

TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI



Fakulta strojní

DISERTAČNÍ PRÁCE

Magnetohydrodynamické toky a dominantní struktury

Ing. Karel Fraňa

Aplikovaná mechanika

Obor

Mechanika tekutin a termodynamika

Zaměření

Doc. Ing. Jiří Unger, CSc.

Školitel

UNIVERZITNÍ KNIHOVNA
TECHNICKÉ UNIVERZITY V LIBERCI



3146134335

25.05.2004

Liberec

U414 S

KEZ
90 s., 13 s. příl.
obr.
Text k dis-p.

Od: **Drahomíra Stejskalová <drahomira.stejskalova@vslib.cz>**
Komu: **<daniela.stejskalova@vslib.cz>**
Víc: **FW: Klicova slova**
Datum odeslání: **Tue, 24 May 2005 10:39:08 +0200**
Poštovní prog.: **Microsoft Office Outlook, Build 11.0.5510**

-----Original Message-----

From: Karel Frana [mailto:Karel.Frana@seznam.cz]
Sent: Monday, May 23, 2005 5:04 PM
To: drahomira.stejskalova@vslib.cz
Subject: Klicova slova

Dobry den pani Stejskalova,

zasilam Vam klicova slova z me disertacni prace. Zcela urcite jsem
je jiz
posilal asi pred 2 tydny, ale
je mozne, ze jste je neobdrzela a proto je zasilam jeste jednou.

S pozdravem

Karel Frana

Klíčová slova: Numerická simulace proudění, Magnetohydrodynamika,
Metoda konečných prvků

U 414

Key words: Direct numerical simulation, Magnetohydrodynamics, Finite
Element Method

<http://www.seznam.cz> - e-mailová schránka 2000 MB

Prohlášení

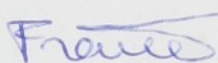
Byl jsem seznámen s tím, že na mou diplomovou (*bakalářskou, doktorskou*) práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 o právu autorském, zejména § 60 (školní dílo) a § 35 (o nevýdělečném užití díla k vnitřní potřebě školy).

Beru na vědomí, že TUL má právo na uzavření licenční smlouvy o užití mé práce a prohlašuji, že **souhlasím** s případným užitím mé práce (prodej, zapůjčení apod.).

Jsem si vědom toho, že užít své diplomové (*bakalářské, doktorské*) práce či poskytnout licenci k jejímu využití mohu jen se souhlasem TUL, která má právo ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, vynaložených univerzitou na vytvoření díla (až do jejich skutečné výše).

Datum 5. 9. 2004

Podpis



Abstrakt

Učební texty z fyziky mají za cíl poskytnout studentům přehled o fyzikálních jevech a jejich matematickému popisu. Tento text je určen pro studenty fyziky a slouží jako doplněk k přednáškám a cvičením. V textu jsou uvedeny základní fyzikální veličiny, jednotky a vzorce, které jsou potřebné pro řešení fyzikálních úloh. Text je rozdělen do kapitol, které obsahují teorii a příklady řešení úloh.

Tento text je určen pro studenty fyziky a slouží jako doplněk k přednáškám a cvičením. V textu jsou uvedeny základní fyzikální veličiny, jednotky a vzorce, které jsou potřebné pro řešení fyzikálních úloh. Text je rozdělen do kapitol, které obsahují teorii a příklady řešení úloh.

Tento text je určen pro studenty fyziky a slouží jako doplněk k přednáškám a cvičením. V textu jsou uvedeny základní fyzikální veličiny, jednotky a vzorce, které jsou potřebné pro řešení fyzikálních úloh. Text je rozdělen do kapitol, které obsahují teorii a příklady řešení úloh.

Prohlašuji tímto, že jsem zde předloženou práci vypracoval samostatně a že jsem uvedl veškerou literaturu a podklady, ze kterých jsem v rámci této práce čerpal. Většina obrázků vznikla v programu TECPLOT a výsledný dokument je vysázen v programu L^AT_EX.

Nemám závažný důvod proti užití tohoto díla ve smyslu § 60 Zákona č.121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

25.05.2004

Fraňa

Karel Fraňa

Abstrakt

Účinkem rotujícího magnetického pole na vodivé materiály v tekuté fázi je možné vyvolat pohyb těchto tekutin a prostřednictvím tohoto jevu tento pohyb pak i regulovat. Tento poznatek se uplatňuje v metalurgických procesech a rovněž tak v krystalizaci materiálu, přičemž má zásadní vliv na zlepšení vlastností materiálu, v tom smyslu, že zlepšuje homogenitu vzniklé struktury. Hlavní princip spočívá v potlačení oscilací tekutin, které doprovázejí tyto procesy. Ovšem v případě nadkritických hodnot magnetického Taylorova čísla se vytvářejí v proudění nestability Taylor-Görtlerova typu, které výrazným způsobem komplikují pozitivní účinek magnetického pole.

Tato práce zahrnuje numerické řešení tohoto problému pomocí metody DNS. Výpočet je realizován prostřednictvím vlastního výpočetního programu, který vychází z metody konečných prvků (Petrov/Galerkin) a tlakové stabilizace, a který byl vytvořen pro paralelní aplikaci. Pomocí jednoduchých testů bylo prokázáno, že vyvinutý výpočetní kód je schopen dosáhnout konvergence druhého řádu a zároveň je prezentována paralelní účinnost výpočetního programu.

Hlavním předmětem numerické simulace je transienční a turbulentní proudění pro případ konkrétní, vždy stejné hodnoty poměru výšky nádoby a jejího průměru. Jestliže magnetické Taylorovo číslo překoná kritickou hranici, pak se v proudění objeví typické dominantní struktury, přičemž jejich rozmístění je pro všechny zkoumané případy Taylorova čísla vždy nesymetrické. "Mean" hodnoty rychlostního pole potvrdily existenci hlavního homogenního rychlostního pole a méně intenzivní sekundární proudění vytvořené účinkem Bödewadtovy mezní vrstvy. Mimo rychlostních polí jsou vyhodnoceny také energetická spektra, na kterých jsou popsány charakteristické rysy chování proudění v závislosti na velikosti magnetického Taylorova čísla. Numerická analýza daného problému vysvětluje základní mechanismy nalezených dominantních struktur, které vznikají v proudění vyvolaného magnetickým polem. Celá DNS studie zahrnuje velký rozsah Taylorových čísel až do hodnoty zhruba 7.1 násobku kritické hodnoty Taylorova čísla.

Abstract

The externally applied rotating magnetic field can be used to control the motion of the liquid during the growth of single crystals and in the metallurgical processes. Active RMF causes a reduction of the small-scale spatial oscillations of the additive concentration. The subject is complicated by a fact that the Taylor-Görtler instability of the side layer occur in the flow when the magnetic Taylor number reaches the critical value.

In this work, the DNS study of the low-frequency magnetically induced flow is presented. The computational code is based on the pressure stabilised Petrov/Galerkin approximation and a second-order spatial discretisation in parallel implementation. The convergence studies are carried out on the simple basic flow to prove the second-order accuracy as well as a parallel efficiency.

The object of this study is to investigate a cavity flow induced by a rotating magnetic field defined with a fixed aspect ratio and specific magnetic Taylor number. In case that magnetic Taylor number achieves the linear stability limit, dominating structures featured with a non-symmetrical distribution in the computational domain appear in the side layer. The behaviour of these structures depend on the magnetic Taylor number. For higher numbers, these structures become increasingly unsteady and distorted. Simultaneously, the instantaneous and mean velocity field show a pronounced primary homogenous rotation and a weak secondary flow driven by a Bödewadt-layer. Furthermore, a frequency spectra as well as a velocity signal is analysed and the distinct difference can be recognised depending on the magnetic Taylor number.

This work helps to understand the basic behaviour of the flow and simultaneously, to clarify the mechanism of the identified structures in the flow driven by a rotating magnetic field. The presented DNS study covers magnetic Taylor numbers up to 7.1 times critical Taylor numbers.

Poděkování

Rád bych tímto poděkoval vedoucímu disertační práce Doc. Ing. Jiřímu Ungrovi, CSc. (TU Liberec) za jeho dlouholetou podporu, kterou mi věnoval během doby, kdy vznikala tato práce. Dále bych také rád poděkoval Prof. R.Grudmannovi (TU Dresden) a Doc. J.Stillerovi (TU Dresden), kteří mi umožnili realizovat tuto práci na TU Dresden. V neposlední řadě děkuji mé mamince a především mé ženě za jejich podporu v době vzniku této práce.

V Liberci 25.05.2004

Karel Fraňa

Obsah

Prohlášení	III
Abstrakt	III
Poděkování	V
Seznam obrázků	IX
Seznam tabulek	XIV
Seznam použitých symbolů a zkratk	XV
Úvod	1
1 Teoretické základy a dosavadní poznatky	6
1.1 Definice významných bezrozměrných parametrů	7
1.2 Experimentální studie	9
1.3 Teoretická studie	12
1.4 Dosavadní poznatky z oblasti numerických výsledků	14
2 Matematický model	18
2.1 Výběr a popis matematického modelu	18
2.2 Definice Lorentzových sil	20
2.3 Metoda konečných prvků	22

3	Výpočetní software	27
3.1	Historie vývoje programu	27
3.2	Motivace	28
3.3	Paralelní výpočet	29
3.4	Verifikace programu	32
3.4.1	Poiseuillovo proudění	32
3.4.2	Proudění v dutině	34
3.4.3	Rotující magnetické pole v nádobě nekonečné výšky	36
3.5	Shrnutí verifikace výpočetního programu	37
4	Numerické výsledky	39
4.1	Úvod k realizaci numerických výpočtů	39
4.1.1	Výpočetní stanice a způsob výpočtu	40
4.2	Popis výpočetní sítě	41
4.3	Podkritická oblast magnetického Taylorova čísla	43
4.3.1	Rychlostní pole	44
4.3.2	Vliv Taylorova čísla na sekundární proudění	44
4.3.3	Charakteristické vlastnosti proudění	45
4.3.4	Stacionární vyvinuté proudění v laminárním režimu	47
4.4	Nadkritická oblast magnetického Taylorova čísla	48
4.4.1	Úvaha o způsobu výpočtu turbulentního proudění	48
4.4.2	Okamžité rychlostní pole	50
4.4.3	Časově zprůměrované rychlostní pole	55
4.4.4	Spektra	59
4.4.5	Dominantní struktury	63
4.4.6	Dominantní struktury a okamžité rychlostní pole	68
4.4.7	Charakteristické vlastnosti proudění	69

5 Verifikace numerických výsledků	72
5.1 Hrubá verifikace výsledků	73
5.2 Verifikace na základě Davidsonovy teorie	76
5.3 Verifikace v oblasti středu rotace proudění	78
5.4 Verifikace versus komerční software	79
5.5 Validace numerických výsledků s experimentem	81
Závěr	83
Použitá literatura	86
Příloha	91

Seznam obrázků

1.1	Časový průběh teploty znázorňující účinek rotujícího magnetického pole na experimentální studii krystalizace gallia legovaného Germaniem. Experimenty DOLD a BENZ.	10
1.2	Spektrum teploty pro tentýž případ experimentů znázorněných na obrázku 1.1.	11
1.3	Ukázka konečné krystalické struktury. Vlevo struktura vznikající bez vlivu magnetického pole. Vpravo pak konečná krystalická struktura v případě působení rotujícího magnetického pole.	12
2.1	Model válcové nádoby s vyznačeným působením rotujícího magnetického pole s frekvencí ω a magnetickou indukcí B	19
3.1	Barevné označení výpočetní oblasti jednotlivých procesorů. Celkový počet použitých procesorů je 32.	30
3.2	Efektivnost paralelního výpočtu vyhodnocena pro různou hustotu výpočetní sítě.	31
3.3	Znázornění podoby kanálu s vyznačeným účinkem externích sil vyvolávajících proudění tekutiny.	33
3.4	Vývoj relativní chyby v závislosti na jemnosti sítě pro případ stacionárního proudění v kanále.	34
3.5	Schema výpočetní oblasti pro proudění v dutině, popis okrajových podmínek testovací úlohy (jednoduchá 2D úloha).	35
3.6	Znázornění tvaru válcové nádoby nekonečné výšky spolu s vyznačeným působením rotujícího magnetického pole.	36
3.7	Vývoje relativní chyby v závislosti na velikosti sítě pro případ laminárního proudění ve válcové nádobě nekonečné výšky.	37

4.1	Fotografie výpočetních stanic, na kterých se realizovaly výpočty. Obě stanice jsou typu SGI O3800 a poskytují 128 resp 64 procesorů k výpočtu. Zdroj TU DRESDEN,ZHR.	40
4.2	Znázornění horizontálního řezu výpočetní sítě. (a) první úroveň sítě (b) druhá úroveň sítě a (c) třetí úroveň sítě používaná pro konečné řešení úlohy. . . .	42
4.3	Vývoj sekundárního proudění v závislosti na velikosti magnetického Taylo-rova čísla pro oblast laminárního proudění.	45
4.4	Změna poměru maximálních hodnot rychlosti sekundárního proudění a azi-mutální rychlosti v závislosti na magnetickém Taylorovu číslu pro případ laminárního (Stokesova) proudění.	46
4.5	Časový vývoj momentu rotace pro případy výpočtů uskutečněných v podkri-tické oblasti Taylorových čísel.	47
4.6	Okamžitá azimutální rychlostní pole magneticky vyvolaného proudění pro případy různých hodnot magnetického Taylorova čísla v oblasti nadkritického proudění. (a) $Ta_m=1.9Ta_m^{cr}$ (b) $Ta_m=2.4Ta_m^{cr}$ a (c) $Ta_m=7.1Ta_m^{cr}$	51
4.7	Okamžité azimutální rychlostní pole magneticky vyvolaného proudění pro případy různých hodnot magnetického Taylorova čísla v oblasti nadkritického proudění. (a) $Ta_m=1.9Ta_m^{cr}$ (b) $Ta_m=2.4Ta_m^{cr}$ a (c) $Ta_m=7.1Ta_m^{cr}$	52
4.8	Okamžité azimutální rychlostní pole znázorněné v horizontálním řezu umís-těném v polovině výšky nádoby pro různé hodnoty magnetického Taylorova čísla. (a) $Ta_m=1.9Ta_m^{cr}$ (b) $Ta_m=2.4Ta_m^{cr}$ and (c) $Ta_m=7.1Ta_m^{cr}$	53
4.9	Okamžité azimutální rychlostní pole proudění znázorněné v horizontálním řezu umístěném v těsné blízkosti koncových stěn nádoby pro případy růz-ných hodnot magnetického Taylorova čísla. (a) $Ta_m=1.9Ta_m^{cr}$ (b) $Ta_m=2.4Ta_m^{cr}$ and (c) $Ta_m=7.1Ta_m^{cr}$	54
4.10	Znázornění azimutální okamžité rychlosti v horizontálních řezech definované výškou $\frac{H}{3}$, $\frac{H}{2}$ a $\frac{2H}{3}$ a různými hodnotami magnetického Taylorova čísla. (a) $Ta_m=1.9Ta_m^{cr}$ (b) $Ta_m=2.4Ta_m^{cr}$ an (c) $Ta_m=7.1Ta_m^{cr}$	55
4.11	Časově zprůměrované azimutální rychlostní pole znázorněné ve vertikálním řezu pro různé hodnoty magnetického Taylorova čísla. (a) $Ta_m=1.9Ta_m^{cr}$ (b) $Ta_m=2.4Ta_m^{cr}$ a (c) $Ta_m=7.1Ta_m^{cr}$	56
4.12	Rychlostní profil zprůměrovaného rychlostního pole vyhodnocený v polovině výšky nádoby. Maximální hodnotu azimutální rychlosti je možné identifikovat přibližně ve $3/4 R$	57

4.13	Znázornění sekundárního proudění doplněného proudnicemi ve vertikálním řezu nádoby s různou hodnotou magnetického Taylorova čísla. (a) $Ta_m=1.9Ta_m^{cr}$ (b) $Ta_m=2.4Ta_m^{cr}$ and (c) $Ta_m=1.9Ta_m^{cr}$	58
4.14	Časový průběh okamžité azimutální rychlosti pro pozici definovanou $r=0.75R$ a $z=0.5H$ a různou hodnotou mag. Taylorova čísla. (a) $Ta_m=1.9Ta_m^{cr}$ (b) $Ta_m=2.4Ta_m^{cr}$ a (c) $Ta_m=7.1Ta_m^{cr}$	60
4.15	Energetické frekvenční spektrum azimutálního proudění pro případy mag. Taylorova čísla. (a) $Ta_m=1.9Ta_m^{cr}$ (b) $Ta_m=2.4Ta_m^{cr}$ and (c) $Ta_m=7.1Ta_m^{cr}$	61
4.16	Vlnové energetické spektrum okamžitého azimutálního proudění.	62
4.17	Dominantní struktury znázorněné pomocí Q kritéria, dvoubarevné znázornění představuje orientaci struktur. (a) $Ta_m=1.9Ta_m^{cr}$ a (b) $Ta_m=2.4Ta_m^{cr}$ (c) $Ta_m=7.1Ta_m^{cr}$	64
4.18	Dominantní struktury znázorněné pomocí Q' kritéria. Dvoubarevné označení znázorňuje smysl rotace vírů. (a) $Ta_m=1.9Ta_m^{cr}$ a (b) $Ta_m=2.4Ta_m^{cr}$ a (c) $Ta_m=7.1Ta_m^{cr}$	66
4.19	Časový vývoj znázorněných vírů pro případ $Ta_m=2.4Ta_m^{cr}$. Obrázky znázorňují vývoj páru struktur a jejich následný pohyb.	67
4.20	Okamžitá azimutální rychlost znázorněná společně s dominantní strukturou (Q') pro konkrétní případ mag. Taylorova čísla: $Ta_m=7.1Ta_m^{cr}$	69
5.1	Azimutální a meridiální proudění (a) numericky vypočteno Gelfat a Priede (b) a (c) vlastní výpočet při magnetickém Taylorovu číslu $Ta_m=1000$	74
5.2	Azimutální a meridiální proudění (a) numericky vypočteno Gelfat a Priede (b) a (c) vlastní výpočet při magnetickém Taylorovu číslu $Ta_m = 1 \times 10^4$	75
5.3	Azimutální a meridiální proudění (a) numericky vypočteno Gelfat a Priede (b) a (c) vlastní výpočet při magnetickém Taylorovu číslu $Ta_m = 1 \times 10^5$	76
5.4	Vývoj maximální azimutální rychlosti v závislosti na magnetickém Taylorovu číslu a porovnání s teorií prezentovanou DAVIDSONEM [35].	77
5.5	Porovnání rychlostního pole DNS a RANS pro případ Taylorova čísla $2.4Ta_m^{cr}$: (a) porovnání azimutální rychlosti ve 2/3 výšky nádoby (b) porovnání vertikální složky rychlosti ve 2/3 výšky nádoby.	80
5.6	Porovnání výsledků numerické simulace s experimentálně získanými daty. Graf znázorňuje hodnotu azimutální rychlosti pro specifickou pozici.	82

- 5.7 Časový průběh relativní chyby vyjádřené na strukturované síti různé hustoty. Případ představuje jednoduché laminární proudění v kanálu. 91
- 5.8 Výpočetní síť pro případ válcové nádoby nekonečné délky. Výpočetní síť je definována počtem bodů 20 na poloměru nádoby R . Na obrázku je znázorněna pouze polovina sítě. Barevné označení vyznačuje oblast jednotlivých procesorů (2 oblasti, červená a zelená). 92
- 5.9 Rozložení azimutálního rychlostního pole pro případ laminárního proudění ve válcové nádobě nekonečné délky. 92
- 5.10 Tlakové pole proudění v dutině pro případ $Re=1000$ 93
- 5.11 Rychlostní pole proudění v dutině pro případ $Re=1000$ 93
- 5.12 Vývoj azimutálního proudění ve vertikálním řezu v podkritické oblasti magnetického Taylorova čísla. 94
- 5.13 Časově zprůměrovaná hodnota sekundárního (meridiálního) proudění (a) $Ta_m=1.9Ta_m^{cr}$ (b) $Ta_m=2.4Ta_m^{cr}$ and (c) $Ta_m=7.1Ta_m^{cr}$ 95
- 5.14 Časový průběh okamžité azimutální rychlosti na pozici $r=0.75R$ a $z=0.023H$ (a) $Ta_m=1.9Ta_m^{cr}$ (b) $Ta_m=2.4Ta_m^{cr}$ and (c) $Ta_m=7.1Ta_m^{cr}$ 96
- 5.15 Časový průběh okamžité azimutální rychlosti na pozici $r=0.75R$ a $z=0.33H$ (a) $Ta_m=1.9Ta_m^{cr}$ (b) $Ta_m=2.4Ta_m^{cr}$ and (c) $Ta_m=7.1Ta_m^{cr}$ 96
- 5.16 Energetická frekvenční spektra pro různé pozice (a) v těsné blízkosti stěny $h=0.023H$ (b) $h=0.33H$ a (c) v půlce výšky válcové nádoby $h=0.5H$ 97
- 5.17 Časový vývoj dominantních struktur znázorněných pomocí Q' kritéria. Struktury jsou znázorněny pomocí dvou barev označující orientaci rotace vírů. Znázorněné struktury odpovídají magnetickému Taylorovu číslu $Ta_m = 2.4Ta_m^{cr}$. Obrázky jsou seřazeny zleva doprava a zachycují vývoj struktur s časovým krokem 0.28s. 98
- 5.18 Časový vývoj dominantních struktur znázorněných pomocí Q' kritéria. Struktury jsou znázorněny pomocí dvou barev označujících orientaci rotace vírů. Znázorněné struktury odpovídají magnetickému Taylorovu číslu $Ta_m = 7.1Ta_m^{cr}$. Obrázky jsou seřazeny zleva doprava. Časový vývoj zachycuje krok o velikosti 0.8s. 99
- 5.19 Okamžitá azimutální rychlost ve vertikálním a horizontálním řezu. Typická oscilace azimutální rychlosti v směru hlavního rotujícího proudění. Znázorněné rychlostní pole odpovídá případu $Ta_m=1.9Ta_m^{cr}$ 100

5.20 Časový vývoj okamžité azimutální rychlosti pro případ $Ta_m = 7.1Ta_m^{cr}$. Ob-
rázky jsou seřazeny zleva doprava a zaznamenávají vývoj azimutální rych-
losti s časovým krokem 0.08s. 101

5.21 Časový vývoj okamžité azimutální rychlosti pro případ $Ta_m = 7.1Ta_m^{cr}$ Ob-
rázky jsou seřazeny zleva doprava a znázorňují časový krok 0.8s. 102

5.22 Porovnání rychlostního pole DNS a RANS pro případ Taylorova čísla $2.4Ta_m^{cr}$:
(a) porovnání azimutální rychlosti ve výšce 0.98H (b) porovnání vertikální
složky rychlosti ve výšce 0.98H 103

Seznam tabulek

4.1	Základní charakteristika výpočetních sítí použitých pro výpočet magneticky vyvolaného proudění v nádobě konečných rozměrů. Síť je definována počtem elementů a nebo výpočetních uzlů.	43
4.2	Maximální hodnoty hlavního azimutálního proudění a vedlejšího sekundárního proudění pro případy $Ta_m = 8 \times 10^4$, $Ta_m = 1 \times 10^5$ a $Ta_m = 3 \times 10^5$	70
4.3	Číselné vyjádření maximální amplitudy fluktuace v nadkritickém proudění pro případy magnetického Taylorova čísla $Ta_m = 8 \times 10^4$, $Ta_m = 1 \times 10^5$ a $Ta_m = 3 \times 10^5$	70
5.1	Porovnání bezrozměrných parametrů použitých pro oblasti nadkritických magnetických Taylorových čísel.	73
5.2	Vyhodnocení rychlosti v potenciálním jádře proudění a porovnání této rychlosti s hodnotou danou empirickým vztahem.	79

Seznam použitých symbolů a zkratk

Označení	Jednotky	
a	m	délka
B	T	magnetická indukce
B ₀	T	absolutní hodnota magnetické indukce
D	m	průměr válcové nádoby
E _{φφ}	m ² /s ²	energie spektra
E _{CPU}		efektivnost paralelního výpočtu (v CPUs)
f	Hz	frekvence
f _k		faktor konečných rozměrů
f _L	N/m ³	Lorentzovy síly
h	m	velikost sítě
H	m	výška válcové nádoby
J _k		Besselova funkce k-tého řádu
p	N/m ²	tlak, tlakové pole
r		residuum
R	m	poloměr válcové nádoby
q		váhová funkce pro rovnici kontinuity
t	s	čas
u	m/s	rychlost, rychlostní pole
w		váhová funkce pro momentovou rovnici
M,A,L,F _L		charakteristické matice
x,y,z	m,m,m	kartézské souřadnice
φ,r,z	rad, m, m	cylindrické souřadnice
e _φ ,e _r ,e _z		jednotkové vektory cylindrických souřadnic

Řecké označení

Γ	m ²	výpočetní 2D prostor
δ	m	délka
Δ t	s	délka časového kroku
ε		relativní chyba
η	m	Kolgomorovské mikroměřítko
κ	1/m	vlnové číslo
κ _K		Karmánova konstanta
λ		kořen řešení Besselovy funkce
μ	VS/mA	magnetická permeabilita

ν	m/s^2	kinematická viskozita
π		Ludolfovo číslo 3.14159
ρ	kg/m^3	hustota
σ	S/m	elektrická vodivost
τ		stabilizační koeficient
ϕ	V	elektrický potenciál
ω	rad/s	úhlová frekvence
Ω	m^3	objem celého výpočetního prostoru
Ω_e	m^3	objem elementu
Ω_{rot}	$1/\text{s}$	úhlová rychlost v potenciálním jádře
Ω_f	$1/\text{s}$	referenční úhlová rychlost v potenciálním jádře

Seznam indexů

c_T	kritický
e	vztaheno na element
h	přibližný, resp. diskretizovaný
h	označení kroku
m	magnetický
L	označení pro Lorentzovy síly
Γ	označení pro okraj oblasti
—	časově diskretizovaná hodnota
real,1,2,3	označení skutečné hodnoty a dalších variant
$\langle \cdot \rangle$	časově zprůměrovaná hodnota

Matematické symboly

$\cdot, :$	jednoduchý a dvojnásobný skalární součin
∇	Nabla operátor
T	transponovaný

Seznam bezrozměrných parametrů

Ha	Hartmannovo číslo
Re	Reynoldsovo číslo

Re_2	Reynoldsovo číslo (jiná definice) (dané úhlovou rychlostí v pot. jádře)
Re_ω	Reynoldsovo číslo magnetického pole
S	shielding parameter
Ta_m	magnetické Taylorovo číslo

Seznam zkratk

CG	conjugated gradient
CPU	Central Processing Unit - procesor stanice
DNS	Direct Numerical Simulation
FEM	Finite Element Method
LES	Large Eddy Simulation
MG	Multigrid
MGM	Multigrid method
MPI	Message Passing Interface
N-S	Navier-Stokes
PSPG	pressure stabilized Petrov-Galerkin
RANS	Reynolds averaged Navier Stokes
P1	linear tetrahedral element
mhd	magnetohydrodynamický
DNS	Direct Numerical Simulation
k- ω Standard	turbulentní model k- ω Standard
k- ω SST	turbulentní model k- ω Shear Stress Transport
k- ε Standard	turbulentní model k- ε Standard
k- ε RNG	turbulentní model k- ε ReNormalisation Group
k- ε Realizable	turbulentní model k- ε Realizable
RSM	Reynolds Stress Model

Úvod

V rámci krystalizace materiálu a metalurgických procesů vzniká přirozená konvekce jako přímý důsledek teplotních gradientů resp. jako důsledek rozdílných teplot uvnitř nádob a na jejich hranách. Tato přirozená konvekce zapříčiňuje fluktuace proudění a spolu s ní i fluktuace teploty. Praktickým důsledkem vyskytující se fluktuace během krystalizace je vznik nehomogenního materiálu, tj. materiálu, který obsahuje různé velikosti krystalů. V metalurgických procesech se pak mluví o nehomogenním materiálu (slitiny) v tom smyslu, že složky materiálů jsou nerovnoměrně promíchány. Tento fakt má negativní vliv na základní vlastnosti materiálu, jako např. pevnostní vlastnosti, teplotní a elektrickou vodivost atd. Snahou tedy je odstranit tuto vznikající materiálovou nehomogenitu tím, že se eliminuje samotná existence přirozeného proudění způsobující tuto nehomogenitu.

Vzhledem k tomu, že většina významných materiálů je vodivých (kovy) nebo alespoň částečně vodivých (polovodiče), nabízí se možnost využít této vlastnosti a použít k regulaci přirozené konvekce dodatečné proudění, které je vytvořeno pomocí účinku magnetického pole. Výhodou tohoto způsobu regulace proudění je především bezkontaktní styk, což s uvažováním, že většina materiálu je poměrně dosti agresivní, nabízí mnohem snadnější realizaci. Velmi stručně řečeno, působí-li magnetické pole na vodivé materiály, indukují se proud v tomto materiálu a ten vytváří dodatečné silové účinky, které vyvolávají určitý pohyb tohoto indukovaného materiálu. Tento pohyb pak může mít různý stupeň intenzity s ohledem na intenzitu působícího magnetického pole. Je-li magnetické pole dostatečně silné, vzniká proudění, jehož síla převyšuje přirozenou konvekci a tudíž samotné proudění uvnitř nádoby je ovlivněno pouze magnetickým polem. Takovýmto způsobem je pak možné ovlivňovat proudění uvnitř nádoby dle nastavení intenzity magnetického pole. Charakter pohybu tekutiny je dán nejen typem působícího magnetického pole, ale samozřejmě také jeho intenzitou. Princip je ale ve všech případech stejný, tj. pomocí magnetického pole se vyvolá dodatečné proudění, které eliminuje přirozenou konvekci a zároveň se vytvoří ještě dodatečné proudění tekutiny umožňující rovnoměrné tuhnutí a tím i zlepšení homogenity materiálu.

Použití magnetického pole v případě metalurgických procesů je relativně dlouho známé. KÜRTH (1917) [11] se jako jeden z prvních zabýval ideou využít vodivost materiálu a vyvolat dodatečný pohyb tekuté fáze k vykompenzování přirozené konvekce, přičemž použil právě rotující a alternující magnetické pole. O několik let později SHTANKO (1933) [7] předvedl první experimentální výsledky. V roce 1958 MULLIN a HULME [21] navrhli použít rotující magnetické pole také na problematiku krystalizace, přičemž jejich snahou bylo získat rovnoměrnou strukturu krystalů polovodičů. Samotný proces je totiž velmi podobný metalurgickým procesům, při kterých

rovněž dochází k ochlazování materiálu a důsledkem toho vzniká tzv. Rayleigh-Bénard konvekce, která způsobuje opět teplotní fluktuace a s tím i nerovnoměrnou krystalizaci. Takto stručně by se mohl popsat začátek experimentů s magnetickým polem a zkoumání jeho vlivu na proudění v materiálu, resp. z praktického hlediska vlivu na konečnou strukturu materiálu.

Jak se však ukázalo během experimentálních pozorování, využití účinku magnetického pole má mnoho limitujících faktorů. První otázkou je samotný typ magnetického pole. První pokusy experimentovaly se statickým magnetickým polem, jehož vytvoření není zrovna jednoduché a z praktického hlediska poměrně technicky a finančně nákladné. Proto se stále více pozornosti věnovalo problému rotujícího magnetického pole, jehož realizace je v porovnání k statickému magnetickému poli relativně jednoduchá. Během teoretických a experimentálních studií na počátku prvních výzkumů tohoto magnetického pole byl učiněn důkaz o možnosti pozitivně ovlivnit vývoj materiálu během výroby právě rotujícím magnetickým polem (experimentální studie DAHLBERG (1972) [9], ROBINSON (1973) [45] a numerické studie RICHARDSON (1974) [5] atd.). RICHARDSON se zabýval numerickými studiemi rotujícího magnetického pole pro případ válcové nádoby nekonečné výšky. Jeho práce ukázala limitující faktor ovlivňující praktické použití rotujícího magnetického pole. Jak bylo bezpečně prokázáno, existuje určitá hodnota magnetické indukce, resp. magnetického Taylorova čísla, kdy se proudění stává nestabilní (mluví se o nadkritickém proudění). Tyto objevující se nestability jsou Taylor-Görtlerova typu a jejich existence je omezena na boční stěny nádoby. Tato tzv. nadkritická oblast je obrovskou komplikací, neboť do proudění sice vstupuje stabilizační prvek, který omezuje přirozenou konvekci, ale zároveň i jistá destabilizace, která je tentokrát zapříčiněna samotným účinkem, resp. vedlejším účinkem magnetického pole. Později např. KAISER a BENZ (1998) [47] MÖSSNER a GERBETH (1999) [43], GRANTS a GERBETH (2001) [13] identifikovali přesné hodnoty kritického magnetického Taylorova čísla v závislosti na velikosti rozměrů nádoby. Závěry jejich studií jsou však v některých ohledech silně protichůdné.

Numerická analýza proudění v oblasti nadkritického Taylorova čísla zahrnuje velkou část prací uskutečněných za předpokladu existence osové symetrie proudění. Toto zjednodušení umožnilo použít jednoduchý 2D výpočetní software GELFGAT a PRIEDE (1999) [15] atd. Ovšem pravdou je, že nadkritické proudění charakteristické výskytem nestabilit se ukazuje jako minimálně transientní či již turbulentní proudění, a proto je nutné považovat toto proudění za 3D proudění. Vzhledem k tomu, že hlavním zájmem je 3-dimensionální transientní nebo turbulentní režim proudění ve válcové nádobě, je nutné volit způsob, jakým bude řešeno turbulentní proudění. Již dopředu se dá odhadnout, že vlivem geometrického tvaru je nutné očekávat silně zakřivené proudnice. Kromě hlavního rotujícího proudění vzniká také mnohem slabší

sekundární proudění. Tyto skutečnosti omezují výběr metody simulace turbulentního proudění na několik možných způsobů. Nejlepším řešením pro takto stručně definovaný problém je DNS (Direct numerical simulation), která může být považována zároveň za nejpresnější metodu. Tento způsob výpočtu je vždy z hlediska realizace náročný, neboť vyžaduje zpravidla velké nároky na výpočetní stanice.

V případě, že se bude uskutečňovat numerická analýza za výše uvedených podmínek, prvním úkolem, který je nutno splnit je vytvoření odpovídajícího výpočetního programu, který by splňoval všechny zde uvedené nároky. Tento program musí především umožňovat paralelní výpočet libovolně složité výpočetní oblasti. Musí mít dostatečnou přesnost řešení pro případ DNS (minimálně druhého řádu) a zároveň být k dispozici pro případ dalšího rozšíření. Právě vývoj takového programu je první částí této předkládané práce. Druhá část práce je zaměřena na konkrétní numerickou studii účinku magnetického rotujícího pole na vodivé materiály. Hlavní pozornost je věnována oblasti nadkritického proudění, která patří z hlediska numerického řešení mezi nejsložitější typy magnetohydrodynamického proudění.

Tato práce je rozdělena do jednotlivých kapitol, ve kterých jsou popsány nejen vlastní výsledky, ale rovněž dosavadní výsledky jiných autorů. V kapitole 1 jsou shrnuty významné teoretické, experimentální a hlavně numerické publikované výsledky, které mají vzhledem k této práci zásadní význam. Tyto dosavadní publikace mimo jiné obsahují základní studie magnetického pole, které jsou startovacími body k další práci. Dodržení základních standardů ohledně vizualizace a znázornění výsledků je základním předpokladem pro pozdější vzájemné porovnání v rámci dalších studií na stejné téma. To postihuje hlavně definice základních bezrozměrných parametrů, způsoby výběru referenčních hodnot anebo samotného znázornění výsledků resp. normalizování výsledků. V této kapitole lze také nalézt experimentální studii konkrétního problému včetně praktické ukázky efektu mag. pole na konečnou strukturu materiálu, umožňující snadněji pochopit jevy, které doprovázejí magnetohydrodynamické proudění.

V kapitole 'Matematický model' je možné nalézt teoretické pojednání k problematice výběru vhodného matematického modelu s ohledem na proudění tekutiny vyvolané účinkem nízkofrekvenčního působení rotujícího magnetického pole. V podstatě tato kapitola shrnuje základní definice rotujícího magnetického pole, zabývá se otázkou výběru vhodného matematického modelu a přináší jeho detailní popis. Kromě samotného popisu lze také nalézt základní popis metody výpočtu s ohledem na výběr matematického modelu.

Kapitola 'výpočetní software' obsahuje základní informace o vlastnostech a schopnostech vytvořeného výpočetního programu na bázi FEM. Kromě popisu lze v této kapitole také nalézt jednotlivé případy verifikace programu. Na jednoduchých úlohách je demonstrováno, že navržený program je schopen dosáhnout stabilního

výpočtu pro specifický matematický problém s přesností druhého řádu. Tento fakt je demonstrován na jednoduchém stacionárním i nestacionárním případě proudění v kanálu a stacionárním případě laminárního proudění ve válcové nádobě konečných rozměrů. Rovněž tak je věnována pozornost paralelní aplikaci programu doplněná vhodným testovacím příkladem, na kterém je demonstrována účinnost paralelního výpočtu.

Nejdůležitější částí této práce je pak prezentace konkrétních numerických výsledků pro případy především transientního a turbulentního proudění. Především z důvodů verifikace výsledků jsou v této kapitole prezentovány výsledky z oblasti laminárního lineárního a nelineárního režimu proudění, které jsou pak konfrontovány s dosavadní publikací. Nejvýznamnější výsledky numerické analýzy jsou zastoupeny pro případy transientního a turbulentního proudění, které doposud nebyly publikovány pro případ skutečného 3D proudění. K realizaci těchto výsledků je nutné poznamenat, že jejich výpočet se uskutečňuje na výpočetních stanicích, které disponují 128 resp. 64 CPUs. Každý řešený případ definovaný různou hodnotou magnetického Taylorova čísla představuje náročný výpočet z hlediska kapacity výpočetní stanice, tak i času potřebného k realizování výpočtu. Běžně se využívá k řešení 32 procesorů. Každý výpočet v oblasti transientního a turbulentního proudění zároveň vyžaduje řešit dostatečně dlouhou dobu, než je možné dosáhnout vyvinutého stavu proudění a zároveň shromáždit dostatečné množství dat pro statistickou analýzu. Velmi hrubě řečeno, dostatečné množství dat je shromážděno asi po 4 měsících výpočtu. Jak lze tedy odvodit, není možné řešit velké množství úloh, nýbrž je nutné se zaměřit na několik typických případů. Tím se numerická analýza orientuje hlavně na detailní pohled magneticky indukovaného proudění, identifikaci destabilizace prostřednictvím nestabilit proudění a statistickou analýzu.

Kapitola 'verifikace numerických výsledků' zahrnuje prezentaci všech dostupných možností verifikace výsledků popisující magnetohydrodynamické proudění. Pro oblast laminárního proudění je srovnání uskutečněno na základě teoretických poznatků (DAVIDSON), numerické simulace jsou ověřené experimentem (GELFGAT a PRIEDE). Numerické výsledky v oblasti transientního a turbulentního proudění jsou porovnány s teoretickými výsledky (DAVIDSON), numerickými výsledky potvrzenými experimentem (GELFGAT a PRIEDE), a dále s vlastním výpočtem turbulentního proudění pomocí RANS modelu. V neposlední řadě jsou numerické výsledky také přímo porovnány s experimentem (CRAMER). Tato verifikace by měla podpořit správnost výsledků získaných pomocí numerické analýzy.

Na začátku tohoto úvodu bylo zmíněno, že v samotném využití se objevuje vliv teploty na indukované proudění. Dále bylo poznamenáno, že dodatečné síly vznikající magnetickým polem eliminují přirozenou konvekci a vytvářejí dodatečné proudění. Toto proudění je pak závislé pouze na magnetickém poli. Vezme-li se v úvahu,

že stěny nádoby budou tepelně izolovány a účinek dodatečného magneticky indukovaného proudění bude natolik intenzivní, že jeho vliv je dominantní a vliv přirozené konvekce zanedbatelný (odpovídá vyšším hodnotám mag. indukce), pak celý problém lze redukovat na jednodušší případ isothermního proudění. Dále je nutné uvážit, že tekutinou z praktického hlediska je vždy roztavený kov či polovodič, takže každopádně nestlačitelná tekutina. Tato fakta a zjednodušení ovlivní výběr vhodného matematického modelu. Numerická studie se dále bude orientovat pouze na problematiku proudění resp. pouze na proudění vyvolané přímým účinkem rotujícího magnetického pole s nízkou frekvencí rotace a eventuálně na vedlejší vlivy tohoto proudění (vznik sekundárního proudění atd.).

Kapitola 1

Teoretické základy a dosavadní poznatky

V této kapitole jsou stručně shrnuty dosavadní publikované výsledky k problematice účinku rotujícího magnetického pole na vodivé materiály. Některé zde zmíněné výsledky jsou použity v této práci buď jako porovnávací referenční hodnoty za účelem verifikace, nebo obsahují doplňující informace k dané problematice, které nejsou součástí zde publikované studie, ale přesto mají zásadní význam na celkový přehled o daném problému. Jak již bylo zmíněno, hlavním úkolem této práce je objasnit účinky rotujícího magnetického pole (RMF neboli rotating magnetic field) na vodivé materiály ve válcové nádobě konečné délky. K této problematice existuje celá řada teoretických, numerických a experimentálních studií.

Na začátku je nejprve nutné uvést několik důležitých informací ohledně tvarů a rozměrů zkoumaného modelu a některých základních poznatků týkajících se účinku magnetického pole. Důsledkem působení magnetického rotujícího pole na vodivé materiály je vznik hlavního rotujícího pohybu tekutiny v azimutální směru uvnitř válce a z důvodů existence konečných pevných stěn pak i vznik sekundárního proudění. Geometrii zkoumaného modelu lze definovat pomocí válcové nádoby o poloměru R a výšce H , jejichž všechny hrany představují pevnou stěnu. Více informací k celé problematice lze nalézt později v kapitole 2.

V této následující kapitole jsou citovány významné bezrozměrné parametry, které jsou důležité z hlediska vyhodnocení proudění. Dále jsou zde uvedeny významné experimentální, teoretické a hlavně numerické výsledky, které mají určitý vztah k dané problematice a s jejichž pomocí je lze lépe interpretovat.

1.1 Definice významných bezrozměrných parametrů

Jakékoliv výsledky získané numerickou studií by měly být porovnány s experimenty. Ovšem eventuální verifikace výsledků je možné učinit pouze tehdy, jsou-li výsledky vyjádřeny pomocí bezrozměrných parametrů. Kromě typických parametrů jako je Reynoldsovo číslo, které je často používáno pro případ proudění tekutiny, existuje také celá řada dalších parametrů, které mají význam právě v problematice magnetohydrodynamického proudění.

Jestliže je tvar výpočetní oblasti dán válcovou nádobou o poloměru R resp. o průměru D a výšce H , pak uvnitř nádoby bude generován hlavní rotační pohyb v důsledku účinku magnetického pole. Poněvadž tento pohyb je rozhodující a typický pro danou problematiku, je ho možné považovat do jisté míry za určitou referenční hodnotu. Tuto tzv. referenční hodnotu hlavního rotujícího proudění můžeme vyjádřit jako maximální hodnoty azimutálního (rotujícího) rychlostního pole u_φ . Bezrozměrný parametr Reynoldsovo číslo určuje poměr mezi setrvačnými silami a viskózními silami a jeho definice je dána vztahem (1.1).

$$Re = \frac{u_\varphi R}{\nu} \quad (1.1)$$

Ve vztahu (1.1) označuje R poloměr válcové nádoby a ν kinematickou viskozitu tekutiny.

Zatím co Reynoldsovo číslo je poměrně známé v oblasti mechaniky tekutin, další zde definovaný parametr je už více spojen s magnetohydrodynamickým prouděním. Tak, jak existuje Reynoldsovo číslo v mechanice tekutin, tak je i možné nalézt Reynoldsovo číslo Re_ω v magnetohydrodynamice, které je definováno rychlostí rotace ω magnetického pole. Tento parametr se vztahuje na rychlost rotace magnetického pole a je definován ve vztahu (1.2).

$$Re_\omega = \frac{\omega R^2}{\nu} \quad (1.2)$$

ω reprezentuje tzv. úhlovou frekvenci magnetického rotujícího pole, která je definována jako $2\pi f$, kde f označuje frekvenci v Hz. Bezrozměrné číslo označené jako S určuje, zda-li magnetické pole pronikne do materiálu či nikoli. V anglosaské literatuře je ho možné nalézt pod názvem 'Shielding parameter' (1.3).

$$S = \sigma \mu \omega R^2 \quad (1.3)$$

Ve vztahu (1.3) označuje σ elektrickou vodivost, μ magnetickou permeabilitu a ω úhlovou frekvenci magnetického pole.

Z mechaniky tekutin je známo, že Reynoldsovo číslo definuje poměr mezi setrvačnými a viskózními silami. Jestliže je toto číslo vyšších hodnot, v proudění převládají setrvačné síly a tlumící efekt viskózních sil je v porovnání k účinku setrvačných sil zanedbatelný. Tento nepoměr sil má významný vliv na charakter proudění, které se postupně s růstem Reynoldsova čísla posouvá do oblasti turbulentního proudění. Všeobecně je také známý fakt, že pro jednotlivé případy lze definovat kritickou hodnotu, kdy Reynoldsovo proudění přestává být laminární a v proudění se objeví typické rysy nestabilit, které charakterizují transientní stav a při vyšších hodnotách Re dokonce turbulentní stav proudění. Velmi podobně je tomu také v magneto-hydrodynamice. Zde se používá podobné bezrozměrné číslo, které udává poměr mezi magnetickými silami a viskózními silami. Jsou-li magnetické síly malé vůči viskózním silám, pak vzniklé proudění je laminární. Jestliže však překročí velikost magnetických sil v poměru k viskózním silám určitý poměr, pak přejde proudění do nestacionární podoby a objevuje se transientní proudění, které dále může přejít na turbulentní proudění. Tento bezrozměrný parametr se nazývá magnetické Taylorovo číslo a jeho definice je dána vztahem (1.4).

$$Ta_m = \frac{\sigma \omega B_0^2 R^4}{2\rho \nu^2} = \frac{1}{2}(Ha)^2 Re_\omega = \frac{1}{2}(Re_\omega)^2 N \quad (1.4)$$

V definici magnetického Taylorova čísla 1.4 reprezentuje B_0 velikost amplitudy magnetické indukce, ρ reprezentuje hustotu materiálu, Ha je Hartmannovo číslo a N je tzv. 'interaction parameter'. V literatuře je často používáno tzv. Hartmannovo číslo, jehož definice je ve vztahu (1.5).

$$Ha = \sqrt{\left(\frac{\sigma B_0^2 R^2}{\rho \nu}\right)} \quad (1.5)$$

Jak je patrné z definice pro magnetické Taylorovo číslo (1.4), je možné Taylorovo číslo vyjádřit pomocí Hartmannova čísla nebo prostřednictvím N parametru, jehož definice je ve vztahu (1.6).

$$N = \frac{\sigma B_0^2}{\rho \nu} \quad (1.6)$$

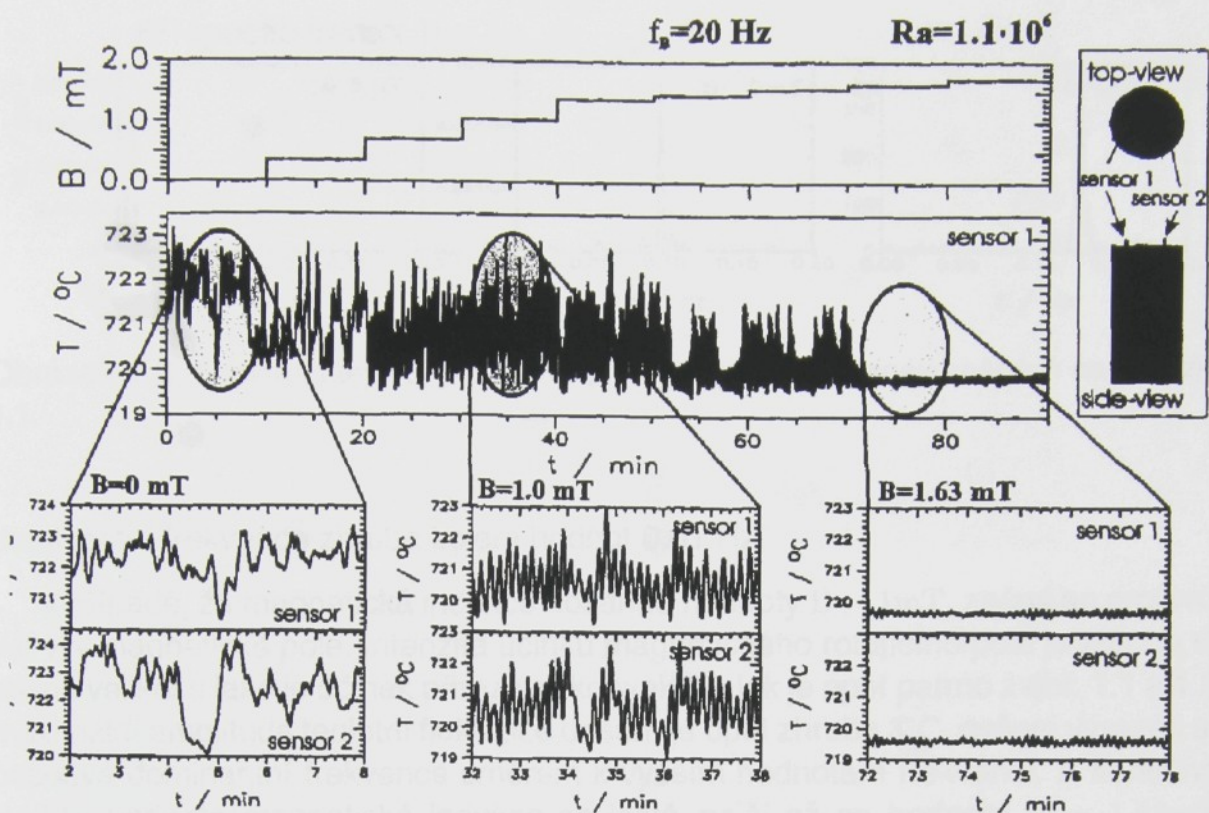
Parametr N vyjadřuje velmi důležitý fakt ohledně účinku průměrné hodnoty Lorentzových sil (2.5) a její flukтуаční části na vodivé materiály. V případě, že parametr N dosahuje velmi malých hodnot v porovnání k hodnotě 1, pak vliv flukтуаční části silového pole je zanedbatelný. (MARTIN WITKOWSKI [28]).

Tímto způsobem byly definovány všechny důležité bezrozměrné parametry, které se k dané problematice vážou. Na závěr této kapitoly je nutné ovšem zmínit ještě jeden oficiálně používaný parametr a tj. tzv. 'aspect ratio', který vyjadřuje poměr mezi výškou nádoby a průměrem nádoby H/D resp. poloměrem nádoby H/R . Tento parametr je často používán v souvislosti s magnetickým Taylorovým číslem.

1.2 Experimentální studie

Velmi důležitá část výzkumu v oblasti účinku magnetického pole je zastoupena experimentální studií. Nutno hned na úvod poznamenat, že experimenty v rámci problematiky krystalizace versus magnetické pole jsou relativně velmi technicky náročné. Většina materiálů, na kterých jsou experimenty uskutečněny, jsou velmi agresivní vůči měřicím sondám. Celý fakt je komplikovaný také tím, že se jedná o roztavené kovy, kde velkou roli hraje při měření také teplota. Další problematickou stránkou je vytvoření příslušného magnetického pole z hlediska investic do zařízení a také energetické náročnosti. Tyto všechny aspekty komplikují experimentální část studie a tudíž v současné době neexistuje dostatečné množství experimentálních výsledků pro případ verifikace. Některé významnější výsledky pocházející z experimentů jsou blíže popsány v následujících odstavcích.

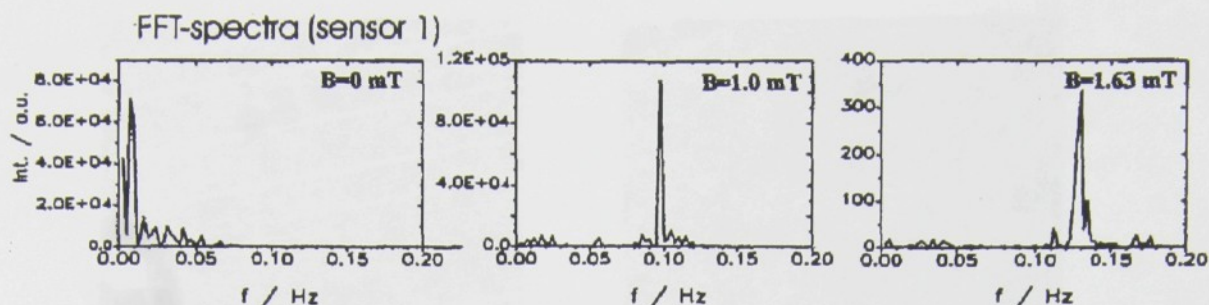
Mezi již dnes starší výsledky patří experimenty RICHARDSONA [5], který se věnoval experimentální studii rotujícího magnetického pole. Kromě publikace konkrétních hodnot hlavního rotujícího proudění identifikoval také sekundární proudění. Tyto výsledky byly jako jedny z prvních tehdy publikovaných experimentálních výsledků. VIVES [6] publikoval celou řadu uskutečněných experimentů zabývajících se solidifikací hliníkových slitin a současným působením rotujícího magnetického pole. V jeho publikaci je možné nalézt průběh rotujícího azimutálního a rovněž tangenciálního rychlostního pole. Oproti zde publikovaným numerickým výsledkům, které předpokládají uzavřenou výpočetní oblast definovanou pevnou stěnou, VIVES předpokládal otevřenou válcovou nádobu. Tato variace problému má výrazný vliv především na



Obrázek 1.1: Časový průběh teploty znázorňující účinek rotujícího magnetického pole na experimentální studii krystalizace galia legovaného Germaniem. Experimenty DOLD a BENZ.

sekundární proudění. VIVES také publikoval vliv magnetického pole na vzniklé struktury, resp. evidentně je ukázáno, že struktury, která vznikají během působení mag. pole jsou homogenní.

DOLD a BENZ [33] se soustředili na účinek rotujícího magnetického pole v případě roztaveného kovu galia legovaného germaniem. V roce 1993 HURLE [8] popsal, že v důsledku přirozené konvekce vzniká jako výsledek rozdílných teplot na dně a víku nádoby fluktuace teploty a rychlosti. Tento závěr ukázal na fakt, že přirozená konvekce je vlastně přímo zodpovědná za negativně se vyvíjející krystalizaci materiálu. Snahou je tedy redukovat přirozenou konvekci účinkem uměle vyvolaného pohybu např. právě pomocí mag. pole. DOLD a BENZ prezentovali výsledky teplotního vývoje za předpokladu různých hodnot magnetické indukce (obr. 1.1 a 1.2). Na obr. 1.1 je možné pozorovat časový průběh teploty. Je-li hodnota magnetické indukce rovna nule, pak model není vystaven účinku magnetického rotujícího pole a reálnou oscilaci teploty je možné pozorovat na obrázku na levé straně obr. 1.1. Teplotní fluktuace vykazuje neperiodický charakter a její maximální amplituda je přibližně 3°C . Na obr. 1.2 (vlevo) je zobrazeno teplotní spektrum, na kterém je možné si povšimnout



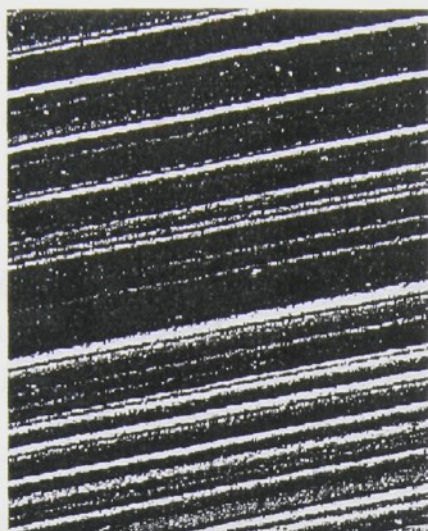
Obrázek 1.2: Spektrum teploty pro tentýž případ experimentů znázorněných na obrázku 1.1.

dominantní frekvence zhruba kolem hodnot 0.01 Hz.

V případě, že magnetická indukce dosáhne hodnoty $B = 1\text{ mT}$, začne se projevovat vliv magnetického pole. Intenzita účinku magnetického rotujícího pole je zhruba ve stejné velikosti jako je účinek přirozené konvekce. Jak je opět patrné z obr. 1.1 a 1.2, maximální amplituda teplotní fluktuace dosahuje opět zhruba 3°C , ovšem výrazně se posouvá dominantní frekvence směrem k vyšším hodnotám frekvencí. A konečně, jestliže hodnota magnetické indukce se ještě zvýší až na hodnotu $B = 1.63\text{ mT}$, pak je možné zřetelně pozorovat výrazné zklidnění fluktuace teploty, kdy maximální hodnota amplitudy je přibližně 0.2°C (1.1 vpravo) a hodnota dominantní frekvence se posune na hodnotu 0.125 Hz. Tento případ odpovídá stavu, kdy velikost účinku konvekce v důsledku mag. pole je dominantní a přirozená konvekce již nehraje žádnou roli a je vůči konvekci mag. pole zanedbatelná. Tím se dosáhne úplné kontroly nad prouděním tekutiny v nádobě.

Na obr. 1.3 je možné pozorovat výslednou strukturu pro případ krystalizace bez účinku mag. pole (vlevo) a s působením mag. pole (vpravo). Z obou obrázků je možné detailně vidět, že tzv. žlábkování (světlé označení) představuje legující materiál (germanium) a tmavý materiál gallium. Jestliže působí magnetické pole během krystalizace, pak je zřetelně vidět, že žlábkování je mnohem méně intenzivní resp. přechod mezi jednotlivými složkami materiálu není tak markantní a tím i vzniklou strukturu je možné charakterizovat jako více homogenní. DOLD a BENZ [33] demonstrovali vliv mag. pole na samotný průběh teplot a eventuální vliv na vznikající strukturu materiálu.

Jak bylo prakticky ukázáno, pomocí účinku magnetického rotujícího pole je možné získat kontrolu nad přirozenou konvekcí, která vyvolává silné oscilace teploty a proudění. Právě již zmíněná oscilace teploty a proudění nese zodpovědnost za nehomogenní materiál. Je-li hodnota magnetické indukce dostatečně velká, pak vliv přirozené konvekce je potlačen. Jak by se mohlo zdát, stačí zvýšit účinek magnetic-

 $B = 0\text{mT}$  $B = 2\text{mT}, f = 50\text{Hz}$

Obrázek 1.3: Ukázka konečné krystalické struktury. Vlevo struktura vznikající bez vlivu magnetického pole. Vpravo pak konečná krystalická struktura v případě působení rotujícího magnetického pole.

kého pole a tím je možné odstranit libovolnou nežádoucí přirozenou konvekci.

Z praktického hlediska je však problém mnohem komplikovanější, neboť v mnoha případech se při intenzivním působení magnetického pole dostavuje destabilizační jev, který je v takovémto případě vyvolán samotným magnetickým polem. Přirozená konvekce je sice potlačena, ovšem dodatečné nestability, které se začnou objevovat v proudění jsou mnohem intenzivnější, než je samotná destabilizace vlivem přirozené konvekce. Tento závěr je tak limitujícím faktorem praktického využití pozitivního účinku mag. pole při krystalizaci. V dalších kapitolách bude postupně popsán vznik nestabilit jako vedlejší produkt stabilizace magnetickým polem.

1.3 Teoretická studie

Mnohé uznávané poznatky o problému účinku magnetického pole na vodivé materiály vycházejí z teoretických studií. Velmi známé jsou např. práce MOFFATTA (válcová nádoba nekonečné délky) nebo např. práce DAVIDSONA.

MOFFATT [12] se zabýval otázkou účinku magnetického pole na válcovou nádobu nekonečných rozměrů. Jeho teoretická práce byla zaměřena především na laminární oblast proudění. Moffatt předpokládal, že je-li magneticky vyvolané proudění

výrazně pomalejší než je samotná rychlost rotace magnetického pole ωL , kde L je charakteristické délkové měřítko (většinou poloměr válcové nádoby), pak rychlostní pole neovlivňuje rotující magnetické pole. Velmi jednoduše vyjádřeno, existuje pouze účinek magnetického pole na vodivé tekutiny, zatímco zpětný vliv je zanedbatelný. Na základě tohoto zjednodušení MOFFATT teoreticky odvodil rozložení magnetického pole ve válcové nádobě. Za již zmíněných předpokladů lze definovat také analytický vztah popisující rozložení hlavní azimutální rychlosti, přičemž tento rychlostní profil je závislý pouze na poloměru nádoby. MOFFATT také analyticky odvodil velikost rotace jádra proudu v závislosti na charakteristických vlastnostech magnetického pole. V rámci laminárního režimu je znám analytický průběh rychlostního pole. Velmi podobným směrem pokračoval taky DAHLBERG [9].

Další významnou částí teoretické studie magnetického pole je práce DAVIDSONA [38] a [35]. Ten se věnoval otázce účinku mag. pole na proudění v uzavřené válcové nádobě. V důsledku uzavřené nádoby resp. důsledku konečných rozměrů a existence koncových stěn válcové nádoby vzniká nejen hlavní rotační proudění, ale také proudění sekundární. Toto sekundární proudění MOFFATT nemohl identifikovat, neboť je to důsledek existence pevných koncových stěn nádoby. Mimo jiné, DAVIDSON definoval vzniklé proudění jako dvě oblasti proudu s odlišnými vlastnostmi. V blízkosti osy rotace je rychlost velmi malá a tato oblast je dostatečně vzdálená od pevné stěny nádoby, takže účinky viskózních sil jsou zanedbatelné. Pro tuto oblast je možné definovat analyticky vztah určující tzv. frekvenci rotace resp. rotační rychlost jádra Ω (více je možné nalézt v kapitole numerické výsledky, kde je uskutečněno porovnání těchto výsledků s numerickými výsledky). Kromě toho se tato neviskozní oblast vyznačuje faktem, že proudění je do jisté míry určeno pouze poloměrem nádoby a není závislé na vertikální velikosti (vztažené k výšce nádoby). Druhou oblastí je oblast v blízkosti pevné stěny nádoby, kde viskózní síly hrají významnou roli. DAVIDSON také odvodil velmi důležitou teorii pro vývoj azimutálního rychlostního pole. Z hlediska dvou režimů proudění (laminárního a turbulentního) je možné definovat závislost azimutální rychlosti na velikosti magnetického Taylorova čísla. Je-li proudění v oblasti Stokesova proudění (malé hodnoty Reynoldsových čísel), pak vývoj azimutální rychlosti je v lineární závislosti na magnetickém Taylorově číslu. Bude-li naopak proudění již turbulentní, bude azimutální rychlost ve $2/3$ závislosti na velikosti magnetického Taylorova čísla. Tyto závěry budou později v kapitole 5 ještě jednou zmíněny a použity pro případ verifikace výsledků.

Kromě teoretické studie MOFFATTA a také DAVIDSONA je nutné ještě zmínit práci autorů GORBACHEV, NIKITIN a USTINOV [31]. Tyto publikované výsledky zahrnovaly jak experimentální tak i teoretickou studii pohybu tekutiny jako důsledek účinku mag. pole. Velmi důležitým přínosem bylo odvození analytického vztahu pro rozložení silového účinku rotujícího magnetického pole. Tak bylo možné určit přímo vliv

magnetického pole na tekutinu prostřednictvím analytického vztahu a tím se také vyhnout eventuálnímu náročnějšímu výpočtu elektrického indukovaného proudu, který je za jistých okolností nezbytný pro definici Lorentzových sil.

Tím byly velmi stručně zmíněny významné teoretické práce, které zásadně ovlivnily další vývoj v oblasti magnetohydrodynamiky a zároveň jsou v této práci mnohokrát použity. Např. teoretické poznatky MOFFATTA ohledně rozložení rychlostního pole v laminárním stokesovém režimu proudění jsou použity přímo pro verifikaci výpočetního softwaru. Závěry DAVIDSONA ohledně rychlostního pole v závislosti na hodnotě magnetického Taylorova čísla a rovněž proudění v jádře rotujícího proudu jsou použity při verifikaci výsledků. Pravděpodobně nejdůležitější přínos zastupuje práce GORBATCHEVA, jehož definice analytického rozložení silového účinku magnetického rotujícího pole se využila také zde při konkrétní aplikaci.

1.4 Dosavadní poznatky z oblasti numerických výsledků

Do doby vzniku této práce bylo publikováno několik významných numerických studií, ze kterých vyplynuly některé velmi zajímavé závěry, přičemž některé z nich byly také ověřeny experimentem. Z tohoto důvodu je učiněn v této kapitole stručný přehled o dosavadní znalostech, které vyplynuly na základě numerických studií. Na okraj je nutné poznamenat, že rotující magnetické pole je jedno z několika možných magnetických polí, které mají pozitivní vliv na krystalizaci materiálu a na pochody v metalurgii. V odborných publikacích je možné nalézt také jiné práce, které se zabývají např. statickým magnetickým polem a jeho účinkem na krystalizaci materiálu. Protože ale tato práce se zaměřuje pouze na rotující magnetické pole s nízkou frekvencí rotace, pak následný přehled zmiňuje pouze ty publikace, které jsou spojeny s tématem rotujícího magnetického pole.

Dosavadní numerické studie lze rozdělit na dvě základní skupiny. První skupinou jsou výsledky na základě teorie osové symetrie proudění. Autoři těchto publikací předpokládali, že magneticky indukované proudění lze řešit v podstatě jako 2D problém, kdy existence nesymetrického proudění v azimutálním směru proudu nehraje významnější roli a může být zanedbána. Tak či onak, toto zjednodušení je vždy platné v případě laminárního proudění. V oblasti transientního nebo dokonce turbulentního proudění už tomu tak pravděpodobně být nemusí. Druhá kategorie výsledků jsou případy řešeného 3D proudění, kterých ovšem existuje příliš málo. Z tohoto důvodu se také tato práce zaměřuje především na 3D charakter proudění a jeho podrobnější studii.

Typické studie daného problému jako 2D proudění představuje práce GELFGAT a PRIEDE [15], kteří numericky řešili problém magnetohydrodynamického proudění ve válcové nádobě konečné délky. Ve své publikaci popsali několik základních režimů proudění, které byly identifikovány na základě chování hlavního rotujícího proudu a vztahu k sekundárnímu proudění. Prvním režimem je laminární (Stokes) režim, který se vyskytuje pro případy $Ta_m < 10^3$. Základní charakteristikou laminárního proudění je tzv. symetrie proudění a to jak primárního rotujícího proudění, tak i sekundárního proudění. Tato symetrie respektuje geometrii válcové nádoby. Proudění je ovlivněno především viskózními efekty na bočních stěnách nádoby, zatímco koncové stěny nehrají téměř žádnou roli. Jestliže magnetické Taylorovo číslo překročí hranici $Ta_m > 10^3$, pak se proudění dostává do tzv. nelineárního laminárního režimu proudění. Na koncových stěnách se formuje Bödewadtova mezní vrstva. Konvektivní člen Navier-Stokesovy rovnice se začíná vyrovnávat difuznímu členu a tudíž začíná hrát významnější roli. Dále dochází k větší interakci mezi primárním rotačním prouděním v azimutálním směru a mezi sekundárním prouděním ve vertikálním směru. V případě konkrétní velikosti nádoby, magnetického pole a materiálu tekutiny lze definovat určitou kritickou hodnotu magnetického Taylorova čísla, při kterém se v proudění začnou objevovat tzv. Taylor-Görtlerovy nestability, na které již poukazoval MOFFATT [12]. GELFGAT a PRIEDE identifikovali tyto nestability a zároveň je považovali za příčinu oscilací v proudění. Jejich uskutečněná studie identifikovala nestability podél bočních stěn válcové nádoby, přičemž tato charakteristika odpovídá rovněž experimentálnímu pozorování těchto nestabilit.

Velmi podobným směrem se uchýlila práce MARTY a MARTIN WITKOWSKI [39], [28] a [27]. V publikaci [39] jsou prezentovány velmi podobné závěry jako u skupiny GELFGAT a PRIEDE. Opět je identifikována oblast lineárního laminárního režimu a tzv. nelineárního režimu s charakteristickými jevy v hlavním rotačním proudění a sekundárním proudu. Vizualně je prezentována existence nestabilit Taylor-Götlerova typu v blízkosti bočních stěn modelu. Význam této práce také spočívá ve faktu, že problém je řešen jako neisotermní proudění a tudíž je možné sledovat vztah mezi teplotní fluktuací a fluktuací proudění. Jak bylo detailně ukázáno v kapitole experimentů, existuje zřetelně teplotní fluktuace s negativními projevy. MARTY a MARTIN WITKOWSKI poukázali také na existenci oscilace proudění v radiálním směru pohybu tekutiny. Kromě toho také bylo poukázáno na spojitost mezi účinkem magnetického pole a oscilací teplotního pole resp. na tlumící efekt magnetického pole. Kromě těchto praktických závěrů také učinili srovnání numerických výsledků s výsledky DAVIDSONA. V oblasti laminárního režimu existuje lineární chování proudění k magnetickému Taylorovu číslu. V oblasti turbulentního proudění existuje známý 2/3 zákon. Tyto závěry vycházejí z Davidsonovy teoretické studie [35]. Více k tomuto tématu lze nalézt v sekci teoretická studie. MARTY a MARTIN WITKOWSKI definovali závislost rychlostního pole v závislosti na magnetickém Taylorovu číslu v oblasti tzv. nelineárního

režimu proudění. Chování rychlostního pole v závislosti na magnetickém Taylorovu číslu reprezentuje mezioblast mezi laminárním lineárním režimem a $2/3$ zákonem v oblasti turbulentního proudění.

Na okraj je také nutné věnovat několik poznámek k práci BARZE [44]. V jeho studii je možné nalézt porovnání rychlostního pole s experimenty. Předpokládá se isothermní proudění a řešený problém je považován za typické 2D proudění. Numerická analýza zohledňuje dvě varianty: proudění v uzavřené nádobě definované pouze pevnými stěnami a nebo případem nádoby, jejíž víko je otevřeno a je definováno prostřednictvím 'free surface' podmínky. Také KAISER a BENZ [47] předpokládali osově symetrické proudění. V závislosti na geometrii numericky identifikovali kritické Reynoldsovo číslo (resp. Taylorovo číslo) a dále znázornili poměr sekundárního proudění ve vztahu k primárnímu proudění jako funkci Reynoldsova čísla. Tato závislost je ovlivněna výrazně velikostí rozměrů studované oblasti a Taylorova resp. Reynoldsova čísla. Také zde byla prezentována typická fluktuace teploty. Podobné vyjádření vztahu intenzity hlavního rotujícího proudění a sekundárního pohybu tekutiny je použito později k vyhodnocení výsledků z vlastní numerické analýzy.

Charakter proudění je dán hodnotou magnetického Taylorova čísla. Překročili-li tato hodnota tzv. kritickou hodnotu, objeví se v proudění oscilace a na bočních stěnách je možné pozorovat nestability Taylor-Görtlerova typu. Určení této hodnoty je možné učinit numericky na základě velkého počtu výpočtů a nebo přesněji pomocí teorie lineární stability. MÖSSNER and GERBETH [43] určili tuto kritickou hodnotu v závislosti na velikosti nádoby pro případ rotujícího magnetického pole. Autoři zde také diskutují o rozdílných hodnotách kritického Taylorova čísla v dosavadních publikacích. Tato studie byla uskutečněna opět za předpokladu osově symetrického proudění. V publikaci je uvedeno detailní znázornění rychlostního pole pro různé režimy proudění. Kromě identifikace kritické hodnoty magnetického Taylorova čísla je velká pozornost taktéž věnována výpočetní síti. MÖSSNER a GERBETH [43] doporučují, aby hustota sítě byla minimálně odpovídající hodnotě $R/50$, kde R představuje poloměr modelu. Toto je praktické doporučení plynoucí z numerické studie. Není-li totiž síť dostatečně jemná, není také možné nestability v oblasti nadkritického proudění pozorovat. Později GRANTS a GERBETH [13] identifikovali mnohem přesnější hodnotu kritického Taylorova čísla na základě teorie lineární stability. I nadále se věnují výskytu oscilace v hlavním rotačním proudění a v sekundárním proudění. Velmi důležitý závěr byl učiněn z pohledu Taylor-Görtlerových nestabilit. V oblasti právě kritického přechodu proudění pravděpodobně kritické oscilace nesouvisí s Taylor-Görtlerovými nestabilitami (jak bylo dříve publikováno), nýbrž s tím, že existuje několik dodatečných tzv. nestabilních stavů v lineárně stabilních režimech proudění. Publikace GRANTS a GERBETH [14] se věnuje otázce vzniku 3D nestabilit. Numerická studie zahrnuje identifikaci kritické hodnoty Taylorova čísla pro určitou geometrii s

ohledem na výskyt nestabilit v hlavním rotačním proudění.

Určení kritické hodnoty pro případ velikosti nádoby $H/D = 1.5$ je důležitý startovací bod pro zde předkládanou práci. Na základě privátní komunikace (Gerbeth) odpovídá hodnota kritického magnetického čísla v případě $H/D = 1.5$ hodnotě $4.25 \cdot 10^4$. Je-li proudění tudíž definováno větší hodnotou magnetického Taylorova čísla, pak se vždy může jednat o proudění nestacionární s výskytem nestabilit Taylor-Görtlerova typu. Teoretické pojednání ohledně vzniku nestabilit různých druhů lze nalézt v literatuře SARIC [52].

Stochastický model

Výběr a popis matematického modelu

Matematický model je zvolen na základě fyzikální podstaty problému. Jak již bylo zmíněno v úvodu, kapitolách zmíněno, zkoumaný problém zahrnuje proudění tekutiny v válcové nádobě (válcovou nebo poloválčovou), přičemž hmotin zároveň působí na proudění magnetická síla. Proudění je uvažováno jako isothermní resp. s rovnoměrným gradientem uvnitř nádoby. Hmotin proudění je tak práce vlivu magnetického pole. Eventuální vliv okrajových podmínek na řešení se nepočítá, resp. elektrické vodivosti není uvažována. Okrajové podmínky jsou tak uvažovány jako podmínky pevné stěny, tzv. Dirichletovy okrajové podmínky. Tato velmi stručná definice slouží jako startovací bod pro výběr matematického modelu.

Matematický model je zvolen na základě fyzikální podstaty problému. Jak již bylo zmíněno v úvodu, kapitolách zmíněno, zkoumaný problém zahrnuje proudění tekutiny v válcové nádobě (válcovou nebo poloválčovou), přičemž hmotin zároveň působí na proudění magnetická síla. Proudění je uvažováno jako isothermní resp. s rovnoměrným gradientem uvnitř nádoby. Hmotin proudění je tak práce vlivu magnetického pole. Eventuální vliv okrajových podmínek na řešení se nepočítá, resp. elektrické vodivosti není uvažována. Okrajové podmínky jsou tak uvažovány jako podmínky pevné stěny, tzv. Dirichletovy okrajové podmínky. Tato velmi stručná definice slouží jako startovací bod pro výběr matematického modelu.

Matematický model je zvolen na základě fyzikální podstaty problému. Jak již bylo zmíněno v úvodu, kapitolách zmíněno, zkoumaný problém zahrnuje proudění tekutiny v válcové nádobě (válcovou nebo poloválčovou), přičemž hmotin zároveň působí na proudění magnetická síla. Proudění je uvažováno jako isothermní resp. s rovnoměrným gradientem uvnitř nádoby. Hmotin proudění je tak práce vlivu magnetického pole. Eventuální vliv okrajových podmínek na řešení se nepočítá, resp. elektrické vodivosti není uvažována. Okrajové podmínky jsou tak uvažovány jako podmínky pevné stěny, tzv. Dirichletovy okrajové podmínky. Tato velmi stručná definice slouží jako startovací bod pro výběr matematického modelu.

Kapitola 2

Matematický model

2.1 Výběr a popis matematického modelu

Matematický model je zvolen na základě fyzikální podstaty problému. Jak již bylo v předchozích kapitolách zmíněno, zkoumaný problém zahrnuje proudění nestlačitelných tekutin (většinou kovy nebo polovodiče), přičemž hnacím zdrojem tohoto pohybu jsou magnetické síly. Proudění je uvažováno jako isothermní resp. s nulovým teplotním gradientem uvnitř nádoby. Hnací silou proudění je tak pouze vliv magnetického pole. Eventuální vliv okrajových podmínek na řešení z hlediska tepelné vodivosti resp. elektrické vodivosti není uváženo. Okrajové podmínky jsou tak zastoupeny jednoduchou podmínkou pevné stěny, tzv. Dirichletovu okrajovou podmínkou. Tato velmi stručná definice slouží jako startovací bod pro výběr vhodného matematického modelu.

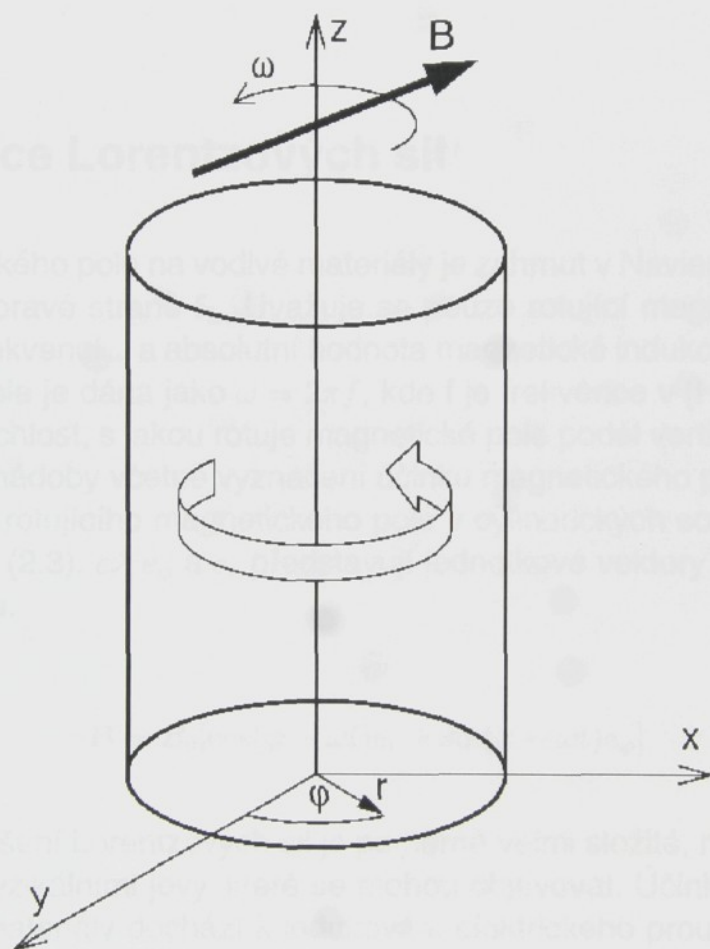
Než je možné přejít k definici matematického modelu, je účelné na okraj zmínit několik poznámek k problému výběru vhodného souřadnicového systému. Níže popsaný matematický model je definován v kartézských souřadnicích a i v takovéto podobě je dále implementován v softwaru. Vzhledem k tomu, že se řešený problém omezuje pouze na výpočetní oblast, která je vždy definována jako válcová nádoba konečných rozměrů s poloměrem válcové nádoby R (průměr D) a výškou nádoby H , pak některé následující matematické definice jsou popsány pomocí cylindrických souřadnic. Tím je možné dosáhnout jejich zjednodušení a také jejich interpretace je mnohem snadnější.

Numerické řešení konkrétního již popsaného fyzikálního problému je dáno řešením matematického modelu, který je definován Navier-Stokesovými rovnicemi (N-S rovnicemi) pro nestlačitelné, viskózní proudění. Momentová rovnice a rovnice kontinuity jsou dány ve vztahu (2.1) a (2.2).

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \mathbf{f}_L \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.2)$$

V rovnicích (2.1) a (2.2) $\mathbf{u}$ představuje vektorové pole okamžité rychlosti a p je skalární veličina, která zastupuje řešení tlakové pole. ρ a ν jsou materiálové konstanty resp. hustota a kinematická viskozita tekutiny. Poslední člen na pravé straně rovnice (2.1) reprezentuje vektorovou veličinu zahrnující dodatečné externí síly, které v tekutině působí.



Obrázek 2.1: Model válcové nádoby s vyznačeným působením rotujícího magnetického pole s frekvencí ω a magnetickou indukcí B .

Okrajové podmínky pro simulovaný problém jsou vždy stejné a jsou definovány

elektricky a tepelně izolovanými pevnými stěnami typu Dirichletovy okrajové podmínky. Jinou možností je případ, kdy víko nádoby je definováno podmínkou tzv. free surface, a v takovémto případě se jedná o otevřenou nádobu. Tak je možné rozlišit z hlediska typu okrajových podmínek dvě základní úlohy. V rámci této práce se uvažuje pouze případ úplně uzavřené válcové nádoby.

Dosavadní definice matematického modelu představuje ve skutečnosti obyčejné isothermní, viskozní a nestlačitelné proudění bez zohlednění dalších vlivů. Vliv účinku magnetického pole je tedy zahrnut do tzv. externích sil. Těmto silám se říká Lorentzovy síly a mohou být vyjádřeny buď analyticky (je-li analytické řešení známo) a nebo se počítají na základě indukovaného elektrického proudu $\mathbf{j}$ a magnetické indukce $\mathbf{B}$. V dalších kapitolách nalezneme přesné definice Lorentzových sil včetně možné realizace.

2.2 Definice Lorentzových sil

Účinek magnetického pole na vodivé materiály je zahrnut v Navier-Stokesových rovnic výrazem na pravé straně $\mathbf{f}_L$. Uvažuje se pouze rotující magnetické pole, které rotuje úhlovou frekvencí ω a absolutní hodnota magnetické indukce je B_0 . Frekvence magnetického pole je dána jako $\omega = 2\pi f$, kde f je frekvence v [Hz]. Tato frekvence vlastně určuje rychlost, s jakou rotuje magnetické pole podél vertikální osy. Schema modelu válcové nádoby včetně vyznačení účinku magnetického pole je dáno na obrázku 2.1. Popis rotujícího magnetického pole v cylindrických souřadnicích (φ, r, z) je dána vztahem (2.3). $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\varphi$ a $\mathbf{e}_z$ představují jednotkové vektory cylindrického souřadného systému.

$$\mathbf{B} = B_0[\cos(\varphi - \omega t)\mathbf{e}_r + \sin(\varphi - \omega t)\mathbf{e}_\varphi] \quad (2.3)$$

Numerické řešení Lorentzových sil je poměrně velmi složité, neboť se musí uvažovat s mnoha fyzikálními jevy, které se mohou objevovat. Účinkem magnetického pole na vodivé materiály dochází k indukování elektrického proudu, který vyvolává pohyb tekutiny prostřednictvím silového účinku na tekutinu (viz. Lorentzovy síly). Ovšem samotný pohyb tekutiny opět působí na indukovaný proud. Tímto dochází ke zpětné vazbě, která komplikuje realizaci výpočtu. Za určitých podmínek, které jsou zmíněny níže je možné předpokládat, že zpětná vazba mezi rychlostí a magnetickým polem je zanedbatelná vůči samotnému účinku magnetického pole na rychlostní pole a tím je možné celý problém řešit odděleně. V podstatě se předpokládá pouze

vliv magnetické pole na rychlostní pole. Podmínky, za kterých je možné toto zjednodušení učinit jsou shrnuty následně:

1. Magnetické pole se pohybuje pomaleji než samotné rotační proudění resp. je platné, že $u \ll \omega R$.
2. Existuje předpoklad, že proudění je dostatečně pomalé než je definovaný 'skin' efekt, tj. že platí následující vztah: $R \ll \delta_s = \sqrt{\frac{2}{\sigma \mu \omega}}$, kde σ a μ jsou materiálové konstanty resp. elektrická vodivost a magnetické permeabilita

Jestliže jsou tyto obě podmínky splněny, je možné počítat jen vliv účinku mag. pole na tekutinu. Tento postup se nazývá jako low- R_m aproximace. Lorentzovy síly jsou pak definovány pouze jako součin absolutní hodnoty magnetické indukce rotujícího magnetického pole a indukované proudu. Definice Lorentzových sil je pak možné vyjádřit ve vztahu (2.4).

$$\mathbf{f}_L = \mathbf{j} \times \mathbf{B} = \mathbf{B} \times [\sigma(-\nabla\phi + \mathbf{u} \times \mathbf{B})] \quad (2.4)$$

Ve vztahu (2.4) reprezentuje ϕ tzv. elektrické potenciální pole. Z praktického hlediska je realizace výpočtu tohoto typu rovnic stejně tak náročná jako např. výpočet tlakového potenciálu v případě řešení N-S rovnic. Z tohoto důvodu je mnohem účelnější využít tzv. analytický vztah pro definici Lorentzových sil, který byl poprvé prezentován autory GORBATCHEV, NIKITIN a USTINOV [10]. V analytickém vztahu se předpokládá pouze časově průměrná hodnota Lorentzových sil, zatím co flukтуаční část se zanedbá. (MARTIN WITKOWSKI a WALKER [27])

Jsou-li tedy splněny podmínky pro použití analytického řešení Lorentzových sil, pak rozložení silového účinku v geometrii válcového tvaru konečných rozměrů je dán vztahem (2.5).

$$\mathbf{f}_L = \frac{1}{2} \sigma \omega B_0^2 r f_k(r, z) \quad (2.5)$$

Ve vztahu (2.5) je znázorněné rozložení Lorentzových sil ve výpočetní geometrii a jak je patrné z definice, velikost těchto sil je dána nejen poloměrem nádoby, ale rovněž tak její výškou. Právě koeficient $f_k(r, z)$ zahrnuje vliv konečné výšky nádoby. Jeho definice je dána vztahem (2.6).

$$f_k(r, z) = 1 - \frac{R}{r} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2J_1(\lambda_k r/R) \cosh(\lambda_k z/R)}{(\lambda_k^2 - 1) J_1(\lambda_k) \cosh(\lambda_k H/2R)} e^{\varphi} \quad (2.6)$$

J_k představuje ve vztahu (2.6) Besselovu funkci prvního typu a k -tého řádu a λ_k je kořen řešení $\lambda_k J_0(\lambda_k) - J_1(\lambda_k) = 0$. Vztah (2.5) vychází v podstatě z definice Lorentzových sil pro případ nekonečné výšky nádoby, avšak v případě konečných rozměrů je nutné zahrnout do vztahu ještě opravný faktor, který zohledňuje konečnou geometrii. Výsledný analytický vztah Lorentzových sil zohledňuje velikost výpočetní oblasti a hodnota je závislá na odlehlosti od středu rotace a rovněž tak na vzdálenosti od dna nádoby. Tímto způsobem je možné se vyhnout řešení rovnice (2.4) a výrazným způsobem tak usnadnit realizaci výpočtu.

Závěrem lze podotknout, že analytické řešení umožňuje velmi rychle definovat silový účinek magnetického pole na vodivé či slabě vodivé tekutiny (polovodiče), jestliže magnetickým polem je rotující magnetické pole. Jsou-li tedy definovány externí (Lorentzovy) síly, pak spolu s rovnicemi Navier-Stokes je kompletně definován celý matematický model, který je dále řešen pomocí metody konečných prvků.

2.3 Metoda konečných prvků

Jak naznačuje název kapitoly, řešení Navier-Stokesových rovnic je realizováno pomocí metody konečných prvků (FEM - finite element method). Výpočetní oblast označená jako Ω je rozložena do 4-uzlových 3D elementů o objemu Ω_e , které kontinuálně vyplňují celý diskretizovaný prostor a vzájemně se nepřekrývají. Matematické vyjádření této definice lze učinit dle výrazu (2.7):

$$\Omega \approx \Omega_h = \bigcup_e \Omega_e \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{w} \rightarrow \mathbf{w}_h &= \sum_i \mathbf{w}_i \varphi_i \\ q \rightarrow q_h &= \sum_i q_i \varphi_i \\ \mathbf{u} \rightarrow \mathbf{u}_h &= \sum_i \mathbf{u}_i \varphi_i \\ p \rightarrow p_h &= \sum_i p_i \varphi_i \end{aligned} \quad (2.8)$$

Váhové funkce a diskretizace tlakového a rychlostního pole jsou definovány v případě Galerkinovy formulace dle vztahů (2.8). Proměnná φ označuje báзовou funkci. Galerkinova aproximace není dostatečně stabilní pro případ nestlačitelného proudění, a proto je nutné modifikovat váhové funkce dle vztahů (2.9).

$$\begin{aligned} \mathbf{w} \rightarrow \widehat{\mathbf{w}}_h &= \mathbf{w}_h + \tau \nabla q_h \\ q \rightarrow \widehat{q}_h &= q_h \end{aligned} \quad (2.9)$$

Petrov-Galerkinova formulace s tzv. tlakovou stabilizací řešeného problému definovaného momentovou rovnicí a rovnicí kontinuity je dána vztahem (2.10) a (2.11). Tato formulace řešeného problému spolu s tlakovou stabilizací vychází s Galerkinovy formulace, přičemž váhové funkce byly modifikovány dle (2.9).

$$\int_{\Omega} [\mathbf{w} \cdot (\partial_t \mathbf{u} + \nabla \cdot \mathbf{u} \mathbf{u} + \nabla p - \mathbf{f}_L) + (\nabla \mathbf{w})^T : \nu \nabla \mathbf{u}] d\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{w} \cdot \nu \partial_n \mathbf{u} d\Gamma \quad (2.10)$$

$$\int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{u} d\Omega + \sum_e \int_{\Omega_e} \tau \nabla q \cdot \mathbf{r}(\mathbf{u}, p) d\Omega = 0 \quad (2.11)$$

Ve vztahu (2.10) definuje $\mathbf{r}(\mathbf{u}, p)$ tzv. residuum momentové rovnice (2.10). Přesná definice tohoto residua je dána dle vztahu (2.12).

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}, p) = \partial_t \mathbf{u} + \nabla \cdot \mathbf{u} \mathbf{u} + \nabla p - \nu \nabla^2 \mathbf{u} - \mathbf{f}_L = \mathbf{r}^*(\mathbf{u}) + \nabla p \quad (2.12)$$

Ve vztahu (2.10) resp. (2.11) vyjadřuje $\mathbf{w}$ resp. q testovací funkci pro Navier-Stokesovy rovnice. Γ vyznačuje hranici výpočetní oblasti, která je dána normálou k ploše $\mathbf{n}$ a τ reprezentuje stabilizační koeficient, který se stanovuje jako konstanta v rámci jednotlivých výpočetních elementů. Obecně známá podmínka Babuška-Brezzi není v případě Galerkinovy aproximace splněna a tudíž stabilizace pomocí tlaku je jedna z možností, jak tento problém řešit. V případě, že stabilizační koeficient τ je roven nulové hodnotě, pak se rovnice (2.10) a (2.11) zjednodušuje na standardní Galerkinovu formulaci, která jak již bylo poznamenáno, ovšem není pro tento matematický model s kombinací typu elementů a báзовé funkce P1/P1 stabilní.

Časová diskretizace rovnice (2.10) resp. (2.11) je vyjádřena v následujících rovnicích (2.13) a (2.14). Konvektivní resp. difuzní člen N-S rovnice je časově diskretizován dle Adams-Bashforth schématu reprezentující druhý řád přesnosti.

$$\int_{\Omega} [\mathbf{w} \cdot (\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + \nabla \cdot \overline{\mathbf{u}\mathbf{u}} + \nabla \bar{p} - \overline{\mathbf{f}_L}) + (\nabla \mathbf{w})^T : \nu \nabla \bar{\mathbf{u}}] d\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{w} \cdot \nu \partial_n \bar{\mathbf{u}} d\Gamma \quad (2.13)$$

$$\int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} d\Omega + \sum_e \int_{\Omega_e} \tau \nabla q \cdot \bar{\mathbf{r}}(\mathbf{u}, p) d\Omega = 0 \quad (2.14)$$

Vztahy (2.13) a (2.14) popisují diskretizované Navier-Stokesovy rovnice, přičemž časový interval je dán (t_n, t_{n+1}) .

Další zápis rovnic je lepší z hlediska přehlednosti uvádět v maticové podobě. Nejprve je ale nutné definovat základní matice, resp. jejich výpočet. Přehled všech důležitých potřebných matic je uveden v následujících vztazích.

$$M_{ij} = (\varphi_i, \varphi_j) \rightarrow M$$

$$\mathbf{A}_{ij} = (\varphi_i, \nabla \varphi_j) \rightarrow \mathbf{A}$$

$$L_{ij} = (\nabla \varphi_i, \nabla \varphi_j) \rightarrow L$$

$$L_{ij}^{\Gamma} = (\varphi_i, -\partial_n \varphi_j) \rightarrow L^{\Gamma}$$

Matice M reprezentuje tzv. mass matrix, $\mathbf{A}$ je gradientní matice a L resp. L^{Γ} představuje Laplasovu matici pro interní resp. pro okrajový příspěvek. Za určitých okolností není nutné použít přímo hustě obsazenou mass matrix a místo toho použít tzv. lumped mass matrix, která je méně obsazená, a která je za určitých okolností dostačující (blíže GRESHO-CHAN [40]). Maticový zápis Navier-Stokesových rovnic může být ve tvaru:

$$M \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + \mathbf{A} \cdot \overline{\mathbf{u}\mathbf{u}} + \mathbf{A} \bar{p} + \nu L \bar{\mathbf{u}} - \overline{\mathbf{F}_L} = -\nu L^{\Gamma} \bar{\mathbf{u}} \quad (2.15)$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{u}^{n+1} + \tau(\mathbf{A}^T \cdot \overline{\mathbf{R}}^* + L\bar{p}) = 0 \quad (2.16)$$

Člen $\overline{\mathbf{R}}^*$ zahrnuje všechny členy N-S rovnic (2.1).

V případě, že daný problém byl časově i prostorově diskretizován, pak z výsledných rovnic je možné realizovat výpočet pomocí tzv. 'splitting schéma', kdy se výpočet tlakového pole a rychlostního pole rozloží do několika kroků.

V prvním kroku se odhadne velikost rychlostního pole na základě konvektivního a difuzního členu bez vlivu tlakového pole. Následně se zohlední předepsané okrajové podmínky. Tento krok nepředstavuje žádný problematický výpočet a jeho realizace je rychlá a jednoduchá a v podstatě se dá dosáhnout konvergence jednoduchou Jacobiho iterační metodou v rámci několika iteračních kroků. Ve druhé kroku se stanovuje tlakový potenciál a opět se zahrne vliv okrajových podmínek. Tato druhá fáze výpočtu představuje časově nejnáročnější část výpočtu celého matematického modelu. Tlakový potenciál je popsán typem Laplasovy rovnice, která se řeší iteračně pomocí metody MGM (Multilevel grid method) a nebo pomocí CG (Conjugated gradient). Nevýhodou MGM metody je nutnost existence několika úrovní různě hustých sítí, které jsou použity pro výpočet. V případě CG metody tak tomu být nemusí a navíc je tato iterační metoda mnohem efektivnější a snadno realizovatelná pro případ paralelního výpočtu. Ve třetím a zároveň posledním kroku se řeší skutečné hodnoty rychlostního pole i s vlivem tlakového členu Navier-Stokesovy rovnice. Takto stručně lze definovat výpočet jednoho časového kroku.

Stabilizace Navier-Stokesových rovnic představuje jednu ze stěžejních částí vývoje softwaru na bázi konečných prvků s lineární bázovou funkcí. V této kapitole tak byly velmi stručně definovány základy způsobu řešení Navier-Stokesových rovnic s ohledem na Brezzi-Babuškovu podmínku. Tato podmínka jasně dokazuje, že v případě standardní Galerkinovy metody by eventuální řešení Navier-Stokesových rovnic vedlo nevyhnutelně k nestabilitě výpočtu. Z tohoto důvodu byla definována metoda tlakové stabilizace. Ta výrazně změní diskretizované Navier-Stokesovy rovnice o nové členy.

Detailní studie PSPG resp. Petrov-Galerkinovy metody s tlakovou stabilizací není součástí této práce. PSPG metoda byla už v minulosti několikrát analyzována a detailně popsána a tudíž není nutné jí věnovat větší pozornost.

Více informací ohledně použité metody stabilizace a rovněž tak způsobu řešení diskretizovaného problému matematického modelu je možné nalézt v literatuře STILLER, FRAÑA, GRUNDMANN, FLADRICH a NAGEL [19] nebo FRAÑA, STILLER a GRUNDMANN [25].

V rámci řešení matematického modelu bylo čerpáno z následujícího stručného přehledu literatury. V případě starších publikací je možné zmínit publikace autora HUGHES [48]. Rozsáhlá práce na téma stabilizace Navier-Stokesových rovnic diskretizovaných elementy P1/P1 byla publikována CODINOU [41] resp. [42]. CODINA se ve své práci zabýval víceméně teoretickou stránkou metody PSPG resp. jejím stabilizačním vlivem na řešení N-S rovnic. Ve své publikaci také uvádí charakteristické výpočty proudění v dutině pomocí metody PSPG pro případ P1/P1 a porovnává tyto výsledky s výpočtem pro P2/P1. Dalším významným autorem je TEZDUYAR [46], který se zabývá metodou PSPG a hlavně metodikou výběru vhodného stabilizačního parametru. Ve zde prezentovaných rovnicích je stabilizační koeficient vyjádřen jako τ . Vhodný výběr konstanty τ byl učiněn na základě publikace TEZDUYAR [46].

Další dodatečné informace ohledně matematického zápisu diskretizovaných rovnic a rovněž tak možnosti výběru vhodného stabilizačního faktoru popisuje v literatuře KASHIYAMA [26], který mimo teorie publikoval současně také praktické použití tlakové stabilizační metody. Jeho numerické výsledky představují nestlačitelné proudění obtékaného válce pro hodnoty Reynoldsových čísel až $Re=10^5$. Jak je tedy patrné, metoda PSPG je již velmi dobře známá a její použití pro případ FEM v aplikaci nestlačitelného proudění je z výše uvedených důvodů opodstatněná.

Efektivnost samotné metody PSPG pro případ nestlačitelného viskozního proudění je možné nejlépe demonstrovat na jednoduchých výpočtech. V rámci vývoje softwaru budou později v kapitole 3 představeny jednoduché testovací úlohy, na kterých bude demonstrována nejen efektivnost stabilizace pro problém diskretizovaných Navier-Stokesových rovnic v nestlačitelných tekutinách, ale rovněž bude ukázána efektivnost paralelních výpočtů.

Kapitola 3

Výpočetní software

Tato kapitola si klade za úkol ve stručnosti seznámit s vývojem výpočetního programu určeného k modelování nestlačitelných viskózních tekutin. Řešení matematického modelu je založeno na metodě konečných prvků. Součástí této kapitoly je základní popis softwaru, motivace jeho vývoje a charakteristika jeho vlastností, které jsou identifikovány na základě jednoduchých testů uskutečněných v rámci verifikace výpočetního softwaru.

3.1 Historie vývoje programu

Počátek vývoje výpočetního programu určeného k modelování v mechanice tekutin se datuje na začátek roku 2002. Ovšem ještě předtím byly naprogramovány první jednodušší moduly umožňující práci s daty popisující výpočetní síť (publikováno FRAŇA [22]). Před rokem 2002 vznikla tzv. knihovna základních modulů MG library, která umožnila práci s daty resp. zajišťovala třídění dat dle elementů, výpočetních uzlů, okrajových podmínek atd. Tato knihovna vznikla na základě práce JÖRGA STILLERA (částečně publikovaná v [20]). Tím byl vytvořen základ pro budoucí výpočetní program pracující s touto základních platformou umožňující přípravu dat pro paralelní výpočet.

V roce 2002 začal vývoj výpočetního programu. V první fázi vznikl pouze obyčejný jednoduchý program pro výpočet Poissonovy rovnice v rámci výpočtu tlakového potenciálu včetně zohlednění okrajových podmínek. Tato část zahrnuje také tzv. tlakovou stabilizaci. V druhé polovině roku 2002 byl realizován první výpočet a zároveň kompletně dohotoven výpočetní kód pro případ řešení N-S rovnic. Tím bylo možné řešit jak rychlostní, tak i tlakové pole. Na začátku roku 2003 byla dohotovena

verze umožňující řešit daný problém paralelně. V tutéž dobu se uskutečnily první testy v rámci verifikace softwaru. Zhruba v polovině roku 2003 pak byly dodatečně implementovány další moduly umožňující zahrnout vliv účinku magnetického pole na tekutiny. Vznikly tak moduly definující rozložení tzv. Lorentzových sil ve výpočetním objemu. V druhé polovině téhož roku vznikly první výsledky v rámci laminárního proudění v uzavřené nádobě jako důsledek vlivu mag. rotujícího pole na vodivé tekutiny. Současně s tímto druhem výpočtu následovala i verifikace softwaru.

Většina výpočtů v oblasti turbulentního proudění započala zhruba ve druhé polovině roku 2003 a pokračuje dodnes. I nadále se připravují nové moduly umožňující zpracování výsledných dat v rámci výpočetního programu (statistická analýza, spektra, identifikace dominantních struktur, atd.). Výpočetní program umožňuje mimo jiné také řešit i jiné druhy magnetických polí např. uvážit statické magnetické pole nebo kombinovat účinky těchto dvou magnetických polí. V další části této práce budou postupně prezentovány výsledky verifikace softwaru, ale hlavně výsledky numerické analýzy magneticky vytvořeného proudění.

3.2 Motivace

Na počátku této práce byla základní otázka, zda-li vyvíjet vlastní výpočetní software nebo využít stávající komerční program k řešení daného problému. Odpověď na tuto otázku je nutno hledat v požadavcích, které byly od začátku kladeny na budoucí práci. Jejich stručný přehled je učiněn následně:

1. Numerické řešení transientního resp. turbulentního proudění vyvolané účinkem magnetického pole představuje typickou 3D úlohu proudění, které vyžaduje buď použití RANS modelů (postačí 2D řešení) a nebo DNS resp LES. Direct numerical simulation DNS, nebo-li přímý výpočet proudění představuje nejpresnější metodu řešení, která je však z pohledu realizace poměrně velmi časové i kapacitně náročná. To je dáno faktem, že proudění obsahuje velký rozsah časových a prostorových měřítek, které je nutné přímo počítat (DNS). Tato měřítkla kladou velké nároky na výpočetní síť, která tak musí být dostatečně jemná. Limitujícím faktorem je velikost Reynoldsova čísla, které mimo jiné říká, že čím vyšší je hodnota Reynoldsova čísla, tím dominantnější podíl na proudění hrají malé struktury. Tyto relativně malé struktury pak vyžadují velmi jemnou síť k jejich přímému výpočtu. Tím je dán vztah mezi velikostí Reynoldsova čísla a praktickým ještě smyslupným použitím DNS. Z tohoto závěru vyplývá praktický požadavek na výpočetní software. Jestliže se turbulentní proudění nižších hodnot Reynoldsových čísel bude řešit pomocí DNS, pak je

zapotřebí disponovat velmi jemnou sítí a to z praktického hlediska znamená velké množství elementů resp. výpočetních uzlů.

2. Výpočetní program musí být navržen tak, aby i do budoucna umožňoval řešit libovolný problém z hlediska tvaru výpočetní oblasti resp. složitost tvaru výpočetního prostoru by neměl být limitujícím faktorem. Tento fakt má významný vliv na způsob generování sítě resp. druhu sítě, která je použita k diskretizaci výpočetního prostoru.
3. Program by měl dále umožňovat snadnou změnu resp. možnost dodatečně přidávat libovolné moduly, které by umožňovaly rozšířit možnost aplikace softwaru. Tímto je možné např. v budoucnu zohlednit i další typy magnetických polí nebo eventuálně doplnit výpočetní kód o energetickou rovnici, která by následně umožnila řešit vzniklý problém jako neisotermní proudění.

Tyto popsané požadavky výrazně ovlivňují rozhodnutí v tom smyslu, že vývoj vlastního softwaru byl upřednostněn. Aby bylo možné vyhovět bodu 1. musí být kód navržen pro 3D proudění, který efektivně bude umožňovat výpočet na velmi jemné sítí. To v konečném důsledku ovlivní volbu iterační metody pro řešení N-S rovnice a také eventuální možnost paralelního výpočtu. Právě paralelní běh umožňuje efektivně využít velké výpočetní stanice, které nabízejí velký počet procesorů a jim adekvátní množství výpočetní paměti. Paralelní běh programu ale také zásadně komplikuje vývoj softwaru a to i z hlediska eventuální pozdější verifikace programu. V případě bodu 2. je řešením nestrukturovaná síť daná tetrahedrálními elementy. Právě tetrahedrální elementy umožňují generovat snadněji výpočetní síť i pro velmi složité tvary výpočetní oblasti. Třetí podmínka je snadno splnitelná v případě, že je k dispozici tzv. zdrojový kód programu, který umožňuje libovolný zásah do programu. Tyto zde zmíněné charakteristické body jsou zároveň motivací pro vlastnoručně navržený program, který by všechny uvedené požadavky splnil.

3.3 Paralelní výpočet

Numerický model byl implementován na tzv. knihovnu modulů MG library. MG knihovna obsahuje funkce a moduly, které umožňují práci se sítí. Tato knihovna vznikla pro překladač Fortran 90/95 a využívá MPI rozhraní pro komunikaci. Na tomto základě stojí vytvořený výpočetní kód využitelný pro aplikaci v oblasti nestlačitelného vazkého proudění. Než je vůbec možné paralelní výpočetní kód prakticky použít pro simulaci proudění, je nutné provést verifikaci programu.

Verifikace výpočetního programu se sestává ze dvou základních částí. V první části je testován výpočetní kód z hlediska paralelního běhu. Ve stručnosti vyjádřeno, zda-li výpočetní kód řeší daný problém nejen správně z hlediska výsledků, ale také dostatečně efektivně. Na tuto otázku odpoví tato kapitola. Druhá část verifikace se skládá z numerické simulace jednoduchých úloh a právě na základě konkrétních výsledků je možné usuzovat na schopnosti výpočetního programu. Této problematice se věnuje následující kapitola.

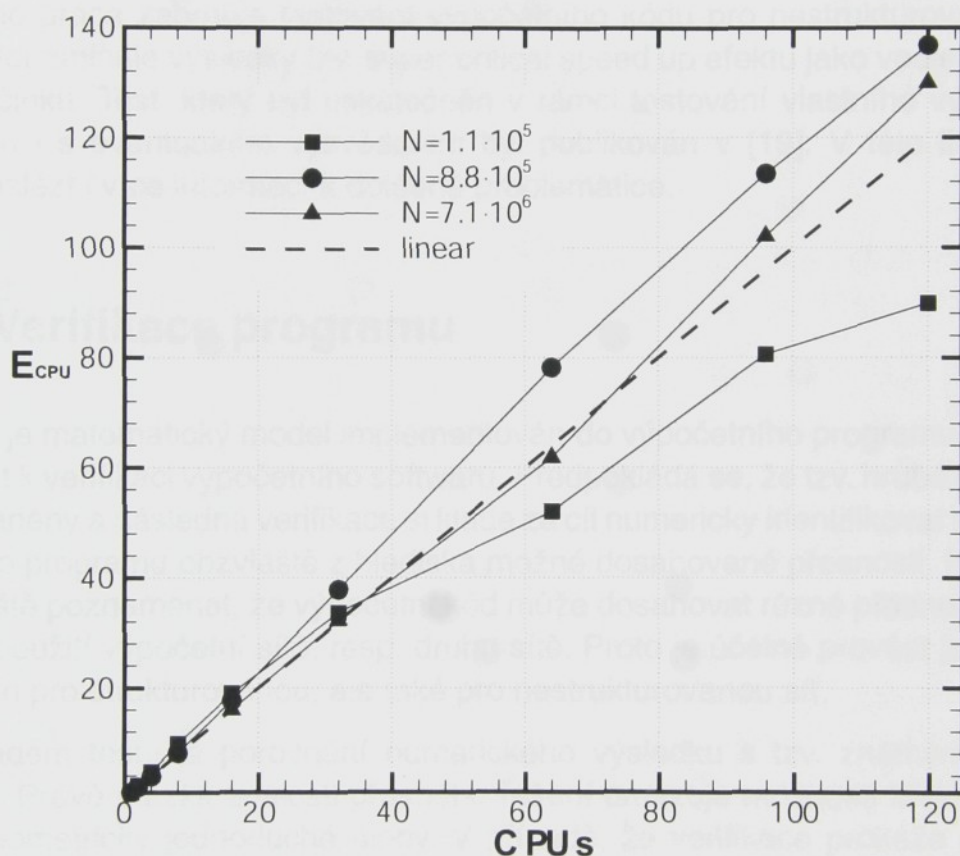


Obrázek 3.1: Barevné označení výpočetní oblasti jednotlivých procesorů. Celkový počet použitých procesorů je 32.

Na obrázku 3.1 je znázorněno rozdělení výpočetní sítě v rámci paralelního výpočtu. Každá barva tak znázorňuje výpočetní oblast pro jednotlivé procesory, které daný problém zpracovávají. Celkem je výpočetní oblast rozdělena do 32 procesorů.

$$\text{Efektivnost}(E_{\text{CPU}}) = \frac{\text{výpočetní čas jednoho procesoru}}{\text{celkový výpočetní čas} * \text{počet procesorů}} * \text{počet procesorů} \quad (3.1)$$

Víceprocesorový výpočet nemusí být vždy efektivnější než je výpočet realizovaný jedním procesorem. K tomuto účelu je možné uskutečnit jednoduchý test, kdy identický problém je řešen různým počtem procesorů. Pak je možné tento testovací výpočet vyhodnotit a získat tak informace ohledně paralelní efektivnosti (3.1) resp. účinnosti výpočtu viz. obr. 3.2.



Obrázek 3.2: Efektivnost paralelního výpočtu vyhodnocena pro různou hustotu výpočetní sítě.

Podobný test byl také uskutečněn pro jednoduchý výpočet magneticky indukovaného proudění v nekonečné geometrii (nekonečnou geometrii se samozřejmě myslí

konečný výpočetní prostor). Test byl uskutečněn pro 1, 4, 8, 16, 32, 64, 96, 120 procesorů. Obr. 3.2 znázorňuje efektivnost výpočtu pro případy různě husté sítě definované počtem výpočetních uzlů ($N=1 \times 10^5, 8.8 \times 10^5$ a 7.1×10^6). Na horizontálním ose je zaznamenán skutečný počet použitých procesorů a na vertikální ose je příslušná efektivnost paralelního výpočtu v závislosti na počtu procesorů. Na obr. 3.2 je možné pozorovat tzv. super speed up efekt. Tento efekt je do jisté míry výsledkem využití cache paměti. Teoreticky lze totiž identifikovat oblast, kdy vytvořený výpočetní software obsahuje určitou oblast počtu použitých procesorů, která poskytuje maximální výkon. Tento fakt není ve skutečnosti nikterak neobvyklý. Podobným problémem se zabývali např. BAGGAG, ATKINS a KEYES [3]. V této publikované práci je možné nalézt detailní pohledy na problematiku paralelního výpočtu versus cache efektu u paralelních výpočtů. Jinou, ale velmi obdobnou práci je publikace PARIKH [34]. Jeho práce zahrnuje testování výpočetního kódu pro nestrukturovanou síť. I tento autor zmiňuje výsledky tzv. super critical speed up efektu jako vedlejší produkt cache účinku. Test, který byl uskutečněn v rámci testování vlastního výpočetního programu i s eventuálním vysvětlením byl publikován v [19]. V této literatuře je možné nalézt i více informací k dotčené problematice.

3.4 Verifikace programu

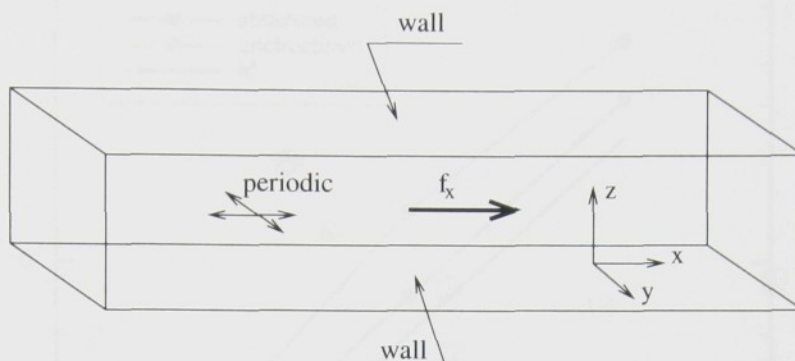
Poté, co je matematický model implementován do výpočetního programu, je možné přistoupit k verifikaci výpočetního softwaru. Předpokládá se, že tzv. hrubé chyby byly již odstraněny a následná verifikace si klade za cíl numericky identifikovat schopnosti vzniklého programu obzvláště z hlediska možné dosahované přesnosti. K testům je nutné ještě poznamenat, že výpočetní kód může dosahovat různé přesnosti v závislosti na použití výpočetní sítě, resp. druhu sítě. Proto je účelné provést jednoduchý test nejen pro strukturovanou, ale také pro nestrukturovanou síť.

Základem testu je porovnání numerického výsledku s tzv. známým přesným řešením. Právě otázka znalosti přesného řešení omezuje možnosti testu pouze na určité geometricky jednoduché úlohy. V případě, že verifikace prokáže očekávané vlastnosti výpočetního kódu, je možné výpočetní software použít na skutečný a většinou mnohem komplikovanější problém.

3.4.1 Poiseuillovo proudění

Jedním z uskutečněných testů je viskózní nestlačitelné proudění v kanálu. Kanál představuje velice jednoduchou geometrii danou dvěma stěnami (Dirichletova okra-

jová podmínka) a periodickou podmínkou. Hnací síla reprezentuje externí účinek síly f_x působící ve směru x . Geometrický tvar včetně vyznačeného účinku sil je znázorněna na obr. 3.3.



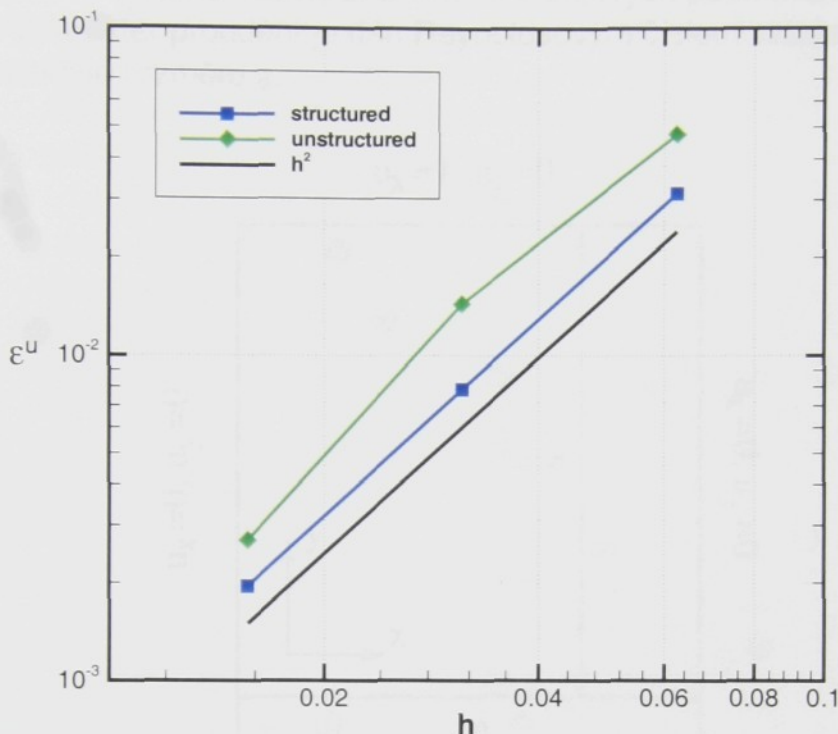
Obrázek 3.3: Znázornění podoby kanálu s vyznačeným účinkem externích sil vyvolávajících proudění tekutiny.

Výhodou tohoto testu je znalost přesných výsledků pro případ stacionárního, tak i nestacionárního proudění. Během výpočtu je stanovena tzv. relativní chyba, jejíž přesná definice je dána vztahem (3.2).

$$\varepsilon^u = \frac{\|u - u_h\|_{\infty, \Omega}^h}{\|u\|_{\infty, \Omega}^h} \quad (3.2)$$

Proměnná u a u_h představuje přesné resp. numericky řešené rychlostní pole. Výpočet probíhá tak dlouho, dokud se nedosáhne ustáleného stacionárního stavu. Tento stav lze velmi jednoduše identifikovat, neboť nedochází již ke změně relativní chyby, která se tak stává konstantní. Na grafu 5.7 v příloze je zobrazen časový vývoj relativní chyby řešení pro sítě S1, S2 až S3. Označení S zastupuje strukturovanou síť a číselné označení pak naznačuje, že čím větší hodnota, tím jemnější síť je použita k výpočtu. Jak je patrné z grafu 5.7, hodnota relativní chyby se snižuje až do určité hodnoty, kdy je dosaženo stacionárního výsledku a kdy již není možné relativní chybu dále redukovat. Tato hodnota relativní chyby je dána jemností výpočetní sítě. Čím jemnější síť je použita k výpočtu, tím menší je relativní chyba.

Na grafu 3.4 je znázorněna relativní chyba v závislosti na jemnosti použité výpočetní sítě. Jak je patrné z grafu 3.4, výpočet dosáhl přesnosti konvergence druhého řádu, což by odpovídalo použité metodě diskretizace. Jak je dále možné pozorovat,



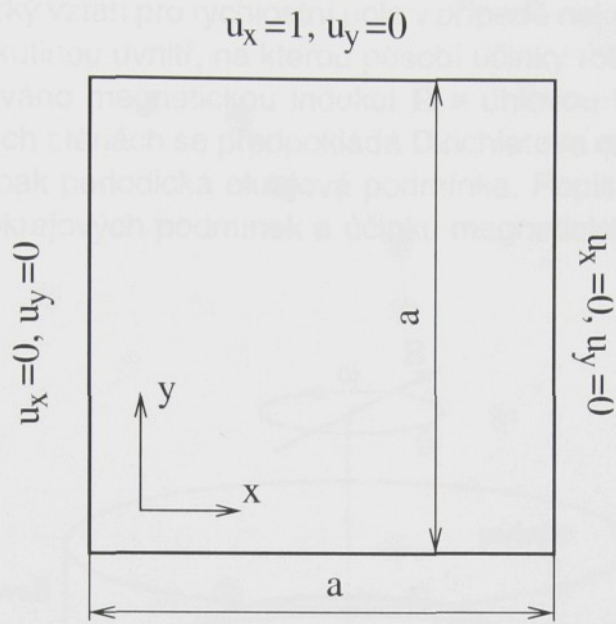
Obrázek 3.4: Vývoj relativní chyby v závislosti na jemnosti sítě pro případ stacionárního proudění v kanále.

přesnost konvergence je vždy zhruba stejná pro oba typy uvažovaných sítí, avšak mírně kolísání je možné zaznamenat pro případ nestrukturované sítě, které může být vysvětleno zhoršenou kvalitou sítě. Tento jednoduchý test prokázal, že výpočetní program umožňuje dosáhnout druhého řádu konvergence a to i pro nestrukturovanou síť. Více informací k dané problematice včetně popisu výpočetních sítí je možné nalézt v literatuře FRAŇA, STILLER a GRUNDMANN [25].

3.4.2 Proudění v dutině

Další testovacím příkladem, který byl použit pro verifikaci výpočetního programu je proudění v dutině. Toto proudění může být považováno buď jako jednoduché 2D proudění a nebo složitější 3D proudění. Z hlediska testování je výhodnější použít 2D úlohu, která je z hlediska výpočtu méně náročná a lépe tak vyhovuje testování. Geometrie je dána pravidelným čtyřhranem s konstantní délkou hrany a . Okrajové

podmínky jsou dány Dirichletovou podmínkou na všech obvodových stěnách. Obrazek řešeného problému včetně znázornění okrajových podmínek je možné nalézt na obr. 3.5 Charakter proudění je dán Reynoldsovým číslem vztaženým na velikost charakteristického rozměru a .

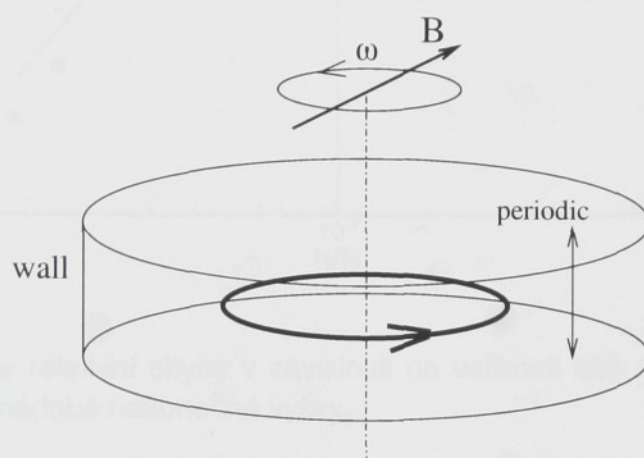


Obrázek 3.5: Schema výpočetní oblasti pro proudění v dutině, popis okrajových podmínek testovací úlohy (jednoduchá 2D úloha).

V případě tohoto testu není sice známé přesné řešení, ale naopak existují velmi přesné numerické výsledky, které jsou většinou získány pomocí numerických metod vyššího řádu. Jako příklad lze uvést práci autorů T.GHIA, U.GHIA a C.T.SHI [49], kteří prezentovali výsledky pro případ proudění v dutině definované $Re=1000$. V rámci testování programu bylo uskutečněno několik výpočtů pro různé hodnoty Reynoldsova čísla ($Re=10, 100$ a 1000). V příloze na obr. 5.11 je možné vidět tlakové a rychlostní pole pro případ Reynoldsova čísla 1000 . Obecně se dá posoudit, že isočáry tlakového pole jsou relativně hladké a totéž lze říci také o rychlostním poli. Dále je možné konstatovat, že v blízkosti okrajových stěn se neobjevuje žádná oscilace, která by jinak napovídala eventuálnímu nestabilnímu průběhu výpočtu. Více informací ohledně uskutečněných testů včetně kvalitativního zhodnocení je možné nalézt v publikace FRAŇA, STILLER a GRUNDMANN [25].

3.4.3 Rotující magnetické pole v nádobě nekonečné výšky

Poslední test, který zde bude uveden, je verifikace programu na základě známých výsledků v případě magneticky vyvolaného proudění v nádobě s nekonečnou výškou. Tento test je založen na studii, kterou uskutečnil MOFFATT [12]. MOFFATT jako první autor odvodil analytický vztah pro rychlostní pole v případě nekonečné výšky válcové nádoby s vodivou tekutinou uvnitř, na kterou působí účinky rotujícího magnetického pole, které je definováno magnetickou indukcí B a úhlovou frekvencí magnetického pole ω . Na obvodových stěnách se předpokládá Dirichletova okrajová podmínka, na koncových stěnách pak periodická okrajová podmínka. Popis geometrického tvaru včetně uspořádání okrajových podmínek a účinku magnetické pole je dána na obr. 3.6.

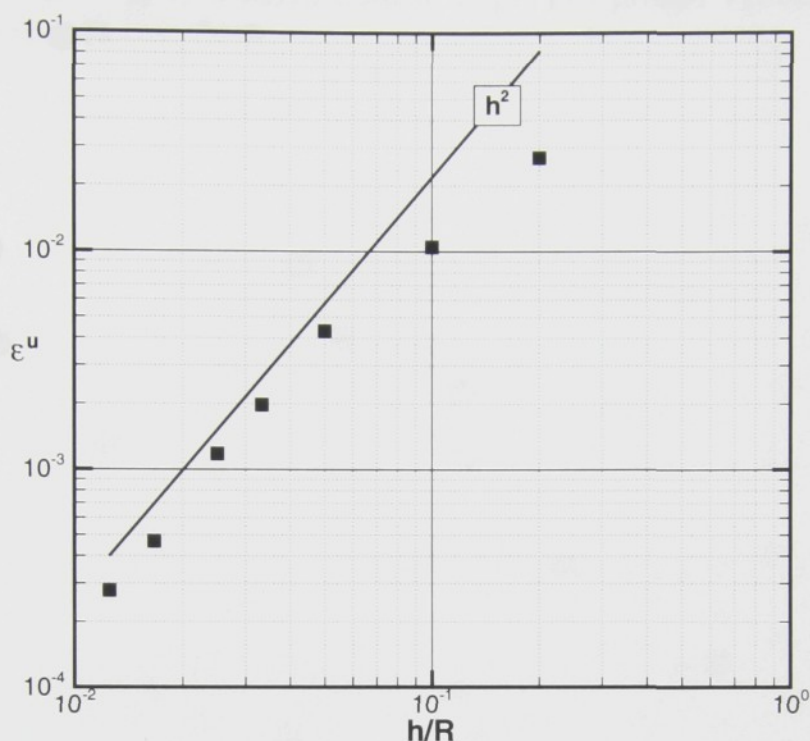


Obrázek 3.6: Znáznornění tvaru válcové nádoby nekonečné výšky spolu s vyznačeným působením rotujícího magnetického pole.

Tyto analytické výsledky jsou platné pouze pro případ Stokesova proudění (malé hodnoty Reynoldsových čísel). Jestliže je tudíž možné stanovit rychlostní profil pro libovolnou hodnotu Taylorova čísla, pak je možné porovnat výsledky numerického řešení s výsledky analytickými. Numerický test zahrnuje válcovou nádobu malé výšky s definovaným poloměrem R (resp. průměrem D).

Test je uskutečněn na stejné geometrii, ale na různě jemné rovnoměrné nestrukturované síti. Síť je dána průměrnou hodnotou velikosti hrany elementu h . Maximální chyba je vyjádřena jako maximální relativní chyba, jejíž definice je dána vztahem (3.2).

Na grafu 3.7 je znázorněn vývoj relativní chyby v závislosti na velikosti sítě. Plná čára znázorňuje přesnost druhého řádu, zatímco jednotlivé body pak příslušnou



Obrázek 3.7: Vývoje relativní chyby v závislosti na velikosti sítě pro případ laminárního proudění ve válcové nádobě nekonečné výšky.

hodnotu relativní chyby. Velikosti sítě jsou dány hodnotou h ($R/5, R/10, R/20, R/30, R/40, R/60$ a $R/80$). Jak je patrné z obr. 3.7, vývoj přesnosti koresponduje s přesností druhého řádu. Pouze v případě velmi hrubé sítě h ($R/5$ a $R/10$) je patrna odchylka od přesnosti druhého řádu. Tato odchylka je dána již příliš hrubou sítí, která nedokáže dobře vyplnit válcový tvar, resp. namísto kruhového tvaru je tak možné již pozorovat zřetelné hrany, které mění kruhový tvar na mnohostěn.

3.5 Shrnutí verifikace výpočetního programu

V této kapitole byl prezentován výběr uskutečněných testovacích případů. Výsledkem všech testů je závěr, že vzniklý program umožňuje dosáhnout přesnosti druhého řádu, a to i v případě nestrukturované sítě. Poněvadž výpočty jsou realizovány pomocí metody PSPG-FEM, je možné zároveň vyjádřit přesvědčení, že v důsledku

stabilizace programu nedošlo ke snížení dosahované přesnosti výpočtu. Tento závěr je důležitý z hlediska dalšího použití, např. pro případ výpočtu turbulentního proudění pomocí metody DNS.

Numerické výsledky

4.1 Úvod k realizaci numerických výpočtů

V této kapitole se pojednává o konkrétních numerických výpočtech získaných výpočtem v rámci vlastního výpočetního softwaru. Zde prezentované výsledky závěru jsou tedy výsledky studií magnetického vyvolaného proudění ve válcové nádobě. Konkrétně v této kapitole zahrnuje základní informace ohledně použitého výpočetního softwaru, požadavků na řešení problému a přehled všech získaných výsledků z numerického řešení.

V rámci fyzikálního modelu je možné celý problém řešit na dvou úrovních. Na první úrovni podřídké hodnoty magnetického Taylorova čísla zohledníme charakteristický čas toku a čas difúze. V případě zde řešovaného typu daného proudění je $\tau_{\text{diff}} \ll \tau_{\text{flow}}$, což znamená, že magnetického Taylorova čísla má zhruba hodnotu $200 < \tau_{\text{flow}} \ll 1000$. Tato hodnota je vlnitá komparací. Charakter proudění, výskyt magnetického vyvolaného proudění, lze tedy rozdělit na dvě oblasti: toroidální proudění a toroidální proudění. Charakter proudění je tedy rozdělujeme na dvě oblasti: toroidální proudění a toroidální proudění. Charakter proudění je tedy rozdělujeme na dvě oblasti: toroidální proudění a toroidální proudění.

V této kapitole se tedy ke konkrétním numerickým výsledkům. Je nutné poznamenat, že výpočty byly realizovány pomocí programu, který využívá kartézské souřadnice. Při řešení analyzovaného problému přichází k řešení válcové nádoby, je výpočet výsledků realizován výsledky výpočtu cylinrické souřadnice (r, θ, z) . Obdobným způsobem se lze dostat k numerickým výsledkům pro případ účinku magnetického pole. Výpočet je tedy realizován pomocí výpočtu charakter proudění: je rychlostní pole, které se v případě analyzovaných souřadnic skládá ze složek (u, v, w) . Rychlost u označuje rychlost v x -směru, rychlost v označuje rychlost v y -směru a rychlost w označuje rychlost v z -směru. Rychlost u označuje rychlost v x -směru, rychlost v označuje rychlost v y -směru a rychlost w označuje rychlost v z -směru. Rychlost u označuje rychlost v x -směru, rychlost v označuje rychlost v y -směru a rychlost w označuje rychlost v z -směru.

Kapitola 4

Numerické výsledky

4.1 Úvod k realizaci numerických výpočtů

V této kapitole se pojednává o konkrétních numerických výsledcích získaných výpočtem pomocí vlastního výpočetního softwaru. Zde prezentované výsledky zahrnují kompletní studii magneticky vyvolaného proudění ve válcové nádobě konečných rozměrů. Tato kapitola zahrnuje základní informace ohledně použité výpočetní sítě, technických požadavků na řešení problému a přehled všech získaných výsledků s popisem a diskuzí.

Z hlediska fyzikálního pohledu je možné celou problematiku rozdělit na dvě základní oblasti: oblast podkritické hodnoty magnetického Taylorova čísla a oblast nadkritické hodnoty. V případě zde definovaného tvaru daného poměrem $\frac{H}{D}=1.5$ je kritická hodnota magnetického Taylorova čísla dána zhruba hodnotou 4.25×10^4 (Gerbeth a Grants, privátní komunikace). Charakter proudění, výskyt nestabilit apod. jsou charakteristické rysy, dle kterých se tyto dvě oblasti rozdělují. Konkrétní charakter proudění lze nalézt později v rámci jednotlivých podkapitol.

Než se přejde ke konkrétním numerickým výsledkům, je nutné poznamenat, že výsledky byly realizovány pomocí programu, který využívá kartézské souřadnice, ale protože analyzovaný problém představuje čistě válcovou nádobu, je výhodnější využít k znázornění výsledků cylindrické souřadnice (φ, r, z) . Obdobným způsobem se již definoval matematický model pro případ účinku magnetického pole. Nejčastěji užívaným výsledkem popisující charakter proudění je rychlostní pole, které se v případě cylindrických souřadnic skládá ze složek (u_φ, u_r, u_z) . Rychlost u_φ označuje azimutální resp. úhlovou rychlost (v publikaci lze nalézt ještě označení tzv. hlavní rotační proudění), u_r je radiální složka rychlosti a u_z je vertikální rychlost, která je

identická hodnotě u_z v kartézských souřadnicích. Takovéto označení je použito při popisu výsledků.

4.1.1 Výpočetní stanice a způsob výpočtu

Kompletní numerická analýza je realizována na stanicích typu SGI O3800. K výpočtu byly k dispozici dvě stanice stejného typu s počtem 128 CPUs respektive 64 CPUs. Každý procesor má přidělenou paměť 512 MB resp. 1024 MB. Je-li tudíž výpočet realizován jako paralelní, pak množství RAM paměti, která je k dispozici, se lineárně sčítá. Na obr. 4.1 je fotografie výpočetních stanic, na kterých byly téměř všechny výpočty realizovány. Tyto výpočetní stanice jsou k dispozici na TU Dresden, ZHR. (Zentrum für Hochrechnenleistung).



Obrázek 4.1: Fotografie výpočetních stanic, na kterých se realizovaly výpočty. Obě stanice jsou typu SGI O3800 a poskytují 128 resp 64 procesorů k výpočtu. Zdroj TU DRESDEN, ZHR.

Stanice vybavené více procesory umožňují realizovat efektivně výpočet paralelně. Jak bude podrobně ukázáno později, je výpočetní síť relativně velmi jemná. Většinou se skládá z několika milionů výpočetních uzlů, které vytvářejí jak velké nároky na paměť stanice, tak i na výpočetní čas. Vezme-li se dále v úvahu, že v případě

nestacionárního proudění je nutné znát hodnoty časově průměrovaného rychlostního pole, resp. znát frekvenční nebo vlnové spektra atd., je nutné během výpočtu provádět celou řadu dalších operací. Tyto operace většinou nesouvisí se samotným výpočtem, ale jsou důležité pro vyhodnocení výsledků. Tak či onak, z praktického hlediska představují další úkony navýšení výpočetního času a současně se zvyšují paměťové nároky na výpočet.

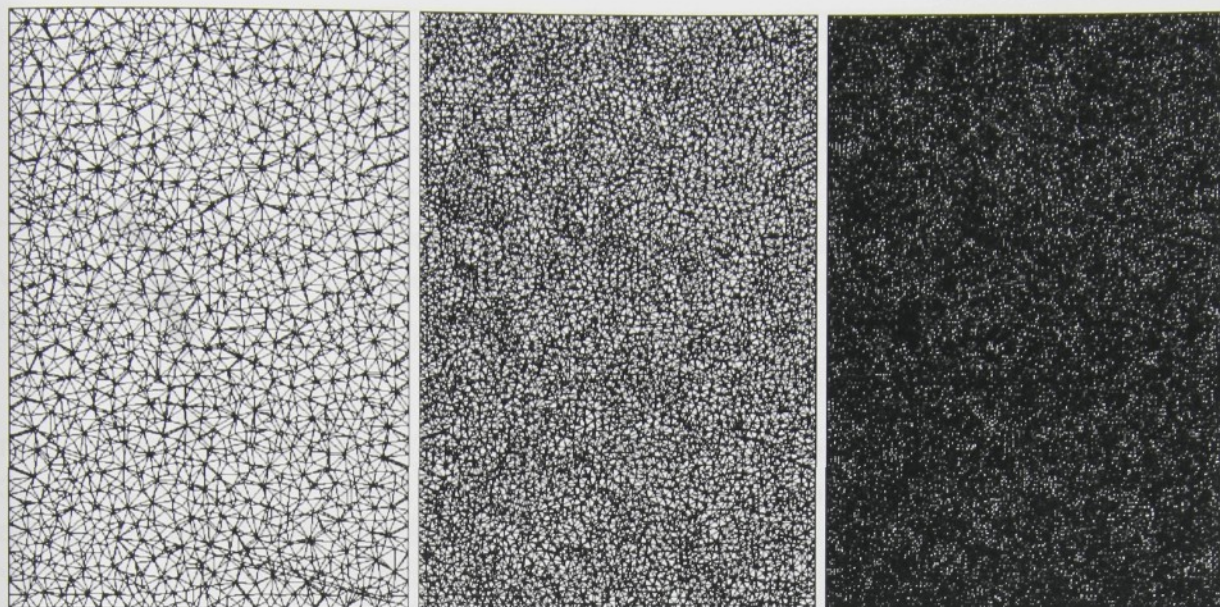
Odhadnutí délky výpočtu lze provést následovně. Je-li úloha realizována výpočtem 32 CPUs (případ většiny zde později zmíněných výpočtů), pak běžný výpočetní čas je dán zhruba 22 000 až 30 000 výpočetních hodin tzv. 'CPUs-hour'. Z reálného pohledu to představuje výpočet delší než 3 měsíce. Jak je tedy patrné, numerická studie transienčního proudění prostřednictvím DNS je poměrně velmi náročná a to i za předpokladu, že úloha je řešena paralelně.

4.2 Popis výpočetní sítě

Přesnost numerické analýzy je velmi výrazným způsobem ovlivněna výpočetní sítí resp. její hustotou a kvalitou. Kvalita generované sítě je kontrolována prostřednictvím síťového generátoru GAMBIT [2]. Protože další úrovně jemnějších sítí jsou vytvářeny již prostřednictvím vlastního softwaru (v rámci MG Library), tak je kontrola sítě proveda vždy po její změně. Výpočetní síť je tvořena tetrahedrálními elementy, které kontinuálně vyplňují celý diskretizovaný prostor a představují tak nestrukturovaný typ sítě se zhruba ekvidistantní velikostí hran elementů.

Požadavek na jemnost sítě je dán předpokládaným režimem proudění. Obecně platí, že čím menší je Reynoldsovo číslo, tím hrubší síť může být použita k výpočtu. Tento fakt vychází z předpokladu, že je-li proudění laminární (malé Re čísla), pak je charakter proudění velmi jednoduchý. V proudě se nevyskytují zpravidla žádné geometricky malé struktury. Ovšem, stane-li se proudění naopak turbulentní, pak se v proudě začnou objevovat malé struktury, jejíž matematické řešení předpokládá velmi jemnou síť (nezbytně nutné u DNS). Navíc, vznikající oscilace v proudě mohou zdestabilizovat realizovaný výpočet.

Z hlediska zde použitého softwaru aplikovaného na numerickou studii proudění je možné použít několik různě jemných sítí. Na obrázku 4.2 jsou dány 3 různé úrovně sítě. Jak může být patrné, jednotlivé sítě se odlišují pouze svoji hustotou. Existuje-li předpoklad, že konečné proudění bude laminární, pak k výpočtu bude postačovat pravděpodobně pouze 1. úroveň. Nesmí se však opomenout fakt, že jemnost sítě také ovlivní přesnost řešení. Z čistě praktického hlediska je výhodné konečný výsle-



(a)

(b)

(c)

Obrázek 4.2: Znázornění horizontálního řezu výpočetní sítě. (a) první úroveň sítě (b) druhá úroveň sítě a (c) třetí úroveň sítě používaná pro konečné řešení úlohy.

dek dořešit na jemnější síti. Zcela odlišný případ nastává, když konečné proudění bude turbulentní. Pak je nutné použít 3. úroveň sítě.

Pro doplnění je nutné poznamenat, že výběr sítě neovlivňuje jenom rychlost realizovaného výpočtu, ale má také zásadní vliv na použitou iterační metodu. Požadavky na jemnost sítě s ohledem na konkrétní případy numerické analýzy jsou zmíněny později v rámci prezentace výsledků v oblasti nadkritického proudění.

Ovšem ještě pár poznámek ke generaci sítě. Výpočetní sítě jsou tvořeny následujícími po sobě jdoucími kroky. Nejprve se první úroveň sítě vytvoří pomocí síťového generátoru např. pomocí GAMBITU [2], který je dostatečně známý uživatelům programu FLUENT. Následné jemnější úrovně jsou vytvořeny již pomocí výpočetního softwaru. Algoritmus takto vytvořených dalších úrovní je velmi jednoduchý, neboť předpokládá, že hrana elementu je rozdělena na dvě stejně dlouhé části. Tím vzniká nový uzlový bod, který dále vytváří nový element. Zjemnění každé úrovně sítě je dáno zpravidla faktorem 8, tzn. že je-li výchozí síť tvořena např. 10 elementy, pak druhá úroveň sítě obsahuje již zhruba 80 elementů atd.

Všechny dále níže publikované výsledky jsou realizovány stejnou výpočetní sítí. Mohou se tedy lišit maximálně jemností udanou použitou úrovní. Tabulka 4.1 ukazuje přehled sítí včetně jejich charakteristických údajů tj. počet výpočetních uzlů

č. úrovně	počet uzlů	počet elementů
1	40000	150000
2	320000	900000
3	1800000	8000000

Tabulka 4.1: Základní charakteristika výpočetních sítí použitých pro výpočet magneticky vyvolaného proudění v nádobě konečných rozměrů. Sít' je definována počtem elementů a nebo výpočetních uzlů.

resp. počet tetrahedralních elementů v závislosti na úrovni sítě. Jak je patrné, síť 3. úrovně je již velmi jemná a počet výpočetních uzlů přesahuje 1 milion uzlů. Tato síť pak představuje velké nároky na výpočet a to jak z hlediska času, tak i kapacity výpočetní stanice. Za poznámku ještě stojí uvést, že výpočetní síť musí splňovat také kvalitativní podmínky. Poněvadž každá úroveň sítě je vytvořena globálně stejným algoritmem, pak kvalita sítě všech úrovní větších než 1 je do značné míry dána právě výchozí sítí označenou jako první úroveň. Je-li vesměs kvalita sítě první úrovně vyhovující, pak i kvalita z ní vytvořených sítí je rovněž vyhovující.

4.3 Podkritická oblast magnetického Taylorova čísla

Laminární proudění reprezentuje podkritický režim proudění definovaný hodnotou magnetického Taylorova čísla, která je menší než je její kritická hodnota. Již delší dobu jsou známy teoretické výsledky pro tento režim proudění, které byly většinou potvrzeny také experimentálně. Praktický význam této podkapitoly je v tom, že poskytuje 3D přehled proudění ve válcové nádobě i v oblasti jednoduchého laminárního proudění. Takto realizovanou studii je možné pak konfrontovat s obecně známými výsledky a dosažené výsledky tak použít přímo pro verifikaci výsledků. Poněvadž transienční a hlavně turbulentní proudění již není možné tak snadno porovnat s experimenty (možné, ale velmi složité z hlediska realizace) a nebo s numerickými výsledky jiných autorů (doposud nepublikováno), je verifikace v laminárním režimu jedinou možností, jak prokázat spávnost výpočtů. Je sice pravda, že částečná verifikace byla již uskutečněna v rámci hrubé prezentace samotného výpočetního softwaru, ale všechny tehdy zmíněné testy nezohledňovaly tzv. rozložení Lorentzových sil pro případ konečné výšky nádoby. Test v oblasti laminárního režimu magnetohydrodynamického proudění je tak kompletním testem celého definovaného matematického modelu včetně jeho implementace do výpočetního softwaru. Jak kvalitativně splňuje požadavky výpočetní program lze usoudit v následující podkapitole, a to především v kapitole 5 'verifikace výsledků'.

4.3.1 Rychlostní pole

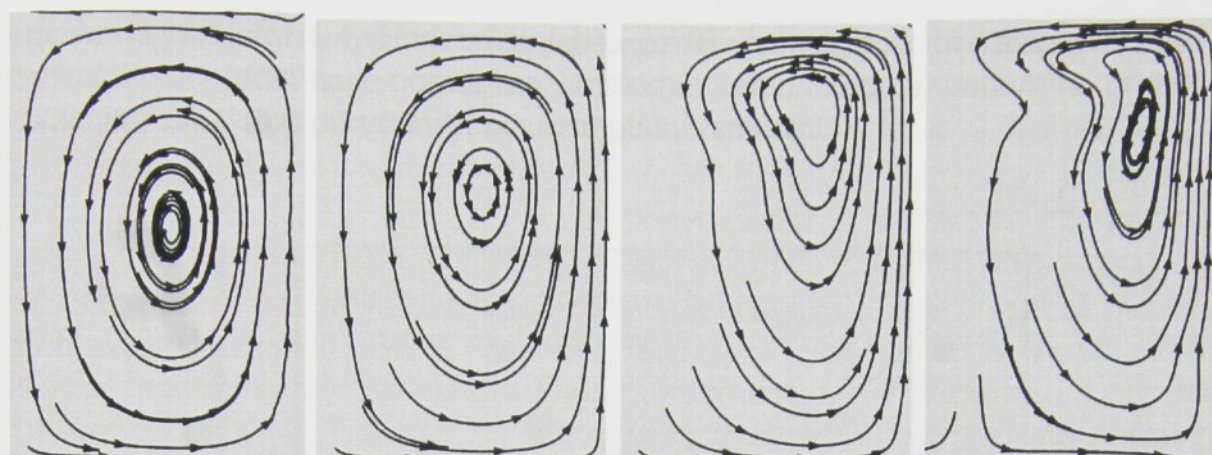
Jeden z prvních nejdůležitějších výsledků laminárního proudění ve válcové nádobě je ustálené rychlostní pole resp. hlavní rotační azimutální proudění. V příloze je možné nalézt azimutální rychlost v řezu válcové nádoby pro případy magnetických Taylorových čísel od $Ta_m=1$ až po $Ta_m=1000$ viz. obr. 5.12 v příloze. Pro velmi malé hodnoty Taylorových čísel je rozložení azimutální rychlosti velmi podobné, avšak již kolem hodnoty $Ta_m=1000$ je možné si všimnout výrazného posunu hodnot azimutální rychlosti směrem k obvodovým stranám válcové nádoby. Později bude ukázáno, že maximální hodnoty azimutální rychlosti rostou lineárně s hodnotou magnetického Taylorova čísla, ovšem pouze v případě, jestliže magnetické Taylorovo číslo je menší než hodnota 1000 (mluví se o tzv. lineárním laminárním režimu proudění). Již kolem $Ta_m=1000$ je možné vidět určitou odchylku od lineárního vývoje viz. obr. 5.4. Tento fakt koresponduje s vývojem azimutální rychlosti, kdy obrázek 5.12 zřetelně naznačuje rozdíly azimutální rychlosti pro případ $Ta_m=1000$. Laminární proudění ve válcové nádobě vybuzeé účinkem rotujícího magnetického pole je možné použít převážně pro verifikaci softwaru a výsledků. Tato oblast proudění byla již doposud publikována např. autory GELFGAT a PRIEDE [15] a později jsou jejich výsledky použity k porovnání s výsledky 3D numerické analýzy.

4.3.2 Vliv Taylorova čísla na sekundární proudění

Sekundární proudění je z pohledu praktického využití např. v oblasti krystalizace materiálu jeden z nejsledovanějších výsledků numerické analýzy. Pouze na okraj je možné uvést, že v oblasti krystalizace materiálu resp. metalurgických procesů, je účinek sekundárního pole ve větší části laminárního proudění příznivý na krystalizační procesy. Výjimku snad představuje stav, kdy hodnota Taylorova čísla, která jinak také vyjadřuje intenzitu magnetické indukce, se přiblíží ke kritickému magnetickému Taylorovu číslu. Pak se objevuje v proudění oscilace. Její negativní vlivy již byly zmíněny v úvodu této práce a v teoretickém pojednání, a proto není nutné se o nich dále zmiňovat.

Přehled vývoje sekundárního proudění znázorněného pomocí proudové funkce a vektorového znázornění je možné vidět na obr. 4.3. Pro orientaci je nutné uvést, že hodnota příslušného magnetického Taylorova čísla je vztažena ke kritické hodnotě magnetického Taylorova čísla. Hodnoty uvedené v závorce pak označují absolutní hodnotu magnetického Taylorova čísla dle definice v (1.4).

Z obrázků 4.3 je patrné především posun středu sekundárního proudění směrem k rohu válcové nádoby. V případě, že střed sekundárního proudění je umístěn v



$$Ta_m = 2.4 \cdot 10^{-4} Ta_m^{cr} \\ (10)$$

$$Ta_m = 1.2 \cdot 10^{-2} Ta_m^{cr} \\ (500)$$

$$Ta_m = 2.4 \cdot 10^{-2} Ta_m^{cr} \\ (1000)$$

$$Ta_m = 9.5 \cdot 10^{-1} Ta_m^{cr} \\ (40000)$$

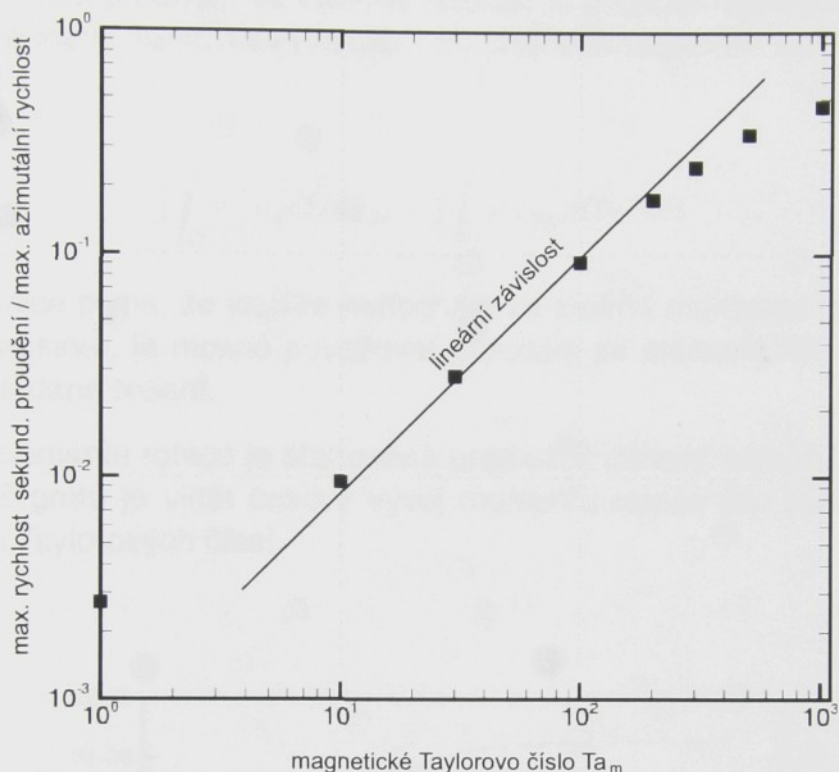
Obrázek 4.3: Vývoj sekundárního proudění v závislosti na velikosti magnetického Taylorova čísla pro oblast laminárního proudění.

rohu nádoby, pak tento jev vykazuje zpravidla již nadkritické proudění. Jak se postupně přiblíží těsně ke kritické hranici magnetického Taylorova čísla, dochází ke vzniku nestabilit, o kterých bude pojednáno později v rámci prezentace výsledků v režimu proudění nadkritického mag. Taylorova čísla. Jak je možné dále pozorovat, účinek sekundárního pole není tak intenzivní uprostřed nádoby v porovnání k nižšímu Taylorovu číslu a navíc je možné pozorovat začínající nestacionární jevy v proudění. Tento a další režimy proudění byly již detailně studovány za předpokladu symetrického proudění autory GELFGAT a PRIDE [15]. Poslední obrázek z 4.3 reprezentuje případ magnetického Taylorova čísla $Ta_m = 40000$ neboli $9.5 \times 10^{-1} Ta_m^{cr}$, tedy zhruba 5 procent pod kritickou hodnotou. V tomto případě je možné dosáhnout ještě stacionárního výsledku a vizualizace pak následně prokazuje symetrické rozložení sekundárního proudění bez vlivu nestabilit typických pro nadkritické proudění. O vlivu nadkritického proudění na vytvoření sekundárního proudění je pojednáno později.

4.3.3 Charakteristické vlastnosti proudění

Aby bylo možné snadněji porovnat a zhodnotit proudění, je účelné vyjádřit výsledky pomocí čísel než grafického znázornění. Jednou ze zajímavých hodnot je poměr mezi maximální azimutální rychlostí primárního proudu a sekundárního proudění. Přehled těchto hodnot ve vztahu k magnetickému Taylorovu číslu je znázorněn

v grafu na obrázku 4.4. Horizontální osa označuje magnetické Taylorovo číslo a vertikální osa představuje poměr mezi maximální hodnotou sekundárního proudění a hlavního rotujícího proudění resp. azimutální rychlosti.



Obrázek 4.4: Změna poměru maximálních hodnot rychlosti sekundárního proudění a azimutální rychlosti v závislosti na magnetickém Taylorovu číslu pro případ laminárního (Stokesova) proudění.

V grafu 4.4 si je možné povšimnout, že poměr mezi rychlostmi roste lineárně téměř až do hodnoty Taylorova čísla $Ta_m=1000$. Z předchozích publikací je známo, že obecně předpokládaná linearita mezi maximální hodnotou rychlosti a magnetického Taylorova čísla je platná v oblasti magnetických čísel menších jak $Ta_m=1000$. Z toho důvodu je možné pozorovat, že v oblasti magnetického Taylorova čísla $Ta_m=1000$ již lineární nárůst není dodržen. Jak dále bude ukázáno, v oblasti vyšších hodnot magnetických Taylorových čísel je možné dosáhnout poměru mezi maximální meridiální a azimutální rychlostí kolem hodnot 0.44. Tento poměr se už dále nezvyšuje a zůstává konstantní. Tedy lineární nárůst intenzity sekundárního proudění s intenzitou azimutální rychlosti je typický pro laminární proudění v oblastech hodnot Taylorových čísel nižších než hodnota $Ta_m=1000$.

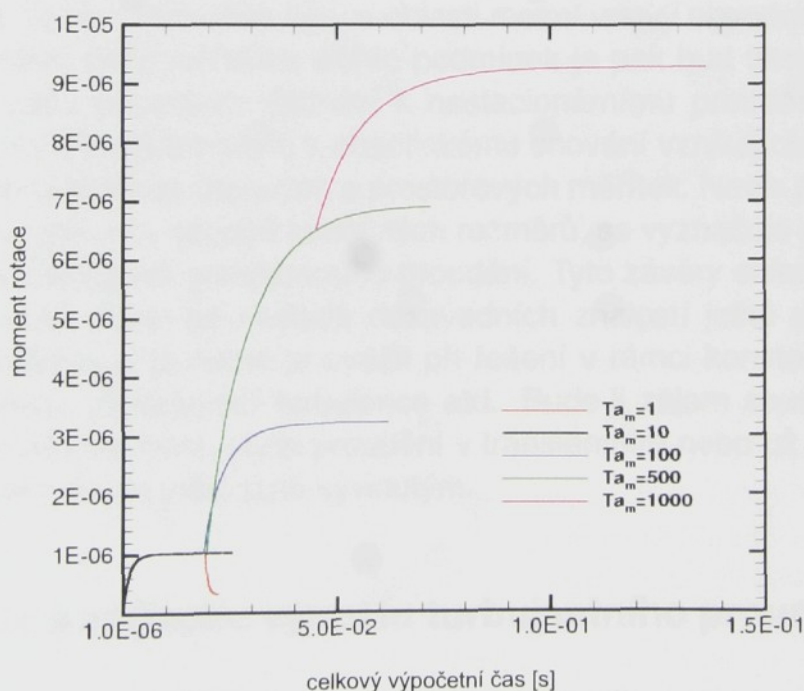
4.3.4 Stacionární vyvinuté proudění v laminárním režimu

V případě, že daný problém je řešen jako nestacionární případ, je nutné definovat stav, který bude možné považovat za již konečný výsledek. Tento stav je v případě laminárního režimu proudění ve válcové nádobě konečných rozměrů tzv. vyvinuté stacionární proudění. Tento stav proudění lze charakterizovat dle definice momentu rotace.

$$\left[\int_{\Omega} r \cdot u_{\varphi} d\Omega \right]_{t-\Delta t} - \left[\int_{\Omega} r \cdot u_{\varphi} d\Omega \right]_t = 0 \quad (4.1)$$

Z této definice plyne, že jestliže nedochází ke změně momentu rotace v celém výpočetním prostoru, je možné považovat proudění za stacionárně vyvinuté resp. za konečné hledané řešení.

Hodnota momentu rotace je stanovena pro každý časový krok a je znázorněna v grafu 4.5. Z grafu je vidět časový vývoj momentu rotace pro vybrané hodnoty magnetických Taylorových čísel.



Obrázek 4.5: Časový vývoj momentu rotace pro případy výpočtů uskutečněných v podkritické oblasti Taylorových čísel.

Na grafu 4.5 je znázorněn vývoj momentu rotace v závislosti na době řešení pro tzv. podkritickou oblast magnetického Taylorova čísla. Z grafu 4.5 je možné zřetelně vidět, že výpočet byl nejprve inicializován z nulového rychlostního pole (počáteční podmínky) definovaného na celou výpočetní oblast. Nejprve se řeší jeden případ hodnoty $Ta_m=10$ a poté, co se získají hodnoty rychlostního pole a tlakového pole v ustáleném stacionárním stavu, je možné použít tyto výsledky k inicializaci dalších výpočtů. Tímto způsobem je možné snížit časovou náročnost na výpočet, neboť tzv. vývojová fáze proudění je řešena pouze v jednom případě.

Tento způsob výpočtu se osvědčil v případě podkritické oblasti. Jestliže proudění se stane transientní nebo turbulentní, je případ řešen tentokrát jinak. V takovémto případě se každý případ startuje z původní nulové hodnoty rychlostního a tlakového pole.

4.4 Nadkritická oblast magnetického Taylorova čísla

Z doposud známých poznatků ohledně účinku magnetického rotujícího pole je potvrzeno, že překročí-li magnetické Taylorovo číslo určitou hranici, tzv. kritickou hodnotu (pro náš případ $H/D = 1.5$ je kritická hodnota $Ta_m = 4.25 \times 10^4$) objeví se v proudění nestability Taylor-Görtlerova typu v oblasti mezní vrstvy obvodové stěny válce. Vznikající proudění definované za těchto podmínek je pak buď transientní a nebo turbulentní. V obou případech dochází k nestacionárnímu proudění a v případě turbulentního proudění ještě navíc k chaotickému chování vznikajících struktur, definované velkým rozsahem časových a prostorových měřítek. Navíc proudění, které je indukováno ve válcové nádobě konečných rozměrů, se vyznačuje silným zakřivením proudnic a s existencí sekundárního proudění. Tyto závěry ohledně charakteru proudění je možné učinit na základě dosavadních znalostí ještě před samotnou numerickou analýzou a je nutné je uvážit při řešení v rámci konstrukce sítě, způsobu výpočtu resp. modelování turbulence atd.. Bude-li zájem soustředěn hlavně na menší Reynoldsova čísla, bude proudění v transientním nebo už v turbulentním režimu, který ale nebude ještě plně vyvinutým.

4.4.1 Úvaha o způsobu výpočtu turbulentního proudění

Studie turbulentního proudění je možné realizovat několika metodami. Každá z nich nabízí výhody a nevýhody. V turbulentním proudění se vyskytuje velký rozsah délkových a časových měřítek, které se mohou přímo počítat DNS (Direct Numerical Simulation). Výhodou je obecná platnost, možnost počítat i vliv zakřiveného proudění

atd. Nevýhodou je požadavek na relativně jemnou síť. Další možností je výpočet pouze některých větších měřítek a ty ostatní modelovat LES (Large Eddy Simulation). Tímto způsobem se sníží nároky na výpočetní síť ve smyslu její hustoty, ale v případě existence skutečně velkého počtu malých měřítek je tato metoda do jisté míry nepřesná vzhledem ke slabosti tzv. sub-grid modelu. Třetí možností je modelovat tedy všechny měřítka turbulence (RANS - Reynolds averaged Navier-Stokes), což znamená z praktického hlediska použití relativně hrubé sítě, avšak nevýhodou je většinou omezení platností těchto modelů.

K výběru konkrétního modelu je třeba uvést mnohem více informací. Nejprve je nutné poznamenat, že některé analyzované případy se vyznačují tím, že z hlediska magnetického Taylorova čísla leží v blízkosti kritické hodnoty. To by znamenalo, že takovéto proudění bude s největší pravděpodobností transientní. Poněvadž většina RANS modelů je postavena na teorii již plně vyvinutého turbulentního modelu, znamená to, že použití RANS modelů pro právě tuto specifickou oblast proudění není dost dobře možné. Jestliže je tudíž transientní proudění součástí numerické studie, pak není možné využít RANS modely. Tím se celý problém redukuje na výběr buď DNS a nebo LES model. Obě metody ovšem reprezentují většinou již poměrně náročné výpočty. Vzhledem k tomu, že z praktického hlediska je LES náročnější z pohledu přípravy, je výhodné nejprve celý problém řešit pomocí DNS. Tímto způsobem se získají přesné výsledky ohledně proudění, přičemž charakter proudění rozhodne o dalším postupu.

Tak se numerická studie nadkritického Taylorova čísla redukuje na DNS studii transientního a eventuálně turbulentního proudění. Velkou neznámou v tomto případě je otázka velikosti sítě potřebné pro úspěšné řešení všech eventuálně vznikajících struktur.

Jestliže bude proudění považováno za již vznikající turbulentní proudění, budou mít vznikající struktury neperiodický charakter a v proudu budou vznikat různé veliká časová a délková měřítka. Zatímco velká délková měřítka nepředstavují žádný problém z hlediska sítě, bude existence malých měřítek určitou komplikací ve smyslu požadavku na jemnost sítě. Matematický model totiž nezná chování těchto malých měřítek a tudíž je nemůže modelovat, nýbrž je musí přímo vypočítat. Použitá výpočetní síť tak musí být dostatečně jemná. Z praktického hlediska bývá problém spíše v řešení délkových měřítek, než v oblasti časových měřítek, neboť výběr časového kroku při výpočtu je limitován samotným použitým softwarem z hlediska jeho stabilního běhu (explicitní schéma). Avšak při generování sítě se musí zohlednit eventuální délková měřítka, která se mohou objevit v turbulentním proudění. Odhad požadované min. velikosti sítě resp. vzdálenosti mezi dvěma výpočetními uzly může být stanoven na základě vztahu (4.2), který je možné nalézt v literatuře LAUNDER [29].

$$\frac{\eta}{L} \sim Re^{\frac{3}{4}} \quad (4.2)$$

Jak je vidět ve vztahu (4.2), jestliže Re je dáno (1.1) a L označuje charakteristické délkové měřítko, pak Kolgomorovské mikroměřítko η lze odhadnout a použít jako parametr definující minimální vzdálenost mezi dvěma sousedícími uzlovými body. Ve skutečnosti by měla být tato vzdálenost mezi vypočetními uzly ještě menší než je samotné Kolgomorovské měřítko. Tento výše uvedený vztah se použije pro velmi hrubý odhad velikosti sítě, neboť jeho platnost je do značné míry omezena na tzv. isotropní turbulenci.

Jinou možností, jak stanovit, zda-li síť je dostatečně jemná pro výpočet, je stanovení energetických spekter. Tato metoda je považována za skutečnou odpověď na otázku dostatečné jemnosti sítě, avšak její nevýhodou je, že energetické spektrum se získá na základě již uskutečněného výpočtu.

Na obr. 4.16 je možné pozorovat energetické spektrum. Jestliže hodnota energie u největšího vlnového čísla se bude považovat za tzv. šum, pak je možné nalézt v energetickém spektru takové vlnové číslo, u kterého začne narůstat hodnota energie. Tím se zároveň prokáže, že energetické spektrum je definováno pro všechny existující velikosti hodnot vlnového čísla a tudíž, že použitá výpočetní síť je dostatečně jemná na uskutečněnou numerickou analýzu. Na okraj je nutné poznamenat, že v literatuře je možné nalézt také informace ohledně volby jemnosti sítě s ohledem na vznik nestabilit. MÖSSNER a GERBETH [43] popsali ve své publikaci, že výpočetní síť musí mít alespoň 50 uzlových bodů na poloměru válcové nádoby, aby bylo možné vůbec numericky detekovat nestability. Na tyto praktické závěry je brán zřetel a tudíž použitá výpočetní síť splňuje všechny zde uvedené limitující faktory dané DNS metodou a charakterem proudění.

Následující studované modely mohou být identifikovány určitou hodnotou magnetického Taylorova čísla. Poněvadž transientní a turbulentní proudění je vždy již v oblasti nadkritického Taylorova čísla, je výhodnější udávat hodnotu Taylorova čísla jako násobek kritické hodnoty resp., je-li magnetické Taylorovo číslo např. $Ta_m = 1 \times 10^5$, pak připadá v úvahu také označení $Ta_m = 2.4Ta_m^{cr}$. Kritická hodnota je považována za referenční hodnotu, která je pro všechny zde publikované výsledky stálé stejná a její přesná hodnota byla již už uvedena dříve.

4.4.2 Okamžité rychlostní pole

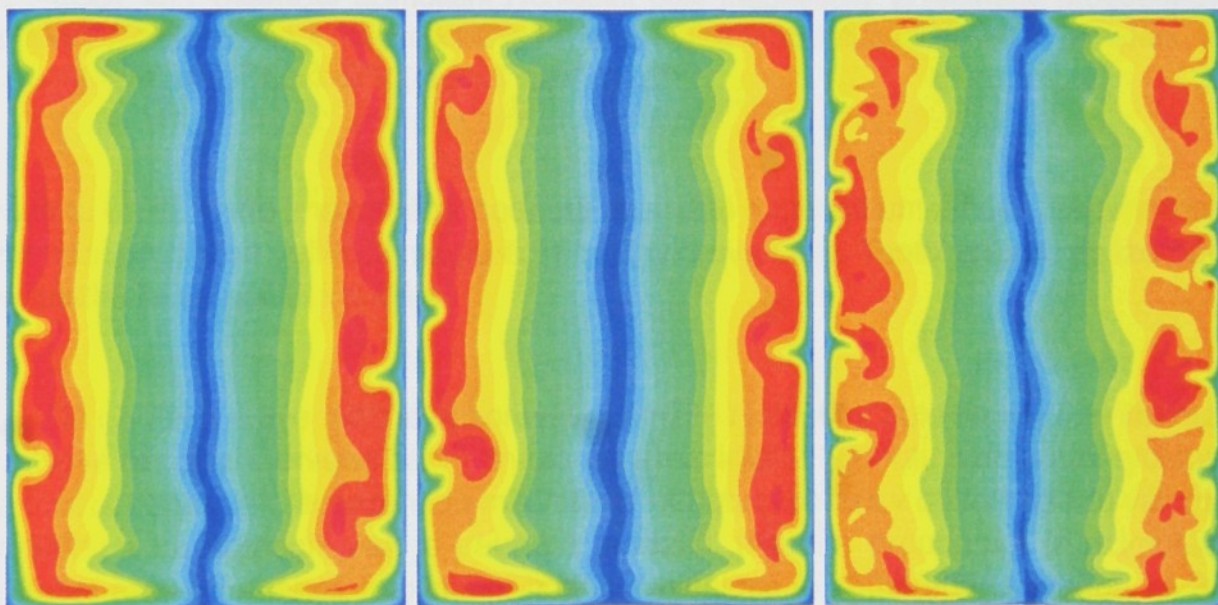
Prvním významný výsledkem získaným z numerické analýzy je okamžité rychlostní pole, které je možné vidět na obrázku 4.6 pro různé hodnoty magnetického Taylorova

čísla, konkrétně $1.9Ta_m^{cr}$, $2.4Ta_m^{cr}$ a $7.1Ta_m^{cr}$. Jak je patrné, rychlostní pole je do jisté míry ovlivněno magnetickým Taylorovým číslem.

$$u^* = \frac{u}{u_{ref}} = \frac{uR}{\nu} \quad (4.3)$$

Aby bylo možné kvalitativně porovnat výsledky navzájem, je skutečná hodnota rychlosti vztažena k referenční hodnotě dle vztahu (4.3). Tento způsob výběru referenční hodnoty je pro problematiku rotujícího magnetického pole ve válcové nádobě zcela obvyklý a poprvé byl definován DAVIDSONEM [38].

$$u_{ref}^* = \frac{u^*}{|u^*|_{max}} \quad (4.4)$$



(a)

(b)

(c)

Obrázek 4.6: Okamžitá azimutální rychlostní pole magneticky vyvolaného proudění pro případy různých hodnot magnetického Taylorova čísla v oblasti nadkritického proudění. (a) $Ta_m = 1.9Ta_m^{cr}$ (b) $Ta_m = 2.4Ta_m^{cr}$ a (c) $Ta_m = 7.1Ta_m^{cr}$

Volba referenční hodnoty zahrnuje vliv velikosti výpočetní oblasti a materiálu tekutiny. Okamžité rychlostní pole je pak znázorněno jako okamžité rychlostní pole vztažené na referenční hodnotu rychlosti a ještě jednou vztažené na $\max |u^*|$ dle



(a)

(b)

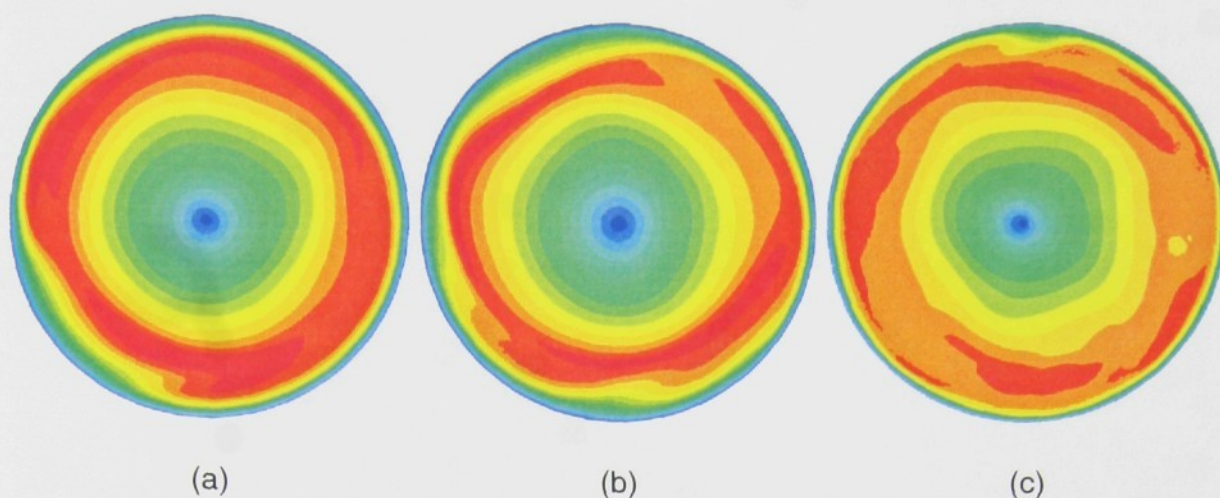
(c)

Obrázek 4.7: Okamžité azimutální rychlostní pole magneticky vyvolaného proudění pro případy různých hodnot magnetického Taylorova čísla v oblasti nadkritického proudění. (a) $Ta_m = 1.9Ta_m^{cr}$ (b) $Ta_m = 2.4Ta_m^{cr}$ a (c) $Ta_m = 7.1Ta_m^{cr}$

vztahu (4.4). Takto znázorněná hodnota okamžité rychlosti umožňuje vzájemné porovnání pro různé velikosti magnetického Taylorova čísla. Tento způsob znázornění výsledků bude použit i nadále.

Na obrázku 4.6 je možné pozorovat okamžité rychlostní pole ve vertikálním řezu válcové nádoby. Červená barva znázorňuje maximální hodnotu azimutální rychlosti a modrá barva pak reprezentuje minimální hodnoty rychlosti v oblasti středu válcové nádoby a na stěnách. Jak je patrné z obrázků, hlavním prouděním je azimutální rotační proudění, jehož maximální hodnota rychlosti je soustředěna zhruba ve $3/4$ poloměru válcové nádoby. DAVIDSON [36] rozdělil rychlostní pole na dvě oblasti, oblast v blízkosti středu proudění, kde rychlost je malá a není ovlivněna stěnou resp. viskózní síly nehrají důležitou roli a dále proudění v blízkosti stěny, kde je proudění ovlivněno viskozitou. Podobný charakter proudění lze definovat také pro výsledky na obr. 4.6.

Dále je možné pozorovat, že podél obvodové stěny v mezní vrstvě vznikají nestability Taylor-Görtlerova typu, které jsou charakteristické pro proudění v oblasti nadkritického Taylorova čísla. Důležitým faktem je, že tyto nalezené nestability jsou



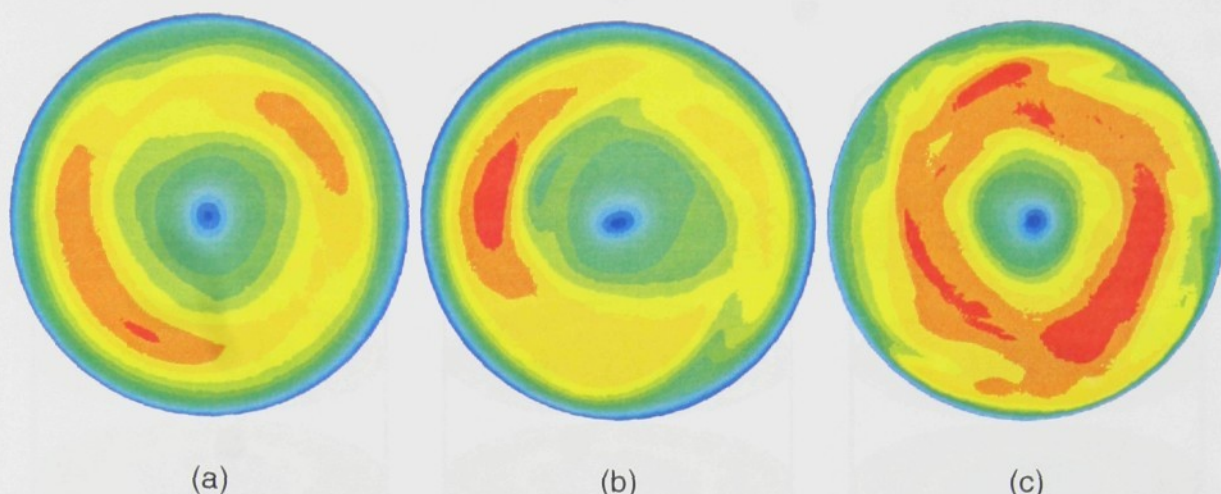
Obrázek 4.8: Okamžité azimutální rychlostní pole znázorněné v horizontálním řezu umístěném v polovině výšky nádoby pro různé hodnoty magnetického Taylorova čísla. (a) $Ta_m = 1.9Ta_m^{cr}$ (b) $Ta_m = 2.4Ta_m^{cr}$ and (c) $Ta_m = 7.1Ta_m^{cr}$

nesymetricky rozloženy. V podstatě již od malých nadkritických hodnot Taylorova čísla se objevuje tato nesymetrie z pohledu vzniku nestabilit. Dále je možné konstatovat, že čím větší je Taylorovo číslo resp. magnetická indukce, tím více chaotičnosti je možné pozorovat v okamžitém rychlostním poli. Velmi podobné závěry lze učinit také, jestliže okamžité rychlostní pole je znázorněno pouze pomocí isochar viz. obr. 4.7. Vývoj nesymetrie do značné míry narůstá s hodnotou Taylorova čísla.

Z vertikálních řezů nádoby a z okamžité azimutální rychlosti (obr. 4.6) je možné také pozorovat tzv. Ekmanovu mezní vrstvu, která se vytváří na koncových stěnách nádoby. Její tloušťka byla numericky pozorována DAVIDSONEM [35], který rozpoznal, že tloušťka této vrstvy se zmenšuje s druhou odmocninou Reynoldsova čísla. Ekmanova resp. Bödewadtova mezní vrstva byla teoreticky popsána a analyzována v literatuře DAVIDSON a POTHÉRAT [37]. Mimoto, existence Ekmanovy mezní vrstvy byla také prokázána experimentálně autory GEFAT, GORBUNOV a KOLEVZON [53]. Podrobnější studium této vrstvy ale nebylo možné experimentálně provést, neboť její tloušťka je velmi malá s ohledem na měřicí sondu.

Rozložení okamžitého rychlostního pole v horizontálním řezu uprostřed nádoby je znázorněno na obr. (4.8). Metoda znázornění je identická s vertikálním řezem a rovněž tak barevné označení je identické. Jak je patrné, azimutální rychlostní pole je také nesymetricky rozloženo.

Tato nesymetrie se může předpokládat, neboť se jedná o již začínající turbulentní proudění. (GELFGAT a PRIEDE [15] nebo MÖSSNER and G. GERBETH [43]) uskutečnili numerickou studii za předpokladu symetrického proudění. Jak ukazují zde uve-

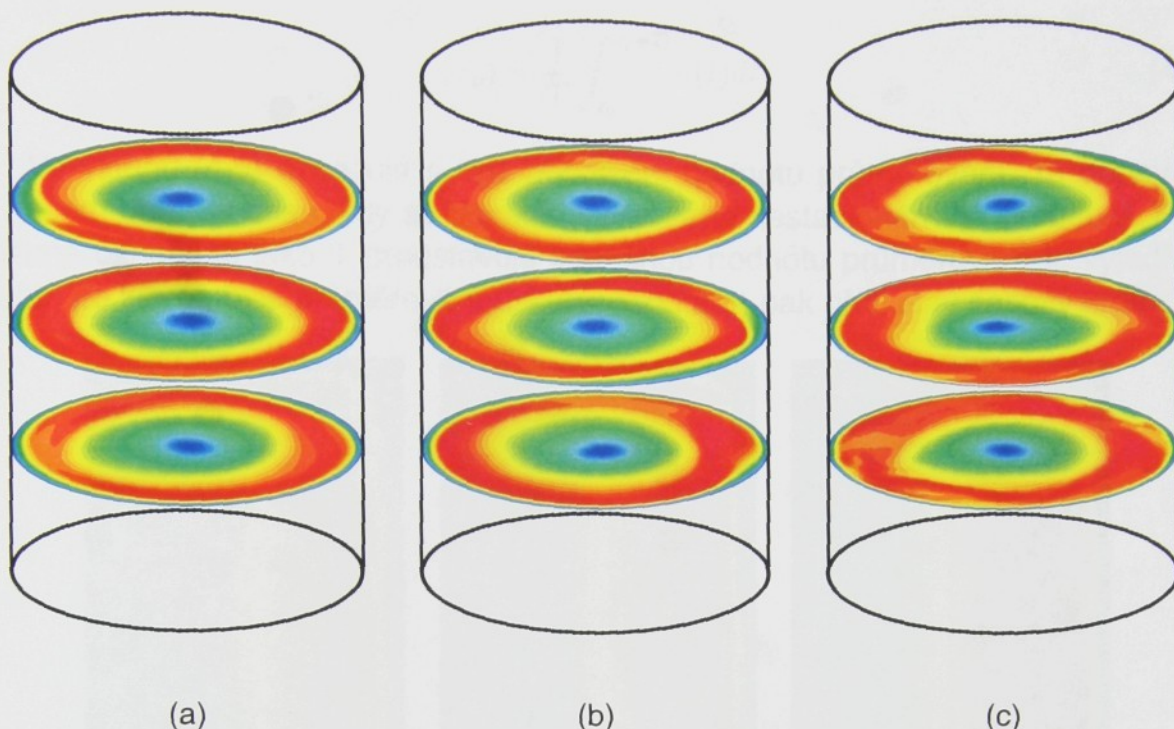


Obrázek 4.9: Okamžité azimutální rychlostní pole proudění znázorněné v horizontálním řezu umístěném v těsné blízkosti koncových stěn nádoby pro případy různých hodnot magnetického Taylorova čísla. (a) $Ta_m = 1.9Ta_m^{cr}$ (b) $Ta_m = 2.4Ta_m^{cr}$ and (c) $Ta_m = 7.1Ta_m^{cr}$

dené výsledky, nesymetrické rozložení azimutálního rychlostního pole je typické pro případy magneticky indukovaného proudění v oblasti nadkritického magnetického Taylorova čísla. Pravděpodobně by bylo nutné uskutečnit podrobnější pohled na vliv nesymetrie azimutálního proudění na celkové rychlostní pole, aby výsledky získané 2D výpočtem mohly být použity bez pochybností. Další zajímavostí je pozice maximální hodnoty azimutální rychlosti v horizontálních řezech. Zatímco v řezu v polovině válcové nádoby je maximální azimutální rychlost soustředěna převážně ve $3/4$ poloměru válcové nádoby viz. obr. 4.8, u koncových stěn válcové nádoby je maximální hodnota azimutální rychlosti soustředěna přibližně do $1/2$ poloměru nádoby (4.9). Toto posunutí maximální rychlosti směrem do středu nádoby je způsobeno existencí Ekmanovy mezní vrstvy a tento jev se projevuje u všech studovaných modelů, jejichž hodnota magnetického Taylorova čísla přesahuje kritickou hodnotu.

Na obr. 4.10 jsou znázorněny okamžité azimutální rychlosti pro různě umístěné horizontální řezy válcovou nádobou. Způsob znázornění azimutální rychlosti je identický se způsobem použitým již v předešlých grafických vyjádřeních. Jak je patrné z obrázku, nesymetrie azimutálního proudění se liší s ohledem na pozici řezu a není stejnoměrná v celém objemu válcové nádoby. Ve všech zde prezentovaných řezech je však možné definovat oblast neviskozního proudění v blízkosti potenciálního jádra a rovněž tak oblast v blízkosti stěn, kde dochází ke vzniku nestabilit a kde je azimutální rychlostní pole deformováno.

Studie okamžitého rychlostního pole ukazuje ve všech případech nadkritického Taylorova čísla, že proudění je nestacionární. Azimutální rychlostní pole vykazuje nesymetrie resp. vykazuje oscilace azimutální rychlosti v hlavním rotačním pohybu



Obrázek 4.10: Znázornění azimutální okamžité rychlosti v horizontálních řezech definované výškou $\frac{H}{3}$, $\frac{H}{2}$ a $\frac{2H}{3}$ a různými hodnotami magnetického Taylorova čísla. (a) $Ta_m = 1.9Ta_m^{cr}$ (b) $Ta_m = 2.4Ta_m^{cr}$ an (c) $Ta_m = 7.1Ta_m^{cr}$

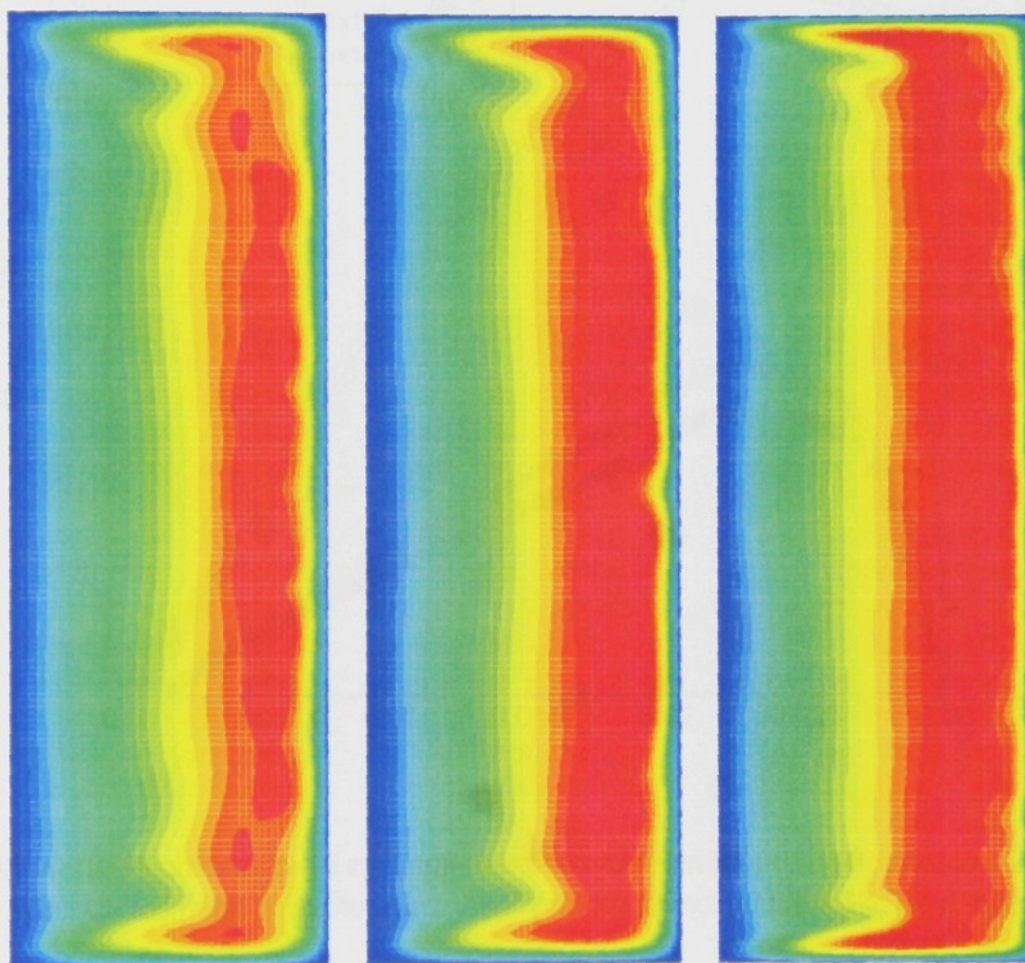
kolem vertikální osy. Poloha maximální okamžité azimutální rychlosti se mění tak, že její hodnota se pohybuje kolem $3/4$ poloměru válcové nádoby. Výjimku tvoří oblast v blízkosti Ekmanovy mezní vrstvy, kde dochází k posunu polohy maximální rychlosti směrem do středu nádoby. Tyto závěry se dají zobecnit na všechny případy zde studovaných modelů. Poloha maximálních hodnot rychlostního pole je studována a popsána později pomocí tzv. 'mean' hodnot. V následující kapitole bude ukázáno časově zprůměrované azimutální a rovněž tak rychlostní pole sekundárního proudění.

4.4.3 Časově zprůměrované rychlostní pole

Kromě okamžitého rychlostního pole je možné také stanovit časově zprůměrované rychlostní pole, které umožňuje porovnání s experimentálními výsledky nebo s výsledky jiné numerické analýzy. Nejprve ale několik poznámek k samotnému procesu časového průměrování, které je dáno vztahem (4.5).

$$\langle u_\varphi \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u(t) dt \quad (4.5)$$

Ve vztahu (4.5) označuje t_0 tzv. počáteční hodnotu průměrování. Ta odpovídá v našem případě času, kdy se dosáhlo vyvinutého nestacionárního proudění. Proměnná označená jako T představuje konečnou hodnotu průměrování tj. vyjadřuje dobu, po kterou bylo průměrování uskutečněno a dt pak příslušný časový krok.



(a)

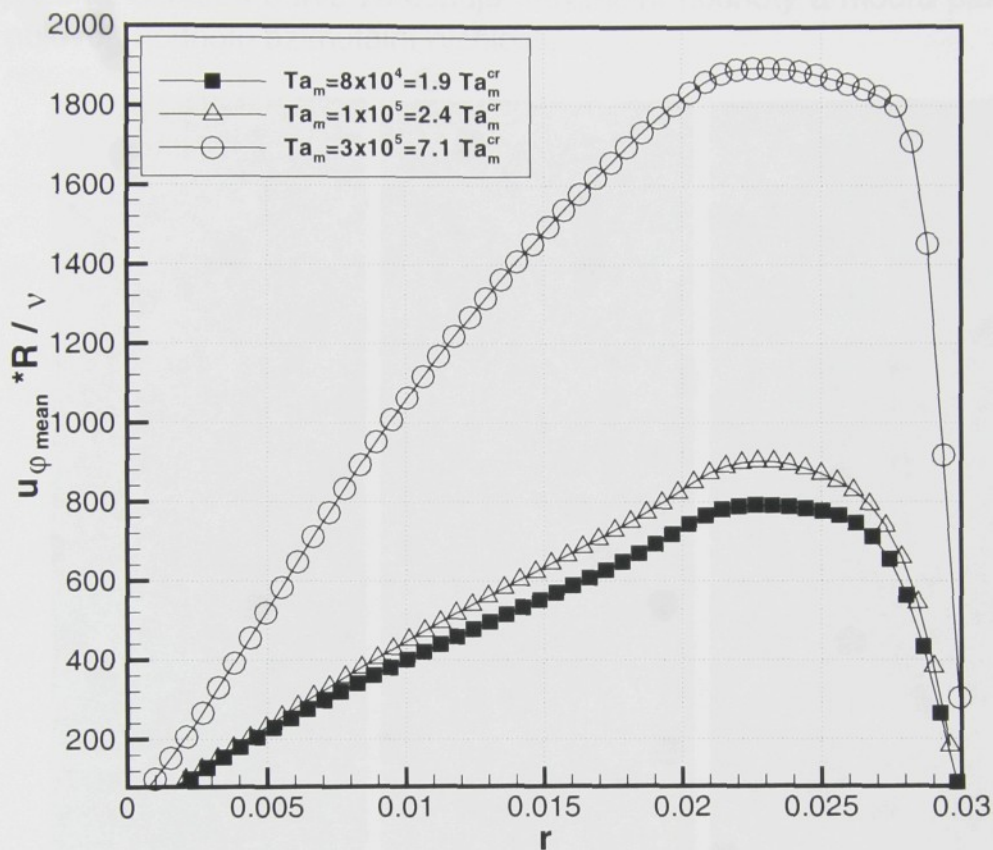
(b)

(c)

Obrázek 4.11: Časově zprůměrované azimutální rychlostní pole znázorněné ve vertikálním řezu pro různé hodnoty magnetického Taylorova čísla. (a) $Ta_m = 1.9Ta_m^{cr}$ (b) $Ta_m = 2.4Ta_m^{cr}$ a (c) $Ta_m = 7.1Ta_m^{cr}$

Volba časového kroku může být spojena přímo s časovým krokem, s kterým jsou základní rovnice proudění řešeny. Druhým aspektem vztahu (4.5) je tzv. časová

délka průměrování, která vychází z dispozice řešení. Logicky vzato, je-li turbulentní proudění simulováno na relativně jemné síti, pak časový krok odpovídá konkrétní hodnotě, která je proporcionální k velikosti výpočetní sítě.

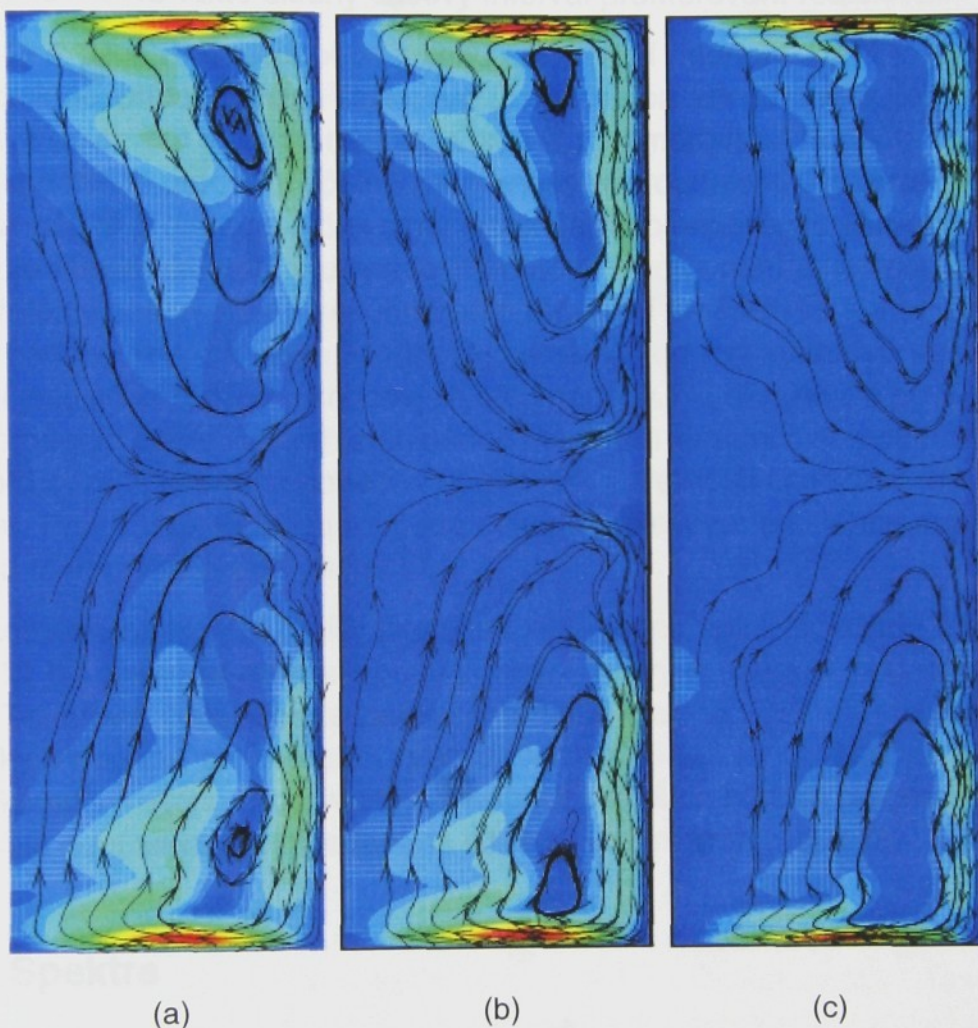


Obrázek 4.12: Rychlostní profil zprůměrovaného rychlostního pole vyhodnocený v polovině výšky nádoby. Maximální hodnotu azimutální rychlosti je možné identifikovat přibližně ve $3/4$ R.

Na obrázku 4.11 jsou znázorněna zprůměrovaná rychlostní pole opět pro 3 již známé hodnoty Taylorova čísla. Metoda průměrování odpovídá vztahu (4.5), avšak s ohledem na osovou symetrii bylo použito dodatečných triků k zlepšení znázornění symetrie proudění. Tyto dodatečné kroky lze vysvětlit následně. Z hlediska fyzikálního pohledu musí být symetrie proudění ve vertikální orientaci zachována, neboť tvar a rovněž tak okrajové podmínky jsou symetrické a zohledněný materiál je homogenní. Ovšem z reálného pohledu nemusí být tato symetrie přesně dodržena, neboť použitá výpočetní síť je nestrukturovanou sítí a je sama o sobě nesymetrická.

Je-li tedy eventuální nesymetrie proudu způsobena nesymetrií sítě, pak je možné tento nežádoucí projev sítě eliminovat dodatečným osovým průměrováním.

Na obr. 4.11 je tak možné vidět časově zprůměrovanou azimutální rychlost pouze v polovině vertikálního řezu pro tři různé hodnoty magnetického Taylorova čísla. Barevné označení respektuje velikost časově zprůměrované hodnoty azimutální rychlosti, přičemž červená barva zastupuje maximální hodnoty a modrá pak minimální nebo nulovou hodnotu azimutální rychlosti.



Obrázek 4.13: Znázornění sekundárního proudění doplněného proudnicemi ve vertikálním řezu nádoby s různou hodnotou magnetického Taylorova čísla. (a) $Ta_m = 1.9Ta_m^{cr}$ (b) $Ta_m = 2.4Ta_m^{cr}$ and (c) $Ta_m = 1.9Ta_m^{cr}$

Obr. 4.12 ukazuje rychlostní profil časově zprůměrované hodnoty azimutální rychlosti ve středu válcové nádoby pro různé hodnoty magnetického Taylorova čísla. Jak je patrné z obrázku, je rychlostní profil mírně deformován v okolí maximálních hodnot

pro případ $Ta_m = 7.1Ta_m^{cr}$. Tato mírná deformace může být zapříčiněna nedostatečnou časovou délkou procesu průměrování rychlostního pole, neboť teoreticky je časový interval potřebný pro dokonale průměrnou hodnotu nekonečně velký.

Jak bude dokázáno později, v proudění existují velké struktury s velmi dlouhou životností. Následkem toho, ideálně časově průměrované rychlostní pole musí být uskutečněno na dostatečně dlouhém časovém intervalu, který umožňuje zprůměrovat i nestacionární jevy s nízkou frekvencí výskytu. Čistě z praktických důvodů není tudíž možné u DNS takto dlouhý časový interval průměrování realizovat.

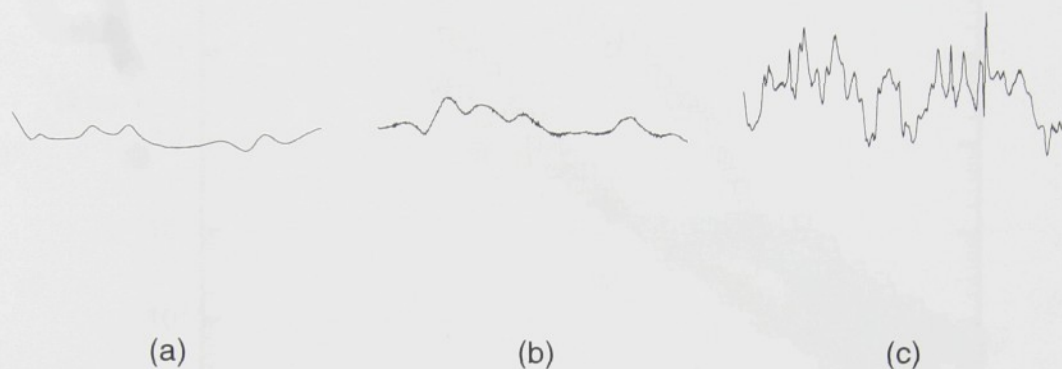
Z grafu 4.12 je možné odečíst polohu maximální hodnoty, která je pro všechny zde studované případy mag. Taylorova čísla zhruba konstantní a její hodnota je zhruba $3/4$ poloměru válcové nádoby. Časově zprůměrovaná hodnota rychlostního pole sekundárního proudění včetně znázorněných proudnic je ukázána na obr. 4.13. Černě označené proudnice určují směr sekundárního proudění a červená barva pak znázorňuje maximální hodnotu rychlosti proudu. V porovnání s laminárním prouděním je zřetelný posun středu sekundárního proudění směrem ke koncovým stěnám válcové nádoby resp. k jejím rohům. Maximální hodnoty rychlostí sekundárního proudění jsou soustředěny u koncových stěn nádoby. Na okraj si lze povšimnout, že průběh proudnic podél svislých stěn nádoby směrem ke koncovým stěnám je mírně vlnitý. Toto zvlnění je pravděpodobně opět otázkou velikosti časového intervalu průměrování. Právě v této oblasti se bude nejvíce projevovat existence dominantních struktur a rovněž tak výskyt nestabilit.

Znázorněné rychlostní profily poskytují ještě jednu velmi důležitou informaci. V grafu 4.12 lze sledovat změnu tloušťky mezní vrstvy s rostoucí hodnotou magnetického Taylorova čísla. Jak je patrné v případě $Ta_m = 7.1Ta_m^{cr}$, mezní vrstva je numericky vyřešena s pomocí 5 výpočetních uzlů, což je dostatečné kritérium k numerickému vyřešení mezní vrstvy. V případě menších hodnot magnetického Taylorova čísla není situace s ohledem na tloušťku mezní vrstvy kritická.

4.4.4 Spektra

V předchozích kapitolách bylo možné pozorovat rychlostní pole a s ním určité rozdíly v chování proudění v závislosti na magnetickém Taylorově čísle. Jak již bylo zmíněno při pozorování okamžitého rychlostního pole, čím větší bylo Taylorovo číslo, tím intenzivnější byly také nestability, které se vytvářejí převážně v okrajové mezní vrstvě. Navíc rozložení azimutální rychlosti ve válcové nádobě je nesymetrické a do určité míry bylo možné pozorovat, že míra oscilace azimutální rychlosti se mění s hodnotou magnetického Taylorova čísla. Na obr. 4.14 je možné pozorovat vývoj azimutální rychlosti v závislosti na čase a v pozici, která je definována $r = 0.75R$ a

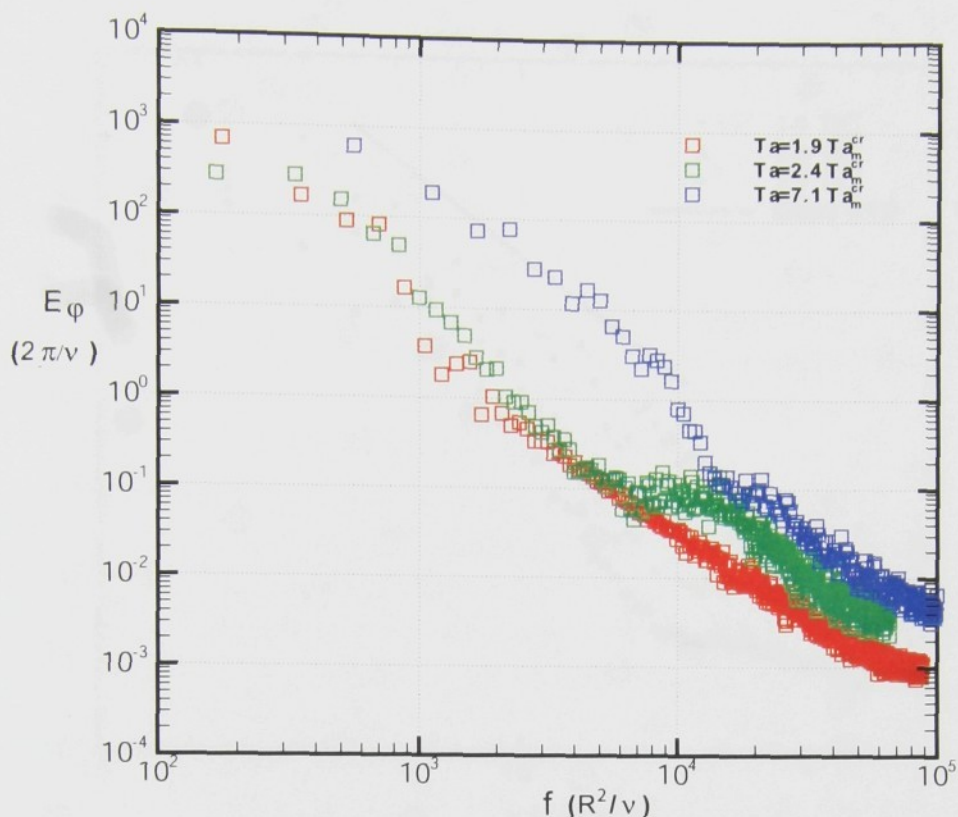
$z = 0.5H$. Jak bylo prokázáno na časově zprůměrovaném azimutálním rychlostním poli, tato pozice odpovídá místu, kde je dosažena maximální hodnota azimutální rychlosti v příslušném horizontálním řezu. (Maximální hodnoty azimutální rychlosti v rámci celého výpočetního objemu jsou soustředěny v blízkosti koncových stěn nádob.)



Obrázek 4.14: Časový průběh okamžité azimutální rychlosti pro pozici definovanou $r=0.75R$ a $z=0.5H$ a různou hodnotou mag. Taylorova čísla. (a) $Ta_m=1.9Ta_m^{cr}$ (b) $Ta_m=2.4Ta_m^{cr}$ a (c) $Ta_m=7.1Ta_m^{cr}$

Obr. 4.14 zachycuje signál azimutální rychlosti pro tři různé hodnoty magnetického Taylorova čísla, avšak pokaždé stejný časový interval. Společným rysem všech časových průběhů azimutálních rychlostí je neperiodické chování. Tato neperiodicita znamená, že proudění již není skutečně laminární a že nelineární procesy se stávají dominantní a vznikající fluktuace je čistě náhodná. Vzájemným porovnáním mezi jednotlivými Taylorovými čísly lze odvodit, že průběhy vykazují výrazné odlišnosti, které byly zřetelné také přímo při vizualizaci okamžitého rychlostního pole. V případě Taylorova čísla $Ta=1.9Ta_m^{cr}$ je průběh téměř hladký, jevy spojené s vysokou frekvencí jsou téměř zanedbatelné. Naopak, jestliže Taylorovo číslo dosáhne hodnoty $Ta=2.4Ta_m^{cr}$, pak je možné v rychlostním průběhu zaznamenat malé oscilace, které se projevují obzvláště velmi vysokými frekvencemi. U Taylorova čísla $Ta=7.1Ta_m^{cr}$ je oscilace již markantnější s výrazným neperiodickým charakterem. Právě stále větší posun směrem k vyšším hodnotám frekvencí znamená stálý posun směrem k turbulentnímu proudění. Tento závěr byl učiněn na základě průběhu azimutální rychlosti v místě středu válcové nádoby, avšak jak může být ukázáno v příloze, je podobné chování typické také pro jiné pozice v rámci zkoumaného objemu válcové nádoby (viz. obr. 5.14 a 5.15).

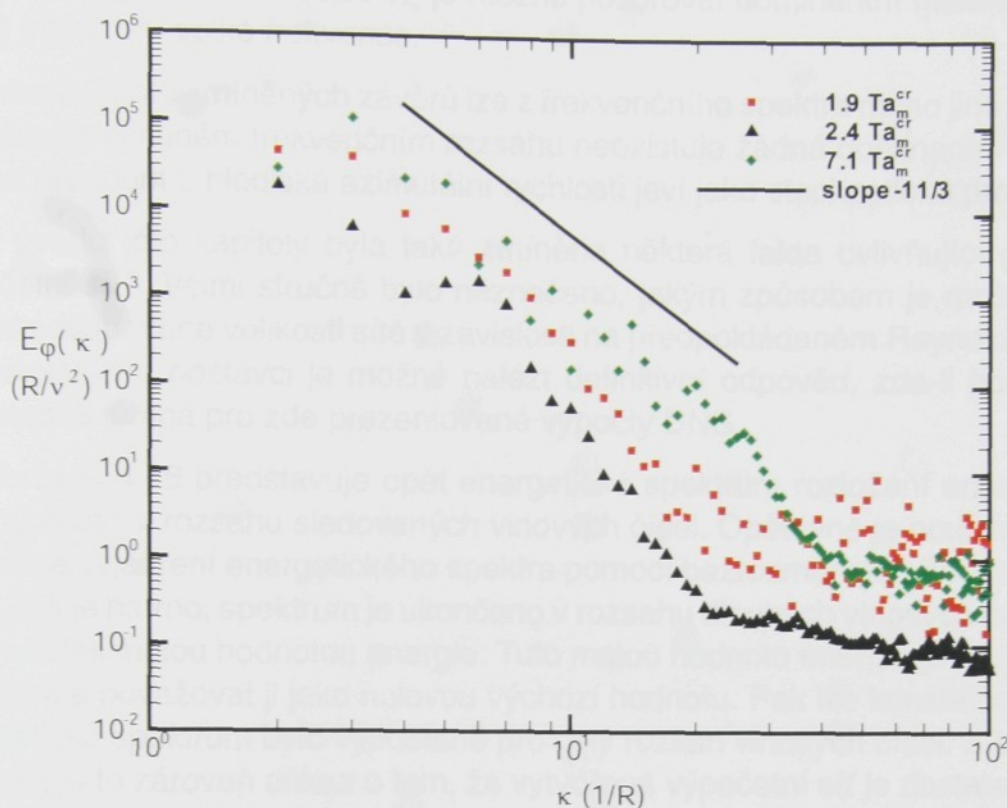
Frekvenční energetické spektrum definující rozložení energie podél zkoumaného



Obrázek 4.15: Energetické frekvenční spektrum azimutálního proudění pro případy mag. Taylorova čísla. (a) $Ta_m = 1.9 Ta_m^{cr}$ (b) $Ta_m = 2.4 Ta_m^{cr}$ and (c) $Ta_m = 7.1 Ta_m^{cr}$

frekvenčního pásma je ukázáno na obr. 4.15. Frekvenční spektrum bylo vyhodnoceno na základě signálu azimutální rychlosti na pozici $r = 0.75R$ a výšky $z = 0.5H$. Proto, aby bylo možné vytvořit frekvenční energetické spektrum, je nutné mít k dispozici dostatečné množství údajů vždy pro jednu veličinu a stejnou pozici, např. v našem případě řadu po sobě jdoucích hodnot azimutální rychlosti, shromážděnou během výpočtu pro určitou pevnou pozici se stejným časovým krokem. Z praktického hlediska je lepší mít mnohem větší množství údajů, které by postačily na eventuální zprůměrování spekter, kdy je možné získat mnohem hladší průběh energetického spektra. Ve většině případů dochází v případě průměrování ke zkrácení pozorovaného rozsahu frekvence, avšak toto omezení se projevuje u nejnižších frekvencí a je-li k dispozici dostatečné množství dat, pak je toto omezení zanedbatelné.

Obr. 4.15 znázorňuje energetické frekvenční spektrum. Barevné označení je použito k rozlišení frekvenčních spekter vždy pro určitou hodnotu magnetického



Obrázek 4.16: Vlnové energetické spektrum okamžitého azimutálního proudění.

Taylorova čísla. Na vodorovné ose je znázorněna hodnota bezdimenzionální frekvence a vertikální osa pak znázorňuje energii. Společným rysem všech spekter resp. všech pozorovaných případů Taylorových čísel je fakt, že největší množství energie je obsaženo u struktur o nízkých frekvencích, přičemž od určité frekvence směrem k nižším frekvencím zůstává rozložení energie přibližně konstantní. Naopak v oblasti vyšších hodnot frekvencí je možné pozorovat určité odlišnosti v závislosti na magnetickém Taylorovu čísle. V první řadě, je-li Taylorovo číslo mírně vyšší $Ta = 2.4 Ta_m^{cr}$, pak se nárůst energie projeví lokálním zvýšením zhruba v oblasti bezdimenzionální frekvence 10^4 . Toto navýšení je možné velmi dobře konfrontovat se signálem azimutální rychlosti, neboť při stejné hodnotě magnetického Taylorova čísla dochází ke vzniku malých oscilací (viz. výše). Dosáhne-li magnetické Taylorovo číslo hodnoty $Ta = 7.1 Ta_m^{cr}$, pak nárůst se projevuje opět převážně kolem hodnoty bezdimenzionální frekvence 10^4 (absolutní hodnota frekvence odpovídá hodnotě 3.77 Hz), ovšem tento nárůst energie je výraznější a postupuje intenzivněji převážně směrem k nižší frekvenci. Tento případ odpovídá časovému průběhu signálu azimutální rychlosti, neboť

v případě Taylorova čísla $7.1Ta_m^{cr}$ je možné pozorovat dominantní malé frekvence a méně intenzivní velké frekvence.

Kromě těchto zmíněných závěrů lze z frekvenčního spektra mimo jiné odvodit, že v celém zkoumaném frekvenčním rozsahu neexistuje žádná dominantní frekvence. Tak se proudění z hlediska azimutální rychlosti jeví jako stochastické proudění.

V úvodu této kapitoly byla také zmíněna některá fakta ovlivňující generování výpočetní sítě. Velmi stručně bylo naznačeno, jakým způsobem je možné provést odhad požadované velikosti sítě v závislosti na předpokládaném Reynoldsově čísle. V následujícím odstavci je možné nalézt definitivní odpověď, zda-li použitá síť je dostatečně jemná pro zde prezentované výpočty DNS.

Obrázek 4.16 představuje opět energetické spektrum rozložení energie azimutální rychlosti v rozsahu sledovaných vlnových čísel. Opětovně je použito také bezrozměrné vyjádření energetického spektra pomocí bezrozměrných hodnot vlnového čísla. Jak je patrné, spektrum je ukončeno v rozsahu dlouhých vlnových délek průběhem s velmi malou hodnotou energie. Tuto malou hodnotu energie je možné chápat jako šum a považovat ji jako nulovou výchozí hodnotu. Pak lze konstatovat, že celé energetické spektrum bylo vypočtené pro celý rozsah vlnových čísel. Z praktického hlediska je to zároveň důkaz o tom, že vytvořená výpočetní síť je dostatečně jemná na výpočet všech délkových měřítek, které se mohou v proudění objevit. Kromě toho lze stanovit tendenci poklesu energie v závislosti na vlnovém čísle, která je charakterizována sklonem $-11/3$. I v tomto případě je možné také sledovat vliv velikosti magnetického Taylorova čísla. Jak je vidět z obr. 4.16, všechny zde analyzované případy mají zhruba identický sklon energetického spektra.

4.4.5 Dominantní struktury

Na základě dosavadních zde publikovaných výsledků rychlostního pole a rovněž tak časového průběhu hlavní azimutální rychlosti bylo naznačeno, že v proudění existují pravděpodobně určité dominantní struktury. Jejich identifikace a pozorování může být klíčem k objasnění fyzikálních jevů v tekutině. Jak již bylo zmíněno výše, již z výsledků okamžitého rychlostního pole je zřejmé, že v blízkosti bočních stěn se formují struktury tvořené vždy dvojicí opačně orientovaných vírů. Tím bylo naznačeno, že tyto struktury pravděpodobně existují a další otázkou je tudíž jejich identifikace. K vizualizaci dominantních struktur se použila dvě kritéria, která se běžně používají a jsou to kritéria Q a Q' , které se nazývají v cizí literatuře jako 'second invariant of the velocity gradient tensor'. Výhodou těchto kritérií je identifikace malých struktur resp. vírů v proudění, kde výrazně převládá rotace nad smykovým napětím. Bližší popis této metody vizualizace je možné nalézt u CHONG [32] nebo v literatuře [50].

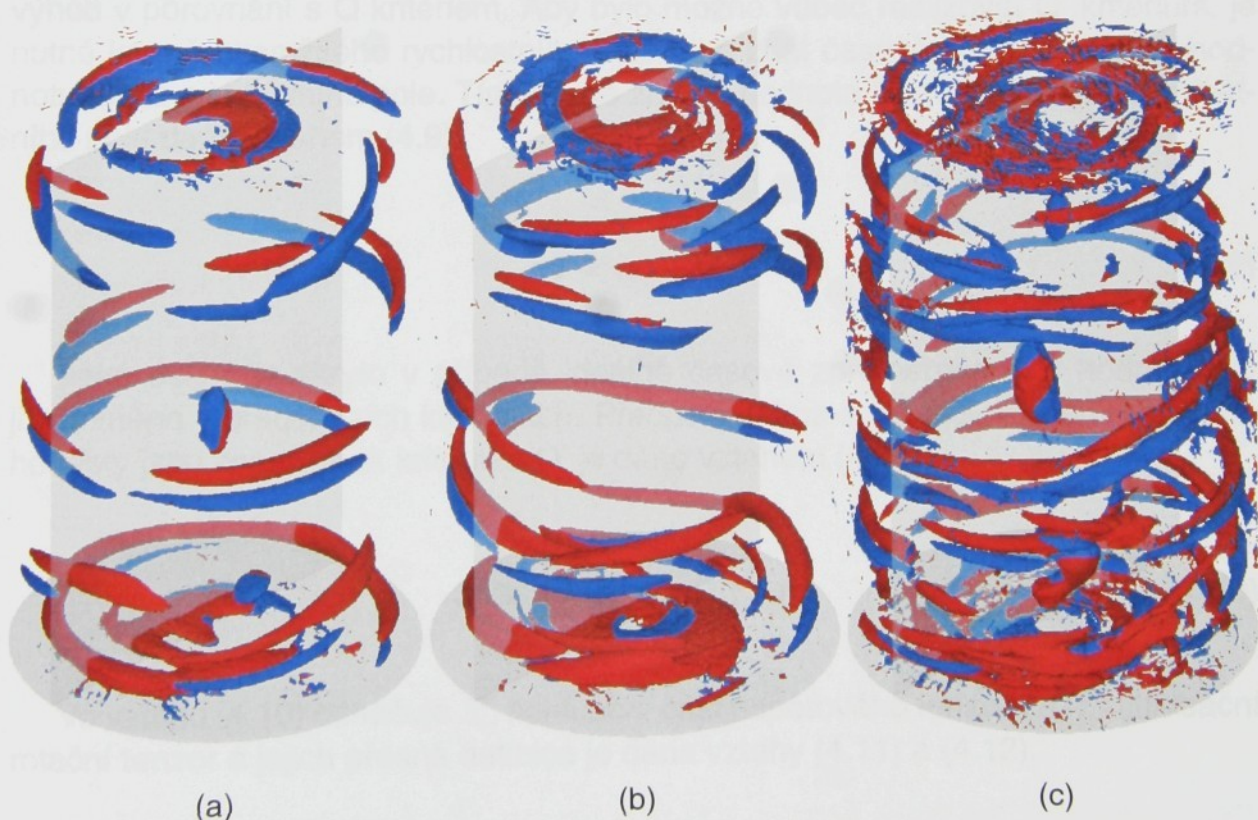
$$Q = -\frac{1}{2}(S_{ij}S_{ij} + \Omega_{ij}\Omega_{ij}) \quad (4.6)$$

Kritérium Q je definováno vztahem (4.6), kde S_{ij} označuje napěťový tenzor a je definován vztahem (4.7) a (Ω_{ij}) je tenzor rotace daný vztahem (4.8). Q je skalární veličina a k znázornění struktur se použijí isoplochy této hodnoty.

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\delta u_i}{\delta x_j} + \frac{\delta u_j}{\delta x_i}\right) \quad (4.7)$$

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\delta u_i}{\delta x_j} - \frac{\delta u_j}{\delta x_i}\right) \quad (4.8)$$

Jestliže se k vizualizaci dominantních struktur použije Q kritérium, pak hledané struktury pro 3 různá magnetická Taylorova čísla jsou dána obrázkem 4.17. Barevné označení struktury umožňuje rozlišení orientace struktury z pohledu jejich rotace.



Obrázek 4.17: Dominantní struktury znázorněné pomocí Q kritéria, dvoubarevné znázornění představuje orientaci struktury. (a) $Ta_m = 1.9Ta_m^{cr}$ a (b) $Ta_m = 2.4Ta_m^{cr}$ (c) $Ta_m = 7.1Ta_m^{cr}$

Jak je patrné z obrázku 4.17, mezi výsledky s různou hodnotou magnetického Taylorova čísla existují podobnosti a rovněž také rozdílnosti. Mezi společné rysy patří, že se vždy vytváří jeden pár struktur, který se pohybuje společně a který se rozpadá v blízkosti koncových stěn nádoby. Disipace struktur je pak patrná na dně nebo víku nádoby. Struktury jsou lokalizovány převážně v blízkosti obvodových hran nádoby. Jejich velikost je nerovnoměrná a jejich umístění rovněž nerespektuje symetrické rozvržení. Kromě společných rysů je možné si také všimnout určitých rozdílů. Tyto rozdíly jsou dány velikostí magnetického Taylorova čísla. Jestliže je Taylorovo číslo blízké kritickému Taylorovu číslu, pak struktury jsou méně početnější, mnohem výraznější a mají hladký charakter s jasně definovanými hranami. Vyskytují se více odděleně v porovnání k vyšším Taylorovým číslům. Čím větší je pak Taylorovo číslo, tím pravděpodobněji se proudění posouvá směrem k turbulentnímu proudění a tím více se tento fakt projevuje také na těchto strukturách. Ty se stávají menší a jejich počet roste. Rovněž změna jejich tvaru je patrná. Všechny tyto rysy lze odvodit na základě pozorování struktur v rámci jednoho časového okamžiku.

Výhodou Q kritéria je fakt, že tato vizualizační metoda znázornění struktur je v podstatě velmi jednoduchá, neboť nevyžaduje kromě okamžitého rychlostního pole žádné jiné hodnoty. Jinou variantou je tzv. Q' kritérium, které má několik nesporných výhod v porovnání s Q kritériem. Aby bylo možné vůbec realizovat Q' kritérium, je nutné kromě okamžitého rychlostního pole také znát časově zprůměrovanou hodnotu téhož rychlostního pole. Tím je také známá hodnota fluktuační složky rychlostního pole daná vztahem (4.9).

$$u = \langle u \rangle + u' \quad (4.9)$$

Jaké úskalí je skryto v případě ideálně časově zprůměrovaných hodnot bylo již zmíněno v předchozích kapitolách. Předpokládáme-li, že časově zprůměrované hodnoty jsou známy, pak kritérium Q' je dáno vztahem (4.10).

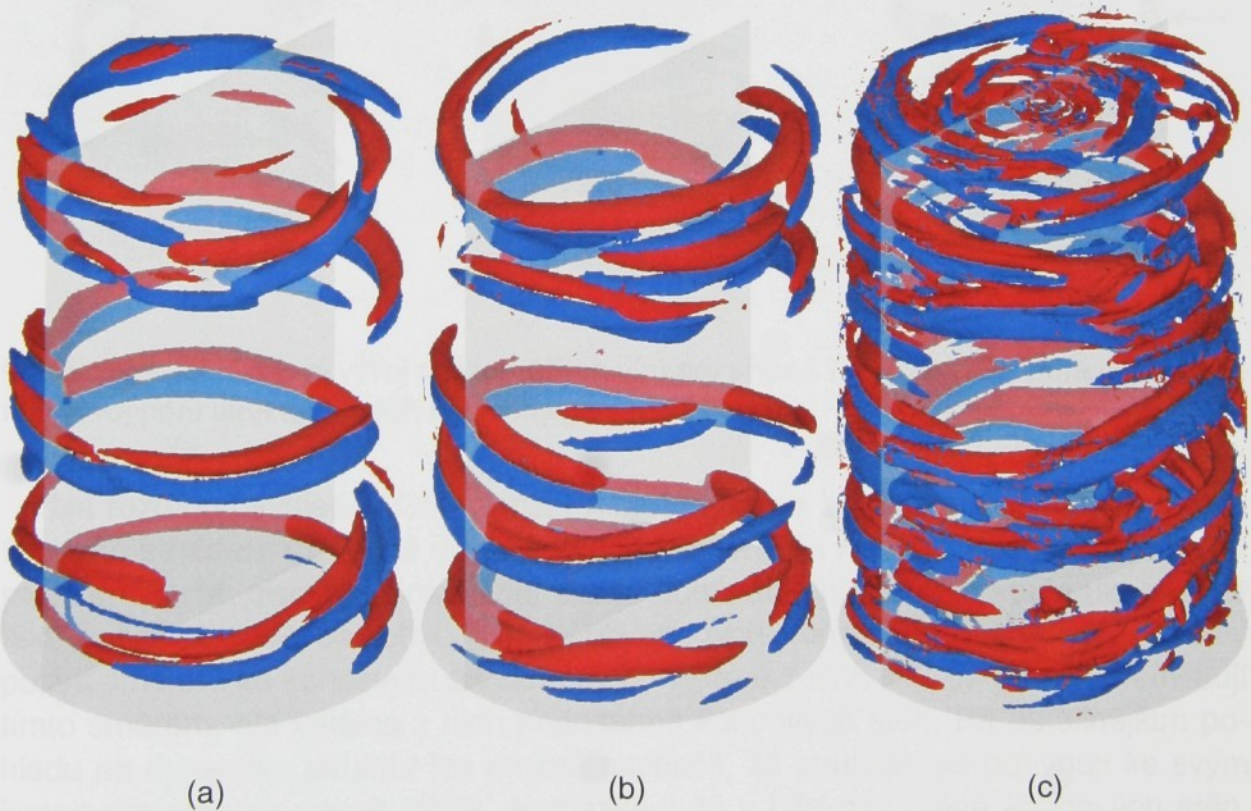
$$Q' = -\frac{1}{2}(S'_{ij}S'_{ij} + \Omega'_{ij}\Omega'_{ij}) \quad (4.10)$$

Ve vztahu (4.10) označuje S'_{ij} fluktuační část napětového tenzoru a Ω'_{ij} fluktuační rotační tenzor a jejich přesné definice je dána vztahy (4.11) a (4.12).

$$S'_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\delta u'_i}{\delta x_j} + \frac{\delta u'_j}{\delta x_i}\right) \quad (4.11)$$

$$\Omega'_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\delta u'_i}{\delta x_j} - \frac{\delta u'_j}{\delta x_i} \right) \tag{4.12}$$

Vizualizace pomocí Q' kritéria viz. obr. 4.18 odhalila podobné dominantní struktury jako v případě Q kritéria. Barevné označení struktur a rovněž tak jejich znázornění je velmi podobné technice popsané výše. Z hlediska jejich vzájemného srovnání, z pohledu metodiky znázornění, je možné pozorovat určité difference. Za prvé je zřetelné, že je-li Taylorovo číslo menší, pak oblast disipace dominantních struktur na dně resp. víku nádoby je potlačena. Jistá míra disipace je již zřetelná při větším Taylorově čísle. Z tohoto důvodu se využívá k vyhodnocení výsledků obojí možnosti vizualizace a vzájemného srovnání. Naopak použije-li se kritérium Q', jsou znázorněné struktury zřetelnější a rušivé jevy jsou odfiltrovány. Charakteristika nalezených struktur je obdobná té, která byla učiněna dříve na základě Q kritéria.



Obrázek 4.18: Dominantní struktury znázorněné pomocí Q' kritéria. Dvoubarevné označení znázorňuje smysl rotace vírů. (a) $Ta_m=1.9Ta_m^{cr}$ a (b) $Ta_m=2.4Ta_m^{cr}$ a (c) $Ta_m=7.1Ta_m^{cr}$

Další pozorování identifikovaných struktur je možné učinit na základě nestacionárního chování. K tomuto účelu je nutno mít k dispozici hned několik výsledků charakterizujících určitou časovou pozici. Opět i zde je možné definovat společné

rys, které jsou platné pro širší oblast magnetických Taylorových čísel. Pouhým pozorováním lze konstatovat, že struktury se vytvářejí podél obvodu nádoby zcela nepravidelně. Některé z nich dosáhnou koncových stěn nádoby, kde se rozpadnou, jiné disipují již během svého pohybu podél obvodových hran nádoby. Navíc, je-li Taylorovo číslo vyšších hodnot, pak lze zřetelně sledovat také produkci a disipaci těchto struktur během jejich pohybu. Mnohem častěji také dochází k interakci mezi nimi resp. spojení několika struktur do jedné velké struktury a rovněž tak jejich rozpadu opět na několik menších struktur.



Obrázek 4.19: Časový vývoj znázorněných vírů pro případ $Ta_m = 2.4Ta_m^{cr}$. Obrázky znázorňují vývoj páru struktur a jejich následný pohyb.

Na rozdíl od výsledků GELFGAT a PRIDE [15] nelze z určitosti potvrdit, že identifikované struktury skutečně dosáhnou koncových stěn nádoby, kde se rozpadnou prostřednictvím disipace. Dosavadní studie dominantních struktur spíše ukazuje na fakt, že tyto struktury se pohybují podél obvodových stěn aniž by vykonávaly zřetelný pohyb směrem ke koncovým stěnám, resp. některé z nich sice jakoby se přemísťují tímto směrem, ale většina z nich nedosáhne koncových stěn. Při detailnějším pohledu na dynamiku struktur lze možná naznačit, že struktury se pohybují ke svým koncovým stěnám pouze tehdy, nacházejí-li se v blízkosti právě koncových stěn. Jestliže však vznikající pár struktur vznikl někde uprostřed nádoby, bude se otáčet spolu s azimutální rychlostí až do té doby, než bude prakticky úplně disipován aniž by se přemístil směrem ke koncům nádoby. Tento fakt by mohl být částečně vysvětlen skutečností, že struktury se pohybují ke koncovým stěnám nádoby vlivem účinku sekundárního proudění, které je nejintenzivnější právě v blízkosti koncových stěn. Naopak uprostřed výšky nádoby bude intenzita sekundárního proudění velmi

malá a pravděpodobně nemá dostatečnou sílu uvést vzniklou strukturu do pohybu směrem ke koncovým stěnám.

Na obrázku 4.19 je graficky znázorněn vývoj dominantních identifikovaných struktur typický pro případ nadkritického proudění, který potvrzuje některé skutečnosti, které již byly řečeny. Jak je možné pozorovat, někde uprostřed válcové nádoby vznikají dva víry, jejichž intenzita s časovým vývojem roste a zároveň obě struktury společně rotují podél vertikální osy v blízkosti obvodové stěny nádoby. Toto je charakteristický případ pro magnetické Taylorovo číslo $Ta = 2.4T a_m^{cr}$. Jiné případy časového vývoje dominantních struktur je možné nalézt v příloze této práce a to i pro případy různých hodnot magnetického Taylorova čísla.

4.4.6 Dominantní struktury a okamžité rychlostní pole

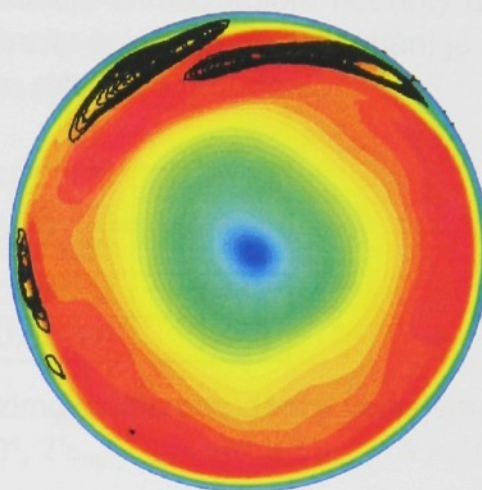
V oblasti nadkritických Taylorových čísel existují dominantní struktury, jejichž identifikace byla uskutečněna v předchozí sekci (viz. obrázek 4.18 popř. 4.17) a dále je známo, že v mezní vrstvě na vertikálních stěnách nádoby vznikají nestability Taylor-Görtlerova typu. Tyto nestability, které tvarově připomínají prst kolmo orientovaný ke kolmým stěnám válcové nádoby mohou být velice dobře rozeznány na obrázku 4.6. Jak je patrné, jejich tvar nemusí být závislý na velikosti magnetického Taylorova čísla. Jejich výskyt je nesymetricky rozložený podobně jako je nesymetricky rozložené rychlostní pole v azimutálním a rovněž také ve vertikálním směru.

Na obr. 4.20 je možné pozorovat znázornění azimutální okamžité rychlosti a současně aktuální pozici dominantní struktury, která je identifikována pomocí Q' kritéria. Kromě vertikálního řezu válcovou nádobou (vlevo) je také možné vidět horizontální řez (vpravo). Barevné označení reprezentuje okamžitou azimutální rychlost, přičemž červená barva znázorňuje maximální hodnoty a černá barva zastupuje identifikovanou dominantní strukturu resp. vír. Obecně je možné pozorovat, že nestability se vyskytují současně s párem dvou struktur resp. vírů. Tento závěr potvrzuje obecně známé fakta ohledně vzniku struktur SARIC [52]. Na základě barevného označení struktur bylo již řečeno, že se vytváří vždy jeden pár dvou opačně orientovaných vírů (viz. obrázek 4.18). Úplně obdobné hodnocení je taky možné najít v příloze, avšak dominantní struktura je lokalizována pomocí Q kritéria (viz. obrázek 4.20 v příloze).

Takovýmto způsobem je možné pozorovat současně vznikající nestability a existence dominantních struktur včetně vlivu na okamžitou azimutální rychlost. Obr 4.20 (vpravo) popisuje podobný jev, avšak jak již bylo zmíněno dříve, v azimutálním rychlostním poli se objevuje ještě tzv. azimutální oscilace resp. deformace azimutálního rychlostního pole. Tato deformace rychlostního pole se stává intenzivnější, tak



vertikální řez



horizontální řez

Obrázek 4.20: Okamžitá azimutální rychlost znázorněná společně s dominantní strukturou (Q') pro konkrétní případ mag. Taylorova čísla: $Ta_m = 7.1 Ta_m^{cr}$.

jak narůstá hodnota magnetického Taylorova čísla. Jak ukazuje obr. 4.20 (vpravo), existuje souvislost mezi touto deformací a výskytem dominantních struktur. Bohužel dosavadní studie nedokáže zodpovědět, do jaké míry ovlivňují nestability dominantní struktury a oscilaci azimutální rychlosti v obvodovém směru proudění.

4.4.7 Charakteristické vlastnosti proudění

Tak jako u laminárního proudění je možné definovat poměr mezi hlavním rotačním prouděním a sekundárním prouděním, tak je i možné podobné vyjádření učinit pro případ nadkritického turbulentního proudění. Ovšem oproti laminárnímu režimu je situace v oblasti transientního proudění poněkud složitější. Aby bylo možné výsledky definující různé magnetické Taylorovo číslo vůbec věrohodně porovnat, je nutné použít časově zprůměrovanou hodnotu rychlostního pole. Hlavní rotační proudění je dáno časově zprůměrovanou hodnotou azimutální rychlosti $\langle u_\varphi \rangle_{max}$ a sekundární proudění lze vyjádřit vztahem 4.13.

$$\langle u_{mer} \rangle_{max} = max(\sqrt{\langle u_r \rangle^2 + \langle u_z \rangle^2})$$

(4.13)

V tabulce 4.2 je možné vidět vztah mezi maximální hodnotou sekundárního a azimutálního proudění. Tento poměr se ustaluje zhruba kolem hodnoty 0.45, což mimo jiné charakterizuje, že maximální intenzita sekundárního proudění je přibližně poloviční oproti maximální hodnotě hlavního rotujícího proudění.

Ta	$\langle u_{mer} \rangle_{max}$	$\langle u_{\varphi} \rangle_{max}$	$\frac{\langle u_{mer} \rangle_{max}}{\langle u_{\varphi} \rangle_{max}}$
$8 \cdot 10^4$	0.00401	0.00938	0.427
$1 \cdot 10^5$	0.00456	0.01032	0.442
$3 \cdot 10^5$	0.01024	0.02286	0.448

Tabulka 4.2: Maximální hodnoty hlavního azimutálního proudění a vedlejšího sekundárního proudění pro případy $Ta_m = 8 \times 10^4$, $Ta_m = 1 \times 10^5$ a $Ta_m = 3 \times 10^5$.

Jak je možné dále vyvodit z tabulky 4.2, hodnota poměru maximální rychlosti sekundárního proudění a azimutální rychlosti zůstává zhruba konstantní v celém rozsahu zde numericky analyzovaných Taylorových čísel. V oblastech nízkých Taylorových čísel byl pozorován lineární nárůst tohoto poměru v závislosti na magnetickém Taylorovo čísle. Od hodnoty $Ta_m=1000$ už není tento nárůst lineární a jeho hodnota dosáhne maximální hodnoty v oblasti již transientního proudění a poté, jak již bylo řečeno, zůstává téměř konstantní.

$Ta = 8 \cdot 10^4$			$Ta = 1 \cdot 10^5$		$Ta = 3 \cdot 10^5$	
H	$ u'_{\varphi} _{max}$	$\frac{ u'_{\varphi} _{max}}{ u_{\varphi} _{max}}$	$ u'_{\varphi} _{max}$	$\frac{ u'_{\varphi} _{max}}{ u_{\varphi} _{max}}$	$ u'_{\varphi} _{max}$	$\frac{ u'_{\varphi} _{max}}{ u_{\varphi} _{max}}$
0.023H	0.003196	0.341	0.00226	0.22	0.00965	0.42
0.33H	0.00161	0.172	0.00135	0.13	0.00717	0.313
0.5H	0.001684	0.18	0.00171	0.166	0.00543	0.24

Tabulka 4.3: Číselné vyjádření maximální amplitudy fluktuace v nadkritickém proudění pro případy magnetického Taylorova čísla $Ta_m = 8 \times 10^4$, $Ta_m = 1 \times 10^5$ a $Ta_m = 3 \times 10^5$.

Jak se chová azimutální proudění z hlediska oscilace proudu ve válcové nádobě je možné vidět v tabulce 4.3. Tabulka popisuje maximální hodnotu fluktuační odchylky $|u'_{\varphi}|_{max}$, která byla stanovena v určitém časovém intervalu, stejně velkým

pro všechny 3 případy velikosti magnetického Taylorova čísla. Tato tzv. maximální odchylka byla určována na pozici poloviny výšky válcové nádoby $0.5H$ dále v $1/3H$ a těsně u víka nádoby ve vzdálenosti $0.95H$. Navíc v tabulce je ještě vyjádřen poměr maximální odchylky azimutální rychlosti ku maximální hodnotě azimutální rychlosti $\frac{|u'_\varphi|_{max}}{|u_\varphi|_{max}}$.

Jak ukazuje tabulka 4.3, maximální fluktuační odchylka $|u'_\varphi|_{max}$ se zvyšuje s tím, jak se zvyšuje hodnota magnetického Taylorova čísla Ta_m . Tento fakt lze vysvětlit tak, že čím vyšší je hodnota Taylorova čísla, tím také roste hodnota Reynoldsova čísla a to má za následek, že proudění se více blíží k turbulentnímu proudění. Maximální fluktuace proudění lze nalézt přímo u koncových stěn nádoby tedy v blízkosti víka a dna nádoby.

Číselná charakteristika proudění má defacto doplňující charakter k již dříve zde uvedeným výsledkům v oblasti rychlostního pole a identifikace struktur. Další informace k tématu transientního a turbulentního proudění je možné nalézt v literatuře FRAŇA, STILLER a GRUNDMANN [24] a [23] nebo STILLER a FRAŇA [17] a [18]. V následující kapitole je uskutečněno porovnání numerických výsledků s výsledky publikovanými jinými autory, eventuálně s experimentem. Tím se ověří platnost získaných numerických výsledků.

Kapitola 5

Verifikace numerických výsledků

V této kapitole jsou postupně popsány snahy o porovnání vlastních numerických výsledků s jinými výsledky. Velmi jednoduše lze definovat možnosti, které se v rámci srovnávání výsledků nabízejí. Samozřejmě existuje možnost porovnat výsledky s jinou numerickou studií (v tomto případě 3D proudění versus 2D proudění). Další možnostmi jsou experimentální výsledky nebo v neposlední řadě také eventuálně výpočet uskutečněný pomocí jiného softwaru. Všechny tyto zmíněné možnosti verifikace výsledků byly v této kapitole využity a budou postupně prezentovány včetně kvalitativního zhodnocení.

Na začátku je nutné poznamenat, že bohužel většina numerických výsledků je zaměřena především na velikost nádoby danou ($H/D=1$). Bohužel velikost nádoby všech zde zveřejněných studovaných případů je dána poměrem ($H/D=1.5$). Na začátku numerické studie bylo možné se eventuálně rozhodnout buď pro poměr ($H/D=1$), který by umožnil úplné srovnání s jinou numerickou analýzou, anebo upřednostnit velikost ($H/D=1.5$), která je detailně experimentálně zkoumána v rámci prací ve výzkumném ústavu Rossendorf (Německo). Jelikož porovnání s experimentálními výsledky má větší význam, byl nakonec upřednostněn poměr definovaný s ($H/D=1.5$). Přesto je možné nalézt alespoň hrubé srovnání vlastních numerických výsledků s jinými publikovanými numerickými výsledky.

Aby bylo možné vůbec výsledky navzájem porovnat, je nutné použít bezrozměrné parametry. Bohužel v odborné literatuře neexistuje doposud shoda, jaké bezrozměrné parametry by měly být použity a z toho důvodu je možné najít hned několik variant. V podstatě nejčastěji se vyskytuje varianta magnetického Taylorova čísla (1.4), nebo Reynoldsova čísla (1.1). Reynoldsovo číslo může být vztaheno k maximální hodnotě azimutální rychlosti a poloměru válcové nádoby Re dané vztahem (1.1) anebo jako úhlová rychlost v potenciálním jádru Ω_{rot} a poloměru válcové ná-

Ta_m	Ta_m/Ta_m^{cr}	Re	Re_2
8×10^4	$1.9 Ta_m^{cr}$	849	47814
1×10^5	$2.4 Ta_m^{cr}$	932	50338
3×10^5	$7.1 Ta_m^{cr}$	2137	145590

Tabulka 5.1: Porovnání bezrozměrných parametrů použitých pro oblasti nadkritických magnetických Taylorových čísel.

doby Re_2 . Všechny tyto tři zmíněné parametry budou použity v rámci porovnání výsledků, a proto následující tab. 5.1 obsahuje hodnoty těchto parametrů hlavně pro oblast turbulentního proudění.

Tak jako existuje několik variant definic pro Reynoldsovo číslo, tak je možné nalézt také mnoho definic pro magnetické Taylorovo číslo. V rámci této práce se používá pouze definice magnetického Taylorova čísla (1.4) uvedená v první kapitole.

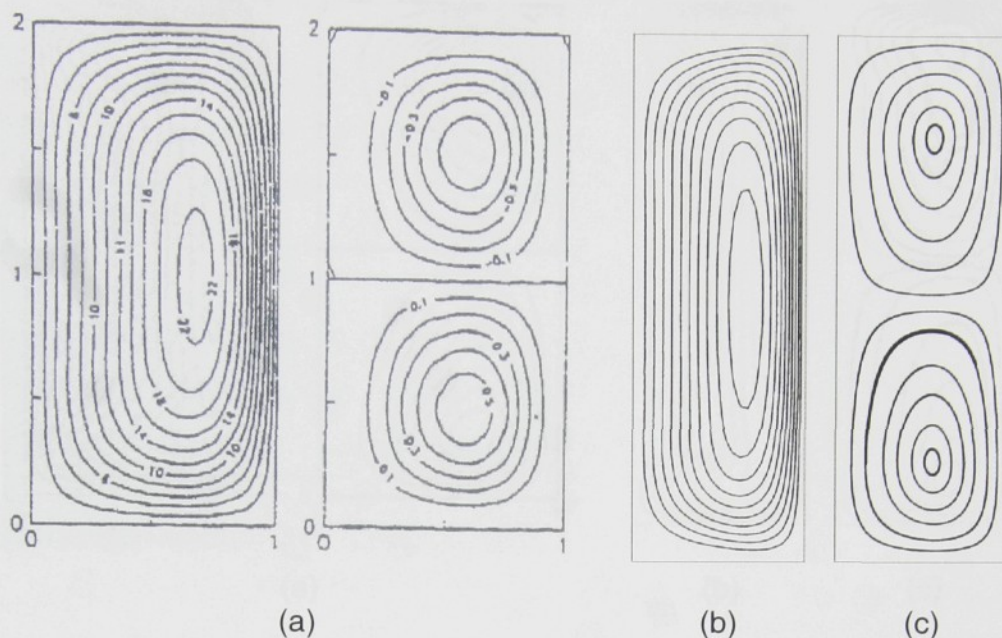
5.1 Hrubá verifikace výsledků

Jak zde již bylo zmíněno, většina doposud publikovaných numerických výsledků charakterizuje geometrii danou poměrem ($H/D=1$).

I když skutečná studovaná velikost nádoby je poněkud jiná, stále existuje možnost porovnávat výsledky na základě např. fyzikálních jevů, které se objevují pro charakteristickou velikost bezrozměrových parametrů. A tak je dokázán známý fakt, že v případě laminárního proudění se očekává symetrie sekundárního a hlavního azimutálního proudění. Naopak v oblasti nadkritického proudění se posouvají středy sekundárních vírů směrem ke koncům hran nádob atd. Tyto společné fyzikální jevy se objevují nezávisle na velikosti nádoby a tudíž je možné je použít pro kvalitativní srovnání.

Jako referenční výsledky, se kterými jsou zde publikované výsledky konfrontovány, pocházejí od autorů GELFGAT a PRIEDE [15]. Kromě různě velké nádoby jsou ostatní parametry tj. magnetické Taylorovo číslo apod. stejně definované. Tyto tzv. referenční výsledky byly autory GELFGATEM a PRIEDEM rovněž porovnány s experimenty (tudíž jejich platnost je experimentálně ověřena) a jsou založeny na axisymetrickým proudění tekutiny. Řešení je tak omezeno pouze na 2D případ. Tyto výsledky jsou porovnány pak s vlastním 3D výpočtem.

Na obrázku 5.1 je možné vidět azimutální rychlost a proudovou funkci pro meridální proudění. Vlevo jsou výsledky publikované autory GELFGAT a PRIEDE [15],

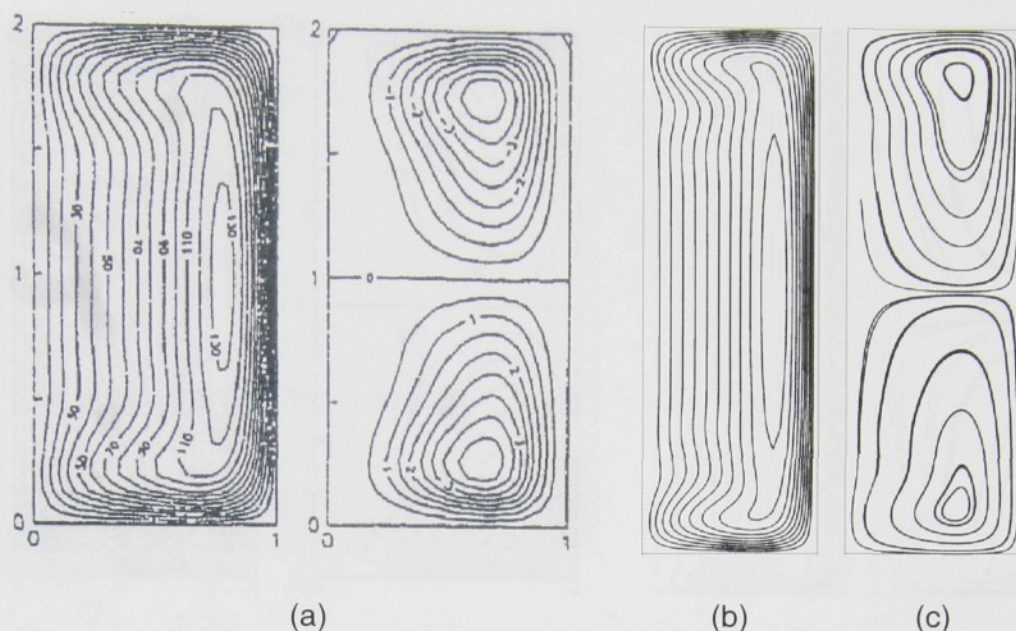


Obrázek 5.1: Azimutální a meridiální proudění (a) numericky vypočteno Gelfat a Priede (b) a (c) vlastní výpočet při magnetickém Taylorovu čísle $Ta_m=1000$.

jež představují rychlostní pole pro podkritickou oblast magnetického Taylorova čísla (resp. $Ta_m=1000$).

Na stejném obrázku vpravo je znázorněno totéž rychlostní pole získané numerickým výpočtem (je znázorněna pouze polovina válcové nádoby, neboť se předpokládá úplná symetrie proudění). Již při hrubém pozorování je zřetelné, že velikost nádoby je odlišná. Přesto je možné vyjádřit společné charakteristiky proudění, které jsou převážně dány magnetickým Taylorovým číslem. Azimutální proudění zobrazené pomocí isochar vytváří hlavní rotační proudění, jejíž maximální hodnoty se nacházejí blíže ke stěně válcové nádoby. Meridiální proudění zobrazené pomocí proudové funkce ukazuje také na obou obrázcích symetrické rozložení. V obou případech je patrné sekundární proudění ve vertikálním směru tvořené dvěma sekundárními víry. Hrubým srovnáním je možné kvalitativně posoudit výsledky z numerické analýzy prováděné v rámci této práce s výsledky dosaženými jinými autory, kteří měli možnost porovnat své výsledky s experimenty.

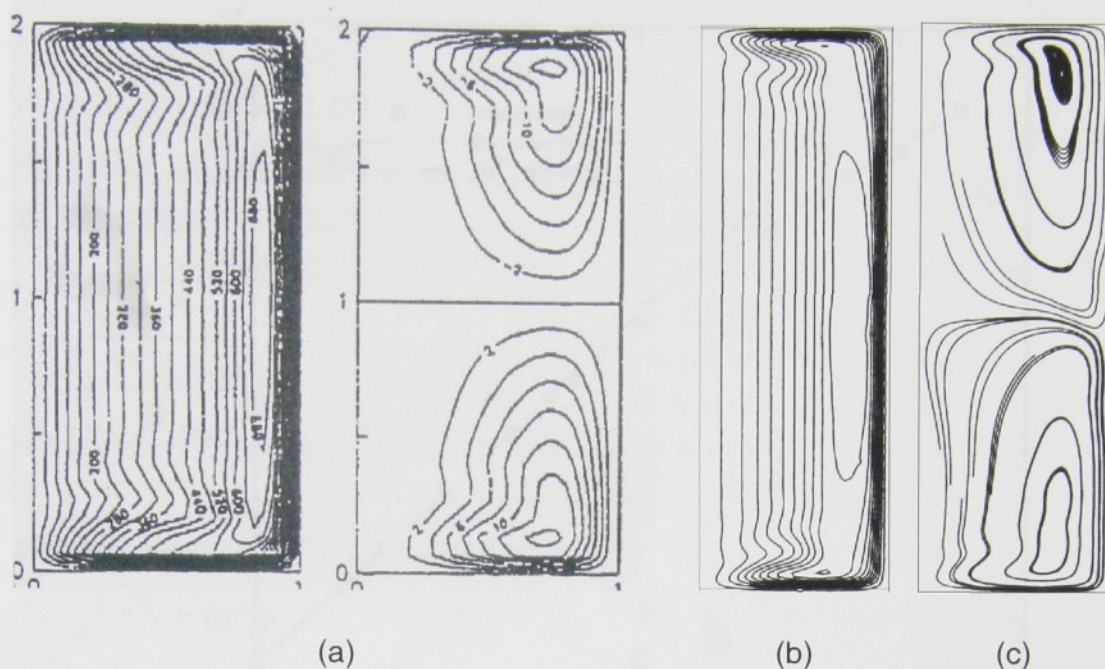
Na obrázku 5.2 jsou porovnána opět rychlostní pole pro případ magnetického Taylorova čísla 1×10^4 . I nadále se jedná o podkritickou oblast proudění, kde se nevyskytují žádné nestability v proudění. Ovšem tato oblast již je tzv. nelineární laminární oblastí. Tato nelineární oblast tvoří mezistupeň mezi laminární lineární oblastí a nadkritickou nestacionární oblastí.



Obrázek 5.2: Azimutální a meridiální proudění (a) numericky vypočteno Gelfat a Priede (b) a (c) vlastní výpočet při magnetickém Taylorovu čísle $Ta_m = 1 \times 10^4$.

Na dalším obrázku 5.3 jsou porovnávána rychlostní pole pro případ nadkritického Taylorova čísla. Jak zde již bylo mnohokrát řečeno, v nadkritické oblasti se objevují nestability a proudění se stává nesymetrické a stacionárně nestabilní. K porovnání rychlostních polí se používají časové zprůměrované hodnoty. Právě tyto hodnoty rychlostí jsou zobrazeny na obrázku 5.3. Na levé straně jsou opět výsledky autorů GELFGAT a PRIEDE a na pravé straně jsou zobrazeny výsledky získané numerickým řešením. V obou případech je možné vidět, že na koncích válcové nádoby se vytváří Ekmanova mezní vrstva. Dále je zřetelné, že střed sekundárního proudění je soustředěn směrem k rohům válcové nádoby. Tímto způsobem je možné prokázat shodnost výsledků na základě hrubého srovnání.

I když rozměry modelu jsou odlišné, fyzikální jevy, které jsou spojeny s určitou hodnotou magnetického Taylorova čísla se musí objevovat ve své charakteristické formě bez vlivu velikosti tvaru. Tímto způsobem, jak zde bylo učiněno, je prokázáno, že všechny typické vlastnosti proudění, které byly identifikovány autory GELFGAT a PRIEDE [15] v závislosti na velikosti Taylorova čísla, je možné rovněž nalézt i ve vlastních výsledcích.



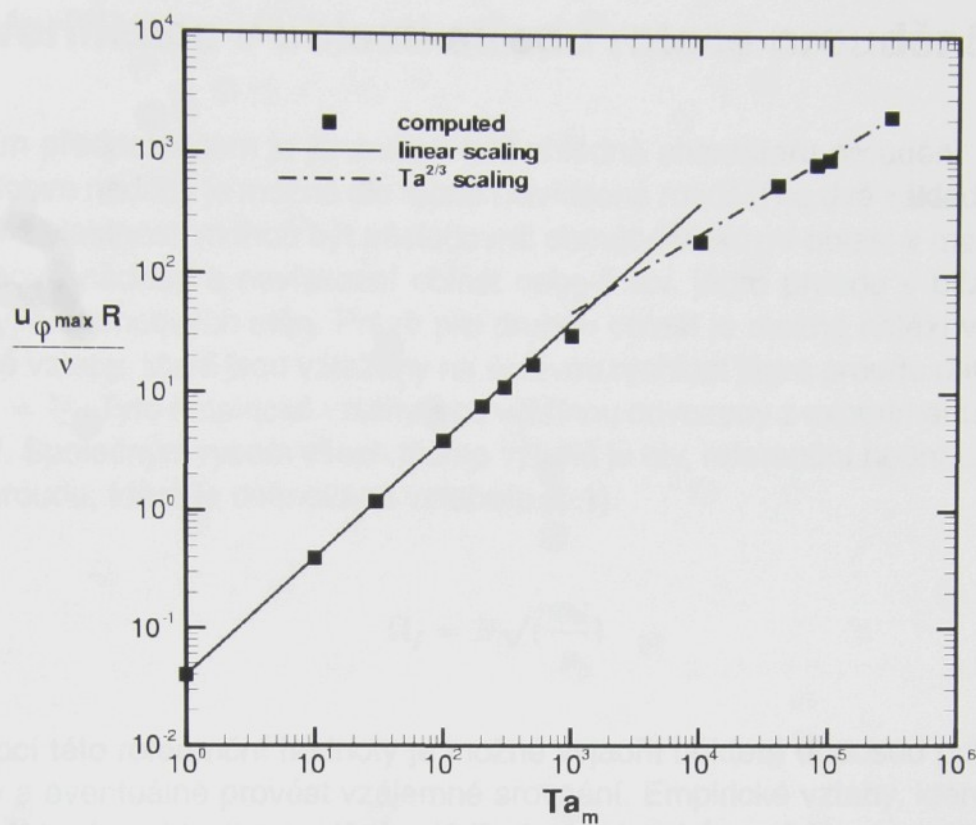
Obrázek 5.3: Azimutální a meridiální proudění (a) numericky vypočteno Gelfat a Priede (b) a (c) vlastní výpočet při magnetickém Taylorovu číslu $Ta_m = 1 \times 10^5$.

5.2 Verifikace na základě Davidsonovy teorie

DAVIDSON [35] publikoval teoretické odvození maximální rychlosti v závislosti na velikosti magnetického Taylorova čísla. Z hlediska odvozených empirických vztahů je důležitá informace ohledně charakteru proudění, resp. jde-li o laminární nebo turbulentní proudění. V oblasti laminárního proudění resp. Stokesova proudění je možné odvodit na základě Davidsonovy teorie, že maximální hodnota azimutální rychlosti je v lineární závislosti k magnetickému Taylorovu číslu.

Na grafu 5.4 je možné pozorovat právě závislost mezi maximální hodnotou azimutální rychlosti a velikostí magnetického Taylorova čísla. Jak je patrné, hodnoty maximální azimutální rychlosti rostou přibližně až do hodnoty 1×10^3 lineárně, což bylo možné na základě teorie očekávat. Na druhé straně je možné definovat oblast nestacionárního turbulentního proudění, ve které je známo, že maximální hodnota azimutální rychlosti roste zhruba dle $2/3$ kritéria. Jak je patrné z obrázku 5.4, i tento vývoj azimutální rychlosti odpovídá teoretickým závěrům.

Numerické ověření této teorie uskutečnili např. GELFGAT a PRIEDE [15], kteří tuto studii provedli za předpokladu axisymetrického proudění. Jejich shoda byla velmi přesná s teorií jak pro malé oblasti magnetických Taylorových čísel, tak i pro případy nadkritických hodnot. Z grafu 5.4 je možné si povšimnout, že existuje určitá



Obrázek 5.4: Vývoj maximální azimutální rychlosti v závislosti na magnetickém Taylorovu číslu a porovnání s teorií prezentovanou DAVIDSONEM [35].

mezioblast, která je definována magnetickým Taylorovým číslem větším než 1000 a menším než zhruba kritická hodnota Taylorova čísla Ta_m^{cr} . V této mezioblasti neplatí ani lineární závislost, tak ani $2/3$ závislost typická pro většinu nadkritických turbulentních proudění. Závislost maximální hodnoty azimutální rychlosti a magnetického Taylorova čísla právě pro tuto mezioblast byla detailně identifikována autory MARTHY a MARTIN WITKOWSKI [39], kteří konstatovali, že závislost v této mezioblasti lze definovat hodnotou, která se nachází mezi hodnotami pro laminární režim, tj. hodnotou 1 a pro turbulentní režim proudění, tj. hodnotou $2/3$.

Na základě DAVIDSONOVY teorie bylo možné validovat výsledky zastoupené maximální hodnotou azimutální rychlosti pro případ jak laminárního, tak i turbulentního proudění.

5.3 Verifikace v oblasti středu rotace proudění

Základním předpokladem je již známý fakt ohledně charakteru proudění. Proudění uvnitř válcové nádoby je možné dle teorie Davidsona rozdělit na dvě základní podoblasti jejichž vlastnosti mohou být následovně shrnuty: viskózní oblast v mezní vrstvě stěn válcové nádoby a neviskózní oblast nebo-li tzv. jádro proudu v blízkosti osy rotace vyjma koncových stěn. Právě pro druhou oblast je možné nalézt v literatuře empirické vztahy, které jsou vztaženy na úhlovou rychlost jádra proudu definovanou jako $\Omega_{rot} = \frac{u_\varphi}{r}$. Tyto empirické vztahy jsou většinou odvozeny z experimentálního pozorování. Společným rysem všech těchto vztahů je tzv. referenční hodnota rychlosti v jádře proudu, která je definovaná vztahem (5.1).

$$\Omega_f = B\sqrt{\left(\frac{\sigma\omega}{\rho}\right)} \quad (5.1)$$

Pomocí této referenční hodnoty je možné vyjádřit některé doposud publikované výsledky a eventuálně provést vzájemné srovnání. Empirické vztahy, které popisují velikost úhlové rychlosti proudění v jádře jsou platné jen vždy pro určitou oblast Reynoldsových čísel. Jak je patrné v tab. 5.1, hodnoty Reynoldsových čísel se pohybují v rozmezí od 4.7×10^4 až do hodnoty 1.5×10^5 . S ohledem na tyto hodnoty je nutné vybrat ty výsledky, které jsou v této oblasti Reynoldsových čísel platné.

$$\Omega_{rot1} = \Omega_f \left(\frac{1}{2\sqrt{2\kappa_K}} \ln\left(\frac{\Omega_f R^2}{\nu}\right) + 1 \right) \quad (5.2)$$

Vztah (5.2) je empirický vztah pro rychlost v jádře proudu, uveřejněný v publikaci DAVIDSON [36]. Tento empirický vztah je obecně platný pro turbulentní proudění a jeho eventuální horní hranice platnosti nejsou autorem sděleny. Konstanta κ_K definuje tzv. Karmanovu konstantu a její hodnota je 0.4. Tento vztah předpokládá hladké pevné stěny válcové nádoby. V literatuře je možné mimo jiné nalézt také vztah, který zohledňuje drsnost stěn.

$$\Omega_{rot2} = (7.5 \pm 0.4)\Omega_f \quad (5.3)$$

DORININ, DRUNOV a KAPUSTA [51] experimentálně odvodili empirický vztah pro úhlovou rychlost v jádře proudu. Tento vztah má platnost pro rozmezí hodnot Reynoldsova čísla Re_2 1×10^3 až 1×10^5 a empirický vztah lze nalézt ve vztahu (5.3).

$$\Omega_{rot3} = 1.587(\frac{\nu}{R^2})Ta_m^{\frac{2}{3}}$$

(5.4)

Jiný vztah je možné nalézt u autorů GORBATCHEV a NIKITIN [30] a [10]. Tento vztah je platný v rozsahu Reynoldsových čísel Re_2 3×10^3 až 1×10^5 a je popsán vztahem (5.4). Ovšem je nutné poznamenat, že tento vztah je možné nalézt v originálním vydání v podobné formě, ovšem konstanta 1.587, kterou se vztah násobí je odvozena od definice magnetického Taylorova čísla daného vztahem (1.4).

Ta_m	Ta_m	$\Omega_{rotreal}$	Ω_{rot1}	Ω_{rot2}	Ω_{rot3}
$8 \cdot 10^4$	$1.9 Ta_m^{cr}$	0.5419	0.658	1.07-1.2	1.108
$1 \cdot 10^5$	$2.4 Ta_m^{cr}$	0.5705	0.746	1.2 - 1.3	1.3
$3 \cdot 10^5$	$7.1 Ta_m^{cr}$	1.65	1.38	2.08-2.31	2.7

Tabulka 5.2: Vyhodnocení rychlosti v potenciálním jádře proudění a porovnání této rychlosti s hodnotou danou empirickým vztahem.

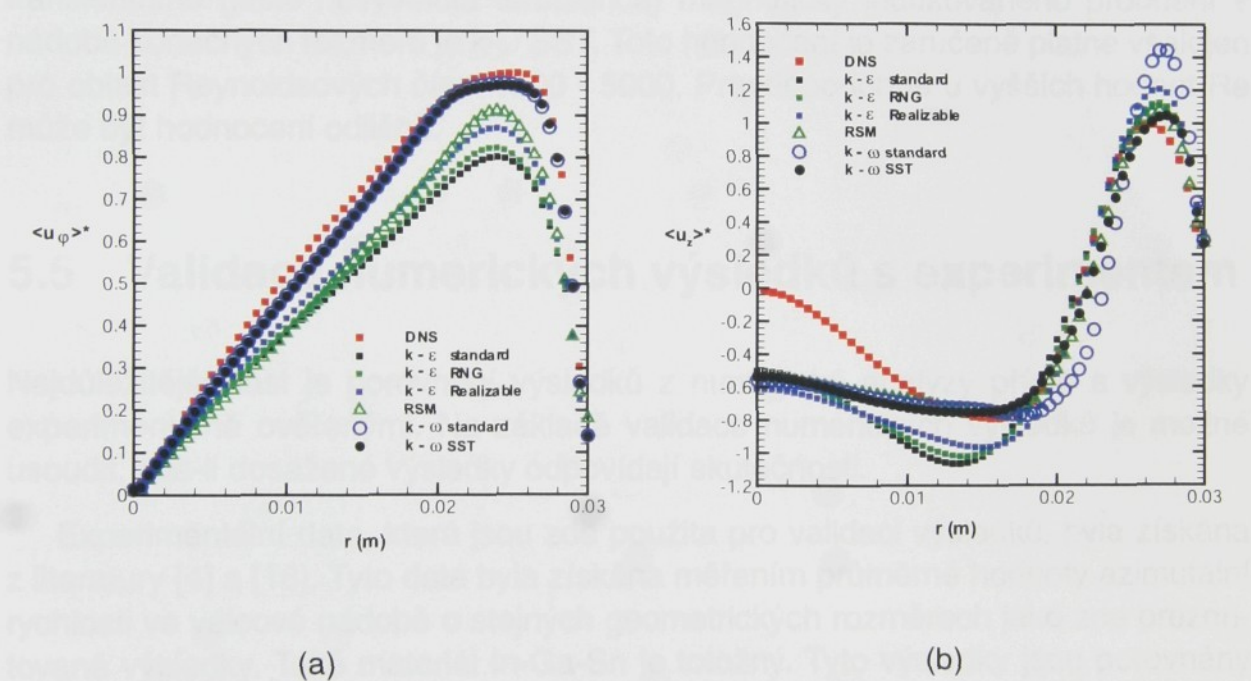
V tabulce 5.2 jsou shrnuty výsledky úhlové rychlosti v jádře proudu. Výsledky označené jako $\Omega_{rotreal}$ jsou dány přímo z 3D numerického řešení. Jak je však patrné z tabulky 5.2, výsledky Ω_{rotx} se již značně liší dle autorů. Davidsonův vztah pro rychlost rotace v jádře označené jako Ω_{rot1} se nejblíže přiblížil k výsledkům, které byly skutečně nalezeny. Procentuální rozdíl mezi numericky získanými výsledky a teoretickými výsledky pro případ $7.1 Ta_m^{cr}$ je přibližně 16 procent. Naopak výsledky autorů DORONIN Ω_{rot2} a GORBATCHEV Ω_{rot3} se již značně odlišují od výsledků numericky získaných. Maximální procentuální odchylka v rámci zde porovnávaných empirických vztahů je 38 procent. Experimentálně získané empirické vztahy autory DORONINEN resp. GORBATCHEVEM, které byly publikovány na začátku 70. let minulého století, jsou relativně staré a jejich přesnost je do značné míry dána přesností tehdejších měřících metod. To může být eventuálně jeden z mnoha důvodů, proč se výsledky mezi sebou tak znatelně rozcházejí. Bohužel doposud neexistují nové experimentální výsledky, které by bylo možné použít přímo pro srovnání zde publikovaných výsledků.

5.4 Verifikace versus komerční software

Výpočet, který je realizován pro oblast nadkritických hodnot magnetického Taylorova čísla pomocí DNS je porovnán s výsledky získanými řešením RANS modelů

pomocí komerčního softwaru FLUENT 6.0 [1]. Výpočet ve FLUENTU je realizován za předpokladu osově symetrického proudění spolu s účinkem rotujícího magnetického pole, který je vyjádřen pomocí Lorentzových sil. Tyto externí síly jsou předem naprogramovány pomocí základních příkazů C a C++ a následně připojeny k výpočetnímu programu Fluent pomocí UDF rozhraní. Společnou hodnotou, která se sleduje je průměrná hodnota azimutální resp. meridiální rychlosti.

Na základě získaných výsledků pomocí programu Fluent je možné porovnat rychlostní profil azimutální a vertikální rychlosti a to vždy pro určitou pozici. Na obrázku 5.5 je možné vidět srovnání rychlostních polí a to na pozici $z = 2/3H$. Bezrozměrné hodnoty azimutální a vertikální rychlosti jsou vyjádřeny jako poměr skutečné hodnoty rychlosti vztažené na maximální hodnotu rychlosti získanou z DNS výpočtu.



Obrázek 5.5: Porovnání rychlostního pole DNS a RANS pro případ Taylorova čísla $2.4Ta_m^{CT}$: (a) porovnání azimutální rychlosti ve $2/3$ výšky nádoby (b) porovnání vertikální složky rychlosti ve $2/3$ výšky nádoby.

Jak je patrné z obrázku 5.5, nejbližší jsou výsledky dosažené výpočtem realizovaným modelem $k-\omega$ SST a to jak z hlediska porovnání azimutální, tak i vertikální rychlosti. Ostatní modely vykazují větší či menší rozdíly. Toto hodnocení je také platné pro jiné případy rychlostních polí v rámci odlišných pozic uvnitř válcové nádoby. Další srovnání je možné nalézt v příloze (obrázky 5.22).

K vyhodnocení je nutné poznamenat, že je-li proudění definováno malým Reynoldsovým číslem, nemůže být proudění považováno za plně vyvinuté turbulentní proudění a tudíž také použití např. $k-\varepsilon$ nebo RSM (Reynolds stress modelu) je neopodstatněné. Tyto modely totiž předpokládají vyvinutou isotropní turbulenci. Přes tuto výhradu lze konstatovat (jak je taky patrné z obrázku 5.5), že nejbližší se k výsledkům přiblížil model $k-\omega$. Jak je možné si povšimnout, lepších výsledků se dosáhne, použije-li se variace $k-\omega$ tzv. $k-\omega$ SST, který mnohem přesněji predikuje rozložení rychlosti ve viskózní oblasti a v oblasti mezní vrstvy. Mimoto, porovnáním vertikálního rychlostního pole se ukázalo, že existuje zřetelná oblast, kde nevyhovuje ani jediný zde použitý model RANS. Touto oblastí je proudění v blízkosti osy rotace, kde je známo, že viskózní síly jsou vůči ostatním působícím silám zanedbatelné.

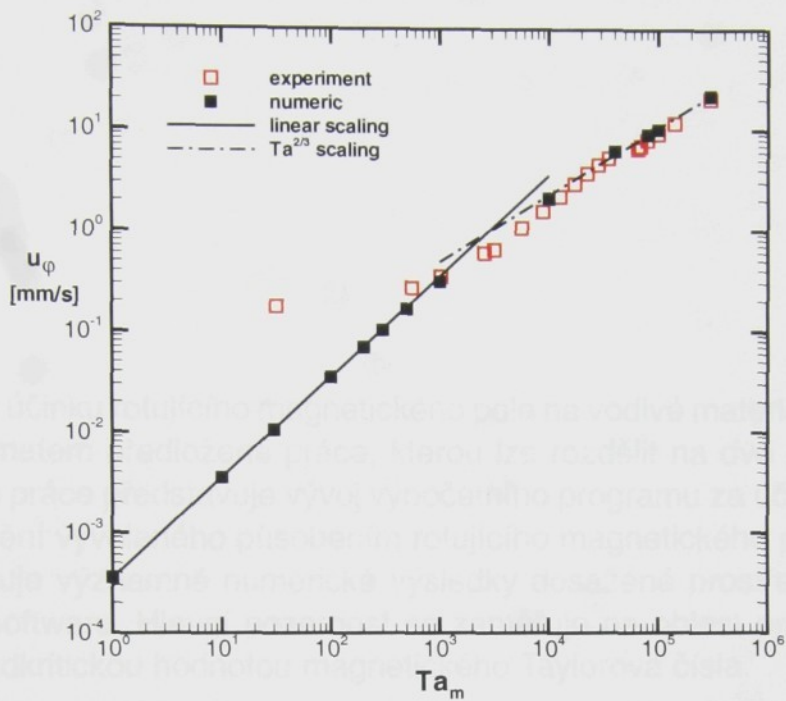
Na základě srovnání rychlostních polí mezi DNS a RANS modely je možné shrnout následující zhodnocení. Nejvhodnějším model pro řešení nestacionárního transientního (ještě nevyvinutá turbulence) magneticky indukovaného proudění v nádobě konečných rozměrů je $k-\omega$ SST. Toto hodnocení je zaručeně platné však jen pro oblast Reynoldsových čísel 1000 - 5000. Pravděpodobně u vyšších hodnot Re může být hodnocení odlišné.

5.5 Validace numerických výsledků s experimentem

Nejdůležitější část je porovnání výsledků z numerické analýzy přímo s výsledky experimentálně ověřenými. Na základě validace numerických výsledků je možné usoudit, zda-li dosažené výsledky odpovídají skutečnosti.

Experimentální data, která jsou zde použita pro validaci výsledků, byla získána z literatury [4] a [16]. Tyto data byla získána měřením průměrné hodnoty azimutální rychlosti ve válcové nádobě o stejných geometrických rozměrech jako zde prezentované výsledky. Také materiál In-Ga-Sn je totožný. Tyto výsledky jsou porovnány s výsledky vypočtenými viz. obrázek 5.6. Horizontální osa popisuje magnetické Taylorovo číslo, které je totožně definováno jak pro experiment, tak i pro numerickou analýzu. Na vertikální ose je znázorněna průměrná azimutální rychlost uvedená v jednotkách mm/s.

Obrázek 5.6 dokazuje velmi dobrou shodu experimentů s výsledky numerické analýzy ovšem mimo oblast velmi nízkých rychlostí (odpovídá magnetickému Taylorovu číslu 30 až 1000). V této oblasti je vzájemná difference neakceptovatelná. Poněvadž výsledky numerické analýzy jsou ve shodě s teorií DAVIDSONA, bude pravděpodobně příčina neshody v experimentálních datech. Přestože nebylo možné



Obrázek 5.6: Porovnání výsledků numerické simulace s experimentálně získanými daty. Graf znázorňuje hodnotu azimutální rychlosti pro specifickou pozici.

porovnat numerické výsledky s výsledky z experimentů pro oblast laminárního proudění, je shoda v oblasti nadkritického proudění a rovněž tak v oblasti laminárního nelineárního režimu proudění velmi dobrá. Pouze už jen pro doplnění lze odvodit vynikající shodu mezi experimentální a numerickou studií, která v případě Taylorova čísla 3×10^5 dosahuje zhruba 3 procent.

Závěr

Detailní studie účinku rotujícího magnetického pole na vodivé materiály v uzavřeném prostoru je tématem předložené práce, kterou lze rozdělit na dvě podstatné části. První část této práce představuje vývoj výpočetního programu za účelem numerické analýzy proudění vyvolaného působením rotujícího magnetického pole. Druhá část práce prezentuje významné numerické výsledky dosažené prostřednictvím tohoto vytvořeného softwaru. Hlavní pozornost se zaměřuje na oblast proudění, které je definováno nadkritickou hodnotou magnetického Taylorova čísla.

Výpočetní program byl vytvořen pomocí programu FORTRAN 90/95 a MPI. Program vychází z MG Library (základní knihovna obsahující funkce a moduly pro práci s daty a základní matematické operace připravené pro paralelní běh programu), která byla vytvořena na TU Dresden (J.Stiller,W.E.Nagel). Vlastní přínos této práce souvisí s vývojem výpočetního softwaru umožňující výpočet 3D viskózního nestlačitelného proudění. Výpočetní program je založen na lineární metodě konečných prvků doplněné o tlakovou stabilizaci (PSPG-FEM). Program obsahuje také moduly umožňující řešit účinek rotujícího magnetického pole na vodivé materiály. Dále program disponuje tzv. post-procesorovými moduly určenými pro statistickou analýzu, výpočet frekvenčních a vlnových energetických spekter atd. Všechny zhotovené moduly podporují paralelní výpočet a jsou až na malé výjimky přímo součástí výpočetního softwaru. K problematice vývoje softwaru patří také jeho verifikace, která byla uskutečněna pro různé jednodušší případy proudění. Verifikace programu prokázala, že zhotovený výpočetní program umožňuje paralelním výpočtem vyřešit úlohu s přesností konvergence druhého řádu. Tato přesnost je dosažena rovněž i pro případ nestrukturované výpočetní sítě. Dnešní podoba softwaru umožňuje výpočet zde dané problematiky včetně postprocesorového zpracování. Vývoj tohoto programu pokračuje i nadále směrem k jeho rozšíření o nové funkce a modely, které by umožnily zahrnout vliv účinků několika různých typů magnetických polí současně. Další práce probíhají ve smyslu optimalizace dosavadního výpočetního kódu za účelem jeho zefektivnění v oblasti magnetohydrodynamického proudění.

Druhá část práce prezentuje významné výsledky rozšiřující náhled na charakter turbulentního proudění vzniklého vlivem rotujícího magnetického pole. Součástí

této práce jsou výsledky doplňující studii v oblasti laminárního proudění. V tomto jednodušším režimu proudění existuje již velké množství numerických a především teoretických výsledků. Tento fakt nabízí možnost porovnat dosavadní výsledky s výsledky získanými prostřednictvím nového softwaru a ověřit tak dosavadní poznatky také pro případ skutečného 3D proudění.

Převážná část numerické studie se však zabývá spíše oblastí turbulentního proudění. Uskutečněná numerická studie poskytla kompletní výsledky pro 3 charakteristické případy magnetického Taylorova čísla v oblasti, která představuje oblast nadkritického magnetického Taylorova čísla. Jedná se o doposud první výsledky skutečné 3D simulace v oblasti transientního a turbulentního proudění. Dosavadní publikace prezentovaly výsledky založené na 2D výpočtu tudíž vycházející z faktu osové symetrie proudění. Realizované výpočty představují 3D nestacionární proudění, které je řešeno pomocí DNS. Výpočty tohoto druhu jsou ve smyslu realizace poměrně dosti náročné. Velké požadavky jsou kladeny na kapacitu výpočetní stanice. Jen pro představivost, prezentovaná numerická studie byla realizována výpočtem až 32 procesorů. Výpočetní síť obsahuje bezmála 8 mil. výpočetních uzlů. Kompletní studie jednoho charakteristického případu vyžaduje zhruba 4 měsíce výpočtů.

Konkrétní dosažené výsledky lze následně shrnout do stručného závěru. Získané okamžité rychlostní pole dokazuje evidentně existenci nesymetrického proudění vyznačující se oscilací rychlosti ve všech směrech pohybu. Současně s oscilací proudění jsou identifikovány typické tzv. Taylor-Görtlerovy nestability, které doprovázejí proudění v oblasti nadkritického Taylorova čísla. Rozložení těchto nestabilit je pro všechny zkoumané případy evidentně taktéž nesymetrické bez ohledu na velikost mag. Taylorova čísla. Uskutečněná statistická analýza umožnila stanovit časově zprůměrované rychlostní pole, z jehož hlediska lze identifikovat hlavní rotační proudění resp. azimutální proudění a meridiální proudění, přičemž střed meridiálního proudění je výrazně posunut směrem do rohu zkoumané válcové nádoby tvořící výpočetní oblast. Intenzita sekundárního proudění je zhruba poloviční k hlavnímu rotačnímu proudění pro oblast nadkritického Taylorova čísla. Hlubší analýza problému odhalila existenci dominantních struktur (vírů), jejichž chování, vznik a zánik byl detailně studovaný pro všechny realizované výpočty. Tyto tzv. dominantní struktury se vytvářejí po obvodu válcové nádoby a jsou nesymetricky rozloženy. Tato nesymetrie je pozorována pro všechny studované případy magnetického Taylorova čísla. Z hlediska pohybu těchto struktur lze definovat dvě základní odlišnosti. V případě, že struktury jsou vytvářeny uprostřed válcové nádoby, pak tyto struktury se pohybují spolu s azimutálním prouděním až do doby, kdy se buď rozpadnou a nebo se přemístí směrem ke koncovým stěnám nádoby. Toto přemístění je uskutečněno ve spirálním pohybu směrem vzhůru a nebo směrem dolů. Naopak, nachází-li se vzniklá struktura v blízkosti koncových stěn nádob, pak se pohybuje směrem k těmto koncovým

stěnám, kde se později struktury rozpadnou v důsledku disipace. Vzájemné porovnání výsledků pro různé hodnoty Taylorova čísla také ukázalo na rozdílné chování struktur, resp. je-li magnetické Taylorovo číslo vyšší, pak je možné pozorovat vzájemné intenzivnější ovlivnění. Struktury se mohou spojit či rozpojit nebo se dokonce vytvářet či disipovat během svého pohybu směrem ke koncovým stěnám nádoby. Více podrobností ohledně chování struktur, způsobu identifikace struktur a jejich tvaru a mnoho dalšího lze najít v příslušné kapitole této práce. Kromě zmíněných faktů lze ještě zmínit jednu zajímavost. Z hlediska časového průběhu azimutální rychlosti lze pravděpodobně odvodit, že nadkritické Taylorovo proudění automaticky neznamena pravděpodobně turbulentní proudění. Jak chování struktur, tak i časový průběh okamžité azimutální rychlosti ukazuje v prvním případě na existenci nízkých frekvencí v proudu a teprve při vyšších hodnotách mag. Taylorova čísla lze nalézt kromě těchto nízkých frekvencí také vysokofrekvenční malé fluktuace, které se superponují k původnímu charakteru proudění. Tím se pravděpodobně objevuje již začínající charakter turbulentního proudění.

Samotný vývoj včetně realizace dalších výpočtů i nadále probíhá. Výpočet se rozšiřuje také na problematiku tzv. spin-up efektu. U takového typu výpočtu lze pozorovat, kdy a v jaké intenzitě vzniká první oscilace proudění v závislosti na tom, jak se zvyšuje hodnota magnetického Taylorova čísla. Vzhledem k tomu, že zájem je především soustředěn na hlavní azimutální proudění, jsou vznikající oscilace v tomto směru proudění velmi důležité. I v této studii je nutno celý problém řešit pomocí výpočetního programu, který umožňuje 3D výpočet proudění. Jak již bylo poznamenáno, v současné době se dále pokračuje ve zdokonalování již existujícího softwaru a k jeho výraznějšímu rozšíření. Současná verze programu umožňuje výpočet zahrnující kombinaci některých dalších druhů magnetických polí a tím se rozšiřuje užití tohoto softwaru i na jiné problémy magnetohydrodynamiky. V blízké budoucnosti se dále uvažuje o dalším rozšíření výpočetního programu o matematický model zahrnující vliv teploty resp. obsahující energetickou rovnici. Tím by bylo možné identifikovat také vliv přirozené konvekce na magneticky vynucené proudění a mimo jiné také získat přehled o rozložení teplotního pole v rámci celého výpočetního objemu.

Literatura

- [1] Fluent 6.0 Documentation. Technical report, Fluent Inc., December 2001.
- [2] Gambit 2.0.4 Documentation. Technical report, Fluent Inc., 2002.
- [3] Baggag A., Atkins H., and Keyes H. Parallel implementation of the discontinuous Galerkin method. *In: Proceedings of Parallel CFD '99*, pages 233–240, 1999.
- [4] Cramer A., Varshney K., and Gerbeth G. New possibilities for velocity measurements and model experiments in liquid metal processing. 2004. XXI ICTAM, 15-21 August, Warsaw, Poland.
- [5] Richardson A.T. On the stability of a magnetically driven rotating fluid flow. *J. Fluid Mech.*, 63(3):593–605, 1974.
- [6] Vives C. Hydrodynamics, thermal and crystallographical effects of an electromagnetically driven rotating flow in solidifying aluminium alloy melts. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 33(12):2585–2598, 1990.
- [7] Shtanko D.A. *Zh. Tekh. Fiz.*, 3(7):1085–1090, 1933.
- [8] Hurle D.T.J. Crystal pulling from the melt. *Springer-Verlag Berlin-Heidelberg*, 1993.
- [9] Dalhberg E. On the action of a rotating magnetic field on a conducting liquid. Rep. AE-447, AB Atomenergi, Studswik, Sweden, 1972.
- [10] Nikitin N.V. Gorbachev L.P. and Ustinov A.R. MHD rotation for conducting fluids in a cylindrical vessel of finite dimensions. *Magnetohydrodynamics*, 4:32–43, 1974.
- [11] Kürth H. *Stahl und Eisen*. (39,19,512), 1917.
- [12] Moffatt H.K. On fluid flow induced by a rotating magnetic field. *J. Fluid. Mech.*, 22(3):521–528, 1965.

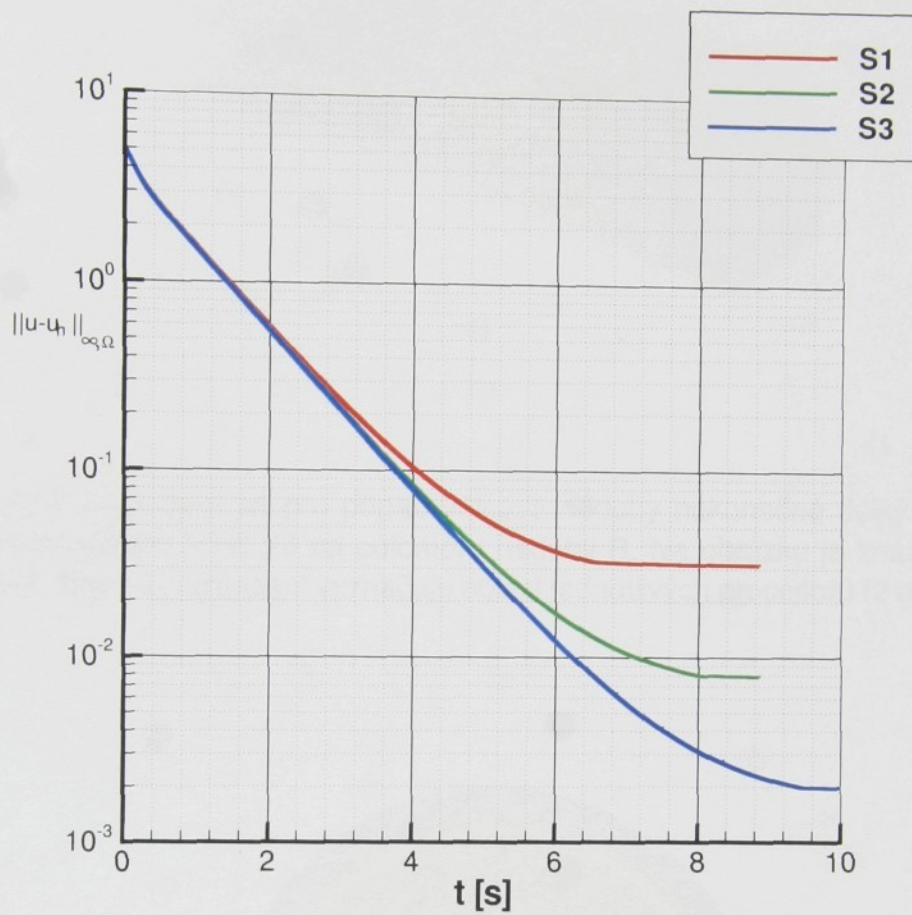
- [13] Grants I. and Gerbeth G. Stability of axially flow driven by a rotating magnetic field in a cylindrical cavity. *J. Fluid Mech.*, 431:407–426, 2001.
- [14] Grants I. and Gerbeth G. Linear three-dimensional instability of a magnetically driven rotating flow. *J. Fluid Mech.*, 463:229–239, 2002.
- [15] Priede J. and Gelfgat Yu.M. Numerical simulation of the MHD flow produced by a rotating magnetic field in a cylindrical cavity in finite length. *Magnetohydrodynamics*, 33(2), 1997.
- [16] Stiller J., Cramer A., Fraňa K., and Varshney K. Stirring with rotating magnetic fields - numerical and experimental results. *FLOWCOMAG Dresden*, April 1-2, 2004.
- [17] Stiller J. and Fraňa K. Direct numerical simulation of the flow driven by a rotating magnetic field. *GAMM-75th Annual Scientific Conference Dresden*, pages 159–160, March 21-27 2004.
- [18] Stiller J. and Fraňa K. Direct numerical simulation of the flow driven by a rotating magnetic field. *XXI ICTAM Warsaw, Poland*, August 15-21 2004.
- [19] Stiller J., Fraňa K., Grundmann R., Fladrich U., and Nagel W.E. A parallel PSPG finite element method for direct simulation of incompressible flow. *SFB-Preprint SFB609-05-2004, TU Dresden*, 2004.
- [20] Stiller J. and Nagel W.E. MG - a toolbox for parallel grid adaption and implementing unstructured multigrid solver. In: *E.H.D'Hollander et al. (Eds.): Parallel Computing matrices and vectors*, pages 391–399, 2001.
- [21] Mullin J.B. and Hulme K.F. The use of electromagnetic stirring in zone refining. *J. Electronics and Control*, 4:764–772, 1958.
- [22] Fraňa K., Stiller J., and Unger J. Výpočet aerodynamiky profilu NACA 0012 programem MG. *Colloquium FLUID DYNAMICS 2001, Institute of Thermomechanics AS CR*, October 24-25, 2001.
- [23] Fraňa K., Stiller J., and Grundmann R. Direct numerical simulation of the transitional and turbulent flow driven by a rotating magnetic field. *Colloquium FLUID DYNAMICS 2003, Institute of Thermomechanics AS CR*, pages 21–24, 2003.
- [24] Fraňa K., Stiller J., and Grundmann R. DNS of transitional and turbulent flow driven by a rotating magnetic field. *Astronomische Nachrichten (Astronomical Notes)*, 324(3):77–78, 2003.

- [25] Fraňa K., Stiller J., and Grundmann R. Linear finite element method for incompressible flow. XXII. mezinárodní vědecká konference kateder a pracovišť mechaniky tekutin a termomechaniky, červen 2003.
- [26] Kashiya K., Tamai T., Inomata W., and Yamaguchi S. A parallel finite element method for incompressible Navier-Stokes flows based on unstructured grids. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 190:333–344, 2000.
- [27] Martin Witkowski L. and Walker J.S. Nonaxisymmetric flow in a finite-length cylinder with a rotating magnetic field. *Physics of Fluids*, 11(7), 1999.
- [28] Martin Witkowski L., Marty P., and Walker J.S. Liquid-metal flow in a finite-length cylinder with a high-frequency rotating magnetic field. *J. Fluid Mech.*, 436:131–143, 2001.
- [29] Launder and Dandham. *Closure strategies for turbulent and transitional flows*. Cambridge University Press, The Edinburgh Building, Cambridge CB2 2RU, United Kingdom, first edition, 2002.
- [30] Gorbachev L.P. and Nikitin N.V. Motion of an electrically conducting liquid between two disk in crossed electric and magnetic fields. *Magnetohydrodynamics*, 9:133–136, 1973.
- [31] Gorbachev L.P., Nikitin N.V., and Ustinov A.L. Magnetohydrodynamic rotation of an electrically conductive liquid in a cylindrical vessel of finite dimensions. *Magnetohydrodynamics*, 4:32–42, October-December 1974.
- [32] Chong M.S., Perry A.E., and Cantwell B.J. A general classification of 3-dimensional flow-fields. *Phys. Fluids A-Fluid Dynamics*, 2:765–777, 1990.
- [33] Dold P. and Benz K.W. Rotating magnetic field: Fluid flow and crystal growth application. *Progress in Crystal growth and Characterization of Materials*, pages 7–38, 1999.
- [34] Parikh P. Application of a scalable, parallel, unstructured-grid-based Navier-Stokes solver. *15th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*, AIAA-2001-2584, June 11-14 2001.
- [35] Davidson P.A. Swirling flow in an axisymmetric cavity of arbitrary profile, driven by a rotating magnetic field. *J. Fluid Mech.*, 245:669–699, 1992.
- [36] Davidson P.A. *An Introduction to Magnetohydrodynamics*. Cambridge University Press, 2001.

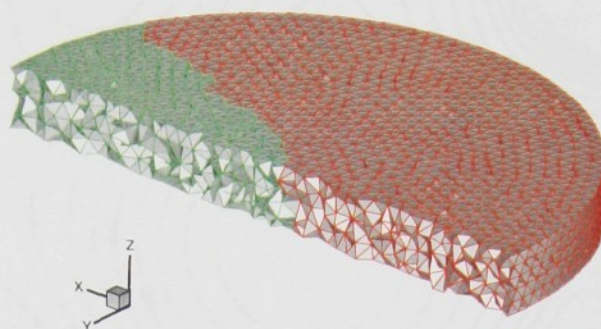
- [37] Davidson P.A. and Pothérat A. A note on Bödewadt-Hartmann layers. *European Journal of Mechanics B/Fluids*, 21:545–559, 2002.
- [38] Davidson P.A. and Hunt J.C.R. Swirling recirculation flow in a liquid-metal column generated by a rotating magnetic field. *J. Fluid Mech.*, 18:67–106, 1987.
- [39] Marthy Ph. and Martin Witkowski L. On the stability of rotating magnetic MHD flows. *Transfer Phenomena in Magnetohydrodynamics and Electroconducting Flows*, pages 327–343, 1999.
- [40] Gresho P.M. On the theory of semi-implicit projection methods for viscous incompressible flow and its implementation via a finite element method that also introduces a nearly consistent mass matrix i. *Theory. Int. J. Num. Meth. Fluids.*, 11:587–620, 1990.
- [41] Codina R. Pressure stability in fractional step finite element methods for incompressible flows. *J. Comp. Phys.*, 170:112–140, 2001.
- [42] Codina R. A stabilized finite element method for generalized stationary incompressible flow. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 190:2681–2706, 2001.
- [43] Mößner R. and Gerbeth G. Buoyant melt flows under the influence of steady and rotating magnetic fields. *Journal of crystal growth*, 197:341–354, 1999.
- [44] Barz R.U., Gerbeth G., Wunderwald U., Buhrig E., and Gelfgat Yu.M. Modelling of the isothermal melt flow due to rotating magnetic fields in crystal growth. *Journal of Crystal Growth*, 180:410–421, 1997.
- [45] Robinson T. and Larsson K. An experimental investigation of a magnetically driven rotating liquid-metal flow. *J. Fluid Mech.*, 60(4):641–664, 1973.
- [46] Tezduyar T.E. and Osawa Y. Finite element stabilization parameters computed from element matrices and vectors. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 190:411–430, 2000.
- [47] Kaiser Th. and Benz K.W. Taylor vortex instabilities induced by a rotating magnetic field: A numerical approach. *Physics of Fluids*, 10(5):1104–1109, 1998.
- [48] Hughes T.J.R., Franca L.P., and Balestra M. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: V. circumventing the Babuška-Brezzi condition: A stable Petrov-Galerkin formulation of the Stokes problem accommodating equal-order interpolations. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 59:85–99, 1986.

- [49] Ghia U., Ghia K., and Shi C.T. High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method. *J.Comp.Phys.*, 48:387–411, 1982.
- [50] Pionelli U. *Introduction to turbulence modelling.*, chapter Large-Eddy and direct simulation of turbulent flows. Lecture Series 2002-02. von Karman Institute of Fluid Dynamics, March 18-22 2002.
- [51] Doronin V.J., Drunov V.V., and Kapusta A.B. Measurement of the characteristics of the magnetohydrodynamic flow of mercury in a closed cylindrical vessel. *Magnetohydrodynamic*, 9:412–414, 1973.
- [52] Saric W.S. Görtler vortices. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 26:379–409, 1994.
- [53] Gelfgat Yu.M., Gorbunov L.A., and Kolevzon V. Liquid metal flow in a finite-length cylinder with a rotating magnetic field. *Experiments in Fluids*, 15:411–416, 1993.

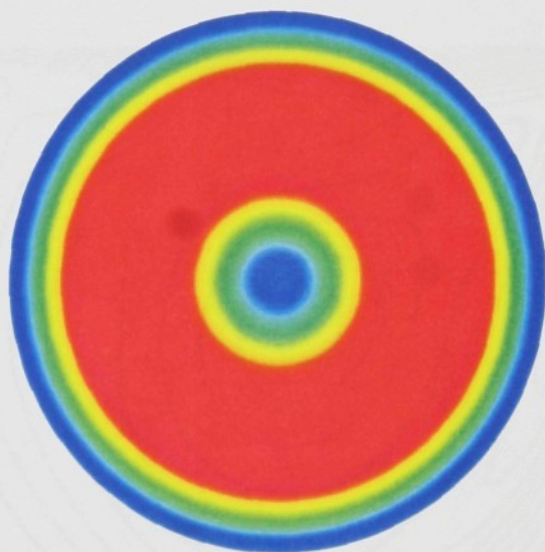
Příloha



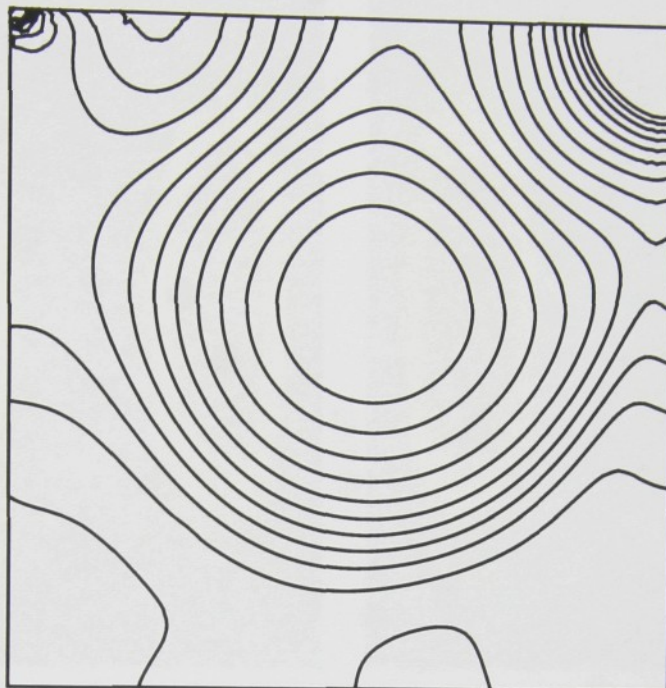
Obrázek 5.7: Časový průběh relativní chyby vyjádřené na strukturované síti různé hustoty. Příklad představuje jednoduché laminární proudění v kanálu.



Obrázek 5.8: Výpočetní síť pro případ válcové nádoby nekonečné délky. Výpočetní síť je definována počtem bodů 20 na poloměru nádoby R . Na obrázku je znázorněna pouze polovina sítě. Barevné označení vyznačuje oblast jednotlivých procesorů (2 oblasti, červená a zelená).



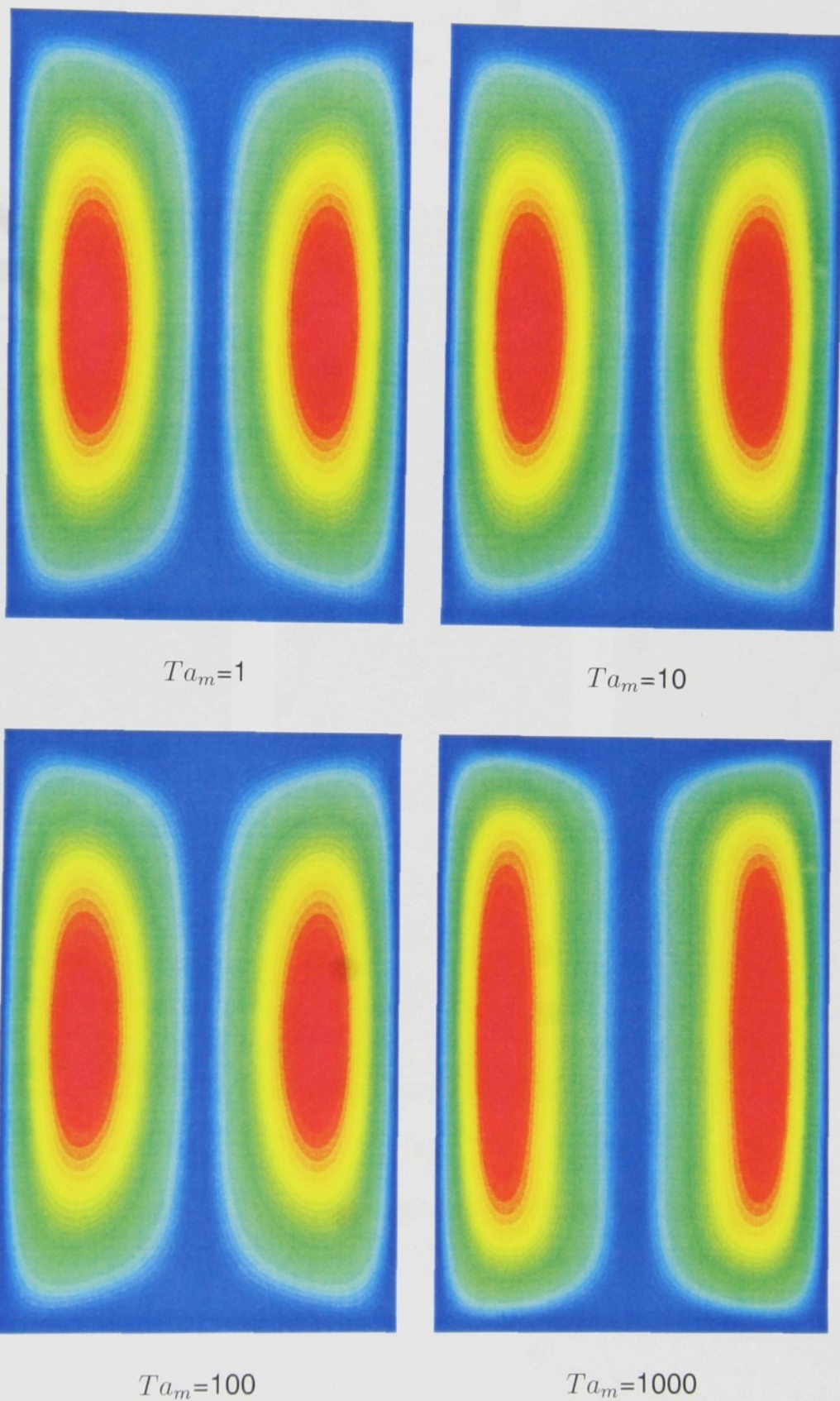
Obrázek 5.9: Rozložení azimutálního rychlostního pole pro případ laminárního proudění ve válcové nádobě nekonečné délky.



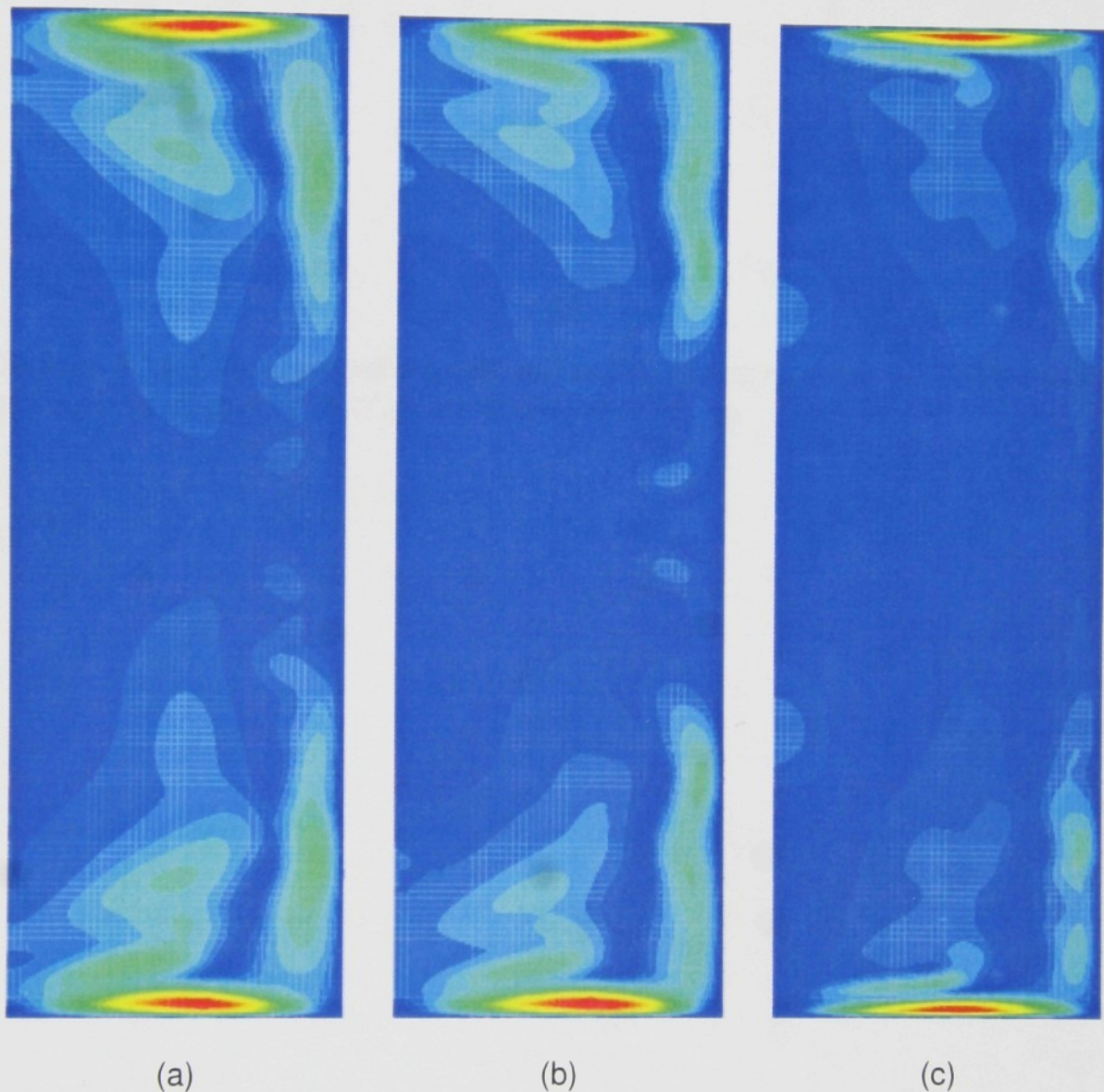
Obrázek 5.10: Tlakové pole proudění v dutině pro případ $Re=1000$.



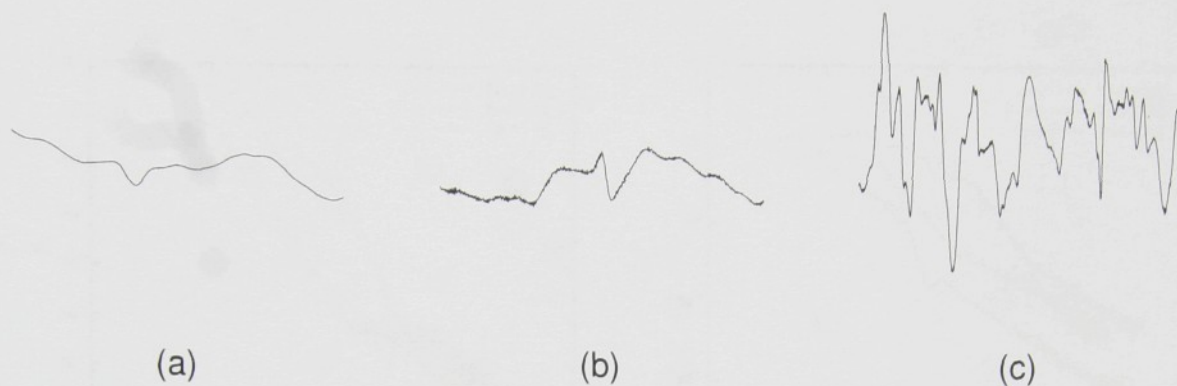
Obrázek 5.11: Rychlostní pole proudění v dutině pro případ $Re=1000$.



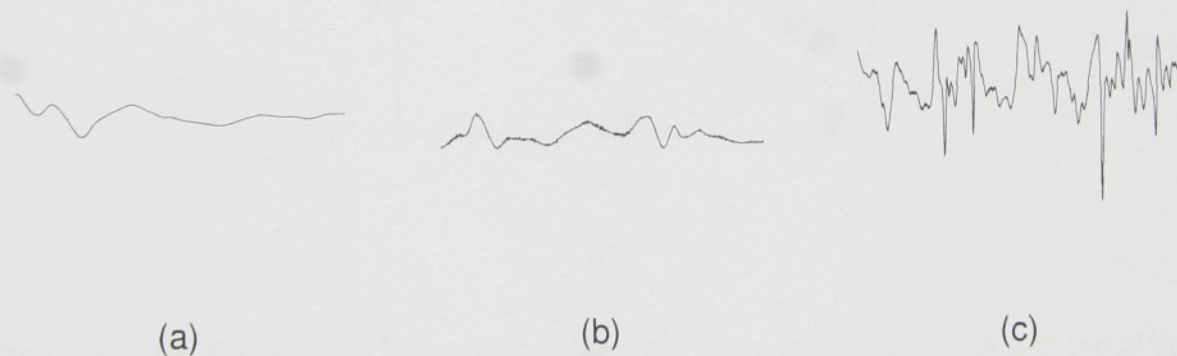
Obrázek 5.12: Vývoj azimutálního proudění ve vertikálním řezu v podkritické oblasti magnetického Taylorova čísla.



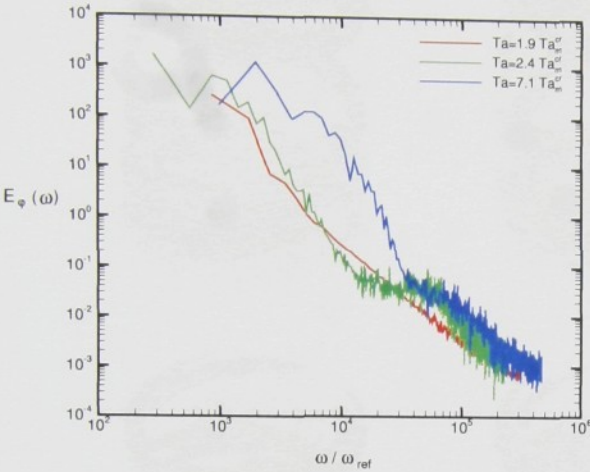
Obrázek 5.13: Časově zprůměrovaná hodnota sekundárního (meridiálního) proudění
(a) $Ta_m = 1.9Ta_m^{cr}$ (b) $Ta_m = 2.4Ta_m^{cr}$ and (c) $Ta_m = 7.1Ta_m^{cr}$



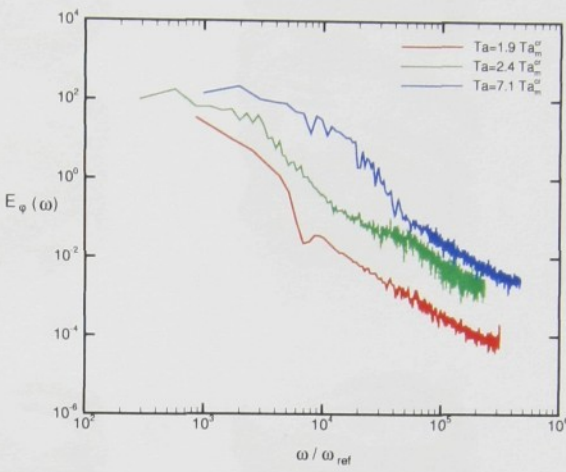
Obrázek 5.14: Časový průběh okamžité azimutální rychlosti na pozici $r=0.75R$ a $z=0.023H$
 (a) $Ta_m=1.9Ta_m^{cr}$ (b) $Ta_m=2.4Ta_m^{cr}$ and (c) $Ta_m=7.1Ta_m^{cr}$



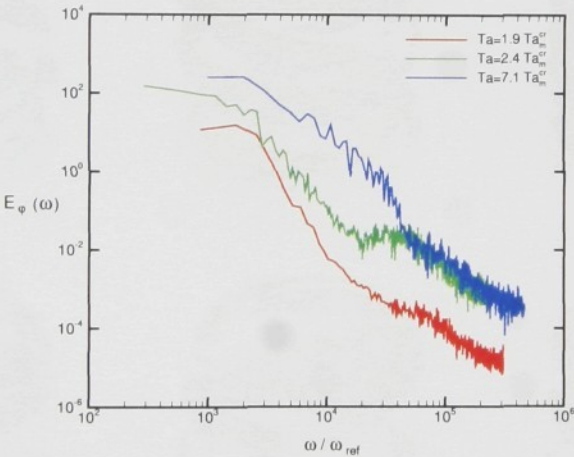
Obrázek 5.15: Časový průběh okamžité azimutální rychlosti na pozici $r=0.75R$ a $z=0.33H$
 (a) $Ta_m=1.9Ta_m^{cr}$ (b) $Ta_m=2.4Ta_m^{cr}$ and (c) $Ta_m=7.1Ta_m^{cr}$



(a)



(b)

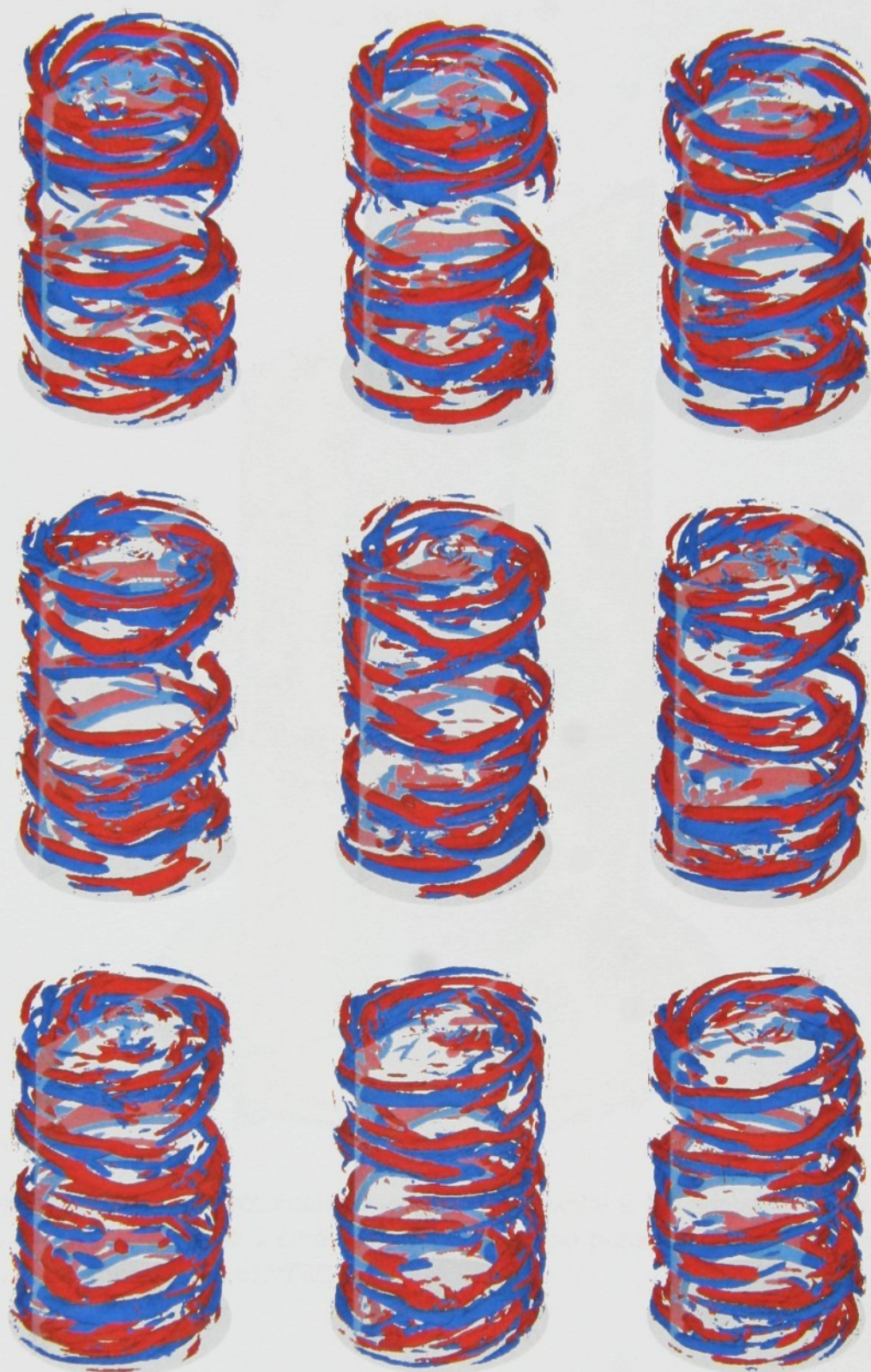


(c)

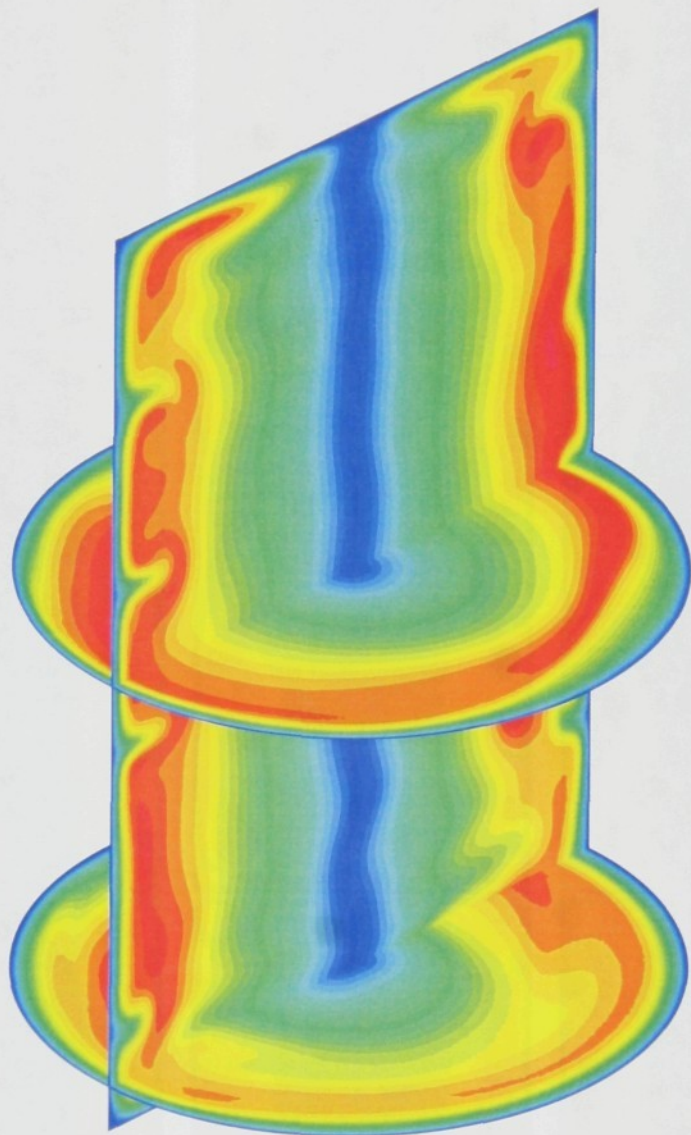
Obrázek 5.16: Energetická frekvenční spektra pro různé pozice (a) v těsné blízkosti stěny $h=0.023H$ (b) $h=0.33H$ a (c) v půlce výšky válcové nádoby $h=0.5H$



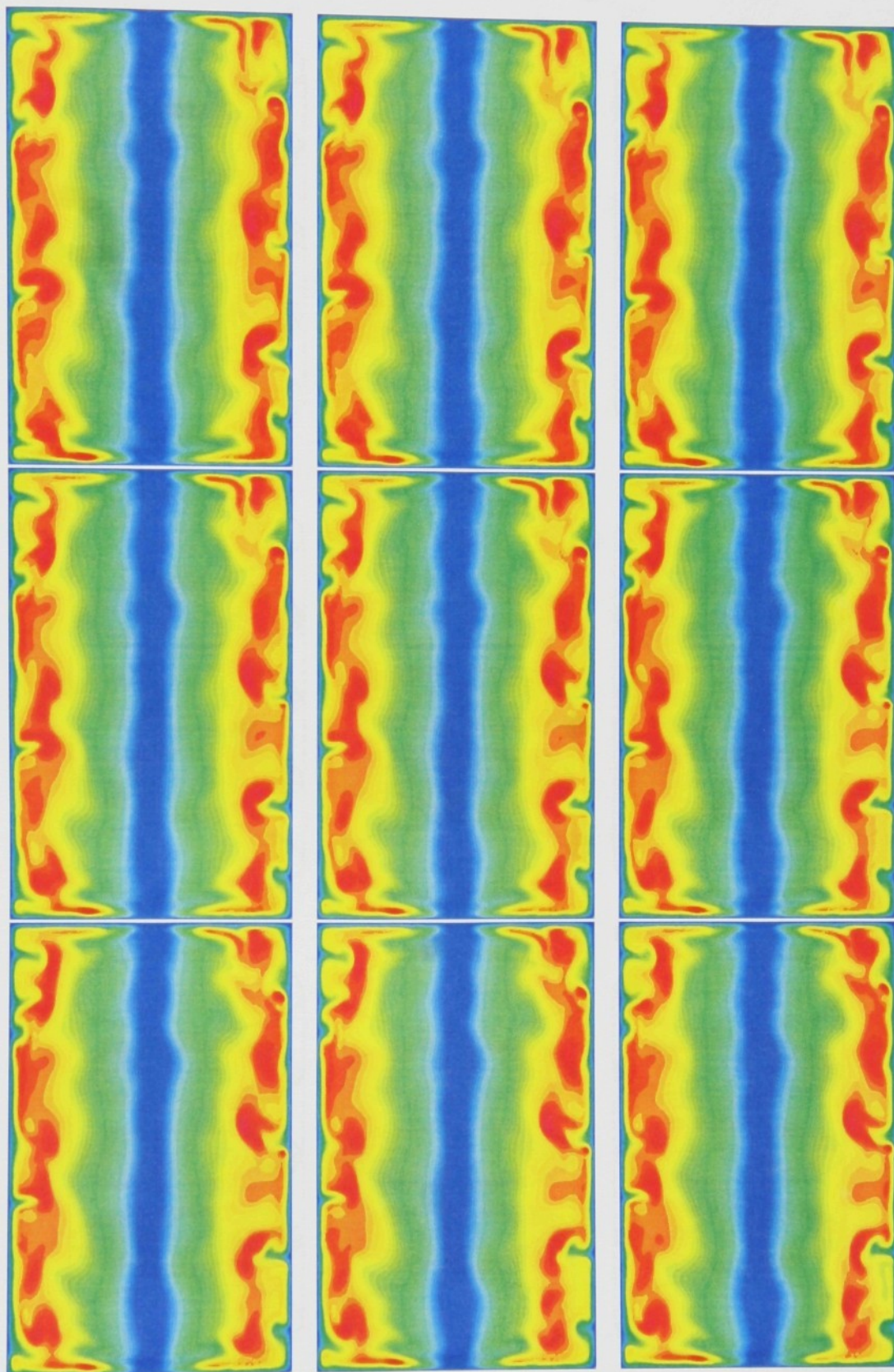
Obrázek 5.17: Časový vývoj dominantních struktur znázorněných pomocí Q' kritéria. Struktury jsou znázorněny pomocí dvou barev označující orientaci rotace vírů. Znáznorněné struktury odpovídají magnetickému Taylorovu číslu $Ta_m = 2.4Ta_m^{cr}$. Obrázky jsou seříděny zleva doprava a zachycují vývoj struktur s časovým krokem 0.28s.



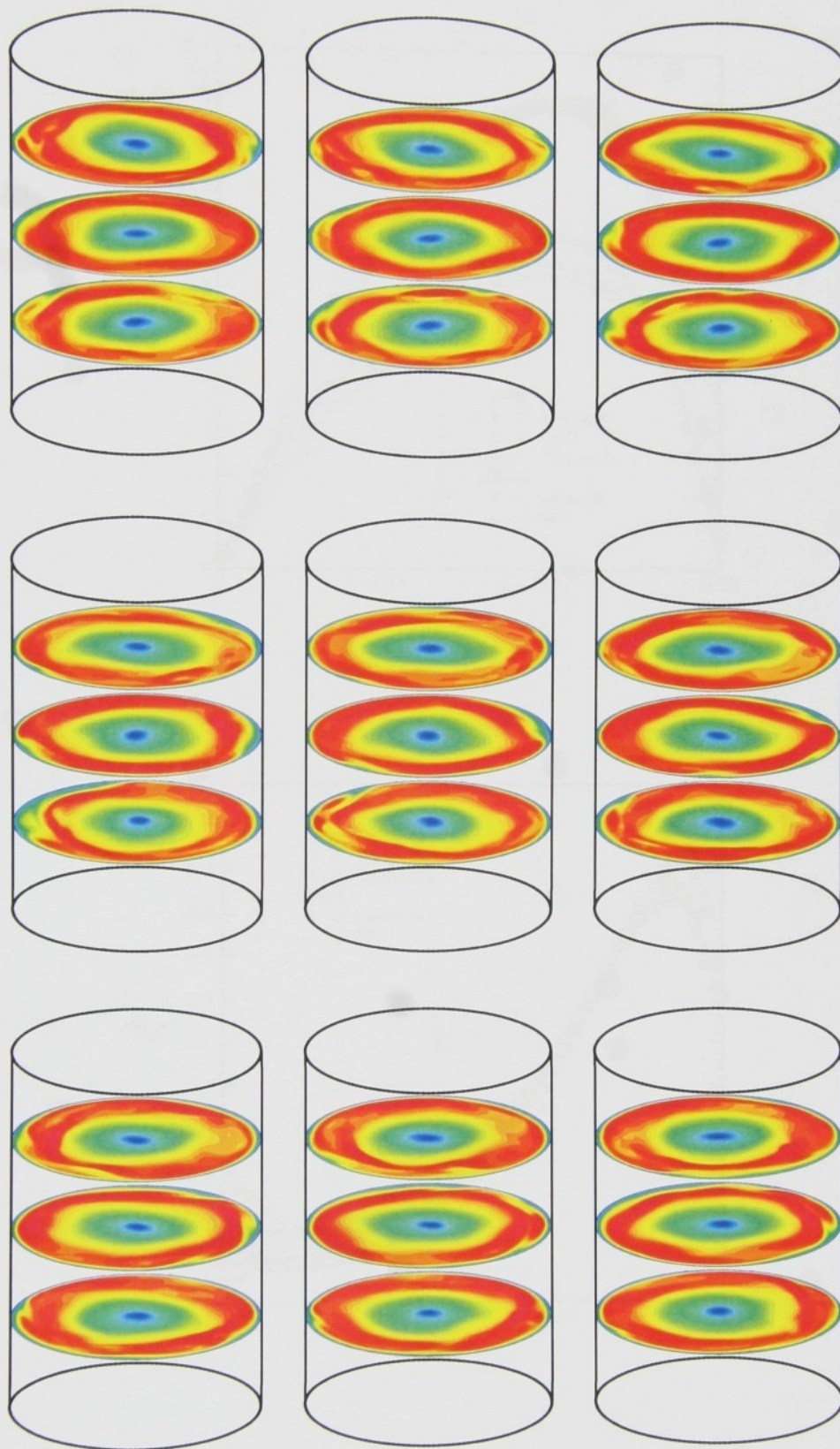
Obrázek 5.18: Časový vývoj dominantních struktur znázorněných pomocí Q' kritéria. Struktury jsou znázorněny pomocí dvou barev označujících orientaci rotace vírů. Znázorněné struktury odpovídají magnetickému Taylorovu číslu $Ta_m = 7.1Ta_m^{cr}$. Obrázky jsou seřazeny zleva doprava. Časový vývoj zachycuje krok o velikosti 0.8s.



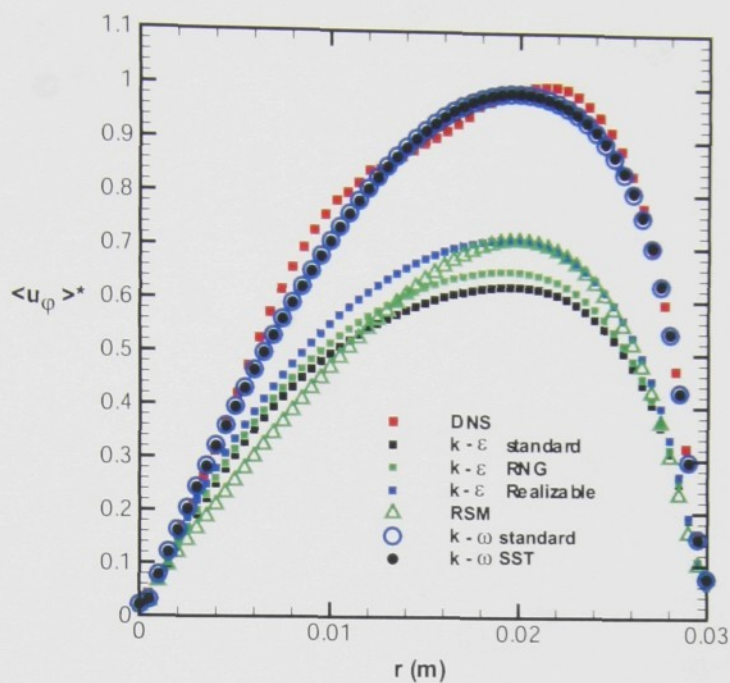
Obrázek 5.19: Okamžitá azimutální rychlost ve vertikálním a horizontálním řezu. Typická oscilace azimutální rychlosti v směru hlavního rotujícího proudění. Znáznorněné rychlostní pole odpovídá případu $Ta_m \approx 1.9Ta_m^{cr}$



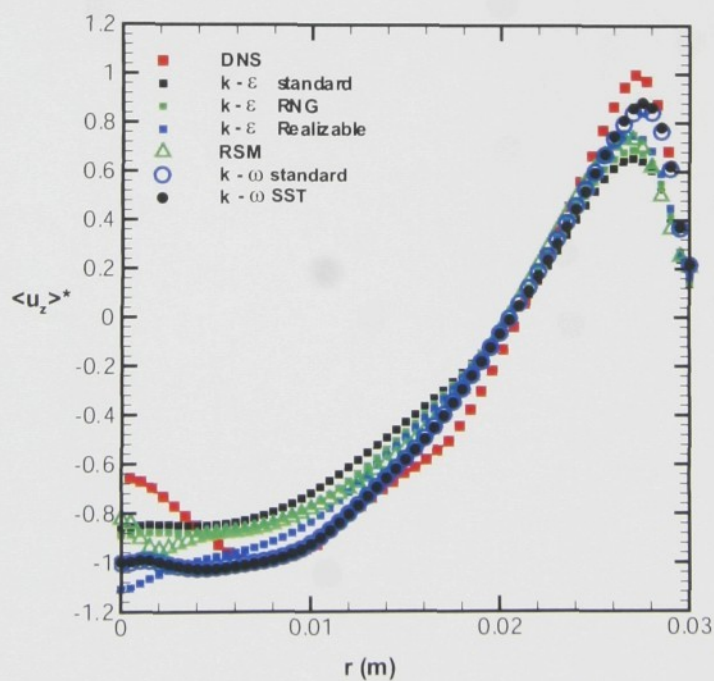
Obrázek 5.20: Časový vývoj okamžité azimutální rychlosti pro případ $Ta_m = 7.1Ta_m^{cr}$. Obrázky jsou seřazeny zleva doprava a zaznamenávají vývoj azimutální rychlosti s časovým krokem 0.08s.



Obrázek 5.21: Časový vývoj okamžité azimutální rychlosti pro případ $Ta_m = 7.1Ta_m^{cr}$. Obrázky jsou seřazeny zleva doprava a znázorňují časový krok 0.8s.



(a)



(b)

Obrázek 5.22: Porovnání rychlostního pole DNS a RANS pro případ Taylorova čísla $2.4Ta_m^{cr}$: (a) porovnání azimutální rychlosti ve výšce $0.98H$ (b) porovnání vertikální složky rychlosti ve výšce $0.98H$