TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI

Fakulta strojní

DYNAMIKA VIBROIZOLAČNÍHO SYSTÉMU S VÍCE STUPNI VOLNOSTI

Disertační práce

2009

MICHAL SIVČÁK

TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI

Fakulta strojní

Disertační práce

k získání akademického titulu Ph.D.

ve studijním oboru

Aplikovaná mechanika – Inženýrská mechanika

Ing. Michal Sivčák

Dynamika vibroizolačního systému s více stupni volnosti

Školitel: prof., RNDr. Jan Šklíba, CSc.

Studijní program: P2302 Stroje a zařízení
Studijní obor: 3901V003 Aplikovaná mechanika
Zaměření: Inženýrská mechanika

Datum konání státní doktorské zkoušky: 19. června 2008

Poděkování

V prvé řadě je mou milou povinností poděkovat mé matce a dalším členům mé rodiny za nekonečnou trpělivost a podporu, které se mi z jejich strany dostávalo po celou dobu mého studia.

Veliký dík také patří mému školiteli, prof. Šklíbovi, za jeho podporu v průběhu studia a jeho ohromnou životní sílu a nadšení pro věc, které mě vždy motivovalo k hledání nových cest vedoucích k řešení dlouhé řady problémů.

Poděkování také patří těm, kteří to vše zaplatili a bez jejich přispění by tato práce nikdy nevznikla. Jmenovitě se jedná o Katedru mechaniky, pružnosti a pevnosti Fakulty strojní Technické univerzity v Liberci, na jejíž půdě jsem studoval a výzkumnému záměru MŠMT – MSM 4674788501 „Optimalizace vlastností strojů v interakci s pracovními procesy a člověkem“.

Nakonec děkuji všem, kteří zde nejsou uvedeni a měli co dočinění s realizací této práce (za to se jím tímto omlouvám).

Anotace

Práce je zaměřena na identifikaci vlivu parametrů dynamického systému odpružení sanitního lehátka na jeho vibroizolační vlastnosti. Je zde pomocí Lagrangeových rovnic druhého druhu odvozen úplný nelineární systém pohybových rovnic. Na základě řešení a analýzy linearizovaného i nelineárního systému je ukázáno jaký vliv mají parametry systému na polohu vlastních frekvencí a odezvu systému na buzení. Matematický model je verifikován porovnáním s experimentálním měřením vlastních frekvencí na ověřovacím modelu platformy.

Klíčová slova

dynamika, vibroizolace, pneumatická pružina, optimalizace, matematický model

Annotation

The doctoral thesis aims to identify the influence of the parameters of an ambulance deck-chair springing dynamic system on its vibration-isolation properties. A complete non-linear system of motion equations is elicited by means of Lagrange equations of the second kind. On grounds of solution and analysis of a linear and nonlinear system, the influence of system parameters on the position of natural frequencies and the response of the system to excitation is shown. The mathematical model is verified by comparing with empirical measuring of natural frequencies on the verification model of platform.

Keywords

Dynamics, vibroisolation, air spring, optimization, mathematical model, damping

Seznam použitých symbolů

V této práci jsou značeny matice velkým tučným písmem, vektory kurzívou se šipkou nad symbolem. Pro označení časové derivace libovolné veličiny je použito symbolu tečky (popř. dvou pro druhé derivace) nad znakem derivované veličiny. Ostatní derivace jsou vypsány v nezkrácené formě standardním způsobem.

Vzhledem k některým specifikům zápisu algoritmu do programu MAPLE bylo nutné mnohé veličiny přeznačit tak, aby odpovídaly správné syntaxi (např. symbol nesmí začínat číslicí).

Symbol	**MAPLE**	**Význam**
α	`alpha`	buzení rotací kolem podélné horizontální osy vozu
β	`beta`	buzení rotací kolem příčné horizontální osy vozu
γ	`gamma`	převodová funkce
R		délka ramene
$\vec{r}$	`` `o[i]` ``	polohový vektor
ϑ	`theta, x[1]`	natočení ramene paralelogramu
φ	`phi, x[3]`	natočení prvního rámu
ψ	`psi, x[5]`	natočení druhého rámu
$\mathbf{M}_\alpha, \mathbf{M}_\beta,$ $\mathbf{M}_\varphi, \mathbf{M}_\psi$	`` `M[alpha]`, … ``	transformační matice pro příslušná natočení
$\mathbf{A}$	`A`	matice hmotnosti
$\mathbf{B_L}$	`B`	matice tlumení získaná z Lagrangeových rovnic
$\mathbf{C_L}$	`C`	matice tuhosti získaná z Lagrangeových rovnic
$\mathbf{B_T}$	`TL`	matice torzního tlumení tlumičů
$\mathbf{C_p}$	`P`	matice torzní tuhosti pružin
q		zobecněná souřadnice
$\vec{q}$		vektor úhlových výchylek
ξ, η, ζ		báze kartézského souřadného systému
Ω	`Omega`	úhlová rychlost
T		označení těžiště, kinetická energie
$\mathbf{T}$		transformační matice
$\vec{u}_i$		vektor unášivé rychlosti
$\vec{u}_{0i}$		vektor výsledné rychlosti
$\vec{v}$		vektor relativní rychlosti
U		potenciální energie
l		délka
p		tlak
V		objem
S_{ef}		efektivní plocha pružiny

F		síla
M		moment síly
m		hmotnost
K		průtokový koeficient
λ		vlastní číslo charakteristického polynomu
k_T		torzní tuhost
$\vec{E}_{L0}$		vektor gravitačních sil
$\vec{E}_p$		vektor momentů pneumatických pružin
$\vec{E}_1$		vektor vnějšího kinematického buzení
f		frekvence, vždy v Hz
ω		úhlová frekvence, vždy v rad/s

Obsah

1. Úvod

Tato disertační práce přímo navazuje na práci a výzkum Ing. J. Prokopa [1], který se zabýval, pod vedením školitele prof. J. Šklíby a s podporou výzkumného záměru MSM 4674788501 „Optimalizace vlastností strojů v interakci s pracovními procesy a člověkem“, návrhem a identifikací dynamických vlastností vibroizolační platformy sanitního lehátka (dále sanitního lehátka nebo lehátka).

Zvolená koncepce závěsu sanitního lehátka se třemi stupni volnosti odpovídá určitému zjednodušujícímu předpokladu o kinematickém buzení podvozku sanitního vozu: omezujeme se na vertikální translaci a kývání kolem podélné a příčné osy vozidla. Vodící mechanizmus je tvořen paralelogramem s osami rovnoběžnými s příčnou osou vozidla a dvojitým kardanovým závěsem, umístěným na horní základně paralelogramu. Vodící mechanizmus je opatřen vibroizolačními členy (pneumatickými pružinami a hydraulickými tlumiči). Vzhledem k tomu, že první vlastní frekvence podvozku sanitního vozu leží v intervalu 1,5-2Hz je pro kvalitní vibroizolační efekt nutné, aby vlastní frekvence systému odpružení sanitního lehátka byly pod hranicí 1Hz.

V současnosti se uvažuje pouze o variantě tzv. pasivní vibroizolace, tedy bez aktivního řízení tlaku v pneumatických pružinách na základě výchylky od rovnovážné polohy a dalších parametrech. Současná koncepce umožní po naložení pacienta automatické ustavení systému lehátka do rovnovážné polohy a poté se pneumatické pružiny uzavřou a dále již nejsou po dobu pohybu vozidla nijak regulovány. Do budoucna (po optimalizaci pasivního systému) se ovšem s aktivní regulací počítá a z toho důvodu je ověřovací vzorek již sestavován s ohledem na jeho budoucí aktivní řízení.

Ing. Prokop ve své disertační práci detailně popsal vlastnosti vibroizolačních prvků použitých pro výrobu ověřovacího vzorku lehátka. Dále vytvořil numerický model tohoto systému v prostředích Adams a PamCrash. Po provedení základních experimentů a porovnáním s numerickými simulacemi došel k závěru, že se první tři vlastní frekvence pohybují vysoko (3-4 Hz) nad požadovanou hranicí 1Hz a z tohoto důvodu je současná konfigurace a použití vibroizolačních prvků nevyhovující.

Ze závěrů Ing. Prokopa jasně vyplývá potřeba identifikovat vliv konstrukce (umístění pružin a tlumičů, …), vibroizolačních prvků (charakteristik jednotlivých pružin a tlumičů) a vnějších vlivů (poloha, hmotnost a natočení pacienta) na velikost vlastních frekvencí systému. Na základě znalosti těchto vlivů lze navrhnout takové konstrukční úpravy a charakteristiky pružin a tlumičů, aby byl vibroizolační efekt co možná nejlepší.

V protikladu k předchozím požadavkům na kvalitní vibroizolaci stojí požadavky na velikost a konstrukci lehátka, jeho rozměrová omezení. To se týká především délky ramene na kterém jsou umístěny pružiny a tlumiče a dále prostorem potřebným pro případné umístění přídavných objemů nebo aplikaci diferenčního zapojení pneumatických pružin. Dalším omezením je možnost výběru z vibroizolačních prvků, které lze reálně vyrobit nebo objednat. To se týká především požadavků na velikost efektivní plochy pružiny a statické rychlostní charakteristiky tlumičů. Posledním limitujícím faktorem je velikost a energetická náročnost zdroje tlakového vzduchu který je možné do sanitního vozu instalovat.

Z výše uvedeného vychází zadání této disertační práce, a to vytvořit model vibroizolační platformy sanitního lehátka a na jeho základě identifikovat vlivy parametrů systému na polohu vlastních frekvencí. Optimalizace užitím multibody systémů (dále MBS) nebo metodou konečných prvků (dále MKP) se jeví v našem případě jako nevýhodná, jelikož je parametrů ovlivňujících dynamické vlastnosti systému mnoho a jsou svou povahou velice různorodé (délka, efektivní plocha, hmotnost,…). Z těchto důvodů je pro účely této práce odvozen, v matematickém programu Maple, systém nelineárních diferenciálních rovnic obecně popisujících dynamické vlastnosti lehátka a jejich následným zpracováním a analýzou získány požadované závislosti vlastních frekvencí na vybraných parametrech systému.

1.1 Lehátko

Ověřovací vzorek vibroizolační platformy sanitního lehátka (obr. 1) byl konstruován s ohledem na jeho využití v rámci vývoje a aplikace aktivního řízení a s ohledem k limitujícím hodnotám týkajících se rozměrů lehátka a zástavbových výšek pružin, tlumičů a snímačů.

Obr. 1: Ověřovací vzorek vibroizolačního systému sanitního lehátka

Skelet lehátka je tvořen hliníkovými profily ITEM 60x30 a 30x30. Jednotlivé rámy jsou navzájem svázány pomocí čepů a kuličkových ložisek. Jako vibroizolační prvek byla vybrána pružina DUNLOP 2 3/4" x2. Čtyři pružiny se nacházejí na ramenech paralelogramu a dvě na každém z kardanových rámů. Tlakový vzduch je rozváděn pomocí elektropneumatických ventilů do dvou párů pružin na paralelogramu a jednotlivě do každé pružiny na kardanových rámech zvlášť.

V základní konfiguraci bez tlumičů jsou první tři vlastní frekvence získané z programu Adams 1.8, 3.8 a 4.6 Hz. Fyzikální vlastnosti lehátka shrnuje následující tabulka.

Tabulka 1: Vybrané mechanické parametry ověřovacího vzorku vibroizolačního systému.

Parametr	Označení v MAPLE	Velikost	Pozn.
$mclo$	mclo	80kg	Případně 100kg a 120 kg.
$mleh$	mleh	28kg	Včetně hmotnosti druhého rámu
$Iclo_1$	Iclo_1	11.3kg.m^2	Odpovídá hmotnosti pacienta 80kg.
$Iclo_2$	Iclo_2	15.2kg.m^2	
$Iclo_3$	Iclo_3	0.58kg.m^2	
S_{01}	`S[0,4]`	0.0022m^2	Ve výchozí konfiguraci jsou všechny aplikované pružiny shodné.
S_{11}	`S[1,4]`	0.0706m	
S_{021}, S_{022}	`S[0,5]`	0.0022m^2	
S_{121}, S_{122}	`S[1,5]`	0.0706m	
S_{031}, S_{032}	`S[0,6]`	0.0022m^2	
S_{131}, S_{132}	`S[1,6]`	0.0706m	
R_{p1}	`r[p,theta]`	0.19m	
R_{p21}	`r[p,phi]`[1]	0.6075m	
R_{p22}	`r[p,phi]`[2]	0.4675m	
R_{p31}	`r[p,psi]`[1]	0.21m	
R_{p32}	`r[p,psi]`[2]	0.21m	

1.2 Uplatnění a aplikace na jiné problémy

Sanitní lehátko najde uplatnění především při převozu vážně zraněných pacientů mezi jednotlivými nemocnicemi a na specializovaná pracoviště (popáleninová centra, ...). V mnoha případech tak nahradí výrazně dražší leteckou záchrannou službu. Pro porovnání uveďme, že cena 1 letové hodiny stojí pojišťovnu 35000,-Kč. Cena letové hodiny je závislá na provozovateli LZS, přesně ji lze dohledat pokud je provozovatelem státní subjekt (policie ČR), soukromé společnosti tuto sazbu nezveřejňují (odhaduje se mezi 50000,- až 90000,-Kč). Naproti tomu 1km ujetý rychlou záchranou službou přijde na 80-120Kč (zdroj sazebník VZP). Pacienta lze také bezpečněji dopravit na pracoviště, která nemají dostupný heliport.

Pro aplikaci v klasických vozech rychlých záchranných služeb hovoří lepší psychický stav pacienta převáženého při vědomí, možná úspora prostředků tišících bolest apod. Při převozu pacientů s těžkými zraněními lze použitím vibroizolační platformy předejít zhoršení zdravotního stavu pacienta při převozu, ať již jde o krvácení nebo poškození vnitřních orgánů.

Velice snadno lze vibroizolační platformu modifikovat i pro jiné účely použití. Matematický model umožňuje v rámci několika minut předepsat systému takové vlastnosti, jaké po něm bude zákazník požadovat. Je prakticky jedno zda se bude jednat o kilogramový křehký balík v malém voze (umělecké předměty, výbušniny,..) nebo o transport několikatunového nákladu po železnici.

2. Matematický model

2.1 Sestavení Lagrangeových rovnic

Zvolená koncepce závěsu sanitního lehátka se třemi stupni volnosti odpovídá určitému zjednodušujícímu předpokladu o kinematickém buzení podvozku sanitního vozu: omezujeme se na vertikální translaci a kývání kolem podélné a příčné osy vozidla. Tato konfigurace umožní kvalitně vybudit všechny základní vlastní frekvence a zároveň nám poskytne základní povědomí o chování (odezvě) systému při vertikálním buzení a natáčení kolem horizontálních os. Na druhou stranu není možné pomocí takto sestaveného modelu identifikovat vliv akcelerace (popř. decelerace) a vliv působení odstředivého zrychlení při průjezdu zatáčkou. Těmito problémy se bude podrobně zabývat aktivní systém, jenž by měl udržovat ložnou plochu platformy kolmou na výsledný vektor všech působících zrychlení.

Vodící mechanizmus je tvořen paralelogramem s osami rovnoběžnými s příčnou osou vozidla a dvojitým kardanovým závěsem, umístěným na horní základně paralelogramu. Vodící mechanizmus je opatřen vibroizolačními členy (pneumatickými pružinami a hydraulickými tlumiči).

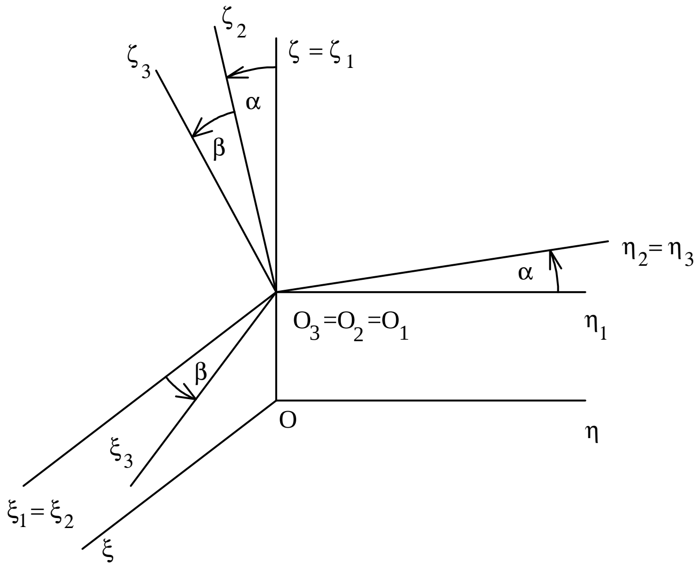
Odvození příslušného dynamického systému a jeho analýza má umožnit výběr vibroizolačních členů a návrh jejich umístění ve vodícím mechanizmu tak, aby vibroizolace při zvoleném kinematickém buzení a libovolném umístění zátěže byla optimální.

Pro velkou časovou náročnost a rozsáhlost řešeného problému, byly veškeré výpočty uvedené v této zprávě realizovány pomocí matematického softwaru Maple V. Kompletní výpis programu je uveden v přílohách.

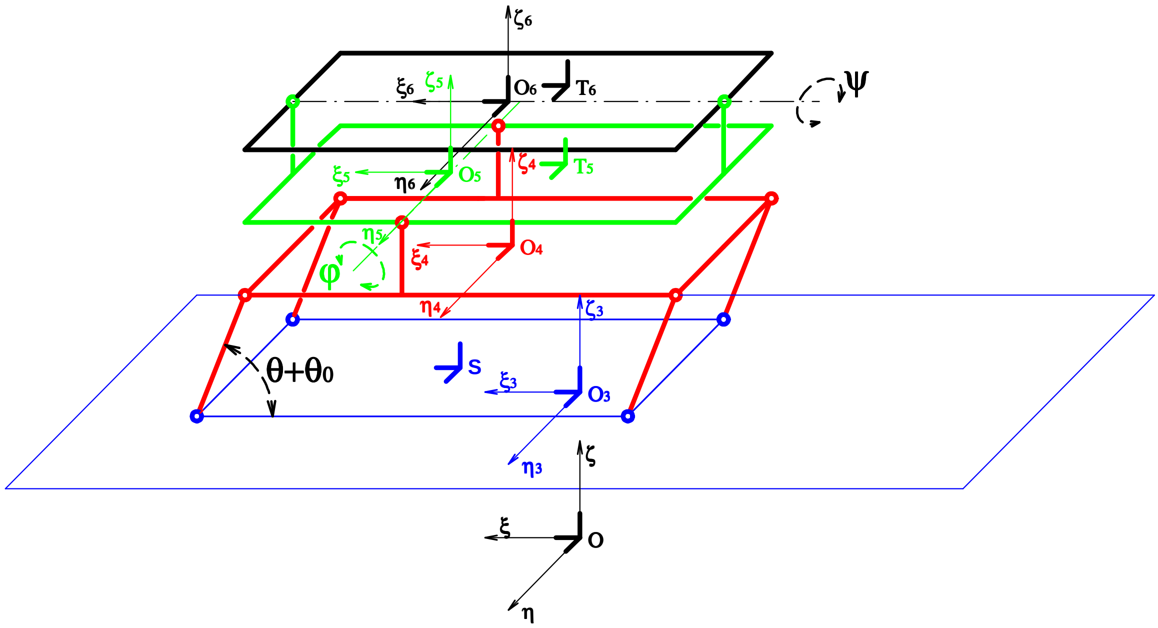
2.1.1 Přípravné kinematické úvahy

Pro popis obecné polohy lehátka a lidského těla na něm vycházíme ze souřadnicové soustavy $O_{\xi_0\eta_0\zeta_0}$ pevně spojené se zemí (poledník, rovnoběžka, vertikála), vůči níž je náš základní systém $O_{\xi\eta\zeta}$ otočen o konstantní úhel kurzu χ kolem osy $\zeta \equiv \zeta_0$.

Dle předpokladu vysloveného v úvodu, dospíváme k obecné poloze ložné plochy automobilu nejprve vertikálním posunutím $\vec{r}_\zeta^{\,T} = [0,0,\zeta(t)]$ (systém $O_{\xi_1\eta_1\zeta_1}$ - viz. obr. 2), pak dvěma pootočeními $\alpha(t), \beta(t)$. Systém $O_{\xi_2\eta_2\zeta_2}$ je otočen o $\alpha(t)$ vůči $O_{\xi_1\eta_1\zeta_1}$ kolem osy $\zeta \equiv \zeta_1$ a systém $O_{\xi_3\eta_3\zeta_3}$ o $\beta(t)$ vůči $O_{\xi_2\eta_2\zeta_2}$ kolem osy $\eta_2 \equiv \eta_3$. Těmto otočením přísluší transformační matice a úhlové rychlosti.



Obr. 2: Kinematické schéma buzení



Obr. 3: Kinematické schéma systému odpružení sanitního lehátka.

$$\mathbf{M}_{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin a \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}, \vec{\Omega}_{\alpha} = \begin{Vmatrix} \dot{\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} \quad \mathbf{M}_{\beta} = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix}, \vec{\Omega}_{\beta} = \begin{Vmatrix} 0 \\ \dot{\beta} \\ 0 \end{Vmatrix}. \quad (1)$$

Souřadný systém $O_{\xi_3\eta_3\zeta_3}$ je pevně spojen s podvozkem, tedy s ložnou plochou sanitního vozu a tím i spodní základnou paralelogramu. Vektor vertikálního posuvu v tomto systému bude $\vec{r}_{\zeta 3}$; translaci, realizovanou otočením pák paralelogramu o úhel $(\vartheta + \vartheta_0)$ vyjádříme vektorem $\vec{R}^{T}_{TR}$. Platí:

$$\vec{r}_{\zeta 3} = \mathbf{M}_{\beta} \cdot \mathbf{M}_{\alpha} \cdot \vec{r}_{\zeta} \,, \qquad \vec{R}^{T}_{TR}\left(R\cos(\vartheta + \vartheta_0), 0, R\sin(\vartheta + \vartheta_0)\right). \quad (2)$$

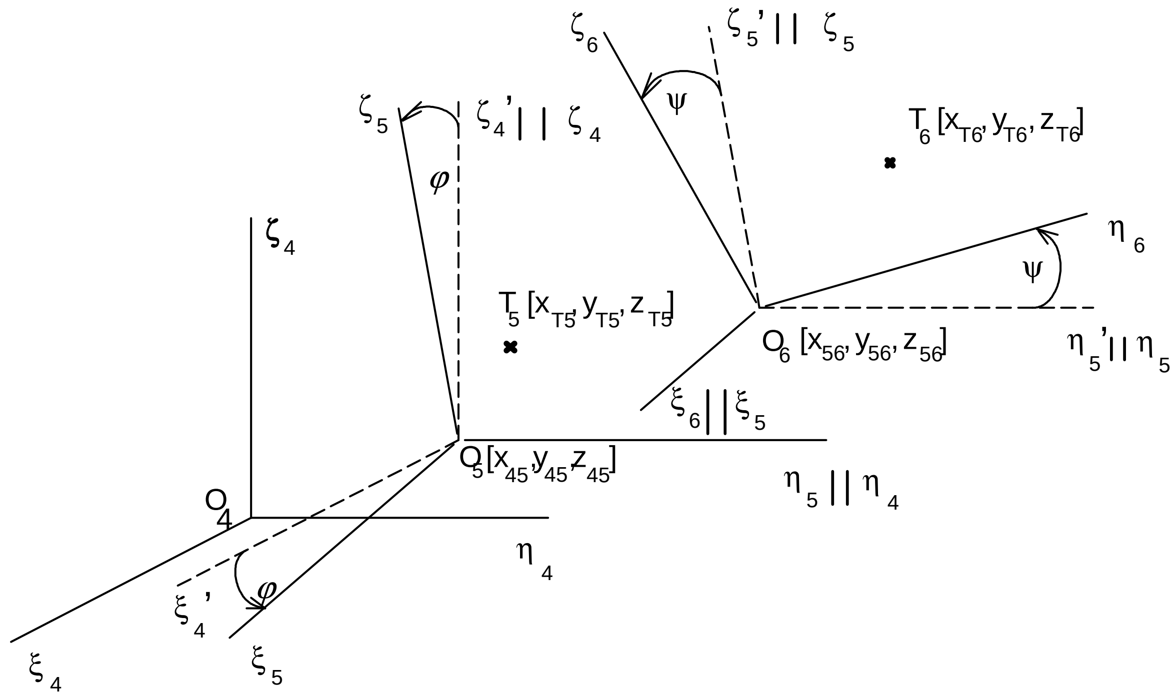
Souřadnicový systém $O_{\xi_3\eta_3\zeta_3}$ bude pro nás výchozím systémem, ve kterém budeme sledovat pohyb lehátka. Do jistého bodu S (s polohovým vektorem $\vec{r}_{S3}(x_{S3}, y_{S3}, z_{S3})$) umístíme střed otáčení těžiště horní základny paralelogramu O_4 s polohovým vektorem $\vec{r}_{04}$.

Souřadný systém $O_{\xi_4\eta_4\zeta_4}$ je spojen s horní základnou paralelogramu. Za předpokladu, že těžiště ramen leží v polovině jejich délky platí, označíme-li $\vec{r}_{Ci}$ polohové vektory dolních čepů (i=1…4) a pro polohové vektory těžišť :

$$\vec{r}_{O4} = \vec{r}_{S3} + \vec{R}_{TR} \ , \ \vec{r}_{3Ti} = \vec{r}_{3Ci} + \frac{1}{2}\vec{R}_{TR} \tag{3}$$

Respektujeme dále možnost, že dvojitý kardanův závěs je patrový s mimoběžnými osami (viz obr.2). Respektování této „mimoběžnosti“ přináší ovšem značný nárůst příslušných analytických vztahů, zároveň nám ale umožní posoudit jeho vliv a jak bude patrné, je zavedení těchto parametrů nezbytné pro přesnou formulaci statické rovnováhy a vyvážení zatíženého lehátka do rovnovážné polohy.

K systému $O_{\xi_5\eta_5\zeta_5}$, pevně spojenému s prvním (vnějším) kardanovým rámem, dospíváme nejprve posunutím o polohový vektor $\vec{r}_{45}^{\,T}(x_{45}, 0, z_{45})$ a posléze otočením kolem osy η_5 o úhel φ - tomu přísluší transformační matice $\mathbf{M}_\varphi$ a úhlová rychlost $\vec{\boldsymbol{\Omega}}_\varphi$. V tomto systému je rádius vektor těžiště prvního Kardanova rámu $\vec{r}_{T5}(x_{T5}, y_{T5}, z_{T5})$.



Obr. 4: Detail přechodu ze souřadného systému O_4 do O_6

K systému $O_{\xi_6\eta_6\varsigma_6}$ pevně spojenému s druhým – vnitřním rámem dospíváme analogicky předchozímu – nejprve posunutím o vektor $\vec{r}_{56}^{\,T}\left(x_{56},0,z_{56}\right)$ a pootočeném o úhel ψ kolem osy η_6, jemuž přísluší matice přechodu $\mathbf{M}_\psi$ a úhlová rychlost $\vec{\Omega}_\psi$. Platí:

$$\mathbf{M}_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix}, \vec{\Omega}_\varphi = \begin{Vmatrix} 0 \\ \dot{\varphi} \\ 0 \end{Vmatrix} \qquad \mathbf{M}_\psi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & \sin\psi \\ 0 & -\sin\psi & \cos\psi \end{bmatrix}, \vec{\Omega}_\psi = \begin{Vmatrix} \dot{\psi} \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} \tag{4}$$

Pro polohový vektor bodu O_5 a O_6 platí:

$$\vec{r}_{O5} = \vec{r}_{O4} + \vec{r}_{45}\ ,\ \vec{r}_{O6} = \vec{r}_{O5} + \mathbf{M}_\varphi^{-1}.\vec{r}_{56}\,. \tag{5}$$

Konečně označme polohový vektor těžiště prvního rámu v soustavě $O_{\xi_5\eta_5\zeta_5}$ jako $\vec{r}_{T5}^{\,T}\left(x_{T5},y_{T5},z_{T5}\right)$ a polohový vektor výsledného těžiště druhého rámu,lehátka a pacienta v soustavě $O_{\xi_6\eta_6\varsigma_6}$ jako $\vec{r}_{T6}(x_{T6},y_{T6},z_{T6})$. Pro tyto polohové vektory v soustavě $O_{4\xi 3\eta 3\zeta 3}$ platí:

$$\vec{r}_{T54} = \vec{r}_{05} + \mathbf{M}_\varphi^{-1}.\vec{r}_{T5}\,,\ \vec{r}_{T64} = \vec{r}_{06} + \mathbf{M}_\varphi^{-1}\cdot\mathbf{M}_\psi^{-1}.\vec{r}_{T6}\,. \tag{6}$$

Zavedeme vektor rychlosti vertikálního posunutí:

$$\vec{v}_\zeta = \frac{d}{dt}\vec{u}_\zeta = \frac{d}{dt}\left(\mathbf{M}_\beta.\mathbf{M}_\alpha.\vec{r}_\zeta\right) \tag{7}$$

a vektor translační rychlosti paralelogramu:

$$\dot{\vec{R}}_{TR} = \left[-R\dot{\vartheta}\sin(\vartheta+\vartheta_0),0,R\dot{\vartheta}\cos(\vartheta+\vartheta_0)\right]. \tag{8}$$

Výsledné úhlové rychlosti jednotlivých členů jsou dány vztahy:

$$\vec{\Omega}_3 = \mathbf{M}_\beta.\vec{\Omega}_\alpha + \vec{\Omega}_\beta\,,\quad \vec{\Omega}_3 = \vec{\Omega}_4\,,\quad \vec{\Omega}_5 = \mathbf{M}_\varphi.\vec{\Omega}_4 + \vec{\Omega}_\varphi\,,\quad \vec{\Omega}_6 = \mathbf{M}_\psi.\vec{\Omega}_5 + \vec{\Omega}_\psi \tag{9}$$

a pro ramena paralelogramu:

$$\vec{\Omega}_R = \vec{\Omega}_3 + \vec{\Omega}_\vartheta\ ,\ \vec{\Omega}_\vartheta^T = \left[0,\dot{\vartheta},0\right]. \tag{10}$$

Rozepíšeme-li jednotlivé vztahy, obdržíme:

$$\vec{\Omega}_4^T = \left[\dot{\alpha}\cos\beta,\dot{\beta},\dot{\alpha}\sin\beta\right]\ ,\quad \vec{\Omega}_5^T = \left[\dot{\alpha}\cos(\beta+\varphi),\dot{\beta}+\dot{\varphi},\dot{\alpha}.\sin(\beta+\varphi)\right],$$

$$\vec{\Omega}_6^T = \left[\dot{\psi}+\dot{\alpha}\cos(\beta+\varphi),(\dot{\beta}+\dot{\varphi})\cos\psi+\dot{\alpha}\sin\psi\sin(\beta+\varphi),-\sin\psi(\dot{\beta}+\dot{\varphi})+\dot{\alpha}\cos\psi\sin(\beta+\varphi)\right]. \tag{11}$$

Označme dále $\vec{u}_3$ unášivou rychlost středu S_3 a středů čepů C_{3k} v soustavě $O_{\xi_3\eta_3\zeta_3}$. Platí

$$\vec{u}_3 = \vec{v}_\zeta + \left(\vec{\mathbf{\Omega}}_3 \times \vec{r}_{S3}\right), \tag{12}$$

$$\vec{u}_{C3k} = \vec{v}_\zeta + \left(\vec{\mathbf{\Omega}}_3 \times \vec{r}_{C3k}\right) \; . \tag{13}$$

Pro její složky obdržíme:

$$\begin{Vmatrix} u_{3x} \\ u_{3y} \\ u_{3z} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -\dot{\zeta}\sin\beta\cos\alpha + \dot{\beta}(z_S - \zeta\cos\beta\cos\alpha) + \dot{\alpha}(-y_S\sin\beta + \zeta\sin\beta\sin\alpha) \\ \dot{\zeta}\sin\alpha + x_S\dot{\alpha}\sin\beta - z_S\dot{\alpha}\cos\beta + \zeta\dot{\alpha}\cos\alpha \\ \dot{\zeta}\cos\beta\cos\alpha + \dot{\beta}(-x_S - \zeta\sin\beta\cos\alpha) + \dot{\alpha}(y_S\cos\beta - \zeta\cos\beta\sin\alpha) \end{Vmatrix}. \tag{14}$$

Výsledná rychlost bodu rotace horní základny je:

$$\vec{u}_{04} = \vec{u}_3 + (\vec{\mathbf{\Omega}}_3 \times \vec{R}_{TR}) + \dot{\vec{R}}_{TR} = \vec{v}_\zeta + \vec{\mathbf{\Omega}}_3 \times (\vec{r}_{S3} + \vec{R}_{TR}) + \dot{\vec{R}}_{TR} \, . \tag{15}$$

Výsledná rychlost bodu rotace prvního rámu (uloženého na horní základně) je:

$$\vec{u}_{05} = \vec{u}_{04} + \vec{\mathbf{\Omega}}_4 \times \vec{r}_{45} = \vec{u}_3 + (\vec{\mathbf{\Omega}}_3 + \vec{R}_{TR}) + \dot{\vec{R}}_{TR} + (\vec{\mathbf{\Omega}}_3 \times \vec{r}_{45}) \, ,$$

$$\vec{u}_{05} = \vec{v}_\zeta + \vec{\mathbf{\Omega}}_3 \times (\vec{r}_{S3} + \vec{R}_{TR} + \vec{r}_{45}) + \dot{\vec{R}}_{TR} \, . \tag{16}$$

Výsledná rychlost bodu rotace druhého rámu (uloženého na prvním rámu) je:

$$\begin{aligned} \vec{u}_{06} &= \vec{u}_{05} + (\vec{\mathbf{\Omega}}_5 \times \mathbf{M}_\varphi^{-1}\vec{r}_{56}) = \vec{u}_{05} + (\vec{\mathbf{\Omega}}_3 + \vec{\mathbf{\Omega}}_\varphi) \times \mathbf{M}_\varphi^{-1}\vec{r}_{56} = \\ &= \vec{v}_\zeta + \left[\vec{\mathbf{\Omega}}_3 \times \left(\vec{r}_{S3} + \vec{R}_{TR} + \vec{r}_{45}\right)\right] + \dot{\vec{R}}_{TR} + \left(\vec{\mathbf{\Omega}}_3 + \vec{\mathbf{\Omega}}_\varphi\right) \times \mathbf{M}_\varphi^{-1}\vec{r}_{56} = \quad , \\ &= \vec{v}_\zeta + \left[\vec{\mathbf{\Omega}}_3 \times \left(\vec{r}_{S3} + \vec{R}_{TR} + \vec{r}_{45} + \mathbf{M}_\varphi^{-1}\vec{r}_{56}\right)\right] + \left(\vec{\mathbf{\Omega}}_\varphi \times \mathbf{M}_\varphi^{-1}\vec{r}_{56}\right) + \dot{\vec{R}}_{TR} \end{aligned}$$

$$\vec{u}_{06} = \vec{u}_{05} + \left(\vec{\mathbf{\Omega}}_3 + \vec{\mathbf{\Omega}}_\varphi\right) \times \mathbf{M}_\varphi^{-1}\vec{r}_{56} \, . \tag{17}$$

Platí:

$$\begin{aligned} \vec{u}_{05} &= \vec{u}_{04} + \left(\vec{\mathbf{\Omega}}_3 \times \vec{r}_{45}\right), \\ \vec{u}_{06} &= \vec{u}_{04} + \vec{\mathbf{\Omega}}_3 \times \left(\vec{r}_{45} + \mathbf{M}_\varphi^{-1}\vec{r}_{56}\right) + \left(\vec{\mathbf{\Omega}}_\varphi \times \mathbf{M}_\varphi^{-1}\vec{r}_{56}\right). \end{aligned} \tag{18}$$

Pro relativní rychlosti těžiště prvního rámu T_5, s ohledem na rotaci středu O_5 platí:

$$\vec{v}_{TS5} = \vec{\mathbf{\Omega}}_5 \times \vec{r}_{T5} \, . \tag{19}$$

Pro relativní rychlosti těžiště druhého rámu T_6, s ohledem na rotaci středu O_6 platí:

$$\vec{v}_{TS6} = \vec{\Omega}_6 \times \vec{r}_{T6}. \tag{20}$$

Ze vztahů (15, 16, 17) oddělíme členy nezávislé na souřadnicích ϑ, φ, ψ . Zavedeme:

$$\begin{aligned} \vec{v}_{04} &= \vec{v}_\zeta + \vec{\Omega}_3 \times \vec{r}_{S3}, \\ \vec{v}_{05} &= \vec{v}_\zeta + \vec{\Omega}_3 \times (\vec{r}_{S3} + \vec{r}_{45}). \end{aligned} \tag{21}$$

a poté dostaneme:

$$\begin{aligned} \vec{u}_{04} &= \vec{v}_{04} + \left(\vec{\Omega}_3 \times \vec{R}_{TR}\right) + \dot{\vec{R}}_{TR}, \\ \vec{u}_{05} &= \vec{v}_{05} + \left(\vec{\Omega}_{03} \times \vec{R}_{TR}\right) + \dot{\vec{R}}_{TR}, \\ \vec{u}_{06} &= \vec{v}_{05} + \left(\vec{\Omega}_3 \times \vec{R}_{TR}\right) + \dot{\vec{R}}_{TR} + \left(\vec{\Omega}_3 + \vec{\Omega}_\varphi\right) \times \mathbf{M}_\varphi^{-1} \vec{r}_{56}. \end{aligned} \tag{22}$$

2.1.2 Kinetická a potenciální energie systému

Při výpočtu kinetické energie využíváme Königovy věty

$$T_i = T_{i1} + T_{i2} + T_{i3}, \tag{23}$$

kde index nabývá následujících hodnot: i = 1 horní základna, i = 2 první rám, i = 3 druhý rám, i = 4 ramena paralelogramu. Přičemž je: T_{i1} je kinetická energie bodu, ve kterém provádíme základní rozklad, T_{i2} je skalární součin rychlosti bodu rozkladu a relativní rychlosti těžiště vůči němu, násobená hmotností členu (splývá-li těžiště s bodem rozkladu, je $T_{i2} = 0$), T_{i3} je kinetická energie rotace tělesa kolem tohoto bodu.

Kinetická energie horní základny

Rozklad je proveden v těžišti horní základny, proto podle Königovy věty platí (za předpokladu, že osy ξ_4, η_4, ζ_4 jsou hlavními osami setrvačnosti):

$$T_{11} = \frac{1}{2} m_4 \vec{u}_{04}^2, \tag{24}$$

$$T_{12} = 0, \tag{25}$$

$$T_{13} = \frac{1}{2}\left(J_{4x}\Omega_{3x}^2 + J_{4y}\Omega_{3y}^2 + J_{4z}\Omega_{3z}^2\right). \tag{26}$$

Kinetická energie prvního rámu

$$T_{21} = \frac{1}{2} m_5 \vec{u}_{05}^2, \tag{27}$$

$$T_{22} = m_5 \vec{v}_{O5} \cdot \vec{v}_{TS5}, \tag{28}$$

$$T_{23} = \frac{1}{2}\left(J_{5x}\Omega_{3x}^2 + J_{5y}(\Omega_{3y}^2 + \dot{\varphi})^2 + J_{5z}\Omega_{3z}^2\right) = \\ = \frac{1}{2}J_{5y}.\dot{\varphi}^2 + 2J_{5y}\Omega_{5y}.\dot{\varphi} + \frac{1}{2}\left(J_{5x}\Omega_{3x}^2 + J_{5y}\Omega_{3y}^2 + J_{5z}\Omega_{3z}^2\right). \tag{29}$$

Kinetická energie horního rámu, lůžka a pacienta

$$T_{31} = \frac{1}{2}m_6\vec{u}_{06}^2, \tag{30}$$

$$T_{32} = m_6\vec{v}_{O6}.\vec{v}_{TS6}. \tag{31}$$

Při určení T_{33} vycházíme z obecné polohy těla na lehátku, takže souřadnicový systém $O_{\xi_6\eta_6\zeta_6}$ nemusí splývat s hlavními osami setrvačnosti.

$$T_{33} = \frac{1}{2}\left(J_{6x}\Omega_{6x}^2 + J_{6y}\Omega_{6y}^2 + J_{6z}\Omega_{6z}^2 - 2D_{6xy}\Omega_{6x}\Omega_{6y} - 2D_{6xz}\Omega_{6x}\Omega_{6z} - 2D_{6yz}\Omega_{6y}\Omega_{6z}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\{J_{6x}[\dot{\psi} + \dot{\alpha}\cos(\beta+\varphi)]^2 + J_{6y}[(\dot{\beta}+\dot{\varphi})\cos\psi + \dot{\alpha}\sin\psi\sin(\beta+\varphi)]^2 + \\ + J_{6z}[-\sin\psi(\dot{\beta}+\dot{\varphi}) + \dot{\alpha}.\cos\psi.\sin(\beta+\varphi)]^2 - \\ - 2D_{6xy}[\dot{\psi} + \dot{\alpha}\cos(\beta+\varphi)].[(\dot{\beta}+\dot{\varphi})\cos\psi + \dot{\alpha}\sin\psi\sin(\beta+\varphi)] - \\ - 2D_{6xz}[\dot{\psi} + \dot{\alpha}\cos(\beta+\varphi)].[-\sin\psi(\dot{\beta}+\dot{\varphi}) + \dot{\alpha}.\cos\psi.\sin(\beta+\varphi)] - \\ - 2D_{6yz}[(\dot{\beta}+\dot{\varphi})\cos\psi + \dot{\alpha}\sin\psi\sin(\beta+\varphi)].[-\sin\psi(\dot{\beta}+\dot{\varphi}) + \dot{\alpha}.\cos\psi.\sin(\beta+\varphi)]\}. \tag{32}$$

Kinetická energie ramen

Celková kinetická energie ramen je určena jako $T_4 = 4.(T_{41} + T_{42} + T_{43})$

$$T_{41} = \frac{1}{2}m_R\sum_{k=1}^{4}\left(\vec{u}_{T3k} + \frac{1}{2}\dot{\vec{R}}_{TR}\right) = \\ = \frac{1}{2}m_R\sum_{k=1}^{4}\left[\frac{R^2}{4}\dot{\vartheta}^2 + R\dot{\vartheta}\left(-u_{3Txk}\sin(\vartheta+\vartheta_0) + u_{3Tzk}\cos(\vartheta+\vartheta_0)\right) + u_{3Txk}^2 + u_{3Tyk}^2 + u_{3Tzk}^2\right], \tag{33}$$

$$T_{42} = 0, \tag{34}$$

$$T_{43} = \frac{1}{2}\left[J_{Rx}\Omega_{3x}^2 + J_{Ry}\left(\Omega_{3y}^2 + \dot{\vartheta}\right)^2 + J_{Rz}\Omega_{3z}^2\right]. \tag{35}$$

2.1.3 Potenciální energie tíhových sil

Poznamenejme, že souřadnice těžišť (ve směru osy z) stanovujeme v základní, „absolutní“ soustavě $O_{\xi\eta\zeta}$. V naší výchozí soustavě $O_{\xi_3\eta_3\zeta_3}$ jsou složky příslušných hmotných středů vyjádřeny vztahy (3),(5) a (6). Pro transformaci do základní soustavy $O_{\xi\eta\zeta}$ platí:

$$\vec{r}_{T4O} = \vec{r}_\zeta + \mathbf{M}_\alpha^{-1}.\mathbf{M}_\beta^{-1}.\vec{r}_{O4}, \tag{36}$$

$$\vec{r}_{T5O} = \vec{r}_\zeta + \mathbf{M}_\alpha^{-1}.\mathbf{M}_\beta^{-1}.\vec{r}_{T5}, \tag{37}$$

$$\vec{r}_{T6O} = \vec{r}_\zeta + \mathbf{M}_\alpha^{-1}.\mathbf{M}_\beta^{-1}.\vec{r}_{T6}. \tag{38}$$

Pak máme postupně pro horní základnu paralelogramu:

$$\begin{aligned} U_4 = m_4.g.z_{T4O} = m_4 g\big[-\left(x_{S3} + R\cos(\vartheta+\vartheta_0)\right)\cos\alpha\sin\beta + y_{S3}\sin\alpha + \\ + \left(z_{S3} + R\sin(\vartheta+\vartheta_0)\right)\cos\alpha\cos\beta + \zeta\big], \end{aligned} \tag{39}$$

pro první rám:

$$\begin{aligned} U_5 = m_5.g.z_{O5O} = m_5 g[-\left(x_{S3} + R\cos(\vartheta+\vartheta_0) + x_{45}\right)\cos\alpha\sin\beta + y_{S3}\sin\alpha + \\ + \left(z_{S3} + R\sin(\vartheta+\vartheta_0)\right)\cos\alpha\cos\beta + \zeta - x_{T5}\cos\alpha\sin(\beta+\varphi) + y_{T5}\sin\alpha + \\ + z_{T5}\cos\alpha\cos(\beta+\varphi)] \end{aligned}, \tag{40}$$

pro druhý rám:

$$\begin{aligned} U_6 = m_6.g.z_{O6O} = m_6.g.\{-\cos\alpha\sin\beta[x_{S3} + R\cos(\vartheta+\vartheta_0) + z_{56}\sin\varphi + x_{T6}\cos\varphi + \\ y_{T6}\sin\varphi\sin\psi + z_{T6}\sin\varphi\cos\psi + x_{45} + x_{56}\cos\varphi] + \sin\alpha[y_{S3} + y_{T6}\cos\psi - z_{T6}\sin\psi] + \\ + \cos\alpha\cos\beta.[z_{S3} + R\sin(\vartheta+\vartheta_0) + z_{45} + z_{56}\cos\varphi - x_{T6}\sin\varphi + y_{T6}\cos\varphi\sin\psi + \\ + z_{T6}\cos\varphi\cos\psi - x_{56}\sin\varphi] + \zeta\} \end{aligned}. \tag{41}$$

analogicky obdržíme pro potenciální energie ramen:

$$\begin{aligned} U_{4R} = \sum_{k=1}^{4} m_4 g z_{TRk} = m_4 g\Big\{\sum_{k=1}^{4}\left(-x_{3Ck}\cos\alpha\sin\beta + y_{3Ck}\sin\alpha\right) + 4z_{C3}\cos\alpha\cos\beta + 4\zeta + \\ + 2\left[-R\cos(\vartheta+\vartheta_0)\cos\alpha\sin\beta + R\sin(\vartheta+\vartheta_0)\cos\alpha\cos\beta\right]\Big\} \end{aligned}. \tag{42}$$

Momenty konzervativních sil

Momenty konzervativních sil byly stanoveny jako derivace potenciální energie podle příslušné úhlové souřadnice.

$$\frac{\partial U}{\partial \vartheta} = \left(m_4 + m_5 + m_6 + 2m_r\right)g\left[R\cos\alpha\cos(\vartheta+\vartheta_0-\beta)\right], \tag{43}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi}=m_5 g\cos\alpha[-x_{T5}\cos(\beta+\varphi)-z_{T5}\sin(\beta+\varphi)]+$$
$$+m_6 g\cos\alpha[\cos(\beta+\varphi)(-x_{56}-x_{T6})-z_{56}\sin(\beta+\varphi)+, \tag{44}$$
$$+\cos\beta\sin\varphi(y_{T6}\sin\psi+z_{T6}\cos\psi)]$$

$$\frac{\partial U}{\partial \psi}=m_6.g[y_{T6}(\cos\alpha\cos\beta\cos\varphi\cos\psi-\sin\alpha\sin\psi)-$$
$$-z_{T6}(\cos\alpha\cos\beta\cos\varphi\sin\psi-\sin\alpha\cos\psi)]. \tag{45}$$

2.2 Lagrangeovy rovnice

Odvodíme postupně Lagrangeovy operátory pro jednotlivé členy. Pro výslednou kinetickou energii bude zřejmě platit:

$$T=\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3}T_{ij} \tag{46}$$

a Lagrangeovy rovnice druhého druhu užijeme ve tvaru:

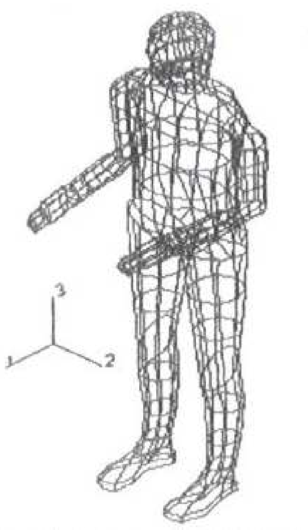
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}}-\frac{\partial T}{\partial \vartheta}+\frac{\partial U}{\partial \vartheta}=M_{p\vartheta}+M_{T\vartheta}, \tag{47}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}}-\frac{\partial T}{\partial \psi}+\frac{\partial U}{\partial \psi}=M_{p\psi}+M_{T\varphi}, \tag{48}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}-\frac{\partial T}{\partial \varphi}+\frac{\partial U}{\partial \varphi}=M_{p\varphi}+M_{T\psi}. \tag{49}$$

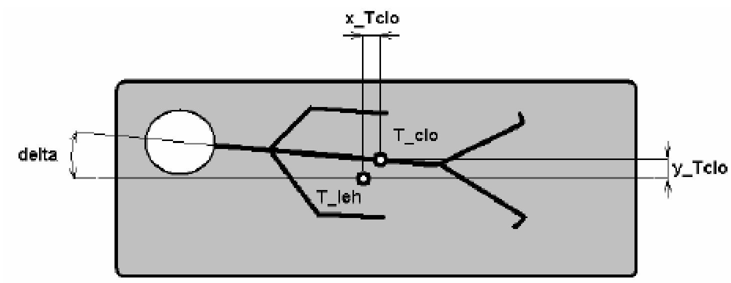
kde $M_{p\vartheta}, M_{p\psi}, M_{p\varphi}, M_{T\vartheta}, M_{T\psi}, M_{T\varphi}$ jsou obecné momenty pružin a tlumičů k příslušným osám. Vzhledem k lineárnímu vztahu (23) můžeme odvodit příslušné derivace členů T_{ij} zvlášť.

2.3 Poloha těžiště a momenty setrvačnosti lehátka a těla pacienta



Obr. 5: Základní konfigurace lidského těla a identifikace jednotlivých směrů

Výpočet celkového momentu setrvačnosti lidského těla lze provést různými způsoby. Většina metod se opírá o empirické vyjádření závislosti momentů setrvačnosti různých částí těla na celkové hmotnosti a výšce postavy. Tyto momenty setrvačnosti se poté vhodně sečtou pomocí transformačních matic a Steinerovy věty tak, aby výsledný tenzor momentů setrvačnosti odpovídal poloze těla (pro sedící či ležící postavu). Podrobně se touto problematikou zabývá [8] a zní vychází ve své práci i Ing. Prokop v [1]. Jelikož celý algoritmus pro výpočet momentu setrvačnosti lidského těla byl již vytvořen (a publikován v [1]), dovolil jsem si s laskavým souhlasem Ing. Prokopa tento nadále využívat i pro účely této práce a dále se tímto problémem nebudeme zabývat. Zmiňme se pouze, že získané hlavní momenty setrvačnosti odpovídají svou orientací osám na souřadnicovém systému na obr. 6.



Obr. 6: Schéma obecné polohy pacienta na ložné ploše lehátka.

Vstupními veličinami tedy jsou známé momenty setrvačnosti lidského těla a obecná poloha těžiště pacienta a jeho natočení v horizontální rovině δ.

$$\mathbf{Iclo} = \begin{bmatrix} Iclo_3 & 0 & 0 \\ 0 & Iclo_2 & 0 \\ 0 & 0 & Iclo_1 \end{bmatrix}, \qquad \vec{r}_T clo = \begin{bmatrix} x\_Tclo \\ y\_Tclo \\ z\_Tclo \end{bmatrix}, \tag{50}$$

dále momenty setrvačnosti a poloha těžiště sanitního lehátka (nosítek) a kardanova rámu (parametry těchto veličin se nemění a proto je soustava druhého kardanova rámu a lehátka brána jako celek, hodnoty jsou získány z geometrického modelu).

Obr. 7: Lehátko (v kombinaci s nosítky) používané rychlou záchranou službou Moravskoslezského kraje.

$$\mathbf{Ileh} = \begin{bmatrix} Ileh_1 & 0 & 0 \\ 0 & Ileh_2 & 0 \\ 0 & 0 & Ileh_3 \end{bmatrix}, \qquad \vec{r}_T leh = \begin{bmatrix} x\_Tleh \\ y\_Tleh \\ z\_Tleh \end{bmatrix}. \tag{51}$$

Tenzor momentů setrvačnosti pootočeného těla dostaneme s pomocí transformační matice

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos(\delta) & \sin(\delta) & 0 \\ -\sin(\delta) & \cos(\delta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{52}$$

$$\mathbf{Iclo\_poot} = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{Iclo} \cdot \mathbf{T}.$$

Steinerovu matici získáme pomocí vektoru posunutí těžiště a známé hmotnosti pacienta

$$\mathbf{I\_mclo} = mclo \cdot \begin{bmatrix} y\_Tclo^2 + z\_Tclo^2 & -x\_Tclo \cdot y\_Tclo & -x\_Tclo \cdot z\_Tclo \\ -x\_Tclo \cdot y\_Tclo & x\_Tclo^2 + z\_Tclo^2 & -y\_Tclo \cdot z\_Tclo \\ -x\_Tclo \cdot z\_Tclo & -z\_Tclo \cdot y\_Tclo & y\_Tclo^2 + x\_Tclo^2 \end{bmatrix}. \tag{53}$$

Poté bude tenzor setrvačnosti lidského těla v souřadnicovém systému o_6

$$\mathbf{I\_o_6clo} = \mathbf{Iclo\_poot} + \mathbf{I\_mclo}. \tag{54}$$

Analogicky k (53) vytvoříme Steinerovu matici pro lehátko s druhým Kardanovým rámem

$$\mathbf{I\_mleh} = mleh \cdot \begin{bmatrix} y\_Tleh^2 + z\_Tleh^2 & -x\_Tleh \cdot y\_Tleh & -x\_Tleh \cdot z\_Tleh \\ -x\_Tleh \cdot y\_Tleh & x\_Tleh^2 + z\_Tleh^2 & -y\_Tleh \cdot z\_Tleh \\ -x\_Tleh \cdot z\_Tleh & -z\_Tleh \cdot y\_Tleh & y\_Tleh^2 + x\_Tleh^2 \end{bmatrix}. \tag{55}$$

Tenzor setrvačnosti lehátka v souřadnicovém systému o_6 bude

$$\mathbf{I\_o_6leh} = \mathbf{Ileh} + \mathbf{I\_mleh}\,. \tag{56}$$

Výsledný tenzor setrvačnosti soustavy „druhý Kardanův rám, lehátko a tělo pacienta“ dostaneme

$$\mathbf{I_6} = \mathbf{I\_o_6clo} + \mathbf{I\_o_6leh}\,. \tag{57}$$

Polohu těžiště vyjádříme pomocí známé polohy jednotlivých těžišť a hmotností

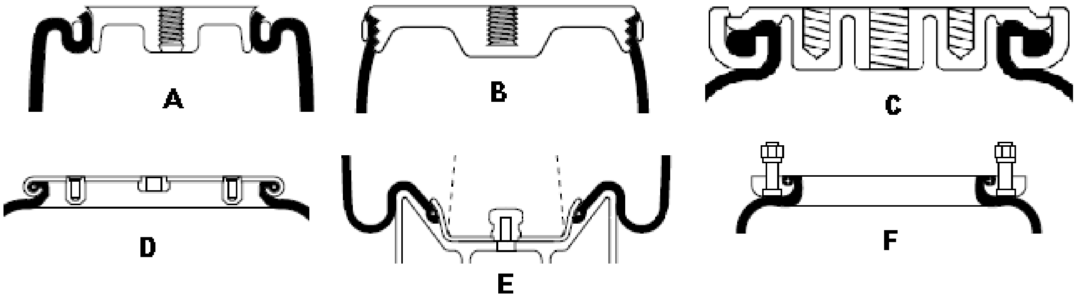
$$\vec{r}_{T6} = \frac{1}{mclo + mleh}\begin{bmatrix} mclo \cdot x\_Tclo + mleh \cdot x\_Tleh \\ mclo \cdot y\_Tclo + mleh \cdot y\_Tleh \\ mclo \cdot z\_Tclo + mleh \cdot z\_Tleh \end{bmatrix}. \tag{58}$$

Tímto jsme získali tenzor setrvačnosti systému lidského těla, druhého rámu kardanova závěsu a lehátka a polohu těžiště tohoto systému při obecné poloze pacienta. Tento systém lze použít v pohybových rovnicích a následných simulacích, kde nám dovolí sledovat vliv polohy a natočení pacienta na dynamické vlastnosti vibroizolačního systému.

2.4 *Pneumatické pružiny*

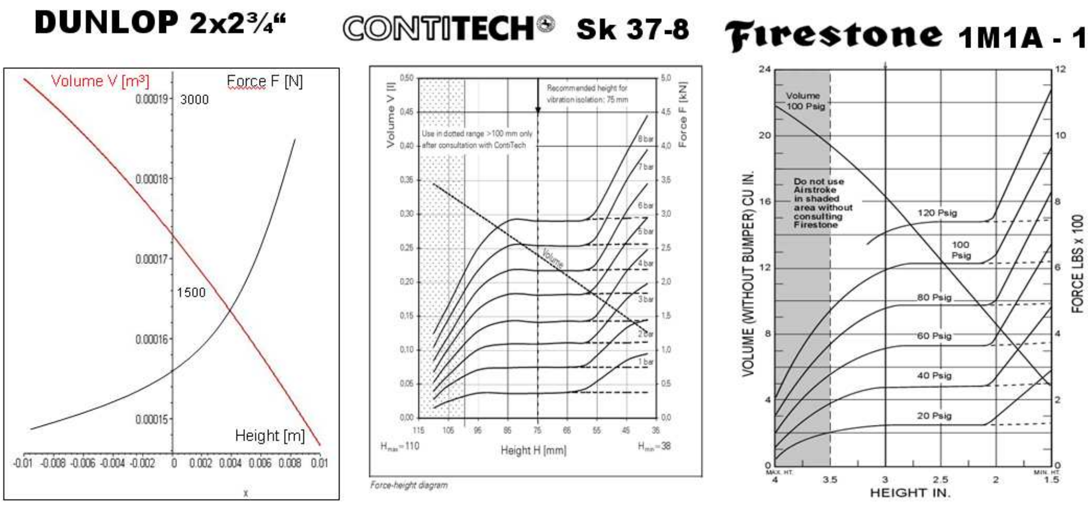
2.4.1 Základní druhy a vlastnosti pružin

Pneumatické pružiny mají převážně rotačně symetrický pryžový měch armovaný kříženým kordem, který je položen ve dvou nebo čtyřech vrstvách (simulacemi mechanických vlastností pryžových měchů se zabývá [5]). Na konci má měch směrem ven či dovnitř zesílené patky nebo může být v provedení bez patek. Konce měchu jsou uzavřeny přírubou s víkem, válcem či pístem. Výrobní tvar měchů bývá odlišný od funkčního. Pokud nemá během provozu dojít k poškození pružiny, je nutné dodržovat minimální a maximální tlak v pružině doporučený výrobcem (zpravidla v rozmezí 100-1000 kPa).



Obr. 8: Upevnění měchu k víku. A, B, C – převlečeným kroužkem, D – lisováním, E – přítlačnou sponou (kroužkem), F – příprava pro připojení přímo k rámu stroje, přítlačným kroužkem

Pneumatické pružiny se rozdělují podle tvaru použitého měchu. Konstrukční provedení jednotlivých pružin je podrobně popsáno v katalogu výrobce (např. [14], [15], [16]).



Obr. 9: Ukázka zatěžovacích charakteristik pneumatických pružin; zleva: vlnovcová, hadicová a vaková pružina).

Způsob zobrazení zatěžovacích charakteristik pneumatických pružin je závislý jak na druhu popisované pružiny, tak i na konkrétním výrobci. Křivka zatěžovací charakteristiky pro vlnovcovou pružinu je závislost síly na zdvihu pružiny (obr. 9 vlevo) při uzavřené pružině. Charakteristiky hadicových pružin jsou mnohem komplikovanější a v reálu vyjadřují plochu v prostoru. Z tohoto důvodu bývají nečastěji zobrazovány jako řezy touto plochou (vrstevnice) při konstantním tlaku v pružině. Charakteristiky bývají obyčejně doplněny závislostí změny objemu na zdvihu pružiny.

Vlnovcové pneumatické pružiny

Bývají tvořeny jednou až čtyřmi vlnami převážně rotačně symetrickými, mohou se však vyskytovat i v provedení obdélném. Tyto pružiny lze deformovat v axiálním i radiálním směru a dosedací plochy přírub mohou být různoběžné. Vícevlnové pružiny mají malou radiální tuhost a z proto je nutné, aby konstrukční uspořádání eliminovalo tento nevhodný způsob zatížení.

Membránové pružiny

Membránové pružiny jsou charakteristické svou velkou radiální tuhostí a proto objekty odpružené s její pomocí nemusí být nutně vedeny. Jinak pro ně platí stejné vlastnosti jako pro vlnovcové pružiny.

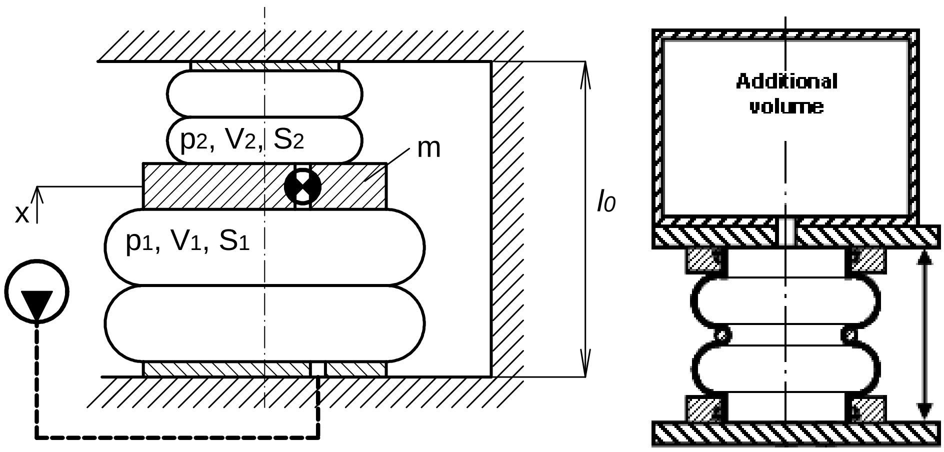
Vakové pneumatické pružiny

Vakové pružiny jsou tvořeny rotačně symetrickým pryžovým vakem který se při deformaci navaluje na píst. Vak může být volný nebo ho lze na povrchu opatřit obvodovou bandáží. Pružinu lze zatěžovat axiálně i radiálně a to jak při rovnoběžných tak i různoběžných osách čel.

Hadicové pneumatické pružiny

Hadicové pružiny jsou tvořeny pryžovým měchem válcového tvaru bez patek. Požadovaného tvaru je docíleno účinkem vnitřního přetlaku vzduchu. Stejně jako u vakových pružin je i tyto možné zatěžovat axiálně i radiálně. Radiální tuhost je ovšem nízká a tak je v obou případech nutné použít vedení odpruženého objektu.

Zvláštní uspořádání pružin



Obr. 10: Schéma diferenčního zapojení pneu. pružin (nalevo) a použití přídavného objemu (napravo).

Předchozí typy lze rozličnými konstrukčními úpravami kombinovat a tím dodat vibroizolačnímu systému lepší nebo zcela nové vlastnosti. Nevýhodou většiny těchto řešení jsou větší nároky na požadovaný zástavbový prostor a vyšší pořizovací náklady.

V technické praxi se lze nečastěji setkat s aplikací přídavného objemu což má za následek výrazné snížení vlastních frekvencí systému. Takový systém je ovšem obtížné kvalitně aktivně regulovat. Druhým častým případem je diferenční zapojení dvou pneumatických pružin proti sobě, kdy výsledná působící efektivní plocha je dána rozdílem velikosti efektivních ploch jednotlivých pružin. Výsledné vlastnosti takového systému lze do značné míry ovlivnit pomocí škrcení v kanále spojujícího použité pružiny. Podrobněji se tímto uspořádáním zabývá kap. 2.4.5 a lit. [28].

2.4.2 Všeobecné předpoklady

Především uveďme, že pneumatické pružiny aplikované v analyzovaném vibroizolačním systému jsou obecně mimoosově zatěžovány. Pro virtuální práce mimoosově zatížené pružiny platí:

$$\delta W = \vec{F}_n . \delta\vec{S}_n + \vec{F}_t . \delta\vec{S}_t + \vec{M}_O . \delta\vec{\gamma} , \tag{59}$$

kde $\vec{F}_n$, resp. $\vec{F}_t$ jsou složky výsledné síly do normály resp. roviny horního čela, $\delta\vec{S}_n$ jsou virtuální posuvy v těchto směrech, $\vec{M}_O$ je ohybový moment a $\vec{\gamma}$ úhel čel (viz [1], [2]), kde jsou popsány experimenty vedoucí k identifikaci těchto veličin. Ukazuje se, že při malých sklonech čel a malém vyosení hraje první člen ve vztahu (59) dominantní roli.

Budeme-li předpokládat připojení pružiny mezi dvě části vodícího mechanismu, je délka pružiny obecně funkcí zobecněné souřadnice q a pro převod γ musí platit vztah:

$$l = l(q), \ \gamma = \frac{dl}{dq} . \tag{60}$$

Předpokládejme platnost stavové rovnice ideálního plynu pro izotermický děj:

$$p \frac{dV}{dt} + V \frac{dp}{dt} = R_p T \frac{dm}{dt} , \tag{61}$$

kde je objem *V*=*V(p,l)* funkcí přetlaku p a délky pružiny l, R_p je plynová konstanta, T absolutní teplota a *dm/dt* je hmotnostní průtok (pro přítok vzduchu do pružiny je kladný *(+)* a pro vyfukování záporný *(-)*). Pokud je pružina uzavřena, je pravá strana rovnice 2.2 rovna nule a diferenciály dV a dp jsou vázány vztahem .

$$p\left[\frac{\partial V}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dt} + \frac{\partial V}{\partial l} \cdot \frac{dl}{dt}\right] + V \frac{dp}{dt} = 0 \tag{62}$$

a platí:

$$dp = \frac{-p \frac{\partial V}{\partial l}}{p \frac{\partial V}{\partial p} + V} \cdot dl . \tag{63}$$

2.4.3 Vlnovcová pružina

Při matematických simulacích vlnovcové pružiny je možné popsat její silovou charakteristiku:

$$F = F(p,l) = p \cdot S_{ef}(l), \tag{64}$$

což je možné teoreticky odvodit [2] a experimentálně ověřit. Zavedením efektivní plochy S_{ef} se separují proměnné p a l.

Dále musí platit:

$$V = V(l) = \int_{l_0}^{l} S_{ef}\, dl + V_0 \,, \quad -\frac{dV}{dl} = S_{ef} \,. \tag{65}$$

Vztah (63) se zjednoduší na:

$$dp = \frac{pS_{ef}}{V} dl \tag{66}$$

S použitím předchozích vztahů lze pro tuhost uzavřené pružiny napsat:

$$\frac{dF}{dl} = \frac{dp}{dl} S_{ef} + p \frac{dS_{ef}}{dl} \,. \tag{67}$$

A po dosazení ze vztahu (66)

$$\frac{dF}{dl} = S_{ef}\left(\frac{pS_{ef}}{V}\right) + p\frac{dS_{ef}}{dl} \,, \tag{68}$$

$$F(p,l) = p_0 S_{ef}(l_0) + \left(p\frac{dS_{ef}}{dl} + \frac{pS_{ef}^2}{V} \right) dl \,. \tag{69}$$

Z principu virtuálních prací vyplývá:

$$dW = F(p,l)dl = M(p,q)dq \,, \tag{70}$$

odkud lze vyjádřit moment vyvolaný pružinou

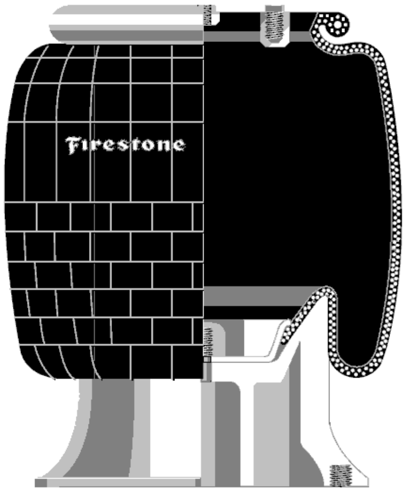
$$M_p = F(p,l(q)) \cdot \frac{dl}{dq} \,. \tag{71}$$

Po dosazení ze vztahu (69) do (71) obdržíme velikost momentu vyvolaného pružinou:

$$M_p = p_0 S_{ef}(l_0)\frac{dl}{dq} + \left[p\left(\frac{dS_{ef}}{dl} - \frac{S_{ef}^2}{V}\right)\left(\frac{dl}{dq}\right)^2 \right] dq \tag{72}$$

2.4.4 Hadicová pružina

U hadicové pružiny nelze ve vztahu vyjadřujícím silovou charakteristiku zavést efektivní plochu a tím separovat proměnné *p* a *l*. Z tohoto důvodu je zavedení efektivní plochy formální a nemá žádný praktický význam. Vztahy odvozené pro vlnovcovou pružinu tudíž není možné pro simulaci chování hadicové pružiny použít.



Obr. 11: Řez hadicovou pružinou s pístem (Firestone).

Předpokládejme následující závislosti síly v pružině a jejího objemu na proměnném přetlaku *p* a délce pružiny *l*

$$F = F(p,l), \quad V = V(p,l). \tag{73}$$

Pokud vtah (73) rozvedeme do Tailorovy řady a omezíme se na členy do prvního řádu, dostaneme

$$F(p,l) = F(p_0, l_0) + \left.\frac{\partial F}{\partial l}\right|_0 dl + \left.\frac{\partial F}{\partial p}\right|_0 dp, \tag{74}$$

zároveň, předpokládáme-li uzavřenou pružinu, musí platit vztah (63) ze kterého dosadíme za *dp* do (74):

$$F(p,l) = F(p_0, l_0) + \left(\left.\frac{\partial F}{\partial l}\right|_0 + \frac{\partial F}{\partial p} \cdot p \frac{\partial V}{\partial l} \left. \left(p \frac{\partial V}{\partial p} + V \right)^{-1} \right|_0 \right) dl. \tag{75}$$

Je-li hadicová pružina zabudována do mechanismu, lze obecně její délku popsat pomocí zobecněné souřadnice *q* a s pomocí aplikace principu virtuálních prací lze vyjádřit obecný moment vyvolaný pružinou jako:

$$M(p,q) = F(p,l)\frac{dl}{dq} = F(p_0, l_0)\frac{dl}{d\alpha} + \left[\frac{\partial F}{\partial l} + \frac{\partial F}{\partial p} \cdot p \frac{\partial V}{\partial l} \left(p \frac{\partial V}{\partial p} + V \right)^{-1} \right] \left(\frac{dl}{dq} \right)^2 dq \tag{76}$$

a pro torzní tuhost musí platit:

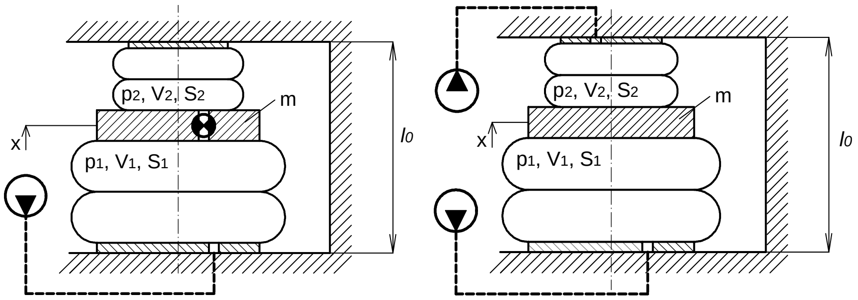
$$k_T = \left[\frac{\partial F}{\partial l} + \frac{\partial F}{\partial p} \cdot p \frac{\partial V}{\partial l} \left(p \frac{\partial V}{\partial p} + V \right)^{-1} \right] \left(\frac{dl}{dq} \right)^2 . \qquad (77)$$

2.4.5 Diferenční zapojení dvojice vlnovcových pružin

Veškeré, v této kapitole uvedené, vztahy jsou platné pouze pro aplikaci vlnovcových pružin.

V případě hadicových pružin lze závislost tuhosti na zdvihu ovlivnit vhodným tvarem pístu (obr. 11) na který se hadice při deformaci pružiny navaluje. Při použití vlnovcových pružin jsme o tuto výhodu ochuzeni, ale ani tady nejsme zcela odkázáni na vlastnosti které má pružina z výroby. Možnost částečně ovlivnit tuhost pružiny nám dává aplikace diferenčního zapojení dvou vlnovcových pružin.

Na obr. 12 vlevo je zakresleno diferenční zapojení vlnovcových pružin s přidaným škrcením v kanále propojujícím obě pružiny (schéma převzato z [2]). Pokud tento škrtící ventil uzavřeme a přidáme další zdroj tlakového vzduchu, dostaneme systém zobrazený na obr. 12 vpravo.



Obr. 12: Možné způsoby realizace diferenčního zapojení páru pneumatických pružin.

Dynamické změny v diferenční pružině lze popsat pomocí dvou rovnic proudové rovnováhy

$$p_1 \dot{V}_1 + V_1 \dot{p}_1 = K(p_2 - p_1), \qquad p_2 \dot{V}_2 + V_2 \dot{p}_2 = -K(p_2 - p_1) \qquad (78)$$

a jedné rovnice silové rovnováhy:

$$m\ddot{x} - S_1 p_1 + S_2 p_2 = -mg \qquad (79)$$

kde V_i je objem, S_i efektivní plocha a p_i tlak v i-té pružině. K vyjadřuje průtokový koeficient. Zavedením rovnovážné polohy kdy $l_1=l_{10}$ nebo $l_2=l_{20}$ a zavedením popisu závislosti velikosti objemu a afektivní plochy na délce l pomocí Tailorova rozvoje následujícím způsobem:

$$l_1 + l_2 = l_{10} + l_{20} = l_0 \quad l_1 = l_{10} + x \quad l_2 = l_{10} - x \quad V_i = \sum_{j=0}^{n} V_{ij} l_i^j \quad S_i = \sum_{j=0}^{n} S_{ij} l_i^j \quad i = 1,2 \ . \qquad (80)$$

Pro určení hodnot tlaků p_1 a p_2 v pružinách při rovnovážné poloze vyjdeme ze systému rovnic:

$$-p_1S_1 + p_2S_2 = 0, \quad l_1 + l_2 = l_0. \tag{81}$$

Stabilitu rovnovážné polohy lze posoudit na základě výpočtu vlastních čísel charakteristické rovnice:

$$\det\begin{vmatrix} m\lambda^2 & -S_{10} & S_{20} \\ p_1S_{10}\lambda & V_1\lambda + K & -K \\ -p_2S_{20}\lambda & -K & V_2\lambda + K \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda\left\{\lambda^3(mV_1V_2) + \lambda^2K(V_1 + V_2) + \lambda\left(p_1S_1^2V_1 + p_2S_2^2V_2\right) + K(S_1 - S_2)(p_1S_1 - p_2S_2)\right\} = 0. \tag{82}$$

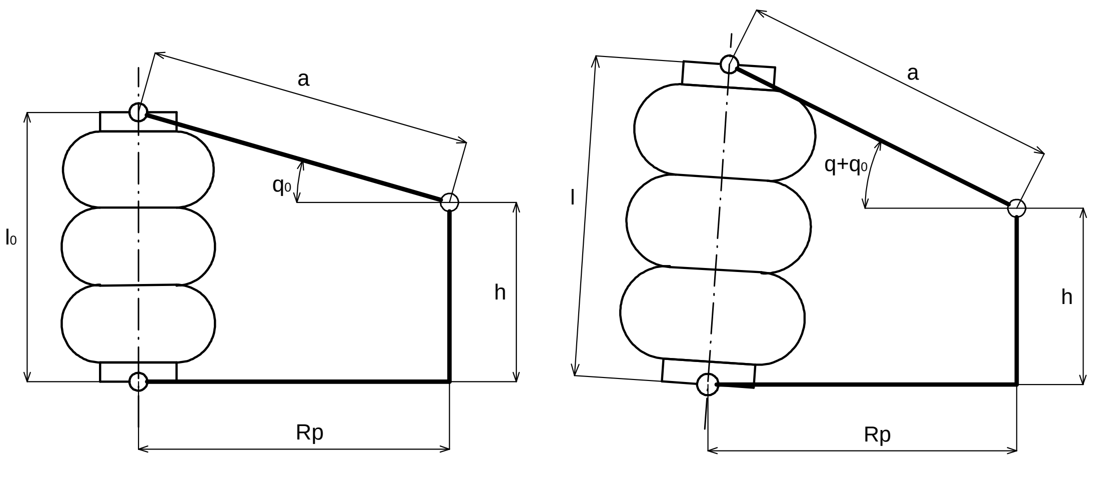
Tento systém je astatický a pro jeho stabilitu je nutné aby $S_1 > S_2$ a $p_1S_1 > S_2p_2$.

V prvním limitním případě, kdy je škrtící ventil plně otevřený, blíží se člen *K* k nekonečnu. V tomto případě, jak vyplývá z charakteristické rovnice, nabývají vlastní frekvence systému malých hodnot.

Ve druhém limitním případě, kdy je škrtící ventil plně uzavřený, je koeficient škrcení roven *0* a charakteristická rovnice má dva nulové kořeny. Vlastní frekvence jsou v tomto případě vyšší než při *K >0*.

2.4.6 Momenty pneumatických pružin

Jak je patrné ze vztahů (72) a (76), je pro určení momentu vyvolaného pružinou nutné určit první převodovou funkci mezi zdvihem pružiny a jím vyvolaným natočením ramen, mezi nimiž je pružina upevněna.



Obr. 13: Obecné schéma uložení pneumatické pružiny v rovině. Rovnovážná poloha nalevo a při obecném pootočení ramene napravo.

Nejobecnějším případem uložení pneumatické pružiny v našem systému je uložení mezi dolní základnou a ramenem paralelogramu (viz. obr. 1 a kin. schéma na obr. 13). Uložení pružin v kardanově rámu je speciálním případem kdy $q_0 = 0$ a tedy $a = Rp$ a $h = l_0$. Z předchozího vyplývá, že odvozené vztahy lze univerzálně použít pro celý systém.

Délka pružiny *l* je funkcí natočení ramene *q*. Tyto souřadnice jsou vázány vztahem:

$$l^2 = Rp^2 + h^2 + a^2 + 2ha\sin(q + q_0) - 2aRp\cos(q + q_0). \tag{83}$$

První převodovou funkci získáme implicitním derivováním předchozího vztahu:

$$2l\frac{dl}{dq} = 2ha\cos(q+q_0) + 2aRp\sin(q+q_0) \tag{84}$$

a odtud

$$\gamma = \frac{dl}{dq} = \frac{ha\cos(q+q_0) + aRp\sin(q+q_0)}{\sqrt{Rp^2 + h^2 + a^2 + 2ha\sin(q+q_0) - 2aRp\cos(q+q_0)}}\,. \tag{85}$$

Budeme-li předpokládat, že se zobecněná souřadnice q bude měnit v rozsahu ± 5°, lze předchozí vztah zjednodušit pomocí goniometrické linearizace:

$$\begin{aligned}&\gamma\left(\cos(q)=1, \sin(q)=q\right) = \\ &= \frac{ha\cos(q_0) + aRp\sin(q_0) + q\left[aRp\cos(q_0) - ha\sin(q_0)\right]}{\sqrt{Rp^2 + h^2 + a^2 + 2ha\sin(q_0) - 2aRp\cos(q_0) + q\left[2ha\cos(q_0) + 2aRp\sin(q_0)\right]}}\,.\end{aligned} \tag{86}$$

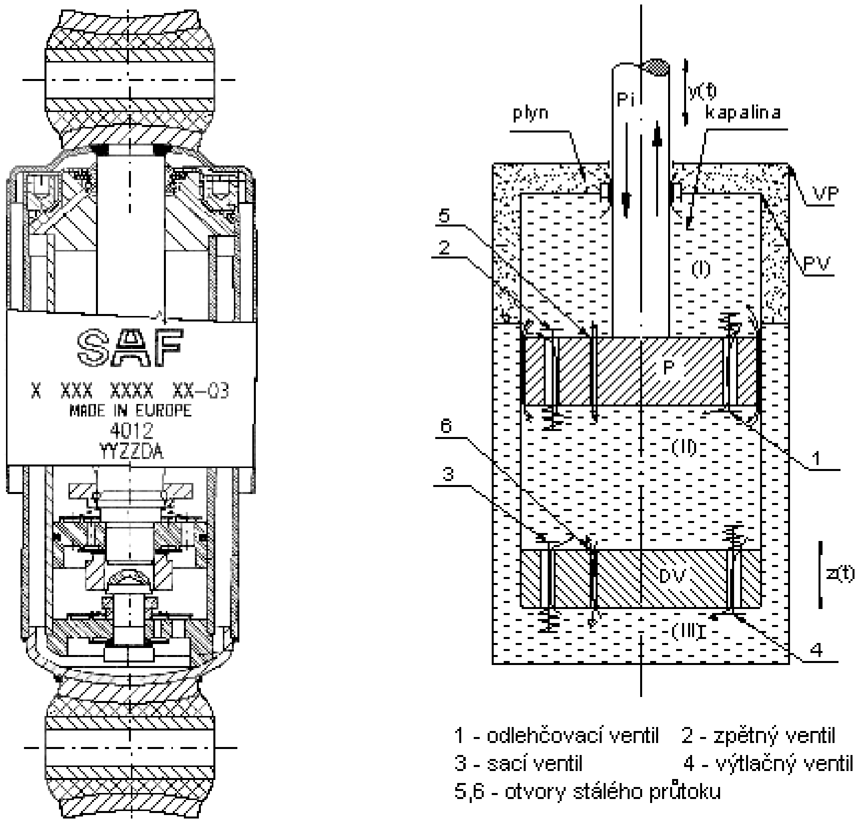
Pro pružiny umístěné v kardanově rámu se vztah (85) zjednoduší na:

$$\gamma\left(a = Rp, q_0 = 0\right) = \frac{hRp\cos(q) + Rp^2\sin(q)}{\sqrt{2Rp^2 + h^2 + 2hRp\sin(q) - 2Rp^2\cos(q)}} \tag{87}$$

a po goniometrické linearizaci dostaneme:

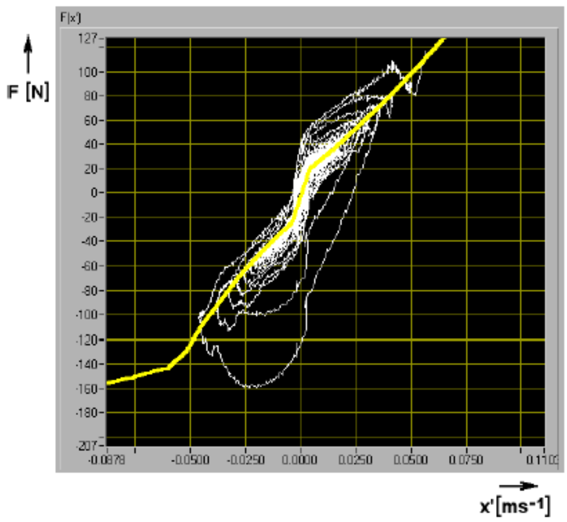
$$\gamma\left(\cos(q)=1, \sin(q)=q\right) = \frac{hRp + Rp^2 q}{\sqrt{h^2 + 2hRp\cdot q}}\,. \tag{88}$$

2.5 Hydraulické tlumiče



Obr. 14: Dvouplášťový hydraulický tlumič a odpovídající matematický model

Tradičně je hydraulický tlumič popisován svojí rychlostní charakteristikou, tj. závislostí síly na relativní rychlosti pístnice a pracovního válce. Při měření na reálných tlumičích (podrobně v [3]) se ukazuje, že ve skutečnosti je tato charakteristika nejednoznačná, objevují se na ní hysterezní křivky, jejichž velikost závisí na frekvenci, obr.15.



Obr. 15: Nejednoznačná rychlostní charakteristika tlumiče.

Při modelování dynamického systému, který obsahuje tento prvek, nastává vzhledem k nejednoznačnosti problém s jeho popisem. Ve většině případů nezbývá než přistoupit k zjednodušení modelu tlumiče a hystereze neuvažovat. Tento problém je výrazně patrný při vyšších pístových rychlostech a jelikož tyto v našem případě nepředpokládáme, nadále nebude hystereze a vliv zrychlení na statickou rychlostní charakteristiku uvažován.

2.5.1 Výsledný moment sil tlumičů pro paralelogram

Síla, vyvozovaná tlumičem je funkcí jeho pístové rychlosti $\dot{l}_{iTj}(q,\dot{q})$ např. dle obr.15. Rozvineme-li závislost síly tlumiče na rychlosti pístu v Mc Laurinovu řadu, je:

$$F_T = \sum_{j=1}^{m} b_j \dot{l}_T^j = \sum_{j=1}^{m} b_j \gamma_T^j \dot{q}^j , \tag{89}$$

kde analogicky k (83) je délka tlumiče funkcí zobecněné souřadnice q:

$$l_T{}^2 = R_T{}^2 + h^2 + a_T^2 + 2ha_T \sin(q+q_0) - 2a_T R_T \cos(q+q_0) \tag{90}$$

a první převodová funkce:

$$\gamma_T = \frac{dl_T}{dq} = \frac{ha_T \cos(q+q_0) + a_T R_T \sin(q+q_0)}{\sqrt{R_T{}^2 + h^2 + a_T^2 + 2ha_T \sin(q+q_0) - 2a_T R_T \cos(q+q_0)}} , \tag{91}$$

po goniometrické linearizaci:

$$\begin{aligned} &\gamma_T\left(\cos(q)=1, \sin(q)=q\right) = \\ &= \frac{ha_T \cos(q_0) + a_T R_T \sin(q_0) + q\left[a_T R_T \cos(q_0) - ha_T \sin(q_0)\right]}{\sqrt{R_T{}^2 + h^2 + a_T^2 + 2ha_T \sin(q_0) - 2a_T R_T \cos(q_0) + q\left[2ha_T \cos(q_0) + 2a_T R_T \sin(q_0)\right]}} . \end{aligned} \tag{92}$$

Pro virtuální práci těchto sil je

$$\delta W = F_T . \delta l = M_T(q,\dot{q}) \delta q . \tag{93}$$

Moment vyvolaný tlumičem je tedy:

$$M_T = F_T \cdot \gamma_T = \sum_{j=1}^{m} b_j \gamma_T^{j+1} \dot{q}^j . \tag{94}$$

Pro tlumiče v kardanově rámu je poté upravená převodová funkce:

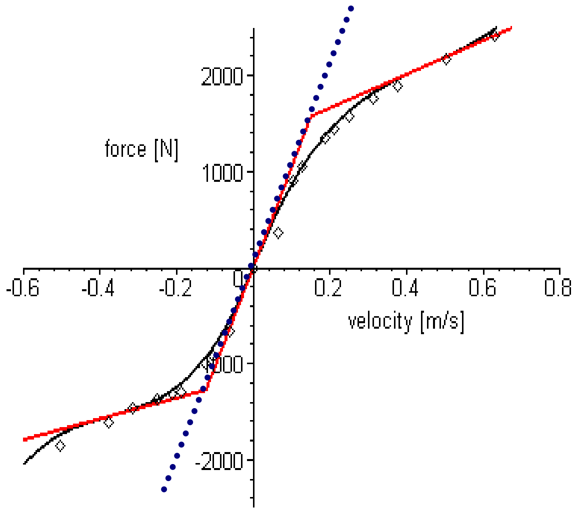
$$\gamma_T\left(a = R_T, q_0 = 0\right) = \frac{hR_T \cos(q) + R_T^2 \sin(q)}{\sqrt{2R_T{}^2 + h^2 + 2hR_T \sin(q) - 2R_T^2 \cos(q)}} \tag{95}$$

a po goniometrické linearizaci:

$$\gamma_T\left(\cos(q)=1, \sin(q)=q\right) = \frac{hR_T + R_T^2 q}{\sqrt{h^2 + 2hR_T q}} . \tag{96}$$

2.5.2 Náhrada statické rychlostní charakteristiky tlumiče

Statická rychlostní charakteristika (obr.15) skutečného tlumiče použitého v systému byla změřena v Hydrodynamické laboratoři Technické univerzity v Liberci a postupně nahrazována dvěma na sebe navazujícími polynomy 3 a 4 stupně, lineární 3x lomenou funkcí a lineární 1x lomenou funkcí.



Obr. 16: Naměřená rychlostní charakteristika a její různé aproximace

2.5.3 Nahrazení dvěma na sebe navazujícími polynomy

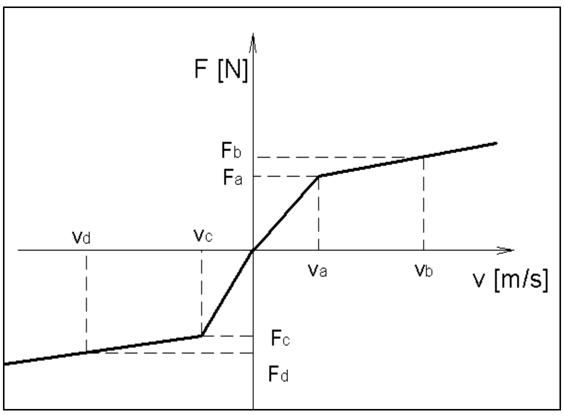
Pro $v > 0$ byl použit polynom 4 stupně ve tvaru:

$$F_T = b_1 \dot{l}_T + b_2 \dot{l}_T^2 + b_3 \dot{l}_T^3 + b_4 \dot{l}_T^4 \tag{97}$$

a pro $v < 0$ polynom 3 stupně:

$$F_T = b_5 \dot{l}_T + b_6 \dot{l}_T^2 + b_7 \dot{l}_T^3 . \tag{98}$$

2.5.4 Nahrazení 3x lomenou lineární funkcí



Obr. 17: Statická rychlostní charakteristika nahrazená lomenou funkcí

Parametry tlumiče jsou dány podle obr. 5 veličinami v_a, v_b, v_c, v_d, F_a, F_b, F_c *a* F_d.

Tlumící síla je poté dána vztahem

$$F_T = b_1 \dot{l}_T + b_2 \,. \tag{99}$$

Kde b_1 a b_2 jsou definovány v (100), kde je změněno značení rychlosti tlumiče $\dot{l}_T = v_T$:

$$b_1 = \begin{cases} \dfrac{F_b - F_a}{v_b - v_a} & v_T \ge v_a \\ \dfrac{F_a}{v_a} & v_a > v_T \ge 0 \\ \dfrac{F_c}{v_c} & 0 > v_T \ge v_c \\ \dfrac{F_d - F_c}{v_d - v_c} & v_c > v_T \end{cases} \qquad b_2 = \begin{cases} F_a - \dfrac{F_b - F_a}{v_b - v_a} \cdot v_a & v_T \ge v_a \\ 0 & v_a > v_T > v_c \\ F_c - \dfrac{F_d - F_c}{v_d - v_c} \cdot v_c & v_c > v_T \end{cases} \,. \tag{100}$$

2.5.5 Nahrazení lomenou lineární funkcí

Tato náhrada je pouze modifikací předchozí 3x lomené lineární funkce, kde v celém intervalu kladných i záporných rychlostí tlumiče je tlumení konstantní. Do rovnice (99) je za hodnoty *b1* a *b2* dosazeno ze vztahu :

$$b_1 = \begin{cases} \dfrac{F_a}{v_a} & v_T \ge 0 \\ \dfrac{F_c}{v_c} & v_T < 0 \end{cases} \qquad b_2 = 0 \,. \tag{101}$$

Po částech lomená lineární funkce odpovídajícím způsobem popisuje základní vlastnosti tlumiče a změna parametrů této funkce odpovídá změně vlastností určitých konstrukčních prvků v tlumiči. Konkrétní vliv těchto změn na rychlostní charakteristiku tlumiče je naznačen na obr. 18. Chceme li optimalizovat rychlostní charakteristiku aplikovaných tlumičů , musíme respektovat tyto základní vlivy.

A. Kalibrované otvory

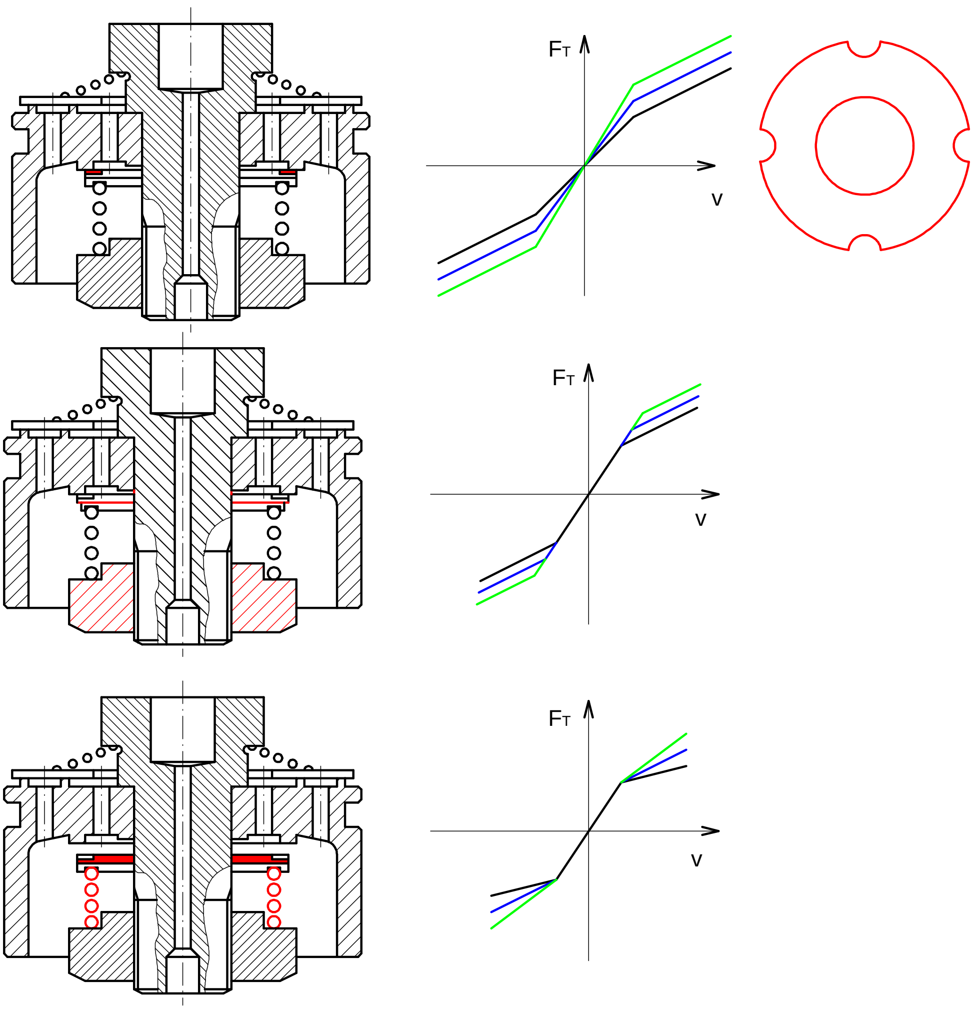
> Změna velikosti kalibrovaných otvorů vede ke změně směrnice rychlostní charakteristiky pro nízké rychlosti (viz. obr. 18 - nahoře).

B. Předpětí v přítlačné pružině nebo planžetovém svazku

> Změna velikosti předpětí přítlačné pružiny (svazku planžet) posouvá bod zlomu rychlostní charakteristiky. Nemá vliv na směrnici rychlostní charakteristiky (viz. obr. 18 střed).

C. Tuhost přítlačné pružiny nebo planžetového svazku

> Změnou tuhosti přítlačné pružiny (počtu planžet) se změní velikost směrnice statické rychlostní charakteristiky pro oblast vyšších rychlostí (viz. obr. 18 – dole).



Obr. 18: Vliv změny parametrů konstrukčních prvků tlumiče na jeho rychlostní charakteristiku.

2.6 Budící signály

Základní myšlenkou při hledání budící funkce je, aby tato byla schopná vybudit široké spektrum frekvencí ve sledovaném rozsahu (1-10Hz). Dále je třeba, aby buzení přibližně odpovídalo svou intenzitou reálnému provozu. Jako velice vhodné se jeví použití modifikovaného rozmítaného sinu. Předpokládejme obecnou budící sílu ve tvaru

$$y = A(t)\sin(g(t)) \tag{102}$$

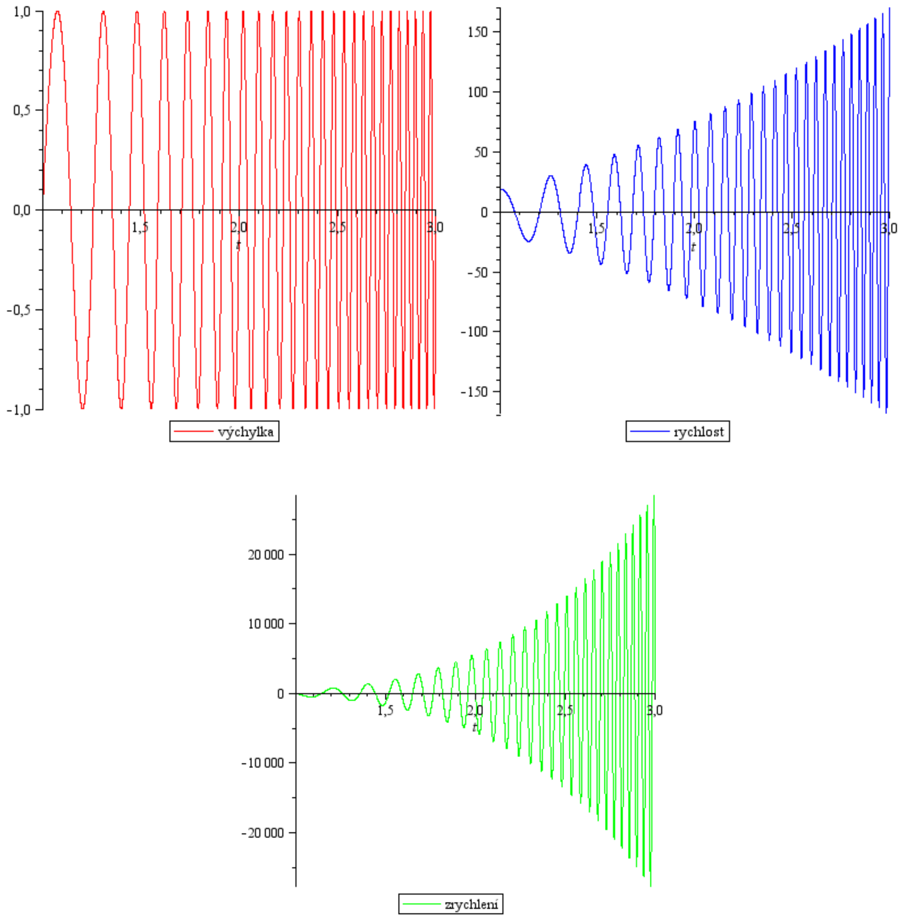
a dále, aby změna frekvence byla natolik pomalá, aby se dostatečně rozvinula odezva v blízkosti rezonance a neprojevil se vliv přechodového stavu.

Jednoduchou derivací (102) podle času získáme obecné vztahy pro rychlost a zrychlení:

$$\dot{y} = \dot{A}(t)\sin(g(t)) + A(t)\cos(g(t))\dot{g}(t)\,, \tag{103}$$

$$\ddot{y} = \ddot{A}(t)\sin(g(t)) + 2\dot{A}(t)\cos(g(t))\dot{g}(t) - A(t)\sin(g(t))\dot{g}(t)^2 + A(t)\cos(g(t))\ddot{g}(t)\,. \tag{104}$$

Pro $A(t) = konst.$ a funkci $g(t) = bt^n$ dostaneme rozmítaný sinus s konstantní amplitudou výchylky.



Obr. 19: Rozmítaný sinus s konstantní amplitudou výchylky.

a úhlová rychlost bude funkcí času dle následující závislosti:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{dt}(bt^n) = nbt^{n-1} \,. \tag{105}$$

Z předchozího vztahu je evidentní, že se pro $n \geq 2$ bude budící frekvence s rostoucím časem zvětšovat. Tato budící funkce tedy splňuje podmínku vybuzení systému v námi požadovaném frekvenčním rozsahu, ale amplituda rychlosti velice rychle s časem roste a v kombinaci s konstantní amplitudou výchylky to znamená značný nárůst intenzity buzení.

$$y = A\sin(bt^n) \,, \tag{106}$$

$$\dot{y} = Abnt^{n-1}\cos(bt^n) \,, \tag{107}$$

$$\ddot{y} = Abt^{n-2}n(n-1)\cos(bt^n) - Ab^2n^2t^{2n-2}\sin(bt^n) \,. \tag{108}$$

Jelikož v reálném světě je běžnější případ, kdy se při působení větších budících amplitud uplatňují nízké frekvence, zatímco při buzení nižšími amplitudami frekvence vyšší. V návaznosti na uvedené skutečnosti se jeví rozmítaný sinus s konstantní amplitudou výchylky jako nevhodný. Na základě zkušeností s budící funkcí s konstantní amplitudou výchylky byly navrženy dvě nové funkce – s přibližně konstantní amplitudou rychlosti a zrychlení.

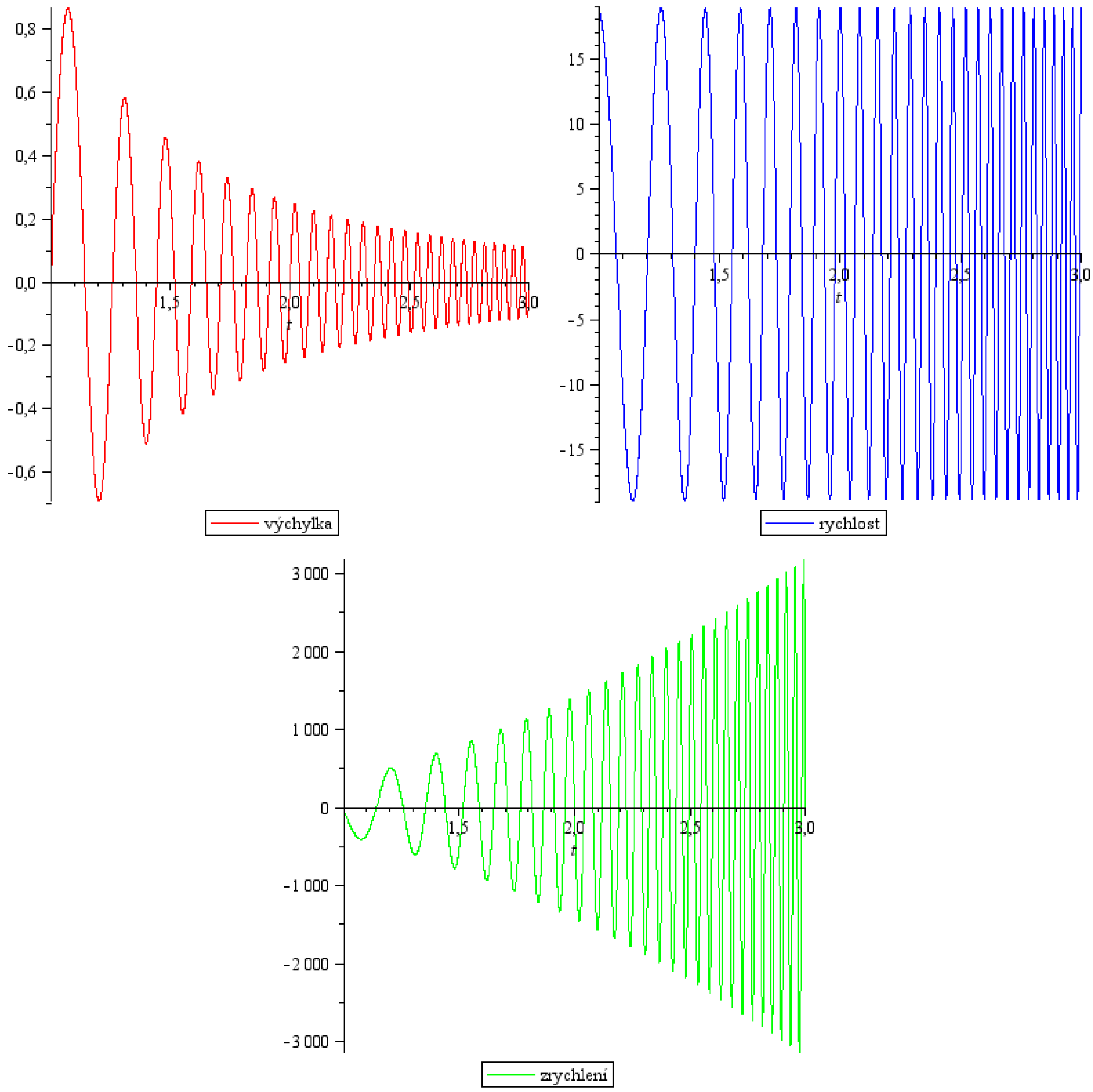
Pokud zvolíme $A(t) = \dfrac{A}{t^{n-1}}$ a stejně jako v předchozím případě $g(t) = bt^n$, dostaneme závislost úhlové frekvence podle vztahu (105). Výchylka, rychlost a zrychlení se budou řídit následujícími předpisy:

$$y = At^{1-n}\sin(bt^n) \,, \tag{109}$$

$$\dot{y} = \frac{1}{t^n}A\sin(bt^n)(1-n) + Abn\cos(bt^n) \,, \tag{110}$$

$$\ddot{y} = \frac{1}{t^{n+1}}An\sin(bt^n)(n-1) + \frac{1}{t}Abn\cos(bt^n)(1-n) - t^{n-1}Ab^2n^2\sin(bt^2) \,. \tag{111}$$

Je patrné, že vliv prvního členu ve vztahu pro rychlost bude s rostoucím časem rychle klesat a pro $t \to \infty$ bude $\dot{y} = Abn\cos(bt^n)$, kde součin $Abn = konst.$ přibližně vyjadřuje konstantní amplitudu rychlosti. Jak rychle se amplituda rychlosti ustálí na přibližně konstantních hodnotách je patrné z obrázku 20.



Obr. 20: Rozmítaný sinus s konstantní amplitudou rychlosti.

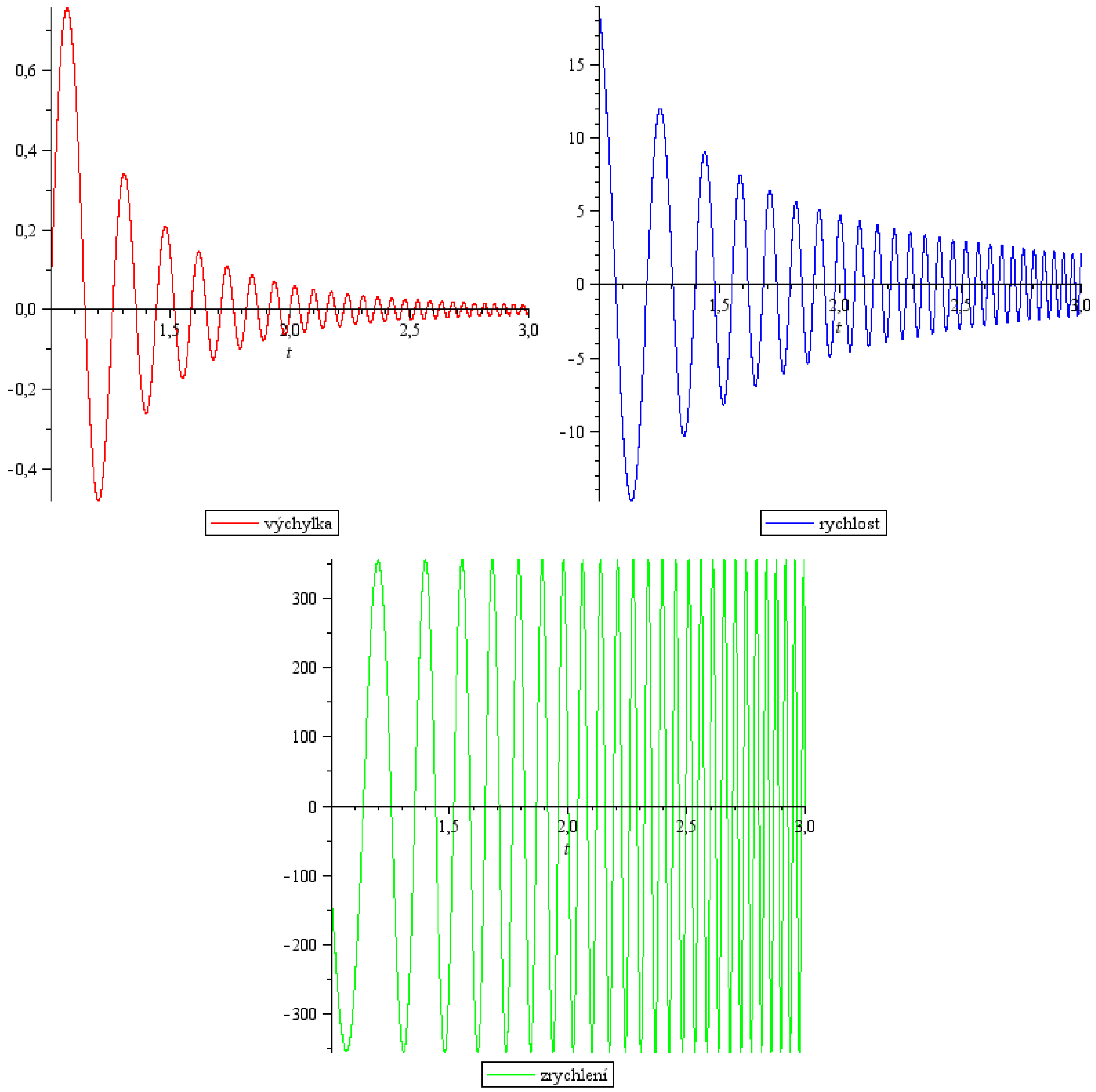
Pro konstantní amplitudu zrychlení je třeba zvolit $A(t) = \frac{A}{t^{2(n-1)}}$ a stejně jako v předchozích dvou případech $g(t) = bt^n$. Úhlová frekvence se opět bude řídit dle vztahu (105). Pro výchylku, rychlost a zrychlení platí:

$$y = At^{2(1-n)} \sin(bt^n)\,, \tag{112}$$

$$\dot{y} = \frac{1}{t^{2n}} 2At \sin(bt^n)(1-n) + t^{1-n} Abn \cos(bt^n)\,, \tag{113}$$

$$\ddot{y} = \frac{1}{t^{2n}} 2A \sin(bt^n)(n^2 - n + 1) + \frac{1}{t^n} 3Abn \cos(bt^n)(1-n) - Ab^2n^2 \sin(bt^n)\,. \tag{114}$$

Obdobně jako v předchozím případě bude s rostoucím časem velice rychle klesat vliv prvních dvou členů ve vztahu pro zrychlení a pro limitu $t \to \infty$ bude $\ddot{y} = -Ab^2n^2 \sin(bt^n)$, kde součin $Ab^2n^2 = konst.$ přibližně vyjadřuje konstantní amplitudu zrychlení.



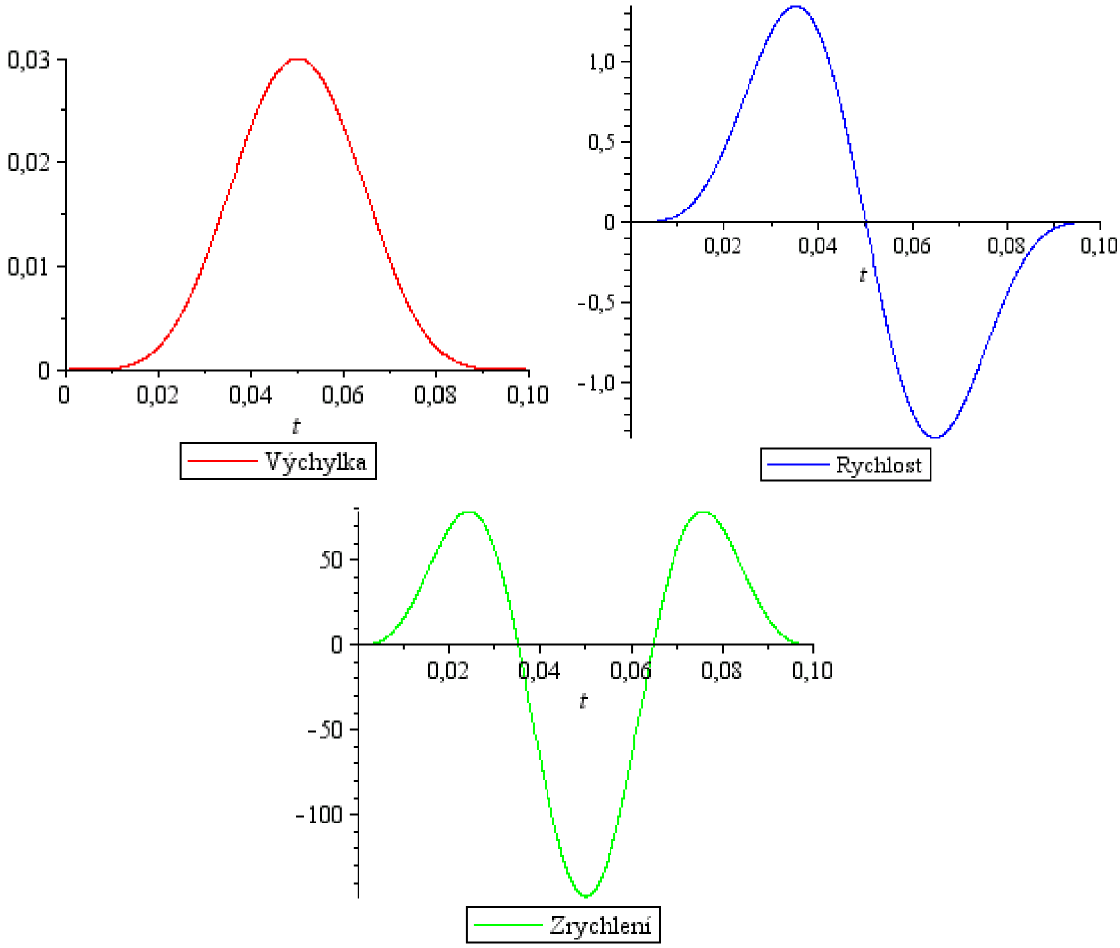
Obr. 21: Rozmítaný sinus s konstantní amplitudou zrychlení.

Další použitou budící funkcí je funkce nahrazující Diracův impuls. V našem případě byla použita pátá mocnina funkce sinus, která má spojitou první, druhou i třetí derivaci a její použití v simulacích je naprosto bezproblémové. A je výška impulsu v metrech a T je doba trvání v sekundách.

$$y = \begin{cases} A\sin^5\left(\frac{\pi}{T}t\right) & 0 \le t < T \\ 0 & t \ge T \end{cases}, \tag{115}$$

$$\dot{y} = \begin{cases} 5\pi\frac{A}{T}\sin^4\left(\frac{\pi}{T}t\right)\cos\left(\frac{\pi}{T}t\right) & 0 \le t < T \\ 0 & t \ge T \end{cases}, \tag{116}$$

$$\ddot{y} = \begin{cases} 20\pi^2\frac{A}{T^2}\sin^3\left(\frac{\pi}{T}t\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{T}t\right) - 5\pi^2\frac{A}{T^2}\sin^5\left(\frac{\pi}{T}t\right) & 0 \le t < T \\ 0 & t \ge T \end{cases}. \tag{117}$$



Obr. 22: Ukázka použité funkce simulující skok. Funkce je spojitá v první druhé i třetí derivaci.

3. Řešení a simulace

3.1 Určení vlivu parametrů systému pomocí linearizovaného matematického modelu

Pro první přiblížení výchozího nelineárního systému byl vytvořen systém rovnic získaných linearizací Lagrangeových rovnic. Řešení tohoto systému je velice rychlé (10-100x oproti nelineárnímu systému) a přitom poskytuje velice dobrý přehled o vlivu jednotlivých parametrů na vlastnosti systému. Vlastní linearizace probíhá ve dvou následujících krocích:

1) trigonometrická linearizace (pro předpokládané malé úhly nahradíme funkci sinus jejím argumentem a kosinus 1)

2) linearizace pomocí Taylorova rozvoje (všechny členy vyššího jak prvního řádu jsou zanedbány)

Po linearizaci Lagrangeových rovnic (47) – (49) rozložíme moment gravitačních sil (daný parciálními derivacemi potenciální energie) a moment pneumatické pružiny do dvou složek. První složky tvoří vektor $\vec{E}_{L0}$ a druhé složky, úměrné úhlovým výchylkám vytváří matici tuhosti. Při dosažení rovnovážné polohy se složka $\vec{E}_0$ anuluje a linearizovaný systém představuje poruchový systém ve variacích.

Dostáváme soustavu diferenciálních rovnic ve tvaru:

$$\mathbf{A}\ddot{\vec{q}} + \mathbf{B_L}\dot{\vec{q}} + \sum_{j=1}^{m} \mathbf{B_{Tj}} \begin{bmatrix} \dot{q}_1^j \\ \dot{q}_2^j \\ \dot{q}_3^j \end{bmatrix} + \left(\mathbf{C_L} + \mathbf{C_p}\right)\vec{q} = -\vec{E}_{L0} - \vec{E}_{p0} + \vec{E}_1(t) \tag{118}$$

Kde jsou významy jednotlivých symbolů:

A ……..matice hmotnosti,

$\mathbf{B_{Tj}}$ …......matice tlumení tlumičů,

$\mathbf{B_L}$ …….matice parametrického buzení (vychází z Lagrangeových rovnic),

$\mathbf{C_p}$ …….matice tuhosti pružin,

$\mathbf{C_L}$ …….matice tuhosti a parametrického buzení (vychází z Lagrangeových rovnic),

$\vec{E}_{L0}$ ……vektor gravitačních sil,

$\vec{E}_{p0}$ …….vektor momentů pneumatických pružin,

$\vec{E}_1(t)$ …..vektor vnějšího kinematického buzení.

Pro ukázku uveďme konkrétní členy uvedené ve vztahu (118) pro jednoduchý případ bez buzení. Obecně buzený případ je i po linearizaci značně rozsáhlý a případný zájemce si jej může vyvolat s pomocí programů na přiloženém CD.

3.1.1 Linearizované Lagrangeovy rovnice v maticovém tvaru

Matice hmotnosti linearizovaného systému je symetrická, její členy jsou:

$$A_{11} = (m_R + m_4 + m_5 + m_6)R^2 + 4J_{Ry},$$

$$A_{22} = J_{5y} + J_{6y} + m_6(x_{56}^2 + z_{56}^2 + 2x_{56}x_{T6} + 2z_{56}z_{T6}),$$

$$A_{33} = J_{6x}, \tag{119}$$

$$A_{12} = R[m_5(-x_{T5}\cos\vartheta_0 - z_{T5}\sin\vartheta_0) + m_6((-x_{T6} - x_{56})\cos\vartheta_0 + (-z_{T6} - z_{56})\sin\vartheta_0)],$$

$$A_{13} = m_6 R\cos\vartheta_0 y_{T6},$$

$$A_{23} = -D_{6xy} - m_6 x_{56} y_{T6}.$$

Matice tlumení je pro případ zanedbání pasivních odporů a bez aktivního buzení nulová:

$$\mathbf{B_L} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{120}$$

Matice tuhosti je diagonální, tvořená účinky gravitačních sil:

$$\mathbf{C_L} = \begin{bmatrix} -(2m_R + m_4 + m_5 + m_6)gR\sin\vartheta_0 & 0 & 0 \\ 0 & -(m_5 z_{T5} + m_6 z_{56} + m_6 z_{T6})g & 0 \\ 0 & 0 & -m_6 g z_{T6} \end{bmatrix}, \tag{121}$$

členy vektoru gravitačních sil $\vec{E}_L$:

$$\vec{E}_{L0} = \begin{bmatrix} (m_4 + m_5 + m_6 + 2m_R)gR\cos\vartheta_0 \\ (m_5 x_{T5} + m_6(x_{T6} + x_{56}))g \\ m_6 y_{T6} g \end{bmatrix}. \tag{122}$$

3.1.2 Matice příslušné linearizaci momentů pneumatických pružin

Pokud ze vztahu pro převod mezi délkou pružiny a úhlovou výchylkou (85) dosadíme do vztahu (72), dostaneme nelineární závislost momentu vyvolaného pružinou na příslušné úhlové výchylce. Dále nahradíme závislost efektivní plochy S_{ef} na délce pružiny l a převodové funkce γ na velikosti zobecněné souřadnice q Taylorovou řadou s členy do prvního řádu:

$$l = l_0 + l_1 \cdot q, \tag{123}$$

$$\gamma = \gamma_0 + \gamma_1 \cdot q, \tag{124}$$

$$S_{ef} = S_0 + S_1 \cdot l\,. \tag{125}$$

Jednotlivé koeficienty v návaznosti na vztahy (83) a (85) popř. (87) a (88) lze vyjádřit:

- pro paralelogram

$$l_{01} = \sqrt{R_{p1}^2 + h_1^{\,2} + a_1^{\,2} + 2h_1 a_1 \sin(\vartheta_0) - 2a_1 R_{p1}\cos(\vartheta_0)}\,, \tag{126}$$

$$l_{11} = \frac{h_1 a_1 \cos(\vartheta_0) + a_1 R_{p1}\sin(\vartheta_0)}{\sqrt{R_{p1}^2 + h_1^{\,2} + a_1^{\,2} + 2h_1 a_1 \sin(\vartheta_0) - 2a_1 R_{p1}\cos(\vartheta_0)}}\,, \tag{127}$$

$$\gamma_{01} = \frac{h_1 a_1 \cos(\vartheta_0) + a_1 R_{p1}\sin(\vartheta_0)}{\sqrt{R_{p1}^2 + h_1^{\,2} + a_1^{\,2} + 2h_1 a_1 \sin(\vartheta_0) - 2a_1 R_{p1}\cos(\vartheta_0)}}\,, \tag{128}$$

$$\begin{aligned}\gamma_{11} = {} & \frac{a_1 h_1 \sin(\vartheta_0)(R_{p1}^2 + a_1^2 + h_1^2) + a_1^2(2h_1^2 + R_{p1}^2)}{\left(R_{p1}^2 + h_1^{\,2} + a_1^{\,2} + 2h_1 a_1 \sin(\vartheta_0) - 2a_1 R_{p1}\cos(\vartheta_0)\right)^{3/2}} + \\ & + \frac{a_1^2 \cos^2(\vartheta_0)(R_{p1}^2 - h_1^2) - a_1 R_{p1}\cos(\vartheta_0)(2a_1 h_1 \sin(\vartheta_0) + h_1^2 + a_1^2 + R_{p1}^2)}{\left(R_{p1}^2 + h_1^{\,2} + a_1^{\,2} + 2h_1 a_1 \sin(\vartheta_0) - 2a_1 R_{p1}\cos(\vartheta_0)\right)^{3/2}}\,,\end{aligned} \tag{129}$$

- pro pružiny kardanova rámu

$$l_{0ij} = h_{ij}\,, \tag{130}$$

$$l_{1ij} = R_{pij}\,, \tag{131}$$

$$\gamma_{0ij} = R_{pij}\,, \tag{132}$$

$$\gamma_{1ij} = 0\,, \tag{133}$$

kde $i = 2$ (resp. 3) je označení příslušnosti k pružině mezi horní základnou paralelogramu a prvním kardanovým rámem (resp. prvním a druhým kardanovým rámem). Hodnota $j = 1$ nebo 2 a slouží k bližšímu určení pružiny mezi jednotlivými rámy.

Srovnáním vztahů pro l_1 a γ_0 zjistíme, že se tyto sobě rovnají, což je v pořádku a plně to odpovídá definici převodové funkce dle(60).

Po dosazení přejde vztah (72) na tvar:

$$M(q,p) = p_0 S_0 (\gamma_0 + \gamma_1 \cdot q) + \left[p\left(S_1 - \frac{(S_0 + S_1 \cdot (l_0 + l_1 \cdot q))^2}{V} \right)(\gamma_0 + \gamma_1 \cdot q)^2 \right] q\,. \tag{134}$$

Po roznásobení a převedení na tvar polynomu proměnné q při zanedbání vyšších řádů dostaneme:

$$M(q,p) = p_0 S_0 \gamma_0 + \left(p_0 S_0 \gamma_1 + p\left(S_1 - \frac{(S_0 + S_1 l_0)^2}{V} \right)\gamma_0^2 \right) q\,, \tag{135}$$

kde složky diagonální matice tuhosti jsou (po přidání indexů pro identifikaci jednotlivých pružin):

$$C_{p1,1} = 4\left[p_{01} S_{01} \gamma_{11} + p_1 \left(S_{11} - \frac{(S_{01} + S_{11} l_{01})^2}{V_1} \right)\gamma_{01}^2 \right],$$

$$\begin{aligned} C_{p2,2} = {} & p_{021} S_{021} \gamma_{121} + p_{21}\left(S_{121} - \frac{(S_{021} + S_{121} l_{021})^2}{V_{21}} \right)\gamma_{021}^2 - \\ & - p_{022} S_{022} \gamma_{122} - p_{22}\left(S_{122} - \frac{(S_{022} + S_{122} l_{022})^2}{V_{22}} \right)\gamma_{022}^2 \end{aligned}, \tag{136}$$

$$\begin{aligned} C_{p3,3} = {} & p_{031} S_{031} \gamma_{131} + p_{31}\left(S_{131} - \frac{(S_{031} + S_{131} l_{031})^2}{V_{31}} \right)\gamma_{031}^2 - \\ & - p_{032} S_{032} \gamma_{132} - p_{32}\left(S_{132} - \frac{(S_{032} + S_{132} l_{032})^2}{V_{32}} \right)\gamma_{032}^2 \end{aligned}.$$

Vektor momentů pneumatických pružin potom bude:

$$\vec{E}_{p0} = \begin{bmatrix} 4 \cdot p_{01} S_{01} \gamma_{01} \\ p_{021} S_{021} \gamma_{021} - p_{022} S_{022} \gamma_{022} \\ p_{031} S_{031} \gamma_{031} - p_{032} S_{032} \gamma_{032} \end{bmatrix}. \tag{137}$$

3.1.3 Matice tlumení

V případě momentů vyvolaných tlumiči si dovolíme malou výjimku pro případ, kdy rychlostní charakteristiku nahrazujeme polynomem vyššího než prvního řádu. V tomto případě upustíme od úplné linearizace a použijeme polynom v požadovaném tvaru. Po zavedení obdobného vztahu pro převodovou funkci jako v (124) a dosazení do (94):

$$M_T = \sum_{j=1}^{m} b_j \left(\gamma_{T0} + \gamma_{T1} \cdot q \right)^{j+1} \dot{q}^{\,j}\ . \tag{138}$$

Zde vidíme, že pro získání čistě polynomické funkce rychlosti je nutné zanedbat člen γ_{T1}. Tím prakticky tvrdíme, že převodová funkce mezi délkou tlumiče a zobecněnou souřadnicí je konstantní, což jistě není pravda. Tento předpoklad si můžeme dovolit, pokud budeme respektovat výše zmíněnou podmínku pro uplatnění goniometrické linearizace a to, že předpokládané velikosti zobecněných souřadnic budou relativně malé.

Po dosazení převodové funkce a nezbytných úpravách konečně dostáváme:

$$\mathbf{B_{Tj}} = \begin{bmatrix} 4 \cdot b_{j1} \cdot \gamma_{T01}^{j+1} & 0 & 0 \\ 0 & b_{j21} \cdot \gamma_{T021}^{j+1} + b_{j22} \cdot \gamma_{T022}^{j+1} & 0 \\ 0 & 0 & b_{j31} \cdot \gamma_{T031}^{j+1} + b_{j32} \cdot \gamma_{T032}^{j+1} \end{bmatrix}, \tag{139}$$

j=1..m kde *m* je stupeň polynomu aproximující statickou rychlostní charakteristiku použitého tlumiče. Obdobně jako v případě pneumatických pružin lze vyjádřit převodovou funkci pro paralelogram:

$$\gamma_{T01} = \frac{h_1 a_{T1} \cos(\vartheta_0) + a_{T1} R_{T1} \sin(\vartheta_0)}{\sqrt{R_{T1}^2 + h_1^{\,2} + a_{T1}^{\,2} + 2h_1 a_{T1} \sin(\vartheta_0) - 2a_{T1} R_{T1} \cos(\vartheta_0)}} \tag{140}$$

a pro oba kardanovy rámy:

$$\gamma_{T0ij} = R_{Tij}, \tag{141}$$

kde $i = 2$ (resp. 3) je označení příslušnosti k tlumičům mezi horní základnou paralelogramu a prvním kardanovým rámem (resp. prvním a druhým Kardanovým rámem). Hodnota $j = 1$ nebo 2 a slouží k bližšímu určení tlumiče mezi jednotlivými rámy.

3.2 Rovnovážná poloha systému

Rovnovážnou polohu nastavujeme při vodorovné poloze ložné plochy automobilu (tj. pro $\alpha = 0, \beta = 0, \zeta = 0$). Je definována tak, že statické složky tíhového momentu dané nultými členy v příslušném Taylorově rozvoji Lagrangeových rovnic jsou vyrovnávány za pomoci polohových regulátorů nultými členy v mocninných rozvojích momentů pneumatických pružin:

$$\vec{E}_{L0} = \vec{E}_{P0}. \tag{142}$$

Z podmínky (142) dostaneme:

$$\begin{bmatrix} (m_4 + m_5 + m_6 + 2m_R) gR \cos\vartheta_0 \\ (m_5 x_{T5} + m_6 (x_{T6} + x_{56})) g \\ m_6 y_{T6} g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \cdot p_{01} S_{01} \gamma_{01} \\ p_{021} S_{021} \gamma_{021} - p_{022} S_{022} \gamma_{022} \\ p_{031} S_{031} \gamma_{031} - p_{032} S_{032} \gamma_{032} \end{bmatrix}. \tag{143}$$

K těmto momentovým podmínkám připojíme ještě podmínky silové rovnováhy na obou rámech:

$$-(m_5 + m_6) g + p_{021} S_{021} + p_{022} S_{022} = 0, \tag{144}$$

$$-m_6 g + p_{031} S_{031} + p_{032} S_{032} = 0. \tag{145}$$

Tím jsme získali soustavu 5 rovnic pro 5 neznámých počátečních tlaků v pneumatických pružinách. Řešením této soustavy dostáváme:

$$p_{01} = \frac{(m_4 + m_5 + m_6 + 2m_R) gR \cos\vartheta_0}{4 S_{01} \gamma_{01}}, \tag{146}$$

$$p_{021} = \frac{(m_5 x_{T5} + m_6 (x_{T6} + x_{56}))g + (m_5 + m_6) g \gamma_{022}}{S_{021}(\gamma_{021} + \gamma_{021})}, \tag{147}$$

$$p_{022} = \frac{-(m_5 x_{T5} + m_6 (x_{T6} + x_{56}))g + (m_5 + m_6) g \gamma_{021}}{S_{022}(\gamma_{021} + \gamma_{021})}, \tag{148}$$

$$p_{031} = \frac{m_6 y_{T6} g + m_6 g \gamma_{032}}{S_{031}(\gamma_{031} + \gamma_{031})}, \tag{149}$$

$$p_{032} = \frac{-m_6 y_{T6} g + m_6 g \gamma_{031}}{S_{032}(\gamma_{031} + \gamma_{031})}. \tag{150}$$

3.3 *Řešení linearizovaného systému*

Pro řešení problému vlastních frekvencí linearizovaného systému nám postačí na základě znalostí z předchozích dvou kapitol sestavit charakteristický polynom ve tvaru:

$$\det\left|\lambda^2 \cdot \mathbf{A} + \lambda \cdot (\mathbf{B_L} + \mathbf{B_T}) + (\mathbf{C_L} + \mathbf{C_p})\right| = 0,$$

kde $\mathbf{A}$ je matice hmotnosti, $\mathbf{B_L}$ matice tlumení vyplývající z Lagrangeových rovnic, $\mathbf{B_T}$ matice tlumení aplikovaných tlumičů, $\mathbf{C_L}$ matice tuhosti vyplývající z Lagrangeových rovnic (odvozená derivací momentů gravitačních sil) a $\mathbf{C_p}$ matice tuhosti pneumatických pružin.

Imaginární části kořenů tohoto polynomu odpovídají hledaným vlastním frekvencím. Zde se naplno projeví výhoda programu Maple, ve kterém lze řešení charakteristické rovnice při vypnutém tlumení nalézt v analytické formě a následné řešení je tudíž velice rychlé. Pro případ, kdy sledujeme vliv tlumení na polohu vlastních frekvencí je již nutné počítat kořeny charakteristického polynomu numericky. Konkrétní výpis jednotlivých programů je uveden v přílohách a proto je zde pouze stručně nastíněn postup řešení.

3.3.1 Struktura použité numerické simulace

<u>Lagrangeovy rovnice</u>

- Definice souřadných systémů a polohy jednotlivých těžišť. Vektor úhlových výchylek je $\vec{q} = (\vartheta, \varphi, \psi)$
- Výpočet kinetických a potenciálních energií
- Sestavení Lagrangeových rovnic

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}} - \frac{\partial T}{\partial \vartheta} + \frac{\partial U}{\partial \vartheta} = L_1, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} + \frac{\partial U}{\partial \varphi} = L_2, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} - \frac{\partial T}{\partial \psi} + \frac{\partial U}{\partial \psi} = L_3$$

- První krok linearizace Lagrangeových rovnic (trigonometrická linearizace)

- Uložení Lagrangeových rovnic $\mathbf{L} = \mathbf{f}(q_i, \alpha(t), \beta(t), \xi(t), \mathbf{r_i}, \mathbf{m}_i ...)$

Druhý krok linearizace lagrangeových rovnic

- Načtení Lagrangeových rovnic $\mathbf{L} = \mathbf{f}(q_i, \alpha(t), \beta(t), \xi(t), \mathbf{r_i}, \mathbf{m}_i ...)$
- Vytvoření jakobiánu [5]

$$\mathbf{C_L} = \left[C_{i,j} = \frac{\partial L_i}{\partial q_j} \right]_{\substack{\vartheta,\varphi,\psi=0 \\ \dot{\vartheta},\dot{\varphi},\dot{\psi}=0 \\ \ddot{\vartheta},\ddot{\varphi},\ddot{\psi}=0}}, \mathbf{B_L} = \left[B_{i,j} = \frac{\partial L_i}{\partial \dot{q}_j} \right]_{\substack{\vartheta,\varphi,\psi=0 \\ \dot{\vartheta},\dot{\varphi},\dot{\psi}=0 \\ \ddot{\vartheta},\ddot{\varphi},\ddot{\psi}=0}}, \mathbf{A_L} = \left[A_{i,j} = \frac{\partial L_i}{\partial \ddot{q}_j} \right]_{\substack{\vartheta,\varphi,\psi=0 \\ \dot{\vartheta},\dot{\varphi},\dot{\psi}=0 \\ \ddot{\vartheta},\ddot{\varphi},\ddot{\psi}=0}}$$

$$\mathbf{E_L} = \begin{bmatrix} L_1(\vartheta(t), \varphi(t), \psi(t) = 0) \\ L_2(\vartheta(t), \varphi(t), \psi(t) = 0) \\ L_3(\vartheta(t), \varphi(t), \psi(t) = 0) \end{bmatrix} \quad i, j = 1..3$$

- Uložení vytvořených matic do souboru.

Matice tuhosti a vektor momentů pneumatických pružin

- Matematický model pružiny (např. odvozený v kap. 2.4)
- Moment realizovaný pružinou (vytvoření převodové funkce a její dosazení):

$$M_\alpha = F(p, l(\alpha)) \cdot \frac{dl}{d\alpha}$$

- Rozvedení závislosti v Taylorovu řadu a vytvoření matice $\mathbf{C_p}$ a vektoru $\vec{E}_p$
- Uložení matice tuhosti a vektoru momentů pružin do souboru.
- Matematický model tlumiče.
- Moment vyvolaný tlumičem (vytvoření převodové funkce a její dosazení):

$$M_{Tq} = \sum_{j=1}^{m} b_j r_{Tq}^{j+1} \dot{q}^j$$

- Rozvedení závislosti v Taylorovu řadu a vytvoření matice $\mathbf{B_T}$.
- Uložení matice tlumení do souboru.

Dále se algoritmus pro řešení problému vlastních čísel a pro simulace odezvy na budící funkci liší.

Problém vlastních čísel (frekvencí)

Sestavení obecného charakteristického polynomu

- Načtení matic získaných z Lagrangeových rovnic a linearizací momentů pneumatických pružin a tlumičů.
- Dosazení načtených hodnot a následné symbolické vyjádření charakteristického polynomu:

$$\det\left| \lambda^2 \cdot \mathbf{A} + \lambda \cdot (\mathbf{B_L} + \mathbf{B_T}) + (\mathbf{C_L} + \mathbf{C_p}) \right| = 0$$

- Uložení charakteristického polynomu

Výpočet závislosti vlastních frekvencí na parametrech systému

- Načtení charakteristického polynomu.
- Definice všech parametrů systému uvedených v tab. 1 kromě sledovaných parametrů. Z hlediska zobrazovacích možností je možné sledovat závislost max. dvou parametrů během jedné simulace.
- Výpočet polohy těžiště a tenzoru setrvačnosti soustavy „druhý kardanův rám, lehátko a pacient“.
- Výpočet tlaků v pružinách při rovnovážné poloze.
- Výpočet kořenů charakteristického polynomu (v případě vypnutého tlumení analyticky).
- Zobrazení a uložení výsledků simulace.

<u>Simulace odezvy na budící funkci</u>

- Načtení matic získaných z Lagrangeových rovnic a linearizací momentů pneumatických pružin a tlumičů.
- Dosazení načtených hodnot do charakteristické rovnice.
- Doplnění o stavové rovnice ideálního plynu (závislost mezi tlakem v pružině a objemem).
- Definice budící funkce.
- Výpočet polohy těžiště a tenzoru momentu setrvačnosti soustavy „druhý kardanův rám, lehátko a pacient“.
- Výpočet tlaků v pružinách při dosažení rovnovážné polohy.
- Převedení na systém diferenciálních rovnic prvního řádu.
- Numerický výpočet soustavy diferenciálních rovnic metodou Runge-Kutta s proměnou délkou kroku.
- Zobrazení a uložení výsledků.

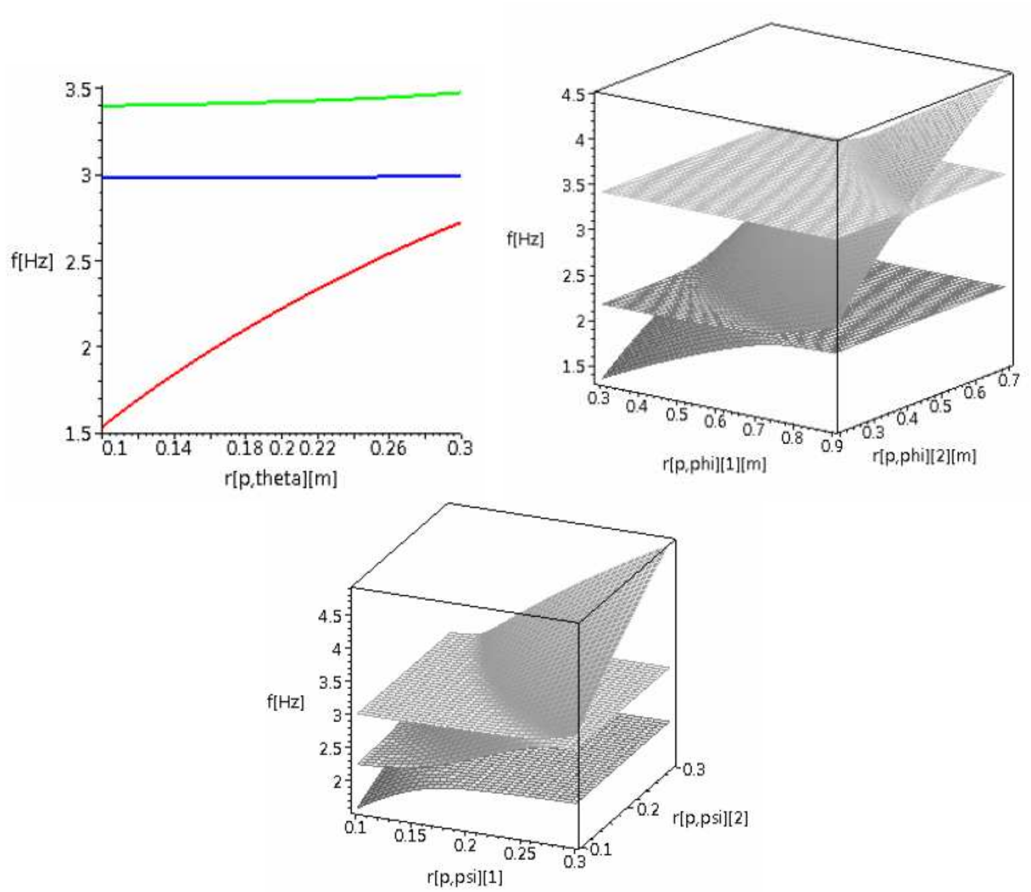
Jak je patrné ze schématu řešení, stačí, počítají-li se Lagrangeovy rovnice, rovnice momentů pneumatických pružin a tlumičů a jejich následná linearizace pouze jednou. Tyto vztahy jsou odvozeny a dosazují se do charakteristické rovnice (polynomu) v obecné analytické podobě a veškerá dosazení za konkrétní hodnoty (délky ramen uložení pružin a tlumičů, efektivní plocha pružiny, hmotnost pacienta,…) je provedeno až těsně před vlastním řešením soustavy diferenciálních rovnic (kořenů charakteristického polynomu).

Analytické řešení kořenů charakteristického polynomu (bez zabudovaných tlumičů se v polynomu vyskytují pouze sudé mocniny) nám dává možnost sestavit funkční závislost velikosti jednotlivých vlastních frekvencí na sledovaném parametru (parametrech). Následně je možné na základě této známé funkce vykreslit graf závislosti velikosti vlastních frekvencí na sledovaném parametru, viz obr. 23-25. Je nutné se zmínit, že celý tento proces (analytické řešení problému vlastních frekvencí) trvá řádově vteřiny (2-7s pro dvourozměrnou závislost a 5-15s pro třírozměrnou závislost).

Pokud budeme sledovat vliv parametrů v systému se zabudovanými tlumiči, je nutné, řešit problém vlastních čísel numericky, viz. obr. 28 (hledáme kořeny obecného polynomu šestého stupně). Zde je čas nutný k vyřešení problému závislý na kroku, po kterém měníme sledovaný parametr. Řádově se jedná o desítky vteřin, maximálně minuty.

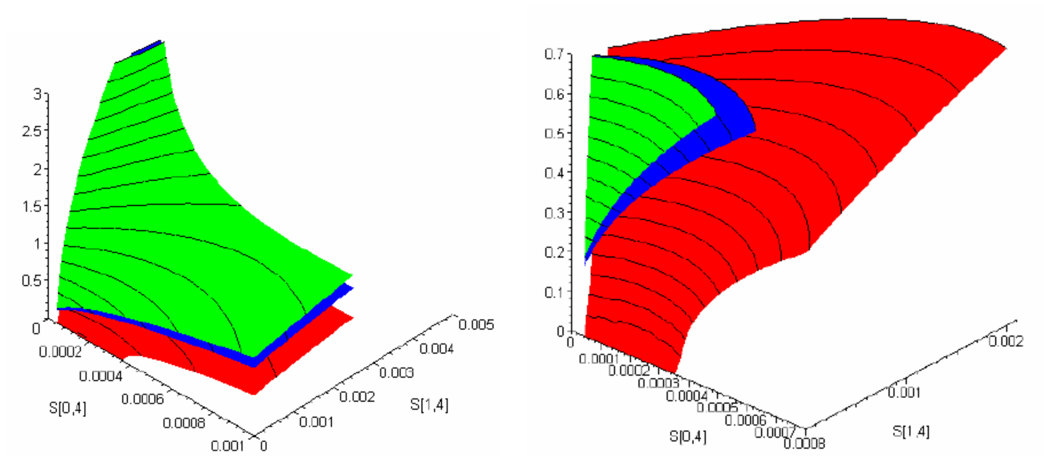
Pro řešení odezvy na budící funkci rozmítaného sinu je nutné, aby se případná rezonance měla čas plně rozvinout a proto je nutné velice pomalu měnit budící frekvenci. Empiricky bylo zjištěno, že optimální rychlost zvyšování budící frekvence je taková, že se z 0 na 8 Hz dostaneme za 240s. Pokud budeme řešit odezvu na tuto budící funkci, je nutné zvýšit maximální počet integračních kroků na min. 200 000. Výpočet touto metodou trvá většinou 15-20min. pro jeden konkrétní parametr. Tato metoda je vhodná pouze k odhadnutí následků vzájemné interakce blízkých vlastních frekvencí, viz obr. 26 a 27.

3.3.2 Vliv vzdálenosti pružiny od osy rotace na vlastní frekvence systému



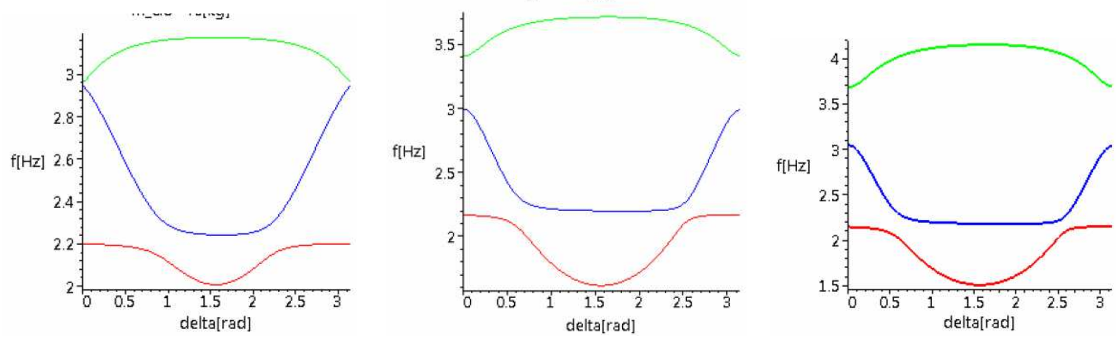
Obr. 23: Vliv umístění pružin na vlastní frekvence systému.

3.3.3 Vliv charakteristických parametrů pružin na vlastní frekvence



Obr. 24: Vliv koeficientů efektivní plochy pružiny na vlastí frekvenci a oblast pod požadovanou hranicí 0,7Hz.

3.3.4 Vliv polohy pacienta na vlastní frekvence



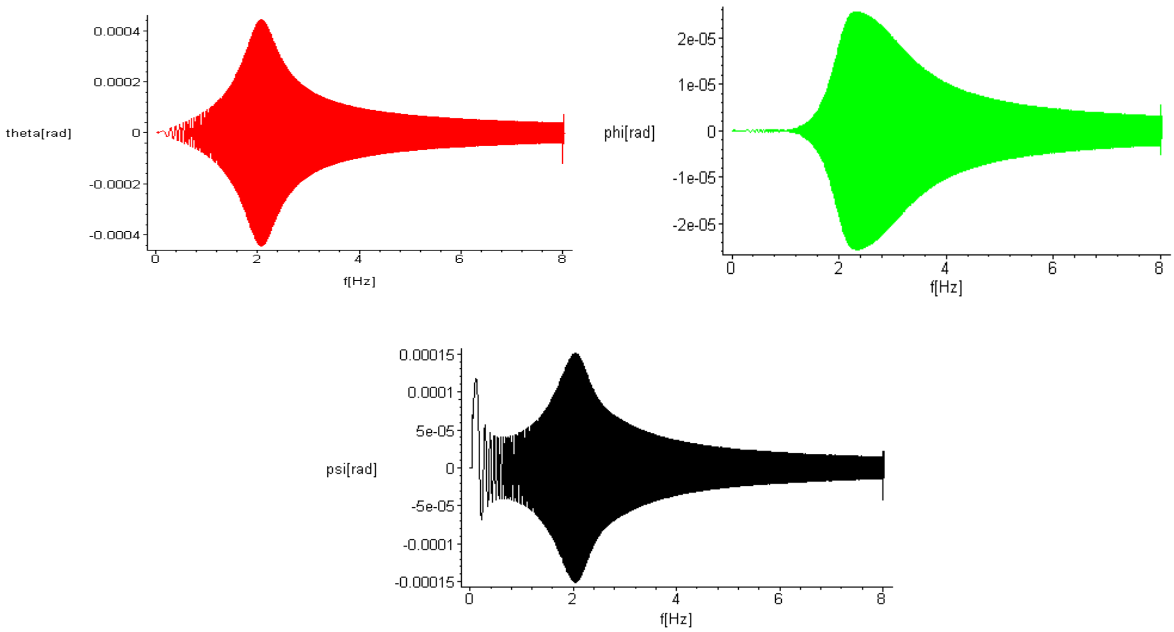
Obr. 25: Vliv natočení pacienta na vlastní frekvence systému. Hmotnost pacienta zleva doprava 40kg, 80kg, 120kg.

Je patrné, že se zmenšujícím se ramenem na kterém jsou umístěny pneumatické pružiny se výrazně snižují také vlastní frekvence systému (Obr. 23). Tohoto efektu lze ovšem využít pouze v omezené míře. Jsme limitováni minimální zástavbovou výškou použité pružiny (lze obejít vhodnou konstrukční úpravou) a maximálním provozním tlakem v pružině (v našem případě 0,7MPa) který při zkracování ramen velice rychle stoupá.

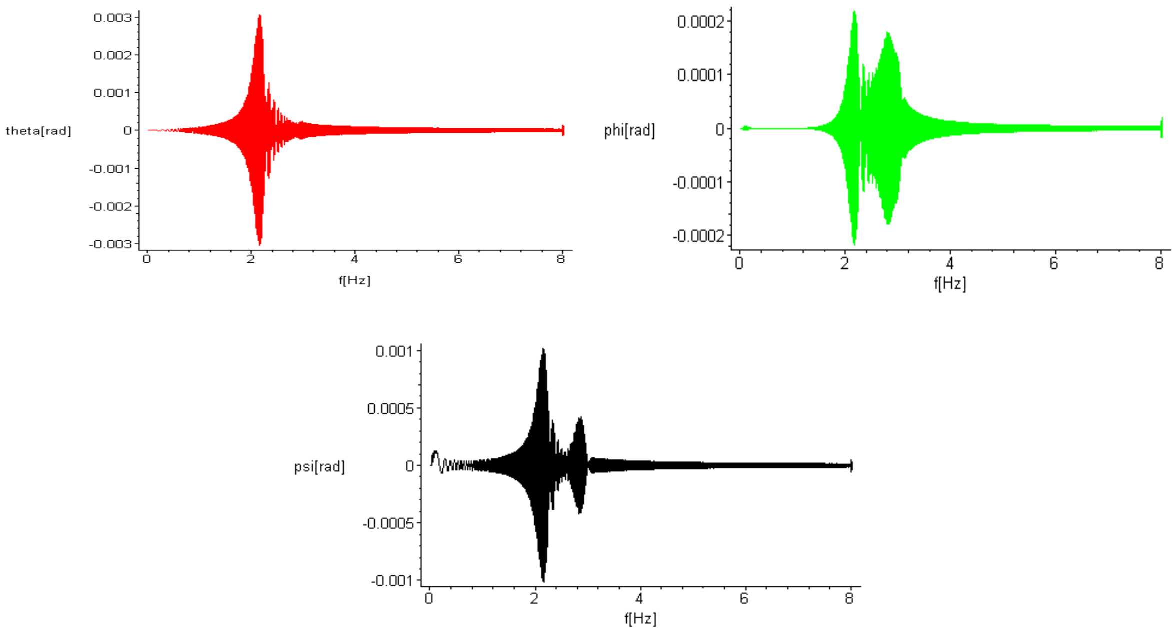
Co se týká velikosti koeficientů charakterizujících velikost efektivní plochy pružiny, je teoreticky možné s pomocí grafu na obr. 24 vpravo určit její konkrétní velikost tak, aby byly vlastní frekvence v požadovaném rozsahu, prakticky ale může být nemožné pružiny s takovými parametry objednat nebo vyrobit.

Z grafů na obr. 25 vyplývá, že hmotnost pacienta ovlivní polohu první a druhé vlastní frekvence systému pouze minimálně. Třetí vlastní frekvence je velice citlivá na změnu hmotnosti pacienta. Rozdíl činí až o 20% mezi pacienty o hmotnosti 40 a 80kg. Je nepravděpodobné, že by mohla nastat situace, kdy je pacient otočen o více než 5°, ale malé odchylky lze předpokládat. V tomto rozsahu je míra změny velikosti vlastních frekvencí mnohem menší než u hmotnosti pacienta.

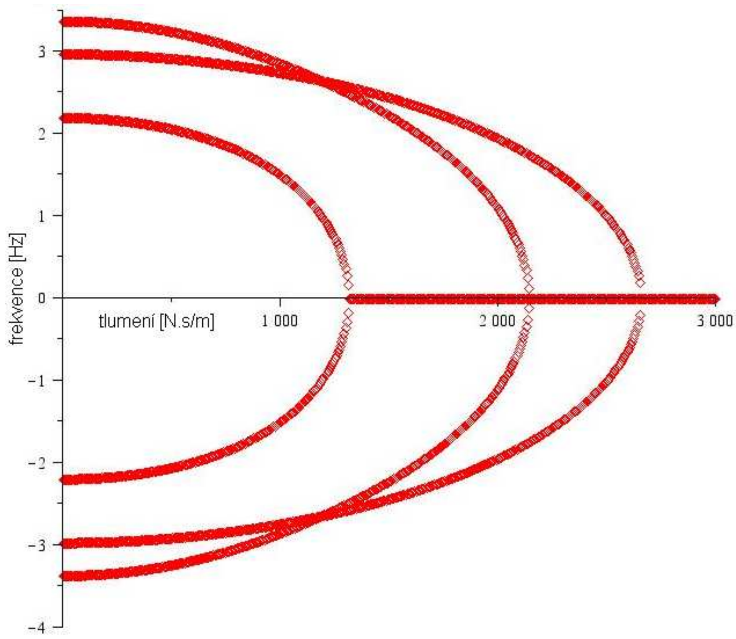
3.3.5 Odezva systému na kinematické buzení



Obr. 26: Odezva systému na buzení rozmítaným sinem s konstantní amplitudou rychlosti.



Obr. 27: Odezva systému na stejné buzení jako v předchozím případě, tlumení je 10x menší.



Obr. 28: Vliv velikosti tlumení na polohu vlastních frekvencí.

Z porovnání obr. 26 a 27 je patrné mírné snížení vlastních frekvencí při zvýšeném tlumení aplikovaných tlumičů. Tento trend potvrzuje i výsledek simulace na obr. 28, kde je postupně zvyšováno tlumení na všech tlumičích v systému současně. Při nízkém použitém tlumení má systém lepší vibroizolační vlastnosti v nadrezonanční oblasti (obr. 27), ale v rezonančních oblastech jsou vybuzené amplitudy výrazně vyšší než při použití silnějších tlumičů (obr. 26). Podrobněji je vliv parametrů tlumičů popsán v kap. 3.4.2.

3.4 *Matematické modelování nelineárního systému*

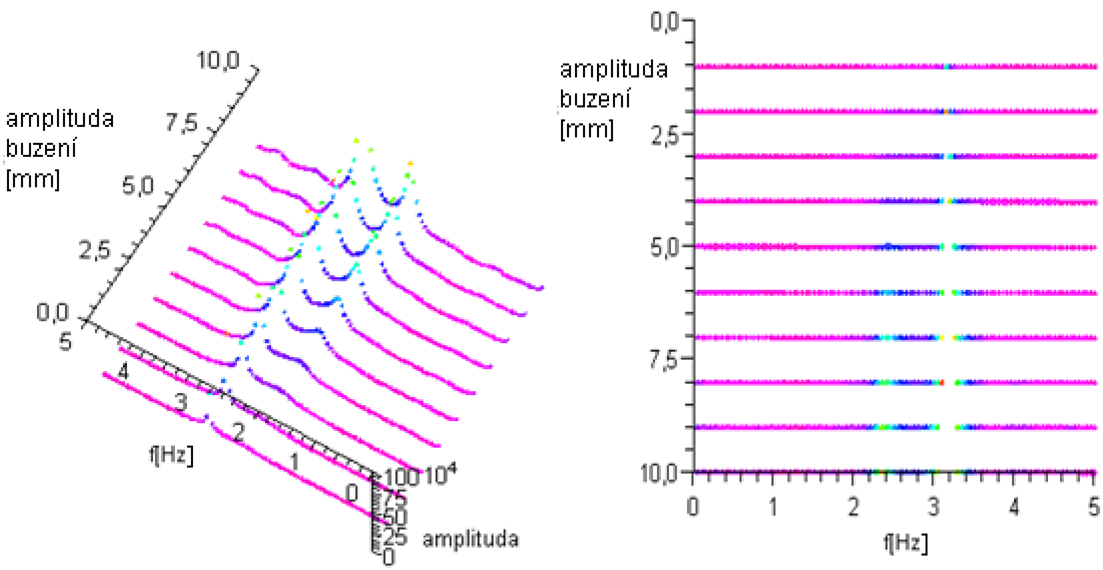
Pomocí linearizovaného systému jsme dostali jasně dané závislosti vlastních frekvencí na rozličných parametrech. Jelikož jsme při tvorbě linearizovaného modelu zanedbali nebo zjednodušili řadu složitých závislostí, byl vytvořen i zcela nelineární model zahrnující kompletní tvary Lagrangeových rovnic a matematických modelů tlumičů a pneumatických pružin. Takto sestavené diferenciální rovnice jsou velice obsáhlé (jenom Lagrangeovy rovnice zabírají cca. 80 stran textu o velikosti 12 bodů) a proto nejsou v této práci publikovány.

V případě řešení odezvy na rozmítaný sinus simulující děj trvající 240sec. se doba výpočtu pohybuje kolem 40min. Tato simulace opět ukáže pouze vliv interakce blízkých frekvencí a vliv nastavení tlumičů na odezvu systému.

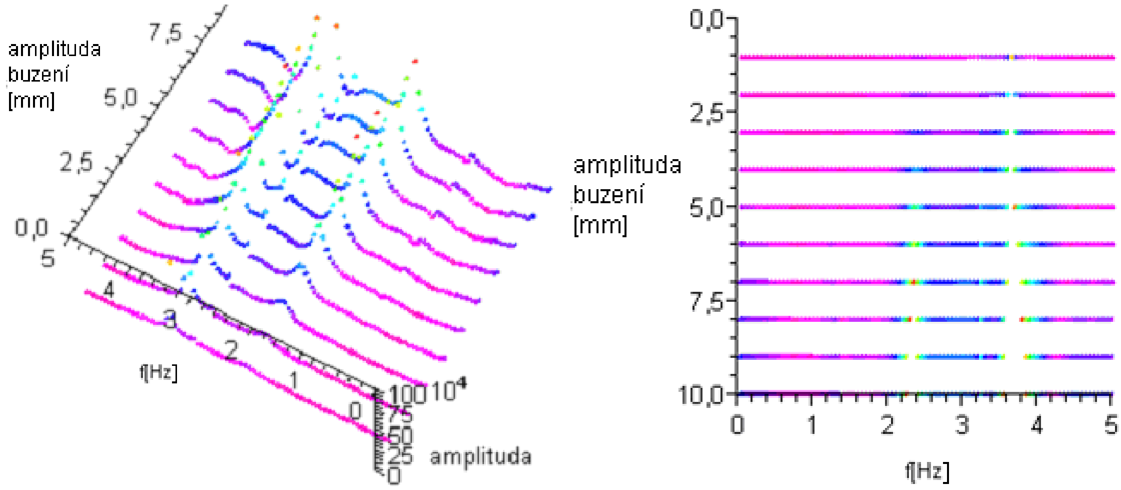
Pro naši potřebu je daleko přínosnější druhá použitá metoda, kdy byl systém vybuzen jednoduchým sinem s frekvencí 25Hz (jež je mimo námi sledované nízké frekvence) po dobu 20s a vzniklý přechodový děj byl podroben diskrétní Fourierově transformaci [6]. Tento cyklus byl opakován 10x pro popsání vlivu jednotlivých parametrů na vlastní frekvence systému pro deset různých hodnot sledovaného parametru. Každá takováto analýza deseti hodnot konkrétního parametru trvá přibližně 3-4 hodiny a umožní nám vytvořit si poměrně jasnou představu o vlivu jednotlivých parametrů na nelineární systém.

3.4.1 Výsledky numerických simulací

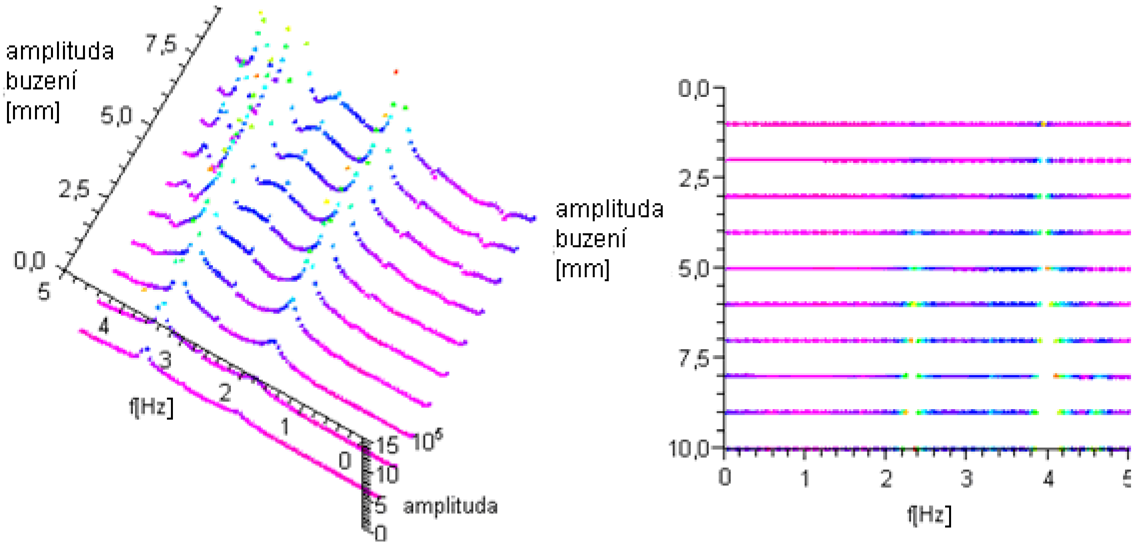
<u>Vliv velikosti amplitudy budící funkce</u>



Obr. 29: Amplituda budící funkce – 40kg.



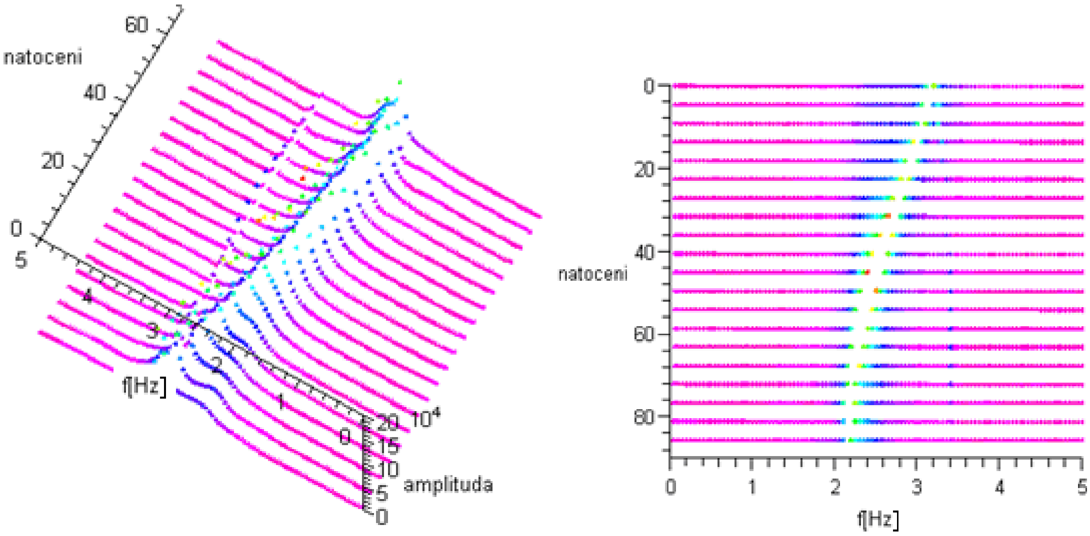
Obr. 30: Amplituda budící funkce – 80kg.



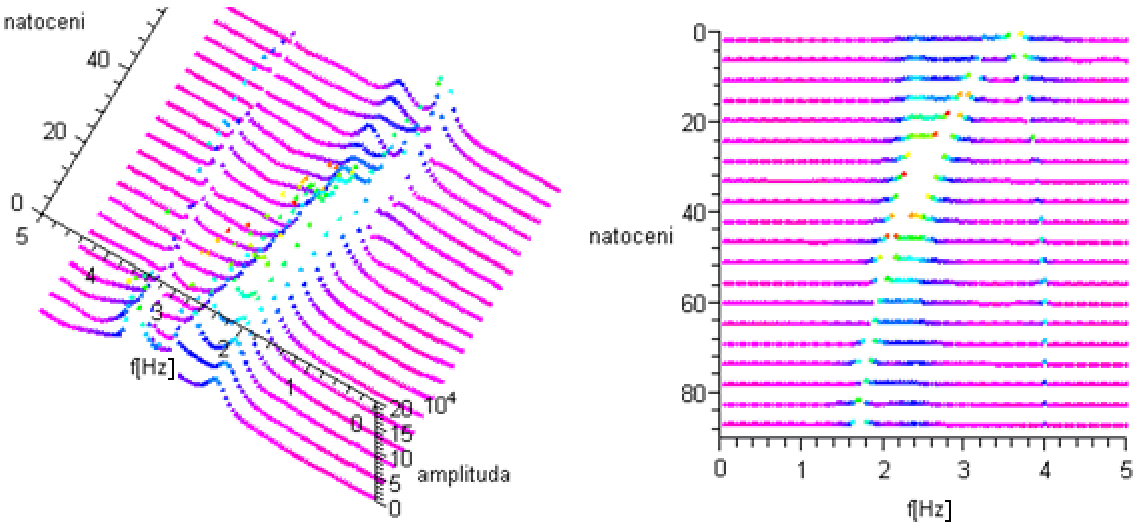
Obr. 31: Amplituda budící funkce – 120kg.

Vliv velikosti amplitudy budící funkce se v rozmezí 1-10mm na polohách vlastních frekvencí nijak výrazně neprojeví. Tato skutečnost potvrzuje oprávněnost zjednodušujících předpokladů, na jejichž základě byla provedena goniometrická linearizace celého systému Lagrangeových rovnic. Rovněž lze předpokládat, že se nedopouštíme velké chyby linerizací převodů a převodových funkcí pružin a tlumičů.

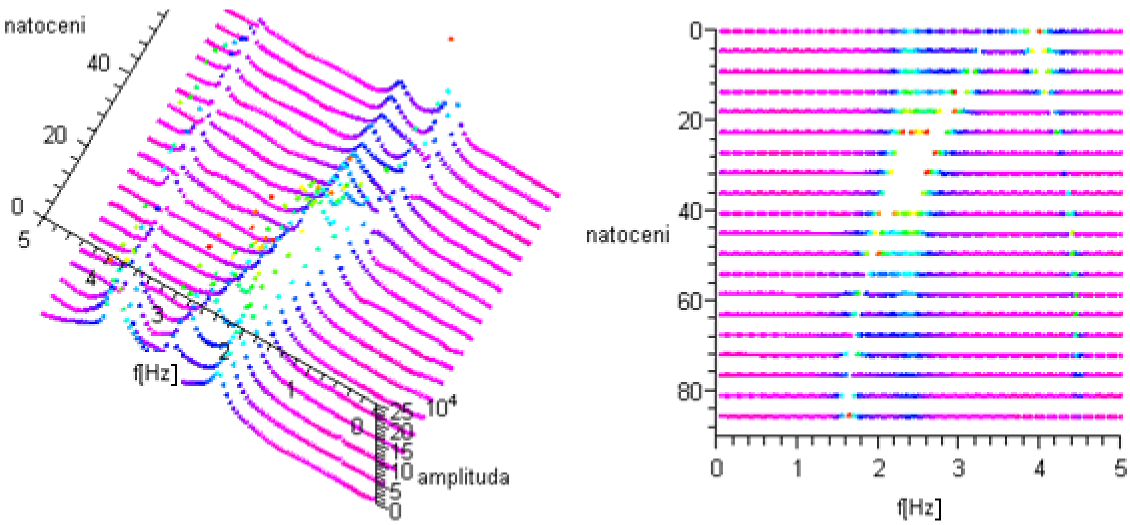
Poloha pacienta



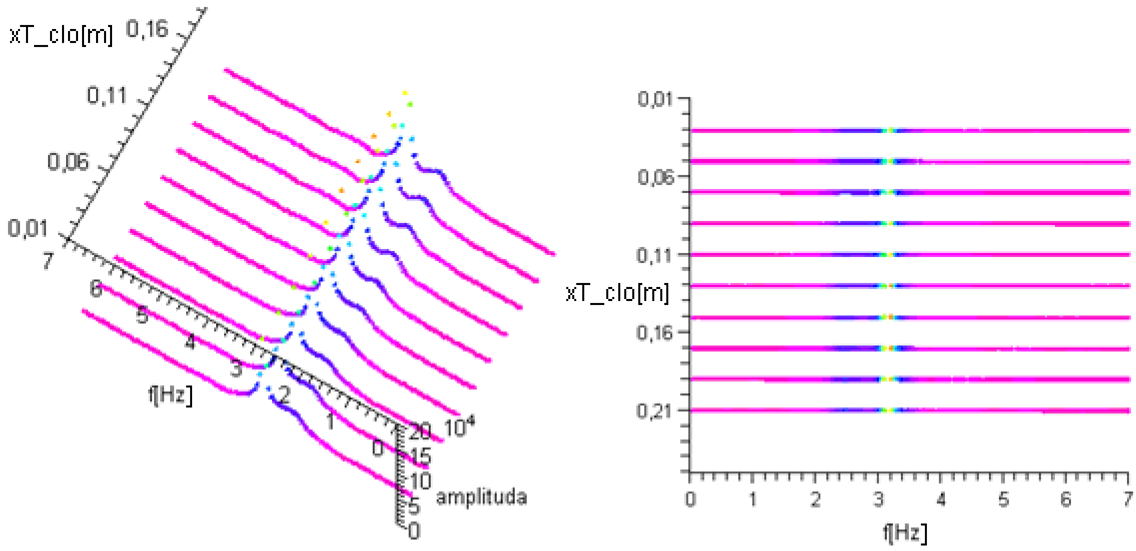
Obr. 32: Natočení pacienta ve stupních od osy x – 40kg.



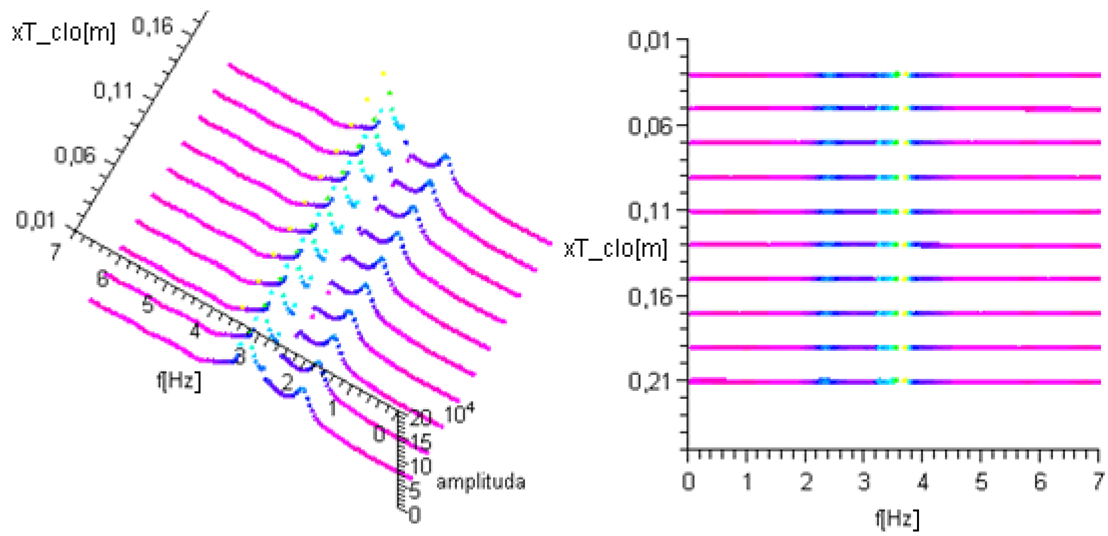
Obr. 33: Natočení pacienta ve stupních od osy x – 80kg.



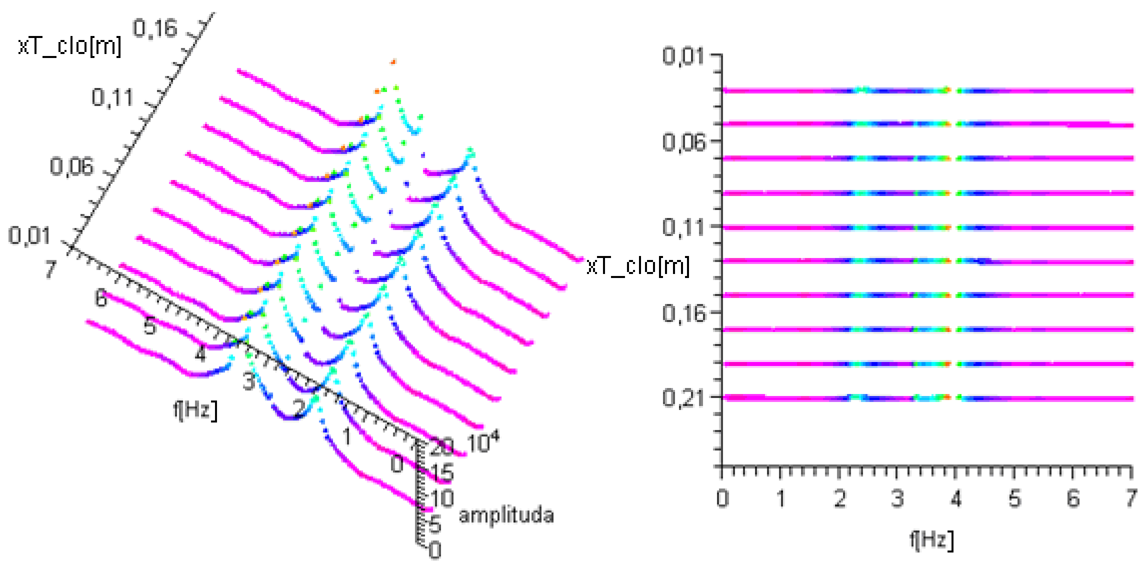
Obr. 34: Natočení pacienta ve stupních od osy x – 120kg.



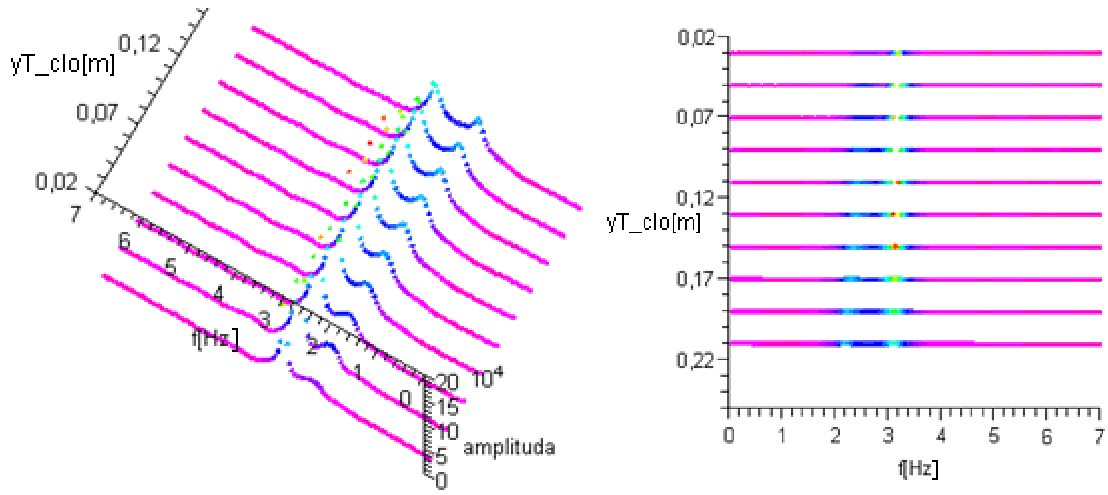
Obr. 35: Posunutí těžiště lidského těla ve směru osy x – 40kg.



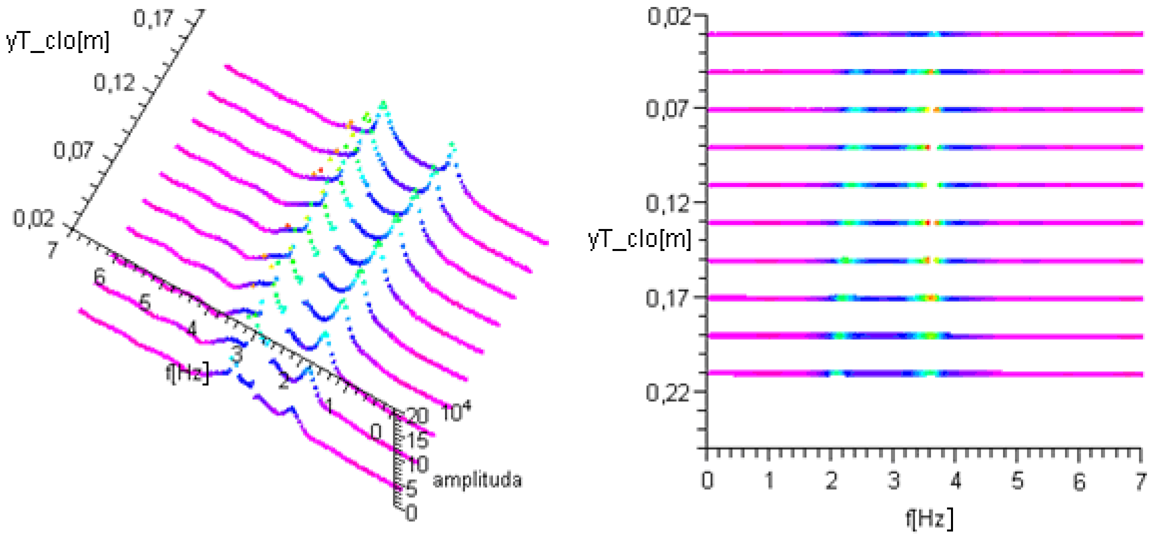
Obr. 36: Posunutí těžiště pacienta ve směru osy x – 80kg.



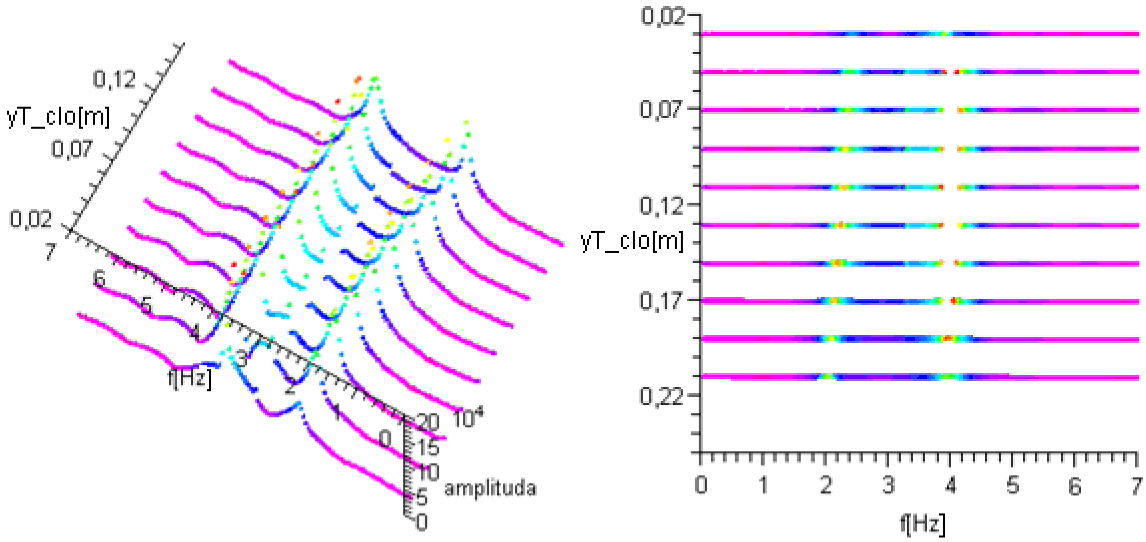
Obr. 37: Posunutí těžiště pacienta ve směru osy x – 120kg.



Obr. 38: Posunutí těžiště pacienta ve směru osy y – 40kg.



Obr. 39: Posunutí těžiště pacienta ve směru osy y – 80kg.

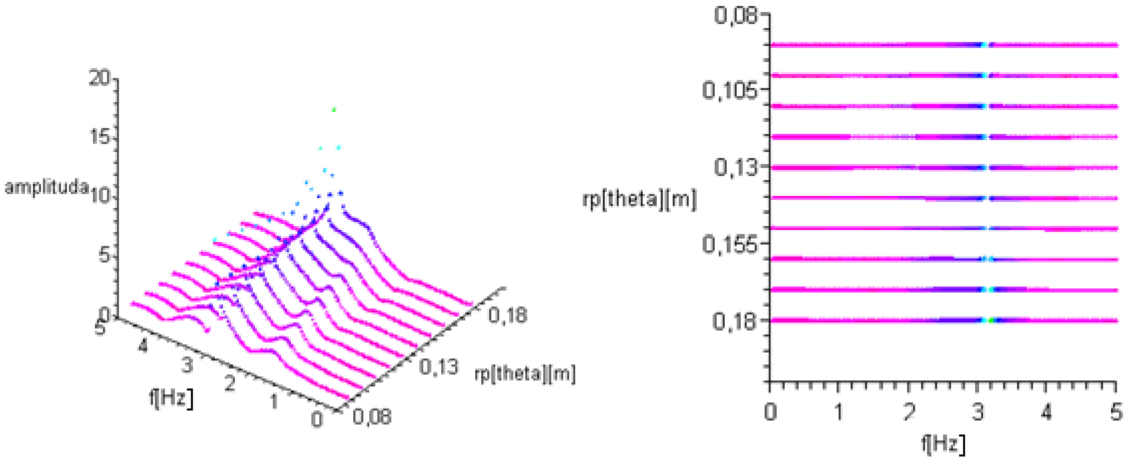


Obr. 40: Posunutí těžiště pacienta ve směru osy y – 120kg.

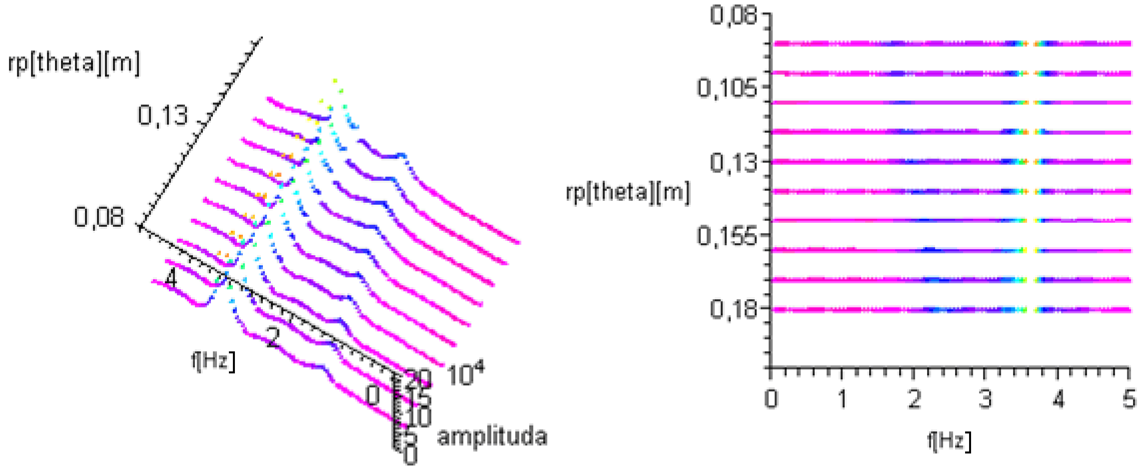
Natočení těla pacienta má poměrně velký vliv na polohu vlastních frekvencí pro rozsah předpokládané rotace 0-90°. Reálně dosažitelná odchylka je maximálně 10° a pro tento rozsah se výrazněji mění pouze druhá vlastní frekvence. a to o 0,2Hz (odpovídá přibližně 6% původní hodnoty).

Posunutí těžiště těla od obou os rotací rámů Kardanova závěsu bylo simulováno v rozsahu 0-20cm. Pro posunutí ve směru osy x (ve směru jízdy vozu) se vlastní frekvence takřka nemění. Pokud ovšem pacienta vychýlíme ve směru osy y (v příčném směru), je rozdíl 0,6Hz (23%) pro posunutí o 20cm u 80kg vážícího pacienta a dokonce 0,8Hz (28%) pro totéž posunutí a 120kg vážícího pacienta. Tímto způsobem se mění první a druhá vlastní frekvence, třetí se zdá být vůči této změně relativně inertní.

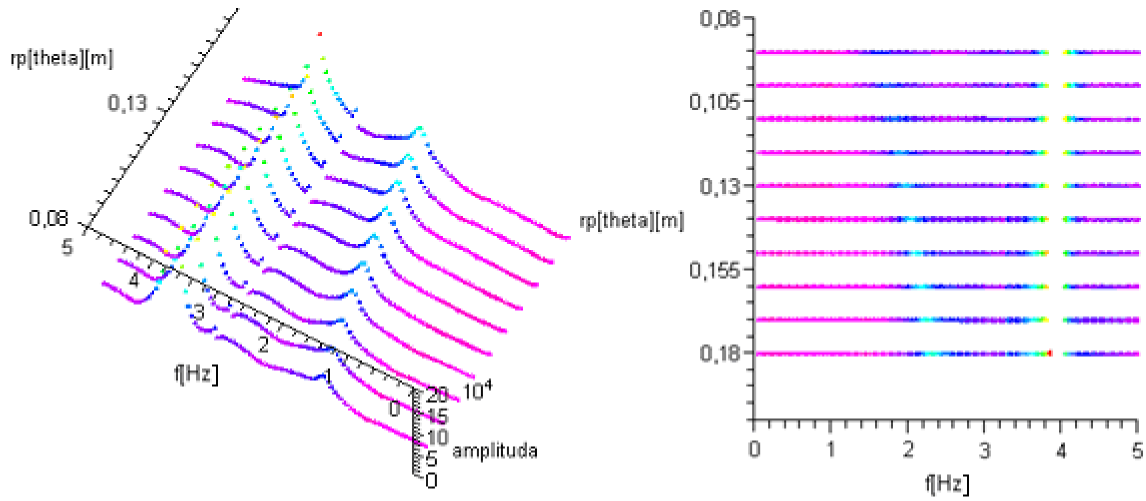
Poloha a efektivní plocha pružin



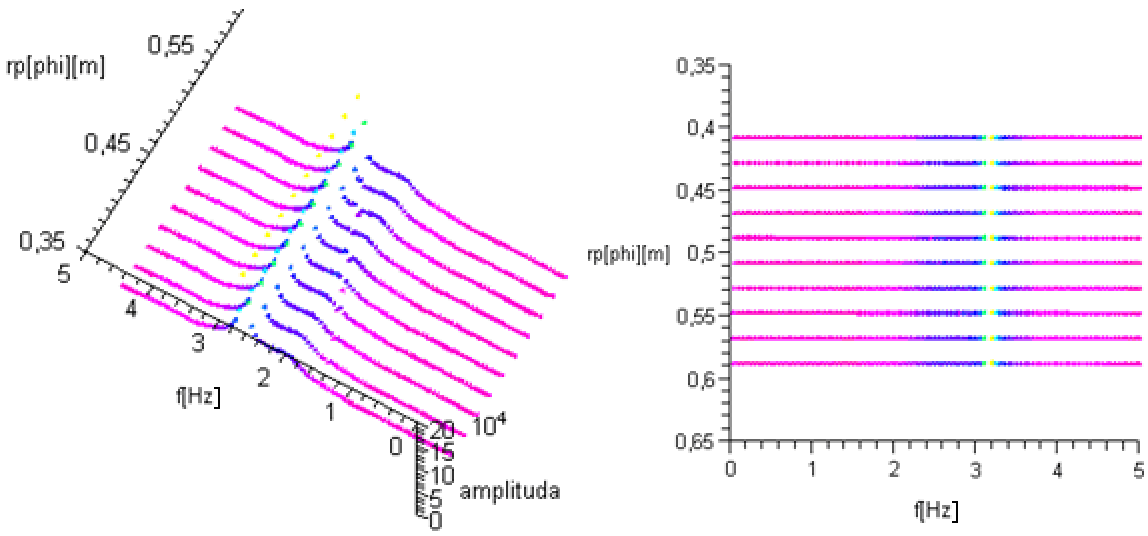
Obr. 41: Posunutí pružin paralelogramu – 40kg.



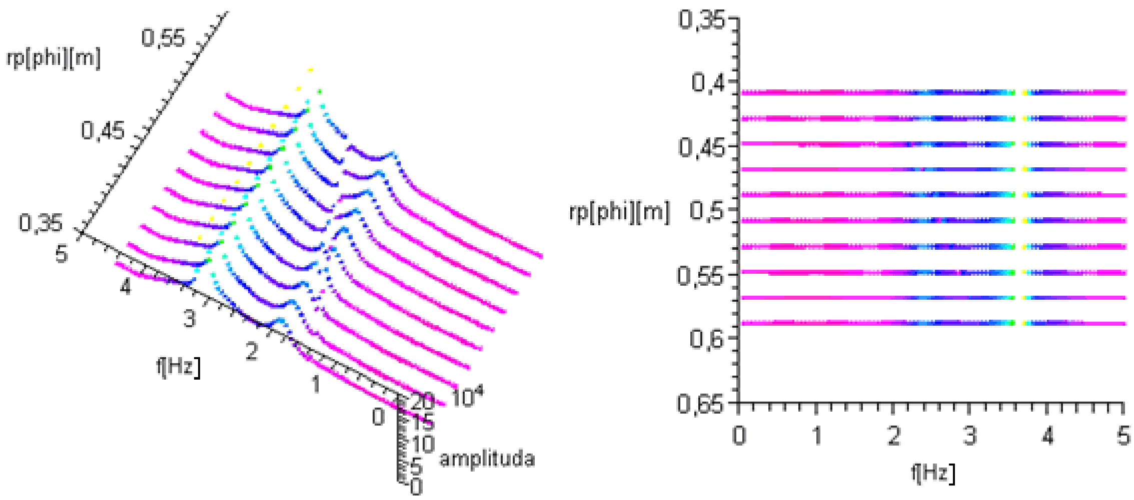
Obr. 42: Posunutí pružin na paralelogramu – 80kg.



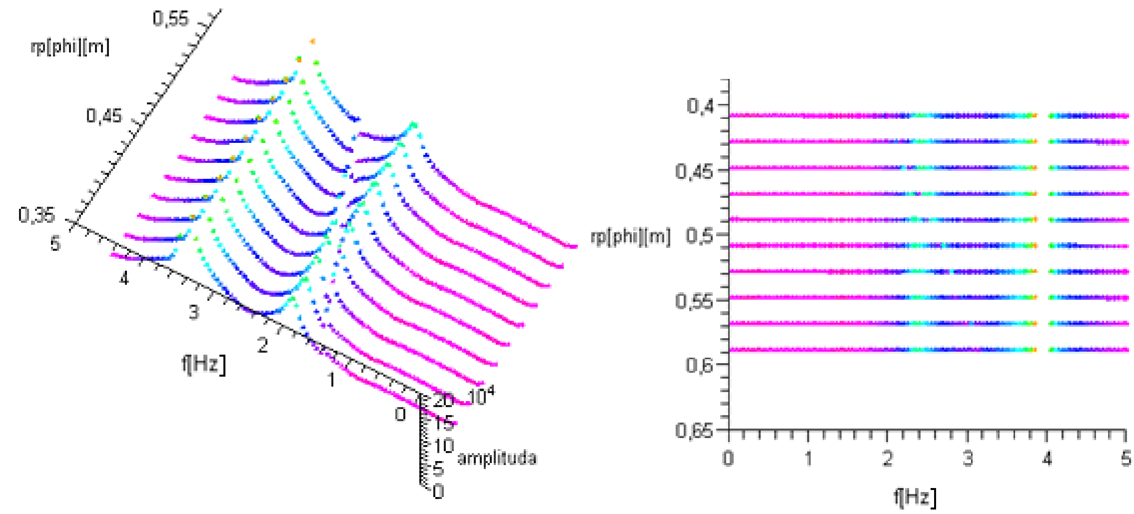
Obr. 43: Posunutí pružin paralelogramu – 120kg.



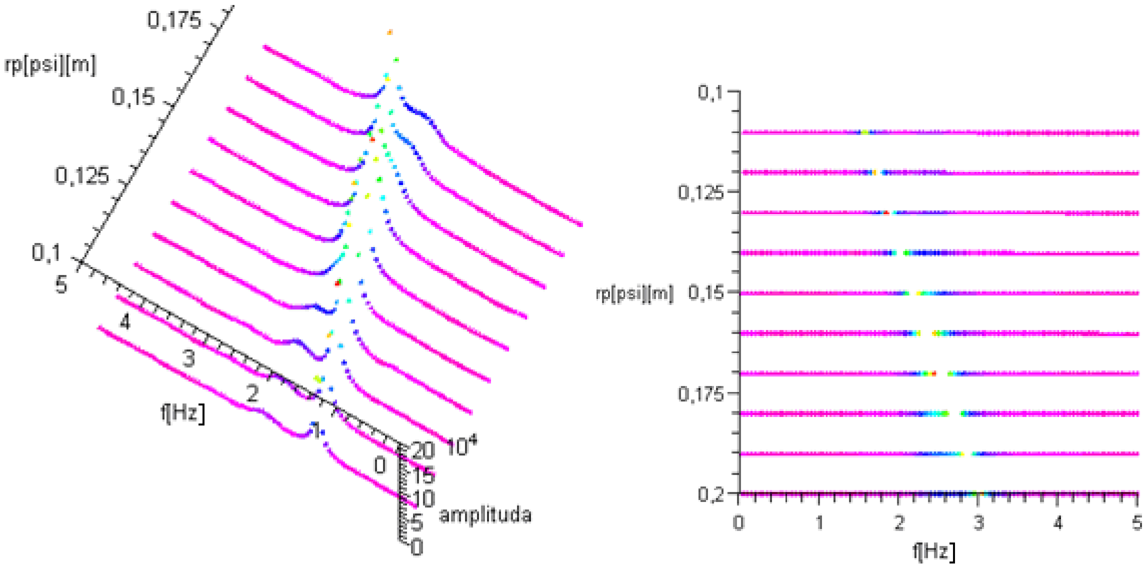
Obr. 44: Posunutí pružin mezi horní základnou a prvním rámem – 40kg.



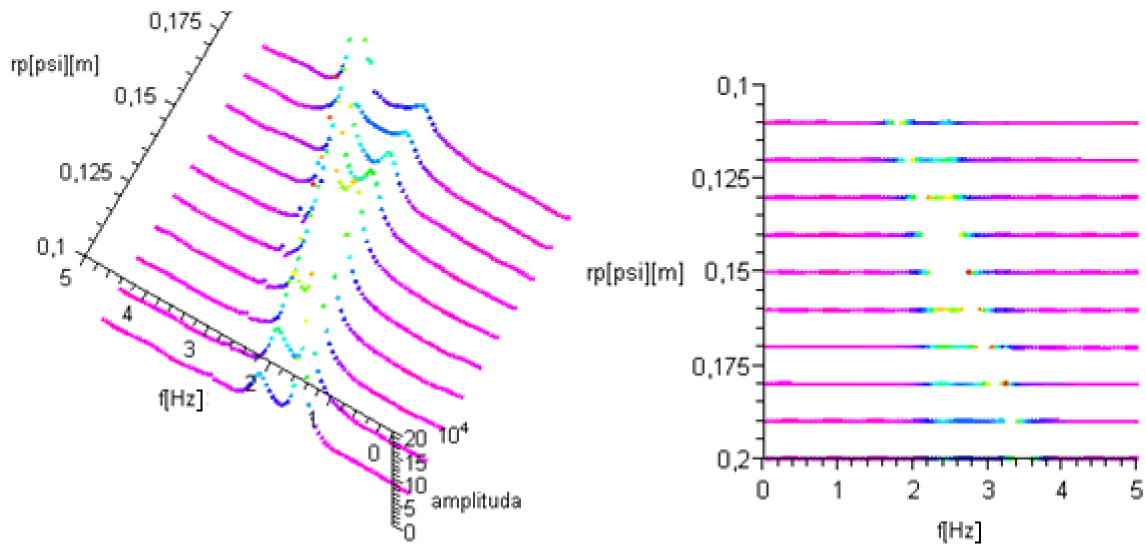
Obr. 45: Posunutí pružin mezi horní základnou a prvním rámem – 80kg.



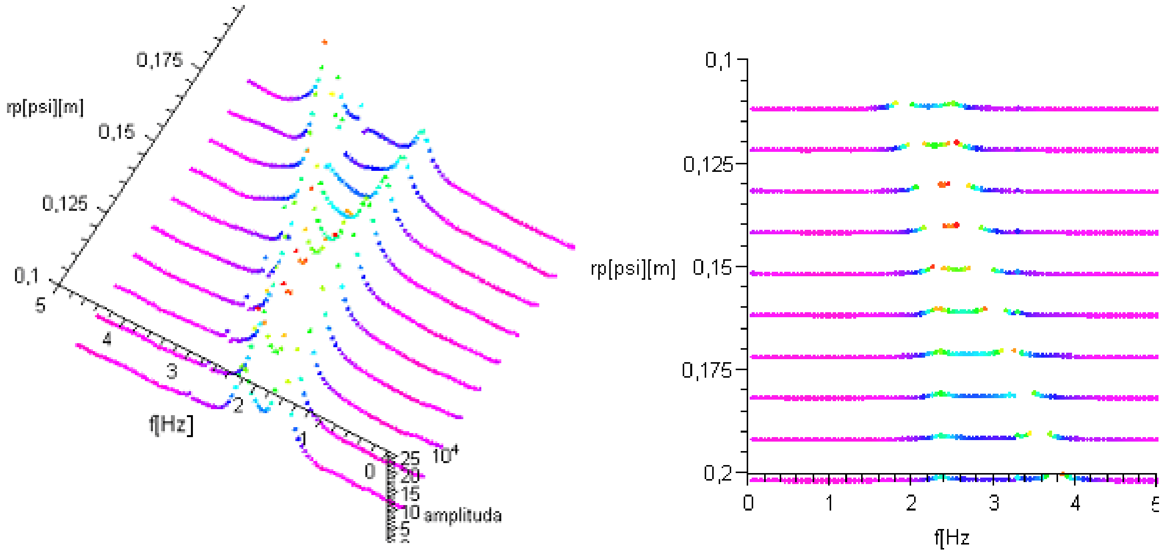
Obr. 46: Posunutí pružin mezi horní základnou a prvním rámem – 120kg.



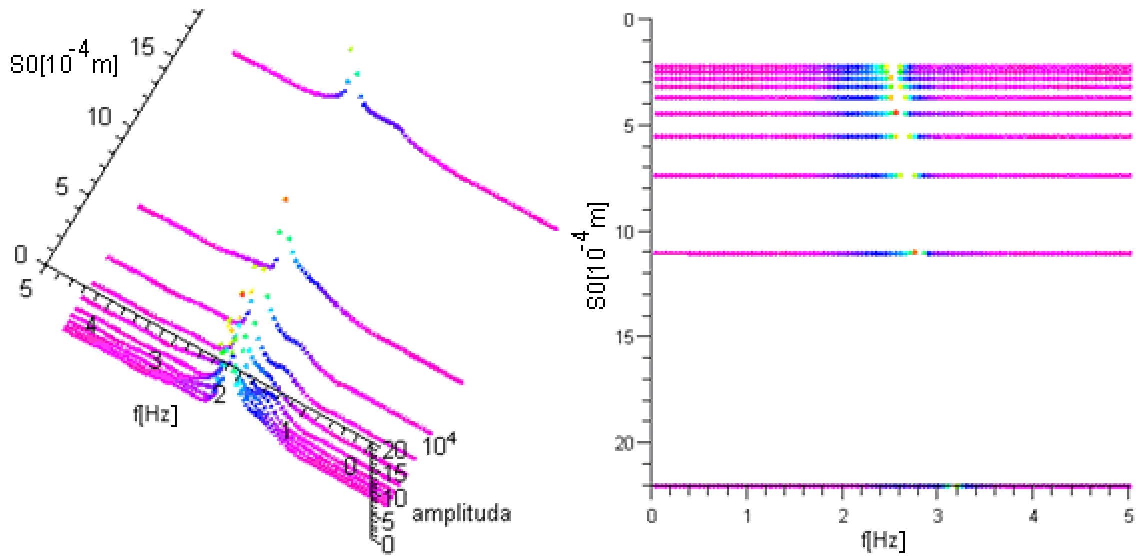
Obr. 47: Posunutí pružin mezi rámy kardanova závěsu – 40kg.



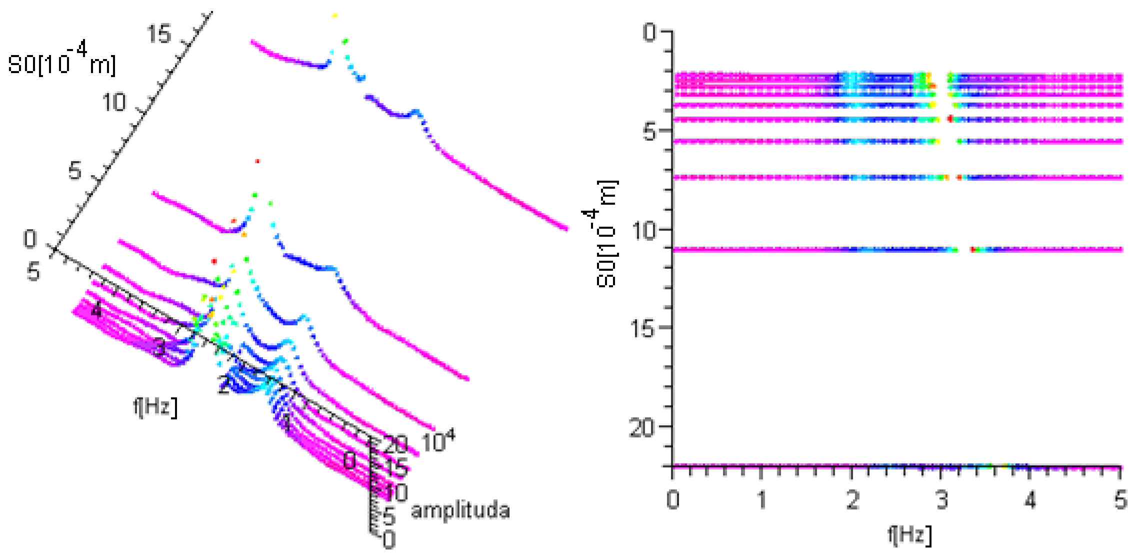
Obr. 48: Posunutí pružin mezi rámy kardanova závěsu – 80kg.



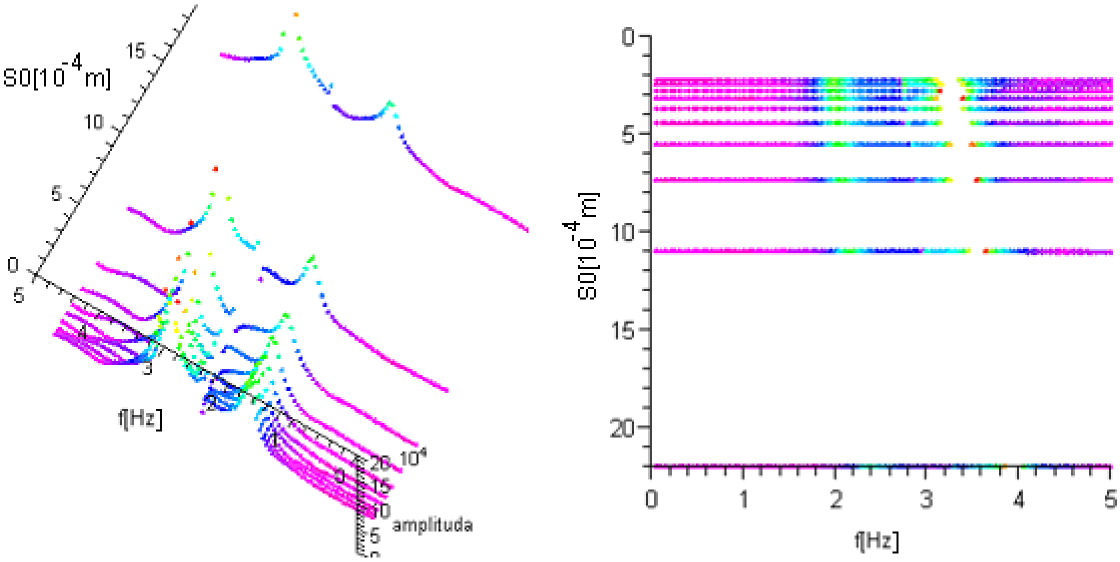
Obr. 49: Posunutí pružin mezi rámy kardanova závěsu – 120kg.



Obr. 50: Efektivní plocha pružiny – 40kg.



Obr. 51: Efektivní plocha pružin – 80kg.



Obr. 52: Efektivní plocha pružiny – 120kg.

Změnou převodu mezi natočením ramene paralelogramu a deformací pneumatické pružiny (posunutím pružiny blíže k ose rotace ramene paralelogramu) se výrazně změní i první vlastní frekvence systému. Při posunutí pružiny k ose o 10cm se posune první vlastní frekvence z 2,5Hz na hodnotu 1,7Hz (32%). Stojí za povšimnutí, že tento posun je totožný pro všechny tři typy pacientů a je tedy nezávislý na hmotnosti. Bohužel se posunem pružiny zvýší i pracovní tlak (povolené maximum je 0,7MPa) a zároveň sníží zástavbová délka pružiny (lze řešit vhodnou konstrukční úpravou).

Změna převodu mezi pootočením prvního rámu Kardanova závěsu a deformací pružiny mezi horní základnou a prvním rámem výrazněji ovlivňuje druhou vlastní frekvenci. Při posunutí obou pružin o 20cm blíže k ose rotace se druhé vlastní frekvence posunou z 3Hz – 3,4Hz -3,2Hz na hodnoty 2Hz – 2,2Hz – 2Hz pro hmotnosti pacienta 40kg – 80kg – 120kg. Polohy druhé a třetí vlastní frekvence jsou si velmi blízké a navzájem se ovlivňují což ztěžuje přesné odečtení konkrétní vlastní frekvence (±0,2Hz). Uvedené hodnoty lze proto podobně jako u posunutí pružin podpírajících paralelogram považovat za nezávislé na hmotnosti pacienta. Opět jsme limitováni maximálním provozním tlakem v pružinách.

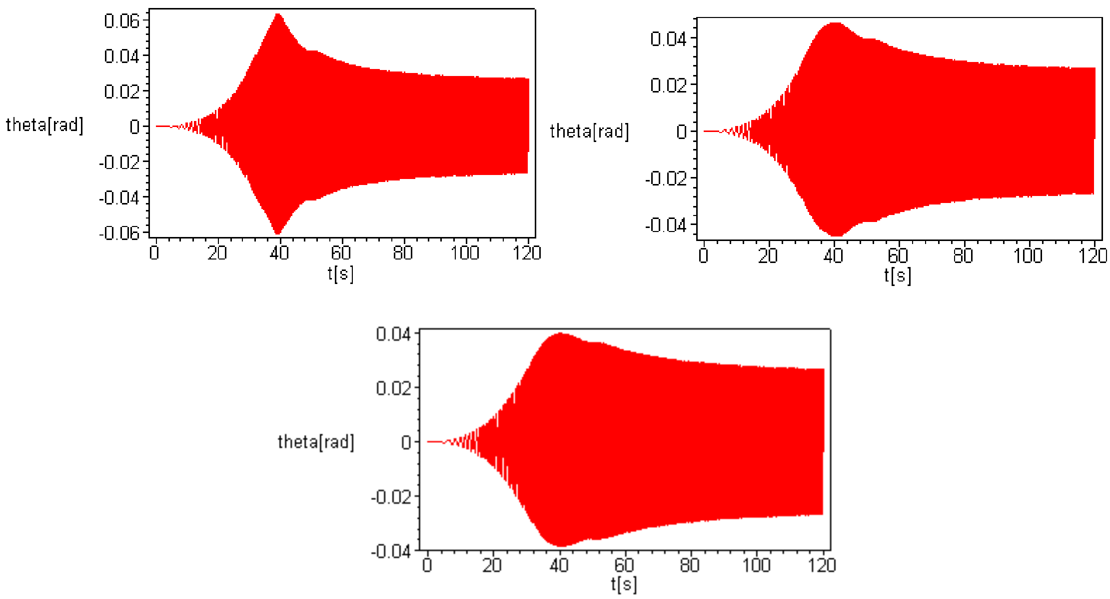
Při posunutí pružin mezi prvním a druhým rámem Kardanova závěsu o 10cm blíže k ose rotace, se posunou třetí vlastní frekvence z hodnot 3Hz – 3,6Hz – 3,8Hz pro hmotnosti pacienta 40kg – 80kg – 120kg na hodnotu 1,9Hz pro všechny simulované hmotnosti. Lze konstatovat, že na polohu třetí vlastní frekvence již má hmotnost pacienta nezanedbatelný vliv, který roste s poměrem příčné výchylky pacienta od osy rotace (y) k rameni na kterém působí pneumatická pružina. Při běžném provozu a poloze pacienta ve středu lehátka není možné maximální pracovní tlak překročit. Při nestandardním zatížení (např. sezení na hraně lehátka) již však aplikovaná pružina není schopna při bezpečném pracovním tlaku udržet lehátko v rovnovážné poloze. Pro tyto případy je nutné zabudovat do soustavy systém automatické aretace (za cenu vypnutí vibroizolačního efektu pro daný stupeň volnosti).

Ze simulací, kdy se měnila efektivní plocha všech aplikovaných pneumatických pružin v rozsahu 2cm^2 – 22cm^2 vyplývá, že s klesající efektivní plochou pružiny klesají i všechny tři vlastní frekvence pro všechny tři modelové pacienty stejně. Např. třetí vlastní frekvence se z hodnot 3,2Hz – 3,6Hz – 3,8Hz pro 22cm^2 posune na 2,6Hz – 3,0Hz – 3,2Hz při 2cm^2 pro všechny tři simulované hmotnosti. Absolutní rozdíl je tedy pro všechny hmotnosti shodný a činí 0,6Hz. Snižováním efektivní plochy se velice rychle zvyšuje tlak v pružinách a pokud porovnáme např. účinnost změn převodů na snížení vlastních frekvencí s účinností změny efektivní plochy, zjistíme, že je výhodné snížit rameno na kterém působí pneumatické pružiny čímž snížíme vlastní frekvence a zvýšený tlak kompenzovat aplikací větší pružiny. Tím opět mírně zvýšíme vlastní frekvence systému, ale výsledným efektem bude celkové snížení vlastních frekvencí.

3.4.2 Odezva systému na buzení rozmítaným sinem

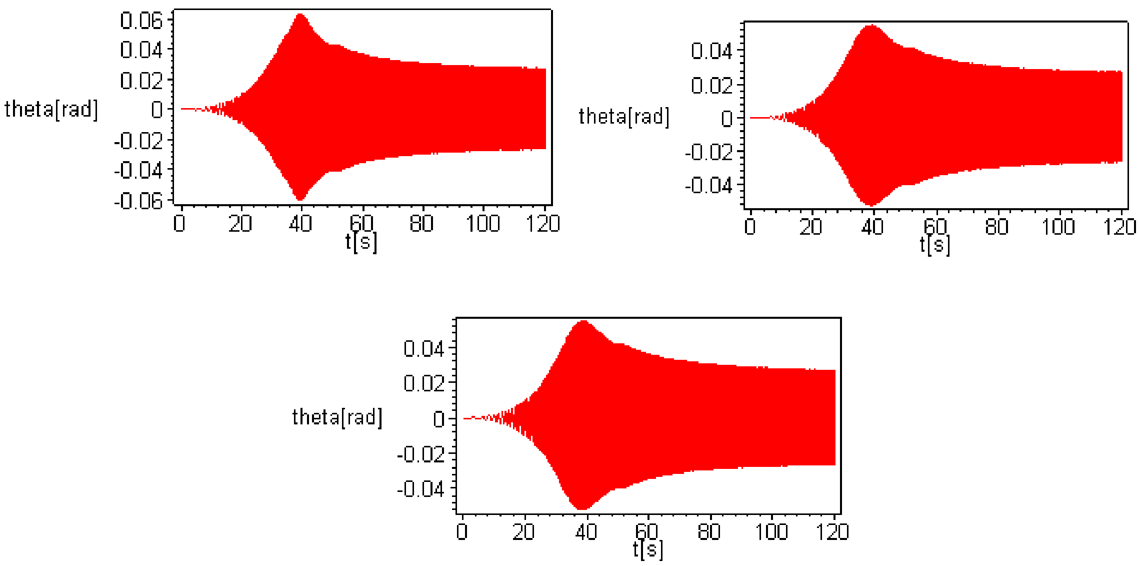
Sledování odezvy na rozmítaný sinus s výhodou použijeme pro vytvoření představy o tom, jakým způsobem ovlivní konstrukční parametry aplikovaných tlumičů vibroizolační systém sanitního lehátka. Ukázka změny odezvy na jednotlivých obrázcích popisuje vždy nárůst sledovaného parametru o 20% a 40% z výchozí hodnoty.

Budeme-li měnit velikost kalibrovaných otvorů, bude se měnit rychlostní charakteristika dle obrázku 18 nahoře. Na grafech z obr. 53 je patrné, že při zvyšování tlumení pomocí zmenšení kalibrovaných otvorů se vlastní frekvence prakticky nemění a je zřejmé, že maximální výchylka v oblasti rezonance neklesá v závislosti na změně tlumení lineárně a tedy pro navýšení tlumení o více než 15-25% není žádný důvod.



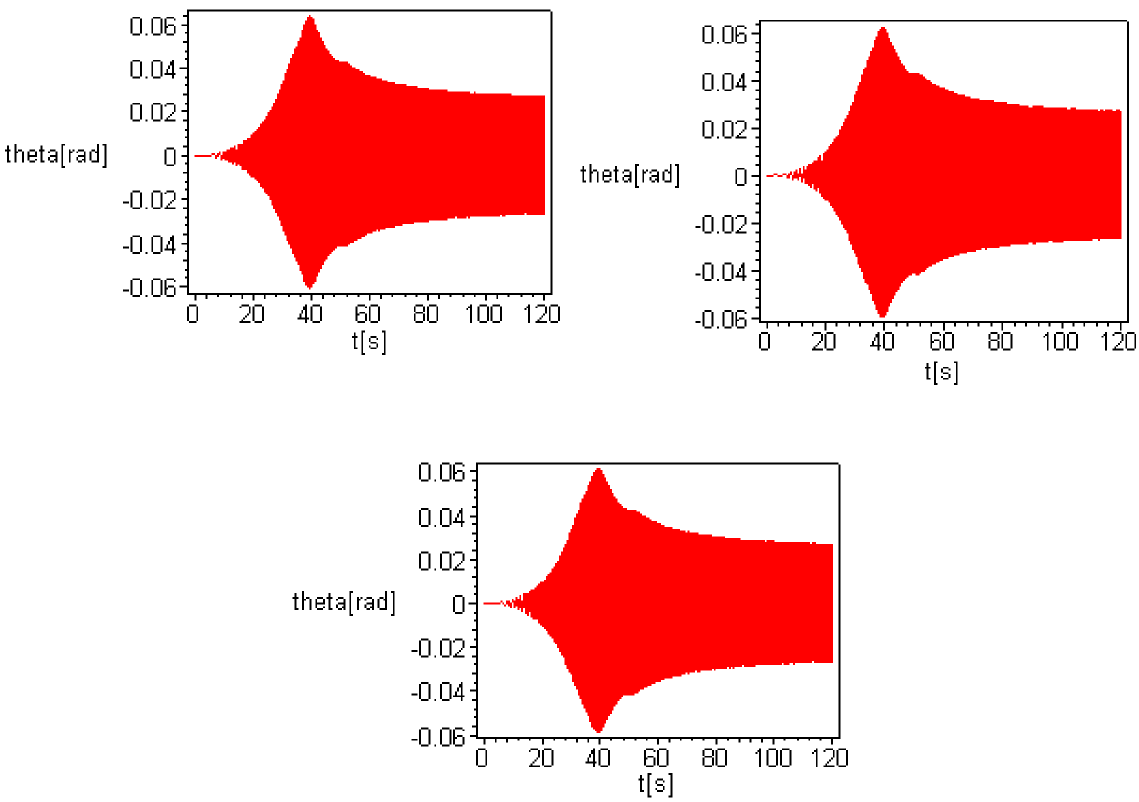
Obr. 53: Vliv změny velikosti kalibrovaných otvorů o 20% a 40%. Přepočet časové osy do frekvenční je $f = t/15$.

Zvyšováním předpětí přítlačné pružiny planžetového svazku (obr.54) mírně klesá první vlastní frekvence i maximální amplituda rozkmitu v místě rezonance. Po navýšení předpětí o více než 20% hodnoty referenčního tlumiče je již vliv na odezvu systému zanedbatelný.



Obr. 54: Vliv změny předpětí přítlačné pružiny planžetového svazku o 20% a 40%. Přepočet časové osy do frekvenční je *f = t/15.*

Vliv změny tuhosti přítlačné pružiny planžetového svazku (obr. 55) je v našem případě minimální. Nepatrně se mění tvar odezvy na buzení (strmost v okolí rezonance).



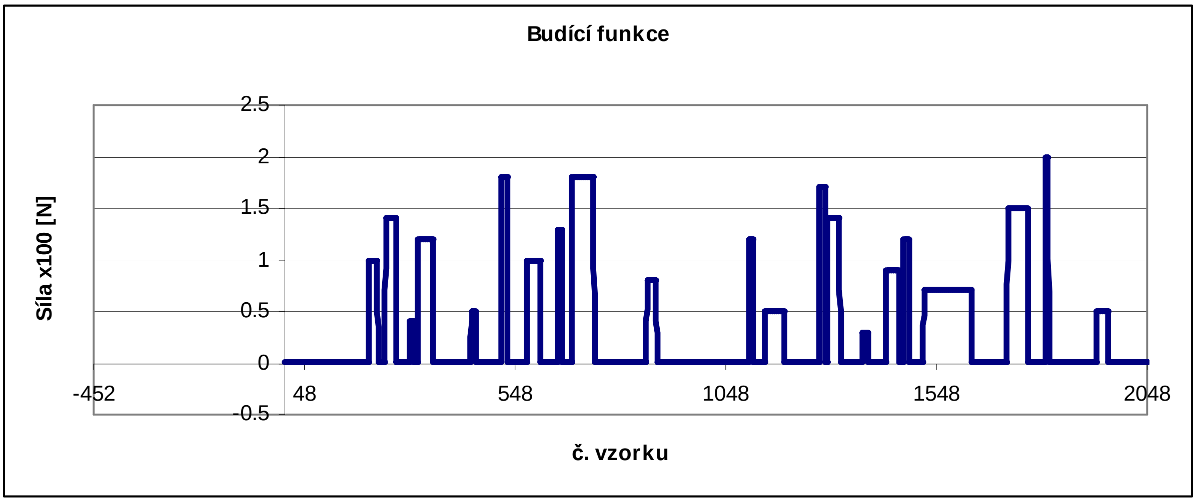
Obr. 55: Vliv změny tuhosti přítlačné pružiny planžetového svazku o 20% a 40%. Přepočet časové osy do frekvenční je *f = t/15.*

4. Experimentální ověření matematického modelu

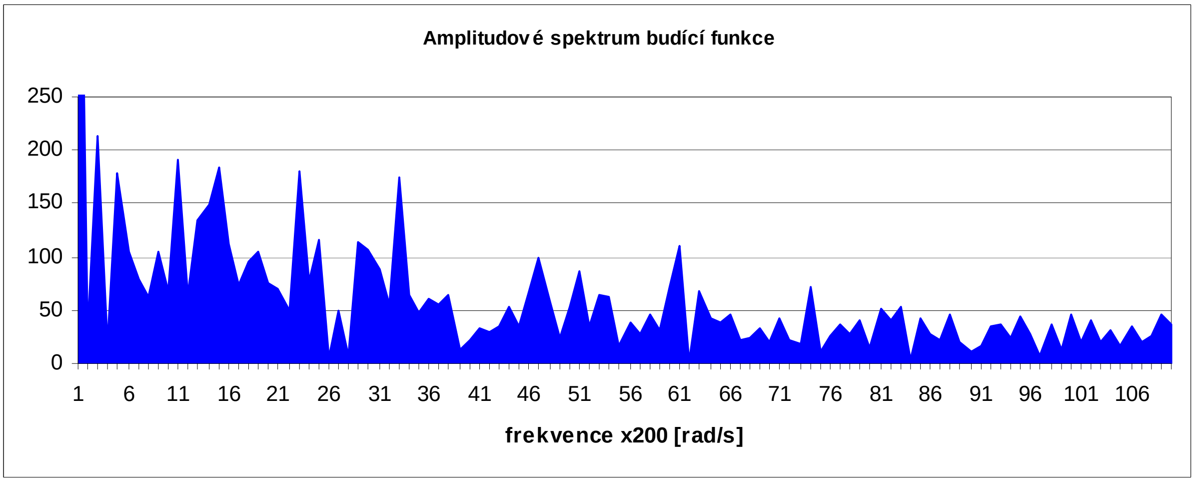
Určení vlastních frekvencí systému měřením bylo prováděno v hydrodynamické laboratoři Technické univerzity v Liberci dvěma způsoby. V prvním případě byl systém buzen krátkými silovými pulzy vyvolanými kladívkem a gumovou palicí. Vlastní frekvence poté byly určeny pomocí komerčního analyzátoru. V druhém případě byl již systém osazen akčními členy a řídící elektronikou a pro dosazení rovnovážné polohy bylo použito mnohem sofistikovanější metody než v prvním případě. V okamžiku dosažení rovnovážného stavu byla regulace odpojena a systém buzen intenzivními rázy. Vyhodnocení bylo prováděno pomocí Fourierovy transformace v MAPLE.

4.1 Měření vlastních frekvencí FFT analyzátorem

Na obr. 56 je ukázán možný případ budící funkce realizované náhodnými údery kladiva do rámu lehátka a na obr. 57 její amplitudové spektrum (čas snímání signálu je cca. 10 vteřin při vzorkovací frekvenci 200Hz, jedná se o modelový příklad signálu složeného z několika skokových funkcí).



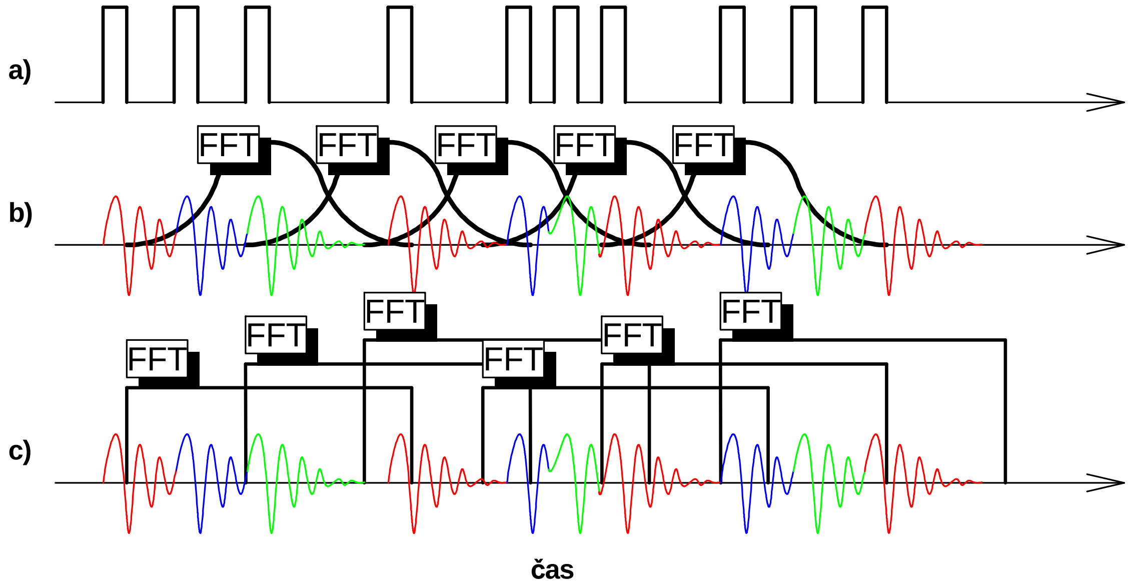
Obr. 56: Modelový příklad budící funkce složený z různých impulsů.



Obr. 57: Frekvenční spektrum budící funkce z obr. 56.

Jak vyplývá z obr. 57, je systém buzen funkcí, jež dostatečně pokrývá potřebný frekvenční rozsah pro vybuzení vlastních frekvencí systému.

Analyzátor v reálném čase vytváří ze signálu odezvy (měřené akcelerometrem) pomocí rychlé Fourierovy transformace (FFT) amplitudové spektrum odezvy systému na stochastickou budící funkci. Tuto analýzu provádí několikrát v průběhu měření v závislosti na předem určené metodě vyhodnocení (viz. obr.58).



Obr. 58: a) Budící funkce, b) Schéma metody Hanning, c) Schéma metody Rectangle (obdélník)

Na budící funkci (obr. 58a) reaguje mechanický systém odezvou (58b a 58c, pro přehlednost jsou odezvy na jednotlivé skokové funkce barevně rozlišeny). Tuto odezvu analyzujeme postupně v jednotlivých oblastech tak, jak je např. ukázáno na obr. 58b (v našem případě použitá metoda Hanning) nebo 58c (velikost jednotlivých oblastí na nichž provádíme analýzu je ve skutečnosti stejná, na obrázku jsou výšky obdélníkových oblastí různé pouze z důvodu větší přehlednosti).

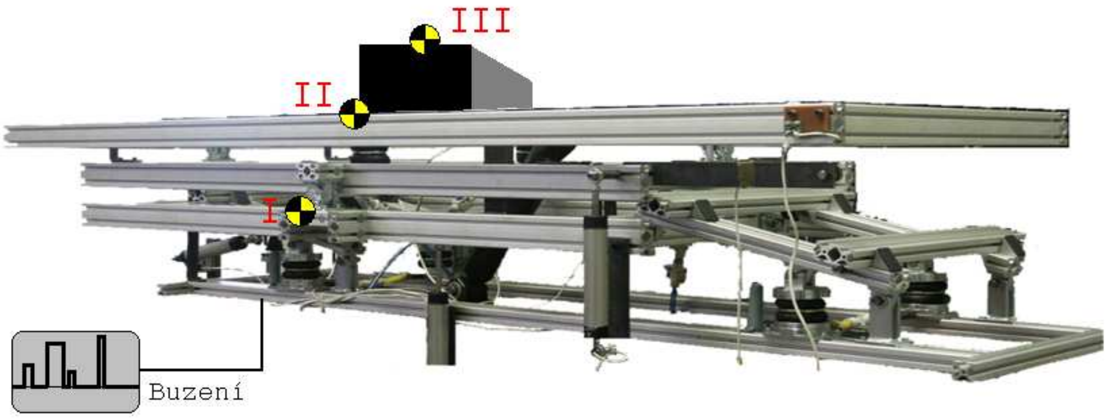
Jednotlivé FFT analýzy lze průměrovat, nebo zaznamenávat pouze maximální hodnoty amplitud náležících příslušné frekvenci. V případě měření vlastních frekvencí sanitního lehátka bylo použito metody zaznamenávání velikosti maximálních špiček spektra.

4.1.1 Postup měření vlastních frekvencí pomocí FFT

Jak již bylo naznačeno v úvodu, bylo pro ověření správnosti matematické simulace provedeno experimentální měření vlastních frekvencí sanitního lehátka. Lehátko bylo zatíženo závažím o hmotnosti 80kg. Těžiště závaží bylo posunuto o 200 mm ve směru osy $-\xi_6$ a o 120mm ve směru η_6.

Po zatížení se uvedl systém do rovnovážné polohy tak, aby se vnější i vnitřní rám nacházel ve vodorovné poloze a úhel mezi ramenem paralelogramu a dolní základnou byl 26°. Tímto postupem bylo přesně dosaženo momentové rovnováhy, ale pouze přibližně rovnováhy silové.

K systému byl následně připojován snímač zrychlení (Obr. 59) a systém byl buzen aperiodickou skokovou funkcí (náhodnými údery kladívka nebo kladívka a gumové paličky do dolní základny).



Obr. 59: Obr. 1 Schéma měření vlastních frekvencí systému

Odezva na buzení byla měřena akcelerometrem připevněným postupně v místech I, II a III a naměřená data okamžitě vyhodnocována analyzátorem fy. Brüel & Kjær (Následující tabulka shrnuje parametry a nastavení při provádění měření).

Tabulka 2: Parametry a nastavení pro měření analyzátorem Brüel & Kjær.

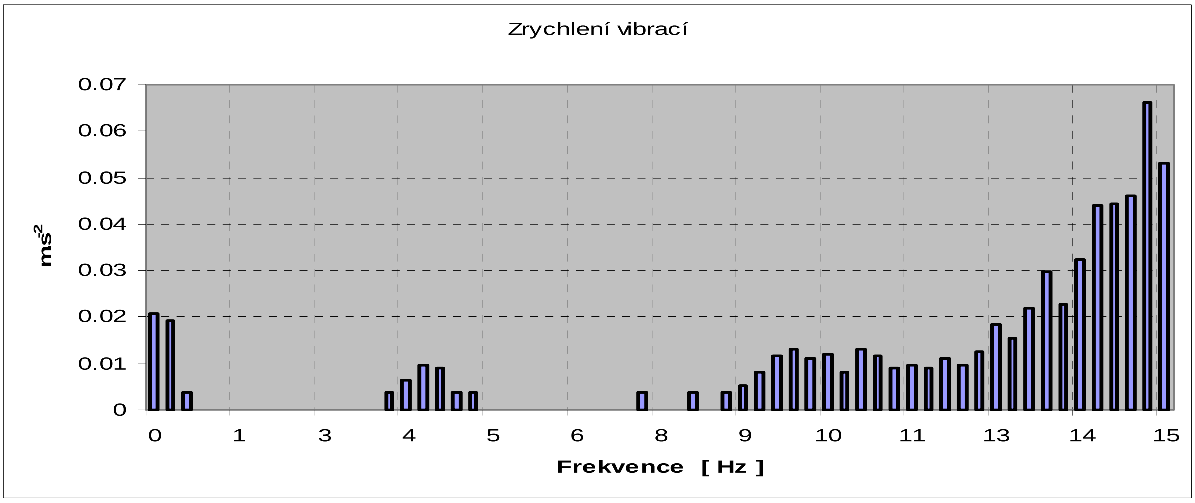
Instrument	B&K-7651, VP7279,V1,20,140,104,115,182,113,126
File no,	1.00
Measured	6,10,2025 12:20:36
Measurement text	
Measurement type	One channel analysis
Input ch, B	Charge, HP 0,3 Hz, LP 1 kHz OFF, Max, 15,5E+1 dB ref 10,0E-7 m/s*s
No, of spectra	1.00
Time/freq,	400 Lines, Freq, span 10,0E+1 Hz, Baseband
Averaging	Exponential, 1 averages
Time weighting	Hanning
Hold	Active

4.1.2 Vyhodnocení měření vlastních frekvencí

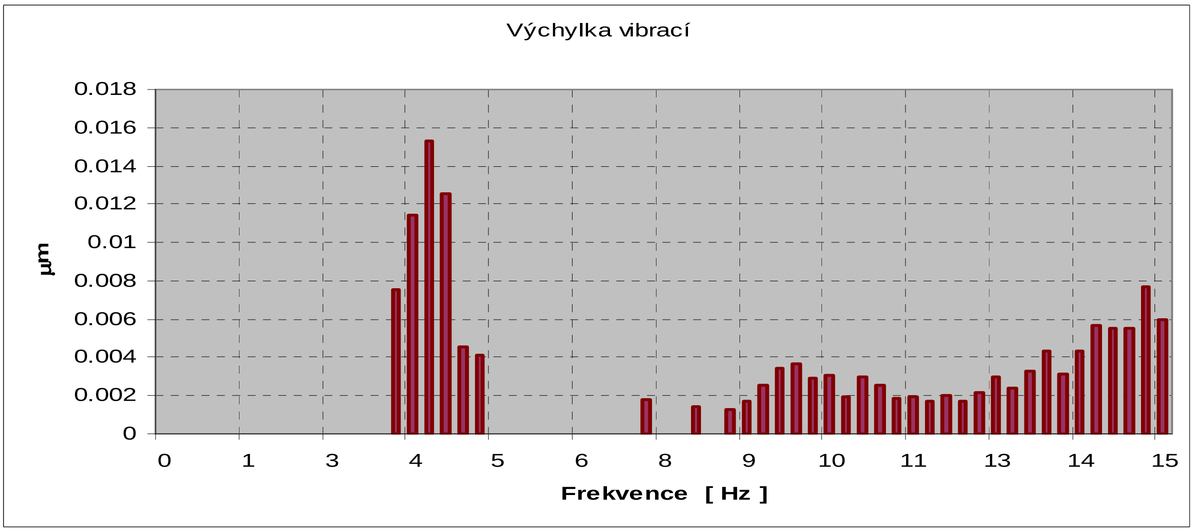
Po zpracování dat získaných z analyzátoru v programu Excel ihned vidíme tvar a velikost amplitud v závislosti na frekvenci a tudíž lze snadno určit, kde se s největší pravděpodobností hledané vlastní frekvence sanitního lehátka nalézají [5].

Pozice I

Snímač byl připevněn k hornímu rámu lehátka a buzení bylo realizováno údery kovovým kladívkem do dolní základny. Při tomto rozvržení byl získaný signál výrazně ovlivněn šumy a frekvence pod 4Hz nebyly zaznamenány.



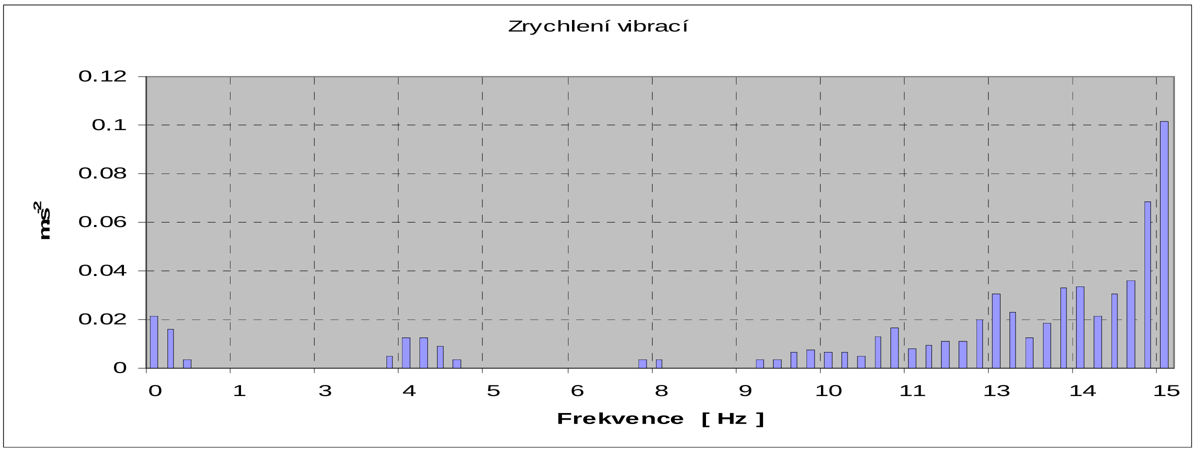
Obr. 60: Amplitudové spektrum zrychlení.



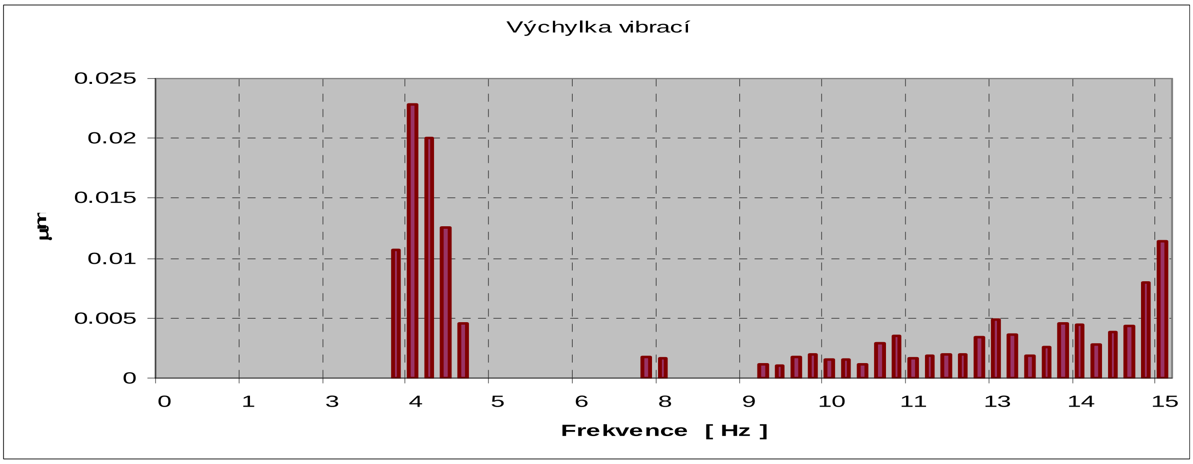
Obr. 61: Přepočtené amplitudové spektrum výchylky.

Pozice II

Snímač byl připevněn k vnitřnímu rámu lehátka a buzení bylo realizováno údery kovovým kladívkem do dolní základny. Nižší frekvence náležící natočením vnějšího a vnitřního kardanova rámu se opět neprojeví.



Obr. 62: Amplitudové spektrum zrychlení

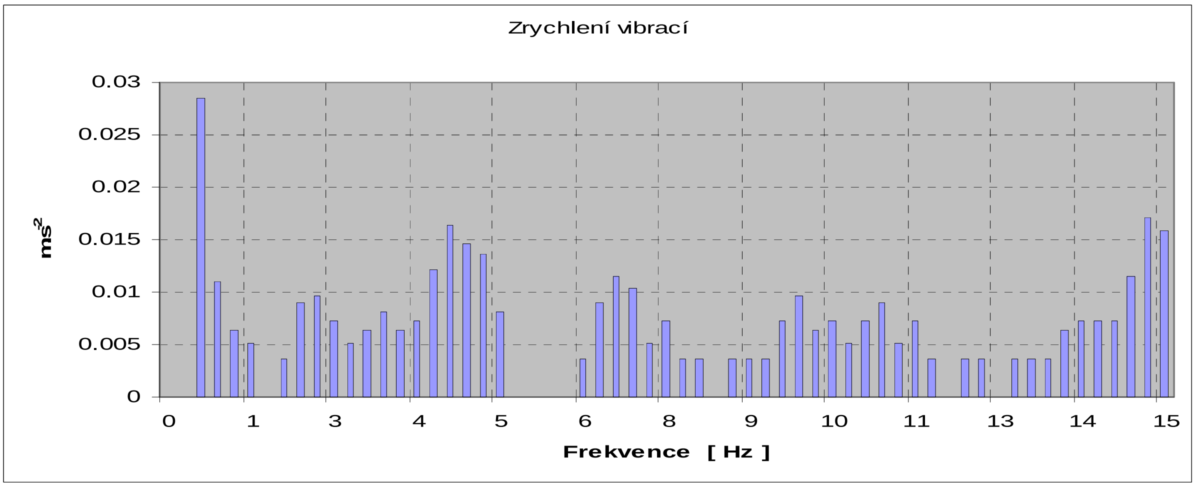


Obr. 63: Přepočtené amplitudové spektrum výchylky

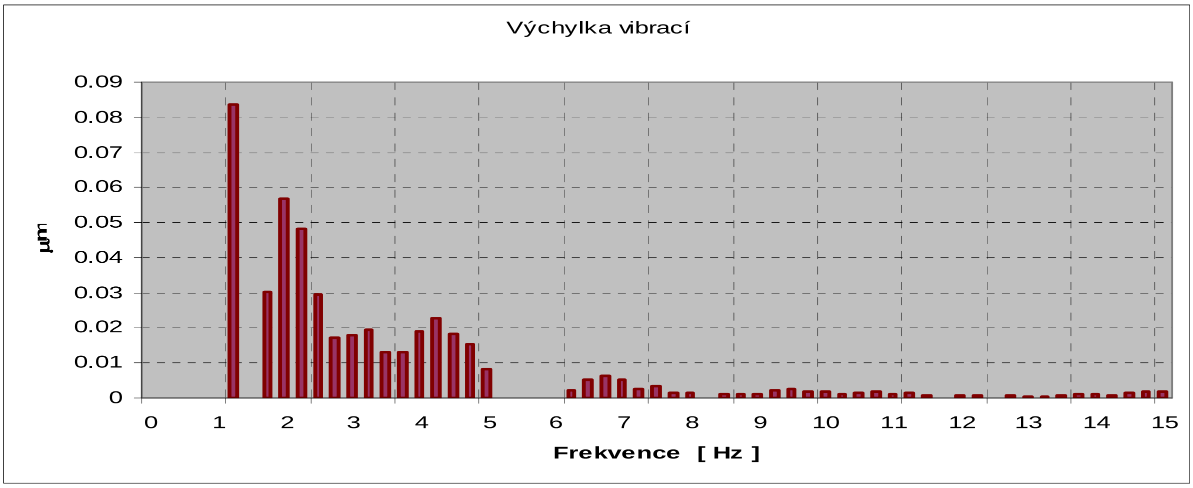
Pozice III

Vzhledem k velké citlivosti předchozích měření na odezvu způsobenou chvěním špatně připevněného příslušenství lehátka (kabely, přívodní hadice tlakového vzduchu,…) a na druhou stranu nízkou citlivostí snímače na odezvy náležící nízkým frekvencím, byl snímač připevněn přímo na hmotu simulující pacienta. Tato hmota odfiltruje chvění s nízkou intenzitou (způsobené nedokonalou konstrukcí lehátka a příslušenstvím) a na druhou stranu se na ní výrazněji projeví odezva na intenzivní budící puls s delší dobou působení.

Buzení bylo realizováno kombinací náhodných úderů gumovou palicí (vyvolá déle trvající puls pro zvýraznění nižších frekvencí) a kovovým kladívkem (vyvolá kratší puls než palička a lépe zvýrazní vyšší vlastní frekvence).



Obr. 64: Amplitudové spektrum zrychlení



Obr. 65: Přepočtené amplitudové spektrum výchylky

Při této konfiguraci se již zřetelněji projeví zvýšená frekvence v oblasti 2.1, 3.2 a 4.3 Hz (vysoká amplituda v okolí 1Hz svým tvarem neodpovídá vlastní frekvenci dynamického systému a jde zřejmě o chybu způsobenou špatnou citlivostí snímače pro nízké frekvence nebo náhodným součtem chyb a šumů, popř. kombinací obojího). Pokud tyto frekvence porovnáme s vypočtenými 2.1, 2.9 a 3.9 Hz, zjistíme, že velmi dobře odpovídají provedené numerické simulaci a na základě tohoto srovnání lze předpokládat, že jsme se při výpočtu nedopustili žádných hrubých chyb.

4.2 Měření vlastních frekvencí DFT

Na základě zkušeností s předchozím měřením bylo rozhodnuto provést ještě ověřovací měření vlastních frekvencí systému sanitního lehátka poněkud odlišnou metodou. V předchozím případě se příliš neosvědčil použitý akcelerometr a proto jsme se rozhodli nahradit ho třemi snímači polohy umístěnými tak, aby reagovaly na změny tří základních stupňů volnosti. Naopak se osvědčilo buzení dlouhými intenzivními rázy (např. gumovou palicí, kopnutím, …).

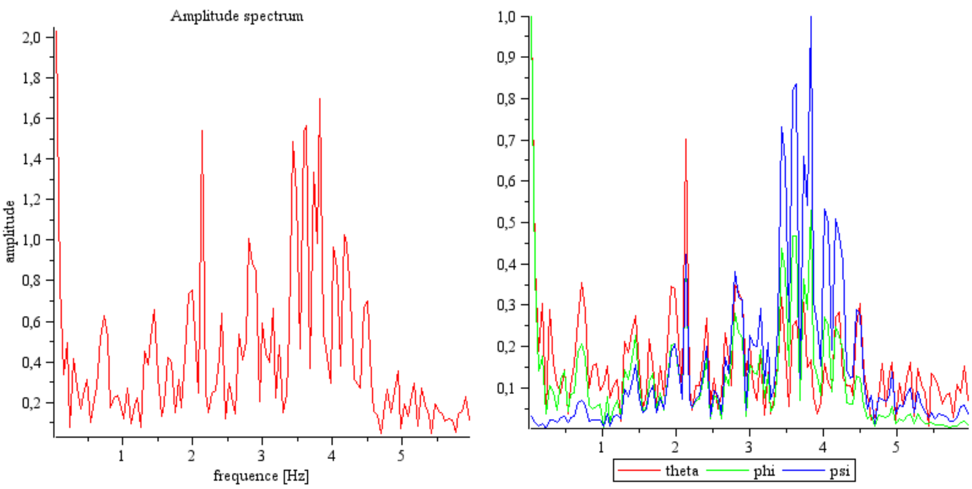
4.2.1 Postup měření vlastních frekvencí pomocí DFT

Ověřovací vzorek byl osazen snímači tlaku a výchylky a tlakový vzduch přiváděný k pružinám byl řízen pomocí elektropneumatických ventilů. Celý systém je ovládán pomocí řídícího počítače se systémem LabView. Takto rozšířený systém umožňuje velmi přesně dosáhnout rovnovážné polohy a to při splnění momentové i silové podmínky rovnováhy. Při kvalitním dosažení silové rovnováhy na kardanových rámech je síla přenášená ložisky minimální (ideálně nulová) a z toho vyplývají také minimální pasivní odpory působící na systém.

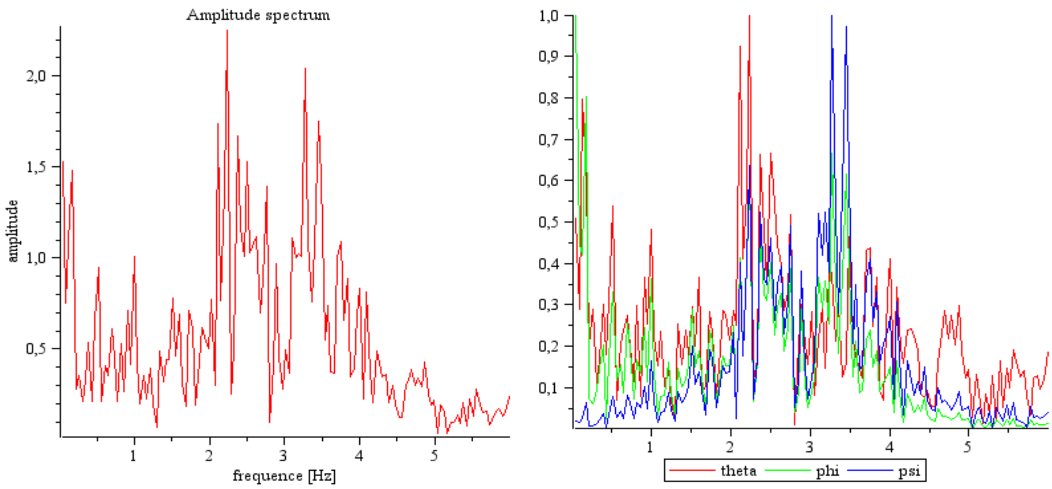
Lehátko bylo postupně zatěžováno závažím o hmotnosti 50, 80, 100 a 120 kg. Těžiště zatěžujících hmot bylo umístěno na dvě zvolená místa ložné plochy (x = 130mm, y = 350mm a x = 80mm, y = 80mm). Pro každou kombinaci závaží a jeho polohy byl systém automaticky ustaven do rovnovážné polohy a následně byla tato regulace vypnuta. Po spuštění záznamu měřených dat (3x výchylka a 5x tlak) byl systém buzen intenzivními stochastickými rázy po dobu přibližně 20 vteřin.

4.2.2 Vyhodnocení měření vlastních frekvencí DFT

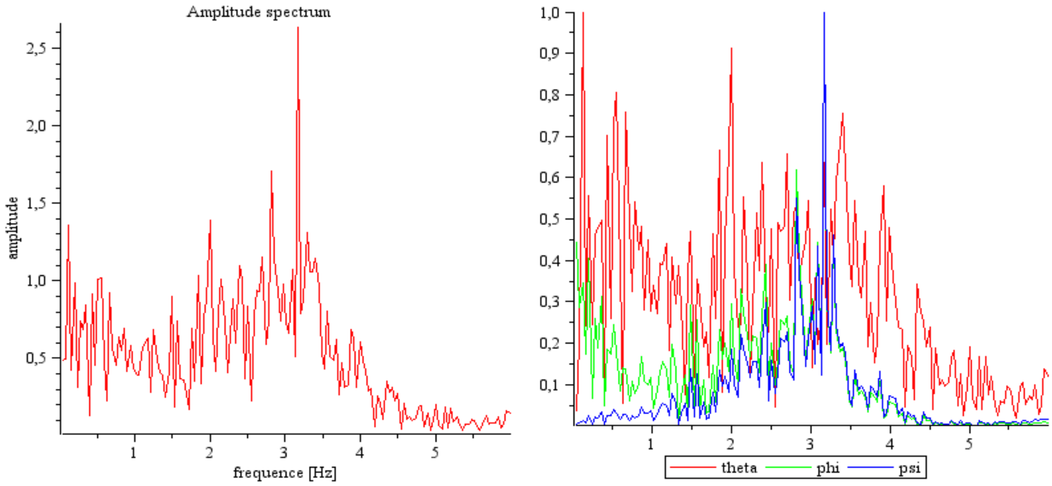
Naměřená data byla importována do systému MAPLE a analyzována pomocí DFT [5]. Amplitudová spektra signálů z jednotlivých snímačů polohy byla následně normalizována k dosažení shodné váhové funkce jednotlivých spekter a následně sečtena.



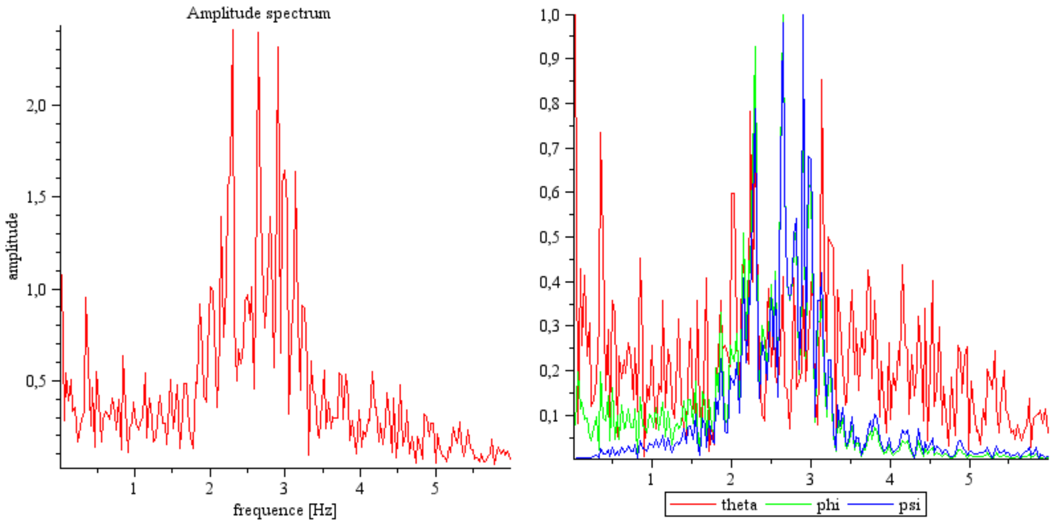
Obr. 66: Amplitudové spektrum (nalevo) a dílčí amplitudová spektra (napravo) pro polohu závaží ve směru osy x 80mm a y 80mm, hmotnost závaží je 50kg.



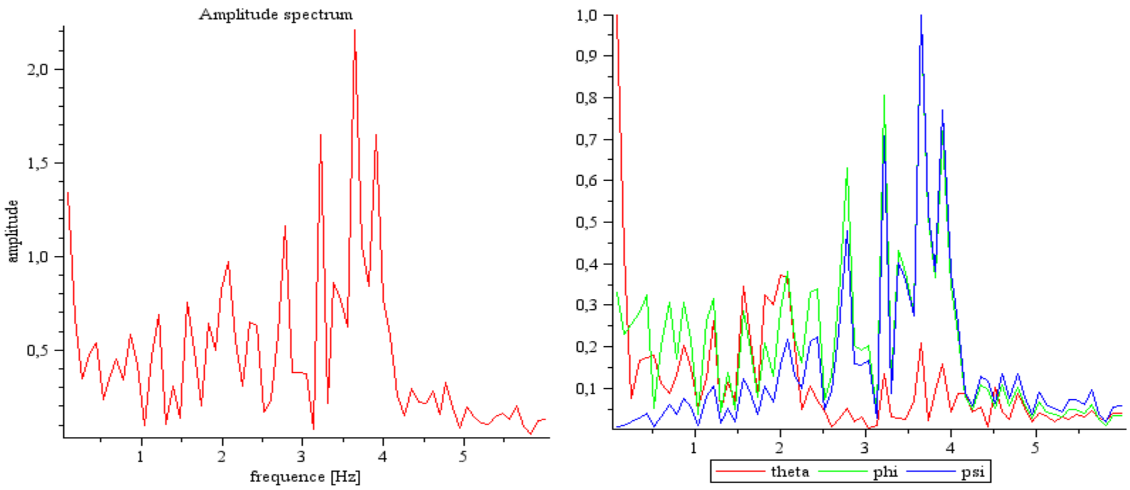
Obr. 67: Amplitudové spektrum (nalevo) a dílčí amplitudová spektra (napravo) pro polohu závaží ve směru osy x 80mm a y 80mm, hmotnost závaží je 80kg.



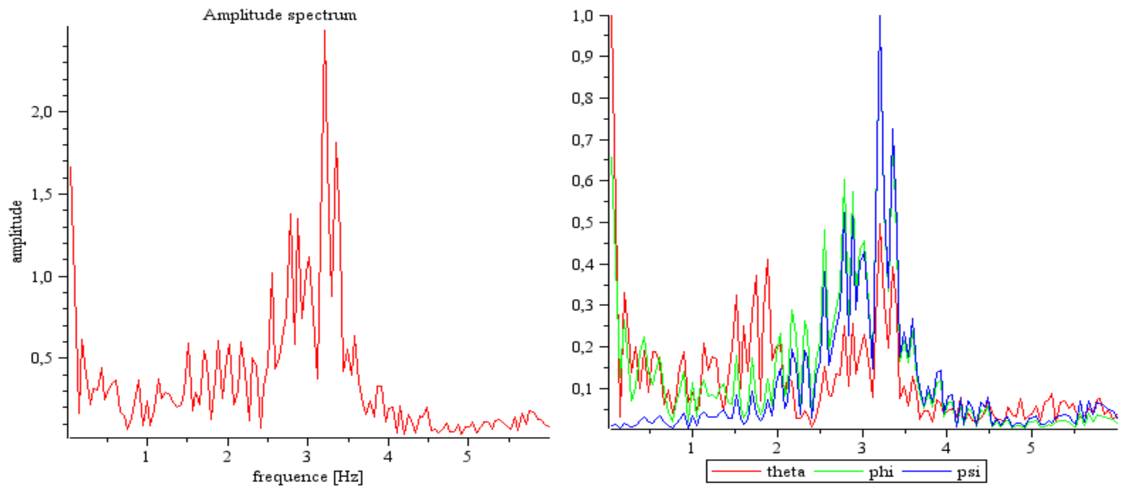
Obr. 68: Amplitudové spektrum (nalevo) a dílčí amplitudová spektra (napravo) pro polohu závaží ve směru osy x 80mm a y 80mm, hmotnost závaží je 100kg.



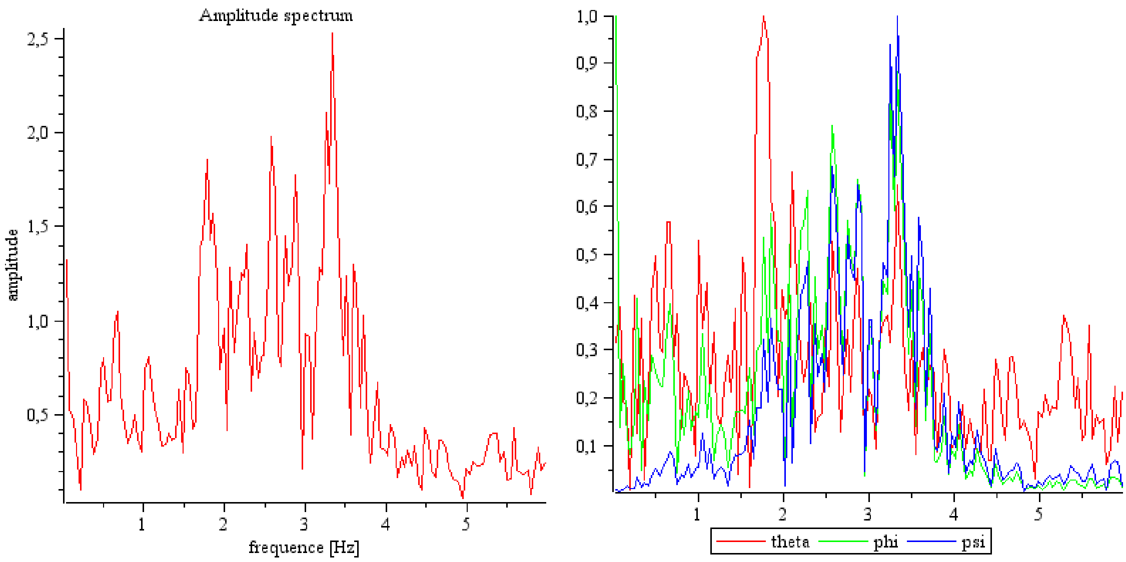
Obr. 69: Amplitudové spektrum (nalevo) a dílčí amplitudová spektra (napravo) pro polohu závaží ve směru osy x 80mm a y 80mm, hmotnost závaží je 120kg.



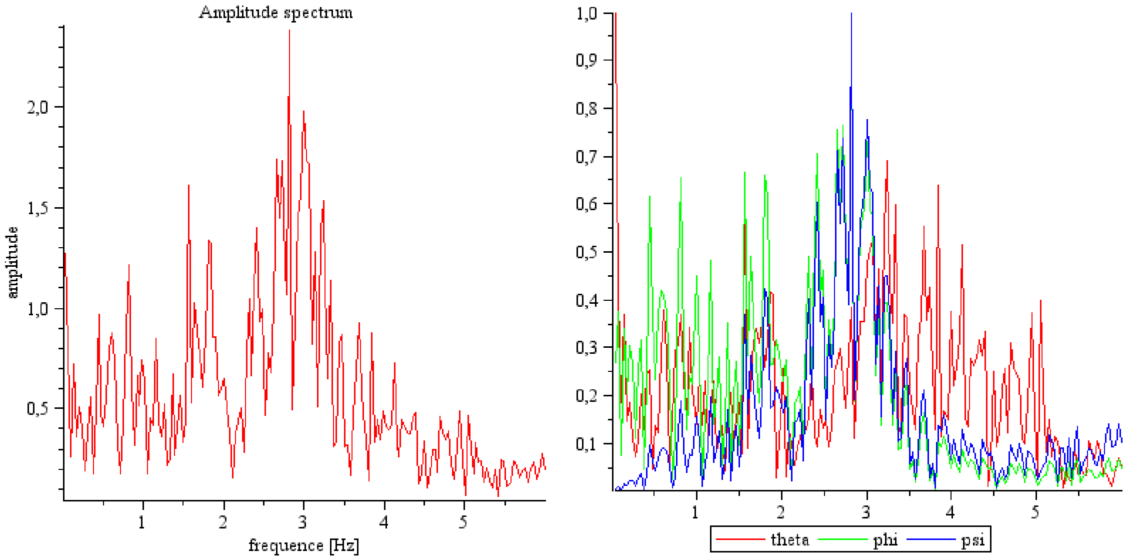
Obr. 70: Amplitudové spektrum (nalevo) a dílčí amplitudová spektra (napravo) pro polohu závaží ve směru osy x 130mm a y 340mm, hmotnost závaží je 50kg.



Obr. 71: Amplitudové spektrum (nalevo) a dílčí amplitudová spektra (napravo) pro polohu závaží ve směru osy x 130mm a y 340mm, hmotnost závaží je 80kg.



Obr. 72: Amplitudové spektrum (nalevo) a dílčí amplitudová spektra (napravo) pro polohu závaží ve směru osy x 130mm a y 340mm, hmotnost závaží je 100kg.



Obr. 73: Amplitudové spektrum (nalevo) a dílčí amplitudová spektra (napravo) pro polohu závaží ve směru osy x 130mm a y 340mm, hmotnost závaží je 120kg.

4.2.3 Porovnání výsledků numerických simulací s naměřenými hodnotami

Přehled naměřených vlastních frekvencí systému shrnuje následující tabulka:

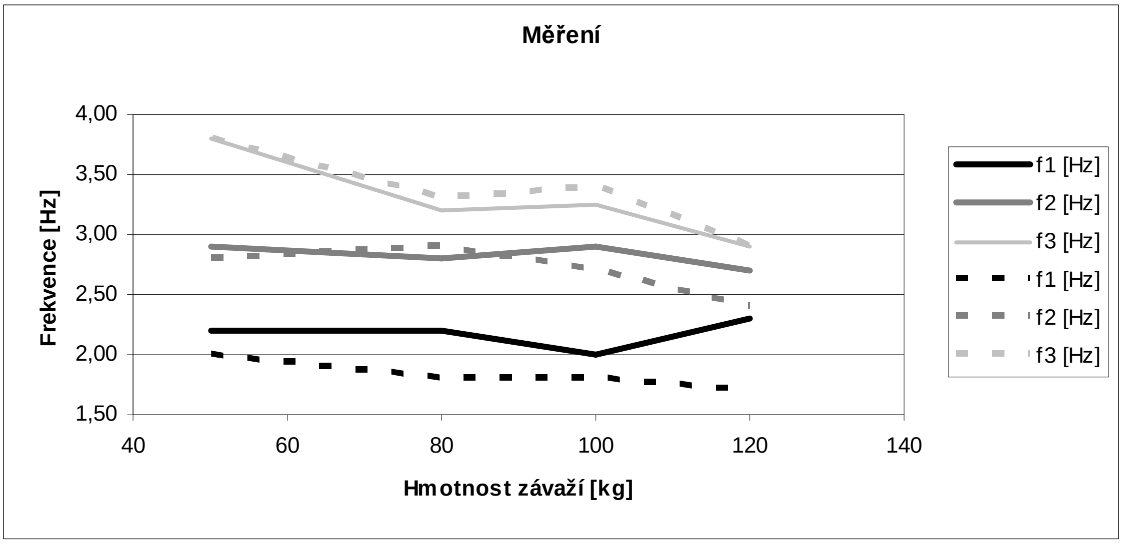
Tabulka 3: Přehled naměřených vlastních frekvencí, určených pomocí DFT na ověřovacím vzorku.

	m [kg]	x [mm]	y [mm]	f1 [Hz]	f2 [Hz]	f3 [Hz]
1	50	80	80	2,2	2,9	3,8
2	80	80	80	2,2	2,8	3,2
3	100	80	80	2,0	2,9	3,25
4	120	80	80	2,3	2,7	2,9
5	50	130	340	2,0	2,8	3,8
6	80	130	340	1,8	2,9	3,3
7	100	130	340	1,8	2,7	3,4
8	120	130	340	1,7	2,4	2,9

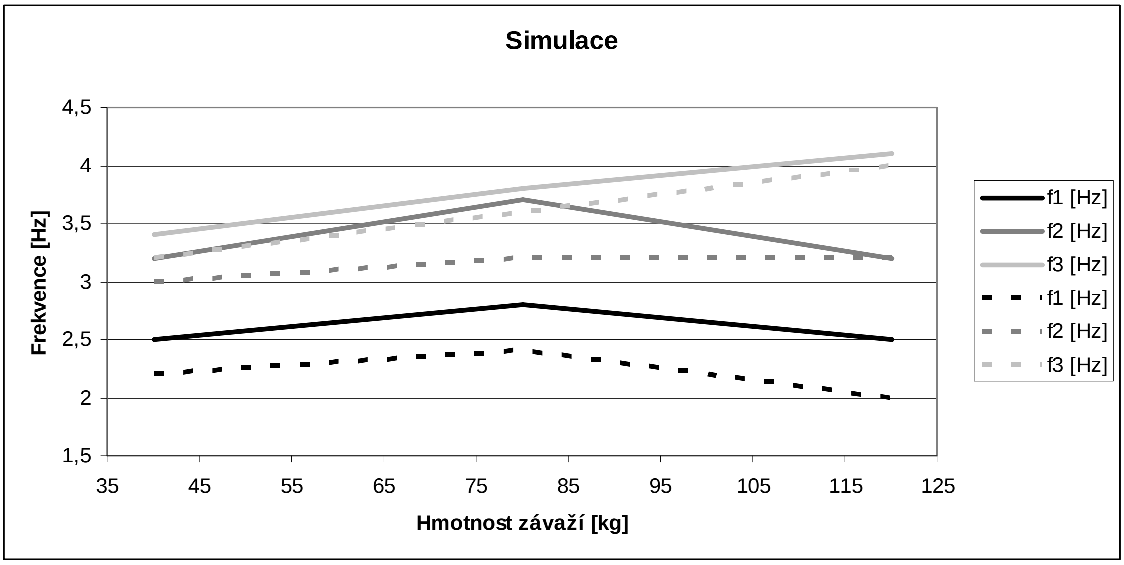
Numerickými simulacemi byly získány následující vlastní frekvence pro hmotnosti pacienta 40-120 kg:

Tabulka 4: Přehled vybraných výsledků numerických simulací nelineárního matematického modelu.

	m [kg]	x [mm]	y [mm]	f1 [Hz]	f2 [Hz]	f3 [Hz]
1	40	80	80	2,5	3,2	3,4
2	80	80	80	2,8	3,7	3,8
3	120	80	80	2,5	3,2	4,1
4	40	130	200	2,2	3,0	3,2
5	80	130	200	2,4	3,2	3,6
6	120	130	200	2,0	3,2	4,0



Obr. 74: Naměřené závislosti velikostí vlastních frekvencí pro polohu pacienta o 80mm vychýleného ve směru osy x a y (plná čára) a o 130mm ve směru x a 340mm ve směru y (čárkovaná čára).

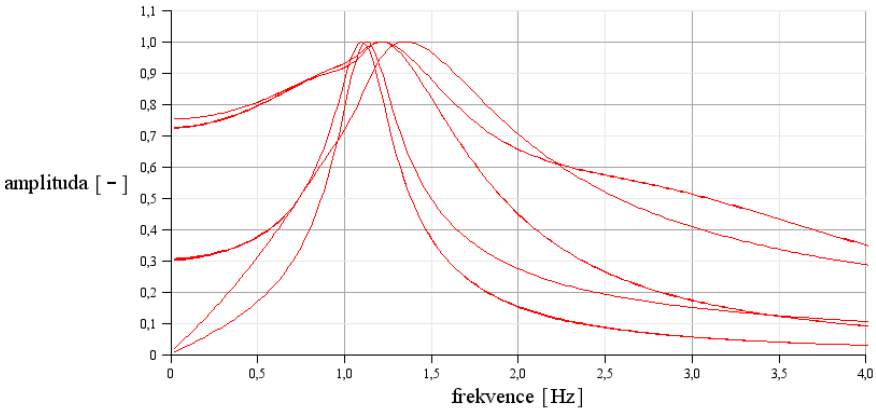


Obr. 75: Závislosti velikostí vlastních frekvencí získaných numerickou simulací pro polohu pacienta o 80mm vychýleného ve směru osy x a y (plná čára) a o 130mm ve směru x a 200mm ve směru y (čárkovaná čára).

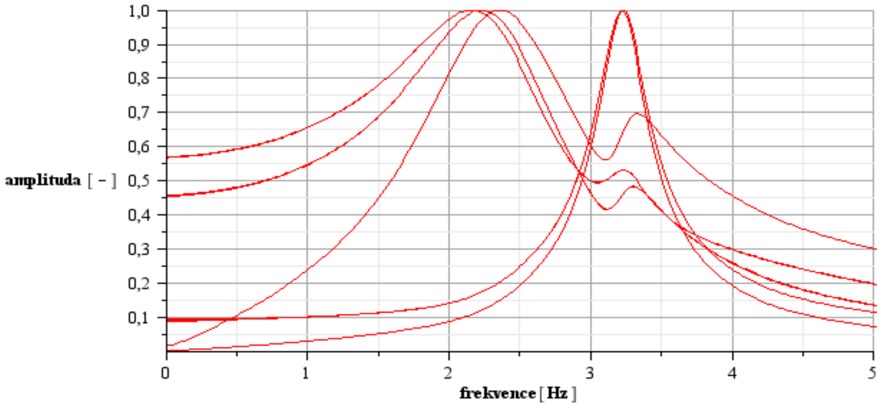
Výsledky získané měřením a numerickou simulací se vzájemně liší v průměru o 12% (maximální odchylky činí až 25% pro hmotnost 120kg). Tyto odchylky mohou být způsobeny mnoha vlivy mezi něž jistě patří zanedbání pasivních odporů v numerické simulaci, absence transportního lehátka na ověřovacím vzorku (hmotnost závaží u experimentu v sobě zahrnuje i hmotnost lehátka, zatímco v numerickém experimentu vystupuje pouze hmotnost pacienta – transportní lehátko je napevno zabudováno do numerického modelu), momenty setrvačnosti lidského těla použitého v numerických simulacích jsou odlišné od momentů setrvačnosti ocelového závaží použitého při měření.

5. Závěr

Shrneme-li nové poznatky vyplývající z této práce, obzvláště potom z kapitoly 3.4, je nutné konstatovat, že původní konfigurace je pro pasivní vibroizolaci sanitního lehátka nevyhovující. Tuto skutečnost potvrzují i obě uskutečněná měření provedená na ověřovacím vzorku. V návaznosti na provedené simulace lze ovšem navrhnout a realizovat takové úpravy konstrukce, aby se poloha vlastních frekvencí pohybovala na hranici 1Hz což je velký kvalitativní posun kupředu.



Obr. 76: Optimalizovaný systém, hmotnost pacienta 80kg, vychýlení o 50mm ve směru osy x a y.



Obr. 77: Původní systém, hmotnost pacienta 80kg, vychýlení o 50mm ve směru osy x a y.

Po aplikaci optimalizačního algoritmu, během kterého se v cyklech mění tuhosti pneumatických pružin, jejich efektivní plochy a délky ramen na kterých jsou tyto prvky uloženy se jeví jako reálně dosažitelné vlastní frekvence od 1Hz do 1,3Hz. Na obrázku 76 jsou frekvenční spektra všech signálů získaných řešením nelineární soustavy diferenciálních rovnic. Tato spektra jsou následně normalizována tak, aby velikost maximální amplitudy jednotlivých spekter byla vždy rovna jedné. Tímto způsobem lze následně porovnávat spektra z fyzikálně zcela odlišných veličin (úhel, úhlová rychlost, tlak).

Pro porovnání je na obrázku 77 uvedeno frekvenční spektrum pořízené výše uvedeným způsobem pro původní konfiguraci systému.

Ukázalo se jako nereálné jít pouze cestou neustálého snižování tuhosti pneumatických pružin (posouváním pružin blíže k ose rotace), jelikož má takový systém při větších amplitudách buzení neúměrně velkou absolutní výchylku od rovnovážné polohy. Pro kvalitní vibroizolační efekt je nutné k aplikované akční členy modifikovat.

Chceme-li se s pasivním systémem skutečně dostat alespoň k hranici 1Hz je nutné použít paralelní zapojení extrémně měkké pneumatické pružiny (ovšem dostatečně silné k dosažení stabilní rovnovážné polohy) a pryžového dorazu s postupným nárůstem tuhosti. Tímto způsobem je možné dosáhnout vlastních frekvencí blízkých 1Hz (pro paralelogram a první rám) pro malé budící amplitudy a přitom omezit velké absolutní výchylky ložné plochy lehátka při vyšších budících amplitudách. To je důležité zejména pro možný případný zásah ošetřujícího personálu během jízdy (pacient tzv. necestuje lékaři pod rukama).

Jako trochu komplexnější problém se jeví optimalizace polohy a typu pneumatických pružin na druhém rámu. Zjednodušeně lze považovat velikost příslušné vlastní frekvence za určitou funkci poměru momentu setrvačnosti (hmotnosti) ku torzní tuhosti (tuhosti). Navýšení torzní tuhosti momentu pneumatické pružiny při navýšení zátěže (hmotnosti pacienta) je částečně kompenzováno nárůstem velikosti složek tenzoru setrvačnosti (ovlivňován převážně hmotností a polohou pacienta) a samozřejmě hmotnosti. Pro paralelogram a první rám je změna příslušné vlastní frekvence téměř inertní vůči změně polohy a hmotnosti pacienta (tenzor setrvačnosti se mění minimálně v závislosti na poloze pacienta, jinými slovy je závislý převážně na hmotnosti pacienta). Na druhou stranu právě pro druhý rám je typická vysoká citlivost velikosti příslušného momentu setrvačnosti na vychýlení pacienta od osy rotace. Tím dochází k výraznému rozptylu velikosti sledované vlastní frekvence, jelikož torzní tuhost je funkcí pouze hmotnosti a nikoliv momentu setrvačnosti.

Lze předpokládat, že pokud bude systém optimalizován pro polohu pacienta ve středu lehátka (velikost momentů setrvačnosti bude minimální), budou všechny další možné stavy příznivější. Na druhou stranu je nutné aplikovat dostatečně silné pružiny, které budou schopny dosáhnout rovnovážné polohy jak s pacientem ležícím přímo v ose rotace tak i mimořádně vychýleným, kdy je statické zatížení pružiny výrazně vyšší. I v tomto případě je nutné aplikovat přídavné pryžové dorazy pro eliminaci velkých výchylek.

Zde je nutné konstatovat, že výše uvedené konstrukční úpravy jsou v mírném rozporu s požadavkem na pozdější rozšíření o aktivně řízené pneumatické pružiny. Lze předpokládat, že rozměrově větší a co se týká tuhosti měkčí pružiny se budou aktivně řídit mnohem hůře než dosavadní typ. K jejich ovládání také bude zapotřebí dosáhnout vyšších objemových průtoků v elektropneumatickém ventilu.

Na poznatky získané během řešení této práce přímo navazují další dva nezávislé projekty. Prvním je aktivně řízený systém vibroizolační platformy sanitního lehátka zabývající se řízením pneumatických pružin (samostatných, s přídavným objemem popř. diferenčním zapojením páru pružin) a magnetoreologických tlumičů. Druhý projekt se zabývá možnostmi aplikace pneumatické gyroskopické stabilizace pro vibroizolační systém složený ze shodných konstrukčních prvků (paralelogram + kardanův závěs) rozšířený o dva na sebe kolmé precesní rámečky s protiběžnými gyroskopy.

6. Literatura

[1] Prokop, J. – Vibroizolační systémy s více stupni volnosti, Technická univerzita v Liberci, 2006, disertační práce

Práce je zaměřena na identifikaci základních vlastností systému pružně uloženého sanitního lehátka. V první části práce je uveden postup měření charakteristiky vlnovcové pneumatické pružiny, v druhé části je představen simulační model vytvořený v prostředí Adams a PamCrash. Třetí část se zabývá základními experimenty se sanitním lehátkem a jejich stručnému zhodnocení a porovnáním se simulačními výsledky. Tato disertační práce na práci Ing. Prokopa volně navazuje.

[2] Krejčíř, O. – Pneumatická vibroizolace, Vysoká škola strojní a textilní v Liberci, 1986, doktorská disertační práce

Práce se velice detailně zabývá matematickým modelováním pneumatických pružin téměř všech v současné době používaných konstrukcí. Uvedeny jsou i možné návrhy sestav pružin (diferenční zapojení) a konstrukčních úprav vedoucích ke změně vlastností pružiny (přídavné objemy). Pro nás jsou důležité kapitoly zabývající se modelováním hadicových a vlnovcových pružin a pasáže s konstrukčními návrhy aplikace pneumatických pružin.

[3] Votrubec, R. – Globální charakteristika tlumiče, TU v Liberci, 2005, disertační práce

V rámci této disertační práce je představena nová metoda popisu tlumičů, tlumicích prvků, systémů pružina-tlumič používaných pro odpružení nápravy u automobilu, a popisu jiných pneumatických a hydraulických tlumicích systémů. Jedná se o globální charakteristiku, která vyjadřuje tlumicí sílu jako funkci rychlosti a zrychlení relativního pohybu pístnice a pracovního válce, narozdíl od standardně používané rychlostní charakteristiky, která obsahuje hysterezní smyčky závislé na frekvenci pohybu. Tato metoda byla úspěšně aplikována na tlumičích různých rozměrů a vlastností a byla použita na identifikaci tlumicího systému pružina-tlumič použitého jako součást čtvrtinovém modelu automobilu. Použitím globální charakteristiky došlo k výraznému zpřesnění modelu, zejména v oblastech s vysokou rychlostí a zrychlením.

[4] Nam, T., H., Marvalova, B. – Deformation analysis of inflated cylindrical membrane of composite with rubber matrix reinforced by cords

Práce popisuje problémy při modelování kompozitních materiálů, zejména pak aplikaci na hadicovou pneumatickou pružinu. Je popsána tvorba modelu pružiny pomocí válcové membrány s akceptováním nelineárních, anisotropických a hyperelastických vlastností materiálu.

[5] Rektoris, K. – Přehled užité matematiky, Prometheus, 2000

V knize je shrnut kompletní matematický aparát potřebný k řešení běžných technických problémů. Použity byly hlavně kapitoly věnující se numerickým řešením soustav

diferenciálních rovnic, problémy výpočtu vlastních čísel a vektorů a Fourierově transformaci.

[6] Tůma, J. – Zpracování signálů získaných z mechanických systémů užitím FFT, Sdělovací technika, 1997

Kniha je zaměřena na analýzu signálu s cílem diagnostikovat různé děje v mechanických systémech. Hlavní důraz je kladen na algoritmy zpracování dat. Obsahem publikace je teorie Fourierovy transformace v diskrétní i spojité formě, popis metod výpočtu FFT, popis charakteristik signálu, postup měření spekter a frekvenčních charakteristik signálu.

[7] Vitásek, E.: Numerické metody. SNTL, Praha, 1987

[8] Polach, P.: Jednoduchý parametrický multibody model člověka, Sborník konference Výpočtová mechanika 2002, Nečtiny, 2002

[9] Šklíba, J., Prokop, J., Pešík, L., Mácha, A. – Dynamical system of suspended ambulance couch, Engineering Mechanics 2003, Svratka 2003

[10] Šklíba, J., Prokop, J., Barbora, J. – About the dependence of the natural frequencies of vibroisolation system of the load magnitude and position, Engineering Mechanics 2004, Svratka 2004

[11] Šklíba, J., Prokop, J. – Základní kinematický a dynamický rozbor sanitního lehátka, In: Colloquium Dynamics of machines, Institute of Thermomechanics AS CR, Prague, 2004

[12] Amirouche, F., M., L. – Computational methods in multibody dynamics, The University of Illinois at Chicago, Prentice hall, New Jersey 1992

[13] SMC Automation – Katalog produktů

[14] Airstroke actuators, Airmont isolators - Engineering industrial products manual and design guide. Firestone products company 2006, katalog firmy Firestone www.firestoneindustrial.com/pdfs/industrial/Airstroke_Airmount/MEMDG.pdf

[15] ContiTech Luftfedersysteme GmbH – katalog pružin Continental http://www.contitech.de:8080/catalog/Start.do?language=6

[16] Global spec, The Engineering search engine- online databáze katalogů a společností zabývajících se výrobou průmyslových součástí. http://mechanical-components.globalspec.com/

6.1 *Články autora zabývající se problematikou vibroizolace*

[17] Šklíba, J., Sivčák, M.: Kinematic excitation of the vibroisolation system with thee degreases of freedom. In: Colloquium Dynamics of machines, Institute of Thermomechanics AS CR, Prague, February 7.-8. 2006, p. 145-152. ISBN 80-85918-97-8

[18] Šklíba, J., Prokop, J., Sivčák, M.: About the possibility of tle stiffness reducing of a vibroisolation system, Engineering Mechanics 2005, Svratka 2005

[19] Šklíba, J., Sivčák, M.: On tle problem of tle choice of controlled damper by the vibroisolation system, ICOVP 2007, Bengal Engineering and Science University and Sibhur and Saha Institute of Nuclear Physics, Kalkata, India

[20] Sivčák, M., Šklíba, J.: The dependence of the vibroisolation effect of the system with three degrees of freedom on the description applied dampers. In.: National conference Engineering mechanics 2006, Institute of Theoretical and Applied Mechanics AS CR, Prague, May 15.-18. 2006, p. 330-331. ISBN 80-86246-27-2

[21] Šklíba, J., Prokop, J., Sivčák, M.: Vibroisolation system of the ambulance couch with three degrees of freedom. In: Engineering Mechanics 2006 – Engineering Mechanics, Brno, April 12. 2006, Volume 13, num. 1, p. 3-18. ISSN 1210-2717 1

[22] Šklíba, J., Sivčák, M., Skarolek, A.: On the stability of a vibroisolation system with more degrees of freedom. In: Vibration problems – ICOVP 2005, Springer, 2006. ISBN: 978-1-4020-5400-6

[23] Šklíba J., Sivčák, M.: Problems of Tuning of a Vibroisolation System with three degreases of freedom. In: International Conference VIBROENGINEERING 2006, Kaunas, Litva

[24] J. Šklíba, M. Sivčák, About a possibility of the internal resonance in a vibroisolation system with three degrees of freedom, Proceedings of the “The Second International Conference on Dynamics, Vibration and Control”, 2006, Beijing, China

[25] Šklíba J., Sivčák M., Prokop J., Vibroisolation of the human body on the ambulance couch, Human responses to vibration, Southampton, 2007, United Kingdom

[26] Sivčák, M. – Analyze of the dynamical system in Maple, Applied Mechanics 2007, VŠB, Ostrava 2007

[27] Sivčák, M.: Differences in application of the wave or sleeve spring to the vibroisolation system, Engineering Mechanics 2007, Svratka 2007

[28] Sivčák, M.: About another possibility of reducing the pneumatic suspension stiffness, Engineering Mechanics 2008, Svratka 2008

7. Přílohy

DISKRÉTNÍ FOURIEROVA TRANSFORMACE
Algoritmus pro využití DFT při vyhodnocování dat získaných měřením vlastních frekvencí systému na ověřovacím vzorku lehátka.

METODA NEJMENŠÍCH ČTVERCŮ PRO PROSTOROVÉ ZÁVISLOSTI
Ukázka aplikace MNC upravené pro aproximaci obecné prostorové závislosti. Metoda je velmi vhodná na vytvoření funkce popisující velikost síly nebo objemu hadicové pružiny na tlaku a zdvihu.

MATEMATICKÝ MODEL PRUŽINY
Odvození torzní tuhosti a momentu pružiny aplikované v systému.

MATEMATICKÝ MODEL TLUMIČE (STATICKÉ RYCHLOSTNÍ CHARAKTERISTIKY)
Sestavení funkce aproximující statickou rychlostní charakteristiku na základě známých parametrů tlumiče.

ODVOZENÍ LAGRANGEOVÝCH ROVNIC
Kompletní postup odvození Lagrangeových rovnic.

LINEARIZACE LAGRANGEOVÝCH ROVNIC
Sestavení Jacobiho matice z Lagrangeových rovnic a následné rozložení na matici hmotnosti, tuhosti, tlumení a vektor parametrického buzení.

VLIV VLASTNOSTÍ LINEARIZOVANÉHO SYSTÉMU NA VLASTNÍ FREKVENCE
Kompletní algoritmus vedoucí k určení vlivu parametrů systému (charakteristik pružin, rozměrů a hmotnostních parametrů systému) na vlastní frekvence linearizovaného systému.

VLIV VELIKOSTI TLUMENÍ NA VLASTNÍ FREKVENCE
Kompletní algoritmus vedoucí k určení vlivu velikosti tlumení na vlastní frekvence linearizovaného systému.

SIMULACE NELINEÁRNÍHO SYSTÉMU (PRUŽINA, TLUMIČ, LAGRANGEOVY ROVNICE)
Program pro sestavení soustavy nelineárních diferenciálních rovnic a jejich následné řešení. Vlastní frekvence jsou určeny pomocí aplikace DFT na odezvu systému.

Diskrétní Fourierova transformace

```
> restart;
> with(LinearAlgebra):with(plots):
```

Načtení dat z *.txt souboru (soubor obsahuje data v 17 sloupcích).

```
> f := readdata("D:\\Documents and Settings\\Michal
  Sivčák\\Dokumenty\\výpočty\\lehatko\\disertacni
  vypocet\\mereni\\80y13x35.txt", 17):
```

Převedení seznamu čísel (list) na matici a pole.

```
> whattype(f);
```

$$list \quad (1)$$

```
> f1:=convert(f,Matrix);
  M:=convert(f1,Array);
```

$$f1 := \begin{bmatrix} \text{4238 x 17 Matrix} \\ \text{Data Type: anything} \\ \text{Storage: rectangular} \\ \text{Order: Fortran\_order} \end{bmatrix}$$

$$M := \begin{bmatrix} \text{1..4238 x 1..17 Array} \\ \text{Data Type: anything} \\ \text{Storage: rectangular} \\ \text{Order: Fortran\_order} \end{bmatrix} \quad (2)$$

```
> whattype(M);
```

$$Array \quad (3)$$

Určení počtu měření a doby trvání měření (s pomocí známé vzorkovací frekvence 0.005s).

```
> N,b:=Dimension(f1);
  M1:=M:
  cas:=0.005*N:
```

$$N, b := 4238, 17 \quad (4)$$

DFT pro frekvence do 6Hz (v našem případě nás vyšší nezajímají) ze signálů zaznamenaných ve sloupcích 12, 13 a 14.

```
>     for n from 1 to cas*6 do
        H12[n]:= evalhf(sum(M1[k,12]*exp(-(I*2)*Pi*k*n/(N)), k =
  1..N));
        H13[n]:= evalhf(sum(M1[k,13]*exp(-(I*2)*Pi*k*n/(N)), k =
  1..N));
        H14[n]:= evalhf(sum(M1[k,14]*exp(-(I*2)*Pi*k*n/(N)), k =
  1..N));
      end do:
```

Určení maximální amplitudy v mezích analyzovaných frekvencí

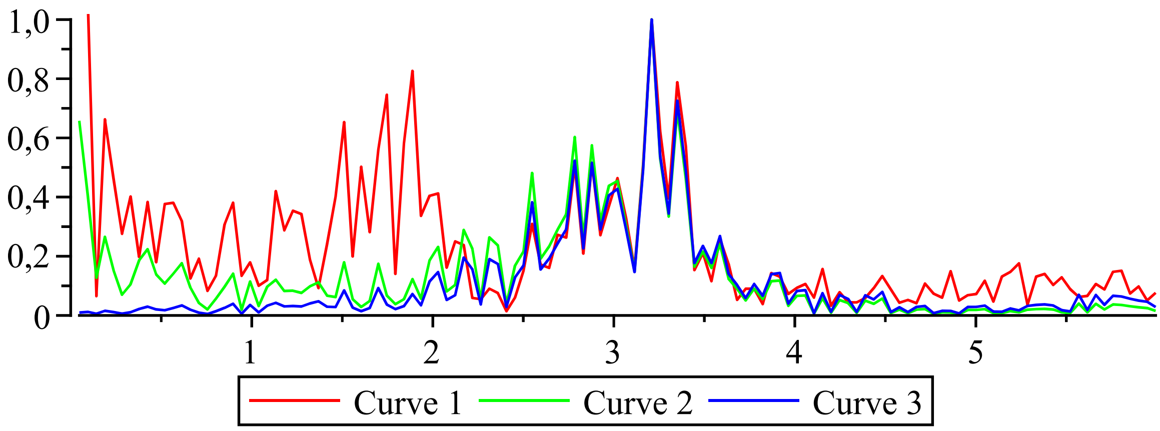
```
> MAX12 := max(`$`(abs(H12[i]), i = round(1*cas) .. 6*cas));
  MAX13 := max(`$`(abs(H13[i]), i = round(1*cas) .. 6*cas));
  MAX14 := max(`$`(abs(H14[i]), i = round(1*cas) .. 6*cas));
```

$$MAX12 := 58.35688125$$
$$MAX13 := 405.5411451$$
$$MAX14 := 40.86707267 \quad (5)$$

Zobrazení Fourierova obrazu analyzovaných funkcí (normováno tak, aby maximální amplituda v rozmezí 1-6Hz byla rovna jedné).

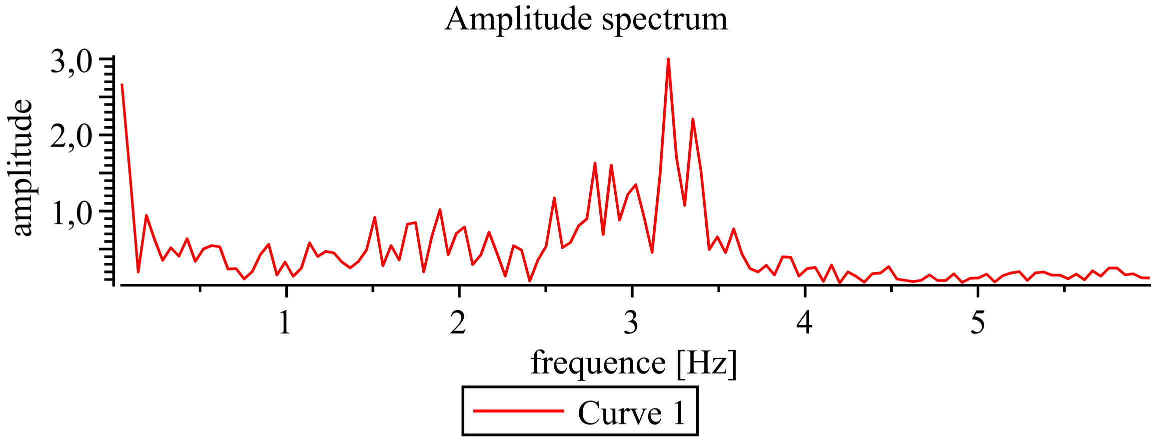
```
> PLOT12 := plot([`$`([p/cas, abs(H12[p])/MAX12], p = 1 .. 6*cas)], color = red); PLOT13 := plot([`$`([p/cas, abs(H13[p])/MAX13], p = 1 .. 6*cas)], color = green); PLOT14 := plot([`$`([p/cas, abs(H14[p])/MAX14], p = 1 .. 6*cas)], color = blue); display(PLOT12, PLOT13, PLOT14, view=[default, 0..1]);
```

$$PLOT12 := PLOT(...)$$
$$PLOT13 := PLOT(...)$$
$$PLOT14 := PLOT(...)$$



Součet normovaných spekter

```
> plot([`$`([p/cas, abs(H12[p])/MAX12+abs(H13[p])/MAX13+abs(H14[p])/MAX14], p = 1 .. 6*cas)], color = red, title="Amplitude spectrum", labels=["frequence [Hz]", "amplitude"], labeldirections=[horizontal, vertical]);
```



\>

Metoda nejmenších čtverců pro prostorové závislosti

```
> restart: with(LinearAlgebra): with(plots):
```

Stupeň polynomu (+1)

```
> imax:=4; jmax:=2; mmax:=imax+imax*(jmax-1);
```

$$imax := 4$$
$$jmax := 2$$
$$mmax := 8 \quad (1)$$

Obecný tvar aproximační funkce

```
> f:= sum(sum(a[i+imax*(j-1)]*x[k]^(i-1)*y[k]^(j-1),j=1..jmax),
  i=1..imax);
```

$$f := a_1 + a_5 y_k + a_2 x_k + a_6 x_k y_k + a_3 x_k^2 + a_7 x_k^2 y_k + a_4 x_k^3 + a_8 x_k^3 y_k \quad (2)$$

Naměřené hodnoty (vložené z Excelu pomocí doplňku MAPLE Excel add-in, označení musí být X, Y, Z, lze přeprogramovat na načtení dat z *.txt souborů).

```
> X := Matrix(1..24, 1..1, {(1, 1)=4.70000000E+01, (2, 1)=
  4.70000000E+01, (3, 1)=4.70000000E+01, (4, 1)=4.70000000E+01, (5,
  1)=4.70000000E+01, (6, 1)=4.70000000E+01, (7, 1)=4.70000000E+01,
  (8, 1)=4.70000000E+01, (9, 1)=5.60000000E+01, (10, 1)=
  5.60000000E+01, (11, 1)=5.60000000E+01, (12, 1)=5.60000000E+01,
  (13, 1)=5.60000000E+01, (14, 1)=5.60000000E+01, (15, 1)=
  5.60000000E+01, (16, 1)=5.60000000E+01, (17, 1)=6.30000000E+01,
  (18, 1)=6.30000000E+01, (19, 1)=6.30000000E+01, (20, 1)=
  6.30000000E+01, (21, 1)=6.30000000E+01, (22, 1)=6.30000000E+01,
  (23, 1)=6.30000000E+01, (24, 1)=6.30000000E+01}):

  Y :=Matrix(1..24, 1..1, {(1, 1)=1.00000000E-01, (2, 1)=
  5.00000000E-01, (3, 1)=7.00000000E-01, (4, 1)=1.00000000E+00, (5,
  1)=2.00000000E+00, (6, 1)=3.00000000E+00, (7, 1)=4.00000000E+00,
  (8, 1)=5.00000000E+00, (9, 1)=1.00000000E-01, (10, 1)=
  5.00000000E-01, (11, 1)=7.00000000E-01, (12, 1)=1.00000000E+00,
  (13, 1)=2.00000000E+00, (14, 1)=3.00000000E+00, (15, 1)=
  4.00000000E+00, (16, 1)=5.00000000E+00, (17, 1)=1.00000000E-01,
  (18, 1)=5.00000000E-01, (19, 1)=7.00000000E-01, (20, 1)=
  1.00000000E+00, (21, 1)=2.00000000E+00, (22, 1)=3.00000000E+00,
  (23, 1)=4.00000000E+00, (24, 1)=5.00000000E+00}):

> Z :=Matrix(1..24, 1..1, {(1, 1)=7.23E+01, (2, 1)=7.56E+01, (3, 1)=
  7.63E+01, (4, 1)=7.91E+01, (5, 1)=8.06E+01, (6, 1)=8.24E+01, (7, 1)=
  8.61E+01, (8, 1)=8.91E+01, (9, 1)=7.29E+01, (10, 1)=7.76E+01, (11, 1)
  =7.92E+01, (12, 1)=8.17E+01, (13, 1)=9.52E+01, (14, 1)=1.04E+02,
  (15, 1)=1.12E+02, (16, 1)=1.20E+02, (17, 1)=7.65E+01, (18, 1)=
  8.24E+01, (19, 1)=8.77E+01, (20, 1)=9.13E+01, (21, 1)=1.04E+02, (22,
  1)=1.16E+02, (23, 1)=1.26E+02, (24, 1)=1.38E+02}):
```

```
>
```

Počet naměřených dat (n) a součet čtverců odchylek aproximační funkce od naměřených hodnot

```
n:=RowDimension(X);
 S := sum((f-z[k])^2, k = 1 .. n):
```

$$n := 24 \tag{3}$$

Převedení matic na vektory, určení mezí

```
> x := convert(X, Vector):
  y := convert(Y, Vector):
  z := convert(Z, Vector):
  xmin:=min(seq(x[gg],gg=1..n));
  xmax:=max(seq(x[gg],gg=1..n));
  ymin:=min(seq(y[gg],gg=1..n));
  ymax:=max(seq(y[gg],gg=1..n));
  zmin:=min(seq(z[gg],gg=1..n));
  zmax:=max(seq(z[gg],gg=1..n));
```

$$xmin := 47.0000000$$
$$xmax := 63.0000000$$
$$ymin := 0.100000000$$
$$ymax := 5.00000000$$
$$zmin := 72.3$$
$$zmax := 138. \tag{4}$$

Vytvoření soustavy lineárních rovnic (hledání minima součtu čtverců odchylek)

```
> for m to mmax do
  rov[m] := diff(S, a[m]);
  od:
```

Výpočet koeficientů aproximační funkce

```
> solve({`$`(rov[ng], ng = 1 .. mmax)}, {`$`(a[mg], mg = 1 ..
  mmax)}):
> assign(%);
```

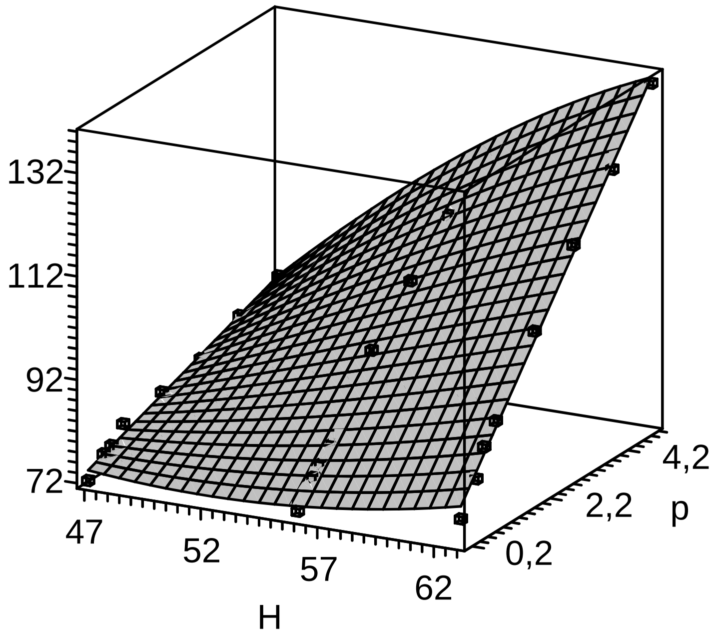
Finální aproximační funkce (x -> H, y -> p, z -> force).

```
> force:= sum(sum(a[i+imax*(j-1)]*H^(i-1)*p^(j-1),j=1..jmax),i=
  1..imax);
```

$$force := 216.1589534 - 75.19417122\,p - 5.517608157\,H + 2.096087638\,H\,p + 0.05399891518\,H^2 - 0.003142180466\,H^2\,p - 0.00002066511806\,H^3 - 0.0001283826464\,H^3\,p \tag{5}$$

Zobrazení naměřených dat a aproximační funkce.

```
> Graf1:=plot3d(force, H=xmin..xmax, p=ymin..ymax, color=grey,
  axes=boxed):
  Graf2:=pointplot3d({seq([x[T],y[T],z[T]],T=1..n)},symbol=box,
  symbolsize=10, color=red):
  display(Graf1,Graf2);
```



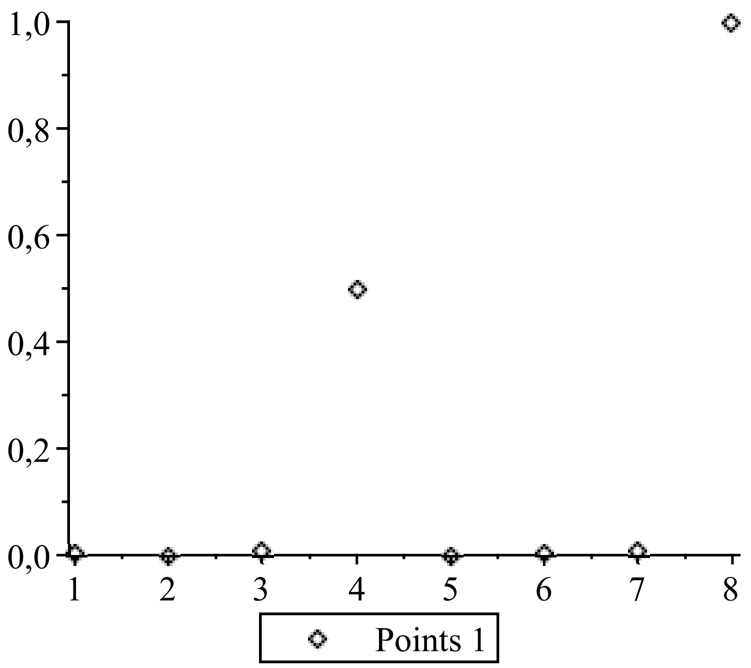
Součet čtverců odchylek (míra chyby aproximace).

```
> S;
```

43.91093595 **(6)**

Citlivost aproximační funkce na změnu jednotlivých koeficientů.

```
> pointplot({seq([nh,rov[nh]], nh = 1..mmax)}, symbolsize=20);
```




```
>
```

Matematický model pneumatické pružiny

```
> restart;with(LinearAlgebra):
```

Závislost délky pružiny na úhlové výchylce

```
> l4[1]:= theta->sqrt(2*`r[p,theta]`^2
  -2*`r[p,theta]`^2*cos(theta+`theta[0]`)+2*`r[p,theta]`*h[4]*sin(
  theta+`theta[0]`)+h[4]^2);
  l5[1]:=phi->sqrt(2*`r[p,phi]`[1]^2-2*`r[p,phi]`[1]^2*cos(phi)+2*
  `r[p,phi]`[1]*h[5]*sin(phi)+h[5]^2);
  l5[2]:=phi->sqrt(2*`r[p,phi]`[2]^2-2*`r[p,phi]`[2]^2*cos(-phi)+2
  *`r[p,phi]`[2]*h[5]*sin(-phi)+h[5]^2);
  l6[1]:=psi->sqrt(2*`r[p,psi]`[1]^2-2*`r[p,psi]`[1]^2*cos(psi)+2*
  `r[p,psi]`[1]*h[6]*sin(psi)+h[6]^2);
  l6[2]:=psi->sqrt(2*`r[p,psi]`[2]^2-2*`r[p,psi]`[2]^2*cos(-psi)+2
  *`r[p,psi]`[2]*h[6]*sin(-psi)+h[6]^2);
```

$$l4_1 := \theta \to \sqrt{2\,\text{`r[p,theta]`}^2 - 2\,\text{`r[p,theta]`}^2 \cos(\theta + \text{`theta[0]`}) + 2\,\text{`r[p,theta]`}\, h_4 \sin(\theta + \text{`thet}}$$

$$l5_1 := \phi \to \sqrt{2\,\text{`r[p,phi]`}_1^{\,2} - 2\,\text{`r[p,phi]`}_1^{\,2} \cos(\phi) + 2\,\text{`r[p,phi]`}_1\, h_5 \sin(\phi) + h_5^2}$$

$$l5_2 := \phi \to \sqrt{2\,\text{`r[p,phi]`}_2^{\,2} - 2\,\text{`r[p,phi]`}_2^{\,2} \cos(-\phi) + 2\,\text{`r[p,phi]`}_2\, h_5 \sin(-\phi) + h_5^2}$$

$$l6_1 := \psi \to \sqrt{2\,\text{`r[p,psi]`}_1^{\,2} - 2\,\text{`r[p,psi]`}_1^{\,2} \cos(\psi) + 2\,\text{`r[p,psi]`}_1\, h_6 \sin(\psi) + h_6^2}$$

$$l6_2 := \psi \to \sqrt{2\,\text{`r[p,psi]`}_2^{\,2} - 2\,\text{`r[p,psi]`}_2^{\,2} \cos(-\psi) + 2\,\text{`r[p,psi]`}_2\, h_6 \sin(-\psi) + h_6^2}$$

Moment vyvolaný pružinou

```
> M[1]:=
  4*(`P[4]`*`S[0,4]`*diff(l4[1](theta),theta)+(p[4]*`S[1,4]`+p[4]*
  (`S[0,4]`+`S[1,4]`*(l4[1](theta)-l4[1](0)))^2/V[4])*(diff(l4[1](
  theta),theta))^2*theta):
> M[2] := `P[5]`[1]*`S[0,4]`*diff(l5[1](phi),phi)+

  (p[5][1]*`S[1,4]`+p[5][1]*(`S[0,4]`+`S[1,4]`*(l5[1](phi)-l5[1](0
  )))^2/V[5][1])*diff(l5[1](phi),phi)^2*phi
        +(`P[5]`[2]*`S[0,4]`*diff(l5[2](phi),phi)+

  (p[5][2]*`S[1,4]`+p[5][2]*(`S[0,4]`+`S[1,4]`*(l5[2](phi)-l5[2](0
  )))^2/V[5][2])*diff(l5[2](phi),phi)^2*(-phi)):
> M[3] := `P[6]`[1]*`S[0,4]`*diff(l6[1](psi),psi)+

  (p[6][1]*`S[1,4]`+p[6][1]*(`S[0,4]`+`S[1,4]`*(l6[1](psi)-l6[1](0
  )))^2/V[6][1])*diff(l6[1](psi),psi)^2*psi
        +(`P[6]`[2]*`S[0,4]`*diff(l6[2](psi),psi)+

  (p[6][2]*`S[1,4]`+p[6][2]*(`S[0,4]`+`S[1,4]`*(l6[2](psi)-l6[2](0
  )))^2/V[6][2])*diff(l6[2](psi),psi)^2*(-psi)):
```

Sjednocení označení proměných

```
> M:=evalm(Vector(3,M)):
> for i from 1 to 3 do
  P[i]:=subs(V[4]=`V[4]`(t),V[5][1]=`V[5]`[1](t),V[5][2]=`V[5]`[2]
  (t),V[6][1]=`V[6]`[1](t),V[6][2]=`V[6]`[2](t),
             theta=x[1](t),phi=x[3](t),psi=x[5](t),

  p[4]=`p[4]`(t),p[5][1]=`p[5]`[1](t),p[5][2]=`p[5]`[2](t),p[6][1]
  =`p[6]`[1](t),p[6][2]=`p[6]`[2](t),M[i])
  od:
```

Vektor momentů pneumatických pružin

```
> P:=evalm(Vector(3,P));
```

$$P := \Big[2\, P[4]\, S[0,4]\, (2\, r[p,theta]^2 \sin(x_1(t) + theta[0]) + 2\, r[p,theta]\, h_4 \cos(x_1(t) + theta[0])) \Big/ \sqrt{2\, r[p,theta]^2 - 2\, r[p,theta]^2 \cos(x_1(t) + theta[0]) + 2\, r[p,theta]\, h_4 \sin(x_1(t) + theta[\text{(}}$$

$$+ \Big(p[4](t)\, S[1,4] + p[4](t) \Big(S[0,4] + S[1,4] \Big(\sqrt{2\, r[p,theta]^2 - 2\, r[p,theta]^2 \cos(x_1(t) + theta}$$

$$- \sqrt{2\, r[p,theta]^2 - 2\, r[p,theta]^2 \cos(theta[0]) + 2\, r[p,theta]\, h_4 \sin(theta[0]) + h_4^{\,2}} \Big)\Big)^2 \Big/$$

$$V[4](t) \Big) (2\, r[p,theta]^2 \sin(x_1(t) + theta[0]) + 2\, r[p,theta]\, h_4 \cos(x_1(t) + theta[0]))^2\, x_1(t) \Big/ \Big($$

$$2\, r[p,theta]^2 - 2\, r[p,theta]^2 \cos(x_1(t) + theta[0]) + 2\, r[p,theta]\, h_4 \sin(x_1(t) + theta[0]) + h_4^{\,2}$$

$$\Big), \frac{1}{2} \frac{P[5]_1\, S[0,4] \left(2\, r[p,phi]_1^{\,2} \sin(x_3(t)) + 2\, r[p,phi]_1\, h_5 \cos(x_3(t))\right)}{\sqrt{2\, r[p,phi]_1^{\,2} - 2\, r[p,phi]_1^{\,2} \cos(x_3(t)) + 2\, r[p,phi]_1\, h_5 \sin(x_3(t)) + h_5^{\,2}}} + \frac{1}{4} \Big($$

$$p[5]_1(t)\, S[1,4] + p[5]_1(t) \Big(S[0,4] + S[1,4]$$

$$\Big(\sqrt{2\, r[p,phi]_1^{\,2} - 2\, r[p,phi]_1^{\,2} \cos(x_3(t)) + 2\, r[p,phi]_1\, h_5 \sin(x_3(t)) + h_5^{\,2}} - \sqrt{h_5^{\,2}} \Big)\Big)^2$$

$$\Big/ V[5]_1(t) \Big) \Big(2\, r[p,phi]_1^{\,2} \sin(x_3(t)) + 2\, r[p,phi]_1\, h_5 \cos(x_3(t))\Big)^2 x_3(t) \Big/ \Big($$

$$2\, r[p,phi]_1^{\,2} - 2\, r[p,phi]_1^{\,2} \cos(x_3(t)) + 2\, r[p,phi]_1\, h_5 \sin(x_3(t)) + h_5^{\,2} \Big)$$

$$
+\frac{1}{2}\frac{P[5]_2\ S[0,4]\left(2\ r[p,phi]_2^{\ 2}\ \sin(x_3(t))-2\ r[p,phi]_2\ h_5\cos(x_3(t))\right)}{\sqrt{2\ r[p,phi]_2^{\ 2}-2\ r[p,phi]_2^{\ 2}\cos(x_3(t))-2\ r[p,phi]_2\ h_5\sin(x_3(t))+h_5^{\ 2}}}-\frac{1}{4}\Bigg(
$$

$$
p[5]_2(t)\ S[1,4]+p[5]_2(t)\Bigg(S[0,4]+S[1,4]
$$

$$
\left(\sqrt{2\ r[p,phi]_2^{\ 2}-2\ r[p,phi]_2^{\ 2}\cos(x_3(t))-2\ r[p,phi]_2\ h_5\sin(x_3(t))+h_5^{\ 2}}-\sqrt{h_5^{\ 2}}\right)^2
$$

$$
\Bigg/\ V[5]_2(t)\Bigg)\left(2\ r[p,phi]_2^{\ 2}\ \sin(x_3(t))-2\ r[p,phi]_2\ h_5\cos(x_3(t))\right)^2\ x_3(t)\ \Bigg/\ \Bigg(
$$

$$
2\ r[p,phi]_2^{\ 2}-2\ r[p,phi]_2^{\ 2}\cos(x_3(t))-2\ r[p,phi]_2\ h_5\sin(x_3(t))+h_5^{\ 2}\Bigg)\Bigg),
$$

$$
\frac{1}{2}\frac{P[6]_1\ S[0,4]\left(2\ r[p,psi]_1^{\ 2}\ \sin(x_5(t))+2\ r[p,psi]_1\ h_6\cos(x_5(t))\right)}{\sqrt{2\ r[p,psi]_1^{\ 2}-2\ r[p,psi]_1^{\ 2}\cos(x_5(t))+2\ r[p,psi]_1\ h_6\sin(x_5(t))+h_6^{\ 2}}}+\frac{1}{4}\Bigg(
$$

$$
p[6]_1(t)\ S[1,4]+p[6]_1(t)\Bigg(S[0,4]+
$$

$$
S[1,4]\left(\sqrt{2\ r[p,psi]_1^{\ 2}-2\ r[p,psi]_1^{\ 2}\cos(x_5(t))+2\ r[p,psi]_1\ h_6\sin(x_5(t))+h_6^{\ 2}}-\sqrt{h_6^{\ 2}}\right.
$$

$$
\left.\right)^2\Bigg/\ V[6]_1(t)\Bigg)\left(2\ r[p,psi]_1^{\ 2}\ \sin(x_5(t))+2\ r[p,psi]_1\ h_6\cos(x_5(t))\right)^2\ x_5(t)\ \Bigg/\ \Bigg(
$$

$$
2\ r[p,psi]_1^{\ 2}-2\ r[p,psi]_1^{\ 2}\cos(x_5(t))+2\ r[p,psi]_1\ h_6\sin(x_5(t))+h_6^{\ 2}\Bigg)
$$

$$
+\frac{1}{2}\frac{P[6]_2\ S[0,4]\left(2\ r[p,psi]_2^{\ 2}\ \sin(x_5(t))-2\ r[p,psi]_2\ h_6\cos(x_5(t))\right)}{\sqrt{2\ r[p,psi]_2^{\ 2}-2\ r[p,psi]_2^{\ 2}\cos(x_5(t))-2\ r[p,psi]_2\ h_6\sin(x_5(t))+h_6^{\ 2}}}-\frac{1}{4}\Bigg(
$$

$$
p[6]_2(t)\ S[1,4]+p[6]_2(t)\Bigg(S[0,4]+
$$

$$
S[1,4]\left(\sqrt{2\ r[p,psi]_2^{\ 2}-2\ r[p,psi]_2^{\ 2}\cos(x_5(t))-2\ r[p,psi]_2\ h_6\sin(x_5(t))+h_6^{\ 2}}-\sqrt{h_6^{\ 2}}\right.
$$

$$
\left.\right)^2\Bigg/\ V[6]_2(t)\Bigg)\left(2\ r[p,psi]_2^{\ 2}\ \sin(x_5(t))-2\ r[p,psi]_2\ h_6\cos(x_5(t))\right)^2\ x_5(t)\ \Bigg/\ \Bigg(
$$

$$
2\ r[p,psi]_2^{\ 2}-2\ r[p,psi]_2^{\ 2}\cos(x_5(t))-2\ r[p,psi]_2\ h_6\sin(x_5(t))+h_6^{\ 2}\Bigg)\Bigg]
$$

Uložení modelu pružin do souboru. R je moment pružin v rovnovážné poloze.

```
> save P,"d:/vytvory/P.txt":
> for i from 1 to 3 do
  R[i]:=subs(x[1](t)=0,x[3](t)=0,x[5](t)=0,P[i])
  od:
> R:=eval(Vector(3,R));
```

$$R := \begin{bmatrix} \dfrac{2\,P[4]\,S[0,4]\,(2\,r[p,theta]^2\,\sin(theta[0]) + 2\,r[p,theta]\,h_4\,\cos(theta[0]))}{\sqrt{2\,r[p,theta]^2 - 2\,r[p,theta]^2\,\cos(theta[0]) + 2\,r[p,theta]\,h_4\,\sin(theta[0]) + h_4^{\,2}}} \\ \dfrac{P[5]_1\,S[0,4]\,r[p,phi]_1\,h_5}{\sqrt{h_5^{\,2}}} - \dfrac{P[5]_2\,S[0,4]\,r[p,phi]_2\,h_5}{\sqrt{h_5^{\,2}}} \\ \dfrac{P[6]_1\,S[0,4]\,r[p,psi]_1\,h_6}{\sqrt{h_6^{\,2}}} - \dfrac{P[6]_2\,S[0,4]\,r[p,psi]_2\,h_6}{\sqrt{h_6^{\,2}}} \end{bmatrix}$$

Matematický model tlumiče (statické rychlostní chrakteristiky)

```
> restart;with(LinearAlgebra):with(plots):
```

výchozí nastavení tlumiče

```
va0:=0.14:    Fa0:=157.9:
vb0:=1:       Fb0:=296.6:
vc0:=-0.13:   Fc0:=-141.4:
vd0:=-1:      Fd0:=-222.0:
```

změna parametrů tlumiče v procentech na krok

```
p:=20;
```

výběr měněného parametru tlumiče j
1-kalibrované otvory (va = konst., Fa roste)
2-předpětí přítlačné pružiny resp. svazku planžet (va i Fa roste)
3-tuhost přítlačné pružiny resp. svazku planžet (mění se Fb)

```
j:=1;
```

pokud je k=1, potom se při výpočtu nemění parametry tlumiče
pokud je #k=1 (k odřazeno), potom se při výpočtu bude v každém kroku mněnit příslušný parametr o p procent.

```
k:=1;
```

délka tlumiče v závislosti na úhlu

```
h:=0;
l:=sqrt(-2*Rt^2*cos(u)+2*Rt^2+h^2+2*h*Rt*sin(u));
```

výpočet převodové funkce

```
#R:=1;
R:=Rt;
```

Definice průběhu statické rychlostní charakteristiky

```
va:=<va0,i*va0,va0>:
vb:=<vb0,vb0,vb0>:
Fa:=<Fa0*i,Fa0*i,Fa0>:
Fb:=<Fa0*(i-1)+Fb0,Fa0*i+(Fb0-Fa0)/(vb0-va0)*(vb0-va0*i),Fb0*i>:
vc:=<vc0,i*vc0,vc0>:
vd:=<vd0,vd0,vd0>:
Fc:=<Fc0*i,Fc0*i,Fc0>:
Fd:=<Fc0*(i-1)+Fd0,Fc0*i+(Fd0-Fc0)/(vd0-vc0)*(vd0-vc0*i),Fd0*i>:

i:=1+(k-1)*p/100:
```

$$p := 20$$

$$j := 1$$

$$k := 1$$

$$h := 0$$

$$l := \sqrt{-2\,Rt^2\cos(u) + 2\,Rt^2}$$

$$R := Rt$$

Koeficient tlumení

```
> b11[k]:=piecewise(
     x >= va[j] ,((Fb[j]-Fa[j])/(vb[j]-va[j])),
     x >= 0 and x < va[j]  ,(Fa[j]/va[j]),
     x <=  vc[j],((Fd[j]-Fc[j])/(vd[j]-vc[j])),(Fc[j]/vc[j])):

  b21[k]:=piecewise(
     x >= va[j],Fa[j]-((Fb[j]-Fa[j])/(vb[j]-va[j]))*va[j],
     x >=  0 and x < va[j],0,
     x <=  vc[j],-((Fd[j]-Fc[j])/(vd[j]-vc[j]))*vc[j]+Fc[j],0):
  g:=b11[k]*x+b21[k];
```

$$g := \left(\begin{cases} 161.2790698 & 0.14 \le x \\ 1127.857143 & 0 \le x \textbf{ and } x < 0.14 \\ 92.64367816 & x \le -0.13 \\ 1087.692308 & \textit{otherwise} \end{cases}\right) x + \left(\begin{cases} 135.3209302 & 0.14 \le x \\ 0 & 0 \le x \textbf{ and } x < 0.14 \\ -129.3563218 & x \le -0.13 \\ 0 & \textit{otherwise} \end{cases}\right)$$

Vektor momentů vyvolaných tlumičem

```
> TL:=simplify(<4*subs(x=x[2](t)*subs(u=`theta[0]`+x[1](t),
  Rt=`r[t,theta]`,R),g)*subs(u=`theta[0]`+x[1](t),
  Rt=`r[t,theta]`,R),
  subs(x=x[4](t)*subs(u=x[3](t),
  Rt=`r[t,phi]`[1],R),g)*subs(u=x[3](t), Rt=`r[t,phi]`[1],R)+
  subs(x=x[4](t)*subs(u=-x[3](t),
  Rt=`r[t,phi]`[2],R),g)*subs(u=-x[3](t), Rt=`r[t,phi]`[2],R),
  subs(x=x[6](t)*subs(u=x[5](t),
  Rt=`r[t,psi]`[1],R),g)*subs(u=x[5](t), Rt=`r[t,psi]`[1],R)+
  subs(x=x[6](t)*subs(u=-x[5](t),
  Rt=`r[t,psi]`[2],R),g)*subs(u=-x[5](t), Rt=`r[t,psi]`[2],R)>):
> #save TL,"e:/vytvory/T.txt":
  expand(TL);
```

$$\left[4\left(\left(\left(\begin{cases} 92.64367816 & x_2(t)\; r[t,theta] \le -0.1300000000 \\ 1087.692308 & x_2(t)\; r[t,theta] < 0. \\ 1127.857143 & x_2(t)\; r[t,theta] < 0.1400000000 \\ 161.2790698 & 0.1400000000 \le x_2(t)\; r[t,theta] \end{cases}\right) x_2(t)\; r[t,theta]\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \left(\begin{cases} -129.3563218 & x_2(t)\; r[t,theta] \le -0.1300000000 \\ 0. & x_2(t)\; r[t,theta] < 0.1400000000 \\ 135.3209302 & 0.1400000000 \le x_2(t)\; r[t,theta] \end{cases}\right)\right) r[t,theta]\right]$$

$$\left[\left(\left(\begin{cases} 92.64367816 & x_4(t)\; r[t,phi]_1 \le -0.1300000000 \\ 1087.692308 & x_4(t)\; r[t,phi]_1 < 0. \\ 1127.857143 & x_4(t)\; r[t,phi]_1 < 0.1400000000 \\ 161.2790698 & 0.1400000000 \le x_4(t)\; r[t,phi]_1 \end{cases}\right) x_4(t)\; r[t,phi]_1^{\,2}\right.\right.$$

$$+ r[t,phi]_1 \left(\begin{cases} -129.3563218 & x_4(t)\; r[t,phi]_1 \le -0.1300000000 \\ 0. & x_4(t)\; r[t,phi]_1 < 0.1400000000 \\ 135.3209302 & 0.1400000000 \le x_4(t)\; r[t,phi]_1 \end{cases} \right)$$

$$+ \left(\begin{cases} 92.64367816 & x_4(t)\; r[t,phi]_2 \le -0.1300000000 \\ 1087.692308 & x_4(t)\; r[t,phi]_2 < 0. \\ 1127.857143 & x_4(t)\; r[t,phi]_2 < 0.1400000000 \\ 161.2790698 & 0.1400000000 \le x_4(t)\; r[t,phi]_2 \end{cases} \right) x_4(t)\; r[t,phi]_2^{\,2}$$

$$\left. + r[t,phi]_2 \left(\begin{cases} -129.3563218 & x_4(t)\; r[t,phi]_2 \le -0.1300000000 \\ 0. & x_4(t)\; r[t,phi]_2 < 0.1400000000 \\ 135.3209302 & 0.1400000000 \le x_4(t)\; r[t,phi]_2 \end{cases} \right) \right]$$

$$\left[\left(\left(\begin{cases} 92.64367816 & x_6(t)\; r[t,psi]_1 \le -0.1300000000 \\ 1087.692308 & x_6(t)\; r[t,psi]_1 < 0. \\ 1127.857143 & x_6(t)\; r[t,psi]_1 < 0.1400000000 \\ 161.2790698 & 0.1400000000 \le x_6(t)\; r[t,psi]_1 \end{cases} \right) x_6(t)\; r[t,psi]_1^{\,2} \right. \right.$$

$$+ r[t,psi]_1 \left(\begin{cases} -129.3563218 & x_6(t)\; r[t,psi]_1 \le -0.1300000000 \\ 0. & x_6(t)\; r[t,psi]_1 < 0.1400000000 \\ 135.3209302 & 0.1400000000 \le x_6(t)\; r[t,psi]_1 \end{cases} \right)$$

$$+ \left(\begin{cases} 92.64367816 & x_6(t)\; r[t,psi]_2 \le -0.1300000000 \\ 1087.692308 & x_6(t)\; r[t,psi]_2 < 0. \\ 1127.857143 & x_6(t)\; r[t,psi]_2 < 0.1400000000 \\ 161.2790698 & 0.1400000000 \le x_6(t)\; r[t,psi]_2 \end{cases} \right) x_6(t)\; r[t,psi]_2^{\,2}$$

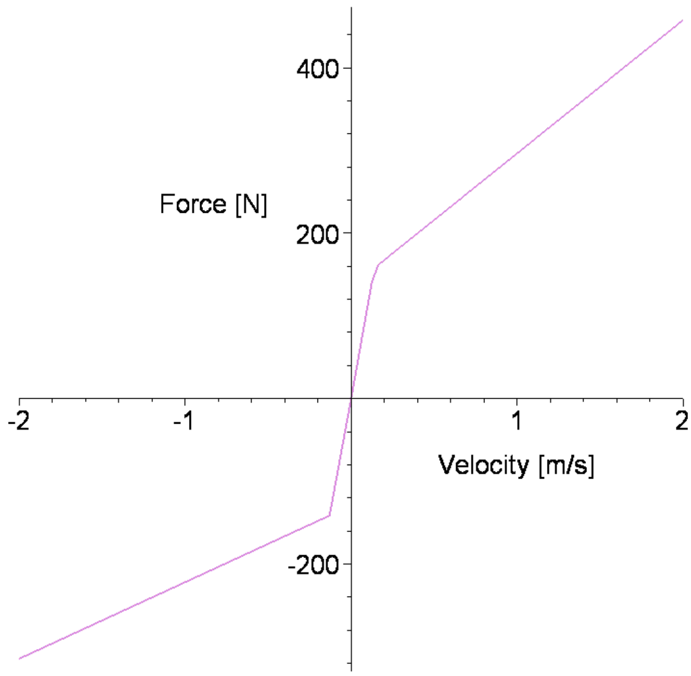
$$\left. + r[t,psi]_2 \left(\begin{cases} -129.3563218 & x_6(t)\; r[t,psi]_2 \le -0.1300000000 \\ 0. & x_6(t)\; r[t,psi]_2 < 0.1400000000 \\ 135.3209302 & 0.1400000000 \le x_6(t)\; r[t,psi]_2 \end{cases} \right) \right]$$

Zobrazení statické rychlostní chrakteristiky

```
> MAX:=1:
  MIN:=1:
  for k from MIN by 1 to MAX do
  barva:=COLOR(RGB, rand()/10^12, rand()/10^12, rand()/10^12):

  b11[k]:=piecewise(
     x >= va[j] ,((Fb[j]-Fa[j])/(vb[j]-va[j])),
     x >= 0 and x < va[j]  ,(Fa[j]/va[j]),
     x <=  vc[j],((Fd[j]-Fc[j])/(vd[j]-vc[j])),(Fc[j]/vc[j]));

  b21[k]:=piecewise(
     x >= va[j],Fa[j]-((Fb[j]-Fa[j])/(vb[j]-va[j]))*va[j],
     x >=  0 and x < va[j],0,
     x <=  vc[j],-((Fd[j]-Fc[j])/(vd[j]-vc[j]))*vc[j]+Fc[j],0);
  g1[k]:=b11[k]*x+b21[k];
  G1[k]:=plot(g1[k],x=-2..2,color=barva,labels=["Velocity
  [m/s]","Force [N]"],thickness=2);
  od:
> display(G1[ng]$ng=1..MAX);
```




```
>
```

Odvození Lagrangeových rovnic

```
> restart; with(linalg):
```

Polohy jednotlivých souřadných systémů a těžišť

Příkaz který definuje buzení

```
> #alpha(t):=0; beta(t):=0; zeta(t):=0;
```

Transformační matice pro pootočení o úhel $\alpha(t)$ a $\beta(t)$

```
> `M[alpha]`(t):=matrix(3,3,[
  1,      0          ,     0         ,
  0, cos(alpha(t))   , sin(alpha(t)),
  0, -sin(alpha(t)), cos(alpha(t))]);

  `M[beta]`(t):=matrix(3,3,[
  cos(beta(t)), 0, -sin(beta(t)),
  0           , 1,      0       ,
  sin(beta(t)), 0, cos(beta(t))]);
```

$$M[alpha](t) := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha(t)) & \sin(\alpha(t)) \\ 0 & -\sin(\alpha(t)) & \cos(\alpha(t)) \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

$$M[beta](t) := \begin{bmatrix} \cos(\beta(t)) & 0 & -\sin(\beta(t)) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\beta(t)) & 0 & \cos(\beta(t)) \end{bmatrix}$$

Polohový vektor souřadného systému **o3** posunutého o zeta(t) vertikálně a pootočeného o $\alpha(t)$ a $\beta(t)$ vzhledem k souřadnému systému **O**.

```
> `o[3]`(t):=evalm(`M[beta]`(t)&*`M[alpha]`(t)&*vector(3,[0,
  0,zeta(t)]));
```

$$o[3](t) := \begin{bmatrix} -\sin(\beta(t))\cos(\alpha(t))\,\zeta(t) & \sin(\alpha(t))\,\zeta(t) & \cos(\beta(t))\cos(\alpha(t))\,\zeta(t) \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

Polohový vektor souřadného systému **o4** (horní základna) v souřadném systému **o3**.

```
> `o[4]`(t):=vector(3,[`x[S3]`+R*cos(theta(t)+`theta[0]`),`y
  [S3]`,`z[S3]`
  +R*sin(theta(t)+`theta[0]`)]);
```

$$o[4](t) := \begin{bmatrix} x[S3] + R\cos(\theta(t) + theta[0]) & y[S3] & z[S3] + R\sin(\theta(t) + theta[0]) \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

Transformační matice pro pootočení o úhel

```
> `M[phi]`(t):=matrix(3,3,[
cos(phi(t)),0,-sin(phi(t)),
0,1,0,
sin(phi(t)),0,cos(phi(t))]);

`M[psi]`(t):=matrix(3,3,[
1,0,0,
0,cos(psi(t)),sin(psi(t)),
0,-sin(psi(t)),cos(psi(t))]);
```

$$M[phi](t) := \begin{bmatrix} \cos(\phi(t)) & 0 & -\sin(\phi(t)) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\phi(t)) & 0 & \cos(\phi(t)) \end{bmatrix} \tag{1.4}$$

$$M[psi](t) := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\psi(t)) & \sin(\psi(t)) \\ 0 & -\sin(\psi(t)) & \cos(\psi(t)) \end{bmatrix}$$

Polohový vektor souřadného systému **o[5]** (první rám), v souřadném systému **o[3]**.

```
> `o[5]`(t):=evalm(`o[4]`(t)+vector(3,[`x[45]`,0,`z[45]`]));
```

$$o[5](t) := \left[x[S3] + R\cos(\theta(t) + theta[0]) + x[45], y[S3], z[S3] + R\sin(\theta(t) + theta[0]) + z[45]\right] \tag{1.5}$$

Polohový vektor souřadného systému o[T3][i] (těžiště i-tého ramene paralelogramu) v souřadném systému **o[3]**.

```
> `o[T3]`[i](t):=vector(3,[`x[T3]`[i]+R/2*cos(theta(t)+`theta
[0]`),
`y[T3]`[i],
`z[T3]`[i]+R/2*sin(theta(t)+`theta[0]`)]);
```

$$o[T3]_i(t) := \left[\, x[T3]_i + \frac{1}{2}\, R\cos(\theta(t) + theta[0]) \quad y[T3]_i \quad z[T3]_i + \frac{1}{2}\, R\sin(\theta(t) + theta[0]) \,\right] \tag{1.6}$$

Vektor relativní rychlosti vo[T3][i] souřadného systému o[T3][i] vzhledem k souřadném systému **o[3].**

```
> `vo[T3]`[i](t):=evalm(vector(3,[diff(`o[T3]`[i](t)[1],t),
diff(`o[T3]`[i]
(t)[2],t),diff(`o[T3]`[i](t)[3],t)]));
```

$$vo[T3]_i(t) := \left[-\frac{1}{2}\, R\sin(\theta(t) + theta[0]) \left(\frac{d}{dt}\theta(t)\right), 0, \frac{1}{2}\, R\cos(\theta(t) + theta[0]) \left(\frac{d}{dt}\theta(t)\right)\right] \tag{1.7}$$

Polohový vektor souřadného systému o[T5] (těžiště prvního rámu) v souřadném systému **o[5]**

```
> `o[T5]`(t):=simplify(evalm(inverse(`M[phi]`(t))
  &*vector(3,[`x[T5]`,`y[T5]`,`z[T5]`])),trig);
```

$$o[T5](t) := [\cos(\phi(t))\, x[T5] + \sin(\phi(t))\, z[T5], y[T5], -\sin(\phi(t))\, x[T5] + \cos(\phi(t))\, z[T5]] \tag{1.8}$$

Polohový vektor souřadného systému o[T5] (těžiště prvního rámu) v souřadném systému **o[3]**

```
> `o[T53]`(t):=`o[T5]`(t)+`o[5]`(t);
```

$$o[T53](t) := [\cos(\phi(t))\, x[T5] + \sin(\phi(t))\, z[T5], y[T5], -\sin(\phi(t))\, x[T5] + \cos(\phi(t))\, z[T5]] + [x[S3] + R\cos(\theta(t) + theta[0]) + x[45], y[S3], z[S3] + R\sin(\theta(t) + theta[0]) + z[45]] \tag{1.9}$$

Polohový vektor souřadného systému **o[6]** (druhý rám), v souřadném systému **o[3].**

```
> `o[6]`(t):=simplify(evalm(`o[5]`(t)+evalm(inverse(`M[phi]`
  (t))
  &*vector(3,[`x[56]`,0,`z[56]`]))),trig);
```

$$o[6](t) := [x[S3] + R\cos(\theta(t) + theta[0]) + x[45] + \cos(\phi(t))\, x[56] + \sin(\phi(t))\, z[56], y[S3], z[S3] + R\sin(\theta(t) + theta[0]) + z[45] - \sin(\phi(t))\, x[56] + \cos(\phi(t))\, z[56]] \tag{1.10}$$

Polohový vektor souřadného systému **o[T6]** (těžiště druhého rámu), v souřadném systému **o[6].**

```
> `o[T6]`:=simplify(evalm(evalm(inverse(`M[phi]`(t))&*
  inverse(`M[psi]`(t)))&*vector(3,[`x[T6]`,`y[T6]`,`z[T6]`]))
  ,trig);
```

$$o[T6] := [\cos(\phi(t))\, x[T6] + \sin(\phi(t))\sin(\psi(t))\, y[T6] + \sin(\phi(t))\cos(\psi(t))\, z[T6], \cos(\psi(t))\, y[T6] - \sin(\psi(t))\, z[T6], -\sin(\phi(t))\, x[T6] + \cos(\phi(t))\sin(\psi(t))\, y[T6] + \cos(\phi(t))\cos(\psi(t))\, z[T6]] \tag{1.11}$$

Polohový vektor o[7] v souřadném systému **o[6].**

```
>
```

Polohový vektor souřadného systému o[T6] (těžiště druhého rámu), v souřadném systému **o[3].**

```
> `o[T63]`:=evalm(`o[T6]`+`o[6]`(t));
```

$$o[T63] := [\cos(\phi(t))\, x[T6] + \sin(\phi(t))\sin(\psi(t))\, y[T6] + \sin(\phi(t))\cos(\psi(t))\, z[T6] + x[S3] + R\cos(\theta(t) + theta[0]) + x[45] + \cos(\phi(t))\, x[56] + \sin(\phi(t))\, z[56], \cos(\psi(t))\, y[T6] - \sin(\psi(t))\, z[T6] + y[S3], -\sin(\phi(t))\, x[T6] + \cos(\phi(t))\sin(\psi(t))\, y[T6] + \cos(\phi(t))\cos(\psi(t))\, z[T6] + z[S3] + R\sin(\theta(t) + theta[0]) + z[45] - \sin(\phi(t))\, x[56] + \cos(\phi(t))\, z[56]] \tag{1.12}$$

Relativní rychlosti

Vektor relativní rychlosti vo[4] souřadného systému o[4] vzhledem k souřadném systému **o[3].**

```
> `vo[4]`:=vector(3,[diff(`o[4]`(t)[1],t),diff(`o[4]`(t)[2],t),
  diff(`o[4]`(t)[3],t)]);
```

$$vo[4] := \left[\begin{array}{ccc} -R\sin(\theta(t)+theta[0])\left(\frac{d}{dt}\theta(t)\right) & 0 & R\cos(\theta(t)+theta[0])\left(\frac{d}{dt}\theta(t)\right)\end{array}\right] \quad (2.1)$$

Vektor relativní rychlosti vo[5] souřadného systému o[5] vzhledem k souřadném systému **o[3].**

```
> `vo[5]`:=vector(3,[diff(`o[5]`(t)[1],t),diff(`o[5]`(t)[2],t),
  diff(`o[5]`(t)[3],t)]);
```

$$vo[5] := \left[\begin{array}{ccc} -R\sin(\theta(t)+theta[0])\left(\frac{d}{dt}\theta(t)\right) & 0 & R\cos(\theta(t)+theta[0])\left(\frac{d}{dt}\theta(t)\right)\end{array}\right] \quad (2.2)$$

Vektor relativní rychlosti vo[6] souřadného systému o[6] vzhledem k souřadném systému **o[3].**

```
> `vo[6]`:=vector(3,[diff(`o[6]`(t)[1],t),diff(`o[6]`(t)[2],t),
  diff(`o[6]`(t)[3],t)]);
```

$$vo[6] := \Big[-R\sin(\theta(t)+theta[0])\left(\frac{d}{dt}\theta(t)\right)-\sin(\phi(t))\left(\frac{d}{dt}\phi(t)\right)x[56] + \cos(\phi(t))\left(\frac{d}{dt}\phi(t)\right)z[56], 0, R\cos(\theta(t)+theta[0])\left(\frac{d}{dt}\theta(t)\right) - \cos(\phi(t))\left(\frac{d}{dt}\phi(t)\right)x[56]-\sin(\phi(t))\left(\frac{d}{dt}\phi(t)\right)z[56]\Big] \quad (2.3)$$

Úhlové rychlosti

Vektor úhlové rychlosti

```
> `Omega[alpha]`:=vector(3,[diff(alpha(t),t),0,0]);
```

$$Omega[alpha] := \left[\frac{d}{dt}\alpha(t) \quad 0 \quad 0 \right] \tag{3.1}$$

Vektor úhlové rychlosti

```
> `Omega[beta]`:=vector(3,[0,diff(beta(t),t),0]);
```

$$Omega[beta] := \left[0 \quad \frac{d}{dt}\beta(t) \quad 0 \right] \tag{3.2}$$

Vektor úhlové rychlosti

```
> `Omega[phi]`:=vector(3,[0,diff(phi(t),t),0]);
```

$$Omega[phi] := \left[0 \quad \frac{d}{dt}\phi(t) \quad 0 \right] \tag{3.3}$$

Vektor úhlové rychlosti

```
> `Omega[psi]`:=vector(3,[diff(psi(t),t),0,0]);
```

$$Omega[psi] := \left[\frac{d}{dt}\psi(t) \quad 0 \quad 0 \right] \tag{3.4}$$

Vektor úhlové rychlosti

```
>
```

Vektor úhlové rychlosti Omega[3] (rotace souřadného systému **o[3]** kolem kolem souřadného systému **o**).

```
> `Omega[3]`:=evalm(`M[beta]`(t)&*`Omega[alpha]`
  +`Omega[beta]`);
```

$$Omega[3] := \left[\cos(\beta(t)) \left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right) \quad \frac{d}{dt}\beta(t) \quad \sin(\beta(t)) \left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right) \right] \tag{3.5}$$

Vektor úhlové rychlosti Omega[4] (rotace souřadného systému **o[4]** vzhledem k souřadnému systému **o**).

```
> `Omega[4]`:=evalm(`Omega[3]`):
```

Vektor úhlové rychlosti Omega[5] (rotace souřadného systému **o[5]** vzhledem k souřadnému systému **o**).

```
> `Omega[5]`:=simplify(evalm(`M[phi]`(t)&*`Omega[4]`+`Omega
  [phi]`),trig);
```

$$Omega[5] := \left[\left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right) (\cos(\phi(t))\cos(\beta(t)) - \sin(\phi(t))\sin(\beta(t))), \frac{d}{dt}\beta(t) + \frac{d}{dt}\phi(t), \left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right) (\sin(\phi(t))\cos(\beta(t)) + \cos(\phi(t))\sin(\beta(t))) \right] \tag{3.6}$$

Vektor úhlové rychlosti Omega[6] (rotace souřadného systému **o[6]** vzhledem k souřadnému systému **o**).

```
> `Omega[6]`:=simplify(evalm(`M[psi]`(t)&*`Omega[5]`+`Omega[psi]`),trig);
```

$$Omega[6] := \left[\cos(\phi(t))\cos(\beta(t))\left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right) - \sin(\phi(t))\sin(\beta(t))\left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right) + \frac{d}{dt}\psi(t), \cos(\psi(t))\left(\frac{d}{dt}\beta(t)\right) + \cos(\psi(t))\left(\frac{d}{dt}\phi(t)\right) + \sin(\psi(t))\left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right)\sin(\phi(t))\cos(\beta(t)) + \sin(\psi(t))\left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right)\cos(\phi(t))\sin(\beta(t)), -\sin(\psi(t))\left(\frac{d}{dt}\beta(t)\right) - \sin(\psi(t))\left(\frac{d}{dt}\phi(t)\right) + \cos(\psi(t))\left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right)\sin(\phi(t))\cos(\beta(t)) + \cos(\psi(t))\left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right)\cos(\phi(t))\sin(\beta(t))\right] \tag{3.7}$$

Vektor úhlové rychlosti Omega[53] (rotace souřadného systému **o[5]** vzhledem k souřadnému systému **o[3]**).

```
> `Omega[53]`:=simplify(evalm(inverse(`M[phi]`(t))&*`Omega[5]`));
```

$$Omega[53] := \left[\begin{array}{ccc} \cos(\beta(t))\left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right) & \frac{d}{dt}\beta(t) + \frac{d}{dt}\phi(t) & \sin(\beta(t))\left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right) \end{array}\right] \tag{3.8}$$

Vektor úhlové rychlosti Omega[63] (rotace souřadného systému **o[6]** vzhledem k souřadnému systému **o[3]**).

```
> `Omega[63]`:=simplify(evalm(inverse(`M[phi]`(t))&*inverse(`M[psi]`(t))&*`Omega[6]`));
```

$$Omega[63] := \left[\cos(\phi(t))\left(\frac{d}{dt}\psi(t)\right) + \cos(\beta(t))\left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right), \frac{d}{dt}\beta(t) + \frac{d}{dt}\phi(t), -\sin(\phi(t))\left(\frac{d}{dt}\psi(t)\right) + \sin(\beta(t))\left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right)\right] \tag{3.9}$$

Výsledné rychlosti

Výsledná rychlost středu dolní základny paralelogramu (bodu **S**).

```
> `uS[3]`:=evalm(vector(3,[diff(`o[3]`(t)[1],t),diff(`o[3]`
  (t)[2]
  ,t),diff(`o[3]`(t)[3],t)])
  +crossprod(`Omega[3]`,vector(3,[`x[S3]`,`y[S3]`,`z[S3]`])))
  ;
```

$$
\begin{aligned}
uS[3] := \Big[& -\cos(\beta(t)) \left(\frac{d}{dt}\beta(t)\right)\cos(\alpha(t))\,\zeta(t) \\
& + \sin(\beta(t))\sin(\alpha(t))\left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right)\zeta(t) - \sin(\beta(t))\cos(\alpha(t))\left(\frac{d}{dt}\zeta(t)\right) \\
& + \left(\frac{d}{dt}\beta(t)\right) z[S3] - \sin(\beta(t))\left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right) y[S3],\ \cos(\alpha(t))\left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right)\zeta(t) \\
& + \sin(\alpha(t))\left(\frac{d}{dt}\zeta(t)\right) + \sin(\beta(t))\left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right) x[S3] \\
& - \cos(\beta(t))\left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right) z[S3],\ -\sin(\beta(t))\left(\frac{d}{dt}\beta(t)\right)\cos(\alpha(t))\,\zeta(t) \\
& - \cos(\beta(t))\sin(\alpha(t))\left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right)\zeta(t) + \cos(\beta(t))\cos(\alpha(t))\left(\frac{d}{dt}\zeta(t)\right) \\
& + \cos(\beta(t))\left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right) y[S3] - \left(\frac{d}{dt}\beta(t)\right) x[S3] \Big]
\end{aligned} \tag{4.1}
$$

Výsledná rychlost i-tého uložení ramene paralelogramu.

```
> `u[c3]`[i]:=evalm(vector(3,[diff(`o[3]`(t)[1],t),diff(`o[3]
  `(t)[2],t),
  diff(`o[3]`(t)[3],t)])+crossprod(`Omega[3]`,vector(3,[`x[C]
  `[i]
  ,`y[C]`[i],`z[C]`[i]])));
```

$$
\begin{aligned}
u[c3]_i := \Big[& -\cos(\beta(t)) \left(\frac{d}{dt}\beta(t)\right)\cos(\alpha(t))\,\zeta(t) \\
& + \sin(\beta(t))\sin(\alpha(t))\left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right)\zeta(t) - \sin(\beta(t))\cos(\alpha(t))\left(\frac{d}{dt}\zeta(t)\right) \\
& + \left(\frac{d}{dt}\beta(t)\right) z[C]_i - \sin(\beta(t))\left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right) y[C]_i,\ \cos(\alpha(t))\left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right)\zeta(t) \\
& + \sin(\alpha(t))\left(\frac{d}{dt}\zeta(t)\right) + \sin(\beta(t))\left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right) x[C]_i \\
& - \cos(\beta(t))\left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right) z[C]_i,\ -\sin(\beta(t))\left(\frac{d}{dt}\beta(t)\right)\cos(\alpha(t))\,\zeta(t) \\
& - \cos(\beta(t))\sin(\alpha(t))\left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right)\zeta(t) + \cos(\beta(t))\cos(\alpha(t))\left(\frac{d}{dt}\zeta(t)\right) \\
& + \cos(\beta(t))\left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right) y[C]_i - \left(\frac{d}{dt}\beta(t)\right) x[C]_i \Big]
\end{aligned} \tag{4.2}
$$

Výsledná rychlost středu horního rámu paralelogramu (bodu **o[4]**).

```
> `u[4]`:=evalm(`uS[3]`+crossprod(`Omega[3]`,vector(3,[R*cos(theta(t)+`theta[0]`),0,R*sin(theta(t)+`theta[0]`)]))+vector(3,[diff(R*cos(theta(t)+`theta[0]`),t),0,diff(R*sin(theta(t)+`theta[0]`),t)]));
```

$$u[4] := \Big[-\cos(\beta(t)) \left(\frac{d}{dt}\beta(t)\right)\cos(\alpha(t))\,\zeta(t) + \sin(\beta(t))\sin(\alpha(t))\left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right)\zeta(t) - \sin(\beta(t))\cos(\alpha(t))\left(\frac{d}{dt}\zeta(t)\right) + \left(\frac{d}{dt}\beta(t)\right) z[S3] - \sin(\beta(t))\left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right) y[S3] + \left(\frac{d}{dt}\beta(t)\right) R\sin(\theta(t) + theta[0]) - R\sin(\theta(t)+theta[0])\left(\frac{d}{dt}\theta(t)\right),\ \cos(\alpha(t))\left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right)\zeta(t) + \sin(\alpha(t))\left(\frac{d}{dt}\zeta(t)\right) + \sin(\beta(t))\left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right) x[S3] - \cos(\beta(t))\left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right) z[S3] + \sin(\beta(t))\left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right) R\cos(\theta(t)+theta[0]) - \cos(\beta(t))\left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right) R\sin(\theta(t)+theta[0]),\ -\sin(\beta(t))\left(\frac{d}{dt}\beta(t)\right)\cos(\alpha(t))\,\zeta(t) - \cos(\beta(t))\sin(\alpha(t))\left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right)\zeta(t) + \cos(\beta(t))\cos(\alpha(t))\left(\frac{d}{dt}\zeta(t)\right) + \cos(\beta(t))\left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right) y[S3] - \left(\frac{d}{dt}\beta(t)\right) x[S3] - \left(\frac{d}{dt}\beta(t)\right) R\cos(\theta(t)+theta[0]) + R\cos(\theta(t)+theta[0])\left(\frac{d}{dt}\theta(t)\right)\Big] \tag{4.3}$$

Výsledná rychlost prvního rámu (bodu **o[5]**).

```
> `u[5]`:=evalm(`u[4]`+crossprod(`Omega[4]`,vector(3,[`x[45]`,0,`z[45]`])));
```

$$u[5] := \Big[-\cos(\beta(t)) \left(\frac{d}{dt}\beta(t)\right)\cos(\alpha(t))\,\zeta(t) + \sin(\beta(t))\sin(\alpha(t))\left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right)\zeta(t) - \sin(\beta(t))\cos(\alpha(t))\left(\frac{d}{dt}\zeta(t)\right) + \left(\frac{d}{dt}\beta(t)\right) z[S3] - \sin(\beta(t))\left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right) y[S3] + \left(\frac{d}{dt}\beta(t)\right) R\sin(\theta(t) + theta[0]) - R\sin(\theta(t)+theta[0])\left(\frac{d}{dt}\theta(t)\right) + \left(\frac{d}{dt}\beta(t)\right) z[45],\ \cos(\alpha(t))\left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right)\zeta(t) + \sin(\alpha(t))\left(\frac{d}{dt}\zeta(t)\right) + \sin(\beta(t))\left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right) x[S3] - \cos(\beta(t))\left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right) z[S3] + \sin(\beta(t))\left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right) R\cos(\theta(t)+theta[0]) - \cos(\beta(t))\left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right) R\sin(\theta(t)+theta[0]) + \sin(\beta(t))\left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right) x[45] - \cos(\beta(t))\left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right) z[45],\ -\sin(\beta(t))\left(\frac{d}{dt}\beta(t)\right)\cos(\alpha(t))\,\zeta(t) \tag{4.4}$$

$$-\cos(\beta(t))\sin(\alpha(t))\left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right)\zeta(t)+\cos(\beta(t))\cos(\alpha(t))\left(\frac{d}{dt}\zeta(t)\right)$$
$$+\cos(\beta(t))\left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right)y[S3]-\left(\frac{d}{dt}\beta(t)\right)x[S3]-\left(\frac{d}{dt}\beta(t)\right)R\cos(\theta(t)$$
$$+theta[0])+R\cos(\theta(t)+theta[0])\left(\frac{d}{dt}\theta(t)\right)-\left(\frac{d}{dt}\beta(t)\right)x[45]\Big]$$

Výsledná rychlost druhého rámu (bodu **o[6]**).

```
> `u[6]`:=evalm(`u[5]`+crossprod(`Omega[5]`,vector(3,[`x[56]`,0,`z[56]`])));
```

$$u[6]:=\Big[-\cos(\beta(t))\left(\frac{d}{dt}\beta(t)\right)\cos(\alpha(t))\zeta(t) \tag{4.5}$$
$$+\sin(\beta(t))\sin(\alpha(t))\left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right)\zeta(t)-\sin(\beta(t))\cos(\alpha(t))\left(\frac{d}{dt}\zeta(t)\right)$$
$$+\left(\frac{d}{dt}\beta(t)\right)z[S3]-\sin(\beta(t))\left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right)y[S3]+\left(\frac{d}{dt}\beta(t)\right)R\sin(\theta(t)$$
$$+theta[0])-R\sin(\theta(t)+theta[0])\left(\frac{d}{dt}\theta(t)\right)+\left(\frac{d}{dt}\beta(t)\right)z[45]$$
$$+\left(\frac{d}{dt}\beta(t)+\frac{d}{dt}\phi(t)\right)z[56],\cos(\alpha(t))\left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right)\zeta(t)$$
$$+\sin(\alpha(t))\left(\frac{d}{dt}\zeta(t)\right)+\sin(\beta(t))\left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right)x[S3]$$
$$-\cos(\beta(t))\left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right)z[S3]+\sin(\beta(t))\left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right)R\cos(\theta(t)+theta[0])$$
$$-\cos(\beta(t))\left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right)R\sin(\theta(t)+theta[0])+\sin(\beta(t))\left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right)x[45]$$
$$-\cos(\beta(t))\left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right)z[45]+\left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right)(\sin(\phi(t))\cos(\beta(t))$$
$$+\cos(\phi(t))\sin(\beta(t)))x[56]-\left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right)(\cos(\phi(t))\cos(\beta(t))$$
$$-\sin(\phi(t))\sin(\beta(t)))z[56],-\sin(\beta(t))\left(\frac{d}{dt}\beta(t)\right)\cos(\alpha(t))\zeta(t)$$
$$-\cos(\beta(t))\sin(\alpha(t))\left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right)\zeta(t)+\cos(\beta(t))\cos(\alpha(t))\left(\frac{d}{dt}\zeta(t)\right)$$
$$+\cos(\beta(t))\left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right)y[S3]-\left(\frac{d}{dt}\beta(t)\right)x[S3]-\left(\frac{d}{dt}\beta(t)\right)R\cos(\theta(t)$$
$$+theta[0])+R\cos(\theta(t)+theta[0])\left(\frac{d}{dt}\theta(t)\right)-\left(\frac{d}{dt}\beta(t)\right)x[45]$$
$$-\left(\frac{d}{dt}\beta(t)+\frac{d}{dt}\phi(t)\right)x[56]\Big]$$

```
>
```

Relativní rychlost těžiště druhého rámu lehátka (bodu **o[T5]** vzhledem k bodu **o[3]**).

```
> `v[TS[6]]`:=simplify(crossprod(`Omega[63]`,`o[T6]`));
```

$$v[TS[6]]:=\Big[-\left(\frac{d}{dt}\beta(t)\right)\sin(\phi(t))x[T6]+\left(\frac{d}{dt}\beta(t)\right)\cos(\phi(t))\sin(\psi(t))y[T6] \tag{1}$$
$$+\left(\frac{d}{dt}\beta(t)\right)\cos(\phi(t))\cos(\psi(t))z[T6]-\left(\frac{d}{dt}\phi(t)\right)\sin(\phi(t))x[T6]$$
$$+\left(\frac{d}{dt}\phi(t)\right)\cos(\phi(t))\sin(\psi(t))y[T6]+\left(\frac{d}{dt}\phi(t)\right)\cos(\phi(t))\cos(\psi(t))z[T6]$$

$$+\sin(\phi(t))\left(\frac{d}{dt}\psi(t)\right)\cos(\psi(t))\,y[T6]-\sin(\phi(t))\left(\frac{d}{dt}\psi(t)\right)\sin(\psi(t))\,z[T6]$$
$$-\left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right)\sin(\beta(t))\cos(\psi(t))\,y[T6]+\left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right)\sin(\beta(t))\sin(\psi(t))\,z[T6],$$
$$-\left(\frac{d}{dt}\psi(t)\right)\sin(\psi(t))\,y[T6]-\left(\frac{d}{dt}\psi(t)\right)\cos(\psi(t))\,z[T6]$$
$$+\left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right)\sin(\beta(t))\cos(\phi(t))\,x[T6]$$
$$+\left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right)\sin(\beta(t))\sin(\phi(t))\sin(\psi(t))\,y[T6]$$
$$+\left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right)\sin(\beta(t))\sin(\phi(t))\cos(\psi(t))\,z[T6]$$
$$+\cos(\beta(t))\left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right)\sin(\phi(t))\,x[T6]$$
$$-\cos(\beta(t))\left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right)\cos(\phi(t))\sin(\psi(t))\,y[T6]$$
$$-\cos(\beta(t))\left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right)\cos(\phi(t))\cos(\psi(t))\,z[T6],$$
$$\cos(\phi(t))\left(\frac{d}{dt}\psi(t)\right)\cos(\psi(t))\,y[T6]-\cos(\phi(t))\left(\frac{d}{dt}\psi(t)\right)\sin(\psi(t))\,z[T6]$$
$$+\cos(\beta(t))\left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right)\cos(\psi(t))\,y[T6]-\cos(\beta(t))\left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right)\sin(\psi(t))\,z[T6]$$
$$-\left(\frac{d}{dt}\beta(t)\right)\cos(\phi(t))\,x[T6]-\left(\frac{d}{dt}\beta(t)\right)\sin(\phi(t))\sin(\psi(t))\,y[T6]$$
$$-\left(\frac{d}{dt}\beta(t)\right)\sin(\phi(t))\cos(\psi(t))\,z[T6]-\left(\frac{d}{dt}\phi(t)\right)\cos(\phi(t))\,x[T6]$$
$$-\left(\frac{d}{dt}\phi(t)\right)\sin(\phi(t))\sin(\psi(t))\,y[T6]-\left(\frac{d}{dt}\phi(t)\right)\sin(\phi(t))\cos(\psi(t))\,z[T6]\Big]$$

Relativní rychlost těžiště prvního rámu lehátka (bodu **o[T6]** vzhledem k bodu **o[3]**).

```
> `v[TS[5]]`:=simplify(crossprod(`Omega[53]`,`o[T5]`(t)));
```

$$v[TS[5]]:=\Big[-\left(\frac{d}{dt}\beta(t)\right)\sin(\phi(t))\,x[T5]+\left(\frac{d}{dt}\beta(t)\right)\cos(\phi(t))\,z[T5] \tag{2}$$
$$-\left(\frac{d}{dt}\phi(t)\right)\sin(\phi(t))\,x[T5]+\left(\frac{d}{dt}\phi(t)\right)\cos(\phi(t))\,z[T5]$$
$$-\sin(\beta(t))\left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right)y[T5],\left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right)\big(\sin(\beta(t))\cos(\phi(t))\,x[T5]$$
$$+\sin(\beta(t))\sin(\phi(t))\,z[T5]+\cos(\beta(t))\sin(\phi(t))\,x[T5]$$
$$-\cos(\beta(t))\cos(\phi(t))\,z[T5]\big),\cos(\beta(t))\left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right)y[T5]$$
$$-\left(\frac{d}{dt}\beta(t)\right)\cos(\phi(t))\,x[T5]-\left(\frac{d}{dt}\beta(t)\right)\sin(\phi(t))\,z[T5]$$
$$-\left(\frac{d}{dt}\phi(t)\right)\cos(\phi(t))\,x[T5]-\left(\frac{d}{dt}\phi(t)\right)\sin(\phi(t))\,z[T5]\Big]$$

Kinetické a potenciální energie

Kinetická energie horní základny

```
> `T[11]`:=simplify(1/2*`m[4]`*((`u[4]`[1])^2+(`u[4]`[2])
^2+(`u[4]`[3])^2)):
> `T[12]`:=0:
> `T[13]`:=1/2*(`J4[x]`*`Omega[3]`[1]^2+`J4[y]`*`Omega[3]`
[2]^2
+`J4[z]`*`Omega[3]`[3]^2):
> `T[1]`:=`T[11]`+`T[13]`:
```

Kinetická energie prvního rámu

```
> `T[21]`:=simplify(1/2*`m[5]`*((`u[5]`[1])^2+(`u[5]`[2])
^2+(`u[5]`[3])^2)):
> `T[22]`:=`m[5]`*(`vo[5]`[1]*`v[TS[5]]`[1]+`vo[5]`[2]*`v
[TS[5]]`[2]+`vo[5]`[3]*`v[TS[5]]`[3]):
> `T[23]`:=1/2*(`J5[x]`*`Omega[5]`[1]^2+`J5[y]`*`Omega[5]`
[2]^2+`J5[z]`
*`Omega[5]`[3]^2-2*`D5[xy]`*`Omega[5]`[1]*`Omega[5]`[2]-
2*`D5[yz]`*`Omega[5]`[2]*`Omega[5]`[3]-2*`D5[xz]`*`Omega
[5]`[1]*`Omega[5]`[3]):
> `T[2]`:=`T[21]`+`T[22]`+`T[23]`:
```

Kinetická energie druhého rámu

```
> `T[31]`:=simplify(1/2*`m[6]`*((`u[6]`[1])^2+(`u[6]`[2])
^2+(`u[6]`[3])^2)):
> `T[32]`:=`m[6]`*simplify(`vo[6]`[1]*`v[TS[6]]`[1]+`vo[6]`
[2]*`v[TS[6]]`[2]+`vo[6]`[3]*`v[TS[6]]`[3],trig):
> `T[33]`:=1/2*(`J6[x]`*`Omega[6]`[1]^2+`J6[y]`*`Omega[6]`
[2]^2+`J6[z]`*
`Omega[6]`[3]^2-2*`D6[xy]`*`Omega[6]`[1]*`Omega[6]`[2]-
2*`D6[yz]`*`Omega[6]`[2]*`Omega[6]`[3]-2*`D6[xz]`*`Omega
[6]`[1]*`Omega[6]`[3]):
> `T[3]`:=`T[31]`+`T[32]`+`T[33]`:
```

Kinetická energie ramen

```
> `T[41]`:=1/2*`m[R]`*evalm(sum((`u[c3]`[i][1]+`vo[T3]`[i]
(t)[1])^2+(`u[c3]`[i][2]+`vo[T3]`[i](t)[2])^2+(`u[c3]`[i]
[3]+`vo[T3]`[i](t)[3])^2,i=1..4)):
> `T[42]`:=0:
> `T[43]`:=1/2*(`JR[x]`*`Omega[3]`[1]^2+`JR[y]`*(`Omega[3]`
[2]+
diff(theta(t),t))^2+`JR[z]`*`Omega[3]`[3]^2):
> `T[4]`:=evalm(`T[41]`+4*`T[43]`):
```

Potenciální energie tíhových sil (v absolutní soustavě)

```
> `U[4]`:=`m[4]`*g*(simplify(evalm(inverse(`M[alpha]`(t))&*
inverse(`M[beta]`(t))&*`o[4]`(t)+vector(3,[0,0,zeta(t)]))
,trig))[3];
`U[5]`:=`m[5]`*g*(simplify(evalm(inverse(`M[alpha]`(t))&*
inverse(`M[beta]`(t))&*`o[T53]`(t)+vector(3,[0,0,zeta(t)]
)),trig))[3];
`U[6]`:=`m[6]`*g*(simplify(evalm(inverse(`M[alpha]`(t))&*
inverse(`M[beta]`(t))&*`o[T63]`+vector(3,[0,0,zeta(t)])),
trig))[3];
U:=`U[4]`+`U[5]`+`U[6]`;
```

$$U[4] := m[4]\, g\, \big(-\cos(\alpha(t))\sin(\beta(t))\, x[S3] - \cos(\alpha(t))\sin(\beta(t))\, R\cos(\theta(t) + theta[0]) + \sin(\alpha(t))\, y[S3] + \cos(\alpha(t))\cos(\beta(t))\, z[S3] + \cos(\alpha(t))\cos(\beta(t))\, R\sin(\theta(t) + theta[0]) + \zeta(t)\big) \tag{5.5.1}$$

$$U[5] := m[5]\, g\, \big(\sin(\alpha(t))\, y[T5] + \zeta(t) + \sin(\alpha(t))\, y[S3] - \cos(\alpha(t))\sin(\beta(t))\cos(\phi(t))\, x[T5] - \cos(\alpha(t))\sin(\beta(t))\sin(\phi(t))\, z[T5] - \cos(\alpha(t))\cos(\beta(t))\sin(\phi(t))\, x[T5] + \cos(\alpha(t))\cos(\beta(t))\cos(\phi(t))\, z[T5] - \cos(\alpha(t))\sin(\beta(t))\, x[45] + \cos(\alpha(t))\cos(\beta(t))\, z[45] - \cos(\alpha(t))\sin(\beta(t))\, x[S3] + \cos(\alpha(t))\cos(\beta(t))\, z[S3] - \cos(\alpha(t))\sin(\beta(t))\, R\cos(\theta(t) + theta[0]) + \cos(\alpha(t))\cos(\beta(t))\, R\sin(\theta(t) + theta[0])\big)$$

$$U[6] := m[6]\, g\, \big(\sin(\alpha(t))\cos(\psi(t))\, y[T6] - \sin(\alpha(t))\sin(\psi(t))\, z[T6] + \zeta(t) + \sin(\alpha(t))\, y[S3] - \cos(\alpha(t))\sin(\beta(t))\cos(\phi(t))\, x[T6] - \cos(\alpha(t))\sin(\beta(t))\cos(\phi(t))\, x[56] - \cos(\alpha(t))\sin(\beta(t))\sin(\phi(t))\, z[56] - \cos(\alpha(t))\cos(\beta(t))\sin(\phi(t))\, x[T6] - \cos(\alpha(t))\cos(\beta(t))\sin(\phi(t))\, x[56] + \cos(\alpha(t))\cos(\beta(t))\cos(\phi(t))\, z[56] - \cos(\alpha(t))\sin(\beta(t))\, x[45] + \cos(\alpha(t))\cos(\beta(t))\, z[45] - \cos(\alpha(t))\sin(\beta(t))\, x[S3] + \cos(\alpha(t))\cos(\beta(t))\, z[S3] - \cos(\alpha(t))\sin(\beta(t))\sin(\phi(t))\sin(\psi(t))\, y[T6] - \cos(\alpha(t))\sin(\beta(t))\sin(\phi(t))\cos(\psi(t))\, z[T6] + \cos(\alpha(t))\cos(\beta(t))\cos(\phi(t))\sin(\psi(t))\, y[T6] + \cos(\alpha(t))\cos(\beta(t))\cos(\phi(t))\cos(\psi(t))\, z[T6] - \cos(\alpha(t))\sin(\beta(t))\, R\cos(\theta(t) + theta[0]) + \cos(\alpha(t))\cos(\beta(t))\, R\sin(\theta(t) + theta[0])\big)$$

$$U := m[4]\, g\, \big(-\cos(\alpha(t))\sin(\beta(t))\, x[S3] - \cos(\alpha(t))\sin(\beta(t))\, R\cos(\theta(t) + theta[0]) + \sin(\alpha(t))\, y[S3] + \cos(\alpha(t))\cos(\beta(t))\, z[S3] + \cos(\alpha(t))\cos(\beta(t))\, R\sin(\theta(t) + theta[0]) + \zeta(t)\big) + m[5]\, g\, \big(\sin(\alpha(t))\, y[T5] + \zeta(t) + \sin(\alpha(t))\, y[S3] - \cos(\alpha(t))\sin(\beta(t))\cos(\phi(t))\, x[T5] - \cos(\alpha(t))\sin(\beta(t))\sin(\phi(t))\, z[T5]$$

$$-\cos(\alpha(t))\cos(\beta(t))\sin(\phi(t))\,x[T5]$$
$$+\cos(\alpha(t))\cos(\beta(t))\cos(\phi(t))\,z[T5]-\cos(\alpha(t))\sin(\beta(t))\,x[45]$$
$$+\cos(\alpha(t))\cos(\beta(t))\,z[45]-\cos(\alpha(t))\sin(\beta(t))\,x[S3]$$
$$+\cos(\alpha(t))\cos(\beta(t))\,z[S3]-\cos(\alpha(t))\sin(\beta(t))\,R\cos(\theta(t)+theta[0])$$
$$+\cos(\alpha(t))\cos(\beta(t))\,R\sin(\theta(t)+theta[0]))$$
$$+m[6]\,g\,(\sin(\alpha(t))\cos(\psi(t))\,y[T6]-\sin(\alpha(t))\sin(\psi(t))\,z[T6]+\zeta(t)$$
$$+\sin(\alpha(t))\,y[S3]-\cos(\alpha(t))\sin(\beta(t))\cos(\phi(t))\,x[T6]$$
$$-\cos(\alpha(t))\sin(\beta(t))\cos(\phi(t))\,x[56]$$
$$-\cos(\alpha(t))\sin(\beta(t))\sin(\phi(t))\,z[56]$$
$$-\cos(\alpha(t))\cos(\beta(t))\sin(\phi(t))\,x[T6]$$
$$-\cos(\alpha(t))\cos(\beta(t))\sin(\phi(t))\,x[56]$$
$$+\cos(\alpha(t))\cos(\beta(t))\cos(\phi(t))\,z[56]-\cos(\alpha(t))\sin(\beta(t))\,x[45]$$
$$+\cos(\alpha(t))\cos(\beta(t))\,z[45]-\cos(\alpha(t))\sin(\beta(t))\,x[S3]$$
$$+\cos(\alpha(t))\cos(\beta(t))\,z[S3]$$
$$-\cos(\alpha(t))\sin(\beta(t))\sin(\phi(t))\sin(\psi(t))\,y[T6]$$
$$-\cos(\alpha(t))\sin(\beta(t))\sin(\phi(t))\cos(\psi(t))\,z[T6]$$
$$+\cos(\alpha(t))\cos(\beta(t))\cos(\phi(t))\sin(\psi(t))\,y[T6]$$
$$+\cos(\alpha(t))\cos(\beta(t))\cos(\phi(t))\cos(\psi(t))\,z[T6]$$
$$-\cos(\alpha(t))\sin(\beta(t))\,R\cos(\theta(t)+theta[0])$$
$$+\cos(\alpha(t))\cos(\beta(t))\,R\sin(\theta(t)+theta[0]))$$

Potenciální energie ramen

```
> `U[R4]`:=`m[R]`*g*sum((simplify(evalm(inverse(`M[alpha]`(t))&*
inverse(`M[beta]`(t))&*`o[T3]`[i](t)+vector(3,[0,0,zeta(t)]))
,trig))[3],i=1..4);
```

$$U[R4]:=m[R]\,g\,(-\cos(\alpha(t))\sin(\beta(t))\,x[T3]_1 \tag{5.6.1}$$
$$-2\cos(\alpha(t))\sin(\beta(t))\,R\cos(\theta(t)+theta[0])+\sin(\alpha(t))\,y[T3]_1$$
$$+\cos(\alpha(t))\cos(\beta(t))\,z[T3]_1+2\cos(\alpha(t))\cos(\beta(t))\,R\sin(\theta(t)+theta[0])$$
$$+4\,\zeta(t)-\cos(\alpha(t))\sin(\beta(t))\,x[T3]_2+\sin(\alpha(t))\,y[T3]_2$$
$$+\cos(\alpha(t))\cos(\beta(t))\,z[T3]_2-\cos(\alpha(t))\sin(\beta(t))\,x[T3]_3$$
$$+\sin(\alpha(t))\,y[T3]_3+\cos(\alpha(t))\cos(\beta(t))\,z[T3]_3$$
$$-\cos(\alpha(t))\sin(\beta(t))\,x[T3]_4+\sin(\alpha(t))\,y[T3]_4$$
$$+\cos(\alpha(t))\cos(\beta(t))\,z[T3]_4)$$

Lagrangeovy rovnice

Derivace kinetických a potenciálních energií podle jedmotlivých souřadnic

Derivace kinetických energií podle θ

```
> T1: =subs( di f f ( t het a( t ) , t ) =P, t het a( t ) =e, ` T[ 1] ` ) :
> TT1: =di f f ( T1, e) :
> TTT1: =subs( P=di f f ( t het a( t ) , t ) , e=t het a( t ) , TT1) :
> DT1_t het a: =TTT1:
> unassi gn( ' P' , ' e' ) ;
> T2: =subs( di f f ( t het a( t ) , t ) =P, t het a( t ) =e, ` T[ 2] ` ) :
> TT2: =di f f ( T2, e) :
> TTT2: =subs( P=di f f ( t het a( t ) , t ) , e=t het a( t ) , TT2) :
> DT2_t het a: =TTT2:
> unassi gn( ' P' , ' e' ) ;
> T3: =subs( di f f ( t het a( t ) , t ) =P, t het a( t ) =e, ` T[ 3] ` ) :
> TT3: =di f f ( T3, e) :
> TTT3: =subs( P=di f f ( t het a( t ) , t ) , e=t het a( t ) , TT3) :
> DT3_t het a: =TTT3:
> unassi gn( ' P' , ' e' ) :
> T4: =subs( di f f ( t het a( t ) , t ) =P, t het a( t ) =e, ` T[ 4] ` ) :
> TT4: =di f f ( T4, e) :
> TTT4: =subs( P=di f f ( t het a( t ) , t ) , e=t het a( t ) , TT4) :
> DT4_t het a: =TTT4:
> unassi gn( ' P' , ' e' ) :
> T7: =subs( di f f ( t het a( t ) , t ) =P, t het a( t ) =e, ` T[ 7] ` ) :
> TT7: =di f f ( T7, e) :
> TTT7: =subs( P=di f f ( t het a( t ) , t ) , e=t het a( t ) , TT7) :
> DT7_t het a: =TTT7:
> unassi gn( ' P' , ' e' ) :
> T8: =subs( di f f ( t het a( t ) , t ) =P, t het a( t ) =e, ` T[ 8] ` ) :
> TT8: =di f f ( T8, e) :
> TTT8: =subs( P=di f f ( t het a( t ) , t ) , e=t het a( t ) , TT8) :
> DT8_t het a: =TTT8:
> unassi gn( ' P' , ' e' ) :
```

Derivace kinetických energií podle ϕ

```
> T1:=subs(diff(phi(t),t)=P,phi(t)=e,`T[1]`):
> TT1:=diff(T1,e):
> TTT1:=subs(P=diff(phi(t),t),e=phi(t),TT1):
> DT1_phi:=TTT1:
> unassign('P','e');
> T2:=subs(diff(phi(t),t)=P,phi(t)=e,`T[2]`):
> TT2:=diff(T2,e):
> TTT2:=subs(P=diff(phi(t),t),e=phi(t),TT2):
> DT2_phi:=TTT2:
> unassign('P','e');
> T3:=subs(diff(phi(t),t)=P,phi(t)=e,`T[3]`):
> TT3:=diff(T3,e):
> TTT3:=subs(P=diff(phi(t),t),e=phi(t),TT3):
> DT3_phi:=TTT3:
> unassign('P','e');
> T4:=subs(diff(phi(t),t)=P,phi(t)=e,`T[4]`):
> TT4:=diff(T1,e):
> TTT4:=subs(P=diff(phi(t),t),e=phi(t),TT4):
> DT4_phi:=TTT4:
> unassign('P','e');
> T7:=subs(diff(phi(t),t)=P,phi(t)=e,`T[7]`):
> TT7:=diff(T7,e):
> TTT7:=subs(P=diff(phi(t),t),e=phi(t),TT7):
> DT7_phi:=TTT7:
> unassign('P','e'):
> T8:=subs(diff(phi(t),t)=P,phi(t)=e,`T[8]`):
> TT8:=diff(T8,e):
> TTT8:=subs(P=diff(phi(t),t),e=phi(t),TT8):
> DT8_phi:=TTT8:
> unassign('P','e'):
```

Derivace kinetických energií podle ψ

```
> T1: =subs( di f f ( psi ( t ) , t ) =P, psi ( t ) =e, ` T[ 1] ` ) :
> TT1: =di f f ( T1, e) :
> TTT1: =subs( P=di f f ( psi ( t ) , t ) , e=psi ( t ) , TT1) :
> DT1_psi : =TTT1:
> unassi gn( ' P' , ' e' ) ;
> T2: =subs( di f f ( psi ( t ) , t ) =P, psi ( t ) =e, ` T[ 2] ` ) :
> TT2: =di f f ( T2, e) :
> TTT2: =subs( P=di f f ( psi ( t ) , t ) , e=psi ( t ) , TT2) :
> DT2_psi : =TTT2:
> unassi gn( ' P' , ' e' ) ;
> T3: =subs( di f f ( psi ( t ) , t ) =P, psi ( t ) =e, ` T[ 3] ` ) :
> TT3: =di f f ( T3, e) :
> TTT3: =subs( P=di f f ( psi ( t ) , t ) , e=psi ( t ) , TT3) :
> DT3_psi : =TTT3:
> unassi gn( ' P' , ' e' ) ;
> T4: =subs( di f f ( psi ( t ) , t ) =P, psi ( t ) =e, ` T[ 4] ` ) :
> TT4: =di f f ( T1, e) :
> TTT4: =subs( P=di f f ( psi ( t ) , t ) , e=psi ( t ) , TT4) :
> DT4_psi : =TTT4:
> unassi gn( ' P' , ' e' ) :
> T7: =subs( di f f ( psi ( t ) , t ) =P, psi ( t ) =e, ` T[ 7] ` ) :
> TT7: =di f f ( T7, e) :
> TTT7: =subs( P=di f f ( psi ( t ) , t ) , e=psi ( t ) , TT7) :
> DT7_psi : =TTT7:
> unassi gn( ' P' , ' e' ) :
> T8: =subs( di f f ( psi ( t ) , t ) =P, psi ( t ) =e, ` T[ 8] ` ) :
> TT8: =di f f ( T8, e) :
> TTT8: =subs( P=di f f ( psi ( t ) , t ) , e=psi ( t ) , TT8) :
> DT8_psi : =TTT8:
> unassi gn( ' P' , ' e' ) :
```

Derivace potenciálních energií podle θ

```
> U1:=subs(diff(theta(t),t)=P,theta(t)=e,`U[4]`):
> UU1:=diff(U1,e):
> UUU1:=subs(P=diff(theta(t),t),e=theta(t),UU1):
> DU1_theta:=UUU1:
> unassign('P','e');
> U2:=subs(diff(theta(t),t)=P,theta(t)=e,`U[5]`):
> UU2:=diff(U2,e):
> UUU2:=subs(P=diff(theta(t),t),e=theta(t),UU2):
> DU2_theta:=UUU2:
> unassign('P','e');
> U3:=subs(diff(theta(t),t)=P,theta(t)=e,`U[6]`):
> UU3:=diff(U3,e):
> UUU3:=subs(P=diff(theta(t),t),e=theta(t),UU3):
> DU3_theta:=UUU3:
> unassign('P','e');
> UR4:=subs(diff(theta(t),t)=P,theta(t)=e,`U[R4]`):
> UUR4:=diff(UR4,e):
> UUUR4:=subs(P=diff(theta(t),t),e=theta(t),UUR4):
> DUR4_theta:=UUUR4:unassign('P','e');
```

Derivace potenciálních energií podle ϕ

```
> U1:=subs(diff(phi(t),t)=P,phi(t)=e,`U[4]`):
> UU1:=diff(U1,e):
> UUU1:=subs(P=diff(phi(t),t),e=phi(t),UU1):
> DU1_phi:=UUU1:
> unassign('P','e');
> U2:=subs(diff(phi(t),t)=P,phi(t)=e,`U[5]`):
> UU2:=diff(U2,e):
> UUU2:=subs(P=diff(phi(t),t),e=phi(t),UU2):
> DU2_phi:=UUU2:
> unassign('P','e');
> U3:=subs(diff(phi(t),t)=P,phi(t)=e,`U[6]`):
> UU3:=diff(U3,e):
> UUU3:=subs(P=diff(phi(t),t),e=phi(t),UU3):
> DU3_phi:=UUU3:
> unassign('P','e'):
> UR4:=subs(diff(phi(t),t)=P,phi(t)=e,`U[R4]`):
> UUR4:=diff(UR4,e):
> UUUR4:=subs(P=diff(phi(t),t),e=phi(t),UUR4):
> DUR4_phi:=UUUR4:unassign('P','e'):
```

Derivace potenciálních energií podle ψ

```
> U1:=subs(diff(psi(t),t)=P,psi(t)=e,`U[4]`):
> UU1:=diff(U1,e):
> UUU1:=subs(P=diff(psi(t),t),e=psi(t),UU1):
> DU1_psi:=UUU1:
> unassign('P','e');
> U2:=subs(diff(psi(t),t)=P,psi(t)=e,`U[5]`):
> UU2:=diff(U2,e):
> UUU2:=subs(P=diff(psi(t),t),e=psi(t),UU2):
> DU2_psi:=UUU2:
> unassign('P','e');
> U3:=subs(diff(psi(t),t)=P,psi(t)=e,`U[6]`):
> UU3:=diff(U3,e):
> UUU3:=subs(P=diff(psi(t),t),e=psi(t),UU3):
> DU3_psi:=UUU3:
> unassign('P','e'):
> UR4:=subs(diff(psi(t),t)=P,psi(t)=e,`U[R4]`):
> UUR4:=diff(UR4,e):
> UUUR4:=subs(P=diff(psi(t),t),e=psi(t),UUR4):
> DUR4_psi:=UUUR4:unassign('P','e'):
```

Derivace kinetických energií podle časových derivací douřadnic

Derivace kinetických energií podle $\dot{\theta}(t)$

```
> Tt1:=subs(diff(theta(t),t)=P,theta(t)=e,`T[1]`):
> TTt1:=diff(Tt1,P):
> TTTt1:=subs(P=diff(theta(t),t),e=theta(t),TTt1):
> DTt1_theta:=evalm(simplify(TTTt1)):
> unassign('P','e');
> Tt2:=subs(diff(theta(t),t)=P,theta(t)=e,`T[2]`):
> TTt2:=diff(Tt2,P):
> TTTt2:=subs(P=diff(theta(t),t),e=theta(t),TTt2):
> DTt2_theta:=evalm(simplify(TTTt2)):
> unassign('P','e');
> Tt3:=subs(diff(theta(t),t)=P,theta(t)=e,`T[3]`):
> TTt3:=diff(Tt3,P):
> TTTt3:=subs(P=diff(theta(t),t),e=theta(t),TTt3):
> DTt3_theta:=evalm(simplify(TTTt3)):
> unassign('P','e');
> Tt4:=subs(diff(theta(t),t)=P,theta(t)=e,`T[4]`):
> TTt4:=diff(Tt4,P):
> TTTt4:=subs(P=diff(theta(t),t),e=theta(t),TTt4):
> DTt4_theta:=evalm(simplify(TTTt4)):
> unassign('P','e');
> Tt7:=subs(diff(theta(t),t)=P,theta(t)=e,`T[7]`):
> TTt7:=diff(Tt7,P):
> TTTt7:=subs(P=diff(theta(t),t),e=theta(t),TTt7):
> DTt7_theta:=evalm(simplify(TTTt7)):
> unassign('P','e');
> Tt8:=subs(diff(theta(t),t)=P,theta(t)=e,`T[8]`):
> TTt8:=diff(Tt8,P):
> TTTt8:=subs(P=diff(theta(t),t),e=theta(t),TTt8):
> DTt8_theta:=evalm(simplify(TTTt8)):
> unassign('P','e');
```

Derivace kinetických energií podle $\dot{\phi}(t)$

```
> Tt1:=subs(diff(phi(t),t)=P,phi(t)=e,`T[1]`):
> TTt1:=diff(Tt1,P):
> TTTt1:=subs(P=diff(phi(t),t),e=phi(t),TTt1):
> DTt1_phi:=evalm(simplify(TTTt1)):
> unassign('P','e'):
> Tt2:=subs(diff(phi(t),t)=P,phi(t)=e,`T[2]`):
> TTt2:=diff(Tt2,P):
> TTTt2:=subs(P=diff(phi(t),t),e=phi(t),TTt2):
> DTt2_phi:=evalm(simplify(TTTt2)):
> unassign('P','e'):
> Tt3:=subs(diff(phi(t),t)=P,phi(t)=e,`T[3]`):
> TTt3:=diff(Tt3,P):
> TTTt3:=subs(P=diff(phi(t),t),e=phi(t),TTt3):
> DTt3_phi:=evalm(simplify(TTTt3)):
> unassign('P','e'):
> Tt4:=subs(diff(phi(t),t)=P,phi(t)=e,`T[4]`):
> TTt4:=diff(Tt4,P):
> TTTt4:=subs(P=diff(phi(t),t),e=phi(t),TTt4):
> DTt4_phi:=evalm(simplify(TTTt4)):
> unassign('P','e');
> Tt7:=subs(diff(phi(t),t)=P,phi(t)=e,`T[7]`):
> TTt7:=diff(Tt7,P):
> TTTt7:=subs(P=diff(phi(t),t),e=phi(t),TTt7):
> DTt7_phi:=evalm(simplify(TTTt7)):
> unassign('P','e');
> Tt8:=subs(diff(phi(t),t)=P,phi(t)=e,`T[8]`):
> TTt8:=diff(Tt8,P):
> TTTt8:=subs(P=diff(phi(t),t),e=phi(t),TTt8):
> DTt8_phi:=evalm(simplify(TTTt8)):
> unassign('P','e');
```

Derivace kinetických energií podle $\dot{\psi}(t)$

```
> Tt1:=subs(diff(psi(t),t)=P,psi(t)=e,`T[1]`):
> TTt1:=diff(Tt1,P):
> TTTt1:=subs(P=diff(psi(t),t),e=psi(t),TTt1):
> DTt1_psi:=evalm(simplify(TTTt1)):
> unassign('P','e');
> Tt2:=subs(diff(psi(t),t)=P,psi(t)=e,`T[2]`):
> TTt2:=diff(Tt2,P):
> TTTt2:=subs(P=diff(psi(t),t),e=psi(t),TTt2):
> DTt2_psi:=evalm(simplify(TTTt2)):
> unassign('P','e');
> Tt3:=subs(diff(psi(t),t)=P,psi(t)=e,`T[3]`):
> TTt3:=diff(Tt3,P):
> TTTt3:=subs(P=diff(psi(t),t),e=psi(t),TTt3):
> DTt3_psi:=evalm(simplify(TTTt3)):
> unassign('P','e');
> Tt4:=subs(diff(psi(t),t)=P,psi(t)=e,`T[4]`):
> TTt4:=diff(Tt4,P):
> TTTt4:=subs(P=diff(psi(t),t),e=psi(t),TTt4):
> DTt4_psi:=evalm(simplify(TTTt4)):
> unassign('P','e');
> Tt7:=subs(diff(psi(t),t)=P,psi(t)=e,`T[7]`):
> TTt7:=diff(Tt7,P):
> TTTt7:=subs(P=diff(psi(t),t),e=psi(t),TTt7):
> DTt7_psi:=evalm(simplify(TTTt7)):
> unassign('P','e');
> Tt8:=subs(diff(psi(t),t)=P,psi(t)=e,`T[8]`):
> TTt8:=diff(Tt8,P):
> TTTt8:=subs(P=diff(psi(t),t),e=psi(t),TTt8):
> DTt8_psi:=evalm(simplify(TTTt8)):
> unassign('P','e');
```

Časové derivace derivací kinetických energií podle časových derivací souřadnic

Časová derivace derivací kinetických energií podle $\dot{\theta}(t)$

```
> DDTt1_theta:=diff(DTt1_theta,t):
> DDTt2_theta:=diff(DTt2_theta,t):
> DDTt3_theta:=diff(DTt3_theta,t):
> DDTt4_theta:=diff(DTt4_theta,t):
> DDTt7_theta:=diff(DTt7_theta,t):
> DDTt8_theta:=diff(DTt8_theta,t):
```

Časová derivace derivací kinetických energií podle $\dot{\phi}(t)$

```
> DDTt1_phi:=diff(DTt1_phi,t):
> DDTt2_phi:=diff(DTt2_phi,t):
> DDTt3_phi:=diff(DTt3_phi,t):
> DDTt4_phi:=diff(DTt4_phi,t):
> DDTt7_phi:=diff(DTt7_phi,t):
> DDTt8_phi:=diff(DTt8_phi,t):
```

Časová derivace derivací kinetických energií podle $\dot{\psi}(t)$

```
> DDTt1_psi:=diff(DTt1_psi,t):
> DDTt2_psi:=diff(DTt2_psi,t):
> DDTt3_psi:=diff(DTt3_psi,t):
> DDTt4_psi:=diff(DTt4_psi,t):
> DDTt7_psi:=diff(DTt7_psi,t):
> DDTt8_psi:=diff(DTt8_psi,t):
```

Linearizace vztahů (prvni krok)

Lagrangeova rovnice pro ϕ

```
> L[phi]:=DDTt1_phi+DDTt2_phi+DDTt3_phi+DDTt4_phi+
DDTt7_phi+DDTt8_phi+DUR4_phi+DU3_phi+DU2_phi+DU1_phi-
(DT8_phi+DT7_phi+DT4_phi+DT3_phi+DT2_phi+DT1_phi):
```

Lagrangeova rovnice pro ψ

```
> L[psi]:=DDTt1_psi+DDTt2_psi+DDTt3_psi+DDTt4_psi+
DDTt7_psi+DDTt8_psi
+DUR4_psi+DU3_psi+DU2_psi+DU1_psi-(DT8_psi+DT7_psi+
DT4_psi+DT3_psi+DT2_psi+DT1_psi):
```

Lagrangeova rovnice pro θ

```
> L[theta]:=DDTt1_theta+DDTt2_theta+DDTt3_theta+
DDTt4_theta+DDTt7_theta+DDTt8_theta+DUR4_theta+DU3_theta+
DU2_theta+DU1_theta
-(DT8_theta+DT7_theta+DT4_theta+DT3_theta+DT2_theta+
DT1_theta):
```

Linearizovaná Lagrangeova rovnice pro ϕ

```
> LL[phi]:=expand(subs(cos(phi(t))=1,cos(psi(t))=1,cos
(epsilon(t))=1,cos(Epsilon(t))=1,sin(phi(t))=phi(t),
sin(psi(t))=psi(t),sin(epsilon(t))=epsilon(t),sin(Epsilon
(t))=Epsilon(t),sin(theta(t)+`theta[0]`)=sin(`theta[0]`)+
theta(t)*cos(`theta[0]`),
cos(theta(t)+`theta[0]`)=cos(`theta[0]`)-theta(t)*sin
(`theta[0]`),cos(alpha(t))=1,cos(beta(t))=1,sin(alpha(t))
=alpha(t),
sin(beta(t))=beta(t),L[phi])):
> Lphi:=LL[phi]:   Lagphi:=L[phi]:
> save Lphi, "e:/vytvory/Lphi.txt":  save Lagphi,
"e:/vytvory/Lagphi.txt":
```

Linearizovaná Lagrangeova rovnice pro ψ

```
> LL[psi]:=expand(subs(cos(phi(t))=1,cos(psi(t))=1,cos
(epsilon(t))=1,cos(Epsilon(t))=1,sin(phi(t))=phi(t),
sin(psi(t))=psi(t),sin(epsilon(t))=epsilon(t),sin(Epsilon
(t))=Epsilon(t),sin(theta(t)+`theta[0]`)=sin(`theta[0]`)+
theta(t)*cos(`theta[0]`),
cos(theta(t)+`theta[0]`)=cos(`theta[0]`)-theta(t)*sin
(`theta[0]`),cos(alpha(t))=1,cos(beta(t))=1,sin(alpha(t))
=alpha(t),
sin(beta(t))=beta(t),L[psi])):
> Lpsi:=LL[psi]:    Lagpsi:=L[psi]:
> save Lpsi, "e:/vytvory/Lpsi.txt":    save Lagpsi,
"e:/vytvory/Lagpsi.txt":
```

Linearizovaná Lagrangeova rovnice pro θ

```
> LL[theta]:=expand(subs(cos(phi(t))=1,cos(psi(t))=1,cos
  (epsilon(t))=1,cos(Epsilon(t))=1,sin(phi(t))=phi(t),
  sin(psi(t))=psi(t),sin(epsilon(t))=epsilon(t),sin(Epsilon
  (t))=Epsilon(t),sin(theta(t)+`theta[0]`)=sin(`theta[0]`)+
  theta(t)*cos(`theta[0]`),
  cos(theta(t)+`theta[0]`)=cos(`theta[0]`)-theta(t)*sin
  (`theta[0]`),cos(alpha(t))=1,cos(beta(t))=1,sin(alpha(t))
  =alpha(t),
  sin(beta(t))=beta(t),L[theta])):
> Ltheta:=LL[theta]:
  Lagtheta:=L[theta]:
> save Ltheta, "e:/vytvory/Ltheta.txt":
  save Lagtheta, "e:/vytvory/Lagtheta.txt":
```

Linearizace Lagrangeových rovnic

```
> restart;with(linalg):
```

Načtení Lagrangeových rovnic

```
> read "d:/vytvory_C/Ltheta_1.txt":
  read "d:/vytvory_C/Lphi_1.txt":
  read "d:/vytvory_C/Lpsi_1.txt":
```

Přeznačení promněných

```
> LL2[theta] :=subs(
   diff(theta(t),t,t)  =ddX1,
   diff(phi(t),t,t)    =ddX2,
   diff(psi(t),t,t)    =ddX3,
   diff(epsilon(t),t,t)    =ddX4,
   diff(Epsilon(t),t,t)=ddX5,
  Ltheta):
  LL3[theta] :=subs(
  diff(theta(t),t)  =dX1,
  diff(phi(t),t)    =dX2,
  diff(psi(t),t)    =dX3,
  diff(epsilon(t),t)    =dX4,
  diff(Epsilon(t),t)=dX5,
  LL2[theta]):
  LL4[theta] :=subs(
  theta(t)  =X1,
  phi(t)    =X2,
  psi(t)    =X3,
  epsilon(t)    =X4,
  Epsilon(t)=X5,
  LL3[theta]):
> LL2[phi] :=subs(
  diff(theta(t),t,t)  =ddX1,
  diff(phi(t),t,t)    =ddX2,
  diff(psi(t),t,t)    =ddX3,
  diff(epsilon(t),t,t)    =ddX4,
  diff(Epsilon(t),t,t)=ddX5,
  Lphi):

  LL3[phi] :=subs(
  diff(theta(t),t)  =dX1,
  diff(phi(t),t)    =dX2,
  diff(psi(t),t)    =dX3,
  diff(epsilon(t),t)    =dX4,
  diff(Epsilon(t),t)=dX5,
  LL2[phi]):
```

```
LL4[phi] :=subs(
theta(t)  =X1,
phi(t)    =X2,
psi(t)    =X3,
epsilon(t)    =X4,
Epsilon(t)=X5,
LL3[phi]):
> LL2[psi] :=subs(
  diff(theta(t),t,t)  =ddX1,
  diff(phi(t),t,t)    =ddX2,
  diff(psi(t),t,t)    =ddX3,
  diff(epsilon(t),t,t)    =ddX4,
  diff(Epsilon(t),t,t)=ddX5,
  Lpsi):

  LL3[psi] :=subs(
  diff(theta(t),t)  =dX1,
  diff(phi(t),t)    =dX2,
  diff(psi(t),t)    =dX3,
  diff(epsilon(t),t)    =dX4,
  diff(Epsilon(t),t)=dX5,
  LL2[psi]):

  LL4[psi] :=subs(
  theta(t)  =X1,
  phi(t)    =X2,
  psi(t)    =X3,
  epsilon(t)    =X4,
  Epsilon(t)=X5,
  LL3[psi]):
> LL2[epsilon] :=subs(
  diff(theta(t),t,t)  =ddX1,
  diff(phi(t),t,t)    =ddX2,
  diff(psi(t),t,t)    =ddX3,
  diff(epsilon(t),t,t)    =ddX4,
  diff(Epsilon(t),t,t)=ddX5,
  Lepsilon):

  LL3[epsilon] :=subs(
  diff(theta(t),t)  =dX1,
  diff(phi(t),t)    =dX2,
  diff(psi(t),t)    =dX3,
  diff(epsilon(t),t)    =dX4,
  diff(Epsilon(t),t)=dX5,
  LL2[epsilon]):
```

```
LL4[epsilon] :=subs(
theta(t)  =X1,
phi(t)    =X2,
psi(t)    =X3,
epsilon(t)    =X4,
Epsilon(t)=X5,
LL3[epsilon]):
> LL2[Epsilon] :=subs(
diff(theta(t),t,t)  =ddX1,
diff(phi(t),t,t)    =ddX2,
diff(psi(t),t,t)    =ddX3,
diff(epsilon(t),t,t)    =ddX4,
diff(Epsilon(t),t,t)=ddX5,
LEpsilon):

LL3[Epsilon] :=subs(
diff(theta(t),t)  =dX1,
diff(phi(t),t)    =dX2,
diff(psi(t),t)    =dX3,
diff(epsilon(t),t)    =dX4,
diff(Epsilon(t),t)=dX5,
LL2[Epsilon]):

LL4[Epsilon] :=subs(
theta(t)  =X1,
phi(t)    =X2,
psi(t)    =X3,
epsilon(t)    =X4,
Epsilon(t)=X5,
LL3[Epsilon]):
```

Vytvoření Jacobiho matice

```
> AA:=matrix(5,15,[
diff(LL4[theta],X1)  ,diff(LL4[theta],X2)  ,diff(LL4[theta],X3)
,diff(LL4[theta],X4)  ,diff(LL4[theta],X5),
diff(LL4[theta],dX1) ,diff(LL4[theta],dX2) ,diff(LL4[theta],dX3)
,diff(LL4[theta],dX4) ,diff(LL4[theta],dX5),
diff(LL4[theta],ddX1),diff(LL4[theta],ddX2),diff(LL4[theta],ddX3
),diff(LL4[theta],ddX4),diff(LL4[theta],ddX5),

diff(LL4[phi],X1)  ,diff(LL4[phi],X2)  ,diff(LL4[phi],X3)
,diff(LL4[phi],X4)  ,diff(LL4[phi],X5),
diff(LL4[phi],dX1) ,diff(LL4[phi],dX2) ,diff(LL4[phi],dX3)
,diff(LL4[phi],dX4) ,diff(LL4[phi],dX5),
diff(LL4[phi],ddX1),diff(LL4[phi],ddX2),diff(LL4[phi],ddX3),diff
(LL4[phi],ddX4),diff(LL4[phi],ddX5),

diff(LL4[psi],X1)  ,diff(LL4[psi],X2)  ,diff(LL4[psi],X3)
,diff(LL4[psi],X4)  ,diff(LL4[psi],X5),
diff(LL4[psi],dX1) ,diff(LL4[psi],dX2) ,diff(LL4[psi],dX3)
,diff(LL4[psi],dX4) ,diff(LL4[psi],dX5),
diff(LL4[psi],ddX1),diff(LL4[psi],ddX2),diff(LL4[psi],ddX3),diff
(LL4[psi],ddX4),diff(LL4[psi],ddX5),

diff(LL4[epsilon],X1)  ,diff(LL4[epsilon],X2)
,diff(LL4[epsilon],X3)  ,diff(LL4[epsilon],X4)
,diff(LL4[epsilon],X5),
diff(LL4[epsilon],dX1) ,diff(LL4[epsilon],dX2)
,diff(LL4[epsilon],dX3) ,diff(LL4[epsilon],dX4)
,diff(LL4[epsilon],dX5),
diff(LL4[epsilon],ddX1),diff(LL4[epsilon],ddX2),diff(LL4[epsilon
],ddX3),diff(LL4[epsilon],ddX4),diff(LL4[epsilon],ddX5),

diff(LL4[Epsilon],X1)  ,diff(LL4[Epsilon],X2)
,diff(LL4[Epsilon],X3)  ,diff(LL4[Epsilon],X4)
,diff(LL4[Epsilon],X5),
diff(LL4[Epsilon],dX1) ,diff(LL4[Epsilon],dX2)
,diff(LL4[Epsilon],dX3) ,diff(LL4[Epsilon],dX4)
,diff(LL4[Epsilon],dX5),
diff(LL4[Epsilon],ddX1),diff(LL4[Epsilon],ddX2),diff(LL4[Epsilon
],ddX3),diff(LL4[Epsilon],ddX4),diff(LL4[Epsilon],ddX5)
]):
```

Rozložení Jacobiho matice na Linearizované členy matic charakteristické rovnice

```
> BB:=matrix(5,15,[]);
```

$$BB := \text{array}(1 .. 5, 1 .. 15, [\ ])$$

```
> for kk from 1 to 5   do
  for ll from 1 to 15  do

  BB[kk,ll]:=simplify(subs(
  X1  =0,X2  =0,X3  =0,X4  =0,X5  =0,
  dX1 =0,dX2 =0,dX3 =0,dX4 =0,dX5 =0,
  ddX1=0,ddX2=0,ddX3=0,ddX4=0,ddX5=0,
  diff(gyro(t),t,t)=0,diff(Gyro(t),t,t)=0,
  AA[kk,ll]));
  od;
  od;
> evalm(BB):
> E:=vector(3,[
  subs(
  X1  =0,X2  =0,X3  =0,X4  =0,X5  =0,
  dX1 =0,dX2 =0,dX3 =0,dX4 =0,dX5 =0,
  ddX1=0,ddX2=0,ddX3=0,ddX4=0,ddX5=0,LL4[theta]),
  subs(
  X1  =0,X2  =0,X3  =0,X4  =0,X5  =0,
  dX1 =0,dX2 =0,dX3 =0,dX4 =0,dX5 =0,
  ddX1=0,ddX2=0,ddX3=0,ddX4=0,ddX5=0,LL4[phi]),
  subs(
  X1  =0,X2  =0,X3  =0,X4  =0,X5  =0,
  dX1 =0,dX2 =0,dX3 =0,dX4 =0,dX5 =0,
  ddX1=0,ddX2=0,ddX3=0,ddX4=0,ddX5=0,LL4[psi])
  ]):
```

matice tuhosti

```
> C:=evalm(submatrix(BB, 1..3, 1..3));
```

$$C := \begin{bmatrix} -g\,R\sin(theta[0])\,(m[4]+m[5]+2\,m[R]+m[6]),\,0\,,\,0 \\ 0\,, \quad -m[5]\,g\,z[T5]-m[6]\,g\,z[56]-m[6]\,g\,z[T6]\,, \quad 0 \\ 0\,, \qquad 0\,, \qquad -m[6]\,g\,z[T6] \end{bmatrix}$$

matice tlumeni

```
> B:=evalf(submatrix(BB, 1..3, 6..8));
```

$$B := \begin{bmatrix} 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. \end{bmatrix}$$

koeficienty matice hmotnosti

```
> A:=submatrix(BB, 1..3, 11..13):
> A[1,1];
```

$$4\, JR[y] + m[6]\, R^2 + R^2\, m[8] + m[5]\, R^2 + R^2\, m[7] + m[R]\, R^2 + 2\, R^2\, m[g] + m[4]\, R^2$$

```
> A[2,2];
```

$$2\, m[g]\, x[56]^2 + J9[z] + J7[y] + J5[y] + Je + J8[y] + J6[y] + m[g]\, z[7]^2 + m[7]\, z[7]^2 + m[8]\, x[56]^2 + m[8]\, z[56]^2 + m[g]\, x[8]^2 + m[8]\, x[8]^2 + 2\, m[g]\, z[56]^2 + m[6]\, x[56]^2 + m[6]\, z[56]^2 + m[8]\, z[8]^2 + m[g]\, z[8]^2 + m[7]\, z[56]^2 + m[g]\, x[7]^2 + m[7]\, x[7]^2 + m[7]\, x[56]^2 + 2\, m[g]\, z[8]\, z[56] + 2\, m[7]\, z[7]\, z[56] + 2\, m[8]\, z[8]\, z[56] + 2\, m[g]\, x[56]\, x[8] + 2\, m[6]\, z[56]\, z[T6] + 2\, m[6]\, x[56]\, x[T6] + 2\, m[7]\, x[56]\, x[7] + 2\, m[g]\, z[7]\, z[56] + 2\, m[g]\, x[56]\, x[7] + 2\, m[8]\, x[56]\, x[8]$$

```
> A[3,3];
```

$$m[g]\, z[8]^2 + m[7]\, z[7]^2 + J9[z] + J7[x] + J8[x] + Je + J6[x] + m[g]\, y[7]^2 + m[g]\, y[8]^2 + m[8]\, z[8]^2 + m[g]\, z[7]^2 + m[7]\, y[7]^2 + m[8]\, y[8]^2$$

```
> A[1,2];
```

$$-R\, (x[7]\cos(theta[0])\, m[7] + x[7]\cos(theta[0])\, m[g] + z[8]\sin(theta[0])\, m[g] + x[56]\cos(theta[0])\, m[8] + m[6]\, x[56]\cos(theta[0]) + m[6]\, x[T6]\cos(theta[0]) + m[6]\, z[56]\sin(theta[0]) + m[6]\, z[T6]\sin(theta[0]) + z[8]\sin(theta[0])\, m[8] + z[56]\sin(theta[0])\, m[8] + z[7]\sin(theta[0])\, m[7] + z[7]\sin(theta[0])\, m[g] + x[56]\cos(theta[0])\, m[7] + z[56]\sin(theta[0])\, m[7] + x[8]\cos(theta[0])\, m[8] + x[8]\cos(theta[0])\, m[g] + m[5]\, z[T5]\sin(theta[0]) + m[5]\, x[T5]\cos(theta[0]) + 2\, x[56]\cos(theta[0])\, m[g] + 2\, z[56]\sin(theta[0])\, m[g])$$

```
> A[2,1];
```

$$-R\, (x[7]\cos(theta[0])\, m[7] + x[7]\cos(theta[0])\, m[g] + z[8]\sin(theta[0])\, m[g] + x[56]\cos(theta[0])\, m[8] + m[6]\, x[56]\cos(theta[0]) + m[6]\, x[T6]\cos(theta[0]) + m[6]\, z[56]\sin(theta[0]) + m[6]\, z[T6]\sin(theta[0]) + z[8]\sin(theta[0])\, m[8] + z[56]\sin(theta[0])\, m[8] + z[7]\sin(theta[0])\, m[7] + z[7]\sin(theta[0])\, m[g] + x[56]\cos(theta[0])\, m[7] + z[56]\sin(theta[0])\, m[7] + x[8]\cos(theta[0])\, m[8] + x[8]\cos(theta[0])\, m[g] + m[5]\, z[T5]\sin(theta[0]) + m[5]\, x[T5]\cos(theta[0]) + 2\, x[56]\cos(theta[0])\, m[g] + 2\, z[56]\sin(theta[0])\, m[g])$$

```
> A[1,3];
```

$$R\cos(theta[0])\, (y[7]\, m[g] + y[7]\, m[7] + m[6]\, y[T6] + y[8]\, m[8] + y[8]\, m[g])$$

```
> A[3,1];
```

$$R\cos(theta[0])\, (y[7]\, m[g] + y[7]\, m[7] + m[6]\, y[T6] + y[8]\, m[8] + y[8]\, m[g])$$

```
> A[2,3];
```

$$-D6[xy] - m[g]\, x[56]\, y[8] - m[7]\, x[7]\, y[7] - m[g]\, x[56]\, y[7] - m[g]\, x[7]\, y[7] - m[8]\, x[8]\, y[8] - m[g]\, x[8]\, y[8] - m[6]\, x[56]\, y[T6] - m[8]\, x[56]\, y[8] - m[7]\, x[56]\, y[7]$$

```
> A[3,2];
```

$$-D6[xy] - m[g]\, x[56]\, y[8] - m[7]\, x[7]\, y[7] - m[g]\, x[56]\, y[7] - m[g]\, x[7]\, y[7] - m[8]\, x[8]\, y[8] - m[g]\, x[8]\, y[8] - m[6]\, x[56]\, y[T6] - m[8]\, x[56]\, y[8] - m[7]\, x[56]\, y[7]$$

Parametricke buzeni

```
> E[1];
```

$$m[6]\ g\ R\cos(\mathit{theta}[0]) + m[5]\ g\ R\cos(\mathit{theta}[0]) + m[4]\ g\ R\cos(\mathit{theta}[0]) + 2\ m[R]\ g\ R\cos(\mathit{theta}[0])$$

```
> E[2];
```

$$-m[5]\ g\ x[T5] - m[6]\ g\ x[T6] - m[6]\ g\ x[56] + J9[z]\left(\frac{d^2}{dt^2}\mathrm{Gyro}(t)\right)$$

```
> E[3];
```

$$m[6]\ g\ y[T6] + J9[z]\left(\frac{d^2}{dt^2}\mathrm{gyro}(t)\right)$$

```
>
> save A,B,C,E, "d:/vytvory_C/lagrmat.txt";
>
```

Vliv vlastností linearizovaného systému na vlastní frekvence

```
> restart:with(plots):with(linalg):
```

Načtení matic linearizovaných lagrangeových rovnic a matice tuhosti pružin

```
> read "d:/vytvory_C/lagrmat.txt":
  read "d:/vytvory_C/CP.txt":
```

poloha pružin a tlumičů

```
`r[p,theta]` :=0.19:`r[p,psi]`[1] :=0.42/2:`r[p,psi]`[2]
:=0.42/2:
`r[p,phi]`[1] := .6075: `r[p,phi]`[2] := .4675:
`r[t,theta]` :=0.19:`r[t,psi]`[1] :=0.42/2:`r[t,psi]`[2]
:=0.42/2:`r[t,phi]`[1] := .6075: `r[t,phi]`[2] := .4675:
```

hmotové a rozměrové parametry systému

```
g := 9.80665:
`m[4]` := 14.34: `m[5]` := 17.56: `m[R]` := 1.34:R :=
0.4:`m[6]leh`:=14.17+13.7:`m[6]clo`:=80;`m[7]` :=0:`m[8]`
:=0:`m[g]` :=0:
`J5[x]` := 3.05: `J5[y]` := 11.37: `J5[z]` := 14.34: `JR[y]` :=
.160e-1: `JR[x]` := .25e-3:
`z[45]` := .62e-1: `z[56]` := .62e-1: `z[T5]` := .316e-1:
`x[T5]` := -.595e-1: `z[T5]` := .316e-1: `z[S3]` := .786e-1:
`x[56]` := -.1426e-1: `x[45]` := .755e-1: `x[S3]` := -1:`y[S3]`
:= .65:`theta[0]`:=0.2435:
`J7[x]`:=0:`J7[y]`:=0:`J7[z]`:=0:
`J8[x]`:=0:`J8[y]`:=0:`J8[z]`:=0:
`J9[x]`:=0:`J9[y]`:=0:`J9[z]`:=0:Je:=0:
```

parametry pružin

```
`S[0,4]` := .22e-2: `S[0,5]` := .22e-2: `S[0,6]` := .22e-2:
`S[1,4]` := .7056e-1: `S[1,5]` := .7056e-1: `S[1,6]` :=
.7056e-1:
`V[4]`(t):=V:
`V[5]`[1](t):=V:`V[5]`[2](t):=V:
`V[6]`[1](t):=V:`V[6]`[2](t):=V:

V := .3e-3: `p[a]` := 100000:n:=1:
```

Výpočty momentů setrvačnosti

moment setrvačnosti lidského těla a poloha těžiště

```
Iclo_1:=11.3:Iclo_2:=15.2:Iclo_3:=0.577:
#x_Tclo:=0.05;
#y_Tclo:=0.05;
z_Tclo:=0.0616;
```

poloha těžiště ložné plochy

```
x_Tleh:=0:y_Tleh:=0:z_Tleh:=0.05:
```

natočení těla pacienta ve stupních

```
delta:=0*Pi/180;
mclo:=`m[6]clo`:mleh:=14.17+13.7:

Iclo_centralni:=matrix(3,3,[

 Iclo_3,  0   ,  0,
 0     ,Iclo_2,  0,
 0     ,  0   ,Iclo_1]):

T:=matrix(3,3,[

  cos(delta) ,sin(delta),0,
  -sin(delta),cos(delta),0,
       0     ,    0     ,1]):

Iclo_pootoceny:=evalm(transpose(T)&*Iclo_centralni&*T):

I_m_clo:=matrix(3,3,[
  mclo*(y_Tclo^2+z_Tclo^2),-mclo*x_Tclo*y_Tclo
,-mclo*x_Tclo*z_Tclo,
  -mclo*x_Tclo*y_Tclo
,mclo*(x_Tclo^2+z_Tclo^2),-mclo*y_Tclo*z_Tclo,
  -mclo*x_Tclo*z_Tclo     ,-mclo*y_Tclo*z_Tclo
,mclo*(x_Tclo^2+y_Tclo^2)]):

I_o6clo:=evalm(Iclo_pootoceny+I_m_clo):
```

tenzor setrvačnosti ložné plochy

```
I_leh:=matrix(3,3,[
  1.8564+0.8*1.8564,0,0,
  0,7.49+0.8*7.49,0,
  0,0,9.346+0.8*9.346]):

I_m_leh:=matrix(3,3,[
  mleh*(y_Tleh^2+z_Tleh^2),-mleh*x_Tleh*y_Tleh
,-mleh*x_Tleh*z_Tleh,
  -mleh*x_Tleh*y_Tleh
,mleh*(x_Tleh^2+z_Tleh^2),-mleh*y_Tleh*z_Tleh,
  -mleh*x_Tleh*z_Tleh     ,-mleh*y_Tleh*z_Tleh
,mleh*(x_Tleh^2+y_Tleh^2)]):

I_o6leh:=evalm(I_leh+I_m_leh):
```

Výsledný tenzor setrvačnosti a poloha těžiště pacienta, ložné plochy a horní základny

```
I6:=evalm(I_o6leh+I_o6clo):

rT6:=vector(3,[
  (mclo*x_Tclo+mleh*x_Tleh)/(mleh+mclo),
  (mclo*y_Tclo+mleh*y_Tleh)/(mleh+mclo),
  (mclo*z_Tclo+mleh*z_Tleh)/(mleh+mclo)]);
`z[T6]` := rT6[3]: `x[T6]` := rT6[1]: `y[T6]` :=rT6[2]:
`J6[x]`:=I6[1,1]:`J6[y]`:=I6[2,2]:`J6[z]`:=I6[3,3]:`D6[xy]`:=I6[1,
2]:`D6[yz]`:=I6[2,3]:
`m[6]` := `m[6]leh`+`m[6]clo`:
```

Tlak v pružinách při rovnovážné poloze

```
`p[4]` :=
simplify(1/4*g*R*(2*`m[R]`+`m[4]`+`m[5]`+`m[6]`)/(`S[0,4]`*`r[p,th
eta]`)):

`p[5]`[1]:=simplify(-g*(-`m[5]`*`r[p,phi]`[2]-`m[6]`*`r[p,phi]`[2]
+`m[5]`*`x[T5]`+`m[6]`*`x[56]`+`m[6]`*`x[T6]`)/
(`S[0,5]`*(`r[p,phi]`[1]+`r[p,phi]`[2]))):

`p[5]`[2]:=simplify(g*(`r[p,phi]`[1]*`m[5]`+`r[p,phi]`[1]*`m[6]`+`
m[5]`*`x[T5]`+`m[6]`*`x[56]`+`m[6]`*`x[T6]`)/
(`S[0,5]`*(`r[p,phi]`[1]+`r[p,phi]`[2]))):

`p[6]`[1]
:=simplify(g*`m[6]`*(`r[p,psi]`[2]+`y[T6]`)/(`S[0,6]`*(`r[p,psi]`[
1]+`r[p,psi]`[2]))):

`p[6]`[2]
:=simplify(-g*`m[6]`*(`y[T6]`-`r[p,psi]`[1])/(`S[0,6]`*(`r[p,psi]`
[1]+`r[p,psi]`[2]))):
```

Charakteristická rovnice systému

```
M:=simplify(det(evalm(lambda^2*A+lambda*(B)+(C+CP))));
```

Výpočet vlastních frekvencí systému

```
Lambda:=solve(M,lambda):
f[1] := evalf(-Lambda[1]/(2*Pi)):
f[2] := evalf(-Lambda[2]/(2*Pi)):
f[3] := evalf(-Lambda[3]/(2*Pi)):
f[4] := evalf(-Lambda[4]/(2*Pi)):
f[5] := evalf(-Lambda[5]/(2*Pi)):
f[6] := evalf(-Lambda[6]/(2*Pi)):
```

$$m[6]clo := 80$$

$$z\_Tclo := 0.0616$$

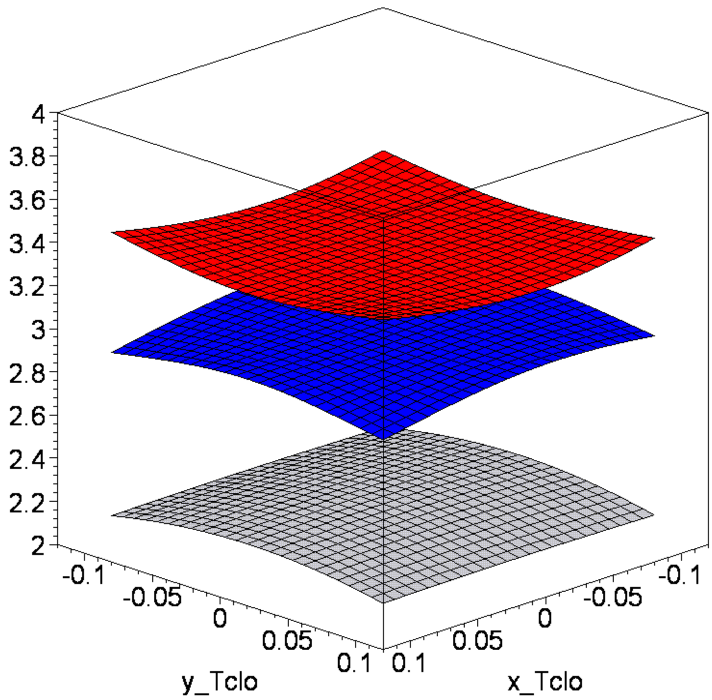
$$\delta := 0$$

$$rT6 := [0.7416334477\, x\_Tclo,\ 0.7416334477\, y\_Tclo,\ 0.05860294799]$$

$$\begin{aligned}M := &-0.1529274504\ 10^{10}\ \mathrm{x\_Tclo}(t)\ \lambda^2\ y\_Tclo^2 - 0.3665300704\ 10^7\ \lambda^4\ \mathrm{x\_Tclo}(t)\ y\_Tclo^2\\ &- 11300.59777\ \lambda^6\ x\_Tclo\ y\_Tclo^2 - 308632.0868\ \lambda^6\ x\_Tclo^2\ y\_Tclo^2\\ &- 0.1612327393\ 10^7\ \lambda^4\ x\_Tclo\ y\_Tclo^2 + 0.1271430399\ 10^{10}\ \lambda^2\\ &- 0.3667642036\ 10^{11}\ \mathrm{x\_Tclo}(t) + 0.4028814993\ 10^7\ \lambda^4 - 0.1933413428\ 10^8\ \lambda^2\ x\_Tclo\\ &+ 0.6779149467\ 10^9\ \lambda^2\ x\_Tclo^2 + 0.5201376940\ 10^{10}\ \lambda^2\ y\_Tclo^2 - 178758.7517\ \lambda^4\ x\_Tclo\\ &+ 0.3141216704\ 10^7\ \lambda^4\ x\_Tclo^2 + 0.2717547488\ 10^8\ \lambda^4\ y\_Tclo^2\\ &- 0.2700593686\ 10^9\ \mathrm{x\_Tclo}(t)\ \lambda^2 - 303.1215701\ \lambda^6\ x\_Tclo + 3634.488499\ \lambda^6\ x\_Tclo^2\\ &+ 35209.19996\ \lambda^6\ y\_Tclo^2 - 420575.7618\ \lambda^4\ \mathrm{x\_Tclo}(t) + 0.1247440448\ 10^{12}\\ &+ 4046.407839\ \lambda^6\end{aligned}$$

Zobrazení požadovaných závislostí

```
> F1:=plot3d(Im(f[1]),x_Tclo=-0.1..0.1,y_Tclo=-0.1..0.1,color=red)
  :
  F2:=plot3d(Im(f[2]),x_Tclo=-0.1..0.1,y_Tclo=-0.1..0.1,color=gree
  n):
  F3:=plot3d(Im(f[3]),x_Tclo=-0.1..0.1,y_Tclo=-0.1..0.1,color=blue
  ):
  F4:=plot3d(Im(f[4]),x_Tclo=-0.1..0.1,y_Tclo=-0.1..0.1,color=blac
  k):
  F5:=plot3d(Im(f[5]),x_Tclo=-0.1..0.1,y_Tclo=-0.1..0.1,color=grey
  ):
  F6:=plot3d(Im(f[6]),x_Tclo=-0.1..0.1,y_Tclo=-0.1..0.1,color=cyan
  ):
> display(F1,F2,F3,F4,F5,F6,view=[-0.12..0.12,-0.12..0.12,2..4]);
```



Vliv velikosti tlumení na vlastní frekvence

```
> restart:with(plots):with(linalg):
```

Načtení matic linearizovaných členú charakteristické rovnice a matice tuhosti pružin

```
read "d:/vytvory_C/lagrmat.txt":
read "d:/vytvory_C/CP.txt":
```

Sestavení matice tlumení

```
B:=Matrix(3,3,[4*b1*`r[t,theta]`^2*sin(`theta[0]`)^2/(2-sin(`theta
[0]`)),0,0,
               0,b2*(`r[t,phi]`[1]^2+`r[t,phi]`[2]^2),0,
               0,0,b3*(`r[t,psi]`[1]^2+`r[t,psi]`[2]^2)]):
```

Rozměrové a hmotové parametry systému, charakteristické parametry pružin a tlumičů

```
`r[p,theta]` :=0.19:`r[p,psi]`[1] :=0.42/2:`r[p,psi]`[2]
:=0.42/2:
`r[p,phi]`[1] := .6075: `r[p,phi]`[2] := .4675:
`r[t,theta]` :=0.19:`r[t,psi]`[1] :=0.42/2:`r[t,psi]`[2]
:=0.42/2:`r[t,phi]`[1] := .6075: `r[t,phi]`[2] := .4675:
b1:=100*b: b2:=b: b3:=b:

g := 9.80665:
`m[4]` := 14.34: `m[5]` := 17.56: `m[R]` := 1.34:R :=
0.4:`m[6]leh`:=14.17+13.7:`m[6]clo`:=80;`m[7]` :=0:`m[8]`
:=0:`m[g]` :=0:
`J5[x]` := 3.05: `J5[y]` := 11.37: `J5[z]` := 14.34: `JR[y]` :=
.160e-1: `JR[x]` := .25e-3:
`z[45]` := .62e-1: `z[56]` := .62e-1: `z[T5]` := .316e-1: `x[T5]`
:= -.595e-1: `z[T5]` := .316e-1: `z[S3]` := .786e-1: `x[56]` :=
-.1426e-1: `x[45]` := .755e-1: `x[S3]` := -1:`y[S3]` :=
.65:`theta[0]`:=0.2435:
`S[0,4]` := .22e-2: `S[0,5]` := .22e-2: `S[0,6]` := .22e-2:
`S[1,4]` := .7056e-1: `S[1,5]` := .7056e-1: `S[1,6]` := .7056e-1:
`J7[x]`:=0:`J7[y]`:=0:`J7[z]`:=0:
`J8[x]`:=0:`J8[y]`:=0:`J8[z]`:=0:
`J9[x]`:=0:`J9[y]`:=0:`J9[z]`:=0:Je:=0:
`V[4]`(t):=V:
`V[5]`[1](t):=V:`V[5]`[2](t):=V:
`V[6]`[1](t):=V:`V[6]`[2](t):=V:

V := .3e-3: `p[a]` := 100000:n:=1:
```

Výpočet hmotnostních charakteristik a polohy těžiště soustavy pacient+lehátko+horní rám

```
Iclo_1:=11.3:Iclo_2:=15.2:Iclo_3:=0.577:
x_Tclo:=0.05;
y_Tclo:=0.05;
z_Tclo:=0.0616;
x_Tleh:=0:y_Tleh:=0:z_Tleh:=0.05:
delta:=0*Pi/180;mclo:=`m[6]clo`:mleh:=14.17+13.7:
Iclo_centralni:=matrix(3,3,[

 Iclo_3,  0   ,  0,
 0     ,Iclo_2,  0,
 0     ,  0   ,Iclo_1]):

T:=matrix(3,3,[

  cos(delta) ,sin(delta),0,
  -sin(delta),cos(delta),0,
       0     ,    0     ,1]):

Iclo_pootoceny:=evalm(transpose(T)&*Iclo_centralni&*T):

I_m_clo:=matrix(3,3,[
  mclo*(y_Tclo^2+z_Tclo^2),-mclo*x_Tclo*y_Tclo
,-mclo*x_Tclo*z_Tclo,
  -mclo*x_Tclo*y_Tclo
,mclo*(x_Tclo^2+z_Tclo^2),-mclo*y_Tclo*z_Tclo,
  -mclo*x_Tclo*z_Tclo     ,-mclo*y_Tclo*z_Tclo
,mclo*(x_Tclo^2+y_Tclo^2)]):

I_o6clo:=evalm(Iclo_pootoceny+I_m_clo):

I_leh:=matrix(3,3,[
  1.8564+0.8*1.8564,0,0,
  0,7.49+0.8*7.49,0,
  0,0,9.346+0.8*9.346]):

I_m_leh:=matrix(3,3,[
  mleh*(y_Tleh^2+z_Tleh^2),-mleh*x_Tleh*y_Tleh
,-mleh*x_Tleh*z_Tleh,
  -mleh*x_Tleh*y_Tleh
,mleh*(x_Tleh^2+z_Tleh^2),-mleh*y_Tleh*z_Tleh,
  -mleh*x_Tleh*z_Tleh     ,-mleh*y_Tleh*z_Tleh
,mleh*(x_Tleh^2+y_Tleh^2)]):

I_o6leh:=evalm(I_leh+I_m_leh):

I6:=evalm(I_o6leh+I_o6clo):
```

```
rT6:=vector(3,[
  (mclo*x_Tclo+mleh*x_Tleh)/(mleh+mclo),
  (mclo*y_Tclo+mleh*y_Tleh)/(mleh+mclo),
  (mclo*z_Tclo+mleh*z_Tleh)/(mleh+mclo)]);
`z[T6]` := rT6[3]: `x[T6]` := rT6[1]: `y[T6]` :=rT6[2]:
`J6[x]`:=I6[1,1]:`J6[y]`:=I6[2,2]:`J6[z]`:=I6[3,3]:`D6[xy]`:=I6[1,
2]:`D6[yz]`:=I6[2,3]:
`m[6]` := `m[6]leh`+`m[6]clo`:
```

Výpočet tlaku v pružinách při rovnovážné poloze

```
`p[4]` :=
simplify(1/4*g*R*(2*`m[R]`+`m[4]`+`m[5]`+`m[6]`)/(`S[0,4]`*`r[p,th
eta]`)):

`p[5]`[1]:=simplify(-g*(-`m[5]`*`r[p,phi]`[2]-`m[6]`*`r[p,phi]`[2]
+`m[5]`*`x[T5]`+`m[6]`*`x[56]`+`m[6]`*`x[T6]`)/
(`S[0,5]`*(`r[p,phi]`[1]+`r[p,phi]`[2]))):

`p[5]`[2]:=simplify(g*(`r[p,phi]`[1]*`m[5]`+`r[p,phi]`[1]*`m[6]`+`
m[5]`*`x[T5]`+`m[6]`*`x[56]`+`m[6]`*`x[T6]`)/
(`S[0,5]`*(`r[p,phi]`[1]+`r[p,phi]`[2]))):

`p[6]`[1]
:=simplify(g*`m[6]`*(`r[p,psi]`[2]+`y[T6]`)/(`S[0,6]`*(`r[p,psi]`[
1]+`r[p,psi]`[2]))):

`p[6]`[2]
:=simplify(-g*`m[6]`*(`y[T6]`-`r[p,psi]`[1])/(`S[0,6]`*(`r[p,psi]`
[1]+`r[p,psi]`[2]))):
```

Sestavení charakteristického polynomu a výpočet vlastních frekvencí

```
M:=simplify(det(evalm(lambda^2*A+lambda*(B)+(C+CP))));
pocet:=500;
for i from 1 to pocet do
  MIN:=0: MAX:=3000:
  krok:=(MAX-MIN)/pocet:
  b:= MIN+(i-1)*krok:
  Lambda[i]:=fsolve(M,lambda,complex):

    for j from 1 to 6 do
      f[j+(i-1)*6] := [b,Im(Lambda[i][j])/(2*Pi)]:
    od:
  unassign('j');

od:
unassign('i');
```

$$m[6]clo := 80$$

$$x\_Tclo := 0.05$$

$$y\_Tclo := 0.05$$

$$z\_Tclo := 0.0616$$

$$\delta := 0$$

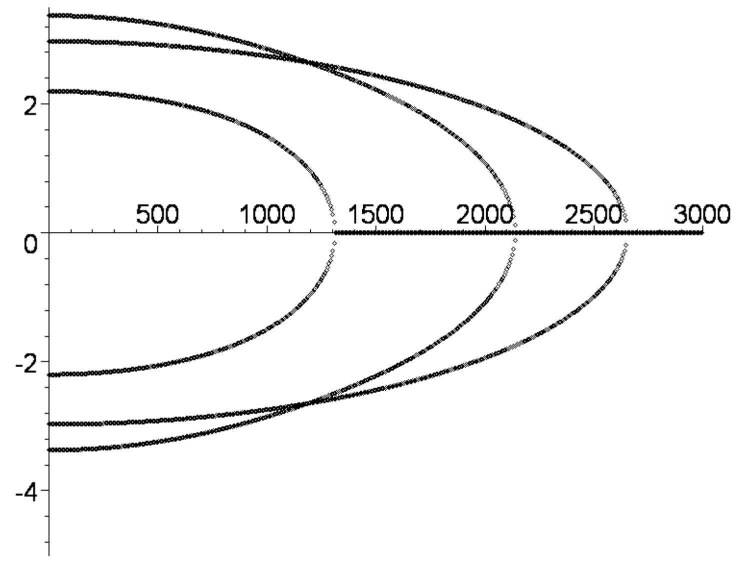
$$rT6 := [0.03708167238, 0.03708167238, 0.05860294799]$$

$$M := 4125.019454\,\lambda^6 + 0.4073980293\;10^7\,\lambda^4 + 230.8003788\,\lambda^5\,b + 0.1271467795\;10^{10}\,\lambda^2 + 151707.5305\,\lambda^3\,b + 4.189589497\,\lambda^4\,b^2 + 0.1229102238\;10^{12} + 0.2391021706\;10^8\,\lambda\,b + 1377.446912\,\lambda^2\,b^2 + 0.02473337228\,\lambda^3\,b^3$$

$$pocet := 500$$

Zobrazení velikosti vlastních frekvencí na velikosti tlumení

```
> pointplot([f[i]$i=1..6*pocet],view=[MIN..MAX,-5..3.5]);
```



Simulace nelineárního systému (pružina, tlumič, Lagrangeovy rovnice)

```
> restart;with(LinearAlgebra):with(DEtools):with(plots);
```

[*animate*, *animate3d*, *animatecurve*, *arrow*, *changecoords*, *complexplot*, *complexplot3d*, *conformal*, *conformal3d*, *contourplot*, *contourplot3d*, *coordplot*, *coordplot3d*, *densityplot*, *display*, *fieldplot*, *fieldplot3d*, *gradplot*, *gradplot3d*, *graphplot3d*, *implicitplot*, *implicitplot3d*, *inequal*, *interactive*, *interactiveparams*, *intersectplot*, *listcontplot*, *listcontplot3d*, *listdensityplot*, *listplot*, *listplot3d*, *loglogplot*, *logplot*, *matrixplot*, *multiple*, *odeplot*, *pareto*, *plotcompare*, *pointplot*, *pointplot3d*, *polarplot*, *polygonplot*, *polygonplot3d*, *polyhedra_supported*, *polyhedraplot*, *rootlocus*, *semilogplot*, *setcolors*, *setoptions*, *setoptions3d*, *spacecurve*, *sparsematrixplot*, *surfdata*, *textplot*, *textplot3d*, *tubeplot*]

Načtení Lagrangeových rovnic, vektoru momentů pružin a tlumičů

```
> read "e:/vytvory/Theta.txt":
  read "e:/vytvory/Phi.txt":
  read "e:/vytvory/Psi.txt":
  read "e:/vytvory/P.txt":
  read "e:/vytvory/T.txt":
```

start ciklu

```
MIN:=1:
MAX:=1:
for k from MIN by 1 to MAX do
```

budici funkce

```
cas:=20;
ftmax:=1000;
Amplituda:=0.001;
frekvence:=25;

zeta(t):=piecewise(t>1,Amplituda*sin(2*Pi*int(frekvence,t=0..t)),0
);
 #zeta(t):=0;
alpha(t):=0;
beta(t):=0;
```

ramena pružin

```
`r[p,theta]` :=0.19:
`r[p,psi]`[1] :=0.42/2:  `r[p,psi]`[2] :=0.42/2:
`r[p,phi]`[1] := .6075: `r[p,phi]`[2] := .4675:
```

ramena tlumicu

```
`r[t,theta]` :=0.19/2:
`r[t,psi]`[1] :=0*0.42/8:
`r[t,psi]`[2] :=0*0.42/8:
`r[t,phi]`[1] :=0* .6075/8:
`r[t,phi]`[2] := 0*.4675/8:
```

hmotove a rozmerove parametry systemu

```
g := 9.80665:
`m[4]` := 14.34: `m[5]` := 17.56: `m[R]` := 1.34:R :=
0.4:`m[6]leh`:=14.17+13.7:`m[6]clo`:=80;
`J5[x]` := 3.05: `J5[y]` := 11.37: `J5[z]` := 14.34: `JR[y]` :=
.160e-1: `JR[x]` := .25e-3:
`z[45]` := .62e-1: `z[56]` := .62e-1: `z[T5]` := .316e-1: `x[T5]`
:= -.595e-1: `z[T5]` := .316e-1: `z[S3]` := .786e-1: `x[56]` :=
-.1426e-1: `x[45]` := .755e-1: `x[S3]` := -1:`y[S3]` :=
.65:`theta[0]`:=0.2435:
```

parametry pruzin

```
`S[0,4]` := .22e-2: `S[0,5]` := .22e-2: `S[0,6]` := .22e-2:
`S[1,4]` := .7056e-1: `S[1,5]` := .7056e-1: `S[1,6]` := .7056e-1:
V0 := .3e-3: `p[a]` := 100000:n:=1:
```

vypocet tlaku v pruzinach pri rovnovazne poloze

```
`P[4]` :=
simplify(1/4*g*R*(2*`m[R]`+`m[4]`+`m[5]`+`m[6]`)/(`S[0,4]`*`r[p,th
eta]`)):

`P[5]`[1]:=simplify(-g*(-`m[5]`*`r[p,phi]`[2]-`m[6]`*`r[p,phi]`[2]
+`m[5]`*`x[T5]`+`m[6]`*`x[56]`+`m[6]`*`x[T6]`)/(`S[0,5]`*(`r[p,phi
]`[1]+`r[p,phi]`[2]))):

`P[5]`[2]:=simplify(g*(`r[p,phi]`[1]*`m[5]`+`r[p,phi]`[1]*`m[6]`+`
m[5]`*`x[T5]`+`m[6]`*`x[56]`+`m[6]`*`x[T6]`)/(`S[0,5]`*(`r[p,phi]`
[1]+`r[p,phi]`[2]))):

`P[6]`[1]
:=simplify(g*`m[6]`*(`r[p,psi]`[2]+`y[T6]`)/(`S[0,6]`*(`r[p,psi]`[
1]+`r[p,psi]`[2]))):

`P[6]`[2]
:=simplify(-g*`m[6]`*(`y[T6]`-`r[p,psi]`[1])/(`S[0,6]`*(`r[p,psi]`
[1]+`r[p,psi]`[2]))):
```

Vypocet objemu pruziny v zavislosti na zmene tlaku

```
`V[4]`(t):=V0*`P[4]`/`p[4]`(t);
`V[5]`[1](t):=V0*`P[5]`[1]/`p[5]`[1](t);
`V[5]`[2](t):=V0*`P[5]`[2]/`p[5]`[2](t);
`V[6]`[1](t):=V0*`P[6]`[1]/`p[6]`[1](t);
`V[6]`[2](t):=V0*`P[6]`[2]/`p[6]`[2](t);
```

vypocet momentu setrvacnosti a souradnice teziste horniho ramu (do vztahu pro δ je uhel zadavan ve stupnich!!!)

```
Iclo_1:=11.3:Iclo_2:=15.2:Iclo_3:=0.577:
x_Tclo:=0.05;y_Tclo:=0.05;z_Tclo:=0.0616;
x_Tleh:=0:y_Tleh:=0:z_Tleh:=0.05:
delta:=0*Pi/180;mclo:=`m[6]clo`:mleh:=14.17+13.7:
```

```
Iclo_centralni:=Matrix(3,3,[

 Iclo_3,  0    ,  0,
 0      ,Iclo_2,  0,
 0      ,  0   ,Iclo_1]):

T:=Matrix(3,3,[

  cos(delta) ,sin(delta),0,
  -sin(delta),cos(delta),0,
       0      ,     0     ,1]):

Iclo_pootoceny:=evalm(transpose(T)&*Iclo_centralni&*T):

I_m_clo:=Matrix(3,3,[
  mclo*(y_Tclo^2+z_Tclo^2),-mclo*x_Tclo*y_Tclo
,-mclo*x_Tclo*z_Tclo,
  -mclo*x_Tclo*y_Tclo
,mclo*(x_Tclo^2+z_Tclo^2),-mclo*y_Tclo*z_Tclo,
  -mclo*x_Tclo*z_Tclo     ,-mclo*y_Tclo*z_Tclo
,mclo*(x_Tclo^2+y_Tclo^2)]):

I_o6clo:=evalm(Iclo_pootoceny+I_m_clo):

I_leh:=Matrix(3,3,[
  1.8564+0.8*1.8564,0,0,
  0,7.49+0.8*7.49,0,
  0,0,9.346+0.8*9.346]):

I_m_leh:=Matrix(3,3,[
  mleh*(y_Tleh^2+z_Tleh^2),-mleh*x_Tleh*y_Tleh
,-mleh*x_Tleh*z_Tleh,
  -mleh*x_Tleh*y_Tleh
,mleh*(x_Tleh^2+z_Tleh^2),-mleh*y_Tleh*z_Tleh,
  -mleh*x_Tleh*z_Tleh     ,-mleh*y_Tleh*z_Tleh
,mleh*(x_Tleh^2+y_Tleh^2)]):

I_o6leh:=evalm(I_leh+I_m_leh):

I6:=evalm(I_o6leh+I_o6clo):

rT6:=Vector(3,[
   (mclo*x_Tclo+mleh*x_Tleh)/(mleh+mclo),
   (mclo*y_Tclo+mleh*y_Tleh)/(mleh+mclo),
   (mclo*z_Tclo+mleh*z_Tleh)/(mleh+mclo)]);
```

predefinovani oznaceni teziste a momentu setrvacnosti

```
`z[T6]` := rT6[3]: `x[T6]` := rT6[1]: `y[T6]` :=rT6[2]:
`J6[x]`:=I6[1,1]:`J6[y]`:=I6[2,2]:`J6[z]`:=I6[3,3]:`D6[xy]`:=-I6[1
,2]:`D6[yz]`:=-I6[2,3]:`D6[xz]`:=-I6[1,3]:
`m[6]` := `m[6]leh`+`m[6]clo`:
```

diferencialni rovnice popisujici zmenu tlaku v pruzinach

```
Drov[7] :=simplify(`V[4]`(t)*diff(
`p[4]`(t),t)+`p[4]`(t)*`S[0,4]`*`r[p,theta]`*x[2](t));
Drov[8]
:=simplify(`V[5]`[1](t)*diff(`p[5]`[1](t),t)+`p[5]`[1](t)*`S[0,5]`
*`r[p,phi]`[1]*x[4](t));
Drov[9]
:=simplify(`V[5]`[2](t)*diff(`p[5]`[2](t),t)-`p[5]`[2](t)*`S[0,5]`
*`r[p,phi]`[2]*x[4](t));
Drov[10]:=simplify(`V[6]`[1](t)*diff(`p[6]`[1](t),t)+`p[6]`[1](t)*
`S[0,6]`*`r[p,psi]`[1]*x[6](t));
Drov[11]:=simplify(`V[6]`[2](t)*diff(`p[6]`[2](t),t)-`p[6]`[2](t)*
`S[0,6]`*`r[p,psi]`[2]*x[6](t));
```

definice a derivace vektoru q[theta,phi,psi]

```
ddq:=vector(3,[diff(x[2](t),t),diff(x[4](t),t),diff(x[6](t),t)]):
dq1:=vector(3,[x[2](t) ,x[4](t)    ,x[6](t)]):
dq2:=vector(3,[x[2](t)^2,x[4](t)^2,x[6](t)^2]):
dq3:=vector(3,[x[2](t)^3,x[4](t)^3,x[6](t)^3]):
dq4:=vector(3,[x[2](t)^4,x[4](t)^4,x[6](t)^4]):
q:=vector(3,[x[1](t),x[3](t),x[5](t)]):

Drov[1]:=diff(x[1](t),t)=x[2](t):
Drov[2]:=diff(x[3](t),t)=x[4](t):
Drov[3]:=diff(x[5](t),t)=x[6](t):
```

Základní dynamická rovnice v maticovém tvaru

```
ZL:=evalm(Vector(3,[Theta,Phi,Psi1])+P+TL);
Drov[4]:=ZL[1]=0:
Drov[5]:=ZL[2]=0:
Drov[6]:=ZL[3]=0:
```

koeficienty vektoru buzeni

```
(simplify(Drov[4])):
(simplify(Drov[5])):
(simplify(Drov[6])):

print(`k1`[k]);
```

vypocet soustavy diferencialnich rovnic

```
ans2 :=
dsolve({Drov[1],Drov[2],Drov[3],Drov[4],Drov[5],Drov[6],Drov[7],
                Drov[8],Drov[9],Drov[10],Drov[11],

x[1](0)=0,x[2](0)=0,x[3](0)=0,x[4](0)=0,x[5](0)=0,x[6](0)=0,

`p[4]`(0)=`P[4]`,`p[5]`[1](0)=`P[5]`[1],`p[5]`[2](0)=`P[5]`[2],
                `p[6]`[1](0)=`P[6]`[1],`p[6]`[2](0)=`P[6]`[2]},
        numeric,
range=0..cas,maxfun=200000,output=listprocedure):
print(`k2`[k]);
```

Fourierova transformace

```
fy := eval(rhs(ans2[6]));
f1:=Matrix(2,ftmax,[]);
```

vzorkovani

```
for T1 from 1 by 1 to ftmax do
    i:=T1*cas/ftmax;
    f1[1,T1] := i;
    f1[2,T1] := fy(i);
od:
M:=convert(f1,Array);
b,N:=Dimension(f1);
M1:=M:
```

transformace

```
for n from 1 to N do
    H[n]:= evalhf(sum(M1[2,k]*exp(-(I*2)*Pi*k*n/N), k = 1 .. N));
end do:

FT[k]:=pointplot3d(
                  [[`r[p,phi]`[1],p/cas, abs(H[p])]$p = 1 .. N],
                  labels=[`rp[phi][m]`,`f[Hz`,`amplituda`],
                  symbol=circle,symbolsize=5);
#!!!!!!!!!!!!!!!!!(změnit proměnou a název osy)
print(`k3`[k]);

od:
```

$$k1_1$$

$$k2_1$$

$$k3_1$$

```
> GRAF:=display(FT[ng]$ng=MIN..MAX,axes=boxed,view=[0.5..0.7,0..5,
  0..1000000]):#!!!!!!!!!(změnit rozsah)
  display(GRAF);
  save GRAF, "e:/vytvory/rppsi6.txt":#!!!!!!!!!(změnit název
  souboru)
```