangle. \quad (5)$$

Z (3) a (4) plyne, že tento vzorec opravdu definuje lineární funkcionál na X^f. Vztah mezi x a x'', popsaný v (5), definuje na X lineární operátor J s hodnotami v X^{ff}, který vektoru x přiřazuje $x'' = Jx$.

Def.3.1.8 Zobrazení J z X do X^{ff} se nazývá *kanonické zobrazení* prostoru X do X^{ff}.

Vezměme za fakt, že obor hodnot operátoru J je izomorfní prostoru X. Pak můžeme ztotožnit prostor X a obor hodnot operátoru J, což nám umožní pohlížet na prostor X jako na lineární podprostor prostoru X^{ff}. Hovoříme o kanonickém vnoření prostoru X do X^{ff}.

Def.3.1.9 Je-li obor hodnot operátoru J roven X^{ff}, řekneme, že prostor X je *algebraicky reflexivní*.

V teorii grafů lze dokázat, že duálním grafem ke grafu G^* je opět graf G. Zde je situace nepatrně jiná, neboť duálním lineárním prostorem k prostoru X^f není vždy opět prostor X, nýbrž prostor X^{ff}, kde prostor X je podprostorem X^{ff}. Je-li X algebraicky reflexivní, pak X a X^{ff} je tentýž prostor.

Více k tomuto tématu viz např. [Tlr], [Se2], [Pyt].

3.2 Duální dvojice v projektivní geometrii

Připomeňme, co projektivní geometrie je a čím se zabývá.

Rozšíříme-li euklidovskou rovinu o nevlastní elementy, dostáváme *projektivní rovinu*. Nevlastními elementy rozumíme *nevlastní body*. Geometrii v projektivní rovině nazýváme *projektivní geometrií*.

"Být rovnoběžný" je relace ekvivalence na množině všech přímek v rovině. Víme, že ke každé ekvivalenci na množině existuje rozklad. Jednotlivé třídy rozkladu ekvivalence jsou směry. Každému přiřadíme nevlastní bod. Tento bod leží na všech přímkách stejného směru. Množinu všech nevlastních bodů v rovině nazveme *nevlastní přímka*.

Potom, co jsme zavedli nevlastní body a nerozlišujeme je od vlastních, můžeme říci, že pracujeme v *čistě projektivní geometrii*.

Projektivní geometrie zkoumá vlastnosti, které se nemění středovým promítáním. Tyto vlastnosti se nazývají "INVARIANTY". V rovině si především všímá jednoparametrických lineárních útvarů, tj. přímé bodové řady a svazku přímek.

Přímá bodová řada je množina všech bodů incidentních s danou přímkou *p*; přímka *p* je její *nositelka*. Je-li *p* vlastní, pak do bodové řady na nositelce *p* náleží právě jeden nevlastní bod. Je-li *p* nevlastní, všechny body bodové řady na nositelce *p* jsou nevlastní.

Svazek přímek (v projektivní rovině) je množina všech přímek incidentních s daným bodem *S*, který se nazývá *střed* svazku. Je-li *S* nevlastní, pak do svazku náleží právě jedna nevlastní přímka.

Axiomatika projektivní geometrie:

A1: K libovolným dvěma různým bodům existuje právě jedna přímka, která je s oběma incidentní.

A1´: K libovolným dvěma různým přímkám existuje právě jeden bod, který je s oběma incidentní.

A2: Existují čtyři body takové, že k žádným třem z nich neexistuje přímka, která by byla se všemi incidentní.

A2´: Existují čtyři přímky takové, že k žádným třem z nich neexistuje bod, který by byl se všemi incidentní.

Axiomy **A1**, **A1´** a **A2**, **A2´** jsou navzájem duální.

A3: "Desarguesův axiom" - samoduální

Nechť *A,B,C* a *A´,B´,C´* jsou dvě trojice bodů neležících v přímce a nechť všechny tyto body jsou navzájem různé. Spojnice *AA´*, *BB´*, *CC´* procházejí jedním bodem *O* právě tehdy, jestliže průsečíky *AB* x *A'B'*, *AC* x *A'C'*, *BC* x *B'C'* leží na jedné přímce *o*.

Jestliže tedy odvozujeme věty z jedné skupiny axiomů (čárkované nebo nečárkované), pak zřejmě týmž postupem dostaneme z druhé skupiny axiomů opět platnou větu, když učiníme příslušnou záměnu. Věty získané uvedenou záměnou se nazývají navzájem *duální věty*.

Princip duality v projektivní geometrii:

Z každé věty, která udává vztahy mezi základními útvary v projektivní rovině, dostaneme duální větu, jestliže v původní větě každý pojem nahradíme pojmem duálním.

Duální dvojice v projektivní geometrii:

bod	- přímka
průsečík přímek	- spojnice bodů
bodová řada na *p*	- svazek přímek o středu *P*
bod kuželosečky	- tečna kuželosečky
bodová řada na kuželosečce	- množina tečen kuželosečky
průsečík přímky s kuželosečkou	- tečna z bodu ke kuželosečce
direkční střed	- direkční osa
pól	- polára

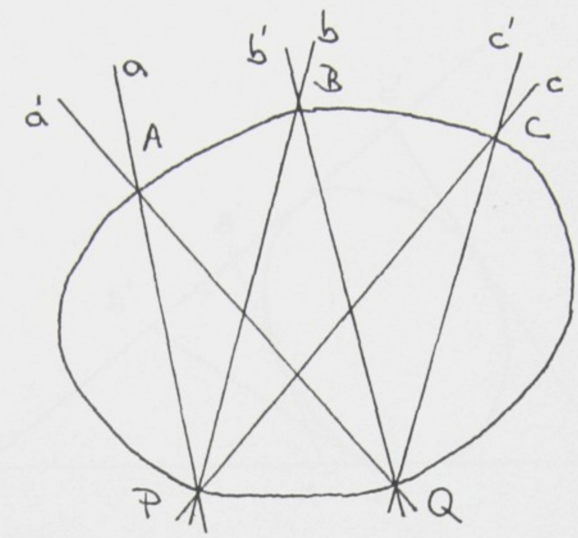
V následujících odstavcích ukážeme na konkrétních příkladech to, čím jsme se nyní zabývali.

Trojúhelník

Trojúhelníkem v projektivní rovině rozumíme skupinu tří bodů A, B, C (vrcholy), které neleží na přímce, a přímky (strany), určené body A, B, C. Trojúhelník je sám k sobě duální.

Projektivní vytvoření kuželosečky

Jsou-li dány dva svazky přímek (obr.14), pak množina všech společných bodů odpovídajících si přímek vytváří kuželosečku.



obr.14

Bylo by namístě provést důkaz. Protože ale nevykládáme projektivní geometrii, ale představujeme jen vztahy, které se v této geometrii vyskytují, nebudeme důkaz uvádět. Důkaz viz [Urb-67:220_{13-4}].

Věty o kuželosečce

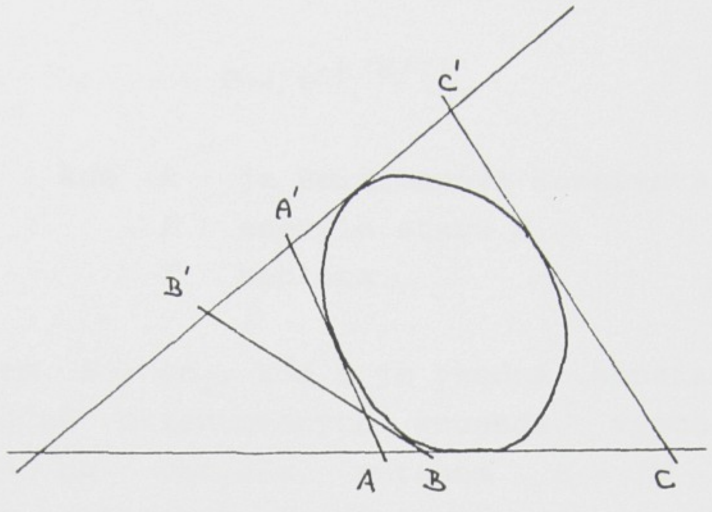
V1: Libovolnými pěti body v rovině, z nichž žádné tři neleží na přímce, prochází právě jedna kuželosečka.

V2: Kuželosečka je jednoznačně určena čtyřmi body a tečnou v jednom z nich.

V3: Kuželosečka je jednoznačně určena třemi body a tečnami ve dvou z nich.

Duálně můžeme vytvořit kuželosečku pomocí projektivity mezi dvěma přímými bodovými řadami.

Jsou-li dány dvě přímé bodové řady (obr.15), pak množina všech spojnic odpovídajících si bodů určuje kuželosečku. Tyto spojnice jsou tečnami kuželosečky, proto někdy mluvíme o tečnové kuželosečce.



obr.15

Věty duální k větám V1, V2, V3:

V1´: Ke každým pěti přímkám, kde žádné tři neprocházejí jedním bodem, existuje právě jedna kuželosečka, jejímiž tečnami jsou tyto přímky.

V2´: Kuželosečka je jednoznačně určena čtyřmi tečnami a bodem dotyku na jedné z nich.

V3´: Kuželosečka je jednoznačně určena třemi tečnami a body dotyku na dvou z nich.

Zmínkou o dualitě ve vektorových prostorech a v projektivní geometrii její výskyt nekončí. V jistém smyslu se dualita objevuje i v dalších oblastech matematiky, např. mezi **Booleovými algebrami** [Šsm-81:20].

3.3 Dualita v termodynamických výpočtech

Ukažme v následujících odstavcích dualitu, která se objeví při zkoumání termodynamického chování feromagnetických látek. Na obr.16*a*,*b* vidíme Isingův model magnetismu látek. Možné orientace magnetického pole částic jsou +, -. Pravděpodobnost, že nastane právě tento stav (obr.16), je vyjádřena následujícím vztahem:

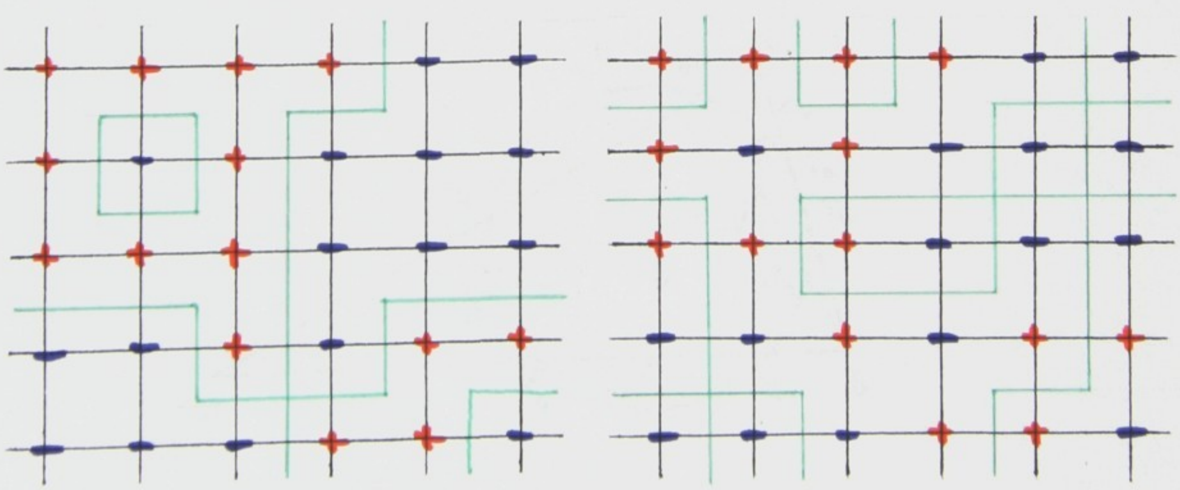
$$P \sim e^{-k(E/T)},$$

kde k je Boltzmanova konstanta,
E energie stavu a
T teplota.

Vztahem $E = cn_1$, kde c je vhodná konstanta a n_1 počet dvojic opačně orientovaných sousedů, vypočítáme energii konfigurace na obr.16*a*, vztahem $E = [N - n_2]$ energii konfigurace na obr.16*b*. N udává počet dvojic všech sousedů a n_2 udává počet dvojic stejně orientovaných sousedů. Vztahy jsou to jiné, ale popisují stejný systém. Můžeme též říci, že vypočítáme délku hranice, neboli obvod daných geometrických obrazců.

Sčítáme-li příspěvky od všech konfigurací, objeví se nakonec v obou případech stejné konfigurace.

V popsaném modelu magnetismu u každé látky existuje právě jedna teplota, při které se její vlastnosti skokem mění (jenom proto, že má magnetické chování). Tuto teplotu lze zjistit termodynamickými výpočty, při kterých nám nastíněná dualita značnou mírou pomůže.



obr.16a obr.16b

4. Příklady pro výuku na SŠ

4.1 Feuerbachova kružnice

Věta 4.1 Buď *ABC* libovolný trojúhelník. Potom středy jeho stran *Ta*, *Tb*, *Tc*, paty jeho výšek V_a, V_b, V_c a středy A_1, B_1, C_1 úseček *AV*, *BV*, *CV* (Eulerovy body), leží na kružnici (obr.17).

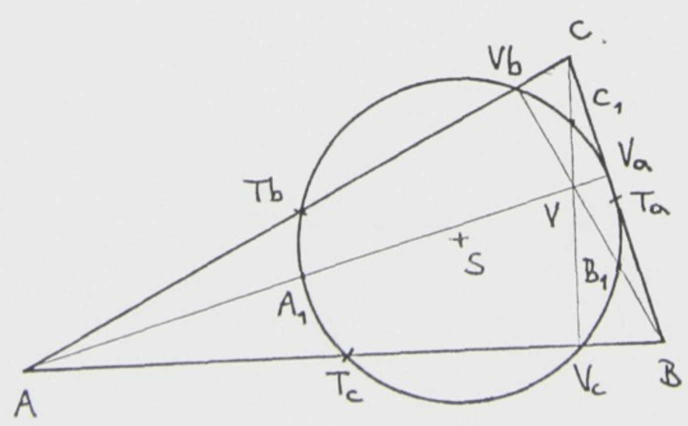
Tato kružnice se nazývá Feuerbachova kružnice, či kružnice devíti bodů. Setkat se můžeme i s poněkud nesprávným názvem Eulerova kružnice, podle Eulerových bodů, které na ní leží.

Důkaz je proveden v [ŠV-88:46^9-47$_8$]. V důkazu autoři rozlišují pět druhů trojúhelníků:

- různostranný a nepravoúhlý
- rovnoramenný, nerovnostranný a nepravoúhlý
- rovnostranný
- různostranný a pravoúhlý
- rovnoramenný a pravoúhlý

Důvod k tomuto postupu je ten, že některé z bodů T_a, T_b, T_c, V_a, V_b, V_c, A_1, B_1, C_1 mohou splynout.

Výše uvedenou větu lze dokázat snadněji. Tento důkaz je námětem několika dále uvedených úloh.



obr.17

4.1.1 Úloha č.1

Zadání: Dokažte, že středy stran trojúhelníku a paty výšek téhož trojúhelníku leží na kružnici.

Řešení: Střed kružnice opsané trojúhelníku leží v průsečíku os stran trojúhelníku.

Jestliže tedy střed kružnice opsané trojúhelníku *KLM* (obr.18) leží na ose *o* strany *ML* a prochází bodem *K*, pak prochází i bodem *K'*. *K'* je obraz bodu *K* v osové symetrii s osou *o*.

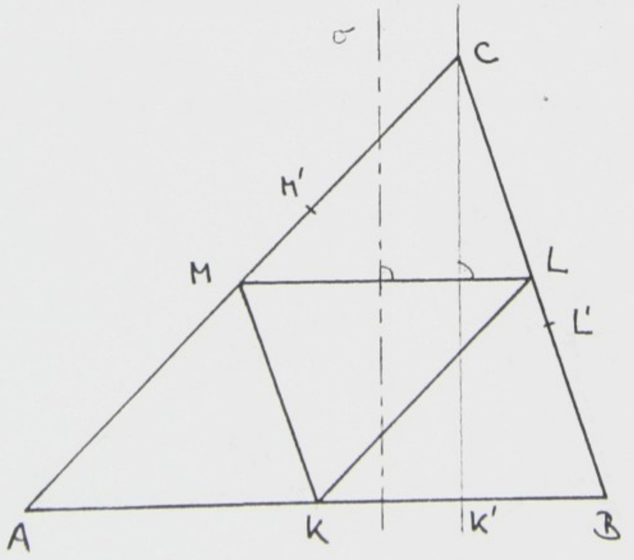
Musíme tedy dokázat, že bod *K'* je patou výšky trojúhelníku *ABC* procházející vrcholem *C*.

Vzdálenost bodu *K* od osy *o* je rovna vzdálenosti bodu *C* od osy *o* (vyplývá ze shodnosti trojúhelníků *KLM* a *CML*). Přímka procházející bodem *C*, rovnoběžná s osou *o* je výškou trojúhelníku *ABC*. Patou této výšky je právě bod *K'*, neboť:

$$|oK| = |oC| = |oK'|.$$

Na základě principu cyklické záměny leží na téže kružnici i body *L'*,*M'*.

Náčrtek:



obr.18

Cest k dokázání skutečnosti, že bod *K'* je patou výšky na stranu *c* trojúhelníku *ABC*, existuje více. Dokázat je to možno též pomocí stejnolehlosti trojúhelníků *ABC* a *KLM* se středem stejnolehlosti v těžišti *T* trojúhelníku *ABC* a koeficientem $-\frac{1}{2}$.

4.1.2 Úloha č.2

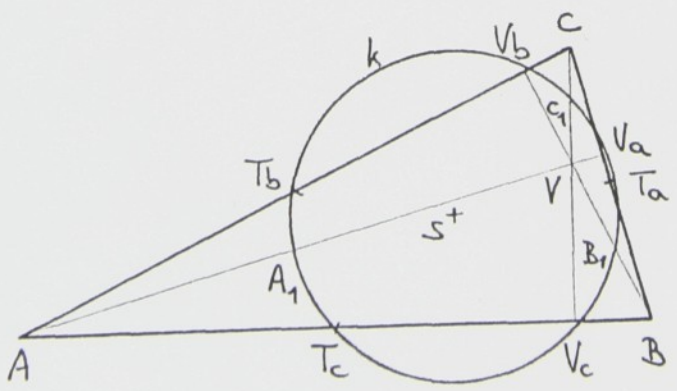
Zadání: Dokažte, že kružnice, která prochází patami výšek a středy stran trojúhelníku *ABC*, prochází i středy úseček *VA*, *VB*, *VC*. *A*, *B*, *C* jsou vrcholy trojúhelníku *ABC* a *V* je ortocentrum (průsečík výšek) trojúhelníku *ABC*.

Řešení: K řešení této úlohy použijeme duality vyskytující se mezi každými dvěma z trojúhelníků *ABC*, *ABV*, *BCV*, *ACV*.

a) Dualita zde spočívá v tom, že duální trojúhelníky mají vždy jednu stranu společnou a zbylé dvě strany jednoho trojúhelníku leží na výškách druhého trojúhelníku a naopak.

b) Kružnice procházející patami výšek trojúhelníku prochází i patami výšek duálního trojúhelníku. Paty výšek obou trojúhelníků jsou společné.

c) Kružnice procházející středy stran a patami výšek trojúhelníku (dokázáno v úloze 4.1.1) prochází i středy stran a patami výšek duálního trojúhelníku.



obr.19

Přibližme výše uvedené duální vztahy na dvojici trojúhelníků ABC a ABV (obr.19).

ad a) Trojúhelníky ABC a ABV mají stranu AB společnou. Strany AV, BV trojúhelníku ABV leží pořadě na výškách v_a, v_b trojúhelníku ABC. Strany AC, BC trojúhelníku ABC leží pořadě na výškách AV_b, BV_a trojúhelníku ABV.

ad b) Paty výšek trojúhelníku ABC opravdu splývají s patami výšek trojúhelníku ABV.

ad c) Kružnice k prochází středy stran T_a, T_b, T_c a patami výšek V_a, V_b, V_c trojúhelníku ABC. Prochází tedy i patami výšek V_a, V_b, V_c a středy stran A_1, B_1, T_c duálního trojúhelníku ABV. Středy A_1, B_1 stran AV, BV trojúhelníku ABV jsou Eulerovy body trojúhelníku ABC.

Z duality, např. mezi trojúhelníky ABC a ACV dokážeme, že na kružnici k leží též Eulerův bod C_1 trojúhelníku ABC. Tím je úloha dokázána.

4.1.3 Úloha č.3

Zadání: Sestrojte trojúhelník ABC, známe-li $|S_aS_c|$, $|S_aS|$, $|S_cS|$, kde S je střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC a S_a, S_c jsou středy kružnic trojúhelníku ABC připsaných.

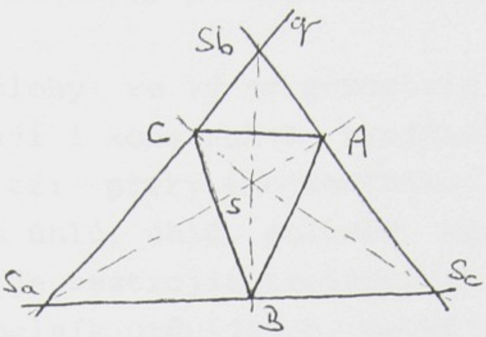
Řešení:

Rozbor: Středy kružnic připsaných trojúhelníku jsou průsečíky os vnějších úhlů při dvou vrcholech trojúhelníku a osy vnitřního úhlu při třetím vrcholu.

S_aS_c je osou vnějšího úhlu při vrcholu B, S_aS je osou vnitřního úhlu při vrcholu A a S_cS je osou vnitřního úhlu při vrcholu C hledaného trojúhelníku. S je průsečík os hledaného trojúhelníku.

Sestrojíme trojúhelník $S_aS_bS_c$. Hledaný trojúhelník ABC je jeho ortickým (výškovým) trojúhelníkem.

Náčrtek:

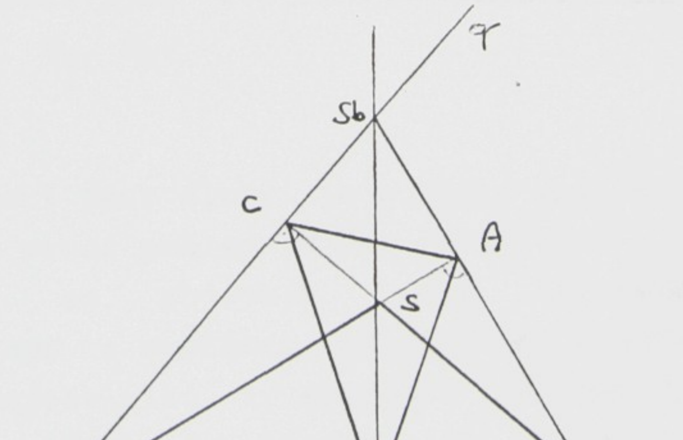


obr.20

Popis konstrukce:

1) Sestrojíme trojúhelník S_aS_cS.
2) V trojúhelníku S_aS_cS sestrojíme výšku SB příslušnou ke straně S_aS_c. Pata B výšky SB je vrchol hledaného trojúhelníku ABC.
3) Bodem S_a vedeme kolmici q na polopřímku S_cS.
4) Určíme průsečíky C, S_b přímky q s polopřímkami S_cS a BS.
5) Určíme průsečík A polopřímky S_cS_b s polopřímkou S_aS.
6) Ze získaných bodů A, B, C sestrojíme hledaný trojúhelník ABC.

Konstrukce:



obr.21

4.2 Příklad duality v trojúhelníku

Konstrukční úlohy ve výuce geometrie na střední škole se mimo jiné týkají i konstrukce trojúhelníku.

Jsou zadány tři prvky trojúhelníku (velikosti stran, výšek, těžnic, os úhlů, úhlů, poloměr kružnice opsané nebo vepsané), úkolem je sestrojit trojúhelník. Možností výběru těchto tří, trojúhelník určujících, prvků je více.

V [ŠV-88:159-235] je uvedeno 150 různých zadání pro konstrukci trojúhelníku. Vynechány jsou úlohy, které vzniknou z jiné úlohy permutací. Např. je-li uvedena a řešena úloha, kde jsou známy velikosti (α, v_b, t_c), nemusíme se již zabývat úlohou se zadáním (β, v_a, t_c), neboť postup je týž.

Ne každá z těchto úloh je však řešitelná euklidovsky, tzn. jen pomocí pravítka a kružidla. A vyskytují se mezi nimi i úlohy, které mají nekonečně mnoho řešení, tzv. podurčené úlohy.

Následující úloha nepatří do žádného z těchto dvou nepříznivých případů.

4.2.1 Úloha č.4

Zadání: Sestrojte trojúhelník *ABC*, jsou-li dány délky jeho výšek v_a, v_b, v_c.

Řešení:

I k řešení této úlohy je použito duality, která není vidět hned na první pohled. V čem spočívá?

Dualita se objevuje mezi systémem podobných trojúhelníků *ABC* a systémem trojúhelníků tvořených výškami v_a, v_b, v_c trojúhelníků 1. systému. Konkrétně: poměr výšek nového trojúhelníku je stejný jako poměr stran starého trojúhelníku a naopak.

Rozbor: Označíme-li a, b, c, délky stran trojúhelníku ABC, jimž po řadě příslušejí dané výšky v_a, v_b, v_c, pak jeho obsah S lze vyjádřit vzorci

$$S = \frac{1}{2}av_a = \frac{1}{2}bv_b = \frac{1}{2}cv_c. \qquad (1)$$

Sestrojíme-li trojúhelník $A'B'C'$ se stranami o délkách $a' = v_a$, $b' = v_b$, $c' = v_c$ a označíme-li délky jeho výšek v_a', v_b', v_c', (obr.22*a*), pak pro jeho obsah platí:

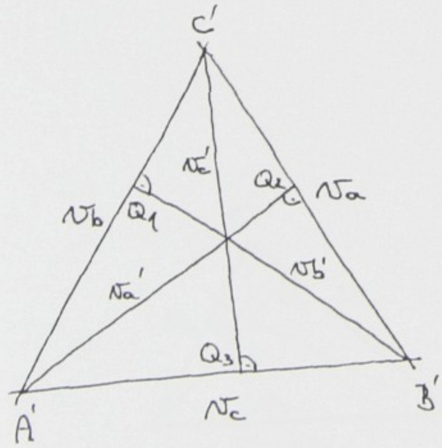
$$S' = \frac{1}{2}v_a v_a' = \frac{1}{2}v_b v_b' = \frac{1}{2}v_c v_c'. \qquad (2)$$

Z rovnic (1), (2) plyne, že

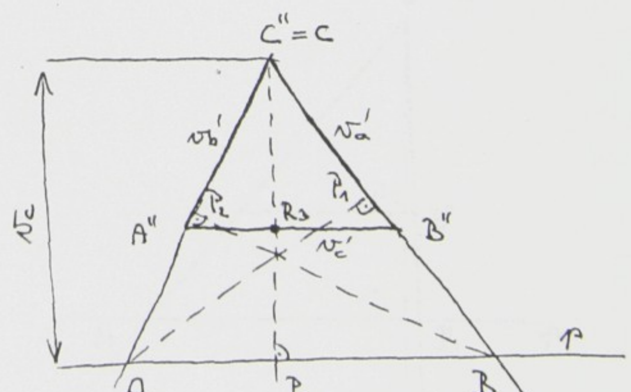
$$v_a = (S'/S)a, \quad v_b = (S'/S)b, \quad v_c = (S'/S)c, \qquad (3)$$

a proto sestrojíme-li trojúhelník $A''B''C''$ se stranami o délkách $a'' = v_a'$, $b'' = v_b'$, $c'' = v_c'$, pak trojúhelník $A''B''C''$ je podobný trojúhelníku ABC (s koeficientem podobnosti $k = S'/S$). Speciálně může být trojúhelník $A''B''C''$ stejnolehlý s trojúhelníkem ABC, např. podle středu $S = C = C''$ (obr.22*b*).

Náčrtek:



obr.22*a*



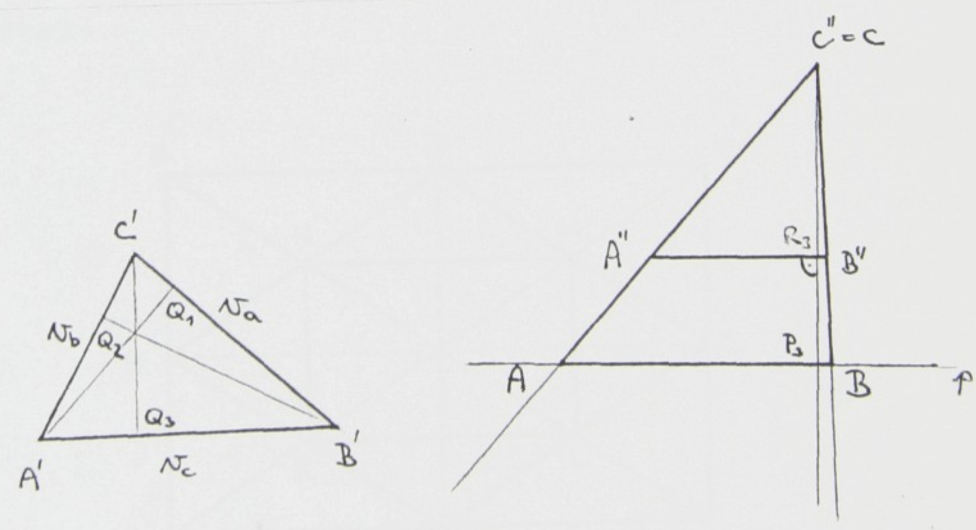
obr.22*b*

Popis konstrukce:

1) Sestrojíme trojúhelník $A'B'C'$, jehož strany mají délky $|B'C'| = v_a$, $|C'A'| = v_b$, $|A'B'| = v_c$.
2) V trojúhelníku $A'B'C'$ sestrojíme výšky $A'Q_1$, $B'Q_2$, $C'Q_3$, jejichž délky označíme $|AQ_1| = v_a'$, $|B'Q_2| = v_b'$, $|C'Q_3| = v_c'$.
3) Sestrojíme trojúhelník $A''B''C''$ se stranami o délkách $|B''C''| = v_a'$, $|C''A''| = v_b'$, $|A''B''| = v_c'$.
4) V trojúhelníku $A''B''C''$ sestrojíme výšku $C''R_3$ příslušnou ke straně $A''B''$.
5) Na polopřímce $C''R_3$ sestrojíme úsečku délky $|C''P_3| = v_c$.
6) Bodem P_3 vedeme rovnoběžku p s přímkou $A''B''$.
7) Určíme průsečíky A, B přímky p s polopřímkami $C''A''$ a $C''B''$.
8) Ze získaných vrcholů A, B, $C \equiv C''$ sestrojíme hledaný trojúhelník ABC.

Úloha je jednoznačně řešitelná právě tehdy, když dané délky výšek v_a, v_b, v_c trojúhejníku ABC a jejich převrácené hodnoty splňují trojúhelníkové nerovnosti.

Konstrukce:



obr.23

4.3 Kosočtverec

4.3.1 Úloha č.5

Zadání: Dokažte, že úhlopříčky kosočtverce jsou na sebe kolmé.

Řešení: I zde se vyskytuje dualita a to mezi kosočtvercem *ABCD* a čtyřúhelníkem *KLMN*, jehož vrcholy jsou středy daného kosočtverce.

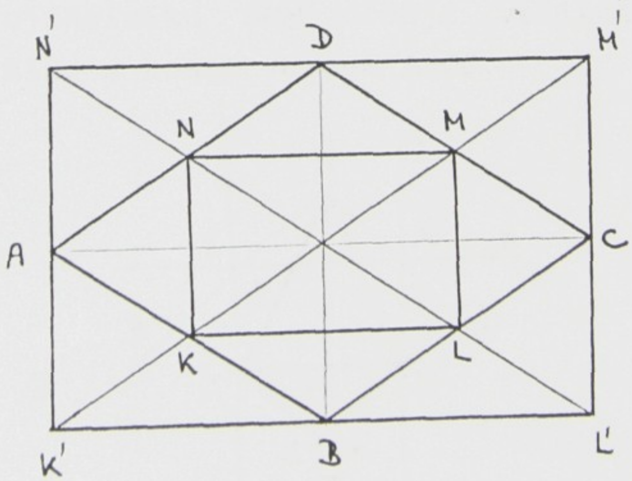
Úhlopříčky *AC*, *BD* kosočtverce *ABCD* jsou po řadě rovnoběžné se stranami *KL*, *MN* a *KN*, *LM* čtyřúhelníku *KLMN*.

Úhlopříčky *KM*, *LN* čtyřúhelníku *KLMN* jsou po řadě rovnoběžné se stranami *AD*, *BC* a *AB*, *CD* kosočtverce *ABCD*.

Stačí dokázat, že čtyřúhelník *KLMN* je obdélník.

Sestrojíme Thaletovu kružnici *k* nad průměrem *KM*. Pro všechny body *X* na ní ležící platí, že velikost úhlů *KXM* je $\pi/2$. Body *N* a *L* leží na kružnici *k*. Velikost úhlů *KNM* a *KLM* je tedy též $\pi/2$. Čtyřúhelník *KLMN* je opravdu obdélník. Úhlopříčky kosočtverce *ABCD* jsou rovnoběžné se stranami obdélníku *KLMN* a svírají úhel $\pi/2$, jsou na sebe kolmé.

Náčrtek:



obr.24

Pozn.: Kolmost úhlopříček kosočtverce lze dokázat i pomocí duality mezi kosočtvercem *ABCD* a obdélníkem *K´L´M´N´* jemu opsaným, kde vrcholy *A*, *B*, *C*, *D* jsou středy stran obdélníku *K´L´M´N´*. I zde dualita spočívá v rovnoběžnosti úhlopříček jednoho útvaru se stranami útvaru druhého a naopak.

Důkaz vyplývá ze shodnosti trojúhelníků *ADN´*, *ABK´*, *BCL´*, *CDM´*; resp. ze shodnosti trojúhelníků *K´L´N´*, *K´M´N´*, *K´L´M´*, *L´M´N´*.

Obdélníky *KLMN* a *K´L´M´N´* jsou podobné.

4.3.2 Úloha č.6

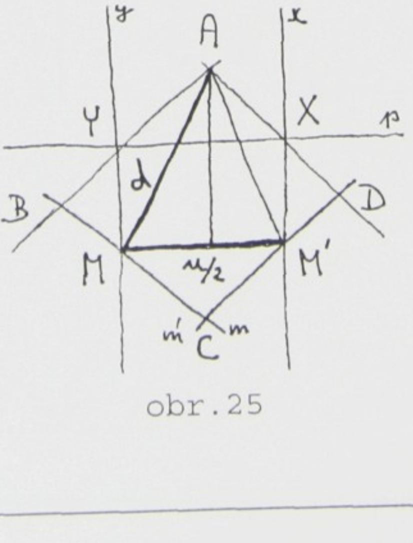
Zadání: V rovině jsou dány dva různé body *A*, *M*, jejichž vzdálenost je *d*. Dále je dáno kladné číslo *u*. Sestrojte kosočtverec *ABCD* s úhlopříčkou délky *u* neprocházející bodem *A* tak, aby bod *M* byl středem jeho strany *BC*.

Řešení:

V řešení zde uvedeném použijeme duality mezi kosočtvercem a obdélníkem, jehož vrcholy jsou středy stran kosočtverce.

Rozbor: Je-li bod *M*, jehož vzdálenost od bodu *A* je *d*, středem strany *BC* kosočtverce *ABCD*, je bod *M´*, jehož vzdálenost od bodu *A* je též *d*, středem strany *CD* kosočtverce *ABCD*. Vzdálenost bodů *MM´* je rovna *u*/2. 2/3 délky výšky na stranu *MM´* trojúhelníku *AMM´* určují velikost druhé strany obdélníku duálního s kosočtvercem *ABCD*.

Náčrtek:

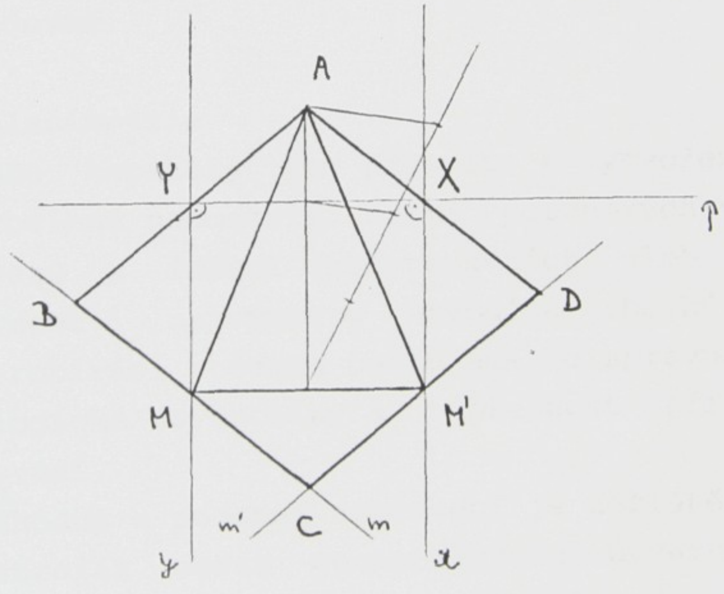


obr.25

Popis konstrukce:

1) Sestrojíme trojúhelník AMM', $|AM| = |AM'| = d$, $|MM'| = u/2$.
2) Ve vzdálenosti 2/3 výšky na stranu MM' od strany MM´ vedene rovnoběžku p se stranou MM'.
3) Body M' a M vedeme kolmice x, y na přímku MM'.
4) Určíme průsečíky přímky p s přímkami x, y a označíme X, Y.
5) Sestrojíme obdélník $XYMM'$.
6) Vedeme rovnoběžku m s úhlopříčkou YM', a rovnoběžku m' s úhlopříčkou XM procházející po řadě vrcholy M a M' obdélníku $XYMM'$.
7) Určíme průsečíky přímek AY s m, AX s m', m s m' a po řadě označíme B, D, C.
8) Sestrojíme kosočtverec $ABCD$.

Konstrukce:



obr.26

5. Zařazení do výuky

5.1 Rozbor učebních osnov

Podívejme se nejprve do učebních osnov pro čtyřletá gymnazia. Pro větev přírodovědnou jsou učební osnovy rozepsány podrobně. Osnovy pro větev humanitní, všeobecnou a pro zaměření matematika - fyzika se na takto podrobně rozepsané osnovy větve přírodovědné odvolávají, doplňují je, nebo naopak učební látku ubírají nebo přesouvají do jiných ročníků.

Tato práce je psána ve shodě s učebními osnovami větve přírodovědné.

Máme-li přiblížit problém duality žákům gymnazií, pak bude nejvhodnější zařadit tuto látku do kapitol geometrie. Ve druhém ročníku je vyhrazeno 33 hodiny pro základy planimetrie 16 hodin pro úvod do stereometrie, ve třetím ročníku 20 hodin pro sereometrii. Charakterizovány jsou tyto kapitoly následovně:

Základy planimetrie

Cílem této kapitoly je přispět k vytvoření ucelené představy o rovinné geometrii. Kromě polohových vlastností rovinných útvarů a řešení konstrukčních úloh je nutno zaměřit pozornost i na výpočty obvodů a obsahů rovinných útvarů. Při probírání tématu usilujeme o správné využití množinové a logické symboliky a o přesnost při provádění náčrtků a rýsování.

V části shodná a podobná zobrazení je těžištěm poznatků dovednost sestrojit obraz geometrického útvaru v daném zobrazení. Neméně důležité je pochopení pojmu zobrazení. Smysl nespočívá v řešení obtížných konstrukčních úloh.

Stereometrie

Téma je důležité nejen pro matematiku, ale zejména pro přírodovědnou a technickou praxi.

Prostorová představivost patří nesporně k základním gramotnostem moderního člověka. Náročnost řešených úloh a cvičení vyučující přizpůsobuje úrovni třídy. Pozornost věnuje též výpočtům objemů a povrchů těles.

5.2 Doporučení k zařazení

Osobně bych doporučoval zařadit v této práci studované téma ke konci kapitoly planimetrie, nebo na začátek kapitoly stereometrie.

Pro své rozhodnutí vidím několik důležitých důvodů. Předně: Učitel by mohl navázat na již známé poznatky z planimetrie. Znalosti žáků by mohly být dál upevňovány, prohlubovány a rozšířeny o nové poznatky spojené s problematikou duality.

Nebylo by vhodné zabývat se jen příklady duality v rovině. Představivost se rozvíjí již od počátku života. Cílevědomě se začíná rozvíjet už v předškolní výchově, dále ve škole při vyučování zeměpisu, výtvarné výchovy i tělesné výchovy.

"Do prostoru se rodíme." (M. Hejný)

Velký význam pro rozvoj prostorové představivosti má matemetika, zejména geometrie. Proces vytváření prostorové představivosti je nejintenzivnější v době navštěvování 2. stupně základní školy a přechodu na školu střední. Pozdější věk již tolik neumožňuje dokonalé osvojení tohoto fenoménu lidské paměti.

Duality by se dalo využít k plynulému přechodu z roviny do prostoru, z planimetrie do stereometrie. K tomu bychom mohli využít duality mezi platónskými tělesy.

Vyučující by mohl dále organizovat výuku již dle učebních osnov, kde jsou na řadě polohové vlastnosti přímek a rovin v prostoru. Ani zde by se nejednalo o žádný skok v učivu, ukončení kapitoly jedné a zahájení kapitoly další.

Na vhodných modelech platónských těles je možno demonstrovat např. vzájemnou polohu přímek v prostoru. Pro ostatní případy, věřím, by si vyučující vyhledal další, možná i vhodnější modely. Není totiž pro žáka nic zajímavějšího, než když danou věc vidí, ne jen na obrázku, a může s ní sám zacházet a s její pomocí něco dalšího objevovat.

Téma přiblížené v této práci bude učební látkou, která je navíc oproti učebním osnovám. Nevidím však důvod, proč žáky s touto látkou neseznámit a nerozšířit tak užitečně jejich vědění. Vždyť poznatky z teorie grafů lze tak snadno a často použít v praxi!

Nedostatek vyučovacích hodin jako výmluva proti pokusu o zařazení této látky do výuky neobstojí. Je do jisté míry pravomocí učitele určit čemu kolik času věnovat. Dále je v každém ročníku rezervováno okolo dvaceti vyučovacích hodin na souhrnná cvičení a kontrolní práce, z kterých by se dalo v případě nutnosti čerpat.

6. Závěr

Práce si kladla za cíl přiblížit pojem dualita žákům středních škol. Tohoto cíle jsme dosáhli teoretickým přiblížením věci i aplikacemi v konkrétních geometrických úlohách. Jistě jsme nenašli všechny případy výskytu duality ve středoškolském učivu a nevyčerpali tak jejich zásobu. Ostatně to nebylo ani cílem práce.

V práci uvedená řešení úloh odkrývají novou "dimenzi" některých velmi známých úloh. Zřetelněji též poznáváme, že k výsledku nevede vždy jen jedna cesta. Věřím, že i pro žáky bude tento objev vzrušující.

Připravit výuku tak, aby žáky zaujala a aby žáci měli prostor k bádání a vlastním objevům, není vždy snadné. Ve velké míře též záleží na probírané látce. Látku této práce však vidím jako velice vhodnou pro získání žáků a jejich aktivizaci. Již při výkladu duality, vycházejícím z teorie grafů lze vhodnými příklady učinit výuku matematiky hrou.

Matematiku obdivuji, geometrii obzvlášť. Ve své praxi se jistě pokusím seznámit žáky s látkou v této práci studované.

> Mám ráda matematiku nejen proto, že ji lze užít v technice, ale hlavně proto, že je krásná a že člověk do ní vložil svou hravost.
>
> *Rózsa Péterová*

Seznam pramenů:

[HoK] Horák, S.: Kružnice. Praha, MF 1966.

[HoM] Horák, S.: Mnohostěny. Praha, MF 1970.

[Ihr] Ihringer, T.: Diskrete Mathematik. Stuttgart, Teufner 1994.

[Kon] Konforovič, A.G.: Významné matematické úlohy. Praha, SPN 1981.

[KCŠ] Križalkovič, K. - Cuninka, A. - Šedivý, O.: 500 riešených úloh z geometrie. Bratislava, Alfa 1970.

[Kuř] Kuřina, F.: Problémové vyučování v geometrii. Praha, SPN 1976.

[Nie] Niederle, A.: Zajímavé dvojice trojúhelníků. Praha, MF 1980.

[Opa] Opava, Z.: Matematika kolem nás. Praha, Albatros 1989.

[Pol] Polák, J.: Přehled středoškolské matematiky. Praha, SPN 1991.

[Pyt] Pytlíček, J.: Cvičení z algebry a geometrie. Praha, ČVUT 1985.

[Sed] Sedláček, J.: Úvod do teorie grafů. Praha, Academia 1981.

[Se1] Sekanina, M. a kol.: Geometrie I. Praha, SPN 1986.

[Se2] Sekanina, M. a kol.: Geometrie II. Praha, SPN 1988.

[Sšm] Slovník školské matematiky. Praha, SPN 1981.

[Šed] Šedivý, J.: Poznámka k roli konečných grafů v moderním vyučování matematice. Praha, UK 1970.

[ŠeK] Šedivý, J.: O konečných grafech a jejich použití. Matematika ve škole, roč. XVI, č. 8-9.

[ŠeP] Šedivý, J.: O podobnosti v geometrii. Praha , MF 1963.

[ŠV] Švrček, J. - Vanžura,J.: Geometrie trojúhelníka. Praha, SNTL 1988.

[Tay] Taylor, A.E.: Úvod do funkcionální analýzy. Praha, Academia 1973.

[UOM] Učební osnovy čtyřletého gymnázia - Matematika. Praha, Fortuna 1991.

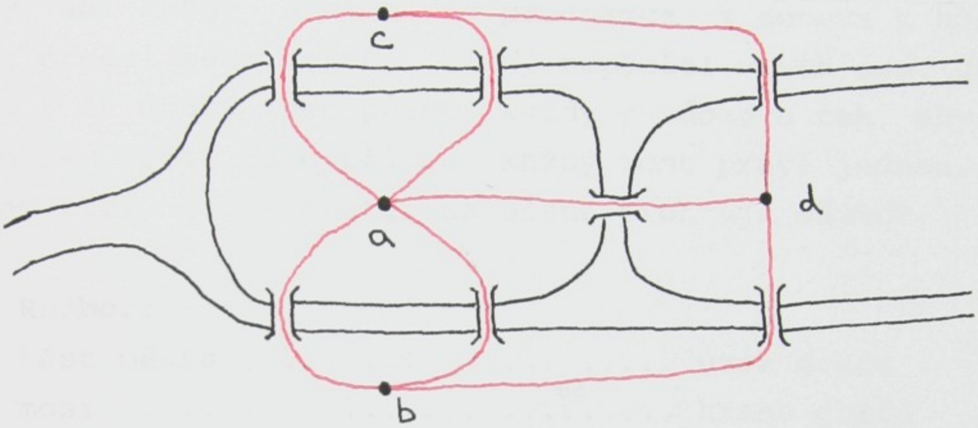
[Urb] Urban, A.: Deskriptivní geometrie II. Praha, SNTL 1967.

[Vil] Vild, J.: Metodické pokyny k diplomovým a závěrečným pracím na Pedagogické fakultě TUL. Liberec, TUL 1995.

[Zel] Zelinka, B.: Rovinné grafy. Praha, MF 1977.

Úloha o sedmi mostech města Královce

Sedm mostů se klene přes říčku Pregel, na jejíchž březích se rozkládá město Kaliningrad (kdysi Königsberg, Královec). **Lze uskutečnit procházku po městě tak, aby se po každém mostu přešlo právě jednou?**



obr.27

Řešení: V grafu kaliningradských mostů (obr.27) jsou všechny čtyři uzly lichého stupně, proto ho nelze nakreslit jedním tahem (bez odtržení tužky od papíru). Nelze tedy ani uskutečnit procházku tak, aby se po každém mostu přešlo pouze jednou.

Pozn.: Řešení nám připadá snadné. Žákům by však mohlo dělat potíže převedení tohoto reálného problému do řeči teorie grafů.

břehy .... uzly grafu
mosty .... hrany grafu
procházka .... tah v grafu
(přes každý most nejvýše jednou)

Reálný problém lze převést na grafový problém: **Lze daný rovinný graf nakreslit jedním tahem?**

Po takovémto rozboru by žáci sami mohli "bádat", kdy je možno daný rovinný graf nakreslit jedním tahem.

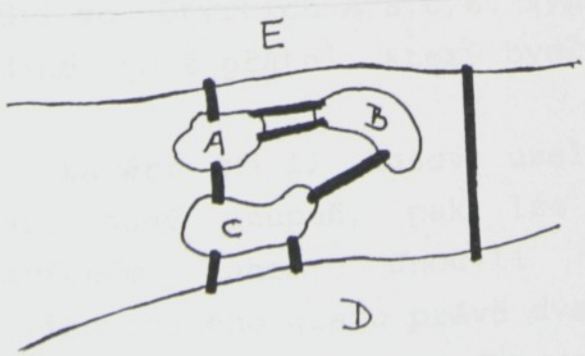
Navázat by se mohlo následujícím příkladem:

V městě rozloženém na ostrovech A,B,C a na březích D,E jedné řeky bylo vybudováno osm mostů spojujících tyto přirozené části města (obr.28*a*). V hospůdce na ostrově B se scházela skupinka pěti přátel, z nichž každý bydlel v jiné části města. Jednoho dne se sešli a vyprávěli, přes které mosty šel každý z nich na procházce z domova k hospůdce. Jeden přešel sedm mostů, žádný nepřešel všech osm. Uzavřeli sázku, že druhý den půjde každý z domova tak, aby přešel všech osm mostů, ale přitom každý most právě jednou. Lze už předem říci, kdo z přátel zaručeně prohraje sázku?

Rozbor:

část města	uzel grafu
most	hrana grafu
"trasa" procházky	sled v grafu
hledaná trasa zahrnuje .... přechod každého mostu nejvýše jednou	hledaný sled je tahem v grafu
hledaná trasa zahrnuje .... všechny mosty a končí v městské čtvrti B	hledaný sled obsahuje všechny hrany grafu a končí uzlem *b*

Opět lze reálný problém převést na jemu odpovídající problém grafový: **Určete v daném neorientovaném grafu** (obr.28*b*) **tah, který obsahuje všechny hrany grafu a končí uzlem** *b*. (Jedná se opět o nakreslení grafu jedním tahem.)



obr.28*a*

obr.28*b*

Předpokládejme, že máme zvolen nějaký neorientovaný graf, který je souvislý a který lze nakreslit jedním tahem. Zapišme si tento tah jako sled a pod každý uzel napišme, s kolika hranami v tomto sledu inciduje (tj. kolik má v posloupnosti sousedů).

$$\{\underset{1}{a_0},\ a_0a_1,\ \underset{2}{a_1},\ a_1a_2,\ \underset{2}{a_2},\ \ldots,\ \underset{2}{a_{n-1}},\ a_{n-1}a_n,\ \underset{1}{a_n}\}$$

V hledaném sledu se vyskytuje každá hrana právě jednou, uzly se mohou opakovat. Protože jsou mezi čísly napsanými pod jednotlivými $a_i (i=0,1,\ldots,n)$ jen dvě jedničky a ostatní jsou dvojky, bude mít "většina" uzlů grafu sudý stupeň. Přesněji řečeno nastat mohou pouze dva případy:

a) je-li $a_0 = a_n$, pak je stupeň každého uzlu grafu sudé číslo

b) je-li $a_0 \neq a_n$, pak mají právě dva uzly grafu lichý stupeň, ostatní sudý.

Tím jsme nalezli nutné podmínky, jež musí splňovat graf, který lze nakreslit jedním tahem.

Graf naší úlohy (obr.28*b*) odpovídá případu b), protože uzly *b*, *d* mají stupeň lichý, uzly *a*, *c*, *e* stupeň sudý.

Tah, který obsahuje všechny hrany a končí uzlem *b* musí začínat v uzlu *d*.

Odpověď: Uzavřenou sázku prohrají zcela jistě ti, kteří bydlí ve čtvrtích A,B,C,E. Vyhrát může při vhodném postupu jedině ten z přátel, který bydlí ve čtvrti D.

Závěr: Má-li každý uzel souvislého neorientovaného grafu sudý stupeň, pak lze tento graf sestrojit jedním *uzavřeným* tahem. Jsou-li ze všech uzlů souvislého neorientovaného grafu právě dva uzly lichého stupně, pak lze tento graf sestrojit jedním *neuzavřeným* tahem.

Problém čtyř barev

Pod tímto názvem se skrýval zdánlivě velmi jednoduchý, ale přibližně od roku 1850 do roku 1976 nevyřešený problém, i když se o jeho řešení pokoušeli nejvýznamnější matematici. V čem spočívá?

Je možmé vybarvit libovolnou mapu čtyřmi různými barvami tak, aby dva sousední státy nebyly vybarveny stejnou barvou? (Za sousední státy se považují jen ty státy, které mají společnou hraniční čáru. Za sousední státy se nepovažují ty státy, které spolu hraničí v jediném bodě, proto mohou být vybarveny stejnou barvou.)

Že k vybarvení mapy tři barvy nestačí zjistíme už při pohledu např. na mapu Lucemburska s jeho sousedními státy Belgií, Francií a Německem.

V roce 1890 dokázal anglický matematik P.J.Heawood, že k vybarvení jakékoli mapy stačí pět barev.

Jak to bylo s důkazem problému čtyř barev?

O problému čtyř barev se zmiňuje již v roce 1840 německý matematik A.F.Möbius (1790-1868). O řešení problému se pokoušel v roce 1878 i anglický matematik A.Cayley (1821-1887). Chybný důkaz A.B.Kempe z roku 1879 byl vyvrácen až o jedenáct let později, právě tak byl vyvrácen zdánlivě přesvědčivý důkaz Y.Schimamoto z roku 1971.

Byla dokázána některá řešení tohoto problému s omezujícími podmínkami. Např. řešení z roku 1975, že čtyřmi barvami lze vybarvit každou mapu s méně než 51 státy.

Konečně byl problém rozřešen až 21.června 1976 americkými matematiky W.Hakenem a K.Appelem. Jejich řešení si vyžádalo 1200 hodin strojového času na počítačích a úplný důkaz má 56 stran textu a 114 stran obrázků, zhruba po třiceti na stránce.

Závěr: Odpověď zní: "Ano, libovolnou mapu lze vybarvit čtyřmi různými barvami tak, že žádné dva sousední státy nebudou vybarveny stejnou barvou."