D I P L O M O V Á   P R Á C E

VYSOKÁ ŠKOLA STROJNÍ A TEXTILNÍ V LIBERCI

nositelka Řádu práce

Fakulta strojní

obor 23-40-8

Automatizované systémy řízení výrobních procesů ve strojírenství

Katedra technické kybernetiky

IDENTIFIKACE PERIODICKÉHO REGRESNÍHO MODELU

Autor práce : Radimír Dědeček

Vedoucí práce : Ing. Vladimír Kracík, CSc.

KTK - ASŘ - SF - 139

ROZSAH PRÁCE A PŘÍLOH:

Počet stran........47

Počet příloh........1

Počet obrázků.......8

Počet tabulek.......1

Vysoká škola: [redacted] Fakulta: [redacted]

Katedra: [redacted] Školní rok: [redacted]

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

pro s. Radimíra D ě d e č k a

obor 23-40-8 ASŘ výrobních procesů ve strojírenství

Vedoucí katedry Vám ve smyslu nařízení vlády ČSSR č. 90/1980 Sb., o státních závěrečných zkouškách a státních rigorózních zkouškách, určuje tuto diplomovou práci:

Název tématu: Identifikace periodického regresního modelu

Zásady pro vypracování:

1. Seznámit se s teorií lineárních periodických systémů a metodou maximální věrohodnosti.
2. Vypracovat algoritmus pro odhad koeficientů periodického regresního (AR) modelu.
3. Algoritmus pro test hypotézy periodičnosti modelu.
4. Vypracovat programy a odzkoušet na modelových příkladech.
5. Odzkoušet na datech z cementárenské pece (výpal slinku).

SEVT - 49 395 0 I/82 KTK/ASR-S JČT 1-4672-82

Rozsah grafických prací:

Rozsah průvodní zprávy: 40 - 50 stran

Seznam odborné literatury:

1. Hanuš,B. a kol.: Teorie automatického řízení. Skripta VŠST, 1982.
2. Kadeřábek,J., Kracík,V.: Úvod do teorie pravděpodobnosti. Skripta VŠST, 1970.
3. Kracík,V.: Period. Coef. Lin. Systems with Random Station. Input Kybernetika, Vol 9 (1973), No 4.
4. Balajová,O.: Náh. procesy v diskr. syst. s period. koef. Dipl. práce VŠST, 1986.

Vedoucí diplomové práce: Ing. Vladimír Kracík, CSc.

Datum zadání diplomové práce: 3. 10. 1986

Termín odevzdání diplomové práce: 11. 5. 1987

Věchet

Doc.Ing. Vladimír Věchet, CSc.

Vedoucí katedry

v.z.

Doc.Ing. Ján Alaxin, CSc.

Děkan

V Liberci dne 30. 9. 1986

MÍSTOPŘÍSEŽNÉ PROHLÁŠENÍ

Místopřísežně prohlašuji,že jsem diplomovou práci vypracoval samostatně s použitím uvedené literatury.

Radimír Dědeček

Radimír Dědeček

V Liberci dne 6.5.1987

OBSAH

ÚVOD

Diplomová práce se zabývá identifikací lineárních systémů s periodickými koeficienty a testem hypotézy periodičnosti těchto systémů.

Periodické systémy v praxi reálně existují.Jsou to například teplárny,které pracují s periodou roční,týdenní i denní. Chceme-li v technické praxi s nějakým systémem pracovat, například navrhnout k němu regulátor,musíme provést identifikaci,pomocí níž vytvoříme matematický model systému.V této diplomové práci se jedná o experimentální identifikaci,kdy je matematický model skutečného procesu určen na základě souboru vstupních a jim odpovídajícím výstupních údajů o procesu.

Protože každý reálný systém je zatížen šumem a různými poruchami nelze na první pohled určit je-li periodický nebo ne.O periodičnosti systému lze rozhodnout na základě testu hypotézy periodičnosti.

Diplomová práce tedy vznikla z potřeb praxe,neboť teorie lineárních systémů s periodickými koeficienty není v současné době tak hluboce rozpracována jako teorie obyčejných lineárních systémů.

Všeobecná část diplomové práce vysvětluje některé statistické pojmy a odvozuje základní vztahy použité v hlavní části diplomové práce.

V Š E O B E C N Á Č Á S T

SEZNAM POUŽITÝCH ZNAČEK A OZNAČENÍ

ZNAČKA	VÝZNAM
$\mathbb{X}, \underline{G}$	matice
$y, \underline{x}$	vektor
$\mathbb{X}^T, y^T$	transponovaná matice,transponovaný vektor
$\underline{G}^{-1}$	inverzní matice
$\det \mathbb{A}, \lvert\mathbb{A}\rvert$	determinant matice $\mathbb{A}$
α^*	číslo komplexně sdružené
$\hat{\Theta}$	hodnota v níž nastává extrém
y_n	posloupnost

1.STATISTIKA

Statistika zkoumá kvantitativní stránku hromadných jevů a vyjadřuje ji číselně.Nejstručnější a nejvýstižnější informaci o statistickém souboru,který je dán posloupností čísel $x_1,x_2,\dots,x_N$,kde N je rozsah souboru,nám dávají statistické charakteristiky.Uvedeme ty nejdůležitejší.Podrobněji viz. [2].

ARITMETICKÝ PRŮMĚR

Aritmetický průměr je charakteristikou polohy.

$$\bar{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \qquad (1)$$

ROZPTYL

Rozptyl je charakteristikou pro rozptyl hodnot proměnných od aritmetického průměru.

$$S^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(X_i - \bar{X})^2$$

SMĚRODATNÁ ODCHYLKA

Směrodatná odchylka je kladně vzatá odmocnina z rozptylu.

$$S = \sqrt{S^2}$$

VARIAČNÍ KOEFICIENT

Variační koeficient je míra pro srovnání rozptylů různých veličin.

$$v = \frac{S}{\bar{X}}$$

2. ZÁKLADY TEORIE PRAVDĚPODOBNOSTI

2.1. NÁHODNÁ VELIČINA

Náhodné veličiny (popř. náhodné proměnné) popisují výsledky fyzikálních experimentů. V podstatě zvláštní význam mezi všemi náhodnými veličinami mají dva jejich typy:

- spojité náhodné veličiny
- diskrétní náhodné veličiny, ty nabývají hodnot pouze v izolovaných bodech.

V dalším budeme náhodné veličiny označovat velkými písmeny, např. X, Y atd. a hodnoty jichž mohou náhodné veličiny nabýti budeme označovat malými písmeny, např. x, y atd.

2.2. PRAVDĚPODOBNOSTNÍ A DISTRIBUČNÍ FUNKCE

Funkční závislost

$$P(X = x) = f(x)$$

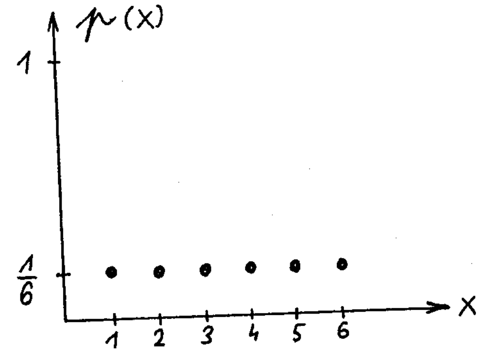
nazýváme pravděpodobnostní funkcí (obr.1) a udává pravděpodobnost, že veličina X nabyde hodnoty x. Funkční závislost

$$P(X \leq x) = F(x) \quad , \quad x \in (-\infty, \infty)$$

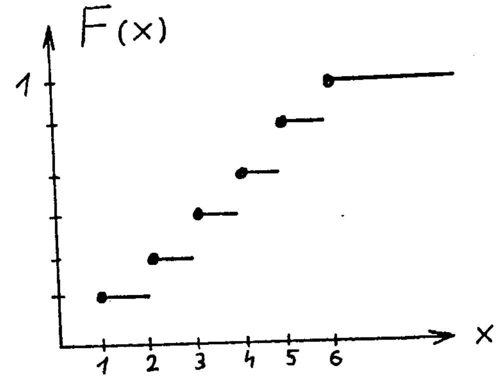
nazýváme distribuční funkcí (obr.2) a udává pravděpodobnost, že veličina X bude menší nejvýše rovna hodnotě x. Pro spojitou náhodnou veličinu X funkční závislost

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

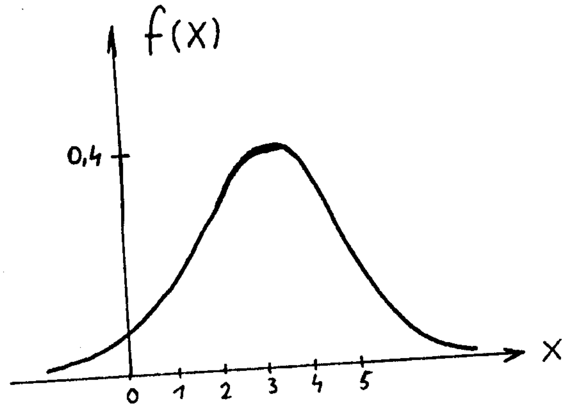
nazýváme obvykle hustotou pravděpodobnosti (obr.3), kde $F(x)$ je distribuční funkce náhodné veličiny X (obr.4).



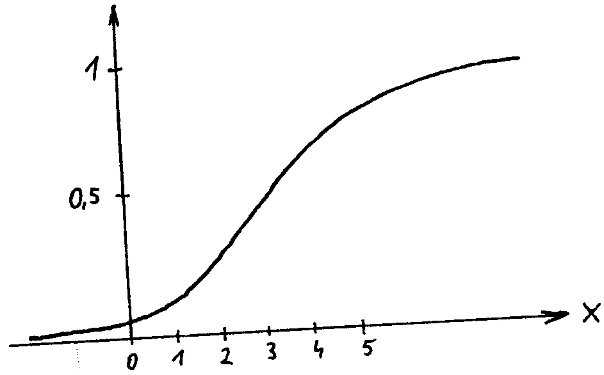
obr.1



obr.2



obr.3



obr.4

Pravděpodobnostní funkce nebo hustota pravděpodobnosti
udává tzv.rozložení (popř.rozdělení) náhodné veličiny.

2.3.CHARAKTERISTIKY NÁHODNÉ VELIČINY

Každý zákon rozložení náhodné veličiny popisuje všechny
vlastnosti náhodné veličiny vyčerpávajícím způsobem.Často
však v technické praxi stačí charakterizovat pouze některé
vlastnosti rozložení.K tomuto cíli využíváme tzv.charakte-
ristiky náhodné veličiny (obr.5).

STŘEDNÍ HODNOTA NÁHODNÉ VELIČINY

$$E_x = \sum_{i=1}^{N} x_i p_i$$

kde p_i je "očekávaná" relativní četnost výskytu x_i.Střední
hodnota,někdy též nazývaná matematickou nadějí,nám udává
hodnotu,kolem které se rozkládají realizace náhodné veliči-
ny.

ROZPTYL

Rozptyl náhodné veličiny X označíme $\sigma^2(x)$, někdy prostě σ^2, je střední hodnota čtverce odchylky od střední hodnoty.

$$\sigma^2(x) = E(x - Ex)^2$$

SMĚRODATNÁ ODCHYLKA

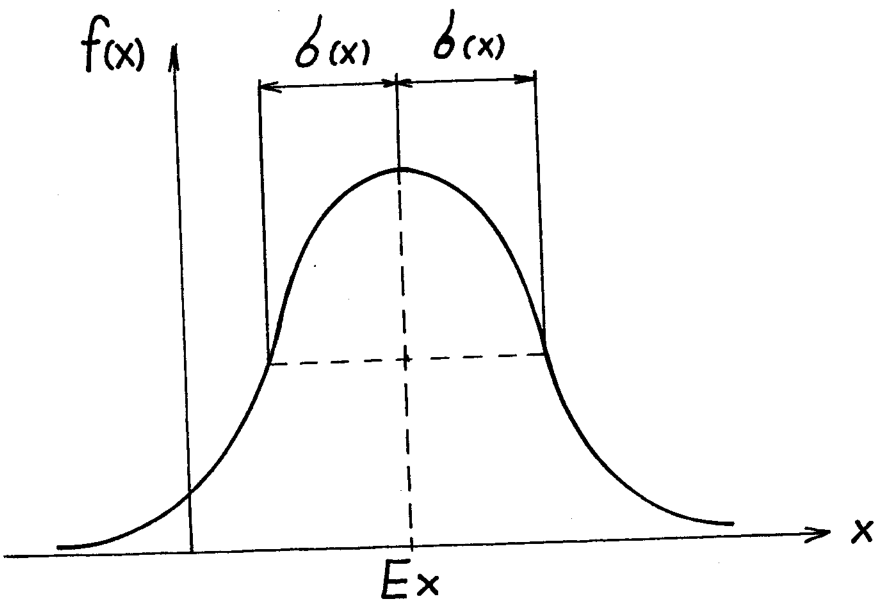
Směrodatnou odchylku veličiny X označíme $\sigma(x)$, někdy prostě σ.

$$\sigma(x) = \sqrt{\sigma^2(x)}$$

VARIAČNÍ KOEFICIENT

Variační koeficient představuje poměrnou směrodatnou odchylku měřenou v jednotce, která je rovna střední hodnotě.

$$v(x) = \frac{\sigma(x)}{Ex}$$



obr.5

2.4. NORMÁLNÍ (GAUSSOVO) ROZDĚLENÍ

Mezi spojitými náhodnými veličinami je nejdůležitější veličina s normálním rozdělením. Normální rozdělení náhodné veličiny (obecně vícerozměrné) je dáno funkcí hustoty pravděpodobnosti

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad (2^*)$$

pro $x \in (-\infty, \infty)$, $\sigma > 0$, μ = konst.

kde μ, σ jsou parametry rozdělení a značí:

$\mu = Ex$ střední hodnotu náhodné veličiny X

$\sigma = \sigma(x)$ směrodatnou odchylku náhodné veličiny X

$\sigma^2 = \sigma^2(x)$ rozptyl náhodné veličiny X.

Distribuční funkce náhodné veličiny s normálním rozdělením je

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dy \quad ,$$

kde y označuje integrační proměnnou.

Normální rozdělení krátce označujeme $N(\mu, \sigma^2)$. Pro tzv. normované normální rozdělení platí, že $Ex = 0$ a $\sigma^2(x) = 1$ tedy $N(0,1)$.

Mnohorozměrné normální rozdělení je popsáno hustotou pravděpodobnosti

$$f(\underline{x}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n \sqrt{|\$|}}\, e^{-\frac{1}{2}(\underline{x} - E\underline{x})^T \$^{-1} (\underline{x} - E\underline{x})} \quad ,$$

kde $\underline{x}$ je náhodný vektor o rozměru n s n-rozměrným normálním rozdělením $N(E\underline{x}, \$)$,

$E\underline{x} = (Ex_1, \cdots, Ex_n)^T$ je vektor středních hodnot složek vektoru $\underline{x}$,

$\$ = E(\underline{x}-E\underline{x})(\underline{x}-E\underline{x})^T$ je tzv.kovarianční matice vektoru $\underline{x}$, jejíž prvky jsou $s_{ij} = E(x_i-Ex_i)(x_j-Ex_j)$ .Srovnáním s (2^*) vidíme,že $E\underline{x}$ a $\$$ jsou obdobou charakteristik Ex a σ^2 pro jednorozměrný případ.Speciálně jsou-li složky vektoru $\underline{x}$ nezávislé se stejným rozptylem σ^2 jsou prvky matice $\$$ pro $i = j$ $s_{ij}=\sigma^2$ a pro $i \neq j$ $s_{ij}= 0$,tedy

$$\$ = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma^2 \end{bmatrix} , \quad |\$| = \sigma^{2\cdot n}$$

potom je

$$f(\underline{x}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n \sigma^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\underline{x}-E\underline{x})^T(\underline{x}-E\underline{x})} \quad . \qquad (2)$$

3. MATEMATICKÁ STATISTIKA

Matematická statistika se zabývá systémy množin elementárních jevů, řeší problémy ve spojitosti se systémy rozdělení. Vlastním úkolem matematické statistiky je získat pro danou náhodnou veličinu co nejvíce informací o jejím rozdělení.

3.1. TEORIE ODHADU

Často známe tvar zákona rozdělení předem, neznámým zůstává jenom nějaký parametr rozdělení, např. u normálního μ, σ^2 atd. Tento neznámý parametr obecně Θ určíme nějakým vhodným odhadem na základě výběru náhodné veličiny $x_1, x_2, \dots, x_N$. Odhadem nějakého parametru (charakteristiky) Θ bude nějaká funkce výběrového vektoru $\underline{x}$ z rozdělení $f(\underline{x}, \Theta)$ explicitně nezávislá na Θ, tedy $T_n(x_1, \dots, x_n)$. T_n se nazývá také statistika (v užším smyslu). Statistika T_n je ale tedy také náhodnou veličinou. Kvalita odhadu T_n je charakterizována těmito vlastnostmi:

KONZISTENCE-Pravděpodobnost odchylky T_n od Θ pro velká n je malá, tedy T_n stochasticky konverguje pro velká n k Θ.

NEVYCHÝLENOST-Pro nevychýlený odhad, někdy též nestranný odhad, platí že

$$E(T_n) = \Theta .$$

Teoreticky jsou důležité tzv. odhady maximálně věrohodné. Představuje-li $f(\underline{x}, \Theta)$ hustotu rozdělení pravděpodobnosti výběrového vektoru $\underline{x}$ pro spojitou náhodnou veličinu X nebo přímo pravděpodobnost pro diskrétní náhodnou veličinu X, kde Θ je nějaký parametr rozdělení, potom dosadíme-li do $f(\underline{x}, \Theta)$ napozorované výběrové hodnoty, je tento výraz funkcí Θ. Máme-li odhadnout parametr Θ, jeví se přirozeným volit tento odhad $\hat{\Theta}$ tak aby $f(\underline{x}, \Theta)$ byla pro $\hat{\Theta}$ maximální, tj.

$$\max_{\Theta} f(\underline{x},\Theta) = f(\underline{x},\hat{\Theta}) \quad . \qquad (3)$$

Takto získaný odhad nazýváme maximálně věrohodný. Jelikož složky výběrového vektoru $\underline{X}$ jsou nezávislé a mají stejné rozdělení $f(x,\Theta)$, je věrohodnostní funkce

$$f(\underline{x},\Theta) = f(x_1,\Theta)\cdot f(x_2,\Theta)\cdots f(x_n,\Theta)$$

a tedy maximálně věrohodný odhad parametru Θ získáme řešením rovnice

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \ln f(x_i,\Theta)}{\partial \Theta} = 0 \quad . \qquad (4)$$

V tabulce 1 jsou odhady $T=\Theta$ pro výběr z přibližně normálního rozdělení, kde Θ je řešením rovnice (4).

tab. 1

PARAMETR Θ	ODHAD T
μ	$\overline{X}$
σ^2	S^2
σ	S

Určíme například parametr μ náhodné veličiny X s normálním rozdělením. Do (4) za $f(x_i,\mu)$ dosadíme (2) a dostáváme

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \ln f(x_i,\mu)}{\partial \mu} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial\left(-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2} - \ln \sigma\sqrt{2\pi}\right)}{\partial \mu} =$$

$$= -\sum_{i=1}^{N} \frac{x_i-\mu}{2\sigma^2} = \frac{1}{2\sigma^2}\left(N\mu - \sum_{i=1}^{N} x_i\right) = 0$$

a odtud
$$\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i = \overline{X} \quad ,$$

což souhlasí s (1).

3.2. TESTOVÁNÍ STATISTICKÝCH HYPOTÉZ

Parametrickým testem statistické hypotézy nazýváme proceduru, pomocí níž na základě výběrových hodnot přijmeme nebo zamítneme hypotézu o hodnotě parametru (obecně vícerozměrného) rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny (obecně vícerozměrné).

Kvalita takové rozhodovací procedury je dána tím, jak reaguje na situaci, je-li hypotéza splněna a naopak není-li hypotéza splněna, neboli je-li splněna nějaká alternativní hypotéza. Zpravidla základní hypotéza představuje nějakou žádoucí situaci a alternativní hypotéza nežádoucí situaci.

Jsou-li obě hypotézy jednobodové, mluvíme o jednoduché hypotéze. Při syntéze testovací procedury vycházíme zpravidla z principu podílu věrohodnosti (podle [7]). Ukážeme to na příkladu jednoduché hypotézy.

Je-li neznámý parametr θ a hypotéza zní $\theta = \theta_0$ a alternativní hypotéza je $\theta = \theta_1$ a máme-li k dispozici výběr $x_1, \dots, x_N$ náhodné veličiny X, která má známou hustotu rozdělení pravděpodobnosti $f(x, \theta)$, potom věrohodnostní funkce parametru je

$$\mathcal{L}(\theta) = f(x_1, \theta) \cdot f(x_2, \theta) \cdots f(x_N, \theta)$$

označíme

$$\lambda_x = \frac{\mathcal{L}(\theta_0)}{\mathcal{L}(\theta_1)}$$

Intuitivně se přikloníme k hypotéze $\theta = \theta_0$ bude-li λ_x velké pro dané výběrové hodnoty $x_1, \dots, x_N$, tj. věrohodnost parametru θ_0 je větší než věrohodnost parametru θ_1 a naopak.

U složených hypotéz, kde zpravidla hypotéza zní $\theta \in \omega$ a alternativní hypotéza $\theta \in \Omega - \omega$. Kde Ω je množina všech možných θ a ω je nějaká podmnožina Ω.

Položíme

$$\lambda_{\varkappa} = \frac{\max\limits_{\theta \in \omega} p(\theta)}{\max\limits_{\theta \in \Omega} p(\theta)} \qquad (5)$$

zřejmě $0 \leq \lambda_{\varkappa} \leq 1$. Opět je-li $\lambda_{\varkappa}$ blízké 1, kloníme se k hypotéze $\theta \in \omega$, maximálně věrohodný odhad parametru θ potom leží v ω nebo v blízkosti ω, naopak je-li $\lambda_{\varkappa}$ malé znamená to, že maximálně věrohodný odhad leží daleko od ω.

Veličina $\lambda_{\varkappa}$ závisí ovšem na výběru $x_1, \dots, x_N$ a explicitně nezávisí na θ. V praktických případech zpravidla lze stanovit rozdělení pravděpodobnosti statistiky $\lambda_{\varkappa}$ při platnosti hypotézy ω a to umožňuje pravděpodobnostní analýzu chyb, které při testování zákonitě mohou nastat, tj. případ kdy zamítneme správnou hypotézu a případ kdy přijmeme nesprávnou hypotézu.

4. STATISTICKÁ DYNAMIKA

Statistickou dynamikou rozumíme nauku o náhodných funkcích a jejich aplikacích. Náhodná funkce je funkcí času vázaná na elementární jev α nějakého experimentu. Probíhá-li čas v diskrétních krocích mluvíme o náhodných posloupnostech. Dále se budeme zabývat pouze náhodnými posloupnostmi.

4.1. CHARAKTERISTIKY NÁHODNÝCH POSLOUPNOSTÍ

Nechť $x_n(\alpha) = x_n$, $n = \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ je nějaká posloupnost náhodná a komplexní. U náhodných posloupností užíváme zpravidla těchto charakteristik.

STŘEDNÍ HODNOTA

$$\bar{x}_n = E x_n$$

Střední hodnota je tedy pro náhodnou posloupnost definována podobně jako pro náhodnou veličinu. Ovšem střední hodnota náhodné posloupnosti je funkcí času. Pouze v případě stacionárních procesů je střední hodnota konstantní, tedy nezávislá na čase

$$\bar{x}_n = E x_n = \bar{x} \,.$$

KORELAČNÍ POSLOUPNOST

$$K_x(n_1, n_2) = \overline{x_{n_1} \cdot x^*_{n_2}} \qquad (6)$$

Kde symbol * značí komplexně sdružené číslo a pruh nad součinem střední hodnotu. Korelační funkce udává závislost veličin n_1 a n_2. U stacionárních procesů je $K_x(n_1, n_2)$ nezávislá na posunu n, tj.

$$K_x(n_1, n_2) = K_x(n_1 + n, n_2 + n) \quad \text{pro libovolné } n$$

a tedy pro $n = -n_1$ je

$$K_x(n_1, n_2) = K_x(n_1 - n_2, 0) = K_x(m) \,,$$

kde jsme označili $n_1 - n_2 = m$;

Obvyklým tvarem korelační posloupnosti stacionárních procesů je

$$K_x(m) = \sigma^2 e^{-\alpha |m|} \cos \beta m$$

pro $\bar{x} = 0$.

VÝKONOVÁ SPEKTRÁLNÍ HUSTOTA

Výkonová spektrální hustota je charakteristikou pro výkon, který se realizuje ve frekvenčním intervalu, tedy části spektra nějakého fyzikálního procesu a pro náhodné posloupnosti je zavedena takto:

$$\hat{S}(\omega) = \sum_{-\infty}^{\infty} K_x(m) e^{-i\omega m}$$

Položíme-li $e^{i\omega} = z$ dostaneme

$$\hat{S}(\omega) = \mathring{S}(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} K_x(m)\, z^{-m} .$$

Mocninnou řadu $\mathring{S}(z)$ nazýváme Z-transformace posloupnosti $K_x(m)$. Volme konečně označení $z^{-1} = s$, potom dostaneme konečný vztah

$$S(s) = \sum_{-\infty}^{\infty} K_x(m)\, s^{m} . \qquad (7)$$

Je-li x_n reálná posloupnost, je $K_x(m)$ reálná a sudá. Potom můžeme psát

$$S(s) = K_x(0) + \sum_{1}^{\infty} K_x(m)\, s^{m} + \sum_{1}^{\infty} K_x(m) \left(\frac{1}{s}\right)^{m}$$

a odtud vidíme, že

$$S(s) = S\left(\frac{1}{s}\right) .$$

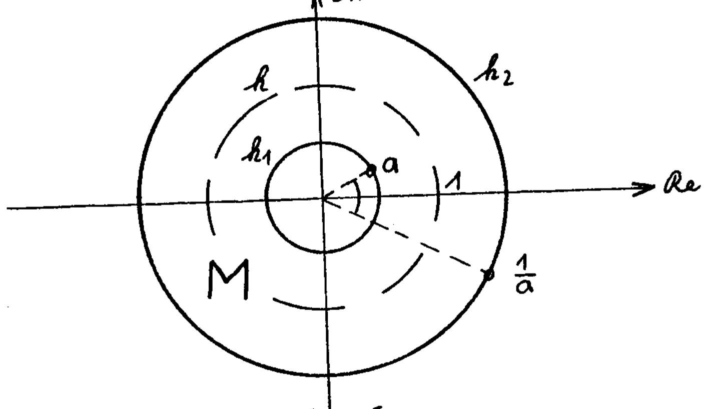
Výkonová spektrální hustota je funkcí argumentu s. Pro reálný proces se kořeny jmenovatele (póly) a čitatele (nuly) vyskytují ve dvojicích $\alpha, \frac{1}{\alpha}$. Uvažujme, že řada

$$\sum_{-\infty}^{\infty} K_x(m)$$

je konvergentní, to znamená, že $S(s)$ na jednotkové kružnici nemá póly a řada

$$\sum_{-\infty}^{\infty} K_x(m)\, s^{m}$$

konverguje na mezikruží M mezi kružnicemi k_1 a k_2 (obr. 6), kde a je pól funkce $S(s)$ nejbližší jednotkové kružnici.



obr. 6

Každý člen řady

$$S(s) = \cdots + K_x(-1)s^{-1} + K_x(0) + K_x(1)s + \cdots$$

můžeme integrovat na mezikruží M. Řadu vydělíme s^{m+1} a protože $K_x(m)$ je funkce sudá můžeme psát

$$\frac{S(s)}{s^{m+1}} = \cdots + \frac{K_x(1)}{s^{m+2}} + \frac{K_x(0)}{s^{m+1}} + \frac{K_x(1)}{s^{m+2}} + \cdots$$

Řadu zintegrujeme a dostáváme

$$\int_K \frac{S(s)}{s^{m+1}}\,ds = K_x(m)\int_K \frac{ds}{s} = 2\pi i\, K_x(m)$$

(Všechny integrály pro $m \neq 1$ $\qquad (s = e^{-iw}\,,\ ds = -i\,e^{-iw}\,dw)$

$$\int_K \frac{ds}{s^m} = -i\int_{2\pi}^{0} \frac{e^{-iw}}{e^{-iwm}}\,dw = 0$$

a jedině integrál pro

$$m = 1 \qquad \int_K \frac{ds}{s} = -i\int_{2\pi}^{0} \frac{e^{-iw}}{e^{-iw}}\,dw = 2\pi i\,.)$$

Potom je tedy korelační posloupnost

$$K_x(m) = \frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{S(s)}{s^{m+1}}\,ds\,. \tag{8}$$

Pro $m=0$ dostáváme vztah pro rozptyl náhodné posloupnosti

$$\sigma^2(x) = K_x(0)\,.$$

4.2. PRŮCHOD STACIONÁRNÍHO PROCESU LINEÁRNÍM FILTREM

Uvažujme lineární diferenční rovnici s konstantními koeficienty

$$y_n + a_1 y_{n-1} + \cdots + a_k y_{n-k} = b_0 x_n + \cdots + b_l x_{n-l} \qquad (9)$$

x_n nazýváme vstup a y_n výstup. Zařízení, které je popsáno takovou rovnicí nazýváme lineární filtr. Jelikož x_n je náhodný proces je y_n také náhodným procesem a zajímají nás jeho charakteristiky. Rovnice (9) má řešení

$$y_n = {}^{h}y_n + {}^{r}y_n \quad ,$$

kde

$${}^{h}y_n = c_1 \lambda_1^n + \cdots + c_k \lambda_k^n$$

je homogenní řešení rovnice (9), kde $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ jsou kořeny charakteristické rovnice

$$z^k + a_1 z^{k-1} + \cdots + a_k = 0 \quad .$$

Jsou-li všechna $|\lambda_i| < 1$, je ${}^{h}y_n \to 0$ pro $n \to \infty$ a filtr popsaný takovou rovnicí nazýváme stabilní. Pro velká n se řešení potom redukuje na ${}^{r}y_n$. Dále platí

$${}^{r}y_n = \sum_{k=0}^{\infty} w_k x_{n-k} \quad , \qquad (10)$$

kde w_k je tzv. váhová posloupnost filtru. Je-li na vstupu

$$x_n = s^{-n} \quad , \qquad (11)$$

je pro velká n

$${}^{r}y_n = y_n = \sum_{k=0}^{\infty} w_k s^{-(n-k)} = s^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} w_k s^{k} = s^{-n} Y(s) \, ,$$

kde
$$Y(s) = \sum_{k=0}^{\infty} w_k s^k$$

je vytvořující funkcí posloupnosti w_k a nzýváme ji přenos filtru. Přímým dosazením (11) do (9) dostaneme

$$Y(s)\,s^{-n} + a_1 Y(s)\,s^{-(n-1)} + \dots + a_k Y(s)\,s^{-(n-k)} = b_0 s^{-n} + \dots + b_l s^{-(n-l)} .$$

Po vykrácení s^{-n} dostáváme přenos filtru

$$Y(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_l s^l}{1 + a_1 s + \dots + a_k s^k}$$

a odtud lze zpětně vyjádřit

$$w_k = \frac{Y^{(k)}(0)}{k!} .$$

Pro korelační posloupnost výstupní posloupnosti dosazením (10) do (6) dostaneme

$$K_y(n_1, n_2) = \overline{y_{n_1}\, y^*_{n_2}} = \overline{\sum_{k=0}^{\infty} w_k x_{n_1-k} \sum_{j=0}^{\infty} w_j x^*_{n_2-j}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} w_k w_j K_x(n_1 - n_2 - k + j) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} w_k w_j K_x(m - k + j) ,$$

kde $m = n_1 - n_2$. Dále z (7) dostaneme výkonovou spektrální hustotu výstupní posloupnosti

$$S_y(s) = \sum_{-\infty}^{\infty} K_y(m)\, s^m = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} w_k w_j K_x(m-k+j)\, s^m =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} w_k s^k \sum_{j=0}^{\infty} w_j s^{-j} \sum_{m=-\infty}^{\infty} K_x(m-k+j)\, s^{m-k+j} = Y(s)\, Y\!\left(\tfrac{1}{s}\right) S_x(s)$$

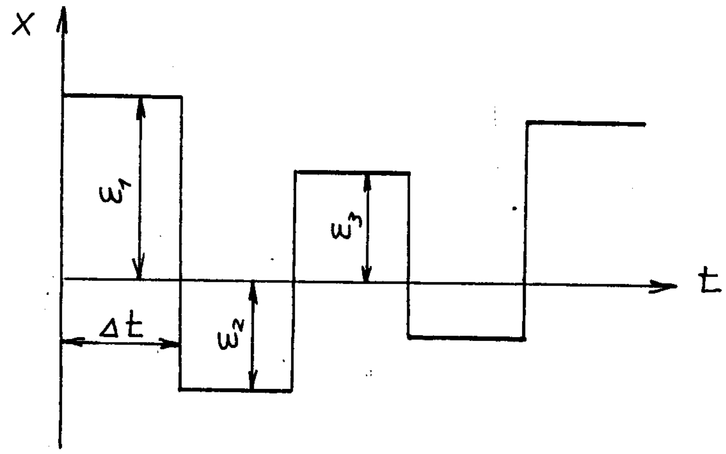
4.3. BÍLÝ ŠUM

Náhodný proces, který je charakterizován konstantní výkonovou spektrální hustotou nazýváme bílý šum. Jeho korelační funkce je rovna dirakovu impulsu. Tedy

$$S_x(s) = 1 \qquad (12)$$

$$K_x(m) = \delta(m) . \qquad (13)$$

Bílý šum je prakticky nemožné realizovat, proto se používá tzv. širokopásmový šum, pro nějž platí vztahy (12) a (13). Jedna z možností simulace širokopásmového šumu (podle [5]) je uvedena na obr.7.



obr.7

Kde ε_i jsou náhodná čísla s rovnoměrným rozložením v intervalu $\langle -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \rangle$ a Δt je konstantní.

HLAVNÍ ČÁST

5. LINEÁRNÍ SYSTÉMY S PERIODICKÝMI KOEFICIENTY

Mějme lineární systém s periodickými koeficienty popsaný soustavou diferenčních rovnic v maticovém tvaru

$$\mathbb{Y}_k = \mathbb{A}_k \mathbb{Y}_{k-1} + \mathbb{B}_k \underline{X}_k \qquad (14)$$

kde $\mathbb{A}_k$ je matice koeficientů soustavy o rozměrech $m \times m$

$\mathbb{B}_k$ je matice buzení soustavy o rozměrech $m \times 1$

$\mathbb{Y}_k$ je matice výstupu o rozměrech $m \times r$

$\underline{X}_k$ je matice vstupu o rozměrech $1 \times r$.

Ať $\mathbb{A}_{k+p} = \mathbb{A}_k$, $\mathbb{B}_{k+p} = \mathbb{B}_k$ potom $\mathbb{A}_{np+j} = \mathbb{A}_j$, $\mathbb{B}_{np+j} = \mathbb{B}_j$ pro $n=0,1,2,\dots$ kde p je perioda systému (14). Matice soustavy (14) můžeme rozepsat následovně:

$$\mathbb{Y}_n = \left[\mathbb{Y}_{np}, \mathbb{Y}_{np+1}, \cdots, \mathbb{Y}_{np+p-1}\right]^T ,$$

$$\underline{X}_n = \left[\underline{X}_{(n-1)p+1}, \underline{X}_{(n-1)p+2}, \cdots, \underline{X}_{np}, \underline{X}_{np+1}, \cdots, \underline{X}_{np+p-1}\right]^T ,$$

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} [\mathbb{A}_0 \mathbb{A}_{p-1} \cdots \mathbb{A}_1], 0, & & ,0, \cdots, 0 \\ 0, & [\mathbb{A}_1 \mathbb{A}_0 \mathbb{A}_{p-1} \cdots \mathbb{A}_2], 0, & \cdots, 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & \cdots, & 0, [\mathbb{A}_{p-1} \mathbb{A}_{p-2} \cdots \mathbb{A}_0] \end{bmatrix} ,$$

$$\mathbb{B} = \begin{bmatrix} [\mathbb{A}_0 \mathbb{A}_{p-1} \cdots \mathbb{A}_2 \mathbb{B}_1], [\mathbb{A}_0 \mathbb{A}_{p-1} \cdots \mathbb{A}_3 \mathbb{B}_2], & \cdots & [\mathbb{A}_0 \mathbb{B}_{p-1}], \mathbb{B}_0, 0, \cdots, 0 \\ 0, & [\mathbb{A}_1 \mathbb{A}_0 \cdots \mathbb{A}_3 \mathbb{B}_2], [\mathbb{A}_1 \mathbb{A}_0 \cdots \mathbb{A}_4 \mathbb{B}_3], \cdots, & [\mathbb{A}_1 \mathbb{B}_0], \mathbb{B}_1, 0, \cdots, 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, \cdots, 0, [\mathbb{A}_{p-1} \cdots \mathbb{A}_1 \mathbb{B}_0], & [\mathbb{A}_{p-1} \cdots \mathbb{A}_2 \mathbb{B}_1], \cdots, & [\mathbb{A}_{p-1} \mathbb{B}_{p-2}], \mathbb{B}_{p-1} \end{bmatrix} .$$

Z rekurentního vztahu (14) vidíme, že $\mathbb{Y}_n$ závisí na $\mathbb{Y}_{n-1}$, $\mathbb{Y}_{n-1}$ závisí na $\mathbb{Y}_{n-2}$ atd. Můžeme tedy psát, že $\mathbb{Y}_n$ závisí na $\mathbb{Y}_{n-p}$ pak daný systém (14) s periodickými koeficienty může být převeden do systému s konstantními koeficienty

$$\mathbf{y}_n = \mathbb{A}\,\mathbf{y}_{n-1} + \mathbb{B}\,\mathbf{x}_n \; . \qquad (15)$$

Tento systém je stabilní,když všechny hodnoty matice $\mathbb{A}$ leží uvnitř jednotkového kruhu.

Pomocí Z-transformace systému (15) určíme jeho periodický přenos.

$$\mathbb{Y}(z^{-1}) = z^{-1}\mathbb{A}\,\mathbb{Y}(z^{-1}) + \mathbb{B}\,\mathbb{X}(z^{-1})$$

$$\mathbb{Y}(z^{-1})\,(\mathbb{E} - z^{-1}\mathbb{A}) = \mathbb{B}\,\mathbb{X}(z^{-1})$$

$$\frac{\mathbb{Y}(z^{-1})}{\mathbb{X}(z^{-1})} = \mathbb{Y}_{\mathbf{x}}(z^{-1}) = (\mathbb{E} - z^{-1}\mathbb{A})^{-1}\mathbb{B}$$

$\mathbb{Y}_{\mathbf{x}}(z^{-1})$ je periodický přenos systému (15) a udává vztah mezi vstupem a výstupem systému.Pro zjednodušení označme $z^{-1} = s$.

Je-li $\mathbf{x}_n$ stacionární posloupnost s korelační maticí

$$\mathbb{K}_{\mathbf{x}}(k) = \overline{\mathbf{x}_n\, \mathbf{x}^*_{n+k}}$$

a maticí výkonové spektrální hustoty

$$\underline{S}_{\mathbf{x}}(s) = \sum_{-\infty}^{\infty} \mathbb{K}_{\mathbf{x}}(k)\, s^k$$

pak matice výkonové spektrální hustoty výstupu je

$$\underline{S}_{\mathbf{y}}(s) = \mathbb{Y}_{\mathbf{x}}\left(\tfrac{1}{s}\right) \underline{S}_{\mathbf{x}}(s)\, \mathbb{Y}^T_{\mathbf{x}}(s)$$

Odvození vztahu je provedeno na str. 21 .Korelační matice výstupu podle (8) je

$$\mathbb{K}_{\mathbf{y}}(l) = \frac{1}{2\pi i} \int_k \underline{S}_{\mathbf{y}}(s) \frac{ds}{s^{l+1}} \; .$$

Integrační cesta k je na obr.6.

Jestliže je přímo dána soustava diferenčních rovnic nějakého periodického systému,pak není nutné dělat transformaci ve formě (14) ale periodický přenos systému může být vypočítán přímo jak je to ukázáno v následujícím příkladě.

Mějme periodický systém popsaný následující diferenční rovnicí.

$$y_n + a_{1n} y_{n-1} + a_{2n} y_{n-2} = b_{0n} x_n + b_{1n} x_{n-1} \qquad (16)$$

Nechť je dána perioda systému 3,tedy $a_{in} = a_{in+3}$ i $b_{in} = b_{in+3}$ a nechť je rovnice (16) stabilní,potom podle (10) je

$$y_n = \sum_{k=0}^{\infty} w_{nk} x_{n-k} \quad , \qquad (17)$$

kde w_{nk} je odezva systému (16) v kroku n na vstupní posloupnost v krocích n-k.Evidentně platí,že

$$w_{nk} = w_{n+3,k} \ .$$

Jestliže vstup má formu (11) ,tedy $x_n = z^{n} = s^{-n}$,dostaneme dosazením do (17) vztah pro výstup

$$y_n = \sum_{k=0}^{\infty} w_{nk} z^{n-k} = z^n \sum_{k=0}^{\infty} w_{nk} z^{-k} = s^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} w_{nk} s^{k} = s^{-n} Y_x(n,s)$$

kde

$$Y_x(n,s) = \sum_{k=0}^{\infty} w_{nk} s^k$$

je periodický přenos systému (16).Jestliže v (16) dosadíme za

$$x_n = s^{-n} \qquad a \qquad y_n = s^{-n} Y_x(n,s) \ ,$$

dostaneme

$$Y_x(n,s) s^{-n} + a_{1n} Y_x(n-1,s) s^{-(n-1)} + a_{2n} Y_x(n-2,s) s^{-(n-2)} = b_{0n} s^{-n} + b_{1n} s^{-(n-1)}$$

a nakonec po vydělení s^{-n}

$$Y_x(n,s) + a_{1n} Y_x(n-1,s)s + a_{2n} Y_x(n-2,s)s^2 = b_{0n} + b_{1n}s. \quad (18)$$

Dosadíme-li v (18) za n = 0,1,2 dostaneme systém lineárních algebraických rovnic pro $Y_x(0,s)$, $Y_x(1,s)$, $Y_x(2,s)$.

$$Y_x(0,s) + a_{10} Y_x(2,s)s + a_{20} Y_x(1,s)s^2 = b_{00} + b_{10}s$$

$$Y_x(1,s) + a_{11} Y_x(0,s)s + a_{21} Y_x(2,s)s^2 = b_{01} + b_{11}s \quad (19)$$

$$Y_x(2,s) + a_{12} Y_x(1,s)s + a_{22} Y_x(0,s)s^2 = b_{02} + b_{12}s$$

(19) představuje pro stejná s systém lineárních rovnic pro koeficienty a,b.

6. IDENTIFIKACE PERIODICKÉHO LINEÁRNÍHO MODELU

Identifikaci provedeme experimentálním způsobem. To znamená, že na vstup modelu přivedeme náhodnou posloupnost u_n, která bude nabývat náhodně hodnot -1,0,1 a bílý šum e_n definovaný na str. 22 čímž se přiblížíme reálným systémům. Pro identifikaci koeficientů periodického modelu použijeme metodu maximální věrohodnosti popsanou v odstavci 3.1.

Mějme například systém s periodou 3, potom jeho matematický model bude posán následující soustavou diferenčních rovnic:

$$
\begin{aligned}
y_0 &= a_{01} y_{-1} + a_{02} y_{-2} + \dots + b_{01} u_{-1} + b_{02} u_{-2} + \dots + e_0 \\
y_1 &= a_{11} y_0 + a_{12} y_{-1} + \dots + b_{11} u_0 + b_{12} u_{-1} + \dots + e_1 \\
y_2 &= a_{21} y_1 + a_{22} y_0 + \dots + b_{21} u_1 + b_{22} u_0 + \dots + e_2 \\
y_3 &= a_{01} y_2 + a_{02} y_1 + \dots + b_{01} u_2 + b_{02} u_1 + \dots + e_3 \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
\qquad (20)
$$

Takovýto model nazýváme autoregresní. Model, u nějž jsou všechny koeficienty a nulové, nazýváme regresní. Maticově můžeme soustavu (20) zapsat takto:

$$\underline{y} = \mathbb{X} \cdot \underline{\beta} + \underline{e} \qquad (21)$$

kde

$$\underline{y} = [\, y_0 , y_1 , \dots , y_{N-1} \,]^T ,$$

$$\underline{\beta} = [\, a_{01}, a_{02}, \dots, b_{01}, b_{02}, \dots, a_{11}\, a_{12}, \dots, b_{11}, b_{12}, \dots, a_{21}, a_{22}, \dots, b_{21}, b_{22}, \dots \,]^T ,$$

$$\underline{e} = [\, e_0 , e_1 , \dots , e_{N-1} \,]^T ,$$

$$
X = \begin{bmatrix}
y_{-1}, y_{-2}, \cdots, u_{-1}, u_{-2}, \cdots, 0, & \cdots & & & , 0 \\
0, & \cdots & , 0, y_0, y_{-1}, \cdots, u_0, u_{-1}, \cdots, 0, & \cdots & , 0 \\
0, & & \cdots & & 0, y_1, y_0, \cdots, u_1, u_0, \cdots \\
y_2, y_1, \cdots, u_2, u_1, \cdots, 0, & \cdots & & & , 0 \\
0, & \cdots & , 0, y_3, y_2, \cdots, u_3, u_2, \cdots, 0, & \cdots & , 0 \\
0, & & \cdots & & 0, y_4, y_3, \cdots, u_4, u_3, \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{bmatrix},
$$

N je počet pozorování. Označme počet parametrů jedné fáze g. Vektory y a $\underline{e}$ mají rozměr N, vektor β má rozměr $3 \cdot g$ a matice X má rozměry $N \times 3 \cdot g$.

Rozdělení náhodné posloupnosti e_k můžeme považovat za přibližně normální normované $N(0,1)$, neboť $E e_k = 0$ a $\sigma^2(e_k) = 1$ *.

Dosazením (21) do (2) dostaneme

$$
f(\underline{e}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N} \exp\left(-\frac{\underline{e}^T \underline{e}}{2}\right) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N} \exp\left(-\frac{1}{2}(y - X\beta)^T (y - X\beta)\right) =
$$

$$
= f(y, X\beta) \, . \qquad (22)
$$

Z (22) výplývá, že je-li e_k náhodná posloupnost s normálním rozdělením má y_k též normální rozdělení.

Při daném vektoru $\underline{u}$ a napozorovaném vektoru y je $f(y, X\beta)$ funkcí parametrického vektoru β a pro jeho maximálně věrohodný odhad podle (3) můžeme psát

$$
f(y, X\hat{\beta}) = \max_{\beta} f(y, X\beta) \, .
$$

Tento vztah, vzhledem ke znaménku - v exponentu, bude splněn pro

$$
(y - X\hat{\beta})^T (y - X\hat{\beta}) \rightarrow \min \, .
$$

Po roznásobení

$$(\mathbf{y}-\mathbf{X}\cdot\hat{\underline{\beta}})^T(\mathbf{y}-\mathbf{X}\cdot\hat{\underline{\beta}}) = \mathbf{y}^T\mathbf{y}-\mathbf{y}^T\mathbf{X}\hat{\underline{\beta}}-\hat{\underline{\beta}}^T\mathbf{X}^T\mathbf{X}\hat{\underline{\beta}}-\hat{\underline{\beta}}^T\mathbf{X}^T\mathbf{y} \; .$$

Vztah upravíme na "čtverec"

$$(\hat{\underline{\beta}}^T-\mathbf{y}^T\mathbf{X}(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1})\mathbf{X}^T\mathbf{X}(\hat{\underline{\beta}}-(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{y}) \;-$$

$$-\;\mathbf{y}^T(\mathbb{E}-\mathbf{X}(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T)\mathbf{y} \longrightarrow \min$$

aby tento výraz byl minimální,musí platit

$$\hat{\underline{\beta}}-(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{y} = 0$$

a odtud dostáváme konečný vztah pro výpočet parametrického vektoru

$$\hat{\underline{\beta}} = (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{y} \; .$$

Výraz

$$\mathbf{y}^T(\mathbb{E}-\mathbf{X}(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T)\mathbf{y}$$

je roven součtu kvadrátu odchylek.

*

Obecně předpoklad,že $\sigma^2(e_k)=1$,není podstatný.Je-li $\sigma^2(e_k)$ neznámým parametrem potom jeho maximálně věrohodný odhad je dán

$$\hat{\sigma}^2(e_k) = \frac{\mathbf{y}^T(\mathbb{E}-\mathbf{X}(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T)\mathbf{y}}{N} \; ,$$

podrobněji v odstavci 7.

7. TEST OBECNÉ LINEÁRNÍ HYPOTÉZY

Ukážeme užití principu podílu věrohodnosti na testu obecné lineární hypotézy. Uvažujme náhodný vektor rozměru n, jehož rozdělení je n-rozměrné normální rozdělení $N(\mathbb{X}\underline{\beta},\sigma^2\mathbb{E})$, kde $\mathbb{X}$ je matice nějakých daných čísel rozměru n × p, $\underline{\beta}$ je parametrický vektor rozměru p, $\mathbb{E}$ je jednotková matice rozměru n × n. Mějme vektor $\underline{y}$ o rozměru n, pro který platí vztah (21)

$$\underline{y} = \mathbb{X}\underline{\beta} + \underline{e}$$

kde $\underline{e}$ je náhodný vektor o rozměru n, jehož složky mají rozdělení $N(0,\sigma^2)$ a jsou vzájemně nezávislé.

Vidíme tedy, že i-tá složka vektoru $\underline{y}$, tj. y_i má rozdělení $N(\underline{x}_i\underline{\beta},\sigma^2)$, kde $\underline{x}_i$ je i-tý řádek matice $\mathbb{X}$ jejíž složky jsou vzájemně nezávislé. Vektory $\underline{\beta}$ a σ^2 představují neznámé parametry. Množina Ω je tedy dána:

$$\begin{gathered} -\infty < \beta_1 < \infty \\ \vdots \\ -\infty < \beta_p < \infty \\ \sigma^2 > 0 \end{gathered}$$

Lineární hypotéza je definována :

$$\begin{gathered} -\infty < \beta_1 < \infty \\ \vdots \\ -\infty < \beta_k < \infty \\ \beta_{k+1} = 0 \\ \vdots \\ \beta_p = 0 \\ \sigma^2 > 0 \end{gathered}$$

neboli poslední vztahy určují množinu ω.

Vektor $\underline{y}$ má podle předpokladu hustotu pravděpodobnosti,kterou dostaneme dosazením (21) do (2)

$$f(\underline{y},\underline{\beta},\sigma^2) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}(\sigma^2)^{\frac{n}{2}}}\; e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\underline{y}-\mathbb{X}\underline{\beta})^T(\underline{y}-\mathbb{X}\underline{\beta})} \quad . \tag{23}$$

Při daném napozorovaném vektoru $\underline{y}$ je (23) věrohodnostní funkcí $f(\underline{\beta},\sigma^2)$ parametrů $\underline{\beta},\sigma^2$ .Hledejme

$$\max_{\underline{\beta},\sigma^2\in\Omega} f(\underline{\beta},\sigma^2) .$$

Při hledání tohoto maxima je výhodné hledat

$$\max_{\underline{\beta},\sigma^2\in\Omega} \ln f(\underline{\beta},\sigma^2) \quad ,$$

tedy

$$\ln f(\underline{\beta},\sigma^2) = C - \frac{n}{2}\ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}(\underline{y}-\mathbb{X}\underline{\beta})^T(\underline{y}-\mathbb{X}\underline{\beta}) =$$

$$= C - \frac{n}{2}\ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\,Q \quad ,$$

kde

$$C = \ln(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \tag{24}$$

$$Q = (\underline{y}-\mathbb{X}\underline{\beta})^T(\underline{y}-\mathbb{X}\underline{\beta}) .$$

Najděme $\max\limits_{\sigma^2\in\Omega} f(\underline{\beta},\sigma^2)$

$$\frac{\partial \ln f(\underline{\beta},\sigma^2)}{\partial(\sigma^2)} = -\frac{n}{2\hat{\sigma}^2} + \frac{1}{2\hat{\sigma}^4}\,\hat{Q} = 0$$

a odtud

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{Q}}{n} \; , \tag{25}$$

kde stříška značí hodnotu v níž nastává maximum.

Maximum vzhledem k β nastane, jak již víme ze str. 29, pro

$$\hat{\beta} = (\mathbb{X}^T\mathbb{X})^{-1}\mathbb{X}^T \mathbb{Y}$$

a potom je

$$\hat{Q} = \mathbb{Y}^T(\mathbb{E} - \mathbb{X}(\mathbb{X}^T\mathbb{X})^{-1}\mathbb{X}^T)\mathbb{Y}.$$

Podobně najdeme

$$\max_{\beta, \sigma^2 \in \omega} f(\beta, \sigma^2) ,$$

rozdíl bude pouze v tom, že matici $\mathbb{X}$ nahradíme maticí $\mathbb{X}_0$, která je tvořena prvními k sloupci matice $\mathbb{X}$ (ostatní sloupce k+1 až p jsou podle definice obecné lineární hypotézy nulové. Viz. str. 30). Potom můžeme psát

$$\hat{Q}_0 = \mathbb{Y}^T(\mathbb{E} - \mathbb{X}_0(\mathbb{X}_0^T\mathbb{X}_0)^{-1}\mathbb{X}_0^T)\mathbb{Y}.$$

Dosazením (24) a (25) do (23) dostáváme

$$\max_{\beta, \sigma^2 \in \Omega} f(\beta, \sigma^2) = e^C (\hat{\sigma}^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\hat{\sigma}^2}\hat{Q}} =$$

$$= e^C (\hat{\sigma}^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2}} = e^C e^{-\frac{n}{2}} \left(\frac{\hat{Q}}{n}\right)^{-\frac{n}{2}} \qquad (26)$$

a podobně pro

$$\max_{\beta, \sigma^2 \in \omega} f(\beta, \sigma^2) = e^C e^{-\frac{n}{2}} \left(\frac{\hat{Q}_0}{n}\right)^{-\frac{n}{2}}. \qquad (27)$$

Konečně dosazením (26) a (27) do (5) dostaneme

$$\lambda_{\varkappa} = \frac{\max\limits_{\beta, \sigma^2 \in \omega} f(\beta, \sigma^2)}{\max\limits_{\beta, \sigma^2 \in \Omega} f(\beta, \sigma^2)} = \left(\frac{\hat{Q}}{\hat{Q}_0}\right)^{\frac{n}{2}}. \qquad (28)$$

V matematickostatistické teorii (viz.[2]) se dokazuje, že

$$\frac{\hat{Q}}{\sigma^2} \qquad \text{a} \qquad \frac{\hat{Q}_0 - \hat{Q}}{\sigma^2}$$

mají tzv. χ^2 rozdělení (čteme chí kvadrát) se stupni volnosti n-p resp. p-k a jsou nezávislé. Plyne to z toho, že

$$\text{hodnost}\,[\mathbb{E} - \mathbb{X}(\mathbb{X}^T\mathbb{X})^{-1}\mathbb{X}^T] = n - p \quad .$$

(Platí totiž, že

$$(\mathbb{E} - \mathbb{X}(\mathbb{X}^T\mathbb{X})^{-1}\mathbb{X}^T)\,\mathbb{X} = 0$$

a podobně je-li $\mathbb{X} = [\mathbb{X}_0, \mathbb{X}_1]$ platí

$$(\mathbb{X}(\mathbb{X}^T\mathbb{X})^{-1}\mathbb{X}^T - \mathbb{X}_0(\mathbb{X}_0^T\mathbb{X}_0)^{-1}\mathbb{X}_0^T)\,\mathbb{X}_0 = 0$$

a tedy

$$\text{hodnost}\,[\mathbb{X}(\mathbb{X}^T\mathbb{X})^{-1}\mathbb{X}^T - \mathbb{X}_0(\mathbb{X}_0^T\mathbb{X}_0)^{-1}\mathbb{X}_0^T] = p - k \,.)$$

Podíl

$$F = \frac{\dfrac{\hat{Q}_0 - \hat{Q}}{\sigma^2(p-k)}}{\dfrac{\hat{Q}}{\sigma^2(n-p)}} = \frac{\hat{Q}_0 - \hat{Q}}{\hat{Q}} \cdot \frac{n-p}{p-k} \qquad (29)$$

má tzv. Snedecorovo F rozdělení $F(p-k, n-p)$. Dosazením (29) do (28) dostáváme

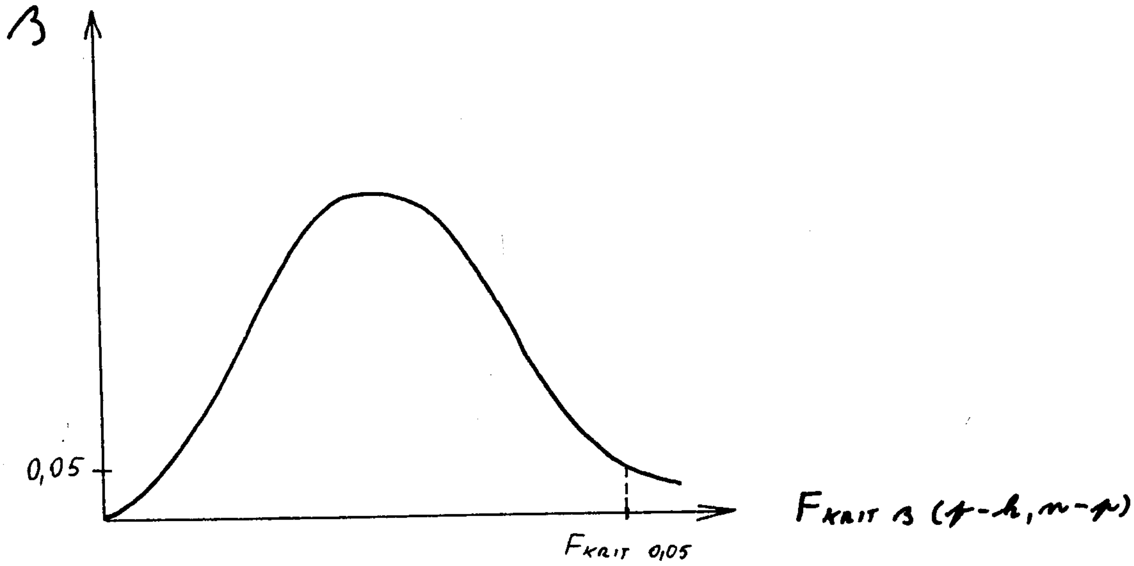
$$\lambda_{\varkappa} = \left(1 + \frac{\hat{Q}_0 - \hat{Q}}{\hat{Q}}\right)^{-\frac{n}{2}} = \left(1 + \frac{p-k}{n-p}\,F\right)^{-\frac{n}{2}} .$$

$\lambda_{\varkappa}$ je monotónní klesající funkcí proměnné F. Pro velká F bude $\lambda_{\varkappa}$ malé. Hypotézu tedy zamítneme bude-li

$$F > F_{KRIT\ 0,05}(p-k,\ n-p)\ ,$$

kde číslo 0,05 udává tzv.hladinu významnosti daného testu.Hladinu významnosti můžeme obecně volit různou,obvykle však bývá 0,01 ; 0,05 a udává pravděpodobnost s níž zamítneme správnou hypotézu.Na obr.8 je vyznačena závislost

$$P(F > F_{KRIT\ \beta}(p-k,\ n-p)) = \beta\ .$$



obr.8

8.1.TESTOVÁNÍ HYPOTÉZY PERIODIČNOSTI REGRESNÍHO MODELU

Ukážeme nyní aplikaci testu obecné lineární

8.1. TESTOVÁNÍ HYPOTÉZY PERIODIČNOSTI REGRESNÍHO MODELU

Ukážeme nyní aplikaci testu obecné lineární hypotézy na testování periodičnosti regresního modelu, čímž rozumíme model např.

$$y_n = b_{n1} u_{n-1} + b_{n2} u_{n-2} + b_{n3} u_{n-3} + b_{n4} u_{n-4} + e_n$$

kde b_{ni} jsou periodické vzhledem k indexu n. Máme např. testovat periodičnost s délkou periody 3, potom vektor b neznámých parametrů stanovíme takto

$$b = [\, b_{01}\, b_{02}\, b_{03}\, b_{04} \,,\, b_{11}\, b_{12}\, b_{13}\, b_{14} \,,\, b_{21}\, b_{22}\, b_{23}\, b_{24} \,]^T$$

a budeme testovat hypotézu

$$b_{01} = b_{11} = b_{21} \;,\; b_{02} = b_{12} = b_{22} \;,\; b_{03} = b_{13} = b_{23} \;,\; b_{04} = b_{14} = b_{24} \;.$$

Nejdřív zavedeme pomocný parametrický vektor

$$\underline{b}' = \underline{G}\, \underline{b} \quad , \qquad (30)$$

kde matice $\underline{G}$ má rozměry 12×12 a je sestavena z jednotkových matic $\mathbb{E}$ o rozměrech 4×4 následujícím způsobem

$$\underline{G} = \begin{bmatrix} \mathbb{E} & \underline{O} & \underline{O} \\ -\mathbb{E} & \mathbb{E} & \underline{O} \\ -\mathbb{E} & \underline{O} & \mathbb{E} \end{bmatrix} ,$$

kde $\underline{O}$ je nulová matice o rozměrech 4×4. Lze snadno dokázat, že

$$\underline{G}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbb{E} & \underline{O} & \underline{O} \\ \mathbb{E} & \mathbb{E} & \underline{O} \\ \mathbb{E} & \underline{O} & \mathbb{E} \end{bmatrix} .$$

Zřejmě je

$$\underline{b}' = [\, b_{01} , b_{02} , b_{03} , b_{04} , b_{11} - b_{01} , b_{12} - b_{02} , \dots , b_{24} - b_{04} \,]^T \quad ,$$

neboli hypotéza zní, že $b'_5 = b'_6 = \cdots = b'_{12} = 0$

Dále sestavíme matici $\mathbb{X}$ stejným způsobem jako na str. 28

$$\mathbb{X} = \begin{bmatrix} u_{-1} & u_{-2} & u_{-3} & u_{-4}, 0, & & \cdots & & & & , 0 \\ 0, & \cdots & 0, & u_0 & u_{-1} & u_{-2} & u_{-3}, 0, & & \cdots & , 0 \\ 0, & & \cdots & & & , 0, & u_1 & u_0 & u_{-1} & u_{-2} \\ u_2 & u_1 & u_0 & u_{-1}, 0, & & \cdots & & & & , 0 \\ \cdots & & & & & & & & & \cdots \\ \cdots & & & & & & & & & \cdots \end{bmatrix} .$$

Potom pro výstupní vektor o rozměru n dostaneme dosazením (30) do (21)

$$y = \mathbb{X}\underline{b} + \underline{e} = \mathbb{X}\cdot\underline{G}^{-1}\underline{b}' + \underline{e} = \mathbb{X}'\underline{b}' + \underline{e} .$$

Matice $\mathbb{X}' = \mathbb{X}\mathbb{G}^{-1}$ vznikne z matice $\mathbb{X}$ přičtením druhého a třetího blokového sloupce k prvnímu. Podle (29) dostaneme

$$F = \frac{\hat{Q}_0 - \hat{Q}}{\hat{Q}} \cdot \frac{n-12}{12-4}$$

kde

$$\hat{Q} = y^T (\mathbb{E} - \mathbb{X}'(\mathbb{X}^T\mathbb{X})^{-1}\mathbb{X}^T)\, y \qquad (31)$$

$$\hat{Q}_0 = y^T (\mathbb{E} - \mathbb{X}_0'(\mathbb{X}_0^T\mathbb{X}_0)^{-1}\mathbb{X}_0^T)\, y \qquad (32)$$

Matice $\mathbb{X}_0'$ je tvořena prvními 4 sloupci matice $\mathbb{X}'$ (ostatní sloupce jsou podle hypotézy ze str. 30 nulové). Odvození vztahů (31) a (32) je provedeno na str. 31. Pro výpočet je možno použít následujících vztahů

$$\mathbb{D} = \left[\begin{array}{c|c} a & x^T \\ \hline x & \mathbb{A} \end{array}\right] , \qquad D = \det \mathbb{D} = a|\mathbb{A}| - x^T\mathbb{A}^{-1}x\,|\mathbb{A}|$$

a odtud

$$\frac{D}{|\mathbb{A}|} = a - x^T\mathbb{A}^{-1}x . \qquad (33)$$

(Platí totiž, že $|\mathbb{E}'\mathbb{D}| = |\mathbb{E}'| \cdot |\mathbb{D}|$, kde $\mathbb{E}' = \left[\begin{array}{c|c} 1 & -\mathbf{x}^T\mathbb{A}^{-1} \\ \hline \underline{0} & \mathbb{E} \end{array}\right]$

a protože $\mathbb{E}'$ je trojúhelníková, je její determinant dán součinem determinantů na hlavní diagonále, tedy $|\mathbb{E}'| = 1$, potom můžeme psát

$$D = \det\left(\left[\begin{array}{c|c} 1 & -\mathbf{x}^T\mathbb{A}^{-1} \\ \hline \underline{0} & \mathbb{E} \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} a & \mathbf{x}^T \\ \hline \mathbf{x} & \mathbb{A} \end{array}\right]\right) = \det\left[\begin{array}{c|c} a - \mathbf{x}^T\mathbb{A}^{-1}\mathbf{x} & \underline{0}^T \\ \hline \mathbf{x} & \mathbb{A} \end{array}\right] =$$

$$= (a - \mathbf{x}^T\mathbb{A}^{-1}\mathbf{x}) \cdot |\mathbb{A}|.)$$

Srovnáme-li (33) s (31) a (32) dostáváme

$$a = \mathbf{y}^T\mathbf{y} \quad , \quad \mathbb{A} = \mathbb{X}'^T\mathbb{X}' \quad , \quad \mathbf{x} = \mathbb{X}'^T\mathbf{y}$$

a odtud je

$$\hat{Q} = \frac{D}{|\mathbb{X}'^T\mathbb{X}|} . \qquad (34)$$

Obdobným způsobem dostaneme

$$\hat{Q}_0 = \frac{D_0}{|\mathbb{X}_0'^T\mathbb{X}_0'|} . \qquad (35)$$

Kde

$$D = \det\left[\begin{array}{c|c} a & \mathbf{y}^T\mathbb{X}' \\ \hline \mathbb{X}'^T\mathbf{y} & \mathbb{X}'^T\mathbb{X} \end{array}\right] \qquad D_0 = \det\left[\begin{array}{c|c} a & \mathbf{y}^T\mathbb{X}_0' \\ \hline \mathbb{X}_0'^T\mathbf{y} & \mathbb{X}_0'^T\mathbb{X}_0' \end{array}\right]$$

(Matice $\mathbb{D}$ je symetrická podle hlavní diagonály a obsahuje všechny ostatní matice, tedy D_0, $\mathbb{X}'^T\mathbb{X}'$, $\mathbb{X}_0'^T\mathbb{X}_0'$.)

Dosazením (34) a (35) do (29) dostaneme konečný vztah pro F

$$F = \frac{\dfrac{D_0}{|\mathbb{X}_0'^T\mathbb{X}_0'|} - \dfrac{D}{|\mathbb{X}'^T\mathbb{X}|}}{\dfrac{D}{|\mathbb{X}'^T\mathbb{X}|}} \cdot \frac{n-12}{12-4} \qquad (36)$$

kde n je počet pozorování, 12 je celkový počet parametrů modelu a 4 je počet parametrů jedné fáze.

8.2. TESTOVÁNÍ HYPOTÉZY PERIODIČNOSTI AUTOREGRESNÍHO MODELU

U autoregresního modelu matice $\mathcal{X}$, jak víme obsahuje kromě hodnot z vektoru $\mathcal{U}$ i hodnoty z vektoru y, veličina F potom nemá Snedecorovo rozdělení a nemůžeme tedy jednoduše stanovit kritický obor. Nicméně statistika (28) je vhodnou charakteristikou periodičnosti. Ukazuje se, že v příkladech s autoregresními modely se základ statistiky

$$\lambda_{\varkappa} = \left(\frac{\hat{Q}}{\hat{Q}_0} \right)^{\frac{n}{2}},$$

který označíme λ_z tedy

$$\lambda_z = \frac{\hat{Q}}{\hat{Q}_0}$$

blížil pro periodické modely k 0 a pro neperiodické modely se blížil 1. Viz. odstavec PŘÍKLADY.

9. POPIS PROGRAMU

Program se skládá z hlavního programu a podprogramů. Vstupní hodnoty jsou uloženy na těchto proměnných:

P...počet pozorování

N...perioda modelu

Q...počet parametrů jedné fáze

JOB...počet úloh, které budeme počítat

MOD...typ modelu (0-regresní, 1-autoregresní)

A...dvourozměrné pole koeficientů a_{ij}

B...dvourozměrné pole koeficientů b_{ij}

Koeficienty a_{ij} a b_{ij} jsou čteny postupně tak jak jsou seřazeny ve vektoru β.

Hlavní program se skládá ze dvou částí. V první části je provedena identifikace periodického modelu přímou aplikací vztahu

$$\hat{\beta} = (\mathbb{X}^T\mathbb{X})^{-1}\mathbb{X}^T\mathbb{Y} .$$

První část hlavního programu se dále dělí na čtyři menší části:

1. MODEL PERIODICKÉHO SYSTÉMU

V této části jsou přímou aplikací rovnic (20) vytvořeny vektory $\mathbb{U}$ a $\mathbb{Y}$, které jsou uloženy na polích U a Y. Šum e_k a vstupní náhodná posloupnost u_k jsou generovány pomocí podprogramu "PEPA".

2. VÝPOČET MATICE Z

Matice $\mathbb{Z}=\mathbb{X}^T\mathbb{X}$ je uložena na poli Z. Matice $\mathbb{X}$ není není uložena v paměti počítače vzhledem k jejím rozměrům (např. pro hodnoty P=1000, N=3, Q=4 by měla matice $\mathbb{X}$ rozměry 1000 × 12) ale její prvky jsou podle potřeby vytvořeny z vektorů $\mathbb{U}$ a $\mathbb{Y}$ v podprogramu "TONDA". Po vypočítání matice $\mathbb{Z}$ je provedena její inverze v podprogramu "HUGO" a matice $\mathbb{Z}^{-1}$ je uložena zpět na pole Z.

3. VÝPOČET VEKTORU GAMA

Vektor $\gamma = X^T y$ je uložen na poli GAMA.

4. VÝPOČET VEKTORU BETA

Vektor $\hat{\beta} = Z^{-1} \cdot \gamma$ je uložen na poli BETA. Nakonec je vektor $\hat{\beta}$ vytištěn vedle vektoru β v přehledné tabulce.

V druhé části hlavního programu je proveden test hypotézy periodičnosti modelu přímou aplikací vztahu (36) pro regresní model a vztahu (28) pro autoregresní model. Druhá část se dále dělí na 5 menších částí:

1. VÝPOČET MATICE D

Matice D je uložena na poli D a jak víme ze str. 37 skládá se ze čtyř částí. Z čísla $a = y^T y$, vektorů $y^T X'$ a $X'^T \cdot y$ a matice $X'^T X'$.

Matice G^{-1} a matice $X' = X \cdot G^{-1}$ nejsou opět uloženy v paměti počítače. Prvky matice G^{-1} jsou podle potřeby vytvořeny v podprogramu "GREGOR" a prvky matice X'

$$x'_{ij} = \sum_{k=1}^{NQ} x_{ik} \, g'_{kj}$$

jsou uloženy dočasně podle potřeby na proměnných XX aXY.

Pro výpočet ostatních matic je využito vlastností matice D popsaných na str. 37.

2. VÝPOČET MATICE DO

Matice D_0 je vytvořena z matice D přepsáním požadovaných prvků na pole DO.

3. VÝPOČET MATICE XTX

Matice $X'^T X'$ je vytvořena z matice D přepsáním požadovaných prvků na pole XTX.

4. VÝPOČET MATICE XTXO

Matice $X_0'^T X_0'$ je vytvořena z matice $X'^T X'$ přepsáním požadovaných prvků na pole XTXO.

5.VÝPOČET KOEFICIENTU F

V této části jsou vypočítány determinanty z matic $\mathbb{D}$, $\mathbb{D}_0$, $\mathbb{X}'^T\mathbb{X}'$, $\mathbb{X}_0'^T\mathbb{X}_0'$ v podprogramu "ALFONS" a jejich hodnoty jsou dosazeny do vztahů (36) resp. (28). Nakonec podle daného typu periodického modelu je příslušná hodhota vztahu (36) resp. (28) vytištěna. (Před výpočtem konečné hodnoty vztahu (28) je vytištěn jeho základ, tedy λ_z).

NÁZVY A ČINNOSTI PODPROGRAMŮ

PEPA : Generátor náhodných čísel.

TONDA : Výběr prvků z matice $\mathbb{X}$.

GREGOR : Výběr prvků z matice $\underline{G}^{-1}$.

ALFONS : Výpočet determinantů.

HUGO : Výpočet inverzní matice, inverze je provedena kondenzační metodou. Tento podprogram využívá dalších dvou následujících podprogramů.

KOND : Kondenzace matice.

PIVOT : Jedničkování pivota.

Program je vytvořen v jazyce FORTRAN IV a byl odladěn na počítači EC 10 33.

PŘÍKLADY

Odvozenou teorii nyní demonstrujeme na čtyřech příkladech, které by měly obsáhnout všechny krajní možnosti,které mohou u lineárních periodických modelů nastat.Tedy periodický nebo neperiodický model a to regresní nebo autoregresní.

PŘÍKLAD 1.

Autoregresní model s periodou 3 a celkovým počtem parametrů 12,počet pozorování je 100.

KOEFICIENTY ZADANÉ KOEFICIENTY IDENTIFIKOVANÉ

$$\underline{\beta} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \\ 1.0 \\ 2.0 \\ 0.2 \\ 0.3 \\ 2.0 \\ 3.0 \\ 0.05 \\ 0.1 \\ 0.0 \\ 1.0 \end{bmatrix} \qquad \underline{\hat{\beta}} = \begin{bmatrix} 0.1383 \\ 0.1767 \\ 0.8629 \\ 2.1568 \\ 0.0944 \\ 0.3843 \\ 1.9755 \\ 3.3631 \\ 0.0776 \\ 0.0311 \\ -0.0468 \\ 1.1888 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_z = 0.0375 \quad , \quad \lambda_{\varkappa} = 0$$

Vektory $\underline{\beta}$ jsou u všech příkladů sestaveny takto:

$$\beta = \left[a_{01}\ a_{02}\ b_{01}\ b_{02}\ a_{11}\ a_{12}\ b_{11}\ b_{12}\ a_{21}\ a_{22}\ b_{21}\ b_{22} \right]^T$$

Char. periodičnosti pro autoregresní model

$$\lambda_z = \frac{\hat{Q}}{\hat{Q}_0} \quad , \quad \lambda_{\varkappa} = \left(\frac{\hat{Q}}{\hat{Q}_0} \right)^{\frac{m}{2}} .$$

PŘÍKLAD 2.

Regresní model s periodou 3 a celkovým počtem parametrů 12.
Počet pozorování je 100.

$$\underline{\beta} = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 1.0 \\ 2.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 2.0 \\ 3.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.5 \\ 1.0 \end{bmatrix} \qquad \hat{\underline{\beta}} = \begin{bmatrix} 0.0594 \\ -0.0240 \\ 0.8686 \\ 2.1094 \\ -0.0913 \\ 0.0369 \\ 1.9956 \\ 3.2651 \\ 0.0219 \\ -0.0819 \\ 0.4729 \\ 1.2155 \end{bmatrix}$$

$$F = 129.66$$

PŘÍKLAD 3.

Autoregresní model neperiodický. Celkový počet parametrů 12.
Počet pozorování je 100.

$$\underline{\beta} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \\ 1.0 \\ 2.0 \\ 0.101 \\ 0.201 \\ 1.001 \\ 2.001 \\ 0.099 \\ 0.199 \\ 1.0 \\ 1.999 \end{bmatrix} \qquad \hat{\underline{\beta}} = \begin{bmatrix} 0.1362 \\ 0.1541 \\ 0.8643 \\ 2.1106 \\ -0.0353 \\ 0.2524 \\ 0.9749 \\ 2.4111 \\ 0.1141 \\ 0.1394 \\ 0.9594 \\ 2.2505 \end{bmatrix}$$

$\lambda_z = 0.95$, $\lambda_{\varkappa} = 0.0841$

PŘÍKLAD 4.

Regresní model neperiodický. Celkový počet parametrů 12.

Počet pozorování 100.

$$\underline{\beta} = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 1.0 \\ 2.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 1.001 \\ 2.001 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 1.0 \\ 1.999 \end{bmatrix} \qquad \hat{\underline{\beta}} = \begin{bmatrix} 0.0491 \\ -0.0499 \\ 0.8734 \\ 2.0782 \\ -0.0877 \\ 0.0156 \\ 0.9959 \\ 2.2642 \\ 0.0126 \\ -0.0710 \\ 0.9744 \\ 2.2531 \end{bmatrix}$$

$$F = 0.49493$$

VYHODNOCENÍ PŘÍKLADŮ

Srovnáme-li vektor $\hat{\underline{\beta}}$ s vektorem $\underline{\beta}$ vidíme, že identifikované koeficienty se liší od zadaných maximálně o hodnotu 0.25 .

Pro naše příklady je kritická hodnota $F\ krit_{\alpha}(p-k,n-p) = F\ krit_{\alpha}(8,88)$, kde n = 100 je počet pozorování, p = 12 je celkový počet parametrů, k = 4 je počet parametrů 1 fáze.

Podle [2] je pro $\alpha = 0{,}05$ $F\ krit_{0.05}(8,88) = 2.21$ a pro $\alpha = 0{,}01$ je $F\ krit_{0.01}(8,88) = 3.04$.

V příkladu 2 je $F = 129.66 > F\ krit_{0.05}(8,88) = 2.21$, periodičnost modelu je jednoznačná.

V příkladu 4 je $F = 0.4943 < F\ krit_{0.05}(8,88) = 2.21$ model je tedy jednoznačně neperiodický.

V příkladu 1 můžeme říci, že $\lambda_z = 0.0375$ se blíží k 0 a model je tedy periodický, naopak v příkladu 3 $\lambda_z = 0.95$ se blíží k 1 model je tedy neperiodický.

ZÁVĚR

Jádrem předložené diplomové práce je identifikace lineárního periodického modelu a pro speciální případ periodického modelu tzv.regresní periodický model je udán test hypotézy periodičnosti.Výsledkem identifikace je matematický popis modelu v diskrétním tvaru pomocí diferenčních rovnic.Takovýto popis je potom v praxi východiskem pro syntézu řízení periodických systémů.

V této práci je provedena identifikace metodou off-line (jednorázová identifikace v otevřené smyčce).Pokračováním práce by mělo být její rozšíření na identifikaci metodou on-line (identifikace za pochodu v uzavřené smyčce).Jedná se o aktualizaci identifikační formule nevými hodnetami z periodického modelu pomocí tzv. LD filtru.Dalším rozšířením práce je možnost sestavení tzv.armamodelu,kde je na vstupu místo bílého šumu korelovaný šum.

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

[1] Hanuš, B. a kol.: Teorie automatického řízení.
Skripta VŠST, Liberec 1982.

[2] Kadeřábek, J., Kracík, V.:
Úvod do teorie pravděpodobnosti, matematické statistiky a příbuzných oblastí.
Skripta VŠST, Liberec 1970.

[3] Kracík, V.: Periodical Coefficient Linear Systems with Random stationary Input.
Kybernetika,Vol. 9 1973 , No 4.

[4] Rektorys, K.: Přehled užité matematiky.
SNTL, Praha 1968.

[5] Dufrt, Z.,Olehla, M.,Novák, V.:
Simulace systémů.
Skripta VŠST, Liberec 1984.

[6] Balajová, O.: Náhodné procesy v diskrétních systémech s periodickými koeficienty.
Diplomová práce VŠST, Liberec 1986.

[7] Wilcs, S.; Mathematical Statistics.
Ruský překlad, Moskva 1967.

SEZNAM PŘÍLOH

Příloha č. 1:

Program pro identifikaci a testování hypotézy periodičnosti lineárního periodického modelu se čtyřmi příklady.

PODĚKOVÁNÍ

Na závěr bych chtěl poděkovat vedoucímu své diplomové práce ing. Vladimírovi Kracíkovi, CSc. za konzultace a odborné připomínky při vypracovávání diplomové práce a Petrovi Sarközimu za rady při sestavování programu.