

Technická univerzita v Liberci  
FAKULTA PŘÍRODOVĚDNĚ-HUMANITNÍ A PEDAGOGICKÁ

---

**Katedra:** Matematiky a didaktiky matematiky  
**Studijní program:** Fyzika  
**Studijní obor (kombinace):** Fyzika se zaměřením na vzdělávání, Matematika se zaměřením na vzdělávání

## Kvadratická funkce, kvadratická rovnice a nerovnice

QUADRATIC FUNCTION, QUADRATIC EQUATION AND INEQUALITY

Fonction quadratique, équation du second degré et inégalité

**Bakalářská práce:** 11–FP–KMD–001

**Autor:**

Markéta Nováková

**Podpis:**

---

**Adresa:**

Krásnolipská 275/9

408 01, Rumburk

**Vedoucí práce:** RNDr. Alena Kopáčková, Ph.D.

**Konzultant:**

**Počet**

| stran | grafů | obrázků | tabulek | pramenů | Příloh |
|-------|-------|---------|---------|---------|--------|
| 49    | 0     | 32      | 2       | 19      | 1      |

V Liberci dne: 14.7.2011

# TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI

## FAKULTA PŘÍRODOVĚDNĚ-HUMANITNÍ A PEDAGOGICKÁ

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

### ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(pro bakalářský studijní program)

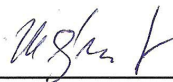
pro (kandidát): Markéta Nováková  
adresa: Krásnolipská 275/9, Rumburk, 408 01  
studijní obor (kombinace): Specializace v pedagogice (Ma-Fy)  
Název BP: **Kvadratická funkce, kvadratická rovnice a nerovnice**  
Název BP v angličtině: **Quadratic functions, quadratic equations and inequalities**  
Vedoucí práce: RNDr. Alena Kopáčková, Ph.D.  
Konzultant:  
Termín odevzdání: květen 2011

Poznámka: Podmínky pro zadání práce jsou k nahlédnutí na katedrách. Katedry rovněž formulují podrobnosti zadání. Zásady pro zpracování BP jsou k dispozici ve dvou verzích (stručné, resp. metodické pokyny) na katedrách a na Děkanátě Fakulty přírodovědně-humanitní a pedagogické TU v Liberci.

V Liberci dne 4. 5. 2010

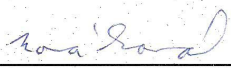


děkan



vedoucí katedry

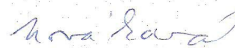
Převzal (kandidát):



Datum:

26. 5. 2010

Podpis:



|                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
|----------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Název BP:      | Kvadratická funkce, kvadratická rovnice a nerovnice                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
| Vedoucí práce: | RNDr. Alena Kopáčková, Ph.D.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| Cíl:           | Úkolem posluchače je shrnout téma týkající se kvadratické závislosti a problémů s tím souvisejících. Uveden bude přehled základní teorie zahrnující i stručné historické poznámky. Pozornost bude věnována jednak samotné kvadratické funkci a jejímu výskytu v reálných situacích, ale i souvisejícím problémům, jimiž jsou kvadratické rovnice a nerovnice. Důraz bude kladen i na grafické řešení problémů. |
| Požadavky:     | Dobrá orientace v matematické analýze v rozsahu úvodního kurzu na FP (reálná funkce jedné reálné proměnné). Schopnost tvůrčí práce.                                                                                                                                                                                                                                                                            |
| Metody:        | Rešerše literatury                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| Literatura:    | Učební texty k úvodnímu kurzu matematické analýzy na VŠ. Hejný, M. a kol.: Teória vyučovania matematiky 2. SPN, Bratislava 1990. Učebnice matematiky pro gymnázia.                                                                                                                                                                                                                                             |

## Čestné prohlášení

**Název práce:** Kvadratická funkce, kvadratická rovnice a nerovnice  
**Jméno a příjmení autora:** Markéta Nováková  
**Osobní číslo:** P09001145

Byla jsem seznámena s tím, že na mou bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. o právu autorském, právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon), ve znění pozdějších předpisů, zejména § 60 – školní dílo.

Prohlašuji, že má bakalářská práce je ve smyslu autorského zákona výhradně mým autorským dílem.

Beru na vědomí, že Technická univerzita v Liberci (TUL) nezasahuje do mých autorských práv užitím mé bakalářské práce pro vnitřní potřebu TUL.

Užiji-li bakalářskou práci nebo poskytnu-li licenci k jejímu využití, jsem si vědoma povinnosti informovat o této skutečnosti TUL; v tomto případě má TUL právo ode mne požadovat úhradu nákladů, které vynaložila na vytvoření díla, až do jejich skutečné výše.

Bakalářskou práci jsem vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury a na základě konzultací s vedoucím bakalářské práce a konzultantem.

Prohlašuji, že jsem do informačního systému STAG vložila elektronickou verzi mé bakalářské práce, která je identická s tištěnou verzí předkládanou k obhajobě, a uvedla jsem všechny systémem požadované informace pravdivě.

V Liberci dne: 14.7.2011

---

Markéta Nováková

## **Poděkování**

Ráda bych v první řadě poděkovala Technické univerzitě v Liberci, že mi umožnila studovat na Fakultě přírodovědně-humanitní studijní program Fyzika (Matematika se zaměřením na vzdělávání, Fyzika se zaměřením na vzdělávání). Dále děkuji všem učitelům a profesorům, kteří mě doprovázeli mým studiem na této univerzitě. A v neposlední řadě chci vřele poděkovat vedoucí mé závěrečné práce, jmenovitě RNDr. Aleně Kopáčkové Ph.D. a dalším, kteří se podíleli na dokončení mé bakalářské práce.

## **Anotace**

Předmětem bakalářské práce „*Kvadratická funkce, kvadratická rovnice a nerovnice*“ je shrnout poznatky o uvedeném tématu. Závěrečná práce obsahuje teoretickou část, jejíž součástí je i historický přehled. Zaobírá se problémy, které se týkají kvadratických funkcí, řešení kvadratických rovnic, nerovnic. Důležitá součást práce je rozebrání průběhu kvadratické funkce. Část práce se zaobírá reálným využitím kvadratických rovnic, a to s konkrétním zaměřením na fyziku. V závěru bakalářské práce je zmínka o možnostech počítačových appletů a softwarů s touto tematikou.

## **Klíčová slova**

Kvadratická funkce, kvadratická rovnice, kvadratická nerovnice, graf funkce.

## **Annotation**

The subject of the thesis "Quadratic Function, quadratic equation and inequality" is to summarize the findings about this topic. The final work is include a theoretical part, which is also include a historical overview of the field. Explores issue related to quadratic function, solving quadratic equation, inequality. An important part of work is the dismantling of the quadratic function. One part of this work focus on using real quadratic equations, with particular emphasis on physics. The concluding part we talk about the possibilities of computer software and applets related to this topic.

## **Keywords**

Quadratic function, quadratic equation, quadratic inequality, graph of the function.

## **Résumé**

Le sujet du mémoire „Fonction quadratique, équation du second degré et inégalité“ est de résumer les conclusions sur ce sujet. Le travail final comprendra une partie théorique qui

présentera également un aperçu historique. Explore les questions liées aux fonctions du second degré, la résolution des équations du second degré, les inégalités. Une partie importante du travail est le démantèlement de la fonction quadratique. Une partie du travail abordera le problème des équations réelles du second degré, en mettant un accent particulier sur la physique. La dernière partie parlera des logiciels et des applets disponibles traitant de ce sujet.

## **Mots-clés**

Fonction quadratique, équation quadratique, inégalité quadratique, graphique fonction.

# Obsah

|                                                        |    |
|--------------------------------------------------------|----|
| Úvod.....                                              | 10 |
| 1 Historie kvadratické rovnice.....                    | 11 |
| 1.1 Egypt.....                                         | 11 |
| 1.2 Mezopotámie.....                                   | 13 |
| 1.2.1 Kvadratická rovnice typu $x^2 = q$ .....         | 14 |
| 1.2.2 Kvadratická rovnice typu $x^2 + q = px$ .....    | 14 |
| 1.2.3 Kvadratická rovnice typu $x^2 = px + q$ .....    | 15 |
| 1.2.4 Kvadratická rovnice typu $x^2 + px = q$ .....    | 16 |
| 1.2.5 Kvadratická rovnice typu $ax^2 + bx = c$ .....   | 18 |
| 1.3 Další vývoj matematiky.....                        | 19 |
| 2 Teoretická část.....                                 | 21 |
| 2.1 Kvadratická funkce.....                            | 21 |
| 2.1.1 Průběh funkce.....                               | 22 |
| 2.2 Kvadratická rovnice s reálnými koeficienty.....    | 23 |
| 2.2.1 Kvadratická rovnice v obecném tvaru.....         | 23 |
| 2.2.2 Speciální případy kvadratické rovnice.....       | 24 |
| 2.3 Kvadratické rovnice s komplexními koeficienty..... | 25 |
| 2.4 Kvadratické nerovnice.....                         | 26 |
| 2.4.1 Řešení kvadratické nerovnice pro $D > 0$ .....   | 27 |
| 2.4.2 Řešení kvadratické nerovnice pro $D = 0$ .....   | 27 |
| 2.4.3 Řešení kvadratické nerovnice pro $D < 0$ .....   | 28 |
| 3 Výskyt kvadratické závislosti ve fyzice.....         | 30 |
| 3.1 Mechanika.....                                     | 30 |
| 3.1.1 Volný pád kuličky v jedoucím vlaku.....          | 30 |
| 3.1.2 Dráha rovnoměrně se zrychlujícího auta.....      | 31 |
| 3.1.3 Vodorovný vrh kamenem a šikmý vrh míčem.....     | 32 |
| 3.1.4 Dostředivá síla na řetízkovém kolotoči.....      | 34 |
| 3.1.5 Kinetická energie pohybujícího se vlaku.....     | 34 |
| 3.2 Mechanické kmitání.....                            | 35 |



|                                      |    |
|--------------------------------------|----|
| 3.3 Elektřina.....                   | 36 |
| 3.4 Speciální teorie relativity..... | 37 |
| 4 PC-aplikace.....                   | 39 |
| 4.1 Microsoft Excel.....             | 39 |
| 4.2 Webové aplikace.....             | 41 |
| Závěr.....                           | 44 |
| Literatura a použité zdroje.....     | 45 |
| Seznam příloh.....                   | 47 |
| Příloha.....                         | 48 |
| Školské vzdělávací softwary.....     | 48 |

## Úvod

Kvadratická funkce, kvadratická rovnice a nerovnice je téma, se kterým se setkáváme na všech stupních škol. Po lineární funkci jde i druhou nejznámější a ve školské matematice nejfrekventovanější funkci. Kvadratická rovnice je jednou z rovnic, jejíž absolutní hodnota kořenů rovnice může být stejné číslo.

Bakalářská práce má čtyři hlavní části. Začíná historií výskytu druhé mocniny a kvadratické rovnice v různých zemích a v různých dobách. Je kladen důraz na kvadratické rovnice, a to zvláště v Egyptě a v Mezopotámii. Porovnáváme zde způsob výpočtu kvadratické rovnice ve druhém století před naším letopočtem a v dnešní době pomocí vzorců. Popisují vývoj matematiky s ohledem na kvadratické funkce a kvadratické rovnice.

Následuje kapitola, ve které uvádím souhrn všech poznatků známých do dnešní doby o kvadratické funkci, kvadratické rovnici a nerovnici. Zabývám se řešením průběhu kvadratické funkce a sestrojením grafu. Dále jsou zde předvedena řešení kvadratických rovnic a nerovnic různými metodami.

Předposlední kapitola má za úkol ukázat situace, kde se kvadratická závislost vyskytuje při popisu fyzikálních jevů. V kapitole jsou uvedeny příklady z běžného života k jednotlivým fyzikálním vzorcům, které obsahují druhou mocninu proměnné.

Stěžejním tématem práce je propojení matematiky s kvadratickou závislostí ve fyzice. Ukážeme, jak je důležitá znalost kvadratické rovnice ve fyzice. Dokazujeme, že kvadratická závislost je velice důležitá při popisu pohybu těles. Předvádíme, že bez znalosti řešení kvadratických rovnic nemůžeme počítat konkrétní příklady ve fyzice.

Ke konci práce je uvedeno několik PC-aplikací, které umějí sestrojít grafy zadaných kvadratických funkcí. Popisují klady a zápory těchto PC-aplikací. Dále se zabývám výhodami a nevýhodami webových aplikací.

# 1 Historie kvadratické rovnice

Uveďme si nejprve dvě země, kde matematické myšlení bylo na vysoké úrovni. Jak v Egyptě, tak v Mezopotámii se poprvé setkáváme s kvadratickou rovnicí, která je posána pomocí slov (viz dále). Nikde se však nesetkáme s vyjádřením kvadratické rovnice  $ax^2 + bx + c = 0$ . Důvodem je, že základy algebry spadají přibližně k přelomu 15. a 16. století a že v předchozích obdobích nebyly k dispozici potřebné nástroje na vyjádření.

## 1.1 Egypt

V polovině 19. století byl nalezen v Thébách papyrus, který je znám pod názvem Berlínský papyrus. Pochází z XII. dynastie Střední říše, tzn. 1994 – 1797 př. n. l. Berlínský papyrus (viz obr. 1) byl uložen v Berlínském muzeu pod názvem *papyrus 6619*. Papyrus je popsán oboustranně a skládá se ze dvou větších částí a dalších menších kousků. Domníváme se, že jde o část sbírky příkladů. Text příkladu z Berlínského papyru<sup>1</sup>:

*Jiný [výpočet množství.] Řekne-li se ti: [100 je (zadané) množství a  $\frac{1}{2} \frac{1}{4}$  z] prvního množství je pro druhé. Nuže, udej mi [první a druhé množství.] Vypočti pravoúhelník z prvního a vypočti  $\frac{1}{2} \frac{1}{4}$  z jedné. [Vypočti]  $\frac{1}{2} \frac{1}{4}$  z prvního množství pro druhé, vyjde  $\frac{1}{2} \frac{1}{4}$ . Vypočítej to [pro druhé množství.] Tedy první množství je 1 a druhé druhé  $\frac{1}{2} \frac{1}{4}$ . Přidej celé první ke druhému, sečti je, vyjde  $1 \frac{1}{2} \frac{1}{4} \frac{1}{16}$ . Vypočti odmocninu z toho, vyjde  $1 \frac{1}{4}$ . Vypočti odmocninu ze 100, vyjde [10]. Počítej s  $1 \frac{1}{4}$ , až najdeš 10, vyjde 8-krát. [To je první množství.] Vypočti  $\frac{1}{2} \frac{1}{4}$  z 8, vyjde [6, to je druhé množství.]*

Pozn.: Řádky odpovídají řádkům v papyru. V hranatých závorkách je zapsán text, který není přesný, jedná se o domněnky založené na logických úvahách, z části podpořených zbytky znaků hieroglyfů na papyru.

---

1 Viz [2], str. 165.

2 Správný výsledek v šestém řádku je  $1 \frac{1}{2} \frac{1}{16}$ .

V této úloze se setkáváme s jednoduchou kvadratickou rovnicí. Její řešení je naznačeno v knize J. Bečváře<sup>3</sup>:

Slovní zadání se přepíše na soustavu dvou rovnic:

$$x^2 + y^2 = 100, \quad y = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)x.$$

Egyptští matematici předpokládali, že  $x = 1$ . Proto mohli počítat:

• levou stranu rovnice  $1^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)^2 1^2 = 1 \frac{1}{2} \frac{1}{16} = \frac{25}{16}, \quad \sqrt{1 \frac{1}{2} \frac{1}{16}} = \frac{5}{4},$

• pravou stranu rovnice  $\sqrt{100} = 10.$

Vrátíme se zpět k zadanému příkladu a vypočteme  $x, y$ :

$$x = 10 \frac{4}{5} = 8, \quad y = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) 8 = 6.$$

Výsledky porovnáme s výsledky, kterých bychom dosáhli dnes my:

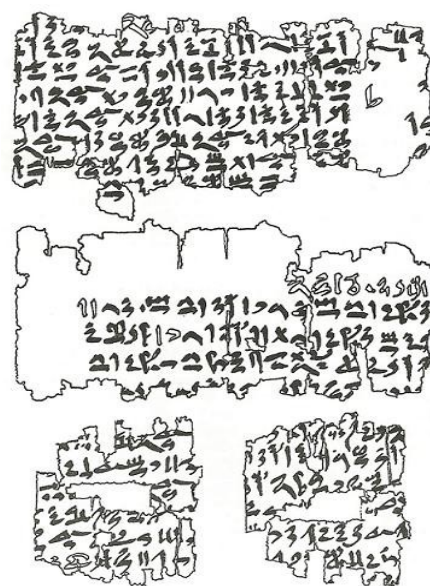
$$x^2 + \frac{9}{16} x^2 = 100,$$

$$\frac{25}{16} x^2 - 100 = 0,$$

$$\left(\frac{5}{4} x + 10\right) \left(\frac{5}{4} x - 10\right) = 0,$$

$$x_1 = -10 \frac{4}{5} = -8, \quad y_1 = -6,$$

$$x_2 = 10 \frac{4}{5} = 8, \quad y_2 = 6.$$



Obrázek 1: Berlínský papyrus, podle J. Bečváře.

Kořen rovnice v Egyptě mohl nabývat jen kladných hodnot, proto Egyptané nedospěli k výsledku  $x_1, y_1$ .

<sup>3</sup> Viz [2], str. 77.

Dalšími důležitými dokumenty ze starého Egypta jsou Kahúnské papyry. Tyto papyry našel roku 1889 W. M. F. Petrie v Káhúnu. Papyry pocházejí z doby XII. dynastie. Dnes je najdeme v Britském muzeu v Londýně. Jedno řešení slovní úlohy vedoucí na kvadratickou rovnici, které najdeme na Kahúnských papyrech, si zde ukážeme<sup>4</sup>:

$$10x\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)x=120.$$

Jako v předchozím příkladě předpokládáme, že  $x = 1$ :

• pravá strana rovnice  $120:10=12,$

• levá strana rovnice  $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{4}.$

Obě strany rovnice dáme opět k sobě a dostaneme  $x$ :

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)x^2=12, \frac{3}{4}x^2=12,$$

$$x^2=12\frac{4}{3}=16, x=\sqrt{16}=4.$$

Dnes bychom dostali  $x=\pm 4$ , ale již bylo řečeno, že egyptští matematici neuvažovali záporný kořen rovnice.

Oba uvedené příklady vedou na kvadratickou rovnici bez lineárního členu. V žádném dochovaném materiálu pocházejícím ze starého Egypta se nedočteme o úplné kvadratické rovnici, již rozumíme  $ax^2+bx+c=0$ .

## 1.2 Mezopotámie

V Mezopotámii se psalo na hliněné tabulky. Tyto tabulky měly velikosti od 2 x 2cm do přibližně 30 x 20 cm. Na větší destičky, o rozměru asi naší A4, se vešlo přepsáním na náš text téměř 830 řádků. Na hliněné destičce s malými rozměry (2,2 x 2,6 cm) najdeme až 30 řádků.<sup>5</sup>

Stejně tak jako u lineárních rovnic i u kvadratických se používá zejména geometrická terminologie. Se známými i neznámými veličinami se zacházelo naprosto stejně, vždy

---

4 Viz [2], str. 77.

5 Viz [2], str. 189.

matematici počítali pomocí ekvivalentních aritmetických úprav. Za neznámé se považuje délka a šířka a dále jejich součin na plochu a obsah. I přes vysokou úroveň matematického myšlení v Mezopotámii sčítali délku s obsahem, tj. první odmocninu s druhou. Matematici v Mezopotámii dobře znali symboliku nám známou spíše jako vzorce:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2, \quad a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

Mezopotámští matematici úlohy převáděli na tzv. *kanonické tvary*, k nimž dospěli metodami, jako jsou substituce a eliminace. K vzorci pro výpočet kvadratických kořenů, jak jej známe dnes

$$\left( x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right),$$

mezopotámští matematici nikdy nedospěli. Důvodem pro absenci algoritmu je, že kořeny rovnice mohly být pouze kladná čísla. Úlohy ve většině případech obsahují více neznámých, dnes bychom je převedli standardní tvar kvadratické rovnice. V Mezopotámii se úlohy tohoto typu řeší několika způsoby vedoucími na již zmíněné kanonické tvary.

V následujících podkapitolách si uvedeme kvadratické rovnice tříděné podle historických souvislostí (třídění podle J. Bečváře).

### 1.2.1 Kvadratická rovnice typu $x^2 = q$

V rovnici bylo  $q$  dané přirozené číslo, šedesátinný zlomek nebo smíšené číslo. Jednalo se o příklady procvičující Pythagorovu větu. Její řešení se poté nacházelo v tabulkách odmocnin a čtverců. Dále se jednalo o formulace: „*Co musíme násobit mezi sebou, aby ... ?, Jaký je kvadratický kořen ... ?*“.<sup>6</sup>

### 1.2.2 Kvadratická rovnice typu $x^2 + q = px$

Tento typ rovnice lze přepsat jako soustava dvou rovnic o dvou neznámých  $x, y$ :

$$x + y = p, \quad x \cdot y = q,$$

kde  $x > y$  a  $p, q$  jsou přirozená čísla, šedesátinný zlomek nebo číslo smíšené. Tuto soustavu také můžeme označit jako *první kanonický tvar*. Pokud z druhé rovnice vyjádříme  $y$  a dosadíme do první, dostaneme rovnici  $x^2 + q = px$ . Tabulky, na kterých jsou zachyceny dané typy kvadratických rovnic, jsou z období Seleukovců (3. stol. př. n. l., nalezeny ve Warce) a

---

<sup>6</sup> Viz [2], str. 266.

starobabylonského (tabulka s 15 příklady o obdélnících). Další tabulka ze Senkeru také z doby starobabylonské obsahuje čtyři příklady zaměřující se na počítání délky, šířky a plochy.

### 1.2.3 Kvadratická rovnice typu $x^2 = px + q$

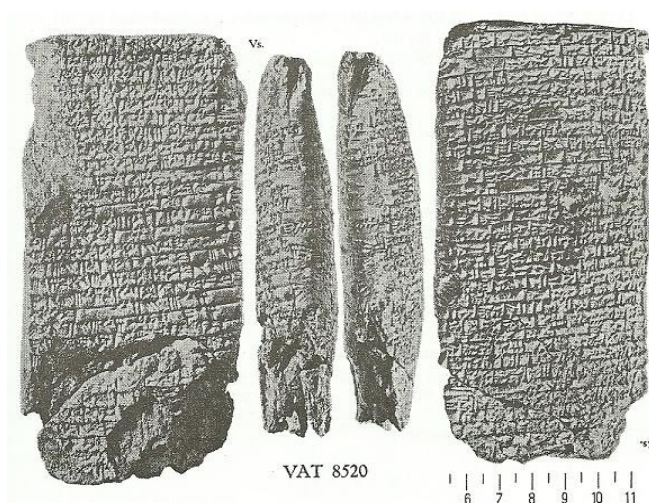
I tato rovnice se přepíše do tvaru dvou rovnic o dvou neznámých:

$$x - y = p, \quad x \cdot y = q,$$

kde  $x > y$  a  $p, q$  jsou přirozená čísla, šedesátinný zlomek nebo číslo smíšené. Tuto soustavu považujeme za *druhý kanonický tvar*. Snadnou úpravou můžeme od těchto rovnic přejít k rovnici kvadratické  $x^2 = px + q$  (z druhé rovnice vyjádříme  $y$  a dosadíme do první rovnice). Kvadratické rovnice tohoto typu nalezneme na starobabylonské tabulce YBC 6967 (viz obr. 2). Obtížnější příklad je uveden na tabulce VAT 8520 (viz obr. 3).



Obrázek 2: Tabulka YBC 6967, podle J. Bečváře



Obrázek 3: Tabulka VAT 8520, podle J. Bečváře

### 1.2.4 Kvadratická rovnice typu $x^2 + px = q$

Text z tabulky AO 8862 (viz obr. 4) je uveden v knize Matematika ve starověku [5]. Slovní úloha zní takto<sup>7</sup>:

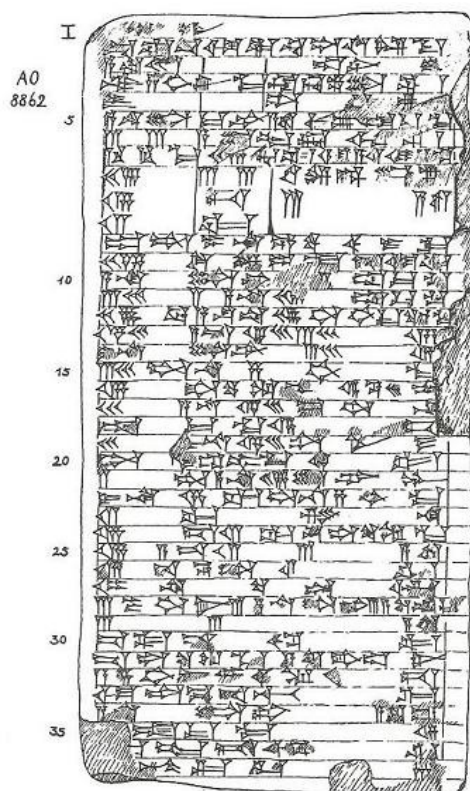
*Délka, šířka. Délku a šířku jsem vynásobil a vznikla plocha. Dále to, oč je délka větší než šířka, jsem vynásobil součtem délky a šířky. K tomu přidal jsem plochu. Obdržel jsem (1, 13, 20). Dále jsem sečetl délku a šířku. Dostal jsem (1, 40).*

(1, 40)                      (1, 13, 20)      součet

(1, 0)      délka

(40)      šířka                      (40, 0)              plocha.

*Ty svým způsobem: (1, 40) , součet délky a šířky, vynásob (1, 40). (2, 46, 40). Od (2, 46, 40) odejmi (1, 13, 20), plocha. Zde jsi určil (1, 33, 20). Polovinu součtu (1, 40) odlom. (50) krát (50) je (41, 40). K (1, 33, 20) přidej. (2, 15, 0) má kořen (1, 30). (1, 40) minus co dá (1, 30)? To je (10). (10) přidej k (50). (1, 0) je délka. (10) odejmi od (50). (40) je šířka ...*



Obrázek 4: Přepis tabulky AO 8862, podle J. Bečváře

<sup>7</sup> Viz [2], str. 277.



Nastává zde otázka, jak převádět starobabylonská čísla do nám známých „arabských číslic“. Uvedu zde dvě čísla, na kterých si ukážeme princip přepisu čísel:

$$\text{číslo } (1, 13, 20) \quad 4400 = 1 \cdot 60^2 + 13 \cdot 60 + 20,$$

$$\text{číslo } (1, 57, 46, 40) \quad 424\,000 = 1 \cdot 60^3 + 57 \cdot 60^2 + 46 \cdot 60 + 40.$$

Ted' je nám jasné, že se jedná o šedesátkovou poziční soustavu. Musíme ještě zmínit, že nulu začali používat ve druhém tisíciletí př. n. l. Ale až ve čtvrtém století př. n. l. došlo ke kodifikaci zápisu čísel. Již nenastal problém rozpoznat například číslo (8, 30) od (8, 30, 0) nebo od (8, 0, 30). Před kodifikací (přidání nuly) se číslo přizpůsobilo počítanému příkladu. Číslo (8, 30) se předtím dalo chápat jako:

$$1. (8, 30) \quad 510 = 8 \cdot 60 + 30,$$

$$2. (8, 30, 0) \quad 30600 = 8 \cdot 60^2 + 30 \cdot 60,$$

$$3. (8, 0, 30) \quad 28830 = 8 \cdot 60^2 + 30 \text{ aj.}$$

Náš příklad již máme uveden s nulami, tudíž nenastane problém s převodem do desítkové soustavy a řešíme:

$$\text{Zapíšeme soustavou rovnic} \quad x y + (x + y)(x - y) = 4400, \quad (1)$$

$$x + y = 100. \quad (2)$$

Vezmeme  $b = (1, 13, 20)$  a  $a = (1, 40)$ . Při řešení nejspíše byla provedena substituce a tím byla zavedena nová neznámá  $z$ :  $2z = x - y$ . Nyní umocníme rovnice  $x + y = a$ ,  $x - y = 2z$ , které od sebe odečteme a dostaneme:  $4xy = a^2 - 4z^2$ , získanou rovnicí vydělíme čtyřmi:

$$xy = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - z^2. \text{ Po dosazení do rovnice (1) získáme } \left(\frac{a}{2}\right)^2 - z^2 + 2az = b. \text{ Tuto rovnost}$$

upravíme pomocí druhé mocniny lineárního dvojčlenu do tvaru  $-(z - a)^2 + a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = b$ .

Z posledního zápisu vyjádříme  $z = a \pm \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$ . Takto by vypadal vzorec dnes, ale v

Mezopotámii musíme zahrnout znaménko +, protože by poté vyšlo záporné  $y$ . Vrátime substituci  $x = 2z + y$ , kde  $y = a - x$ .

$$x_1 = \frac{a}{2} + \left[ a - \sqrt{\frac{a^2}{2} + a^2 - b} \right], \quad x_2 = \frac{a}{2} - \left[ a - \sqrt{\frac{a^2}{2} + a^2 - b} \right].$$

V Mezopotámii nebylo úlohy, která by uváděla dvě řešení kvadratické rovnice. Nemůžeme ani říci, proč tomu tak bylo. Zároveň nemůžeme vědět, jestli matematici druhé řešení znali a pouze ho nenapsali.

### 1.2.5 Kvadratická rovnice typu $ax^2 + bx = c$

Tyto rovnice nacházíme na tabulce označované BM 13901. Jedná se o 24 příkladů, ne však všechny se dochovaly. Jen některé z nich vedou na kvadratické rovnice, které se dají rozdělit do tří skupin<sup>8</sup>:

#### 1. Kvadratická rovnice s jednou neznámou

$$\text{př.: } x^2 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x = \frac{1}{3}, \quad 11x^2 + 7x = 6\frac{1}{4}.$$

#### 2. Soustava dvou rovnic o dvou neznámých

$$\text{př.: } x^2 + y^2 = 28\frac{1}{4}, \quad x - y = \frac{1}{7}y.$$

#### 3. Soustava tří rovnic o třech neznámých (nebo soustava čtyř rovnic o čtyř neznámých)

$$\text{př.: } x^2 + y^2 + z^2 = 612\frac{3}{4}, \quad y = \frac{1}{7}x, \quad z = \frac{1}{7}y.$$

Na starobabylonské tabulce YBC 6504 (viz obr. 5) se dochovaly čtyři příklady<sup>9</sup>:

$$1. \quad x \cdot y - (x - y)^2 = 500, \quad x - y = 10.$$

$$2. \quad x \cdot y - (x - y)^2 = 500, \quad x + y = 50.$$

$$3. \quad x \cdot y - (x - y)^2 = 500, \quad x = 30.$$

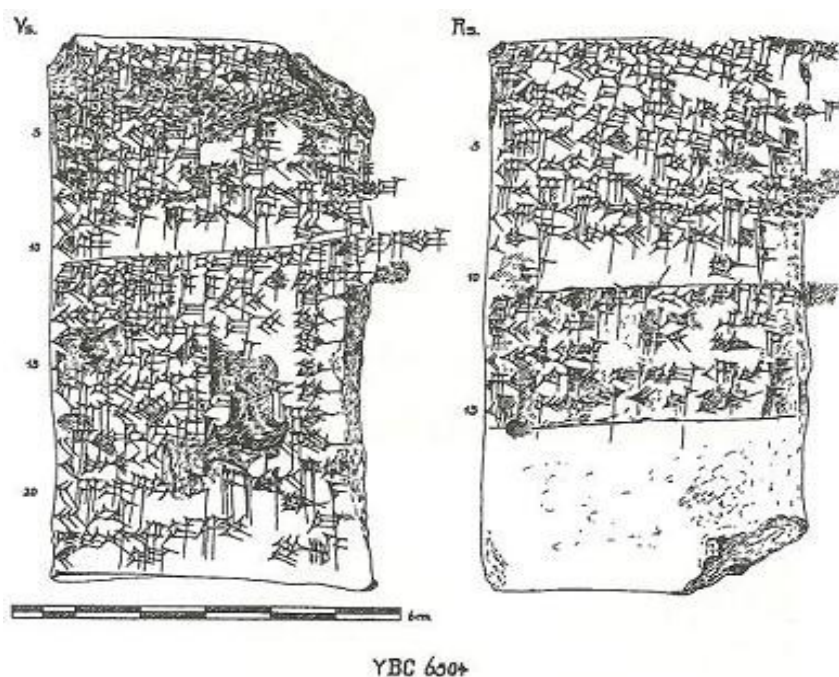
$$4. \quad x \cdot y - (x - y)^2 = 500, \quad y = 20.$$

Všechny uvedené příklady mají stejná řešení ( $x = 30, y = 20$ ).

---

<sup>8</sup> Viz [2], str. 281.

<sup>9</sup> Viz [2], str. 283 – 284.



Obrázek 5: Přepis tabulky YBC 6504, podle J. Bečváře

Uvedli jsme jen některé typy příkladů a tabulek, na kterých jsou zapsány příklady vedoucí na kvadratické rovnice. Dalšími destičkami jsou například VAT 7528, YBC 4695, YBC 4714 aj.

### 1.3 Další vývoj matematiky

Jak vypadala matematika asi 2 tisíce let před naším letopočtem v Egyptě a Mezopotámii, jsme si popsali v předchozí části. Z uvedených příkladů je jasné, že jak egyptští, tak mezopotámští matematici uměli skvěle počítat a řešit složité slovní úlohy. V Babylonských klínopisech z doby 195 před n. l. již matematici znali algoritmus, který dnes odpovídá vzorci pro kořeny kvadratické rovnice. Šedesátková poziční soustava je vytlačována počátkem 2. tisíciletí desítkovou nepoziční soustavou, současně se zánikem klínového písma.

Čtvrté století před naším letopočtem přináší revoluční změnu matematiky, která se stává vědou. Tento zlom nastal díky Euklidovským základům, což jsou učebnice matematiky ve 13ti kapitolách. Kolem roku nula se vytváří a zažívají pojmy aritmetika a geometrie jako samostatně rozvíjející se obory. Z těchto dob neexistují záznamy o matematických důkazech.

Chápání *čtverce* ( $x^2$ ) pouze jako geometrického termínu vedlo v Řecku ke stagnaci až do doby 3. stol. n. l. U starořeckých matematiků se poprvé setkáváme s myšlenkou závislosti různých

veličin. V této době vzniklo dílo Diofanta z Alexandrie s názvem Aritmetika. Traktát má 13 dílů, ale do dnešní doby se dochovalo pouze šest. V knize je uvedeno na 130 numerických problémů, u většiny z nich se setkáváme s lineární nebo kvadratickou rovnicí. Diofantos byl první, kdo používal algebraické symboly. Například psal v rovnicích speciální znaky pro označení mocniny (dynamis = čtverec). Jako jeden z prvních zavedl proměnnou do rovnic a zavedl pro ni značku (arithmos). Ani on si ale neuvědomoval, že kvadratická rovnice může mít dvě řešení, kladná hodnota řešení dávala smysl pro problémy reálného života. Nepočítal ani s nulou. Diofantovo dílo nebylo v Evropě známo do konce 15. století. V tomto století se místo slovního popisu algebraických operací zavádí znaky.

Dne 31. 3. 1596 se narodil René Descartes (zemřel 11. 2. 1650), francouzský filozof a matematik. Descartes se zabýval zejména číselnou prezentací různých geometrických útvarů. Na základě jeho potřeb vznikla kartézská soustava souřadnic (osy soustavy jsou dnes navzájem kolmé a protínají se v jednom bodě: počátku), dodnes nejpoužívanější soustavě souřadnic. S Pierrem de Fermatem vynalezli analytickou geometrii (aplikace algebraických metod v geometrii). Koncem 16. století se objevují znaky pro mocniny, odmocniny a závorky. V této době se vznikají symboly pro aritmetické operace a čísla. Stále jsou odmítána záporná čísla a zejména záporné hodnoty kořenů (kvadratických) rovnic. V 16. století je poprvé vyřešena kvadratická rovnice v obecném tvaru, objevuje se vzorec pro výpočet kořenů kvadratické rovnice.

Na přelomu 17. a 18. se matematika vyvíjí dále i do jiných oborů. V 17. století se rychle rozvíjí přírodní vědy, přibývá potřeba nabyté vědomosti matematicky zpracovat, začínají se používat písmena jako označení daných veličin. Při spolupráci G. W. Leibnize a I. Newtona se v jejich práci objevuje poprvé termín funkce. Přesto definice funkce byla sepsána až J. Bernoullim ve druhé polovině 18. století. J. Fourier a P. Dirichlet uvedli chápání funkce jako závislost mezi danými veličinami. Dále se v tomto období rozvíjí diferenciální a integrální počet.

V první polovině 19. století se matematika člení na další disciplíny. Matematici se zaměřují na axiomatickou aritmetiku, axiomatickou geometrii a na teorii množin. Na začátku 20. století je algebra na stejné úrovni, jak ji známe dnes.

## 2 Teoretická část

V této kapitole se budeme věnovat teorii kvadratické funkce, kvadratické rovnice a nerovnice. Rozebereme, jak má správně vypadat kvadratická rovnice, jak můžeme znázornit kvadratickou funkci a také, jaké máme metody řešení kvadratických rovnic a nerovnic.

### 2.1 Kvadratická funkce

Kvadratickou funkcí nazveme každou funkci ve tvaru:

$$f: y = ax^2 + bx + c, D(f) = \mathbb{R}, \text{ kde } a, b, c \in \mathbb{R}; a \neq 0.$$

V každé funkci je  $y$  závislá proměnná a  $x$  nezávislá proměnná. Definičním oborem jsou reálná čísla – pokud však není uvedeno jinak. Obor hodnot  $H(f)$  se odvíjí od koeficientů  $a$ ,  $b$  a  $c$ . Grafem funkce je parabola. Osa paraboly je vždy rovnoběžná s osou  $y$ . Pro  $b, c = 0$  je vrchol paraboly v počátku soustavy souřadnic. Pro  $a > 0$  je pro  $x < 0$  funkce klesající a pro  $x > 0$  je rostoucí. Tato funkce je zdola omezená (není omezená shora). Analogicky platí, že pro  $a < 0$  je funkce rostoucí pro  $x < 0$  a klesající pro  $x > 0$ . Kvadratická funkce, pro kterou platí  $a < 0$ , je omezená shora a není omezená zdola. Pokud budeme předpokládat, že koeficienty  $b, c$  jsou pořád stejné, pak parabola, kde  $|a| > 1$  je užší než pro  $|a| = 1$  a naopak pro  $|a| < 1$  je širší.

Na určení souřadnic vrcholu se používá „doplnění na čtverec“:

$$y = ax^2 + bx + c,$$

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c,$$

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c,$$

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + c,$$

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a}.$$

$$V = \left[\frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right].$$

Na určení souřadnic vrcholu nám pomůžou odvozené vzorce pro  $[x_0, y_0]$ :

$$x_0 = -\frac{b}{2a}, \quad y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

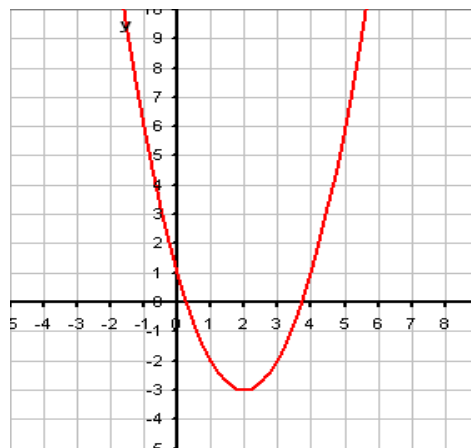
Doplnění na čtverec si uvedeme na konkrétním příkladu:

$$y = x^2 - 4x + 1; \quad D(f) = \mathbb{R}$$

$$y = x^2 - 4x + 4 - 4 + 1,$$

$$y = (x - 2)^2 - 3,$$

$$V = [2; -3].$$



Obrázek 6: Graf kvadratické funkce z příkladu: doplnění na čtverec, Microsoft Excel, vlastní animace

### 2.1.1 Průběh funkce

Jak graf kvadratické funkce bude vypadat, již víme, ale k bližšímu určení paraboly můžeme využít extrémů funkce. Z předchozí části známe definiční obor i obor hodnot, průsečíky s osami a „otevřenost/uzavřenost“ paraboly v závislosti na koeficientu  $a$ .

Dále se u kvadratické funkce určují limity v nevlastních bodech, nulový bod první derivace, lokální extrémy, intervaly monotónnosti a konkávnost nebo konvexnost.

- Limity v nevlastních bodech:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \text{pro } a > 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \quad \text{pro } a > 0.$$

Pokud funkce bude mít koeficient  $a$  záporný, obě limity budou rovny  $-\infty$ .

- Nulový bod první derivace:

př.:  $f(x): y = 2x^2 + 4x + 3$ , pak  $f'(x) = 4x + 4$ . Odtud určíme, kdy se funkce bude rovnat nule, zjistíme nulový bod:  $x = -1$ .

- Lokální extrém u kvadratické funkce určuje vrchol paraboly. Pokud máme funkci, kde  $a > 0$ , pak má funkce lokální i globální minimum ve vrcholu. Pokud má funkce  $a < 0$ , pak vrchol představuje lokální i globální maximum.

- Monotónnost se určuje za pomoci nulového bodu první derivace, který osu  $x$  rozdělí na dva intervaly. U paraboly stačí určit hodnotu koeficientu  $a$ , který určí monotónnost. Pokud  $a < 0$ , pak na  $I_1 = (-\infty; x_0)$  je parabola rostoucí a na  $I_2 = (x_0; +\infty)$  klesající. Pro  $a > 0$  je tomu naopak.
- K určení konvexnosti nebo konkávnosti dané funkce opět využijeme hodnoty kvadratického koeficientu. Pokud  $a > 0$ , pak je parabola konvexní. Pro  $a < 0$ , je graf kvadratické funkce konkávní.

## 2.2 Kvadratická rovnice s reálnými koeficienty

### 2.2.1 Kvadratická rovnice v obecném tvaru

Obecný tvar kvadratické rovnice je dán vztahem:

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0, \quad \text{kde } a, b, c \in \mathbb{R}; \quad a \neq 0.$$

$a \cdot x^2$  - kvadratický člen

$b \cdot x$  - lineární člen

$c$  - absolutní člen

$a$  - koeficient kvadratického členu

$b$  - koeficient lineárního členu

K řešení kvadratické rovnice dojdeme následujícím úpravami:

kvadratickou rovnici doplníme na čtverec (obdobné jako u kvadratické funkce):

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0,$$

Budeme chtít využít vzorec  $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$ , proto upravíme rovnici na tvar:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right) - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2 = 0,$$

$$\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) = 0.$$

Výraz na levé straně je roven nule, rovná-li se alespoň jedna závorka nule:

$$x_1 = \frac{-b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

$$x_2 = \frac{-b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Pro přehlednost se zavedl výraz diskriminant  $D$ . Jde o výraz, který se nachází pod odmocninou:

$$D = b^2 - 4ac.$$

- Je-li  $D > 0$ , má kvadratická rovnice právě dva různé reálné kořeny, které určíme ze vztahu, který jsme si právě odvodili:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

- Je-li  $D = 0$ , má kvadratická rovnice právě jeden dvojnásobný kořen, který dostaneme ze vztahu:

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a}.$$

- Je-li  $D < 0$ , má rovnice řešení pouze v množině komplexních čísel. Pak  $D$

rozepíšeme jako součin kladného čísla ( $|D|$ ) a čísla  $i^2$ :

$$\sqrt{D} = \sqrt{|D|i^2} = \pm i \sqrt{|D|} \quad \text{a kořeny rovnice jsou čísla:}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm i \sqrt{|D|}}{2a}. \quad \text{Jsou to čísla komplexně združená.}$$

### 2.2.2 Speciální případy kvadratické rovnice

- Ryze kvadratická rovnice

$$a \cdot x^2 + c = 0, \quad \text{kde } a, c \in \mathbb{R}; \quad a \neq 0.$$

Z rovnice ekvivalentními úpravami dostaneme  $x^2 = -\frac{c}{a}$ , odmocníme a dostaneme

$$|x| = \sqrt{-\frac{c}{a}}, \quad \text{za předpokladu že } \frac{c}{a} \leq 0 \quad \text{jsou kořeny rovnice:}$$



$$x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}, \quad x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

- Kvadratické rovnice bez absolutního členu

$$a^2 \cdot x + b \cdot x = 0, \quad \text{kde } a, b \in \mathbb{R}; \quad a \neq 0.$$

Pro řešení kvadratické rovnice bez absolutního členu využijeme vytýkání:

$$x \cdot (a \cdot x + b) = 0,$$

$$x = 0 \quad \vee \quad a \cdot x + b = 0 \quad \text{tzn.} \quad x = -\frac{b}{a}.$$

Pozn.: Jak u ryze kvadratické rovnice, tak u rovnice bez absolutního členu, lze použít vzorec pro diskriminant. Způsob řešení přes vzorec pro diskriminant však není nejrychlejší a nejefektivnější, proto se používá výhradně u obecného typu rovnice.

- Také rovnici v normovaném tvaru  $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ , kde  $a, b, c \in \mathbb{R}; \quad a \neq 0$ , můžeme považovat za speciální případ kvadratické rovnice. Jedná se o tvar rovnice, kdy se kvadratický koeficient rovná jedné. Dostaneme ji z obecného tvaru rovnice vydělením konstantou  $a$ . Její obecný zápis je ve tvaru:

$$x^2 + p \cdot x + q = 0, \quad \text{kde } p = \frac{b}{a} \quad \text{a} \quad q = \frac{c}{a}.$$

Pro vztah mezi kořeny rovnice a koeficienty kvadratické rovnice se používají tzv. Viětovy vzorce (podle François Viète):

$$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 \cdot x_2 = q; \quad x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a},$$

kde  $x_1, x_2$  jsou kořeny zadané kvadratické rovnice.

## 2.3 Kvadratické rovnice s komplexními koeficienty

Tvar kvadratické rovnice s komplexními koeficienty je dán vztahem  $ax^2 + bx + c = 0$ , kde  $a, b, c$  jsou komplexní čísla,  $a \neq 0$ . Pokud rovnici upravíme do tvaru<sup>10</sup>  $(2ax + b)^2 - (b^2 - 4ac) = 0$  (obě strany vynásobím číslem  $a$ , vynásobíme čtyřmi a upravíme na druhou mocninu lineárního

---

<sup>10</sup> Viz [3], str. 85.

dvojčlenu), můžeme označit  $y=2ax+b$ ,  $D=b^2-4ac$ , pro  $D \neq 0$ . Z rovnice dostaneme  $y^2-D=0$ . Číslo  $D$  v goniometrickém tvaru vyjádříme vzorcem  $|D|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ . Kořeny

$y_k$  rovnice určíme vztahem  $y_k = \sqrt{|D|} \cdot \left( \cos \frac{\alpha + 2k\pi}{2} + i \sin \frac{\alpha + 2k\pi}{2} \right)$ ,  $k=0, 1$ .

To jsou čísla  $y_0 = \sqrt{|D|} \left( \cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2} \right)$ ,  $y_1 = -\sqrt{|D|} \left( \cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2} \right)$ .

Dosadíme-li  $y_0$ ,  $y_1$  do vztahu  $y=2ax+b$  a vyjádříme-li  $x$ :  $x = \frac{-b+y}{2a}$  dostaneme  $x_1$  (dosazením  $y_0$ ) a  $x_2$  (dosazením  $y_1$ ):

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{|D|} \left( \cos \frac{1}{2} \alpha + i \sin \frac{1}{2} \alpha \right)}{2a}.$$

Tento vzorec platí i pro kvadratickou rovnici s reálnými koeficienty.<sup>11</sup>

## 2.4 Kvadratické nerovnice

Obecný tvar kvadratické nerovnice je určen vztahy:

$$ax^2 + bx + c > 0, \text{ resp. } ax^2 + bx + c < 0,$$

$$ax^2 + bx + c \geq 0, \text{ resp. } ax^2 + bx + c \leq 0, \text{ kde } a, b, c \in \mathbb{R}; a \neq 0.$$

Kvadratická nerovnice má obdobné označení členů jako kvadratické rovnice, proto pro ni platí:

$a.x^2$  - kvadratický člen

$b.x$  - lineární člen

$a$  - koeficient kvadratického členu

$b$  - koeficient lineárního členu

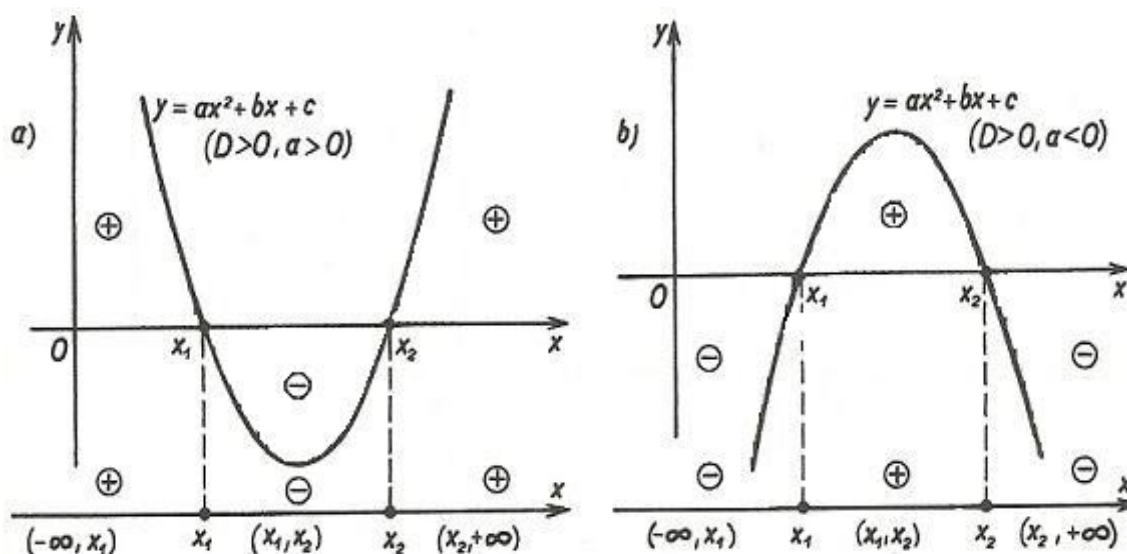
$c$  - absolutní člen

---

<sup>11</sup> Důkaz viz [3], str. 87.

### 2.4.1 Řešení kvadratické nerovnice pro $D > 0$

Pokud  $D > 0$ , pak kvadratická rovnice má dva různé kořeny  $x_1, x_2$ . Kvadratický trojčlen  $a \cdot x^2 + b \cdot x + c$  lze rozložit na součin  $a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ . Po vydělení obou stran dané nerovnice číslem  $a$  má levá strana tvar  $(x - x_1) \cdot (x - x_2)$ . Vždy platí, že při násobení/dělení kvadratické nerovnice záporným číslem se mění znak nerovnosti na opačné. Nyní stačí užít větu o znaménku součinu dvou reálných čísel. Nechť  $x_1 < x_2$ . Graf (parabola) kvadratické funkce  $f: y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$  protíná osu  $x$  ve dvou různých bodech a rozdělí osu  $x$  na tři intervaly  $I_1 = (-\infty; x_1)$ ,  $I_2 = (x_1, x_2)$ ,  $I_3 = (x_2; +\infty)$ . Znaménka v jednotlivých sousedních intervalech jsou opačná. Stačí zjistit hodnotu kvadratického trojčlenu v jakémkoliv bodě v jednom intervalu a odtud pak vyplynou znaménka v ostatních dvou intervalech. Pro zjištění správného řešení nerovnice se musíme podívat na zadání a na znak nerovnosti, podle kterého určíme množinu všech řešení nerovnice. Situaci popisující tento postup znázorníme na obrázku 7. Přehledné zobrazení závislosti diskriminantu a koeficientu  $a$  nalezneme na obrázku 8 (ke kapitole 2.3.1 obrázek 8a).

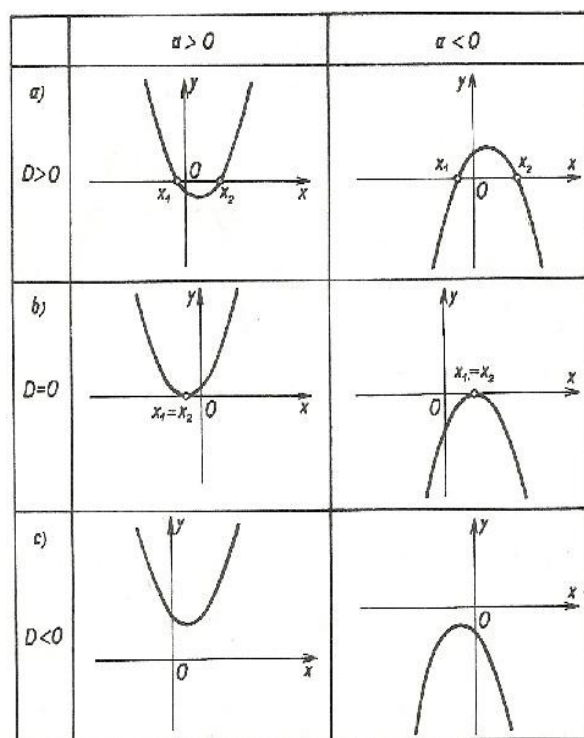


Obrázek 7: Metoda nulových bodů – intervaly, podle J. Poláka

### 2.4.2 Řešení kvadratické nerovnice pro $D = 0$

Pokud  $D = 0$ , pak kvadratická rovnice má jeden dvojnásobný kořen  $x_{1,2}$ . Pro kvadratickou rovnici platí  $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$ . Pokud  $a > 0$ , pak  $a(x - x_1)^2 \geq 0$ . Je-li  $a < 0$ , je  $a(x - x_1)^2 \leq 0$ . Rovnost nule nastává pouze v případě, že  $x = x_1$ . V grafu tak nastává situace,

kdy parabola dána předpisem  $f: y = ax^2 + bx + c$  se dotýká osy  $x$  pouze v jednom bodě a všechny ostatní body jsou buď nad nebo pod osou  $x$ . Na obrázku 8b najdeme znázornění grafu kvadratické funkce pro  $D=0$ , pro  $a > 0$  a  $a < 0$ .



Obrázek 8: Graf kvadratické funkce v závislosti na znaménku  $D$ , podle J. Poláka

### 2.3.3 Řešení kvadratické nerovnice pro $D < 0$

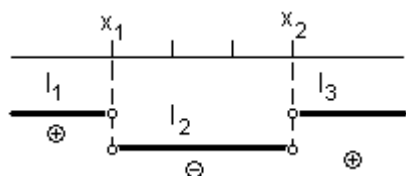
Případ, kdy  $D < 0$ , znázorňuje případ na obrázku 8c. Kvadratická rovnice, která má záporný diskriminant, nemá žádný reálný kořen. Parabola takovéto funkce je pak celá pod osou  $x$  (pro  $a < 0$ ) nebo nad osou  $x$  (pro  $a > 0$ ). K určení řešení kvadratické nerovnice postačí určit znaménko kvadratického trojčlenu v kterémkoliv bodě  $x$ .

K výpočtu řešení kvadratické nerovnice, kdy  $D < 0$  lze také použít „doplnění na čtverec“. Kvadratickou nerovnici upravíme na normovaný tvar vydělením obou stran nerovnice koeficientem  $a$ . Diskriminant této normované rovnice  $x^2 + px + q = 0$  má tvar  $p^2 - 4q$ . Doplněním kvadratického trojčlenu  $x^2 + px + q$  na čtverec dostáváme:

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{D}{4}.$$

Je-li  $p^2 - 4q < 0$ , pak pro každé  $x \in \mathbb{R}$  je  $x^2 + px + q > 0$ . Tato kvadratická nerovnice má nekonečně mnoho řešení.

Určit řešení můžeme ze znaménkové diskuze (znaménkové analýzy, podle O. Odvárko) kořenových činitelů a kvadratického trojčlenu v jednotlivých intervalech  $I_1, I_2, I_3$ . Zakreslíme si osu  $x$  a na ní kořeny  $x_1, x_2$ . Následně zapíšeme do tabulky 1 podle obrázku 9. Pozn.:  $x_1 < x_2$ .



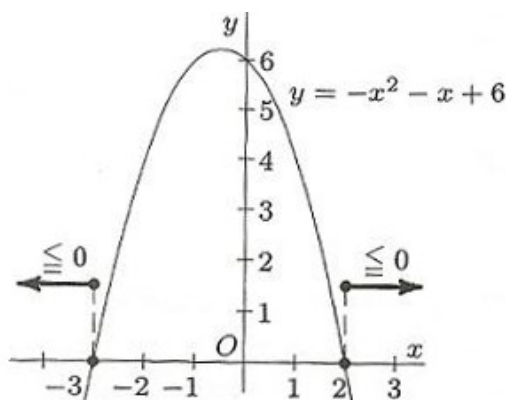
Obrázek 9: znaménková analýza, vlastní ilustrace

Tabulka 1: znaménková diskuze

| $x$                  | $(-\infty; x_1)$ | $(x_1; x_2)$ | $(x_2; +\infty)$ |
|----------------------|------------------|--------------|------------------|
| $x - x_1$            | -                | +            | +                |
| $x - x_2$            | -                | -            | +                |
| $(x - x_1)(x - x_2)$ | +                | -            | +                |

Uveďme si dva názorné příklady výpočtu kvadratické nerovnice.

- Mějme kvadratickou nerovnici  $2x^2 + 5 \leq 3x^2 + x - 1, x \in \mathbb{R}$ . Anulovaný tvar této nerovnice je  $-x^2 - x + 6 \leq 0$ . Nejprve řešíme příslušnou rovnici  $-x^2 - x + 6 = 0$ . Pomocí diskriminantu  $D = 25$  dostaneme dva reálné kořeny  $x_1 = -3, x_2 = 2$ . Koeficient u  $x^2$  je záporný, a proto bude funkce omezená shora. Řešením zadané kvadratické nerovnice  $2x^2 + 5 \leq 3x^2 + x - 1$  jsou všechna  $x \in (-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$ .



Obrázek 10: Grafické řešení nerovnice, podle O. Odvárka

- Nerovnice  $(x^2 - 4x + 3) \geq 0$  lze upravit do tvaru  $(x - 1)(x - 3) \geq 0$ . Osa  $x$  se rozdělí na čtyři intervaly:  $I_1 = (-\infty; 1), I_2 = (1; 3), I_3 = (3; +\infty)$ . Pro  $x < 1$  mají všechny dvojčleny zápornou hodnotu (viz tabulka 2). Jelikož se při každém přechodu přes kořen mění znaménko, tak v intervalu  $I_1$  bude výsledná diskuze znamének kladná, pro  $I_2$  záporná a pro  $I_3$  kladná. Oborem pravdivosti neboli množinou všech řešení uvedené nerovnice je  $P = (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$ .

Tabulka 2: Diskuze znamének z příkladu

| $x$              | $I_1$ | $I_2$ | $I_3$ |
|------------------|-------|-------|-------|
| $x - 1$          | -     | +     | +     |
| $x - 3$          | -     | -     | +     |
| $(x - 1)(x - 3)$ | +     | -     | +     |

## 3 Výskyt kvadratické závislosti ve fyzice

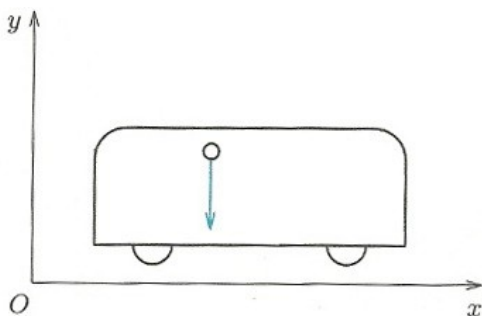
S kvadratickou závislostí ve fyzikálních vzorcích se můžeme setkat velice často. V této kapitole se seznámíme se základními situacemi, které se dají popsat fyzikálním vzorcem, kde se vyskytuje kvadrát.

### 3.1 Mechanika

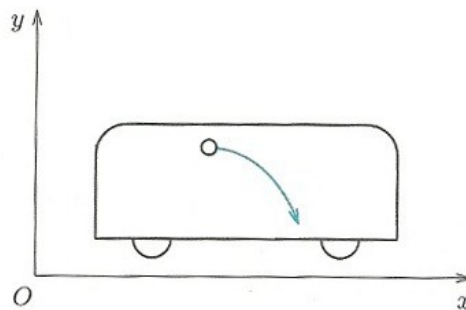
Mechanika je nejstarším oborem fyziky. Zkoumá zákonitosti nejjednoduššího pohybu těles, přemístění. Základní dělení mechaniky je na kinematiku a dynamiku. Kinematika popisuje pohyb těles, dynamika zkoumá, proč pohyb nastává, jeho příčiny. Dále se mechanika dělí na mechaniku tekutin a mechaniku tuhých těles.

#### 3.1.1 Volný pád kuličky v jedoucím vlaku

Představme si situaci, kdy sedíte v jedoucím vlaku a necháte padat volným pádem kuličku. Z fyzikálního hlediska je kulička hmotným bodem, který koná trajektorii. Trajektorie je souhrn všech poloh, kterými hmotný bod prochází při svém pohybu. Pohyby rozdělíme podle tvaru trajektorie na přímočaré a křivočaré. Tvar takové trajektorie je ovlivněn volbou vztažné soustavy. V našem případě můžeme uvážit dvě vztažné soustavy. Jedna je pevně spojená s vagónem a druhá představuje povrch Země, vůči, které se vlak pohybuje. Při uvažování první vztažné soustavy se vlastně nic zvláštního neděje. Kulička pouze spadne volným pádem. Tuto situaci popisuje obrázek 11. Pro nás důležitý je pohyb vzhledem k Zemi. Padající kulička opíše část paraboly, obrázek 12.



Obrázek 11: Volný pád kuličky, podle E. Svobody



Obrázek 12: Pohyb vagónu vzhledem k Zemi, podle E. Svobody

Dráha hmotného bodu volného pádu je popsána vztahem:

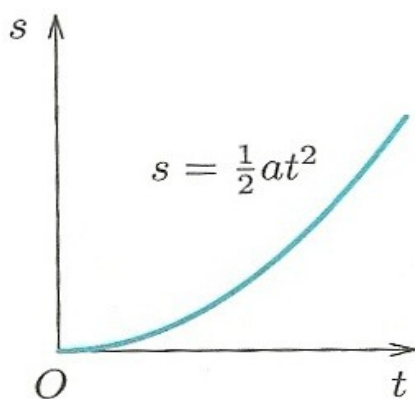
$$s = \frac{1}{2} \vec{g} t^2, \text{ kde } g \text{ je tíhové zrychlení, které je rovno přibližné hodnotě: } 9,809980 \text{ m/s}^2. \text{ Z tohoto}$$

vzorce je patrné, že grafem dráhy (závislá na čase) padající kuličky je část paraboly. Vrchol paraboly je v bodě, kde kuličku pustíme.

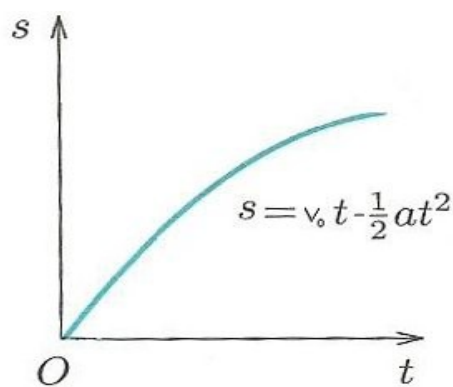
### 3.1.2 Dráha rovnoměrně se zrychlujícího auta

Poučka, s kterou jsme se setkali všichni již na základní škole: „Dráha rovnoměrně zrychleného pohybu při nulové počáteční rychlosti je přímo úměrná druhé mocnině času.“<sup>12</sup>, nám říká, že se zde také setkáváme s kvadratickou závislostí:

$$s = \frac{1}{2} \vec{a} t^2.$$



Obrázek 13: Závislost dráhy na čase, zrychlení, podle E. Svobody



Obrázek 14: Závislost dráhy na čase, zpomalení, vlastní ilustrace, podle E. Svobody

Grafem závislosti dráhy na čase je opět část paraboly (obr. 13).

Typickým příkladem ze života je rozjíždějící se auto. V čase 0 [s] má nulovou dráhu – nic neujelo. V čase se  $t$  [s] bude jeho dráha rovna jedné polovině kvadrátu času násobeného velikostí zrychlení.

V životě se setkáváme každý den i se situací, kdy dané auto musíme zastavit. Jedná se o tentýž pohyb, jen musíme uvažovat zápornou velikost zrychlení a počáteční rychlost  $v_0$ . Také graf tohoto pohybu závislosti dráhy na čase je část paraboly (obrázek 14).

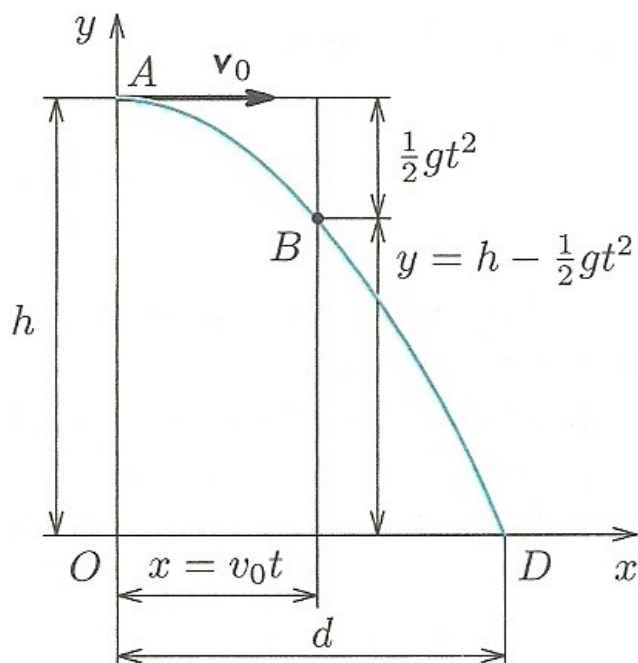
$$s = \vec{v}_0 t - \frac{1}{2} \vec{a} t^2$$

<sup>12</sup> Viz [10], str. 44.

### 3.1.3 Vodorovný vrh kamenem a šikmý vrh míčem

• Stojíme-li v patře domu, můžeme vyhodit kamínek ven z okna. Letí-li kamínek zpočátku rovnoběžně s zemským povrchem jedná se o vodorovný vrh. Trajektorii padajícího kamene bude část paraboly, obr. 15. Vodorovný vrh vzniká složením pohybu přímočarého a volného pádu.

My stojíme v bodě  $A$ , kamínek dopadne do bodu  $D$  a projde při tom bodem  $B$ . Na začátku mu udělíme rychlost  $v_0$ . Bod  $B$  představuje uraženou dráhu kamene ve směru osy  $x$  a  $y$ , souřadnice pro tento bod jsou uvedeny níže.



$h$  ... výška

$d$  ... vzdálenost od paty domu

souřadnice bodu  $B$ :

$$x_B = \vec{v}_0 t, \quad y_B = h - \frac{1}{2} \vec{g} t^2$$

Obrázek 15: Vodorovný vrh, podle E. Svobody

V bodě  $D$ :  $y_D = h - \frac{1}{2} \vec{g} t_D^2 = 0$ , odtud  $t_D = \sqrt{2 \frac{h}{\vec{g}}}$ . Vzdálenost  $D$  od paty domu se nazývá také délka vrhu. Po dosazení  $t_D$  do vztahu pro  $x_D$  dostaneme  $d$ :

$$x_D = \vec{v}_0 t_D \rightarrow d = \vec{v}_0 \sqrt{2 \frac{h}{\vec{g}}}$$

Z tohoto vztahu vidíme, že délka vrhu závisí na udělené počáteční rychlosti a výšce.

• Když jsme na zahradě a házíme si míčem se sourozencem nebo kamarádem, vykonáváme šikmý vrh. Míč letí po zakřivené dráze (obr. 16). Míči udělíme počáteční rychlost  $v_0$ , tato rychlost má směr šikmo vzhůru. Úhlu, který svírá země se směrem vrhu, se říká elevační a značí



se  $\alpha$ . V bodě  $C$  je míček v nejvyšším možném bodě, jedná se o vrchol paraboly. Souřadnice bodu

$B$  jsou:  $x_B = \vec{v}_0 t \cos \alpha$ ,  $y_B = \vec{v}_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} \vec{g} t^2$ .

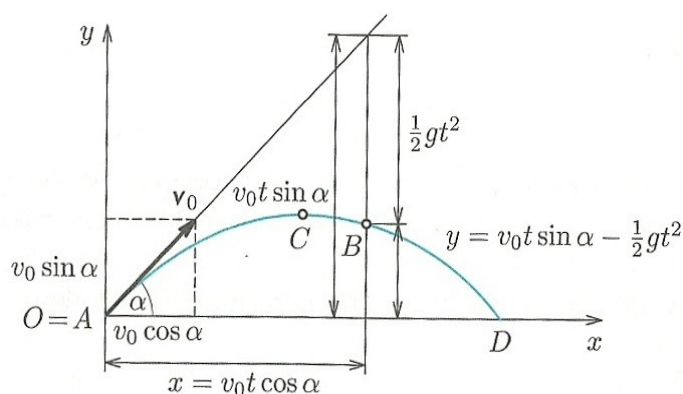
V bodě  $D$  jsou souřadnice  $x_D = d$ ,  $y_D = 0$ . Pro osu  $y$  platí, že  $y = 0$ . Vyjádříme-li  $y_D$  v souřadnicích a položíme rovno nule, získáme čas  $t_D$ :

$$y_D = 0 = \vec{v}_0 t_D \sin \alpha - \frac{1}{2} \vec{g} t_D^2, \text{ z toho plyne } t_D = \frac{2 \vec{v}_0 \sin \alpha}{\vec{g}}.$$

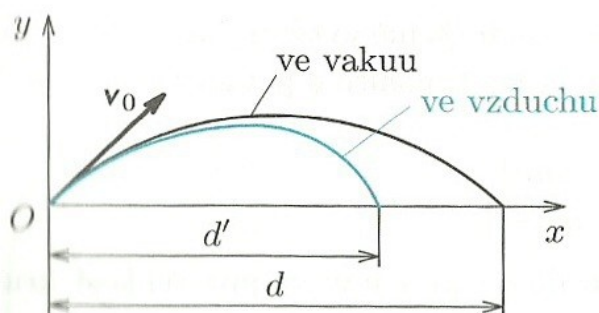
Nyní získanou hodnotu času dopadu dosadíme do  $x_D$ :

$$x_D = d = \vec{v}_0 t_D \cos \alpha = \frac{2 \vec{v}_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{\vec{g}}.$$

Tím jsme získali hodnotu pro délku vrhu, která závisí na druhé mocnině velikosti  $v_0$  a na elevačním úhlu  $\alpha$ . Délka vrhu je nejdelší, pokud je elevační úhel roven  $45^\circ$ . Toto vše ale uvažujeme při zanedbání veškerých vlivů, například odporu vzduchu. Obrázek 17 ukazuje rozdíl šikmého vrhu ve vakuu a ve vzduchu. Ve vzduchu se parabola deformuje působením odporové síly na tzv. balistickou křivku, při které je největší vzdálenost dopadu při elevačním úhlu  $42^\circ$ .



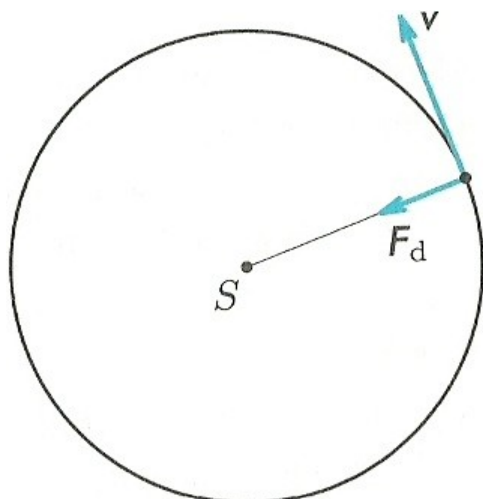
Obrázek 16: Šikmý vrh, podle E. Svobody



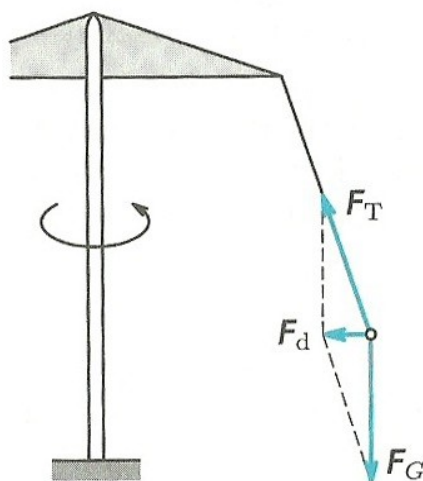
Obrázek 17: Šikmý vrh ve vzduchu a vakuu, podle E. Svobody

### 3.1.4 Dostředivá síla na řetězovém kolotoči

Představme si situaci, kdy sedíme na řetězovém kolotoči. Pokud je kolotoč v pohybu působí na nás dostředivá síla. Dostředivá síla  $F_d$  je výslednicí všech sil, které na těleso působí. V našem případě se jedná o výslednici tíhové síly  $F_G$  a tahové síly řetězu  $F_T$ . Dostředivá síla je přímo úměrná dostředivému zrychlení a má i jeho směr. Na obrázku 18 vidíme dostředivou sílu  $F_d$ , která vždy směřuje k ose otáčení (do středu kružnice). Obrázek 19 představuje kolotoč z boku a je zde znázorněn rozklad dostředivé síly.



Obrázek 18: Pohled na kolotoč z vrchu, podle E. Svobody



Obrázek 19: Pohled na kolotoč z profilu, podle E. Svobody

Dostředivá síla se vypočte pomocí vztahu:

$$\vec{F}_d = m \vec{a}_d.$$

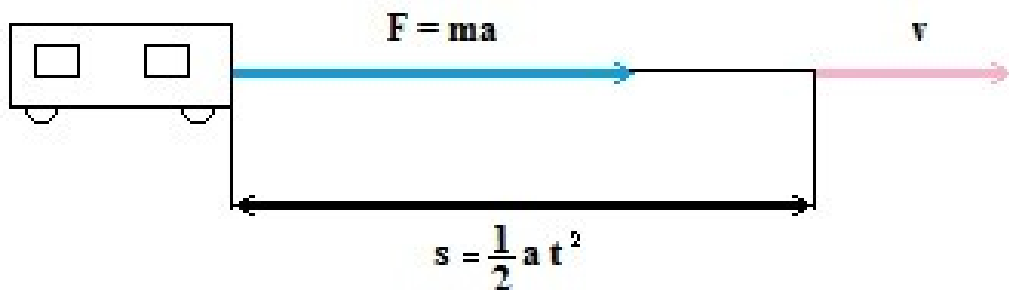
Pokud vezmeme  $\vec{a}_d = \frac{v^2}{r} = \omega^2 \cdot r$ , pak je možné psát:

$$\vec{F}_d = m \frac{v^2}{r} = m \omega^2 r.$$

### 3.1.5 Kinetická energie pohybujícího se vlaku

Kinetickou energii získávají tělesa, která se vzhledem k dané vztažné soustavě pohybují. Budeme uvažovat pohybující se vlak (těleso) vůči Zemi (vztažná soustava). K uvedení vlaku do pohybu potřebujeme vykonat práci. Na začátku situace je vlak v klidu vzhledem k zvolené

vztažné soustavě a má hmotnost  $m$ . Aby se vlak začal pohybovat, udělíme mu konstantní sílu  $F$ . Vlak se bude podle druhého Newtonova pohybového zákona  $\vec{F} = m\vec{a}$  pohybovat stálým zrychlením  $a$ . Po určité době urazí vagón dráhu  $s = \frac{1}{2} \vec{a} t^2$  a bude mít rychlost  $\vec{v} = \vec{a} t$ .



Obrázek 20: Dráha vlaku v čase  $t$ , k odvození  $E_k$ , vlastní ilustrace

Vykonaná práce při uvedení vlaku do pohybu je rovna  $W = \vec{F} s$ . Odtud:

$$W = m\vec{a} \cdot \frac{1}{2} \vec{a} t^2 = \frac{1}{2} m (\vec{a} t)^2 = \frac{1}{2} m \vec{v}^2.$$

Práce vykonaná je mírou změny kinetické energie, neboli  $W = \Delta E_k$ . Jestliže byl vlak původně v klidu, můžeme říci, že práce  $W$  je přímo rovna kinetické energii  $E_k$ . Kinetická energie je dána vztahem  $[J]$ :

$$E_k = \frac{1}{2} m \vec{v}^2.$$

S kinetickou energií se dále můžeme setkat například při hraní kulečnicku. Zde uvádíme koule z klidu do pohybu tágem. Máme však soustavu hmotných bodů – více koulí, proto musíme určovat celkovou kinetickou energii soustavy. Celková kinetická energie je rovna součtu jednotlivých kinetických energií.

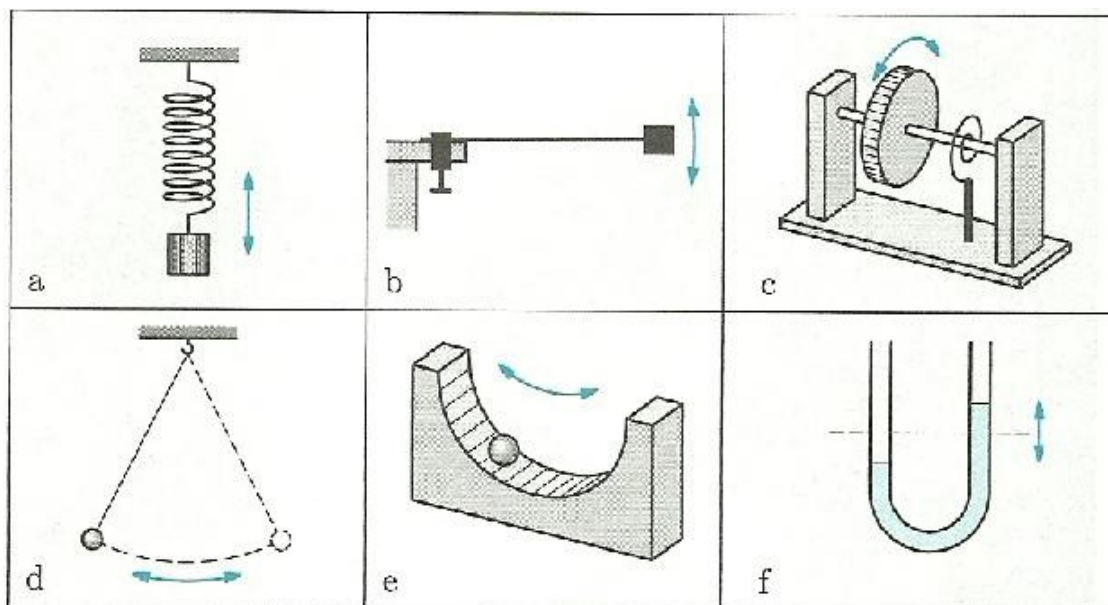
## 3.2 Mechanické kmitání

Nejčastěji se s kmitáním setkáme u tzv. mechanických oscilátorů, což jsou zařízení, která mohou volně kmitat. Příklady takovýchto zařízení ukazuje obrázek 21. Jednou ze základních veličin popisujících harmonický pohyb je zrychlení. Představme si kuličku umístěnou na provázku a zavěšenou na držáku. Rychlost  $v$  bude nejvyšší v rovnovážné poloze. Naopak v krajních bodech

je rychlost  $v$  nulová a mění se její směr. Vektor zrychlení  $a_0$  pohybu kuličky (po části kružnice) směřuje do středu  $S$ . Pro zrychlení  $a$  je dán vztah<sup>13</sup>:

$$\vec{a} = -\omega^2 \vec{y}.$$

Veličina  $\omega$  se nazývá úhlová frekvence a je dána vztahem:  $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$ .



Obrázek 21: Mechanické oscilátory, podle E. Svobody

### 3.3 Elektřina

Elektřina je souhrn elektrostatických (přitahování a odpuzování elektricky nabitých částic) a elektrodynamických jevů (proud jako časově závislá veličina). Pro elektrickou práci platí vztah:

$$W = UQ.$$

Za čas  $t$  se přemístí vodičem částice s nábojem  $Q$ , na spotřebiči je napětí  $U$  a práce je vykonána silami elektrického pole. Máme-li spotřebič, kterým prochází konstantní proud  $I$  a má odpor  $R$ , pak můžeme využít vzorců:

$$I = \frac{Q}{t}, \quad \text{elektrický proud}$$

$$I = \frac{U}{R}. \quad \text{Ohmův zákon}$$

<sup>13</sup> Odvození vztahu viz [10], str. 198.

Pokud vyjádříme  $Q$  ze vzorce pro elektrický proud a dosadíme do vzorce pro práci dostaneme:

$$W = U I t.$$

Pomocí různých interpretací Ohmova zákona dostaneme:  $W = R I^2 t$  nebo  $W = \frac{U^2}{R} t$ .

Odtud je jasné vidět, že práce  $W$  je přímo úměrná druhé mocnině napětí  $U$  a nepřímo úměrná odporu  $R$ . Můžeme nyní odvodit i vztah pro výkon elektrického proudu. Víme, že:

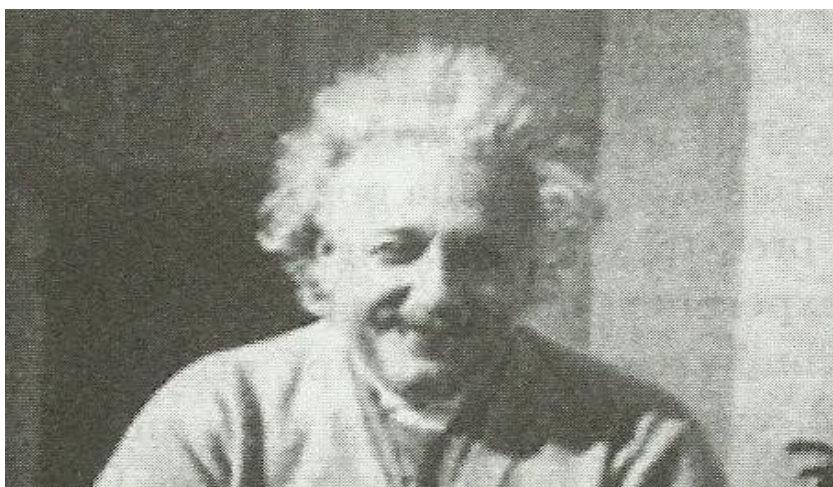
$$P = \frac{W}{t}.$$

Za práci  $W$  dosadíme vzorec, který jsme odvodili výše a dostaneme:

$$P = UI = \frac{U^2}{R} \quad \text{nebo} \quad P = R I^2.$$

Zde je vidět, že výkon elektrického proudu je přímo úměrný odporu  $R$  a kvadrátu elektrického proudu  $I$ .

### 3.4 Speciální teorie relativity



Obrázek 22: A. Einstein, podle E. Svobody

Speciální teorie relativity je jedním z novějších oborů fyziky, které začaly vznikat koncem 19. století. Speciální teorie relativity změnila představu o prostoru a čase (kontrakce délek a dilatace času). Hlavním představitelem speciální teorie relativity byl A. Einstein (1879–1955), obr. 22. A. Einstein vyslovil dva základní principy: princip konstantní světelné velikosti rychlosti a spec. princip relativity o rovnocennosti všech inerciálních systémů. A. Einstein dále dokázal,

že při změně celkové energie tělesa se změní také hmotnost tohoto tělesa. Einsteinův vztah mezi energií  $E$  a hmotností  $m$  je:

$$E = mc^2, \text{ kde } c \text{ je rychlost světla.}$$

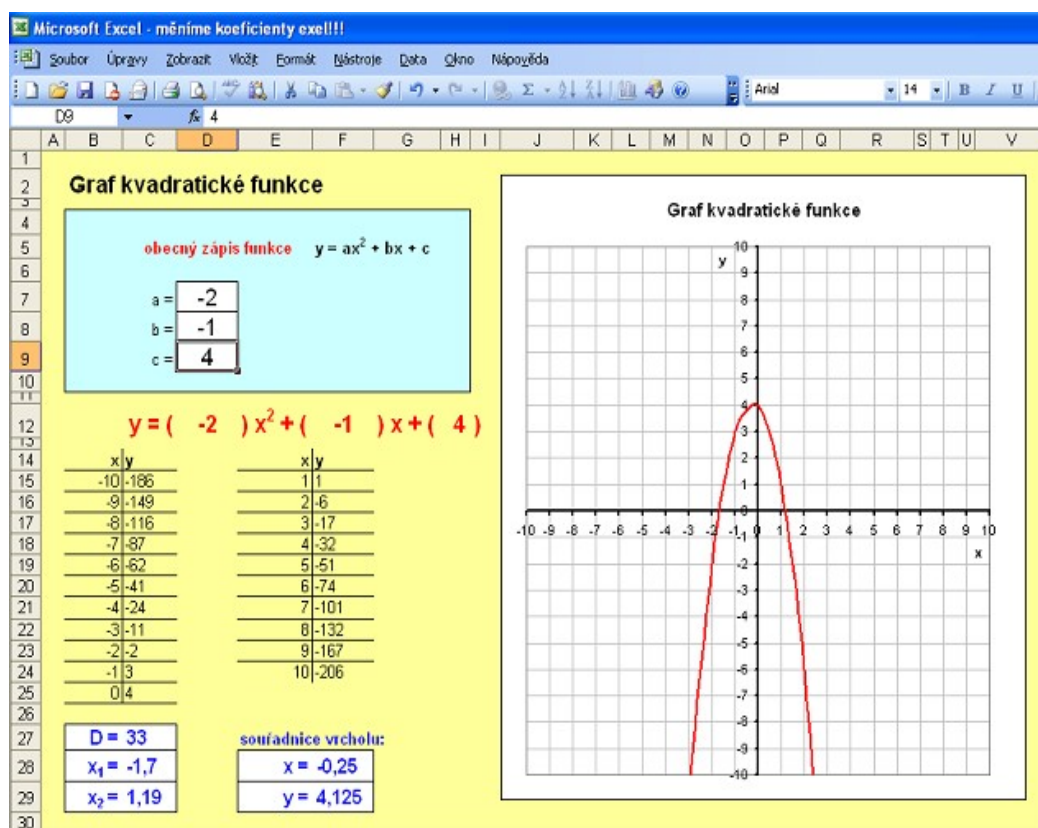
Tento vztah byl posléze ověřen v jaderné fyzice. Vztah vystihuje kvadratickou závislost, ale velikost rychlosti světla ve vakuu je považována za konstantní, tudíž se zde nejedná o druhou mocninu proměnné veličiny.

## 4 PC-aplikace

V této kapitole se seznámíme s různými softwary a aplikacemi, které mají nějakou souvislost s kvadratickou funkcí, kvadratickou rovnicí nebo nerovnicí. Tuto kapitolu jsem si vybrala, jelikož mám velice blízko k práci s počítači. Vzhledem k mému studijnímu oboru se stále častěji setkávám s různými počítačovými softwary. Ve fyzice velice často využíváme různé programy pro výpočty nebo vykreslení. Seznámíme se zde s těmi známějšími, které nám přiblíží kvadratickou funkci a její graf.

### 4.1 Microsoft Excel

Microsoft Excel je považován za jeden z nejznámějších programů, je součástí placeného balíčku Microsoft Office (nebo v dnešní době hodně používaným balíčkem OpenOffice, kde Excel je nahrazen Calcem). V Excelu můžeme zpracovat vlastní funkce v graf. Já jsem ale využila již předem naprogramovaný Excel. V tomto naprogramovaném Excelu můžeme měnit koeficienty  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Na obrázku 23 jsou zvoleny koeficienty:  $a = -2$ ,  $b = -1$ ,  $c = 4$ .

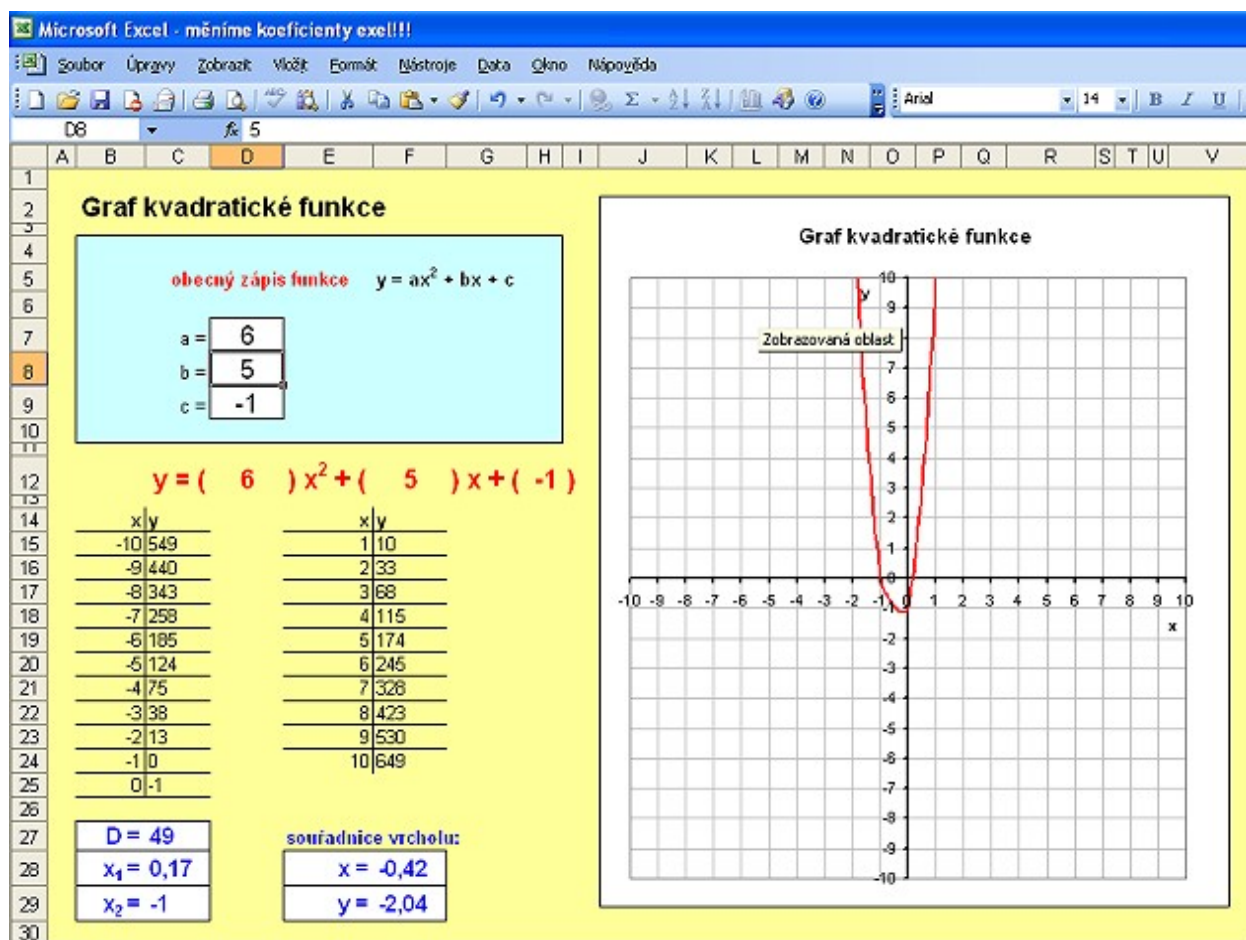


Obrázek 23: Excel, vlastní animace



Z Excelu se hned dovíme, jaké jsou kořeny zadané funkce, souřadnice vrcholu, hodnota diskriminantu a jak vypadá graf. Pouze při  $D < 0$  nám Microsoft Excel neudá hodnoty kořenů, přesto vykreslí graf. Velmi pěkně je připraven program, který je přehledný a který vygeneruje také „tabulku“, která udává hodnoty  $y$  v bodech  $x = \{-10, -9, -8, \dots, 8, 9, 10\}$ .

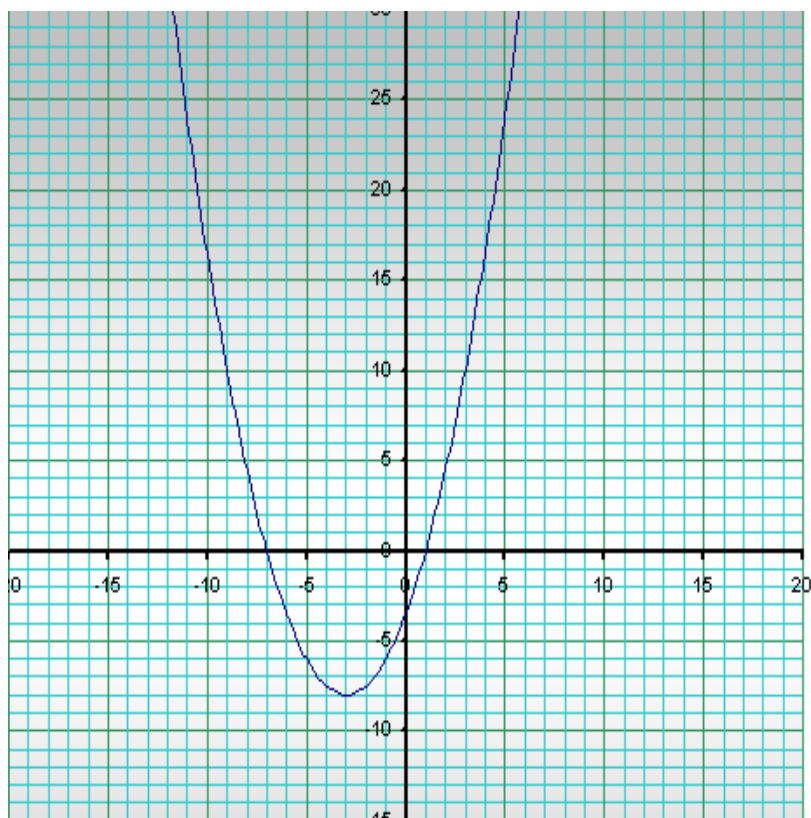
Jediné, co tomuto programu vytkneme, je, že při určité kombinaci koeficientů se graf paraboly lehce zkřiví (obr. 24) a vykreslení není pěkné. Zvolené koeficienty:  $a=6$ ,  $b=5$ ,  $c=-1$ .



Obrázek 24: Excel, vlastní animace

Druhé naprogramování v Microsoft Excel je vykreslování grafu kvadratické funkce, která je ve tvaru  $f: y = a \cdot (x+b)^2 + c$ . Zde můžeme měnit koeficienty  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , ale uvědomujme si, že se nejedná o standardní zadání kvadratické funkce. Změna koeficientů nám velice usnadní znázornění změny grafu kvadratické funkce vzhledem k osám (obr. 25). V Microsoft Excel vidíme, jak se posouvá graf při změně koeficientu  $b$ ,  $c$  a při změně  $a$  se mění tvar paraboly.





$y = a(x + b)^2 + c$

|     |      |
|-----|------|
| a = | 0,5  |
| b = | 3,0  |
| c = | -8,0 |

Obrázek 25: Excel, vlastní animace

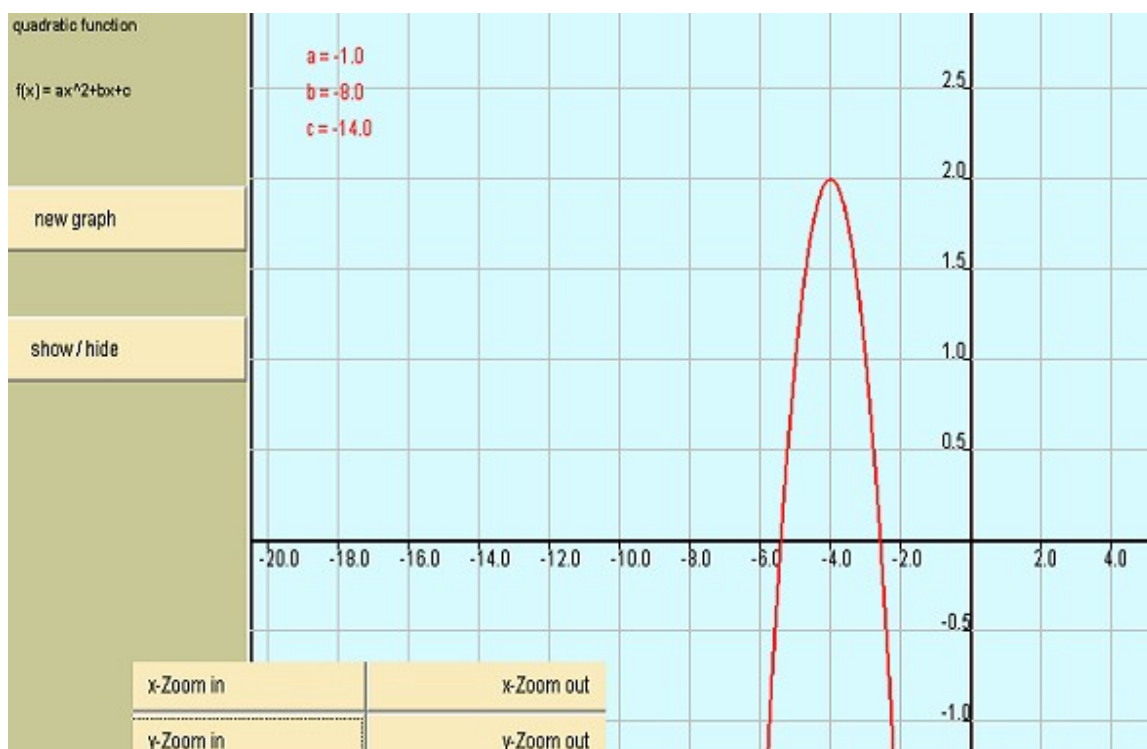
## 4.2 Webové aplikace

Webová aplikace je službou webového serveru přes počítačovou síť internet. Webové aplikace jsou oblíbené kvůli tomu, že si software nemusíme instalovat do počítače a jsou volně přístupné. Na internetu se dá vyhledat spousta aplikací, které nám umožní vykreslení grafu kvadratické funkce. U všech se prakticky vždy dají změnit všechny koeficienty a aplikace nám vykreslí graf kvadratické funkce. Vybrali jsme si dvě webové stránky. První aplikace je jedna z těch horších, které jsme prohlíželi. Druhá webová aplikace je podle nás dobře naprogramovaná.

Nejprve si ukážeme aplikaci z webové stránky:

<http://www.analyzemath.com/quadraticg/quadraticg.htm>

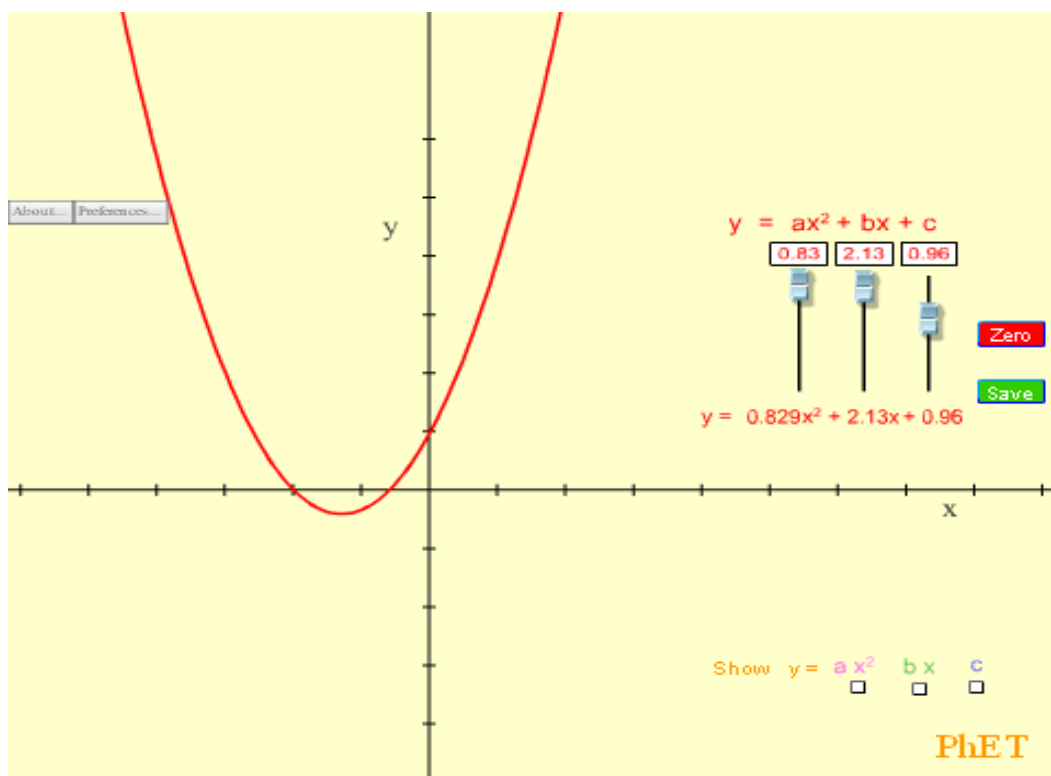
Jedná se o anglický web, který ale má spoustu nedostatků. Aplikace jen náhodně vykresluje grafy. V programu se nic nedá měnit. Jediné co můžeme měnit jsou měřítka jednotlivých os. Z aplikace se dostaneme pouze tlačítkem na „*click here to close window*“. Jeden náhodný graf kvadratické funkce, znázorněný touto webovou aplikací, je znázorněný na obrázku 26.



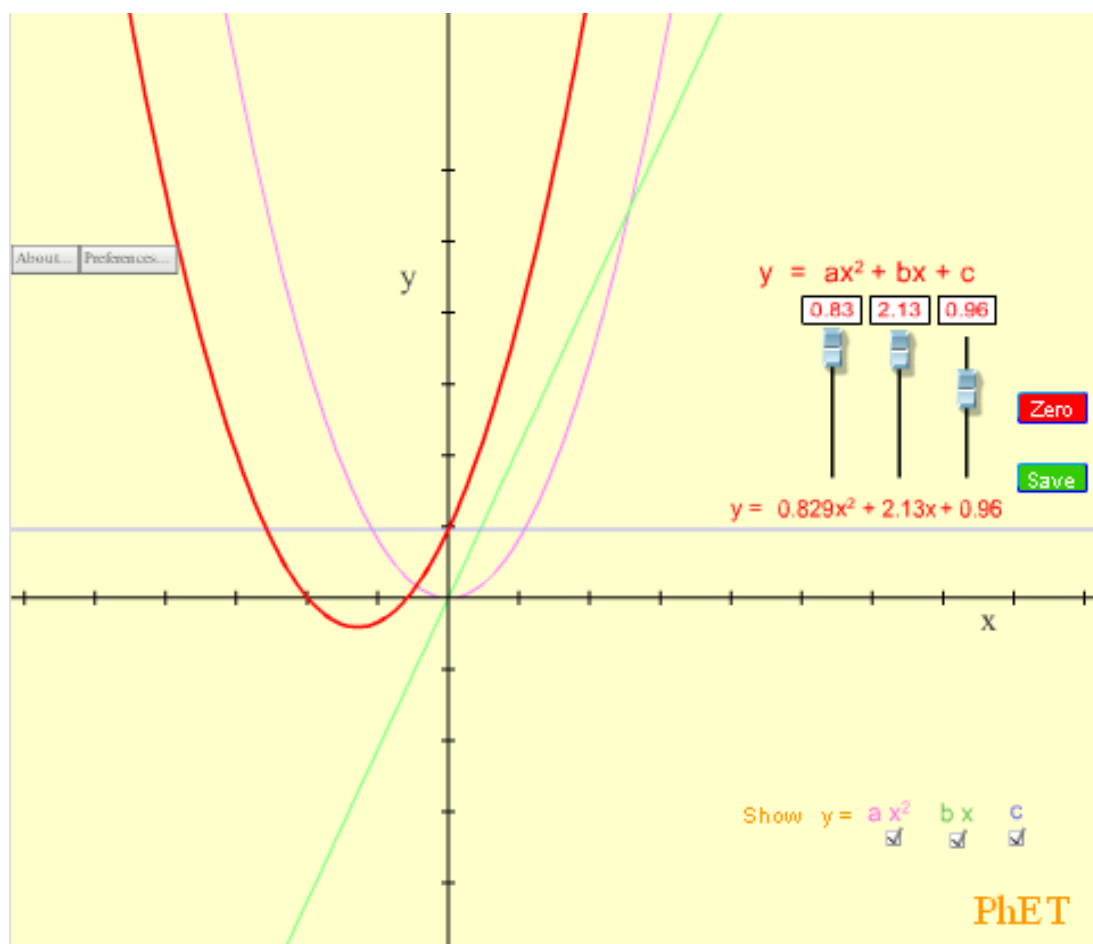
Obrázek 26: webová aplikace, vlastní animace

Druhou aplikaci, kterou si zde přiblížíme, najdeme na stránce:

<http://www.vichr.qsh.cz/default.aspx?pg=741ec374-2332-4226-83c0-49f3f5f83e83>



Obrázek 27: webová aplikace, vlastní animace



Obrázek 28: 4.2c

V této aplikaci se mohou měnit koeficienty v určitém rozsahu. Hodnota kvadratického koeficientu je mezi  $(-5,04; 5,05)$ , hodnota lineárního koeficientu je  $(-6,31; 6,31)$  a absolutní člen nabývá hodnot  $(-4; 4)$ . Na obrázku 27 je vidět graf funkce  $f(x): y = 0,829x^2 + 2,13x + 0,96$ . Zápis funkce se nám zobrazí. Hodnoty se dají uložit, v dalším kroku se graf uchová, ale uchování platí pouze pro jeden graf – pokud chceme uložit další, nebo pokračovat automaticky se vymaže. Důležité je, že si můžeme označit načrtnutí grafů jednotlivých členů kvadratické funkce, kdyby ostatní koeficienty byli nulové (viz obr. 28), jedná se o fialovou, zelenou a modrou křivku.

V kapitole jsme chtěli ukázat, co vše nám přináší propojení matematiky s moderní technikou. Ne vždy jsou všechny aplikace a programy, s kterými se setkáváme ku prospěchu. Chtěli jsme poukázat na různé funkce aplikací a programů, na které bychom se měli zaměřit při hledání toho nejvhodnějšího pro naši práci.

## Závěr

Práce měla za úkol shrnout téma týkající se kvadratické závislosti. Dozvídáme se, kdy se matematici setkali s kvadratickou závislostí a rovnicí poprvé a jaký byl její další vývoj. Zabývala jsem se historií v zemích, které byly matematicky vyspělé. Zjistila jsem, že výpočty vedoucí k řešení kvadratické rovnice byly velice podobné těm dnešním. Zaujalo mě, že matematici nepřipouštěli záporný kvadratický kořen.

Práce popisuje teorii kvadratické funkce, kvadratické rovnice a nerovnice. V této práci jsou uvedena řešení kvadratické rovnice a popsáno sestavení grafu kvadratické funkce a jeho využití při řešení kvadratických nerovnic.

Poukázala jsem na reálné využití matematiky ve fyzice. Právě kvadratická rovnice je ve fyzice velice často používána jako přirozená souvislost popisu dějů. Pokud chceme řešit kvadratické funkce a kvadratické rovnice, tak můžeme používat fyzikální vzorce s kvadratickou závislostí. Ukazuji zde základní fyzikální vzorce, které popisují fyzikální jevy. Chtěla jsem zdůraznit, že kvadratická závislost je důležitá při popisu pohybu těles. Tyto závislosti jsou pro lepší pochopení uvedeny na příkladech z běžného života.

Ve fyzice i v matematice se dále velice často využívají i počítače, pro sestavení různých grafů funkcí. Proto jsem na závěr práce popsala některé PC-aplikace a webové aplikace, které jsou něčím přínosné a kterým bychom se měli raději vyhýbat.

## Literatura a použité zdroje

- [1] Bečvář, Jindřich. *Úvod do algebry*. 1. vydání. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1984.
- [2] Bečvář, Jindřich. - Bečvářová, Martina. - Vymezalová, Hana. *Matematika ve starověku – Egypt a Mezopotámie*. Praha: Prometheus, spol s r. o., 2003. ISBN 80-7196-255-4.
- [3] Calda, Emil. *Matematika pro gymnázia – Komplexní čísla*. 3. vydání. Praha: Prometheus, spol. s r. o., 2007. ISBN 978-80-7196-187-1.
- [4] Folta, Jaroslav. - Nový, Luboš. *Dějiny přírodních věd v datech*. 1. vydání. Praha: Mladá fronta, 1979. ISBN 23-078-79.
- [5] Janurová, Eva. - Janura, Miroslav. *Matematika na dlani*. 1. vydání. Olomouc: Rubico, 2002. ISBN 80-85839-73-3.
- [6] Kubát, Josef. - Hrubý, Dag. - Pilgr, Josef. *Sbírka úloh z matematiky pro střední školy - Maturitní minimum*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1996. ISBN 80-7196-030-6.
- [7] Liebl, Pert. *Rovnice a nerovnice – Pro I. Ročník tříd gymnázií se zaměřením na matematiku*. 3. vydání. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1989. ISBN 80-04-24145-X.
- [8] Odvárko, Oldřich. *Matematika pro gymnázia – Funkce*. 3. upravené vydání. Praha: Prometheus, spol. s r. o., 2000. ISBN 80-7196-164-7.
- [9] Odvárko, Oldřich. *Sbírka úloh z matematiky pro gymnázia – Funkce*. Dotisk 2. vydání. Praha: Prometheus, spol s r.o., 2008. ISBN 978-80-7196-305-9.
- [10] Svoboda, Emanuel. Et al. *Přehled středoškolské fyziky*. Dotisk 4., upraveného vydání. Praha: Prometheus, spol. s r.o., 2008. ISBN 978-80-7196-307-3.
- [11] FILIPES15. *Kvadratická funkce* [online]. [cit. 2011-12-14]. Články. Dostupné z WWW: <<http://www.filipes15.estranky.cz/slanky/kvadraticka-funkce.html>>.
- [12] CHARVÁT, Jura; HOUF, Jaroslav; BOČEK, Leo. *Seminární práce z matematiky: Rovnice a nerovnice* [online]. 2009 [cit. 2011-06-23]. Historické poznatky. Dostupné z WWW: <<http://absolventi.gymcheb.cz/2010/ivmask/historiep.html>>.

- [13] KOKEŠ, Jaroslav. *Instalace matematických trenažerů* [online]. 2001 [cit. 2011-04-16]. Programovací prostředí. Dostupné z WWW: <<http://kokeja.unas.cz/insttren.htm>>.
- [14] VLACHOVÁ, Magda. *Techmania: Edutorium* [online]. 2008 [cit. 2011-06-23]. Diofantos z Alexandrie. Dostupné z WWW: <[http://www.techmania.cz/edutorium/art\\_vedci.php?key=161](http://www.techmania.cz/edutorium/art_vedci.php?key=161)>.
- [15] *Matematické funkce: Funkce* [online]. 2008 [cit. 2011-06-23]. Julka. Dostupné z WWW: <<http://matematickefunkce.ic.cz/index.htm>>.
- [16] *Quadratic Functions* [online]. 2007-11-27 [cit. 2011-04-16]. General Form. Dostupné z WWW: <<http://www.analyzemath.com/quadraticg/quadraticg.htm>>.
- [17] *Vítám Vás na stránkách FYZIKY* [online]. 2008 [cit. 2011-04-16]. Aplety. Dostupné z: <<http://www.vichr.qsh.cz/default.aspx?pg=741ec374-2332-4226-83c0-49f3f5f83e83>>.
- [18] *Výzkumný ústav pedagogický* [online]. 1996 [cit. 2011-04-16]. Vzdělávací program Základní škola. Dostupné z WWW: <<http://old.vuppraha.cz/clanek/85>>. ISBN 80–7168–595-X.
- [19] *Wikipedie* [online]. 2009, 21.6.2011 [cit. 2011-06-23]. René Descartes. Dostupné z WWW: <[http://cs.wikipedia.org/wiki/Ren%C3%A9\\_Descartes](http://cs.wikipedia.org/wiki/Ren%C3%A9_Descartes)>.

## Seznam příloh

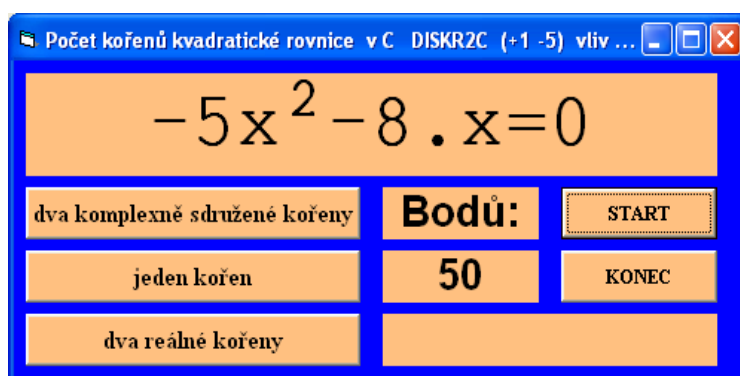
Školské vzdělávací softwary

### Školské vzdělávací softwary

Prakticky každá škola má zakoupený nějaký výukový program. Nejedná se vždy o matematické softwary. S jedním takovým softwarem se seznámíme nyní. Vybrali jsme tento, jelikož je z mého bydliště. Jedná se o výukové CD, které se používá na Gymnáziu v Rumburku. Zdejší učitel Mgr. Jaroslav Kokeš sám pro žáky vytvořil výukové programy, které se zaměřují na procvičení probírané látky. Programy, které obsahuje CD se nainstalovalo na školní počítače a zde si žáci školy mohly procvičovat své nabyté vědomosti.

Z CD, které obsahuje programy na procvičení celého učiva matematiky na čtyřletém gymnáziu, se podíváme pouze programy, které obsahují cvičení týkající se kvadratických rovnic, nerovnic a funkcí. Program po jeho absolvování zhodnotí rychlost, správnost a vyhodnotí procvičení známkou. Program chce předem několikrát vyzkoušet, aby požadovaná známka byla nízká.

Uvedeme si zde několik obrázků, které se dotýkají našeho tématu.

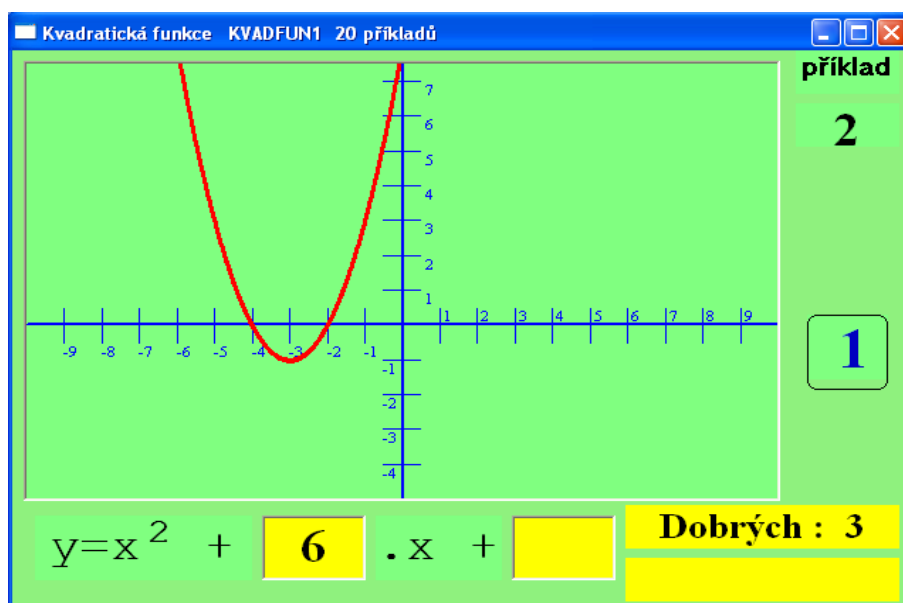


Obrázek 29: určení počtu kořenů, vlastní animace



Obrázek 30: určení koeficientů podle zadání, vlastní animace





Obrázek 31: určení koeficientů z grafu, vlastní animace

Kvadratické rovnice v R (20 př.) - rovkv2

Nemá řešení : "N" nebo "n" nebo "."

$x^2 - 4x + 0 = 0$

D = 16

$\sqrt{D} = 4$

$K = \{ 4 ; 0 \}$

Dobrých : 1

příklad

1

1

Obrázek 32: určení diskriminantu a kořenů, vlastní animace