Technická univerzita v Liberci

Katedra částí a mechanismů strojů

# VÝZKUM TALÍŘOVÝCH PRUŽIN

Disertační práce

Ing. Tomáš Svoboda

Liberec 2006

# Technická univerzita v Liberci

## Katedra částí a mechanismů strojů

# VÝZKUM TALÍŘOVÝCH PRUŽIN

## Disertační práce

k získání akademického titulu doktor (Ph.D.)

ve studijním oboru

Části a mechanismy strojů

**Ing. Tomáš Svoboda**

Školitel: prof. Ing. Jan Honců, CSc.

| | |
|---|---|
| Studijní program: | P2302 Stroje a zařízení |
| Studijní obor a zaměření: | 2302V010 Konstrukce strojů a zařízení, Části a mechanismy strojů |

Datum státní doktorské zkoušky: 28. 4. 2005

# PROHLÁŠENÍ

Byl(a) jsem seznámen(a) s tím, že na mou disertační práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. o právu autorském, zejména § 60 - školní dílo.

Beru na vědomí, že Technická univerzita v Liberci (TUL) nezasahuje do mých autorských práv užitím mé disertační práce pro vnitřní potřebu TUL.

Užiji-li disertační práci nebo poskytnu-li licenci k jejímu využití, jsem si vědom povinnosti informovat o této skutečnosti TUL; v tomto případě má TUL právo ode mne požadovat úhradu nákladů, které vynaložila na vytvoření díla, až do jejich skutečné výše.

Disertační práci jsem vypracoval(a) samostatně s použitím uvedené literatury a na základě konzultací s vedoucím disertační práce.

Datum: .........

Podpis: .........

# PODĚKOVÁNÍ

Na tomto místě bych chtěl poděkovat svému školiteli prof. Ing. Janu Honců CSc. z Katedry částí a mechanismů strojů Technické univerzity v Liberci za poskytnutý čas a cenné rady z oblasti problematiky talířových pružin.

Také bych rád poděkoval všem členům Katedry částí a mechaniky strojů za jejich podnětné připomínky, zaměstnancům Hydrodynamické laboratoře Technické univerzity v Liberci za jejich pomoc při přípravě a realizaci experimentálních měření.

# ANOTACE

## Výzkum talířových pružin

Disertační práce je zaměřena na problematiku talířových pružin. První část práce se zabývá běžnými talířovými pružinami používanými v technické praxi. Druhá část práce je zaměřena na problematiku talířových pružin s vypínacími paprsky.

Nejprve je podrobně uveden klasický způsob výpočtu běžných talířových pružin odvozený Almenem a Lászlem. Jsou zde uvedeny základní vzorce pro určení zatěžovací charakteristiky a obvodového napětí ve vybraných místech.

Klasický výpočet pomocí vzorců je následně porovnán s výpočtem užitím metody konečných prvků (MKP). Pro užití MKP je zde uveden postup sestavení dvou různých modelů. Jedná se o model skořepinový a objemový.

K ověření správnosti modelů použitých při výpočtech užitím MKP bylo provedeno experimentální měření v Hydrodynamické laboratoři v Doubí. Měření zatěžovací charakteristiky a obvodového napětí bylo realizováno na dvou sadách pružin s různými rozměry. Takto získaná data byla porovnána s výpočtovými modely.

Druhá část disertační práce je zaměřena na talířové pružiny s vypínacími paprsky, které jsou používané ve spojkách vozidel.

Pro výpočet užitím MKP byly sestaveny výpočtové modely. Prvním je podrobný model s kontaktními elementy, druhým pak model zjednodušený bez kontaktních elementů. V obou případech byly určeny zatěžovací charakteristiky a následně mezi sebou porovnány. Další srovnávanou veličinou bylo obvodové napětí.

**Klíčová slova:** talířová pružina, talířová pružina s vypínacími paprsky, metoda konečných prvků (MKP), zatěžovací charakteristika pružiny, napjatost pružiny, obvodové napětí v talířové pružině, radiální napětí v talířové pružině, výpočet dle Almen–László, spojka vozidla, velké deformace

# ANNOTATION

## Research of Belleville springs

The PhD Thesis deals with problems of disc springs. The first section is focused on classical Belleville springs which are used in common engineering applications. The next section is concentrated on research of a disc spring with finger arms.

The first chapter contains the classical theory of Belleville springs, which was created by Almen and László. Important formulae for calculating load characteristics and circumferential stress are introduced and discussed.

The classical way of calculation is compared with a calculation technique using Finite Element Method (FEM). Two different models were prepared for FEM calculations – a shell model and solid model.

These ways of calculation were verified and consequently compared with the experimental measurements processed in the Hydrodynamic laboratory Doubí, the Czech Republic. The measurements were accomplished on two different types of disc springs with dissimilar dimensions. The data obtained this way were compared with FEM calculations.

The last section of the PhD Thesis deals with problems of a disc spring with finger arms which is used in car clutches.

Several models were prepared for FEM calculations. The first one was designed as a model with contact elements, while the second model was without contact elements. In both cases load characteristics were being calculated and compared respectively. The next factor being compared was circumferential stress.

**Keywords:** disc spring, Belleville spring, disc spring with finger arms, Finite Element Method (FEM), loading characteristics, disc spring stress, circumferential stress of Belleville spring, radial stress in Belleville spring, Almen–László calculation, clutch, large deformations

# ANNOTATION

## Forschung der Tellerfedern

Dissertation ist auf Problematik der Tellerfedern gerichtet. Erstes Teil der Dissertation beschäftigt sich über übliche Tellerfeder, die in technische Praxis benutzt sind. Zweites Teil ist auf Problematik der Kupplungstellerfedern gerichtet.

An Anfang ist klassische Berechnung der üblichen Tellerfeder nach Almen und Láslo beschrieben. In der Dissertation sind Grundgleichungen für Belastungscharakteristik und Umfangsspannung an den ausgewählten Stellen genannt.

Klassische Berechnung ist durch Grundgleichungen mit FEM Methode verglichen. Für FEM Berechnungen sind hier Vorgänge für zweie unterschiedliche Modelle beschrieben. Es geht um Schale- und Volumenmodell.

Zu der Verifikation der Modelle, die in FEM Berechnungen genutzt wurden, wurden einige experimentale Messungen im hydrodynamischen Labor in Liberec Doubí durchgeführt. Messungen der Belastungscharakteristik und der Umfangsspannung wurden auf zweien Sätzen von Tellerfedern mit unterschiedlichen Maßen ausgeführt. So gesammelte Ergebnisse wurden mit Berechnungsmodellen verglichen.

Zweites Teil der Dissertation ist auf Kupplungstellerfeder, die in Fahrzeugen benutzt sind, gerichtet.

Für FEM Methode wurden zweie Berechnungsmodelle erstellt. Erstes Modell wurde komplett mit Kontaktelementen erstellt, zweites vereinfachten Modell ohne Kontaktelemente. In den beiden Fällen wurden Belastungscharakteristiken festgelegt und dann verglichen. Weiterer Vergleichsparameter war Umfangsspannung.

**Schlüsselwörter:** Tellerfeder, Kupplungstellerfeder, Methode der finiten Elemente (FEM), Finiteelementemethode (FEM), Belastungscharakteristik der Feder, Spannungszustand der Feder, Umfangsspannung der Tellerfeder, Radialspannung in der Tellerfeder, Berechnung nach Almen-László, Fahrzeugskupplung, große Deformation

# OBSAH

# SEZNAM ZKRATEK

| *Označení* | *Jednotka* | *Popis* |
|---|---|---|
| **A** | [J] | práce talířové pružiny |
| **c** | [N/mm] | tuhost talířové pružiny |
| **d** | [mm] | malý průměr pružiny |
| **D** | [mm] | velký průměr pružiny |
| $\mathbf{D_O}$ | [mm] | střední průměr pružiny |
| **E** | [MPa] | Youngův modul pružnosti v tahu |
| **F** | [N] | zatěžující síla |
| $\mathbf{F_{OD}}$ | [kN] | síla měřená při odlehčení pružiny |
| $\mathbf{F_V}$ | [N] | vypínací síla |
| $\mathbf{F_{ZA}}$ | [kN] | síla měřená při zatěžování pružiny |
| **h** | [mm] | volná výška  talířové pružiny |
| $\mathbf{R_A}$ | [N] | zátěžná síla v místě ***A*** |
| $\mathbf{R_B}$ | [N] | zátěžná síla v místě ***B*** |
| **s** | [mm] | stlačení talířové pružiny |
| **t** | [mm] | tloušťka plechu pružiny |
| $\mathbf{u_r}$ | [mm] | posuv v radiálním směru |
| $\mathbf{u_z}$ | [mm] | posuv v osovém směru |
| $\boldsymbol{\alpha}$ | [-] | součinitel $\boldsymbol{\alpha}$ |
| $\boldsymbol{\beta}$ | [-] | součinitel $\boldsymbol{\beta}$ |
| $\boldsymbol{\gamma}$ | [-] | součinitel $\boldsymbol{\gamma}$ |
| $\boldsymbol{\delta}$ | [-] | součinitel $\boldsymbol{\delta}$ |
| $\mathbf{\Delta d}$, $\mathbf{\Delta D}$ | [mm] | změna vnitřního, vnějšího průměru pružiny |
| $\mathbf{\Delta e}$, $\mathbf{\Delta i}$ | [mm] | vůle na vnějším, vnitřním průměru pružiny |
| $\mathbf{\Delta z_V}$ | [mm] | vypínací vůle talířové pružiny s paprsky |
| $\boldsymbol{\mu}$ | [-] | Poissonovo číslo |
| $\boldsymbol{\sigma_I}$ | [MPa] | obvodové napětí v místě ***I*** |
| $\boldsymbol{\sigma_{II}}$ | [MPa] | obvodové napětí v místě ***II*** |
| $\boldsymbol{\sigma_{III}}$ | [MPa] | obvodové napětí v místě ***III*** |
| $\boldsymbol{\sigma_{IV}}$ | [MPa] | obvodové napětí v místě ***IV*** |
| $\boldsymbol{\sigma_O}$ | [MPa] | obvodové napětí |

| | | |
|---|---|---|
| $\sigma_{OM}$ | [MPa] | obvodové napětí v místě ***OM*** |
| $\sigma_r$ | [MPa] | radiální napětí |
| $\varphi$ | [-] | deformační úhel |

Označení matic, vektorů a skalárů v kapitole 4.1

| ***Označení*** | ***Popis*** |
|---|---|
| **B** | matice derivací funkce ***u(x)*** |
| ${}^{0}\boldsymbol{C}$ | počáteční konfigurace tělesa |
| ${}^{f}\boldsymbol{C}$ | koncová konfigurace tělesa |
| ${}^{t}\boldsymbol{C}$ | konfigurace tělesa v čase ***t*** |
| ${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{C}$ | konfigurace tělesa v čase ***t+Δt*** |
| **E** | Youngův modul pružnosti v tahu |
| **f** | matice vnějšího zatížení prvku |
| **F** | celková matice zatížení soustavy |
| $\vec{g}$ | vektor gravitačního zrychlení |
| **k** | tuhostní matice prvku |
| **K** | celková tuhostní matice soustavy |
| **N** | matice tvarových (bázových) funkcí |
| **P** | potenciál vnějších sil |
| **S** | plocha průřezu prvku |
| **u, v, w** | posuvy uzlů ve směru x, y, z |
| **U** | celková matice deformačních parametrů |
| **W** | celková energie napjatosti prvku |
| $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ | přetvoření v rovině x, y, z |
| $\delta$ | matice deformačních parametrů |
| $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ | přetvoření ve směru x, y, z |
| $\mu$ | Poissonovo číslo |
| $\Pi$ | celková potenciální energie soustavy |
| $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ | napětí ve směru x, y, z |
| $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ | napětí v rovině x, y, z |

# 1 ÚVOD

V technické praxi mají pružiny velmi široké uplatnění v nejrůznějších strojních celcích a zařízeních. Používají se jako akumulátory energie, k vyvozování sil a momentů, k pružnému ukládaní součástí strojů i k mnoha jiným účelům.

Aby byly pružiny správně navrženy a v provozu obstály, je třeba splnit několik podmínek. Pro návrh běžných typů pružin (šroubovité, listové, talířové aj.) je možné použít známých vzorců odvozených v teorii pružnosti a pevnosti. Rovnice poskytují nezbytné množství základních informací, např. dávají představu o průběhu tuhosti a napjatosti v pružině. U pružin složitějších tvarů, kterých zná technická praxe celou řadu, literatura základní vztahy neposkytuje, a to především kvůli přílišné složitosti či dokonce nemožnosti jejich odvození. Z tohoto důvodu je nutné pro výzkum vlastností pružin složitějších tvarů zvolit jinou metodu, např. metodu konečných prvků (dále jen MKP). Právě moderní výpočetní metody, jejichž příkladem je MKP, umožňují provádět výpočty v podstatě bez přílišných zjednodušujících předpokladů, které bylo nutné zavést při používání starších postupů.

# 2 ÚČEL PRÁCE

Vytčenými cíli disertační práce jsou :

- Zjištění zatěžovací charakteristiky základního druhu talířových pružin dvěma různými způsoby a porovnání výsledků s charakteristikami vypočtenými podle užívaných teoretických vzorců,
- zjištění stavu napětí v průřezech těchto pružin stejnými způsoby a opět jejich porovnání s teoretickými výsledky,
- stanovení, případně upřesnění doporučených vůlí prostorových (zástavbových) rozměrů součástí, které základní druh talířových pružin při funkci ustřeďují, což může proti současnému stavu výrazně zlepšit zejména stabilitu pružin pracujících v sadách.
- Obdobné zjištění zatěžovacích charakteristik a napěťových stavů pro talířové pružiny s vypínacími paprsky,
- sestavení vhodného výpočtového modelu pro metodu konečných prvků pro stanovení výše uvedených závislostí,
- prověření vlivu výrobních nepřesností a opotřebení lamely spojky automobilu na zatěžovací charakteristiky pružiny s vypínacími paprsky,
- zjištění vliv tvaru vypínacího paprsku na zatěžovací charakteristiku a napjatost v talířové pružině.

# 3 BĚŽNÁ TALÍŘOVÁ PRUŽINA

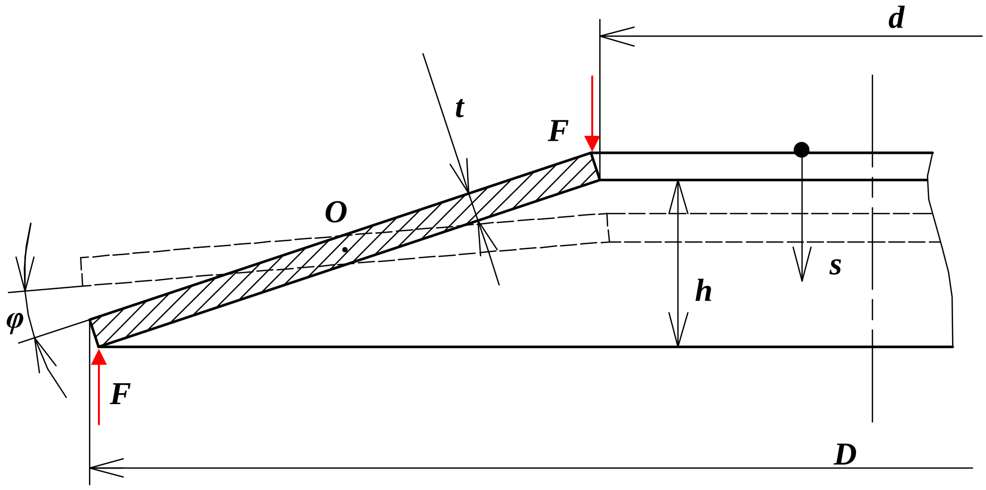
Obecně jsou běžné talířové pružiny vhodné pro aplikaci v takových konstrukcích, kde je k dispozici poměrně malý zástavbový prostor a vyžadujeme velkou zatěžovací sílu při malých stlačeních.

## 3.1 Klasický výpočet talířové pružiny

Talířové pružiny s malým sklonem površky kuželovitého pláště k opěrné desce (do 6°) se dají dobře počítat podle teorie rovinných mezikruhových desek. Pro konstrukce s větším úhlem površky však tyto metody nelze použít. Výpočtem takovýchto pružin se zabývali např. E. Meissner a F. Dubios v teorii o plášti dutého komolého kužele. Nejpoužívanější teorie pro výpočet běžných talířových pružin byla odvozena J. O. Almenem a A. Lászlem [1] v roce 1936.

## 3.2 Výpočet podle Almen-László

Teorie odvozená Almenem a Lászlem, stejně tak výše uvedené teorie, platí za určitých zjednodušujících předpokladů. Zanedbává radiální napětí, které je na koncích stejně vždy nulové. Počítá se pouze s obvodovými napětími, která vznikají jednak radiálním posunutím elementu při deformaci a dále natočením řezu o deformační úhel $\varphi$. Na obr. 3.2.1 je vyznačen bod ***O***, který je relativním středem natáčení průřezu pružiny. O určení polohy tohoto bodu bude pojednáno později.




*Obr. 3.2.1: Schéma talířové pružiny*

Almen a László odvodili základní vztahy pro určení zatěžovací charakteristiky, průběhu napětí a dalších veličin. Tyto vztahy jsou uvedeny v následujících odstavcích.

### 3.2.1 Zatěžovací charakteristika

Zatěžovací charakteristika udává závislost mezi stlačením pružiny a vyvozovanou silou. Závislost je dána vztahem (3.1),

$$F(s) = \frac{4E}{1-\mu^2} \cdot \frac{s^4}{\alpha \cdot D^2} \cdot \frac{s}{t} \cdot \left[ \left( \frac{h}{t} - \frac{s}{t} \right) \cdot \left( \frac{h}{t} - \frac{s}{2t} \right) + 1 \right], \tag{3.1}$$

kde součinitel $\boldsymbol{\alpha}$ je dán rovnicí,

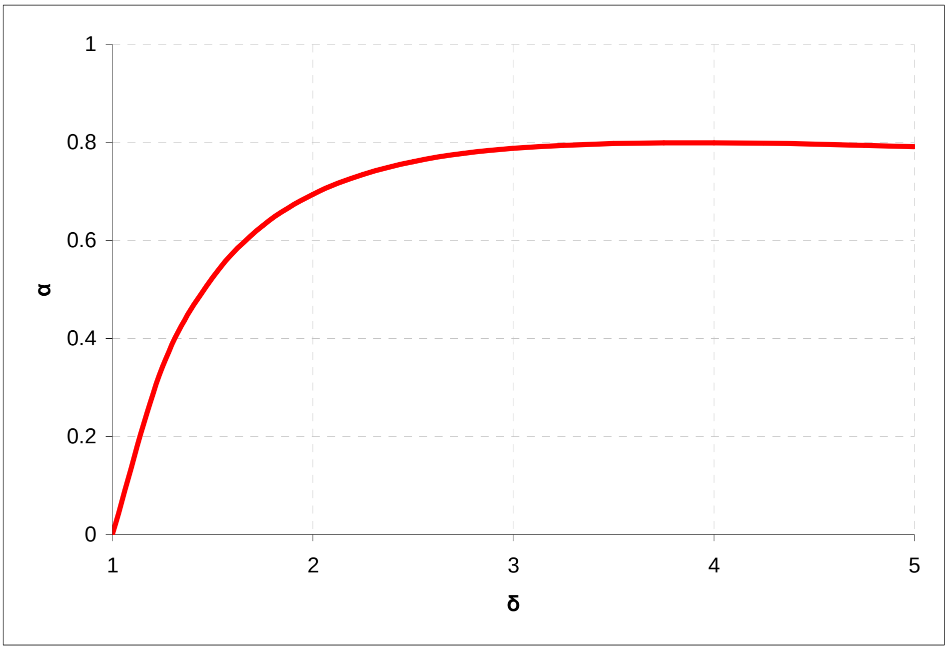
$$\alpha = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\left( \frac{\delta - 1}{\delta} \right)^2}{\frac{\delta + 1}{\delta - 1} - \frac{2}{\ln \delta}}. \tag{3.2}$$

Graf na obr. 3.2.2 ukazuje, jak se mění velikost $\boldsymbol{\alpha}$ v závislosti na součiniteli $\boldsymbol{\delta}$.

Součinitel $\boldsymbol{\delta}$ je poměrem dvou hlavních průměrů pružiny $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{d}$,

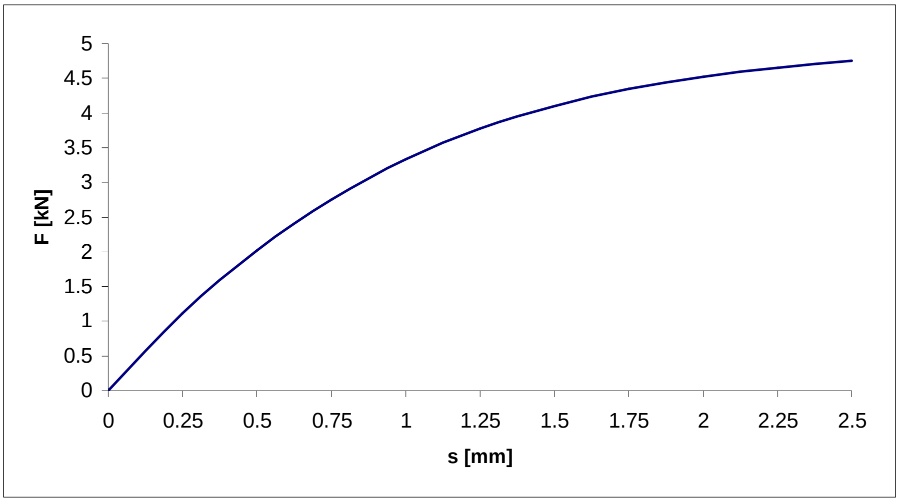
$$\delta = \frac{D}{d}. \tag{3.3}$$

Dále se ve vzorci (3.1) objevuje Youngův modul pružnosti $\boldsymbol{E}$ a Poissonovo číslo $\boldsymbol{\mu}$. Význam ostatních veličin je zřejmý z obr. 3.2.1.



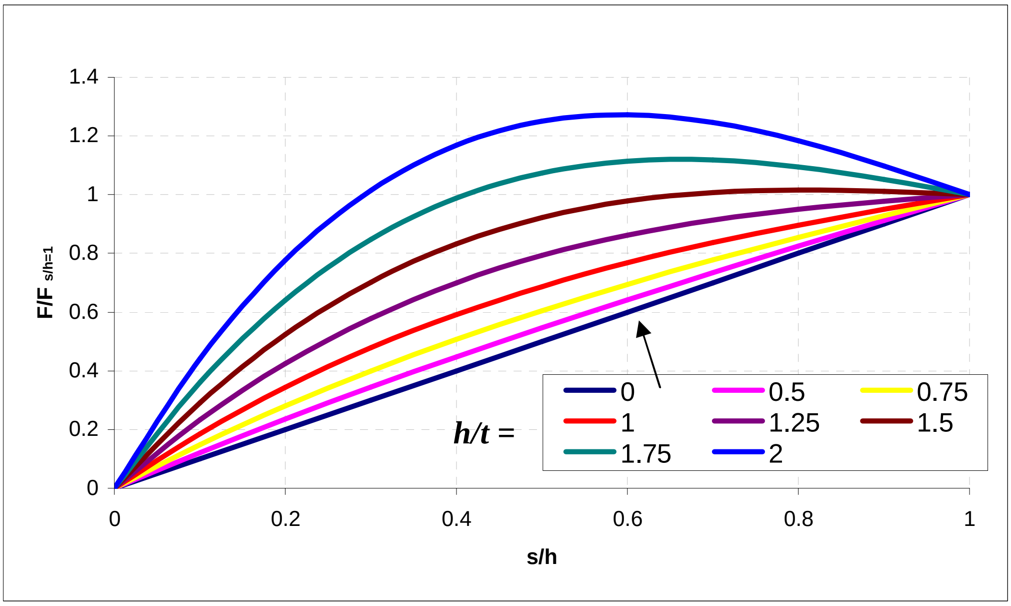

*Obr. 3.2.2: Typický průběh součinitele* $\boldsymbol{\alpha}$

Ze vztahu (3.1) je zřejmé, že zatěžovací charakteristika je obecně nelineární. Příklad typického průběhu zatěžovací charakteristiky zobrazuje obr. 3.2.3. Charakteristika odpovídá pružině dle normy DIN 2093 s rozměry ***D*** = 70 mm, ***d*** = 25,5 mm, ***t*** = 2 mm, ***h*** = 2,5 mm.




*Obr. 3.2.3: Typická zatěžovací charakteristika*

Abychom mohli lépe porovnávat charakteristiky pružin různých rozměrů, je vhodné na vodorovnou osu vynášet poměr $s/h$ místo stlačení ***s*** a na svislou osu pak poměr $F/F_{s/h=1}$. Síla označená $F_{s/h=1}$ odpovídá stavu stlačení ***s*** = ***h***. Toto srovnání je provedeno v následujícím grafu pro různé poměry ***h/t***.



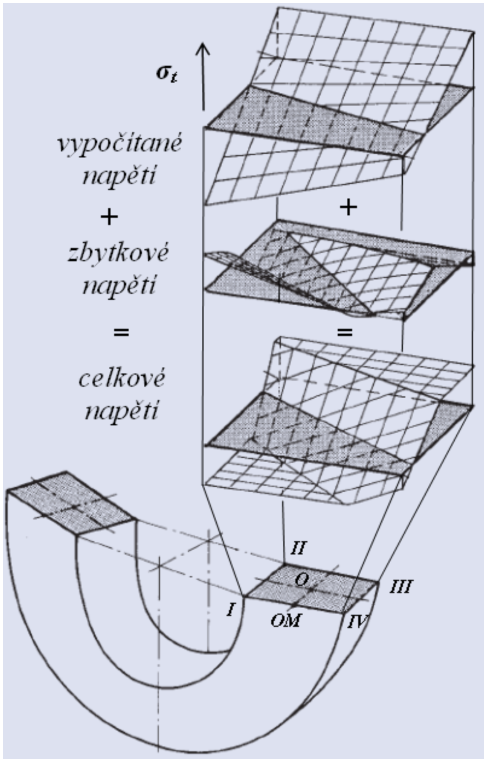

*Obr. 3.2.4: Porovnání zatěžovacích charakteristik*

Z uvedených křivek je zřejmá značná proměnnost průběhů, jakých může zatěžovací charakteristika nabývat. Pro malé poměry ***h/t*** je závislost téměř lineární, pro větší hodnoty se stává silně nelineární.

### 3.2.2 Napjatost v pružině

Při odvozování základních vztahů bylo autory teorie zavedeno několik zjednodušujících předpokladů. Zjednodušení se týkalo především již zmíněného zanedbání radiálních napětí. Radiální napětí se na celkové napjatosti v pružině podílí pouze nevýznamnou částí, na okrajích pružiny (poblíž průměrů ***D***, ***d***) je dokonce nulové. Největší měrou se na napjatosti podílí obvodové napětí.

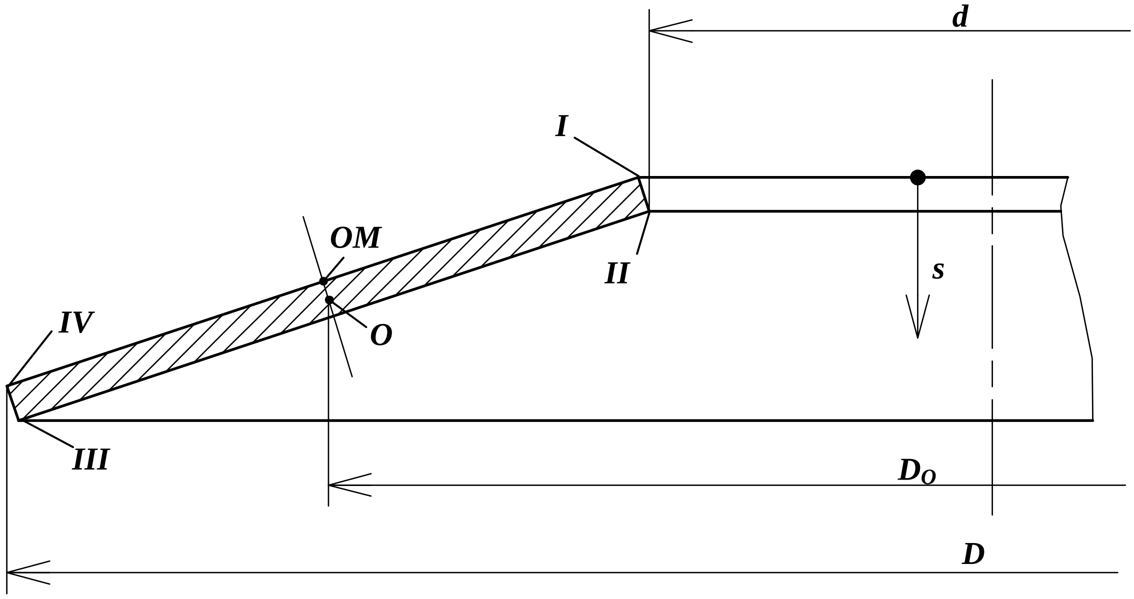
Obvodové napětí v pružině vzniká jednak radiálním posunutím elementu při deformaci a dále pak natočením řezu kolem bodu ***O*** o deformační úhel $\varphi$. Obvodové napětí se svou radiální složkou pak uplatní k zachycení vnější síly ***F*** vyvolávající moment.




*Obr. 3.2.5: Obvodové napětí*

Ve skutečnosti se mimo obvodových napětí, vznikajících v důsledku zatížení, vyskytují v pružině ještě zbytková (residuální) napětí [20], [21], viz obr. 3.2.5. Ta se objevují především v souvislosti s přetvořením výchozího materiálu z pružinové oceli při výrobě. Dalším zdrojem zbytkových napětí jsou úpravy povrchu, jako je např. kuličkování. Celkové napětí v pružině je pak prostý součet obvodového napětí vzniklého od vnějšího zatížení a zbytkového napětí. Z obrázku je patrné, že zbytková napětí snižují celkovou napjatost v talířové pružině. Pokud tedy budeme počítat pouze s napětími od zatížení, bude náš výpočet na straně bezpečnosti.

Nebývá zvykem určovat obvodová napětí v celém průřezu pružiny, ale pouze ve význačných místech, jak ukazuje obr. 3.2.6. Jedná se o hrany pružiny (místa ***I*** až ***IV***) a místo ***OM***, které odpovídá kolmému průmětu bodu ***O*** na vrchní stranu pružiny. Bod ***OM*** je vhodný pro experimentální měření napjatosti pomocí tenzometrů.




*Obr. 3.2.6: Místa výpočtu obvodových napětí*

Průměr $\boldsymbol{D_O}$ se určuje na základě vztahu

$$D_O = \frac{D-d}{\ln\left(\frac{D}{d}\right)} \tag{3.4}$$

Pro výpočet napětí $\boldsymbol{\sigma_I} \div \boldsymbol{\sigma_{IV}}$ a $\boldsymbol{\sigma_{OM}}$ platí následující rovnice

$$\sigma_I = \frac{4E}{1-\mu^2} \cdot \frac{t^2}{\alpha \cdot D^2} \cdot \frac{s}{t} \cdot \left[ -\beta\left(\frac{h}{t} - \frac{s}{2t}\right) - \gamma \right], \tag{3.5}$$

$$\sigma_{II} = \frac{4E}{1-\mu^2} \cdot \frac{t^2}{\alpha \cdot D^2} \cdot \frac{s}{t} \cdot \left[ -\beta\left(\frac{h}{t} - \frac{s}{2t}\right) + \gamma \right], \tag{3.6}$$

$$\sigma_{III} = \frac{4E}{1-\mu^2} \cdot \frac{t^2}{\alpha \cdot \delta \cdot D^2} \cdot \frac{s}{t} \cdot \left[ (2\gamma - \beta) \cdot \left(\frac{h}{t} - \frac{s}{2t}\right) + \gamma \right], \tag{3.7}$$

$$\sigma_{IV} = \frac{4E}{1-\mu^2} \cdot \frac{t^2}{\alpha \cdot \delta \cdot D^2} \cdot \frac{s}{t} \cdot \left[ (2\gamma - \beta) \cdot \left(\frac{h}{t} - \frac{s}{2t}\right) - \gamma \right], \tag{3.8}$$

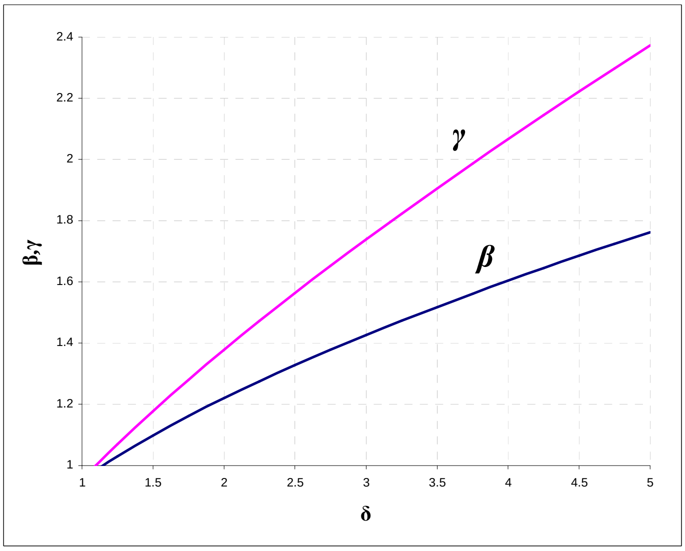
$$\sigma_{OM} = -\frac{4E}{1-\mu^2} \cdot \frac{t^2}{\alpha \cdot D^2} \cdot \frac{s}{t} \cdot \frac{3}{\pi}, \tag{3.9}$$

v nichž součinitele $\boldsymbol{\beta}$ a $\boldsymbol{\gamma}$ udávají vztahy

$$\beta = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{6}{\ln\delta} \cdot \left( \frac{\delta - 1}{\ln\delta} - 1 \right), \tag{3.10}$$

$$\gamma = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{6}{\ln \delta} \cdot \frac{\delta - 1}{2}. \qquad (3.11)$$

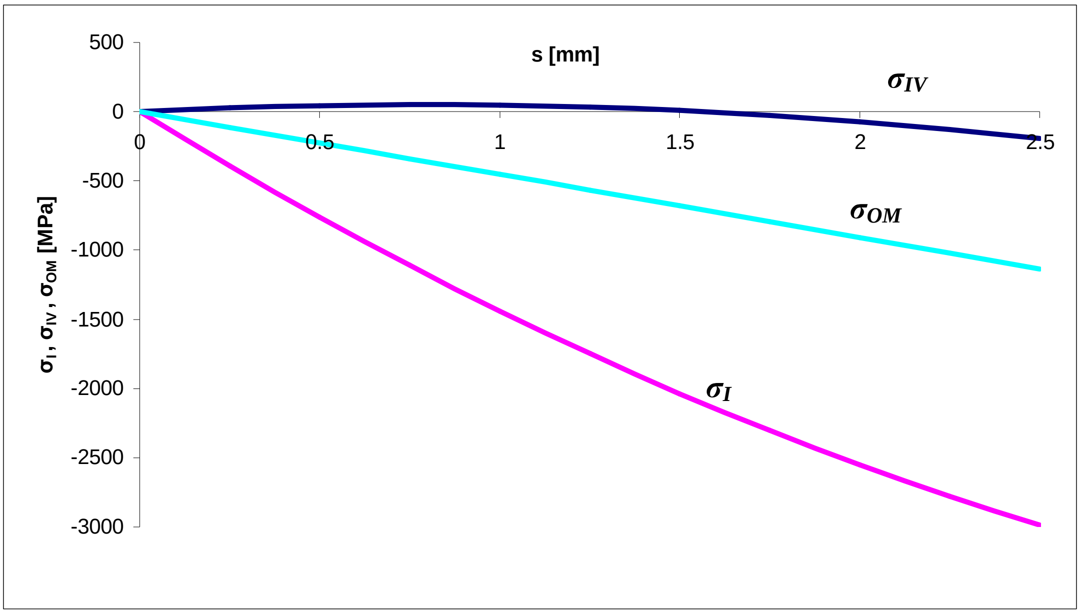
Pro úplnost je zde ještě uveden na obr. 3.2.7 graf, který znázorňuje průběhy součinitelů $\boldsymbol{\beta}$ a $\boldsymbol{\gamma}$ v závislosti na poměru $\boldsymbol{\delta}$.




*Obr. 3.2.7: Průběh součinitelů* $\boldsymbol{\beta}$ *a* $\boldsymbol{\gamma}$

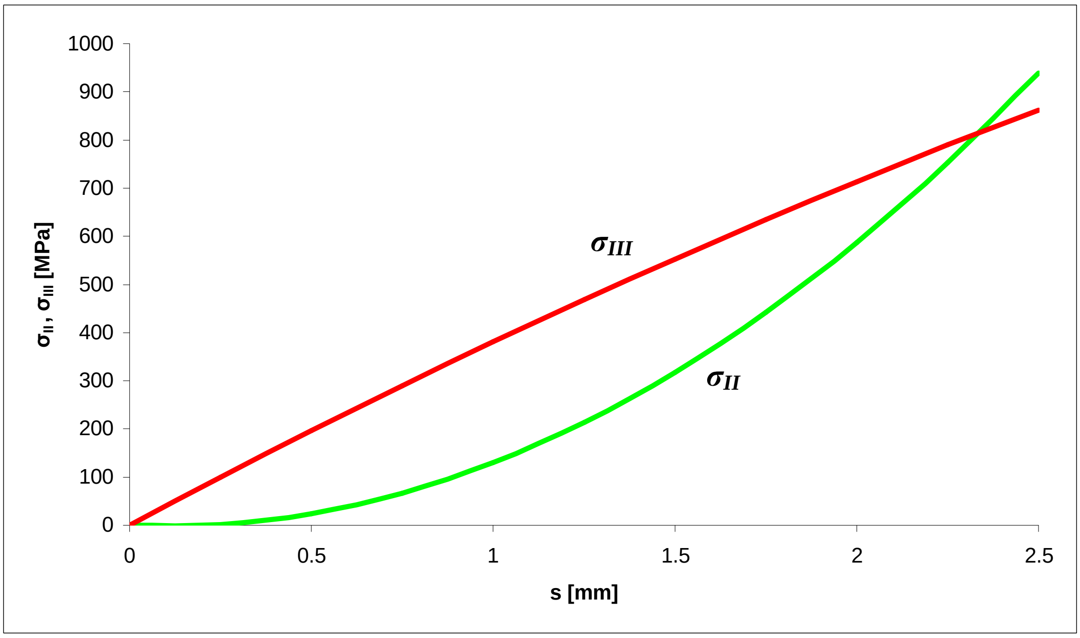
Na základě výše uvedených vztahů je možné vykreslit průběhy jednotlivých obvodových napětí v závislosti na stlačení pružiny. Opět se jedná o pružinu s rozměry $\boldsymbol{D}$ = 70 mm, $\boldsymbol{d}$ = 25,5 mm, $\boldsymbol{t}$ = 2 mm, $\boldsymbol{h}$ = 2,5 mm.

Na následujícím grafu jsou vykreslena obvodová napětí příslušející vrchní straně pružiny, tj. místa ***I***, ***IV*** a ***OM***. Podle předběžných odhadů vznikají při zatěžování v těchto místech tlaková napětí, což uvedené průběhy v podstatě prokazují (až na místo ***IV***).




*Obr. 3.2.8: Obvodová napětí v místech **I**, **IV** a **OM***

Graf na obr. 3.2.9 ukazuje průběhy napětí v místech ***II*** a ***III*** ležících na spodní straně pružiny. V tomto případě jsou podle očekávání obvodová napětí tahová.




*Obr. 3.2.9: Obvodová napětí v místech **II a III***

### 3.2.3 Tuhost pružiny

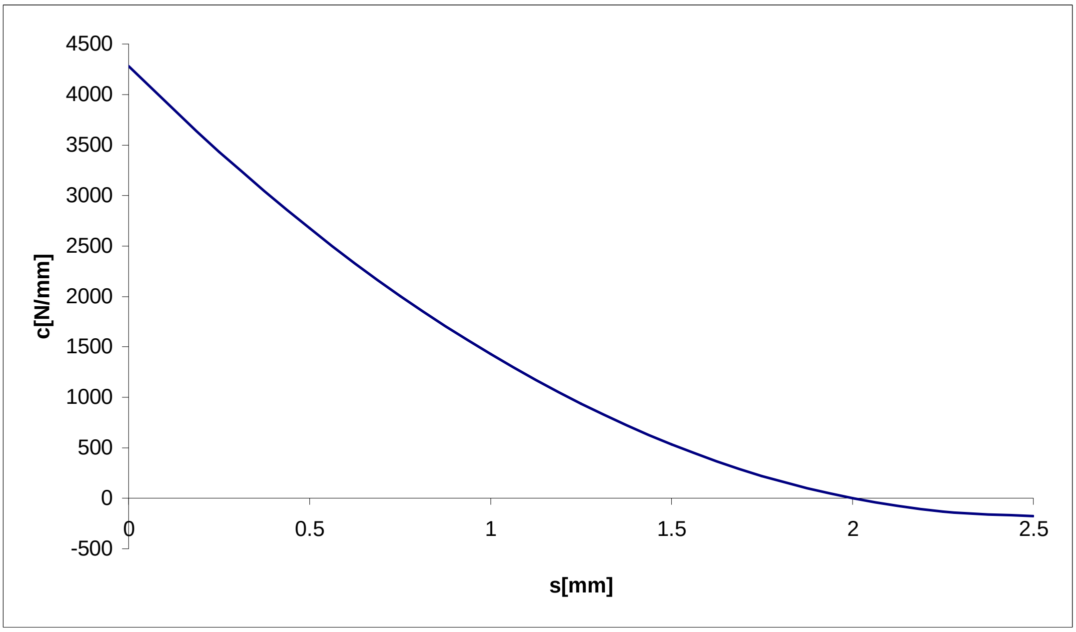
Další užitečnou veličinou k popisu pružin je tuhost, kterou získáme derivací závislosti síly na stlačení, tedy

$$c = \frac{dF}{ds}, \tag{3.12}$$

čímž dostáváme vztah

$$c(s) = \frac{4E}{1-\mu^2} \cdot \frac{s^3}{\alpha \cdot D^2} \cdot \left[ \left(\frac{h}{t}\right)^2 - 3 \cdot \frac{h}{t} \cdot \frac{s}{t} + \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{s}{t}\right)^2 + 1 \right]. \tag{3.13}$$

Podobně jako zatěžovací charakteristika pružiny je i průběh tuhosti v závislosti na stlačení nelineární, jak je z následujícího grafu na obr. 3.2.10 zřejmé.




*Obr. 3.2.10: Tuhostní charakteristika*

Hodnota tuhosti zkoumané pružiny s rostoucím stlačením postupně klesá až do záporných hodnot.

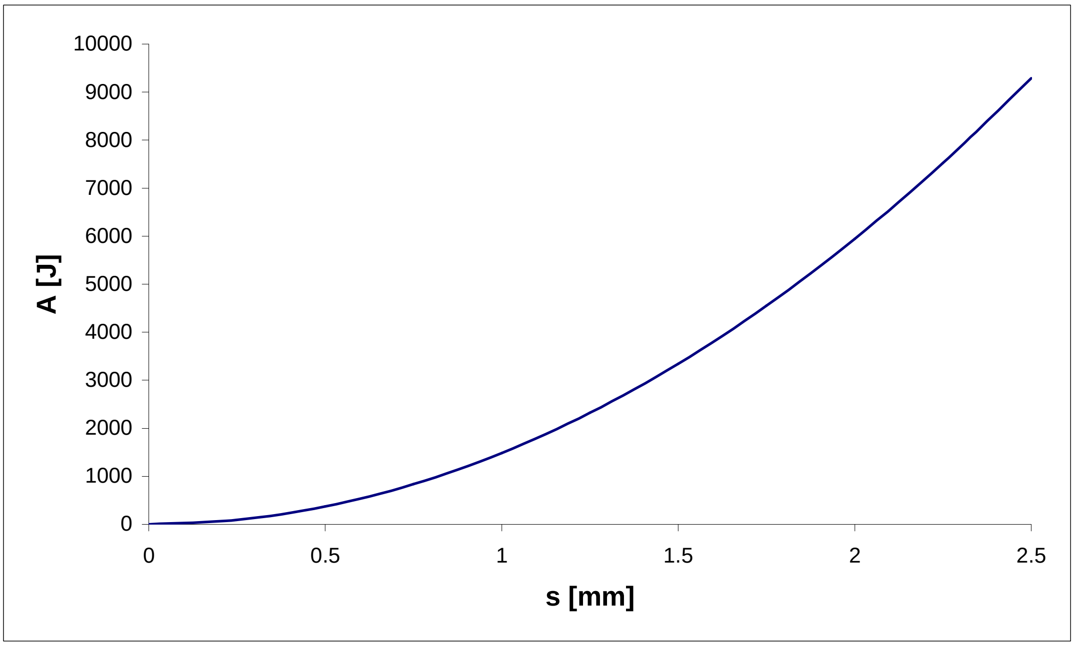
### 3.2.4 Deformační práce talířové pružiny při zatěžování

Ze zatěžovací charakteristiky lze také určit velikost vynaložené práce při postupném zatěžování pružiny. Je dána velikostí plochy pod křivkou zatěžovací charakteristiky ***F(s)***, tedy

$$A(s) = \int_0^s F(s) \cdot ds, \tag{3.14}$$

$$A(s) = \frac{2E}{1-\mu^2} \cdot \frac{s^5}{\alpha \cdot D^2} \cdot \left(\frac{s}{t}\right)^2 \cdot \left[\left(\frac{h}{t} - \frac{s}{2t}\right)^2 + 1\right]. \tag{3.15}$$

V následujícím grafu je vynesena velikost práce talířové pružiny v závislosti na stlačení ***s***.




*Obr. 3.2.11: Práce talířové pružiny*

# 4 VÝPOČET TALÍŘOVÉ PRUŽINY UŽITÍM METODY KONEČNÝCH PRVKŮ

Klasické analytické metody mají jistá omezení a ne vždy jsou vhodná k použití ve všech technických aplikacích, proto se velmi často používají numerické metody. V současnosti je rozšířenou a hojně používanou numerickou metodou metoda konečných prvků (dále MKP). Její počátky lze vysledovat v minulých stoletích, rozvinout se však mohla až v období pokročilé výpočetní techniky a rozvoje metod rychlého řešení systému rovnic. To přirozeně vedlo ke vzniku velkého množství programů postavených na základech algoritmu MKP, vyvíjených z počátku v univerzitním prostředí v souvislosti s řešením výzkumných úkolů. Postupem času se stále častěji používalo vyvinutého software k řešení inženýrských problémů. Zájem o nový výpočetní prostředek pak přirozeně vedl k rozvoji programů na čistě komerčním základě.

## 4.1 Princip MKP

Jednou ze základních úloh pružnosti a pevnosti je určit pro těleso se známým tvarem, materiálem, zatížením a vazbami k okolí jeho deformaci a napjatost. V obecné prostorové statické úloze představují celkem 15 neznámých funkcí proměnných x, y, z. Jsou to:

- tři posuvy $u, v, w$
- šest přetvoření $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$
- a šest napětí $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ .

Tyto funkce jsou navzájem vázány systémem obecných rovnic pružnosti, které musí být splněny uvnitř řešené oblasti. Jsou to rovnice rovnováhy, rovnice fyzikální neboli konstitutivní a rovnice geometrické. Na hranici řešené oblasti pak musí být splněny předepsané okrajové podmínky.

Vztahy obecné pružnosti představují systém 15 rovnic, postačující spolu s okrajovými podmínkami k určení 15 neznámých funkcí posuvů, přetvoření a napětí. Je dokázáno, že pokud se nám podaří nalézt řešení uvedené soustavy rovnic, jedná se o řešení jediné.

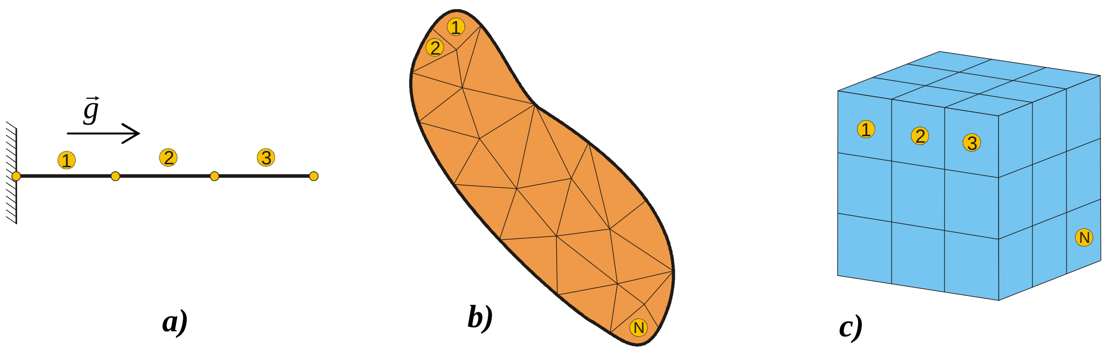
Analytické řešení soustavy rovnic s použitím integrálního a diferenciálního počtu je obtížné a v praxi použitelné pouze pro jednoduché případy. Výsledek pak dostaneme ve tvaru spojitých funkcí. Druhou možností je řešení numerické, které převádí problém hledání spojitých funkcí na problém hledání konečného počtu neznámých parametrů, pomocí nichž se hledané funkce přibližně aproximují. Tento přechod je označován jako diskretizace spojitého problému. Diskrétní problém je pak řešitelný algebraickými prostředky v konečném počtu kroků na počítači.

V případě analytického řešení máme k dispozici obecnou funkční závislost mezi vstupními a výstupními veličinami řešeného problému pružnosti. Snadno lze pak posoudit citlivost důležitých výstupních veličin (napětí, posuvů) na změny vstupů (zatížení, tvaru ...). To je velmi výhodné např. při optimalizaci konstrukce.

Naproti tomu řešení numerické je v zásadě schůdné pro jakkoli geometricky či jinak komplikovanou úlohu. Faktickým omezením je pouze kapacita dostupného počítačové vybavení a časové nároky na výpočet. Výsledky se ovšem vztahují jen ke konkrétně zadanému případu, jakékoli úpravy, optimalizace apod. vyžadují opakování celého náročného procesu řešení.

Jak je známo, analýza pomocí MKP vyžaduje rozdělení řešené oblasti na konečný počet podoblastí (prvků), které ji spojitě a jednoznačně vyplňují, aniž by vznikly umělé dutiny. Příklady rozdělení řešených oblastí na jednotlivé prvky ilustruje obr. 4.1.1. Pro každý typ prvku je kromě dimenze a tvaru charakteristický počet a poloha jeho uzlů. To jsou body, v nichž hledáme neznámé hodnoty řešení. V deformační[1] variantě MKP jsou tyto parametry označovány jako deformační parametry a mají fyzikální význam posuvu, resp. natočení uzlového bodu. Zadáním prvků a uzlů vytváříme na řešené oblasti síť MKP, která hustotou a topologií zásadně ovlivňuje kvalitu výsledku a potřebné kapacity pro řešení.

[1] Mimo deformační variantu MKP existuje ještě silová a hybridní varianta.




*Obr. 4.1.1: Typy sítě v MKP*

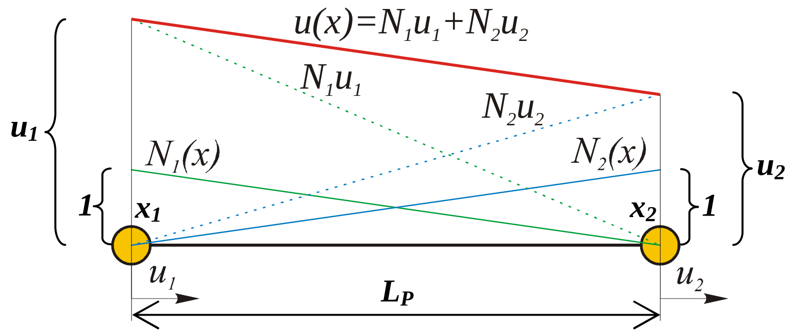
Pro základní ilustraci algoritmu MKP nám poslouží příklad z obr. 4.1.1 a), jedná se o vetknutý prut zatížený gravitačním zrychlením ***g*** ve vodorovném směru. Řešená oblast je pokryta sítí o třech prvcích a čtyřech uzlech. Jedná se o nejjednodušší dvouuzlový prutový prvek přenášející pouze osový tah-tlak s lineární aproximací posuvů po délce prvku. Průběh bázových funkcí ukazuje obr. 4.1.2.

$$u(x) = \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\delta}, \tag{4.1}$$

kde

$\mathbf{N} = [N_1, N_2]$ je matice tvarových (bázových) funkcí posuvů a

$\boldsymbol{\delta} = [u_1, u_2]^T$ je matice deformačních parametrů; její prvky jsou posuvy uzlových bodů $u_1$, $u_2$, které představují neznámé parametry řešení.




*Obr. 4.1.2: Bázové funkce prutového prvku*

Členy matice $\mathbf{N}$ pak mají následující tvar

$$N_1 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}, \tag{4.2}$$

$$N_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}, \tag{4.3}$$

kde $x_1$, $x_2$ jsou souřadnice uzlů. Posuv libovolného vnitřního bodu prvku je tedy jednoznačně určen posuvy jeho uzlových bodů, jak je zřejmé roznásobením (4.1):

$$u(x) = N_1(x).u_1 + N_2(x).u_2\,. \tag{4.4}$$

Stejným způsobem jsou aproximovány i průběhy posuvu $\boldsymbol{u(x)}$ na ostatních prvcích. Sdílení společného uzlu mezi dvěma prvky znamená i sdílení téhož deformačního parametru a tedy automatické zajištění meziprvkové spojitosti posuvu $\boldsymbol{u(x)}$. Po vyřešení úlohy a vyčíslení deformačních parametrů je průběh hledaného posuvu na celé oblasti aproximován po částech lineárně - blíží se analytickému řešení.

Napětí a přetvoření[2] lze vyjádřit pomocí posuvů $\boldsymbol{u(x)}$ použitím vztahu (4.5)

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}\,. \tag{4.5}$$

Po dosazení (4.4) do (4.5) dostáváme přetvoření $\varepsilon_x$ ve tvaru

$$\varepsilon_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mathbf{N}\cdot\boldsymbol{\delta}\right) = \mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\delta}\,. \tag{4.6}$$

Matice **B** vznikla derivací lineární funkce $\boldsymbol{u(x)}$, pak jsou přetvoření nad prvkem konstantní. Totéž platí i pro napětí, která se dají vyjádřit při platnosti Hookeova zákona pro jednoosou napjatost pomocí vztahu (4.7)

$$\sigma_x = E\cdot\varepsilon_x = E\cdot\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\delta}\,. \tag{4.7}$$

MKP se řadí mezi variační metody založené na minimalizaci určité funkce (funkcionálu). V deformační variantě je to celková potenciální energie soustavy $\boldsymbol{\Pi}$. Protože se jedná o integrální veličinu, je možné ji vyjádřit jako součet příspěvků od jednotlivých prvků

$$\Pi = \sum_{i=1}^{N} \Pi_i\,. \tag{4.8}$$

Celkovou potenciální energii prvku č.1 lze vyjádřit

$$\Pi_1 = W_1 - P_1\,, \tag{4.9}$$

kde $\boldsymbol{W_1}$ představuje energii napjatosti prvku

[2] Vztah (4.5) platí pouze pro malá přetvoření a posuvy.

$$W_1 = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{2} \cdot \sigma_x \varepsilon_x S dx \,. \tag{4.10}$$

Nyní je možné dosadit do (4.10) za $\sigma_x$ a $\varepsilon_x$ vztahy (4.7) a (4.6), pak dostaneme energii napjatosti prvku ve tvaru

$$W_1 = \frac{1}{2}\boldsymbol{\delta}^T . \left( ES \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{B}^T \mathbf{B} dx \right) . \boldsymbol{\delta} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\delta}^T . \mathbf{k} . \boldsymbol{\delta} \,, \tag{4.11}$$

kde **k** je matice tuhosti prvku

$$k = \frac{ES}{L_P} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} . \tag{4.12}$$

***P*₁** je potenciál vnějšího zatížení vyjádřený vztahem

$$P_1 = \int_{x_1}^{x_2} u \rho g S dx \,. \tag{4.13}$$

Po dosazení za ***u(x)*** z (4.1) a po provedení úprav je možné vyjádřit potenciál vnějšího zatížení ve tvaru

$$P_1 = \boldsymbol{\delta}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{f} \,, \tag{4.14}$$

kde **f** je matice vnějšího zatížení prvku

$$\mathbf{f} = \frac{1}{2} \cdot \rho g S L_P \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} . \tag{4.15}$$

Její prvky představují celkovou objemovou sílu působící na prvek rozdělenou na poloviny a soustředěnou do krajních uzlů v podobě uzlových sil. Matice **f** tedy zabezpečuje diskretizaci spojitého zatížení. Obdobně by byla do uzlů rozdělena i případná další zatížení, jako např. u prostorových prvků plošné zatížení povrchu prvku. Všechna zatížení jsou takto soustředěna do uzlů a silová interakce mezi prvky probíhá právě jen prostřednictvím uzlů.

Podobně jako v případě prvku číslo 1 sestavíme tuhostní matice a matice zatížení pro ostatní prvky. Nyní můžeme sestavit celkovou potenciální energii řešené soustavy $\boldsymbol{\Pi}$. Při jejím sestavováním je vhodné sdružit všechny deformační parametry do jediné matice

$$\mathbf{U} = [u_1, u_2, u_3, u_4] \,, \tag{4.16}$$

která je nazývaná celkovou (globální) maticí posuvů. V obecném případě může obsahovat mimo posuvů také rotace jednotlivých uzlů. Z tohoto důvodu se někdy této matici říká celková matice zobecněných posuvů.

Nyní můžeme vyjádřit celkovou energii ***W***

$$W = \sum_{i=1}^{3} W_i = \frac{1}{2}\mathbf{U}^T \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{U}, \tag{4.17}$$

kde **K** je celková (globální) tuhostní matice soustavy. Ta je sestavena z jednotlivých tuhostních matic prvků pomocí tzv. kódových čísel.

Podobným způsobem jako se sestavuje celková tuhostní matice, se sestavuje i celková matice zatížení **F**, pomocí níž můžeme vyjádřit celkový potenciál vnějšího zatížení ve tvaru

$$P = \sum_{i=1}^{3} P_i = \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{F} \ . \tag{4.18}$$

Použitím vztahů (4.17) a (4.18) můžeme přepsat celkovou potenciální energii soustavy do tvaru

$$\Pi = W - P = \frac{1}{2}\mathbf{U}^T \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{U} - \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{F} \ . \tag{4.19}$$

Podle Lagrangeova variačního principu je soustava v rovnováze právě tehdy, když nabývá celková potenciální energie minimálních (stacionárních) hodnot, což vede k podmínce

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{U}} = \mathbf{0}\,. \tag{4.20}$$

Parciální derivací podle $\boldsymbol{u_1}$, $\boldsymbol{u_2}$, $\boldsymbol{u_3}$, $\boldsymbol{u_4}$ získáme soustavu čtyř algebraických rovnic, v našem případě lineárních, tedy

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{F}\,. \tag{4.21}$$

Snadno lze ukázat, že matice **K** je singulární (determinant matice **K** je roven nule), soustava nemá jednoznačné řešení. Singularita je způsobena tím, že soustava je v prostoru nejednoznačně určena (může se posouvat jako tuhý celek), proto musíme zadat vhodné okrajové podmínky. Ty musí odebírat tolik stupňů volnosti, aby se těleso stalo přinejmenším staticky určité v prostoru. Pokud by toto nebylo splněno, došlo by k numerickému zhroucení výpočtu při řešení soustavy (4.21). Minimální počet okrajových podmínek je závislý na typu úlohy.

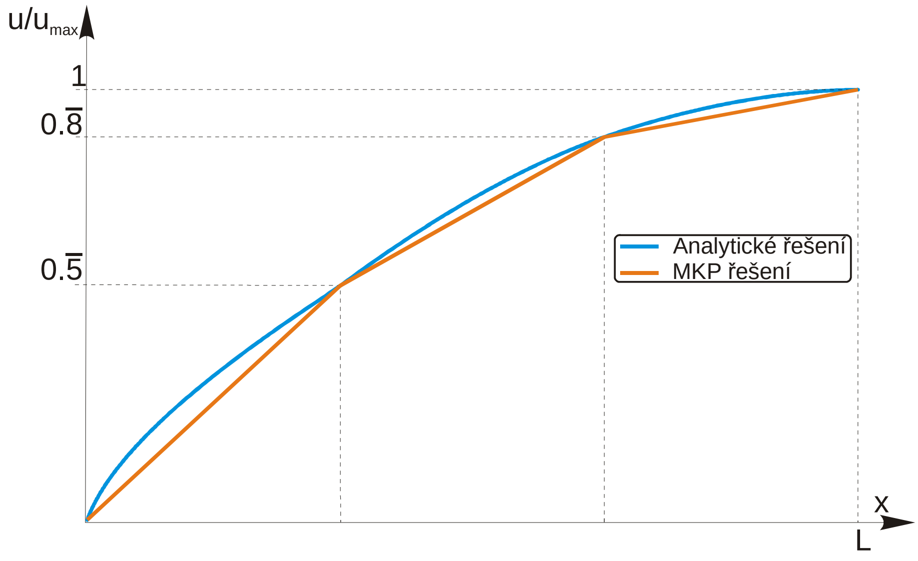
Pro náš ilustrativní příklad je nutná a postačující podmínka

$$u_1 = 0, \tag{4.22}$$

odpovídající vazbě prutu k rámu. Deformační parametr $\boldsymbol{u_1}$ musí být tedy jako známá veličina vypuštěn z matice neznámých parametrů **U** spolu s vypuštěním první rovnice ze soustavy (4.21). To se na matici soustavy projeví vypuštěním 1. řádku a sloupce, na matici zatížení též vypuštěním 1. řádku. Touto úpravou dostaneme již regulární soustavu rovnic.

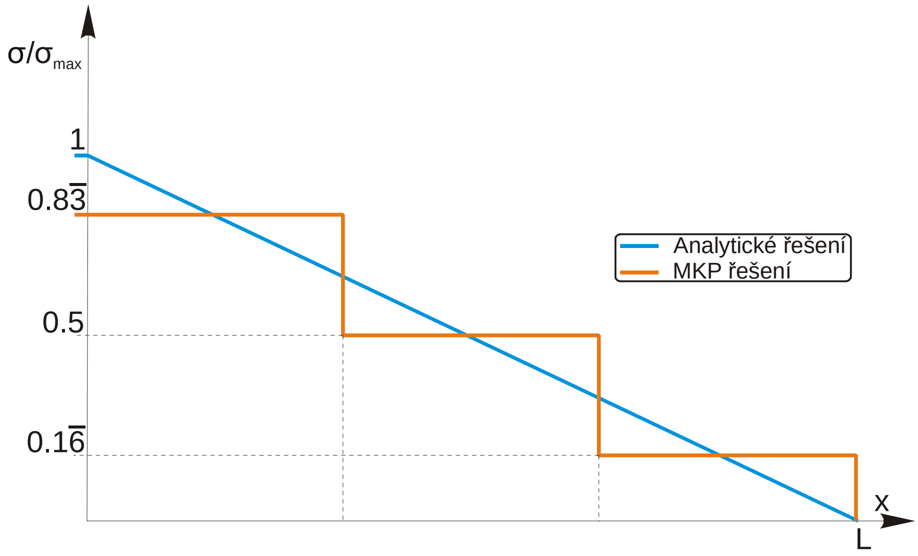
Řešením soustavy (4.21) získáme posuvy jednotlivých uzlů. Z těch je pak možné určit přetvoření a napětí.

Analytické řešení prutu zatíženého gravitační silou je obecně známo z nauky o pružnosti a pevnosti, proto je možné přímé porovnání s řešením pomocí MKP. První sledovanou veličinou jsou posuvy jednotlivých uzlů, viz obr. 4.1.3. Z grafu je zřejmé, že hodnoty analytického a MKP řešení jsou shodné; to však neplatí obecně.




*Obr. 4.1.3: Porovnání posuvů ve směru **x***

V následujícím grafu je vykresleno napětí ve směru ***x***. V analytickém řešení vychází lineární, avšak při řešení užitím MKP vychází po prvcích konstantní, což je v souladu s očekáváním.




*Obr. 4.1.4: Porovnání napětí ve směru* ***x***

Výše uvedená úloha je triviální, avšak dobře vysvětluje celý způsob řešení pomocí MKP. Podobným způsobem se postupuje při řešení složitějších vícerozměrných úloh, volí se jen jiné bázové funkce.

Pomocí MKP lze řešit velmi širokou skupinu nejrůznějších problémů, od lineárních úloh až po velmi komplikované nelineární. V mechanice poddajných těles se běžně vyskytují různé druhy nelinearit, které lze rozdělit do dvou základních skupin:

1) fyzikální (materiálová) nelinearita,
2) geometrická nelinearita.

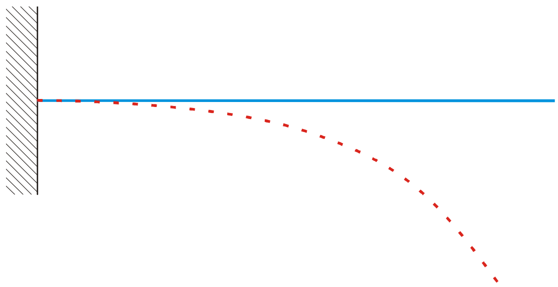
Fyzikální nelinearita je spojována s nelineárním chováním materiálu, jako je např. plasticita, creep, atd. Velmi často se kombinuje s předpokladem malých deformací. V problematice spojené s talířovými pružinami se tento typ nelinearity nevyskytuje.

Pří výpočtu talířových pružin je třeba vzít v úvahu to, že deformace (stlačení) je srovnatelná s rozměry pružiny. Z tohoto důvodu musíme vzít v úvahu geometrickou nelinearitu, zvláště tu, která kombinuje velké posuvy a malá přetvoření, což bude vysvětleno dále.

Typů geometrických nelinearit se vyskytuje v praxi hned několik. Vysvětlíme dva z nich.

- <u>Velké posuvy, malá přetvoření</u>

  Tento typ nelinearity je v inženýrských problémech velmi běžný. Jedná se např. o ohyb tenkých prutů nebo ohyb velkých poddajných skořepin. Jako příklad je na obr. 4.1.5 prut na jedné straně vetknutý, na druhé straně zatížený silou nebo ohybovým momentem. Je zřejmé, že jednotlivé délkové elementy prutu vykazují malá přetvoření a zároveň velké posuvy. Pokud nedošlo k trvalým deformacím, může se prut po odlehčení vrátit do původní nezdeformované polohy.

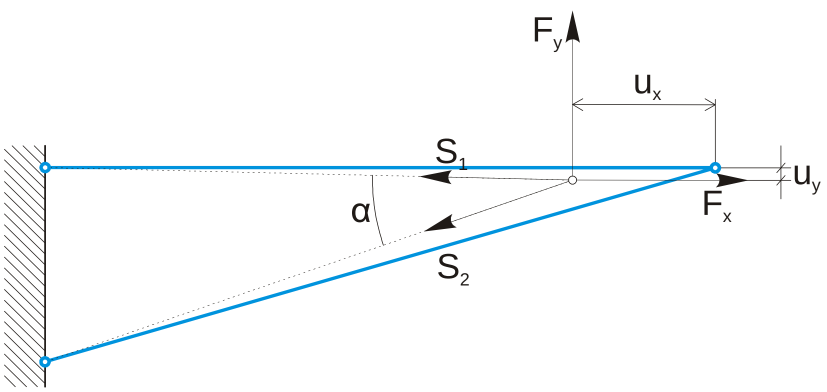


*Obr. 4.1.5: Velká deformace prutu*

- <u>Velké posuvy, velká přetvoření</u>

  Tento případ je vždy spojen s materiálovou nelinearitou. Typickým případem je např. hluboké tažení plechů nebo chování součásti po překročení hranice kritického vzpěru.

Předpokládáme-li, že je úloha lineární, síly a napětí v deformovaném tělese jsou vypočítány z geometrie tělesa nedeformovaného. Jinými slovy, rovnice rovnováhy jsou vztaženy k původnímu, nedeformovanému stavu. V případě velkých posuvů však nelze tento zjednodušující prvek přijmout. Problém lze velmi dobře ilustrovat na jednoduché prutové soustavě podle obr. 4.1.6.




*Obr. 4.1.6: Prutová soustava*

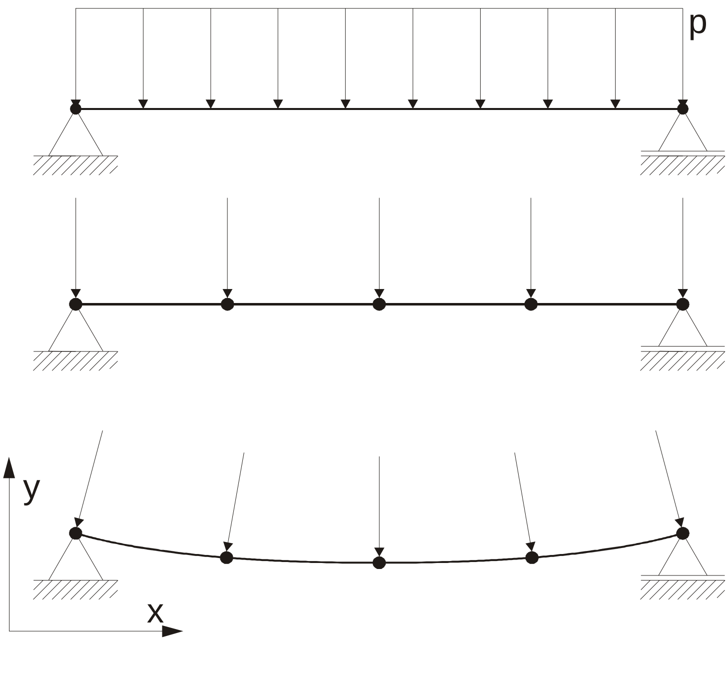
Z nauky o pružnosti a pevnosti jsou známé způsoby, jak spočítat neznámé posuvy $u_x$, $u_y$. V lineárních případech pro malá posunutí $u_x$, $u_y$ spočteme síly v prutech jednoduše ze soustavy rovnic (4.23). Úhel $\boldsymbol{\alpha}$ však přísluší nedeformovanému stavu. Rovnováha ve skutečnosti nastane až pro deformovaný stav, v případě malých posuvů je možné vztahovat rovnice k původnímu nezdeformovanému stavu. V případě velkých posuvů, kdy se úhel mezi pruty, tedy i silami v nich, na počátku a konci deformace podstatně liší, nelze tento zjednodušující předpoklad již přirozeně přijmout.

$$\begin{aligned} &F_x - S_1 - S_2 \cdot \cos\alpha = 0 \\ &F_y - S_2 \cdot \sin\alpha = 0 \end{aligned} \qquad (4.23)$$

Malé deformace v MKP vedou k soustavě lineárních rovnic majících tvar (4.21). Pro velké deformace má soustava rovnic na první pohled stejný tvar, avšak celková tuhostní matice **K** i celková matice zatížení **F** jsou funkcemi posunutí **U**,

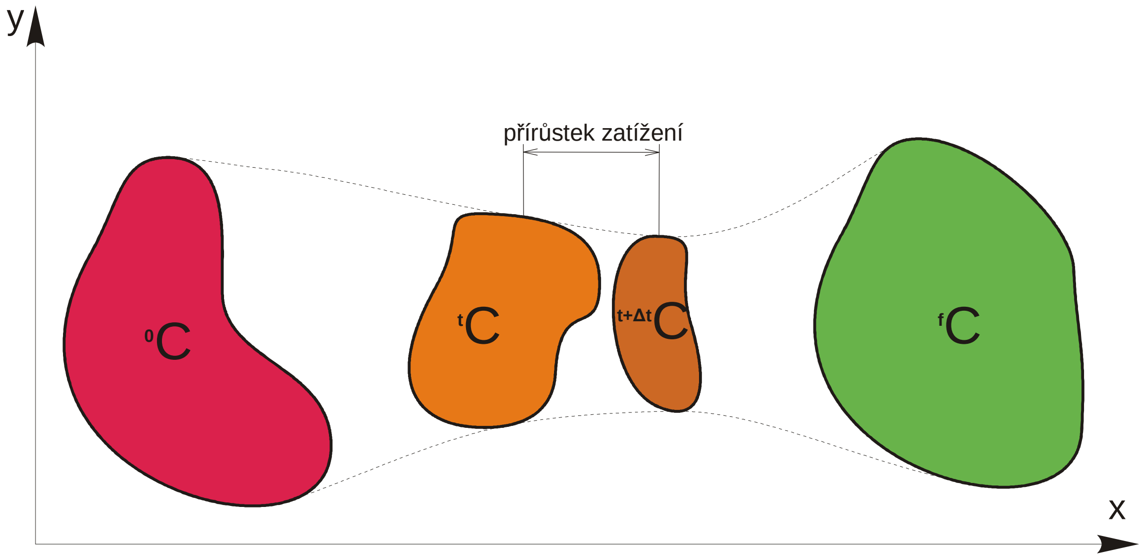
$$\mathbf{K}(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{U} = \mathbf{F}(\mathbf{U})\,. \qquad (4.24)$$

Z tohoto důvodu je soustava (4.24) nelineární. Závislost matice **K** na deformaci tělesa je zřejmá – matice je sestavená pro aktuální stav tělesa, nikoliv pouze pro stav počáteční. Závislost pravé strany vyplývá ze skutečnosti, že rovnováha nastává vždy až ve zdeformovaném stavu. Příklad takové situace je na obr. 4.1.7, kde se s narůstající deformací nosníku mění směr spojitého zatížení ***p*** vzhledem k pevnému souřadnicovému systému ***x***, ***y***.




*Obr. 4.1.7: K výkladu závislost matice F na deformaci*

Odvození matic tuhostí jednotlivých prvků, ze kterých sestavujeme i celkovou tuhostní matici, je založeno na následující úvaze. Z počáteční nedeformované konfigurace ${}^{0}C$ jdeme do konfigurace ${}^{t}C$ s malými přírůstky $\Delta t$, dále postupujeme z konfigurace ${}^{t}C$ do konfigurace ${}^{t+\Delta t}C$. Pokud se nám podaří popsat postup z konfigurace ${}^{t}C$ do konfigurace ${}^{t+\Delta t}C$, budeme schopni určit i postup z nedeformovaného stavu ${}^{0}C$ do ${}^{t}C$. Na obr. 4.1.8 jsou schematicky naznačeny jednotlivé kroky, ${}^{f}C$ značí konečnou konfiguraci tělesa.




*Obr. 4.1.8: Změny konfigurace tělesa*

Neznámé veličiny v neznámé konfiguraci se dají najít postupně iteračním způsobem tak, že všechny veličiny vztáhneme ke známé již spočítané konfiguraci. Dva často používané postupy jsou totální Lagrangeovská formulace a aktualizovaná Lagrangeovská formulace. V prvním případě jsou všechny veličiny vztažené k původní referenční konfiguraci ${}^{0}C$. V případě druhém jsou vztaženy k poslední známé konfiguraci. Při dalším kroku se nová konfigurace stává starou a takto se postupuje až k dosažení konečného stavu.

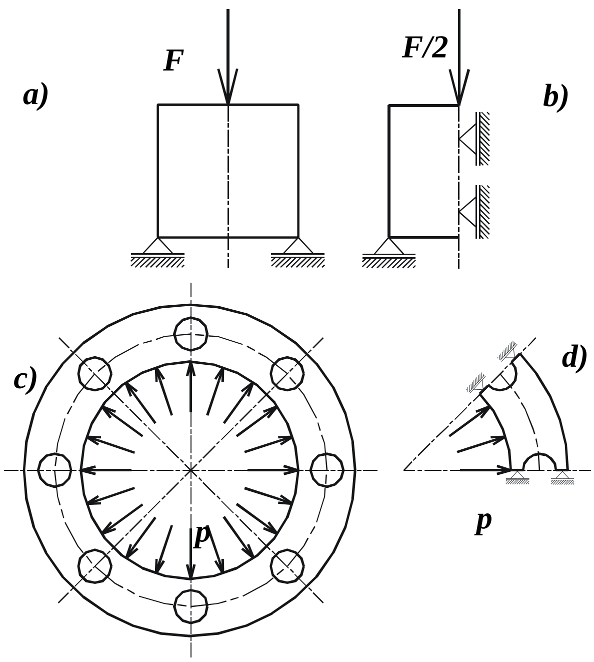
Podrobný popis i s odvozením výše uvedených postupů je hojně popsán v odborné literatuře [5], [6] a [23]; kvůli značnému rozsahu zde nebude uveden.

## 4.2 Výpočtové modely pro MKP

Při nasazení MKP k řešení problémů spojených s talířovými pružinami je třeba zvolit vhodný výpočtový model. Ten by měl dostatečně věrně popisovat skutečnost a zároveň by neměl být příliš složitý, aby jeho tvorba i vlastní řešení úlohy a jejích variant netrvalo neúměrně dlouho.

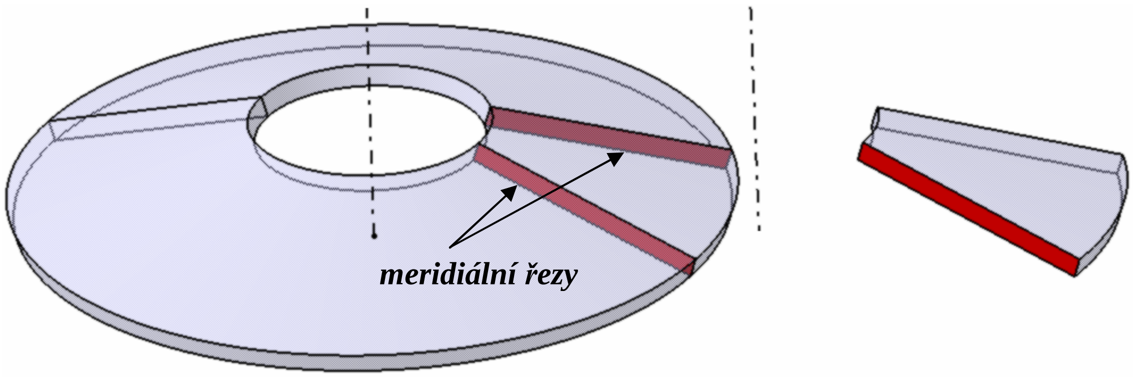
### 4.2.1 O souměrnosti talířových pružin

Velmi často (a talířová pružina není výjimkou) mají součásti jednu nebo více rovin symetrie. Této vlastnosti lze s výhodou využít při tvorbě modelu pro MKP, aniž by se to nepříznivě projevilo v dosažených výsledcích. Nestačí však pouze tvarová (geometrická) symetrie. Je nutné, aby i zatížení a uchycení součásti bylo symetrické podle stejných rovin. Různé druhy symetrií ukazuje obr. 4.2.1. Nahoře na obr. 4.2.1 a) je zobrazena součást s jedinou použitelnou rovinou symetrie, v pravé části obrázku je schéma zjednodušeného (polovičního) modelu vhodného pro užití MKP. Obr. 4.2.1 c) ukazuje součást se čtyřmi rovinami symetrie, což poskytuje výhodu uvažovat pro výpočet pouze segment struktury ve tvaru kruhové výseče (obr. 4.2.1 d)), odpovídající úhlu 45°.




*Obr. 4.2.1: Symetrie modelů*

V praxi se často vyskytují osově souměrné součásti, při nichž každý meridiální řez tvoří rovinu symetrie, jak je tomu v obr. 4.2.2. Při této úloze přirozeně nemohou uzly struktury nalézající se v rovině řezu z této roviny vybočit, takže všechny uzly mají pouze dva stupně volnosti. Jedná se o obměnu rovinné úlohy v MKP, též nazývané axisymetrická.



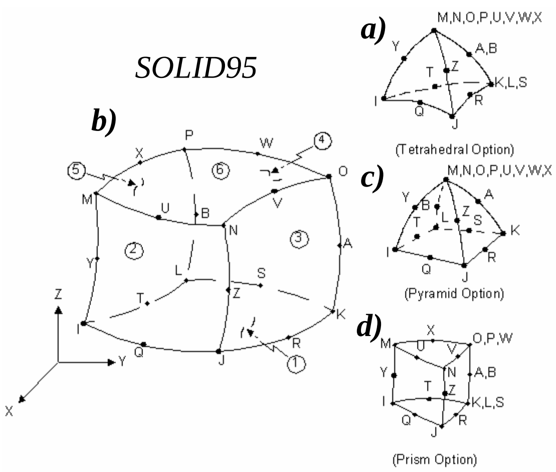

*Obr. 4.2.2: Osově symetrická úloha vs. segment*

Vzhledem k tomu, že běžná talířová pružina je osově souměrná, můžeme řešit daný problém jako axisymetrickou úlohu nebo si zvolit libovolně velký segment, jak vidíme v pravé části obr. 4.2.2. V tomto případě byla zvolena druhá možnost a byl uvažován segment pružiny příslušející úhlu kruhové výseče o velikosti 30°.

## 4.2.2 Síť pro MKP

Dalším závažným krokem při tvorbě výpočtového modelu je volba typu prvků, kterými budeme vyplňovat zvolený segment pružiny. V našem případě přicházejí v úvahu dva různé typy prvků, a sice objemový a skořepinový.

Objemové prvky lze používat v nejrůznějších tvarových provedeních. Nejběžnější z nich (typ SOLID95) znázorňuje obr. 4.2.3 ve variantách a) až d). Čtyřstěn, varianta a), je vhodný k tvorbě sítě na tvarově složitých součástech, avšak k vyplnění struktury jich je potřeba velké množství. K vytváření sítě na segmentu pružiny je vhodnější šestistěnný prvek, varianta b), kterých je k vyplnění struktury potřeba daleko méně. Zbývající hojně používané

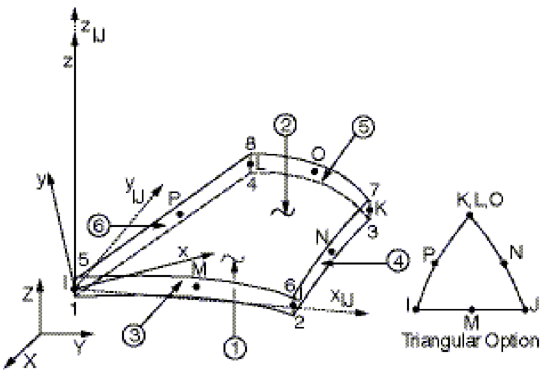



*Obr. 4.2.3: Objemový prvek se středními uzly*

tvarové modifikace jsou na obr. 4.2.3 pod písmeny c) a d). Jedná se o prvek pyramidový s čtyřúhelníkovou podstavou a klínový prvek.

Výše uvedené tvarové modifikace prvků používají různé typy tvarových funkcí k aproximaci hledaných veličin, kterými jsou v našem případě posuvy uzlových bodů. Nejjednodušší je lineární aproximace posuvů mezi uzly. Často se používá jako tvarová funkce parabola, při níž jsou uzly umístěny nejen na rozích prvku, ale i uprostřed hran. Parabolické funkce zabezpečují velmi dobré vyplnění struktury při poměrně malém počtu prvků.

Skořepinový prvek podle obr. 4.2.4 je dalším vhodným typem prvku k tvorbě sítě na segmentu pružiny. Tento prvek je vhodný pouze v případech, kdy jeden z rozměrů součásti (tloušťka) je mnohem menší než rozměry zbývající. Protože je talířová pružina vyrobená z tenkého plechu, zmíněnou podmínku splňuje.

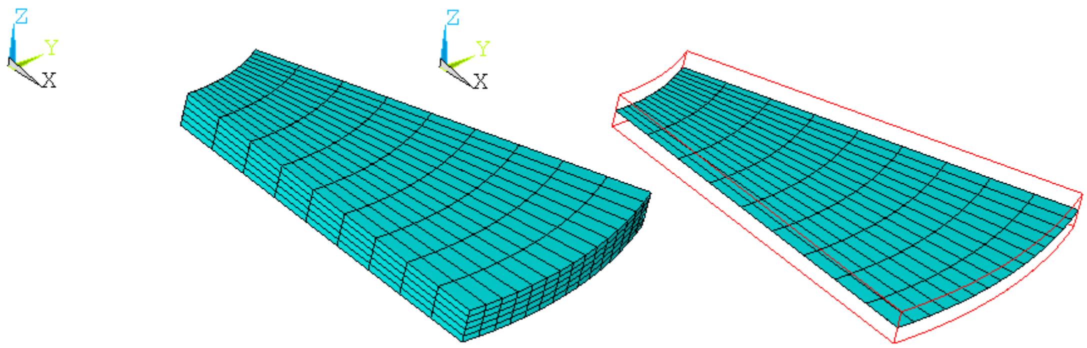



*Obr. 4.2.4: Skořepinový prvek se středními uzly*

U skořepinových prvků máme k dispozici dvě tvarové modifikace. S první trojúhelníkovou, kterou vidíme na obr. 4.2.4 vpravo, je spojena nevýhoda zvýšené spotřeby prvků k vyplnění struktury. Druhou možnou modifikací je čtyřúhelníkový prvek, který tuto nevýhodu nemá.

Podobně jako u objemových prvků je možné i u skořepinových použít různé druhy aproximací hledané veličiny. Jsou zde k dispozici, jak bylo uvedeno výše, lineární nebo parabolické tvarové funkce.

Na základě předcházejících úvah byly k výpočtu s použitím MKP vytvořeny dva různé modely - model objemový, na obr. 4.2.5 vlevo, a model skořepinový v pravé části téhož obrázku.

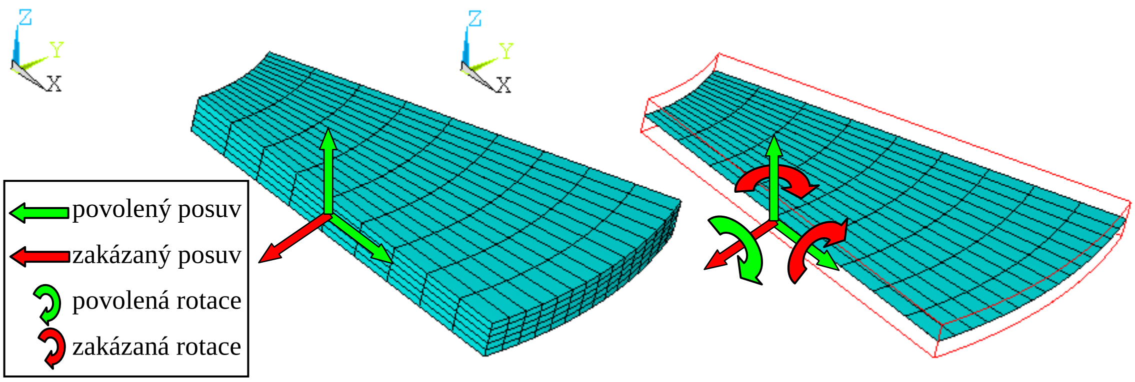



*Obr. 4.2.5: Objemový a skořepinový modle pro MKP*

V obou případech přísluší segmentu úhel 30° a prvky mají parabolické tvarové funkce. U skořepinového modelu jsou přirozeně prvky umístěné na střední (neutrální) ploše, obalující červené čáry představují obrys segmentu pružiny.

### 4.2.3 Okrajové podmínky a zatížení

Výpočtovou strukturu je nutné opatřit odpovídajícími okrajovými podmínkami. V případě objemového modelu je nutné zamezit ve vybočení uzlů z rovin řezů, aby byly splněny podmínky symetrie řešeného problému. Uzlům ležícím v rovinách řezu u skořepinového modelu je navíc nutné zabránit v rotaci kolem os ležících v rovinách řezů. Podmínky symetrie jsou schématicky znázorněny na obr. 4.2.6; zelené šipky představují dovolené směry posuvů (rotací), červené zakázané.

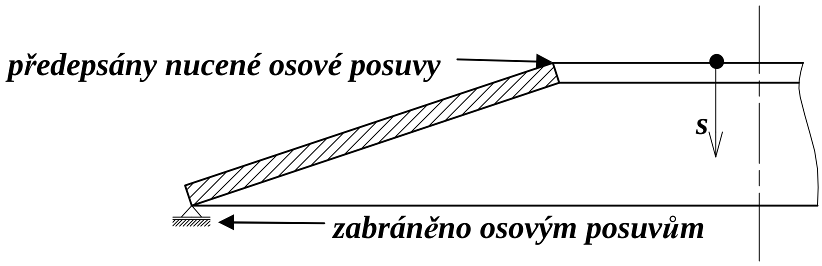



*Obr. 4.2.6: Předepsání symetrie*

Pružina podle obr. 3.2.1 je na vnitřním i vnějším průměru zatížená silou ***F*** rovnoměrně rozloženou po příslušných kružnicích. V MKP by tomu odpovídalo zatížení silami v jednotlivých uzlech, ležících na těchto kružnicích. To však není při zatížení struktury vhodné kvůli vzniku špiček napětí v místě působení síly a obtížné konvergenci úlohy. Je nezbytně nutné, aby výpočtová struktura byla v prostoru přinejmenším staticky určitou, tím zaručíme jednoznačnost řešení. Z výše uvedených důvodů byly okrajové podmínky v souladu s obr. 4.2.7 upraveny takto:

- Uzlům na vnějším průměru bylo zabráněno v posuvu v osovém směru
- Uzlům na vnitřním průměru byly předepisovány nucené posuvy v osovém směru

Nucené posuvy byly uzlům struktury předepisovány postupně v řadě výpočtových kroků tak, aby získaná zatěžovací charakteristika byla dostatečně přesná. Zátěžná síla se přitom odečítá jako reakce v místech nuceného posuvu.




*Obr. 4.2.7: Uchycení a zatížení struktury*

Vzhledem k tomu, že stlačení pružiny je srovnatelné s její tloušťkou, stává se úloha nelineární. Jedná se tedy o geometrickou nelinearitu, kde uvažujeme velká posunutí a malá přetvoření, proto můžeme vystačit s použitím lineárního Hookeova zákona.

## 4.3 Výsledky řešení užitím MKP

Pro výpočty užitím MKP byly vybrány dvě talířové pružiny různých velikostí podle normy DIN 2093, jejich rozměry uvádí tab. 4.3.1. Na těchto pružinách bylo posléze provedeno také experimentální měření.

*Tab. 4.3.1: Rozměry pružin*

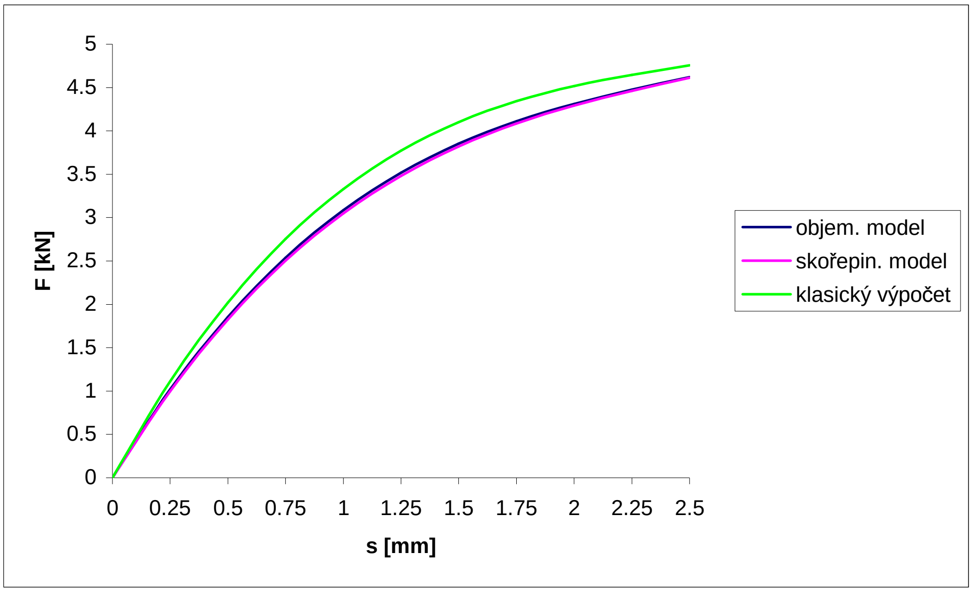
| | *D [mm]* | *d [mm]* | *h [mm]* | *$L_0$ [mm]* | *t [mm]* | *h/t [-]* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Pružina A** | 70 | 25,5 | 2,5 | 4,5 | 2 | 0,56 |
| **Pružina B** | 80 | 41 | 2,3 | 5,3 | 3 | 0,43 |

*Pozn.:* $\boldsymbol{L_0}$ je volná výška pružiny, zjednodušeně: $L_0 = h + t$ .

Zvolené vzorky pružin jsou vyrobeny z pružinové oceli označované 50CrV4. Jedná se o ocel s uváděným obsahem 0,51% uhlíku, 0,28% křemíku, 0,90% manganu a 1,05% chromu. Youngův modul pružnosti udávaný výrobcem má hodnotu 206 000 MPa a Poissonovo číslo 0,3.

### 4.3.1 Porovnání výsledků, pružina A

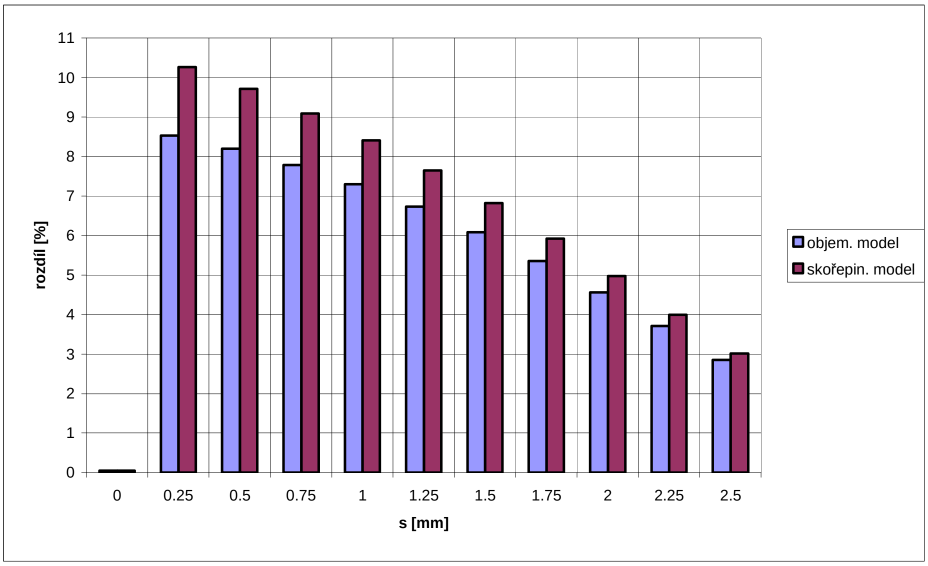
První sledovanou a porovnávanou závislostí je zatěžovací charakteristika, tj. závislost zatěžující síly na stlačení. Jelikož v MKP modelu nebyla výpočtová struktura zatěžována přímo silou ale nucenými posuvy, je na svislou osu zaznamenávána reakce v uložení pružiny.




*Obr. 4.3.1: Srovnání zatěžovacích charakteristik*

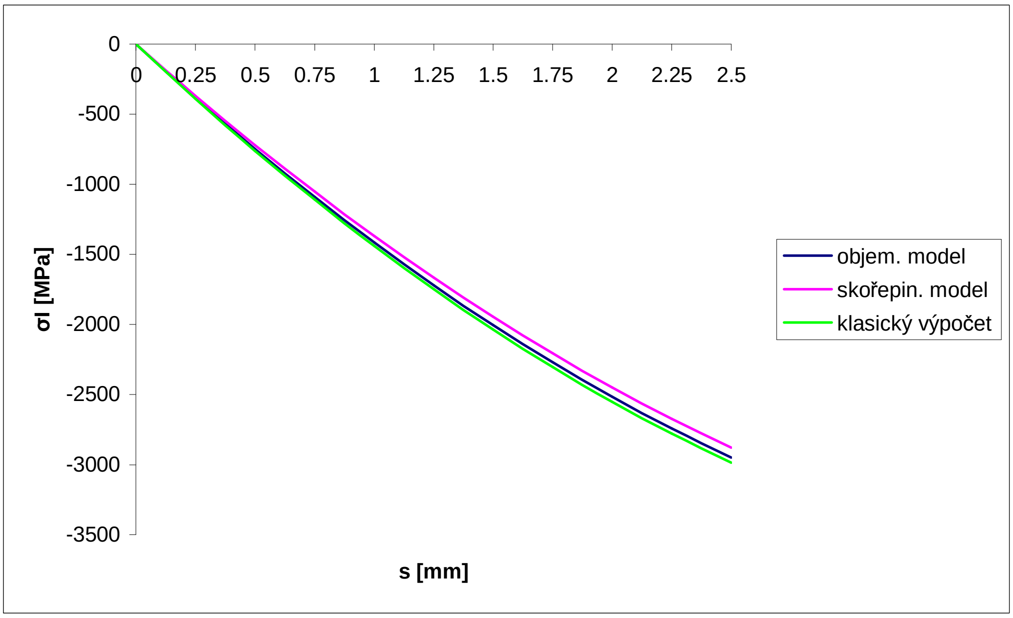
Srovnání zatěžovacích charakteristik ukazuje graf na obr. 4.3.1. První dvě křivky vykreslují charakteristiky získané pomocí MKP pro objemový a skořepinový model, křivka třetí odpovídá klasickému výpočtu při použití vzorce uvedeného v kap. 3.2.1. Z průběhů charakteristik získaných z MKP je patrné, že oba přístupy modelování jsou z hlediska zatěžovací charakteristiky prakticky rovnocenné. Klasický výpočet zatěžovací charakteristiky při stejných stlačeních dává poněkud vyšší hodnoty sil, (pružina je tužší). Tento rozdíl je však poměrně malý a činí nanejvýš 10,5%, což lze lépe zjistit z grafu na obr. 4.3.2.

Při výpočtu byla vzata za základ (100%) hodnota síly získaná klasickým výpočtem. Tento základ bude platný i pro veškerá další srovnání. Z průběhů je vidět, že objemový model se svými výsledky klasickému výpočtu blíží více než model skořepinový.



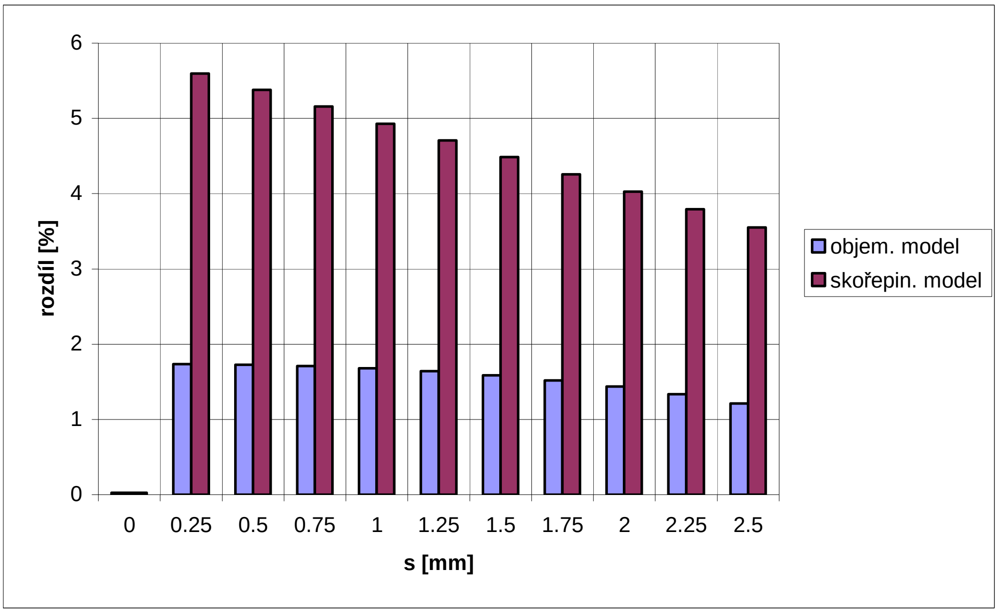

*Obr. 4.3.2: Rozdíl v zatěžovacích charakteristikách*

K dalšímu srovnání vypočtených výsledků bylo zvoleno obvodové napětí v místě ***I***, což je místo s největším tlakovým napětím. Hodnoty napětí pro jednotlivé zatěžovací kroky jsou vykresleny v následujícím grafu.




*Obr. 4.3.3: Obvodové napětí $\sigma_I$*

Z průběhu obvodového napětí je patrné, že klasický výpočet a výpočet pomocí objemového modelu dávají prakticky shodné výsledky. Rozdíl nepřesahuje 2%, jak je patrné v grafu na obr. 4.3.4 . Srovnání je provedeno stejným způsobem jako tomu bylo u zatěžovací charakteristiky. I v tomto případě je rozdíl mezi jednotlivými přístupy velmi malý.




*Obr. 4.3.4: Znázornění rozdílu v napětích $\sigma_I$*

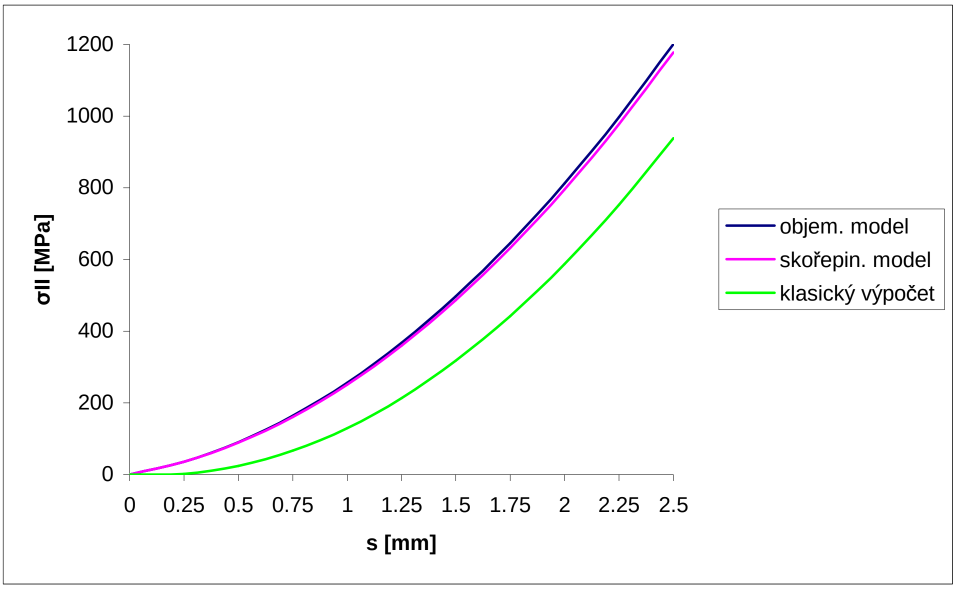
Napětí $\boldsymbol{\sigma_I}$ je důležité při návrhu pružiny pro její statické zatížení, popřípadě pro nízkocyklovou únavu, kdy je počet cyklů za celou životnost pružiny menší než $10^4$ [22]. Tab. 4.3.2 udává maximální dovolené hodnoty obvodového napětí pro různé poměry ***D/d***, přičemž tyto náleží stavu, kdy dochází ke srovnání pružiny do rovinného stavu, tj. $s = h$.

*Tab. 4.3.2: Dovolená napětí*

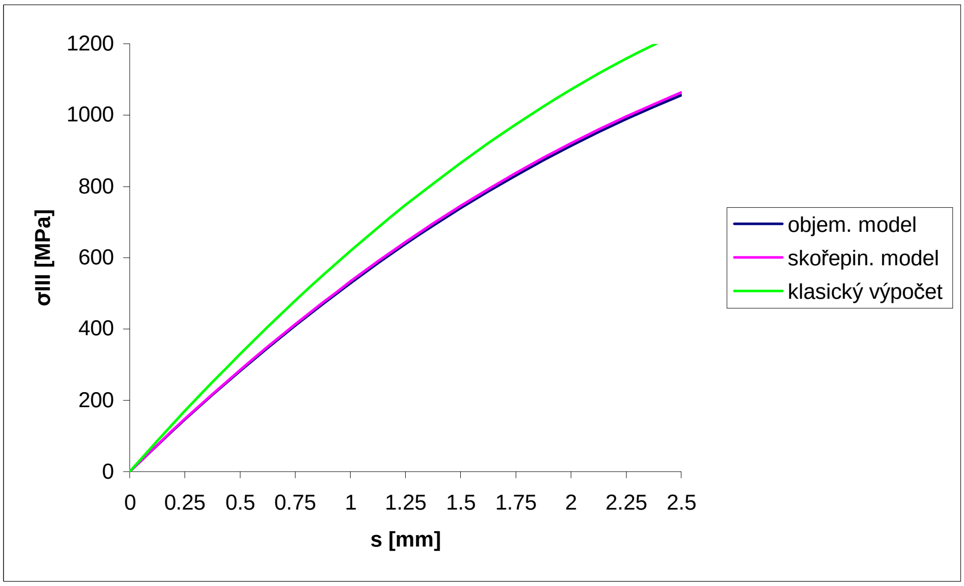
| ***D/d*** | $\boldsymbol{\sigma_{ID}}$ ***[MPa]*** |
|---|---|
| 1,5 | -2600 |
| 2,0 | -3400 |
| 2,5 | -3600 |

Při dynamickém zatížení talířové pružiny je pro posuzování možnosti poruchy rozhodující obvodové napětí v místě ***II*** nebo ***III***. V těchto místech je toto napětí tahové, a proto by zde mohlo dojít ke vzniku a šíření trhliny.

Průběhy výše zmiňovaných napětí v závislosti na stlačení jsou v grafech na následujících obrázcích.




*Obr. 4.3.5:Průběhy obvodových napětí $\sigma_{II}$*

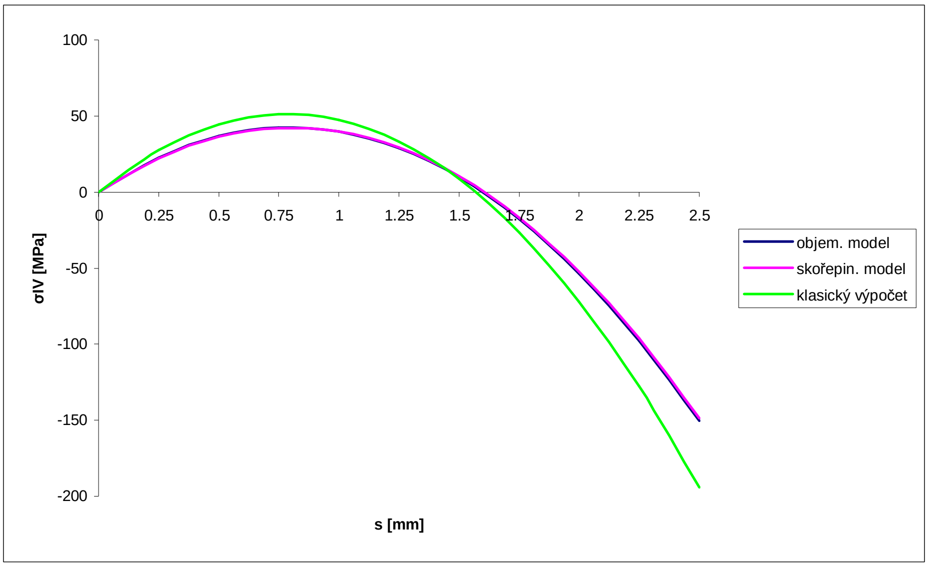



*Obr. 4.3.6: Obvodové napětí $\sigma_{III}$*

Z průběhu napětí $\boldsymbol{\sigma_{II}}$ a $\boldsymbol{\sigma_{III}}$ je vidět, že objemový a skořepinový model dávají i zde v podstatě rovnocenné výsledky, protože rozdíly jsou nepatrné. Porovnáme-li navzájem hodnoty napětí získaných klasickým výpočtem s výsledky získanými užitím MKP, je rozdíl již větší. V případě napětí $\boldsymbol{\sigma_{I}}$ panovala poměrně dobrá shoda (rozdíl nepřekročil 6%). Napětí $\boldsymbol{\sigma_{II}}$ se pro maximální stlačení pružiny liší v případě objemového modelu o 22%, skořepinového o 20%. Podobně je tomu i v případě napětí $\boldsymbol{\sigma_{III}}$, kde se rozdíl pohybuje okolo 14%.

Ve všech třech uváděných místech poskytuje MKP velmi podobné hodnoty obvodových napětí jako klasický výpočet a lez je tedy použít při návrhu a kontrole talířové pružiny.

Poslední sledovanou veličinou je obvodové napětí v místě ***IV***. To nejprve roste do kladných hodnot (tah), až dosáhne svého maxima (zhruba 50 MPa), pak klesá do záporných hodnot.




*Obr. 4.3.7: Obvodové napětí $\sigma_{IV}$*

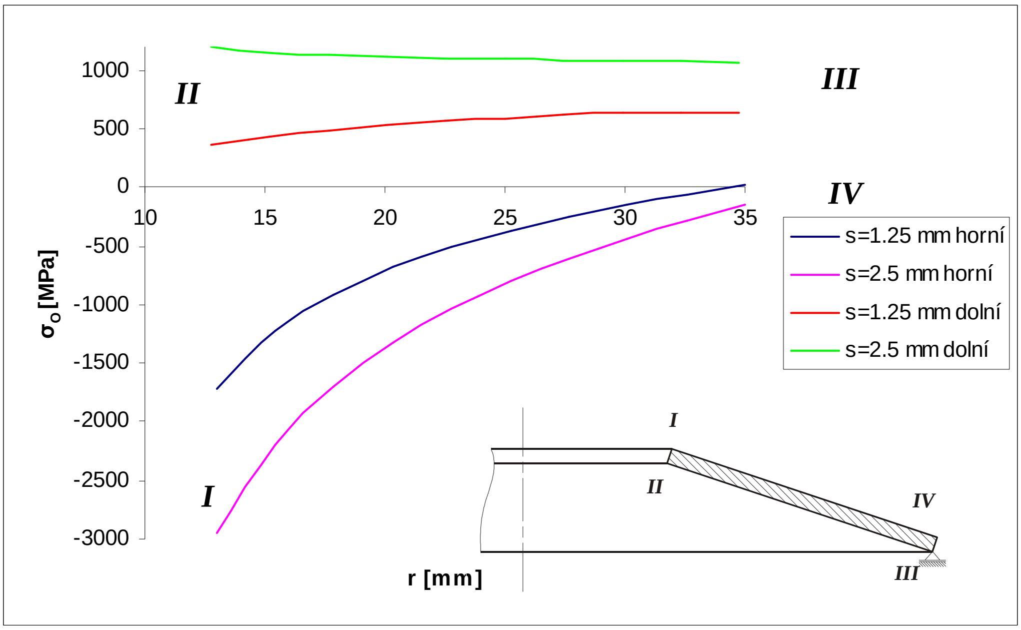
I v tomto případě je shoda výsledků získaných objemovým a skořepinovým modelem velmi dobrá. Pokud je porovnáme s klasickým výpočtem, dostaneme při maximálním stlačení rozdíl přibližně 22%.

Vzhledem k tomu, že obdobnou shodu ve výsledcích vykazuje i pružina ***B***, nebude zde provedeno srovnání MKP modelů a klasického výpočtu. Výsledky budou ve zkrácené podobě uvedeny při rozboru naměřených hodnot.

## 4.3.2 Obvodové napětí v obecném místě pružiny

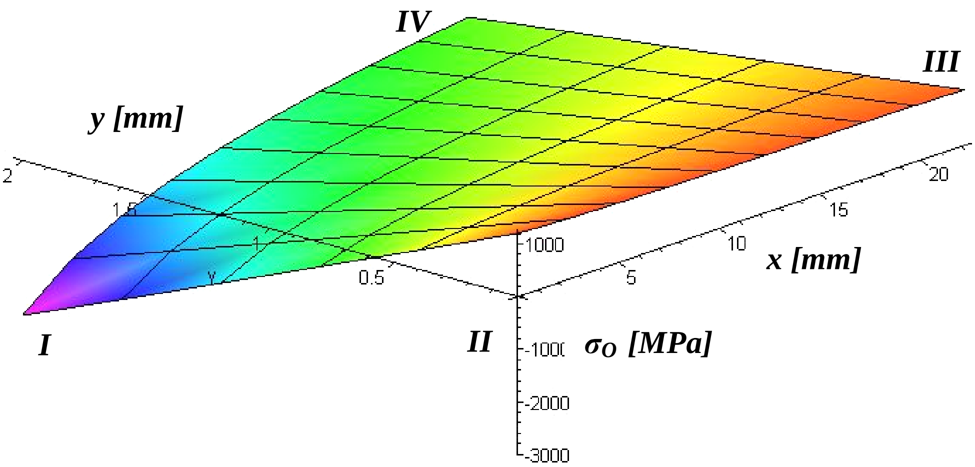
Oproti klasickému výpočtu podle [1] metoda konečných prvků přirozeně umožňuje získat podstatně více informací o napjatosti v talířové pružině. Vzorce uvedené v této práci vyčíslují hodnoty obvodových napětích pouze ve význačných bodech, výpočet pomocí MKP nám dovoluje určit napjatost v libovolném místě řezu pružiny.

Graf na obr. 4.3.8 vykresluje průběh obvodového napětí mezi body ***I-IV*** (horní strana pružiny) a mezi ***II-III*** (dolní strana pružiny). V grafu jsou vyneseny průběhy pro dvě různá stlačení - ***1,25*** a ***2,5 mm***.




*Obr. 4.3.8: Průběh obvodové napětí mezi body I a IV*

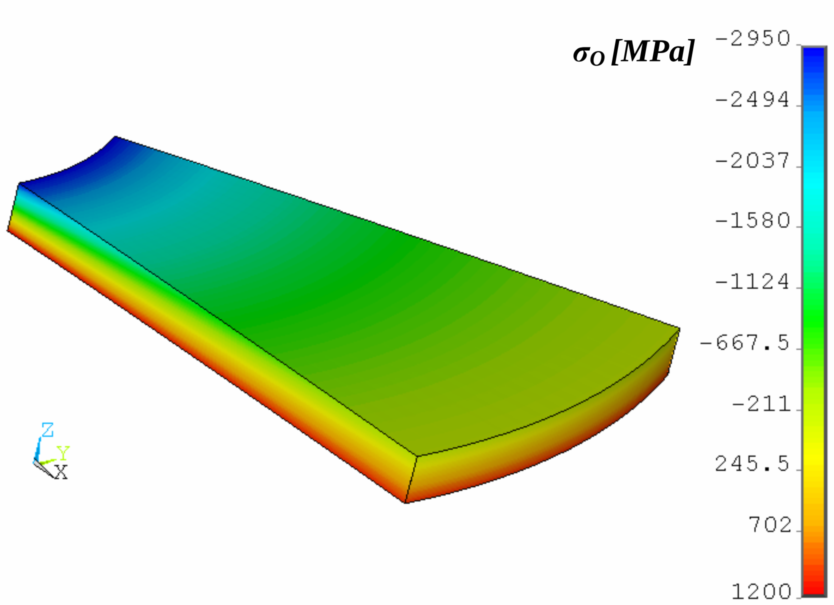
Pokud by nás zajímalo rozložení obvodového napětí v řezu pružiny, je znázorněno v trojrozměrném grafu na obr. 4.3.9.




*Obr. 4.3.9: Rozdělení obvodového napětí v řezu pružiny*

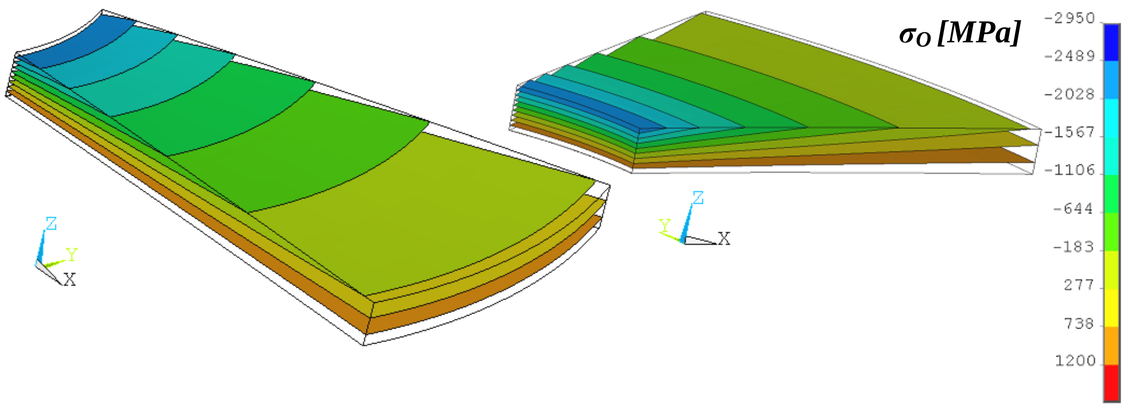
V grafu je zaveden lokální souřadný systém orientovaný tak, že jeho počátek leží v bodě ***II***, kladná poloosa ***x*** směřuje do bodu ***III*** a poloosa ***y*** leží na spojnici bodů ***II*** a ***I***. Na osu ***x*** a ***y*** jsou pak vynášeny souřadnice vzhledem k počátku souřadného systému. Kvůli zachování přehlednosti je v grafu vyneseno pouze napětí odpovídající maximálnímu stlačení, tj. pro ***s = 2,5 mm***.

K další ilustraci je připojen obr. 4.3.10, získaný jako výsledek výpočtu užitím MKP. Ukazuje opět rozdělení obvodového napětí na segmentu pružiny pro stlačení ***s = 2,5 mm***.




*Obr. 4.3.10: Rozdělení obvodového napětí v segmentu pružiny*

V katalozích a příručkách výrobci pružin často vykreslují napětí v pružině tak, že spojují místa se stejnou hodnotou napětí. Současné programové systémy, jako je ANSYS, umožňují znázorňovat výsledky i v této podobě, jak ukazuje obr. 4.3.11

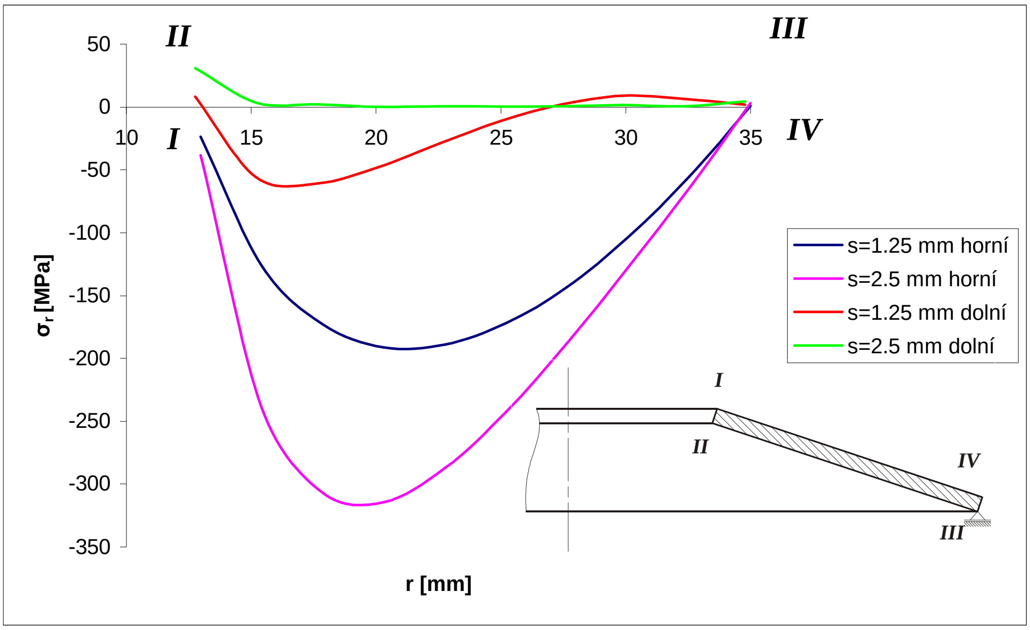



*Obr. 4.3.11: Znázornění míst se stejným obvodovým napětím*

## 4.3.3 Radiální napětí v pružině

Teorie, kterou odvodili Almen a László, zanedbává radiální napětí. MKP přirozeně vyčísluje i hodnoty tohoto napětí a tím ověřuje oprávněnost jimi zavedených zjednodušujících předpokladů.

Průběh radiálního napětí pro dva různé zdvihy ukazuje graf na obr. 4.3.12. Je dobře patrné, že radiální napětí na dolní straně je oproti obvodovému velmi malé (nejvýše 75 MPa). Na straně horní (mezi místy ***I*** a ***IV***) je již jeho hodnota větší než na dolní straně. Srovnáme-li tato namáhání s obvodovým, je však mnohem menší. Srovnání konkrétních hodnot radiálního a obvodového napětí je v tab. 4.3.3.



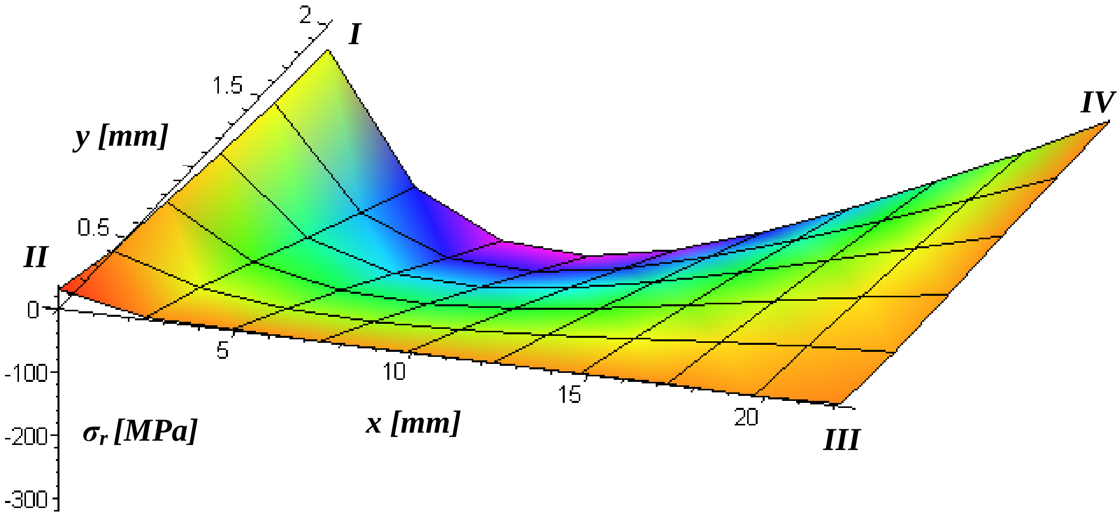

*Obr. 4.3.12: Průběh radiálního napětí na hranách pružiny*

*Tab. 4.3.3: Srovnání napětí*

| ***Místo na poloměru r = 20 mm, horní strana pružiny*** | | | |
|---|---|---|---|
| ***s = 2,5 mm*** | | ***s = 1,25 mm*** | |
| $\sigma_o$ ***[MPa]*** | $\sigma_r$ ***[MPa]*** | $\sigma_o$ ***[MPa]*** | $\sigma_r$ ***[MPa]*** |
| -1331 | -314 | -683 | -191 |

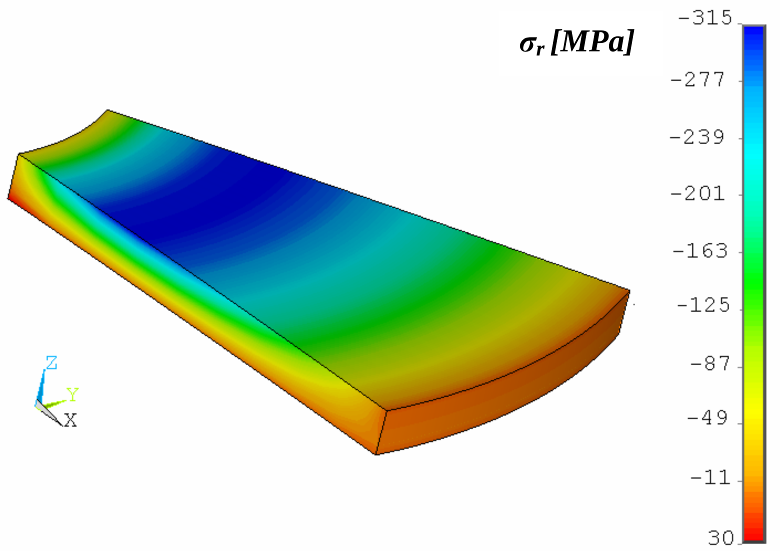
Místo o poloměru ***r = 20 mm*** na horní straně pružiny bylo zvoleno záměrně, je v něm totiž radiální napětí největší. To odpovídá směru kolmému na osu pružiny. Z tabulky je zřejmé, že hodnoty radiálního napětí jsou podstatně menší než obvodové. V místech ***I*** a ***II*** jsme však očekávali nulové radiální napětí, protože v radiálním směru nepůsobí žádná síla. Napjatost v tomto místě je pravděpodobně ovlivněna okrajovými podmínkami. Ovlivnění napjatosti v místech ***III*** a ***IV*** okrajovými podmínkami je nepatrné.

Pokud nás zajímá rozložení radiálního napětí v řezu talířové pružiny, je možno sestrojit trojrozměrný graf, viz obr. 4.3.13. Hodnoty radiálního napětí odpovídají stavu s největším stlačením. Při konstrukci grafu byl použit opět lokální souřadný systém, jehož orientace a počátek byl popsán v předchozím odstavci při vykreslování obvodového napětí.



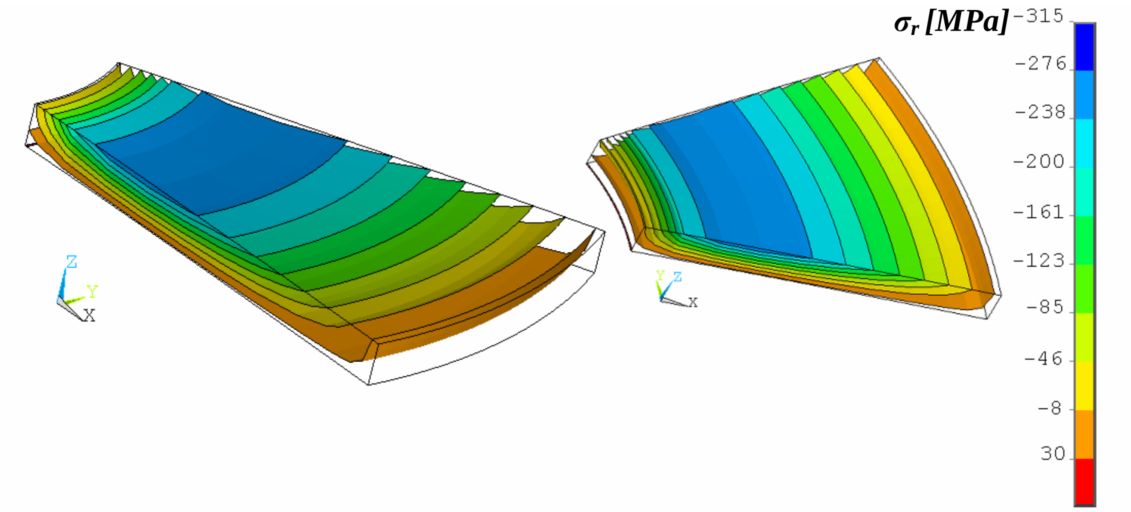

*Obr. 4.3.13: Rozložení radiálního napětí v řezu pružiny*

Na obr. 4.3.14 jsou vykresleny hodnoty radiálního napětí získané výpočtem segmentu pružiny užitím MKP.




*Obr. 4.3.14: Radiální napětí na segmentu pružiny*

Pro úplnost jsou ještě uvedeny na obr. 4.3.15 plochy spojující místa se stejnou hodnotou radiálního napětí.

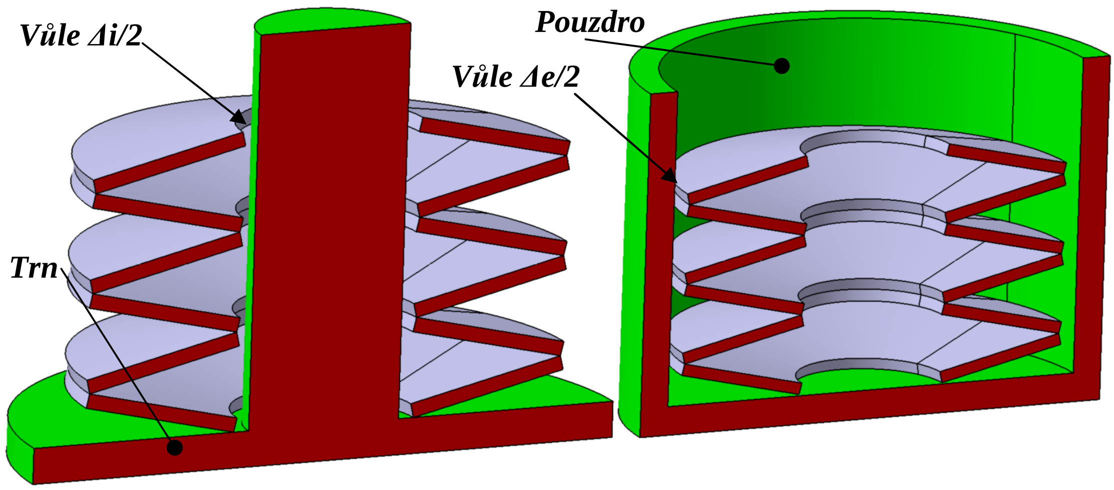



*Obr. 4.3.15: Místa se stejným radiálním napětím*

Z uvedených výsledků je nyní možné posoudit oprávněnost předpokladu o zanedbání radiálního napětí v talířové pružině. Je skutečností, že radiální napětí je mnohem menší než obvodové, zejména pak na dolní straně pružiny. Na straně horní je sice radiální napětí poněkud větší, avšak toto zjednodušení se zdá být ještě přijatelné.

## 4.4 Změna radiálních rozměrů pružiny

Při stlačování pružiny dochází též ke změně radiálních rozměrů. Obecně lze říci, že vnitřní obrysový průměr se zmenšuje, zatímco vnější své rozměry zvětšuje. Velikost změny jednotlivých průměrů je nutné znát a vzít v úvahu při návrhu vodícího trnu nebo pouzdra. Trn a pouzdro zabezpečují vystředění pružiny a ustavují ji v požadované poloze. Vedení pružin je nutné použít zejména při montáži pružin v sadách. Vůle mezi trnem (pouzdrem) musí být dostatečně velká, aby se pružina při stlačování nedotkla trnu, protože tím by došlo k ovlivnění funkce pružiny. Příliš veliká radiální vůle naopak brání vystředění sady pružin, takže by mohlo dojít i ke ztrátě její stability.




*Obr. 4.4.1: Středění pružin na trnu a v pouzdru*

Výrobce pružin udává v katalozích minimální doporučené vůle pro velký a malý průměr ve formě tabulky. Typickým příkladem je tab. 4.4.1.

*Tab. 4.4.1: Hodnoty minimálních vůlí Δi, Δe*

| d nebo D [mm] | Δi [mm], Δe [mm], |
|---|---|
| do 16 | 0,2 |
| od 16 do 20 | 0,3 |
| od 20 do 26 | 0,4 |
| od 26 do 31,5 | 0,5 |
| od 31,5 do 50 | 0,6 |
| od 50 do 80 | 0,8 |
| od 80 do 140 | 1,0 |
| od 140 do 250 | 1,6 |
| přes 250 | 2,0 |

Při sestavení tabulky výrobce patrně vycházel z naměřených změn radiálních rozměrů určitého souboru vyrobených pružin a pominul vliv ostatních rozměrů, jakými jsou např. tloušťka, výška. Za pomoci MKP lze i s uvážením těchto vlivů velice snadno určit změnu radiálních rozměrů pro jednotlivé talířové pružiny. Příkladem takového postupu je graf na obr. 4.4.2,ve kterém jsou na vodorovnou osu vynášeny velké průměry jednotlivých pružin, na svislou pak změna velikosti velkého průměru ***ΔD***. Jednotlivé křivky pak propojují hodnoty ***ΔD*** pružin se stejným poměrem ***h/t***. Tímto znázorněním lze vyjádřit velikosti změny radiálních rozměrů nejen v závislosti na průměru, ale také na tloušťce a výšce pružiny.

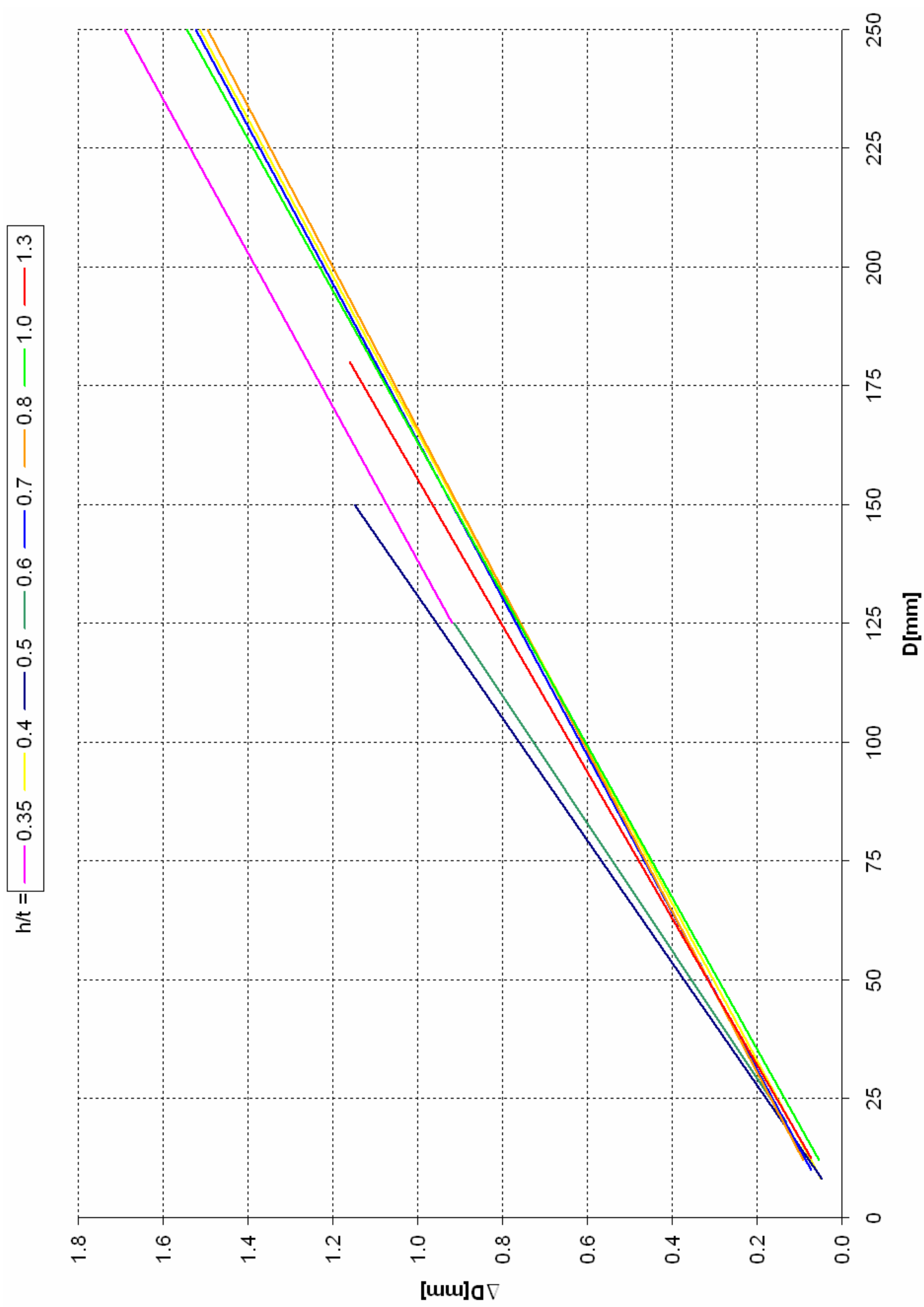
Vzhledem k tomu, že sortiment vyráběných pružin je velmi široký, není možné v této práci zkoumat všechny rozměrové varianty. U běžně nabízených pružin se poměr ***h/t*** pohybuje v rozmezí ***0,35*** až ***1,3***. Z katalogu byly tedy v našem případě vybrány takové poměry velikostí ***h/t***, aby k nim příslušelo co nejvíce talířových pružin. Tak bylo možno obsáhnout podstatnou část výrobního sortimentu.

Pro veškeré poměry ***h/t*** vychází závislost mezi změnou radiálních rozměrů ***ΔD*** a průměrem ***D*** lineární. Křivky pro poměry ***0,4***; ***0,7***; ***0,8***; a ***1,0*** se téměř shodují. Pro ostatní poměry se křivky nepřekrývají. Z uvedených závislostí nelze vyvodit logickou závislost mezi velikostí ***ΔD*** a poměrem ***h/t***.

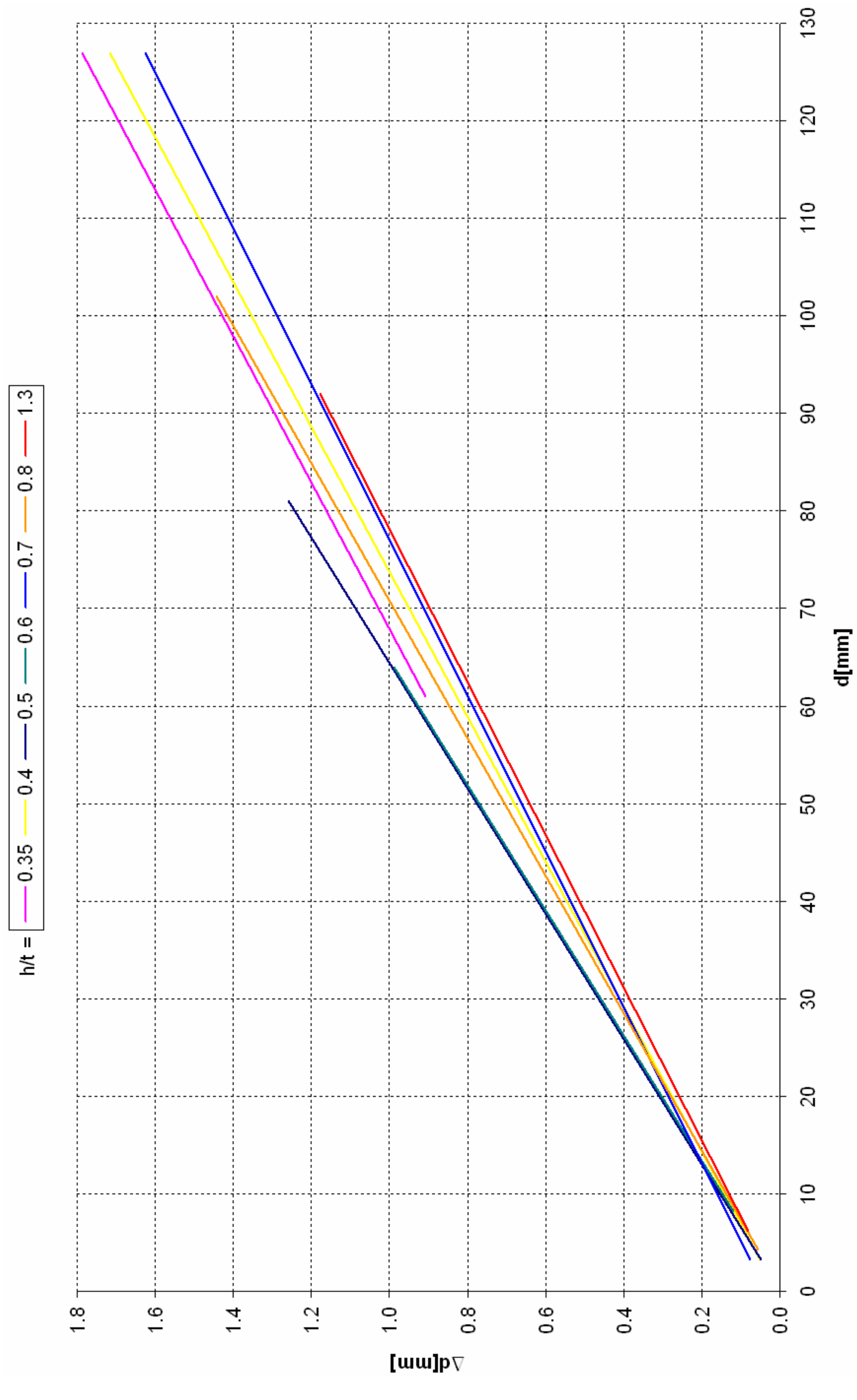
Při stanovení velikosti radiální vůle mezi pružinou a pouzdrem je nutné k ***ΔD*** ještě uvážit toleranci, s níž je pružina vyrobena. Všechny modely pro užití MKP byly vytvořeny s nominálními rozměry a nikterak neberou v úvahu výrobní nepřesnosti v rámci tolerancí.

Obdobný graf (obr. 4.4.3) lze sestrojit v případě, kdy míníme středit pružinu na vnitřním průměru ***d***. Na jeho vodorovnou osu pak vynášíme vnitřní průměr ***d,*** na svislou pak změnu ***Δd***.

Cílem takového vyšetření je upřesnění hodnot doporučovaných nezbytných vůlí, což zlepšuje středění a stabilitu pružiny či jejich sad.




*Obr. 4.4.2: Změna radiálních rozměrů ΔD*




*Obr. 4.4.3 Změna radiálních rozměrů Δd*

# 5 MĚŘENÍ TALÍŘOVÉ PRUŽINY

K vyloučení hrubých pochybení při tvorbě výpočtových modelů, ať již klasických nebo modelů určených pro užití MKP, je vhodné provést experimentální měření. Měřením obecně můžeme též ověřit korektnost přijatých zjednodušujících předpokladů, popřípadě určit oblasti jejich platnosti. Měření na talířových pružinách se uskutečnilo v Hydrodynamické laboratoři Technické univerzity v Liberci.

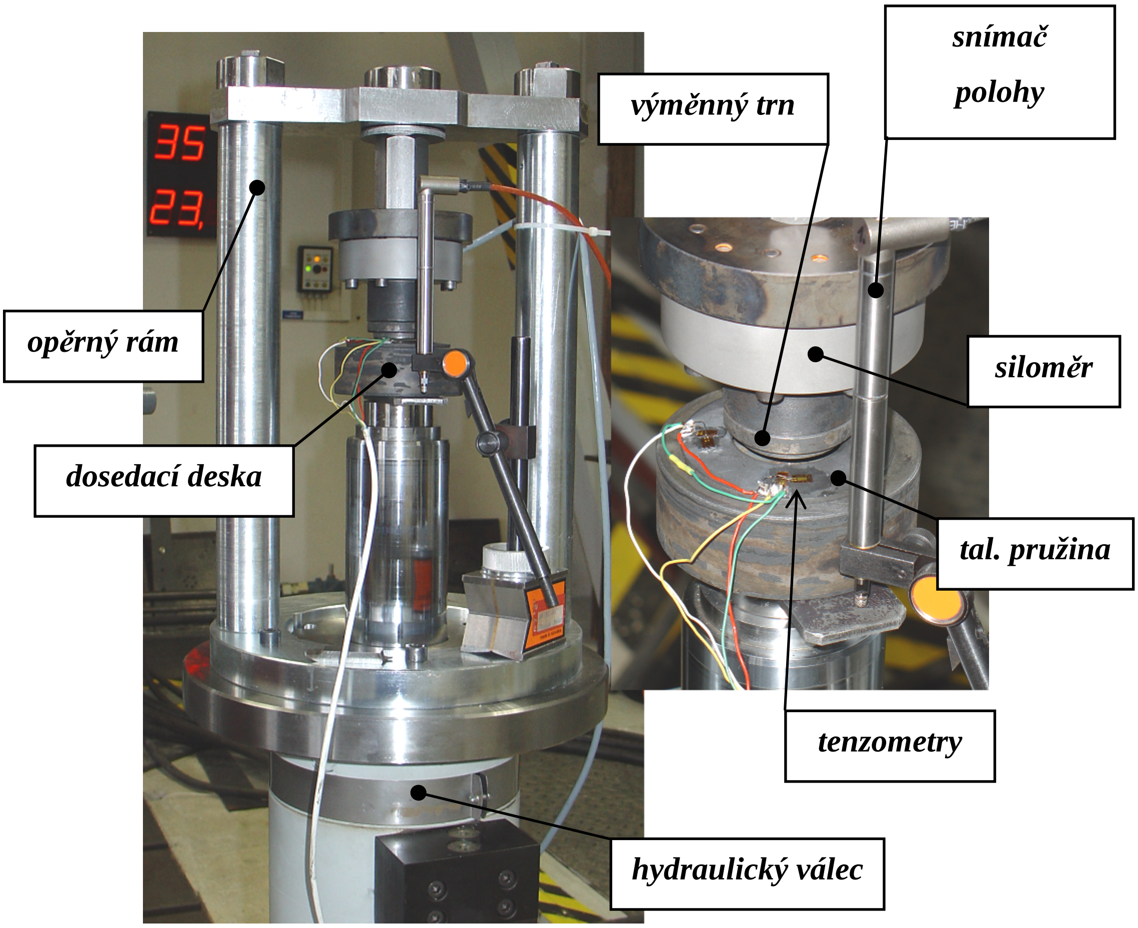
Jako vzorky byly vybrány dvě rozměrově odlišné talířové pružiny s rozměry uvedenými v tab. 4.3.1 (str. 38). Od každé rozměrové varianty bylo proměřeno 5 kusů, aby bylo možné podchytit případné rozptyly způsobené nepřesností ve výrobě, popřípadě odchylky způsobné rozptyly materiálových vlastností.

## 5.1 Měřící přípravek

Měření talířových pružin bylo provedeno v přípravku podle obr. 5.1.1, který byl zkonstruován pro tento účel. Při jeho konstrukci bylo nutné splnit několik požadavků:

- Zajistit dostatečnou přesnost měření dvou pružin různých velikostí,
- umožnit měření sil a stlačení,
- umožnit měření napjatosti na povrchu pružin pomocí elektrických odporových tenzometrů

K vyvození zatěžovací síly byl použit hydromotor INOVA vyvozující pro náš případ dostačující nejvyšší sílu 25 kN. Na hydromotor byl ukotven opěrný rám tvořený dvěma tlustostěnnými trubkami spojenými v horní části deskou. K této desce byl přišroubován nástavec obsahující siloměrem s výměnným trnem, který měl pro každou sadu pružin jiné rozměry. Jeho náčrt s nejdůležitějšími rozměry obsahuje příloha 1. Trn zajišťoval vedení talířové pružiny v měřícím přípravku. Vlastní talířová pružina byla vložena mezi trn a dosedací desku s kaleným povrchem, aby nedocházelo k zadírání hrany pružiny. Dosedací plocha trnu byla rovněž kalená. Na přírubě hydromotoru byl připevněn magnetický stojánek se snímačem polohy, který měřil stlačení, resp. vysunutí pístu hydromotoru.




*Obr. 5.1.1: Měřící přípravek – celkový pohled a detail*

## 5.2 Průběh měření a rozbor naměřených hodnot

U všech měřených pružin byla zaznamenávána síla a stlačení, u dvou z nich pak byla ještě měřena napjatost pomocí elektrických odporových tenzometrů. Každá pružina byla nejprve stlačena do stavu, který byl blízký rovinnému[3] a poté odlehčena. Tímto zatěžovacím cyklem bylo možné zjistit hysterezní smyčku pružiny. Měřící cyklus byl pro každou pružiny proveden celkem dvakrát.

### 5.2.1 Naměřené zatěžovací charakteristiky

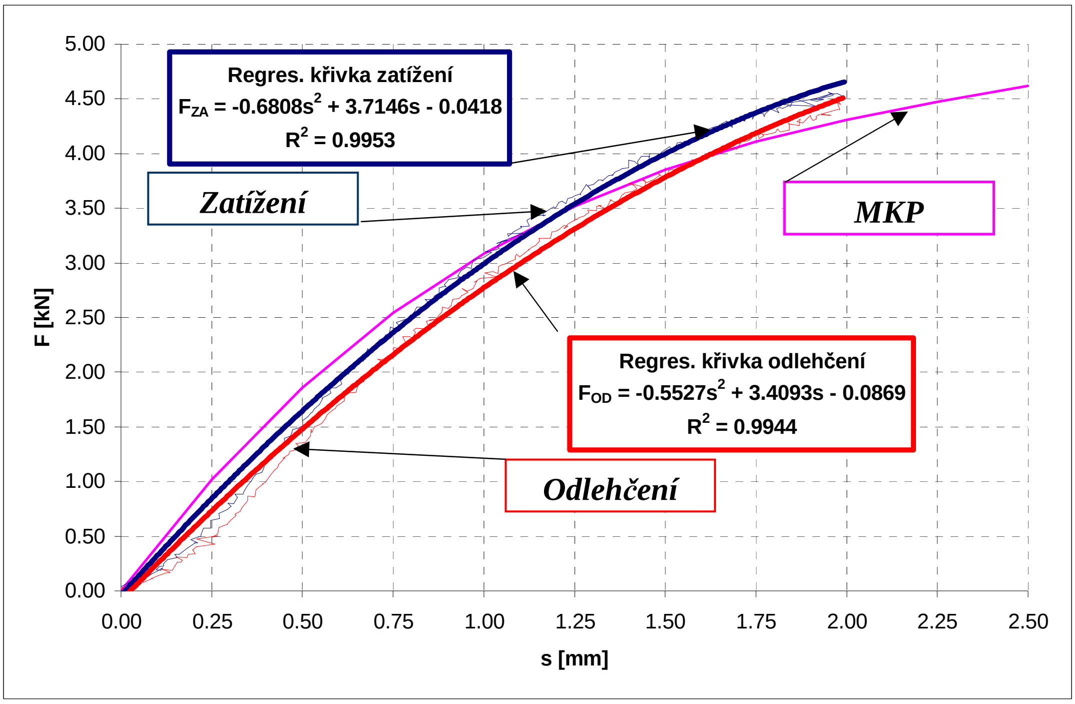
K měření sil byl použit siloměr *GTM 25 kN* vyrobený firmou GTM, Gassmann Theiss Messtechnik GmbH. Siloměr měl měřící rozsah 0 až 25 kN a odpovídal třídě přesnosti 0,02. Podrobnější technické informace jsou uvedeny v příloze 2 na straně 97.

---

[3] Pružina nemohla být stlačena do rovinného stavu, protože by trn dosedl na desku a mohlo by dojít ke zničení siloměru nebo poškození přípravku.

Pro měření stlačení byl zvolen indukční snímač polohy *HBM WA10* od firmy HBM, Hottinger Baldwin Messtechnik GmbH. Měřící rozsah tohoto snímače je 0 až 10 mm. Katalogové listy snímače jsou v příloze 3 a 4 na str. 98 a 99.

Graf na obr. 5.2.1 ukazuje naměřenou zatěžovací charakteristiku získanou v jednom zatěžovacím cyklu, tj. zatížení a následné odlehčení. Pro porovnání je v grafu vykreslena charakteristika získaná výpočtem pomocí MKP.




*Obr. 5.2.1: Naměřená zatěžovací charakteristika*

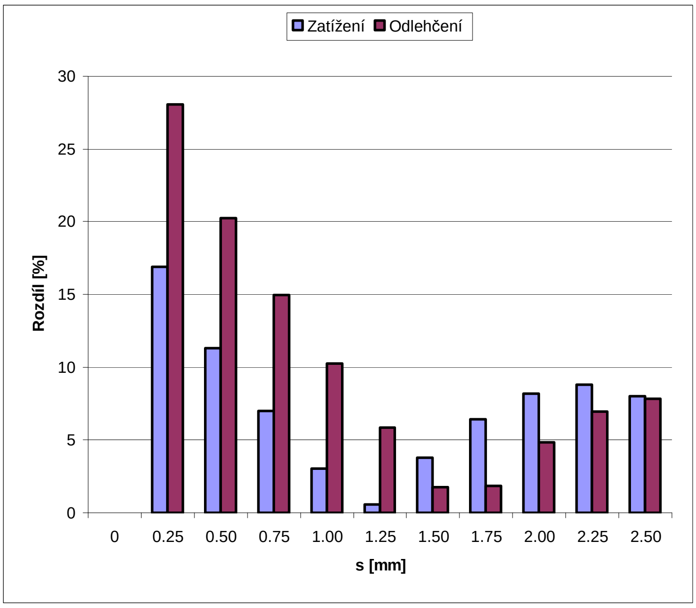
Z naměřených průběhů je patrné, že zatěžovací charakteristika vykazuje očekávanou hysterezi. Ta je patrně způsobena třením v dosedacích plochách mezi pružinou, čepem a dosedací deskou. Při zatěžování byly naměřeny větší síly než při odlehčování.

Z naměřených hodnot, a to zvláště pro zatížení a odlehčení, byly odvozeny regresní křivky, aby bylo možné lépe posoudit rozdíly mezi naměřenými a vypočtenými hodnotami. S ohledem na charakter průběhu naměřených hodnot zřejmě k nahrazení vystačíme s polynomy druhého stupně. Ty jsou v obrázku uvedeny u obou větví křivky cyklu. Vhodnou volbou stupně polynomu potvrzuje v obou případech hodnota koeficientu $\boldsymbol{R^2}$.

V tab. 5.2.1 jsou číselně uvedeny rozdíly mezi naměřenými a vypočítanými daty. Při výpočtu byly vzaty za základ (100%) hodnoty získané při výpočtu užitím MKP (objemový model). Pro lepší orientaci jsou rozdíly z tabulky vynesené ve sloupcovém grafu.

*Tab. 5.2.1: Procentní rozdíly síly při různých stlačeních*

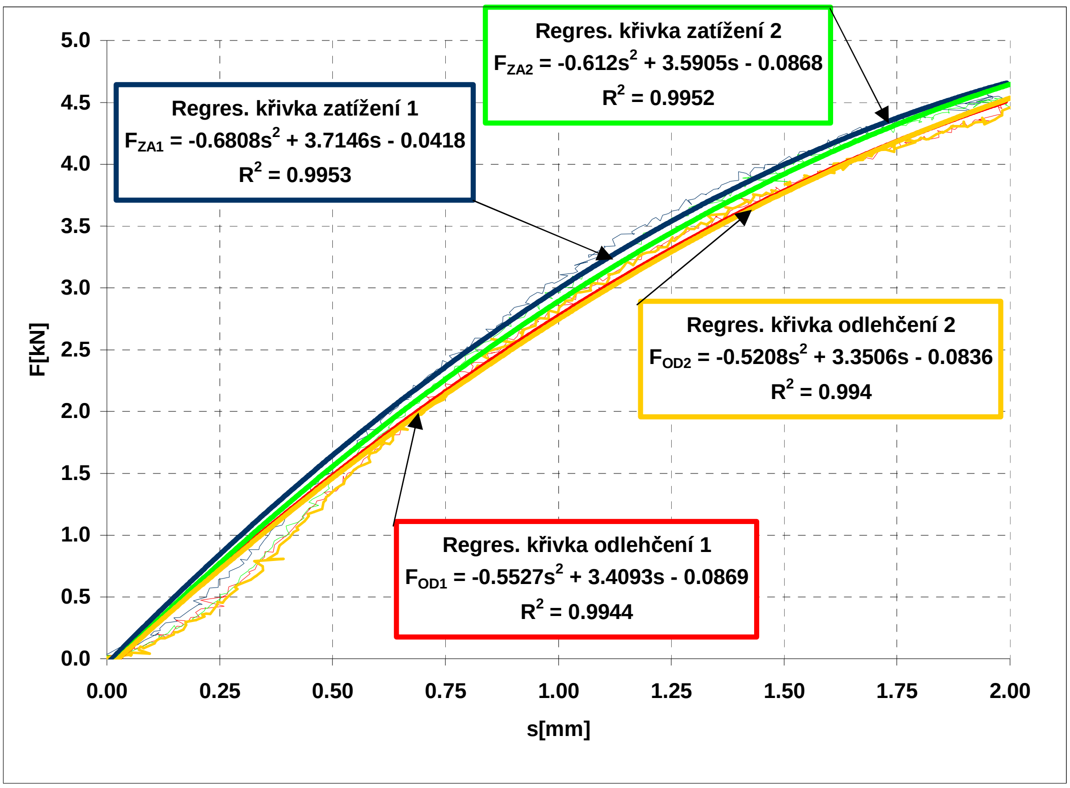
| ***s[mm]*** | ***Zatížení rozdíl[%]*** | ***Odlehčení rozdíl[%]*** |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0,25 | 16,9 | 28,1 |
| 0,50 | 11,3 | 20,3 |
| 0,75 | 7,0 | 14,9 |
| 1,00 | 3,0 | 10,2 |
| 1,25 | 0,6 | 5,9 |
| 1,50 | 3,8 | 1,8 |
| 1,75 | 6,4 | 1,9 |
| 2,00 | 8,2 | 4,9 |
| 2,25 | 8,8 | 6,9 |
| 2,50 | 8,0 | 7,8 |




*Obr. 5.2.2: Znázornění rozdílů zatížení*

Z velikostí rozdílů vyplývá, že zvláště pro malé hodnoty stlačení pružiny jsou rozdíly v charakteristikách poměrně velké, např. pro zdvih ***s = 0,25 mm*** je to ***17%***. Takto velký rozdíl je patrně způsoben vymezováním vůlí na začátku zatěžovacího procesu. Pro větší stlačení, po vymezení vůlí, jsou rozdíly mnohem menší.

Na začátku této kapitoly bylo uvedeno, že každá z pružin byla podrobena dvěma zátěžným cyklům jdoucím bezprostředně za sebou. Porovnání těchto dvou cyklů je provedeno v následujícím grafu.




*Obr. 5.2.3: Srovnání dvou navazujících zátěžných cyklů*

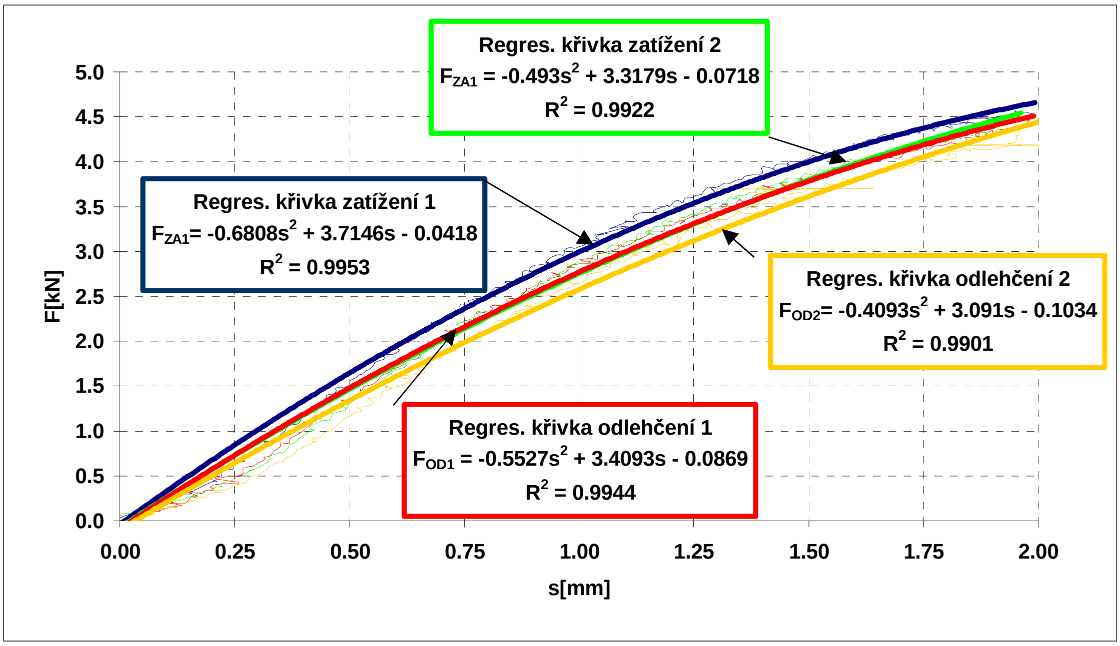
Naměřená data jsou opět proložena regresní křivkou, jejíž rovnice jsou uvedeny přímo v grafu. Číselné označení jednotlivých rovnic odpovídá jednotlivým cyklům, např. $F_{OD1}$ značí odlehčení z prvního cyklu. Pro číselné porovnání jsou v tab. 5.2.2 vypočteny rozdíly mezi cykly. Za základ při výpočtu (100%) byla vždy zvolena regresní křivka získaná pro hodnoty prvního cyklu.

*Tab. 5.2.2: Procentní rozdíly sil ve dvou zatěžovacích cyklech*

| ***s [mm]*** | | 0 | 0,25 | 0,50 | 0,75 | 1,00 | 1,25 | 1,50 | 1,75 | 2,00 | 2,25 | 2,50 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***Rozdíl [%]*** | ***Zatížení*** | 0 | 8,5 | 5,5 | 4,2 | 3,4 | 2,6 | 1,9 | 1,2 | 0,4 | 0,5 | 1,5 |
| | ***Odlehčení*** | 0 | 1,3 | 1,2 | 1,1 | 0,8 | 0,6 | 0,3 | 0,0 | 0,3 | 0,7 | 1,1 |

Z tabulky vyplývá, že se zatěžovací cykly od sebe liší jen mírně, rozdíly jsou zanedbatelné zvláště pro odlehčení.

Přestože počet měřených pružin nebyl velký (5 kusů), byly zjištěny znatelné rozptyly v naměřených zatěžovacích charakteristikách, jak ukazuje graf na obr. 5.2.4. V něm jsou vyneseny zatěžovací charakteristiky, které vykazují mezi sebou největší rozdíly.




*Obr. 5.2.4: Hranice rozptylu zatěžovacích a odlehčovacích křivek*

Také rozptyly měřených pružin nejsou nikterak veliké, což dokazují změřené průběhy zatěžovacích charakteristik a tab. 5.2.3 s vypočtenými rozdíly. Jsou pouze větší pro malá stlačení. Za základ (100%) byly vzaty hodnoty sil získaných měřením první pružiny.

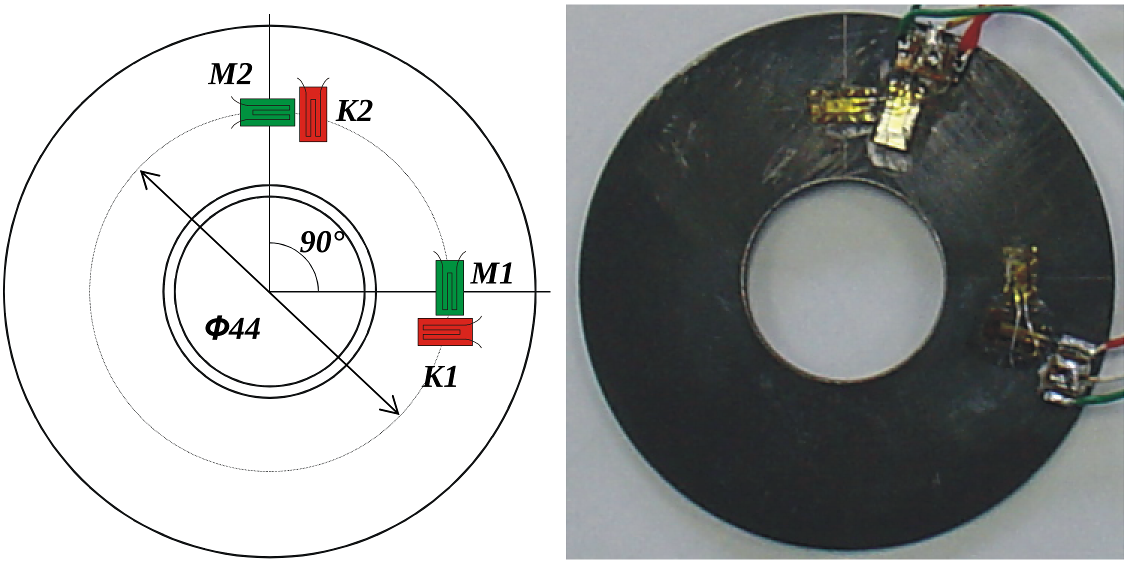
*Tab. 5.2.3: Rozdíly v charakteristikách dvou pružin*

| ***s [mm]*** | | 0 | 0,25 | 0,50 | 0,75 | 1,00 | 1,25 | 1,50 | 1,75 | 2,00 | 2,25 | 2,50 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***Rozdíl [%]*** | ***Zatížení*** | 0 | 13,9 | 11,0 | 9,4 | 8,0 | 6,6 | 5,1 | 3,4 | 1,5 | 0,6 | 3,0 |
| | ***Odlehčení*** | 0 | 11,9 | 9,4 | 8,1 | 6,9 | 5,7 | 4,5 | 3,2 | 1,8 | 0,1 | 1,7 |

## 5.2.2 Naměřená obvodová napětí

Pro měření obvodového napětí byla pružina opatřena tenzometry. Jednalo se o fóliové tenzometry typu 1-LY-11-3/120, vyráběné firmou HBM, Hottinger Baldwin Messtechnik GmbH,. Měřící část tenzometru má rozměry 3x1,4 mm, kompletní katalogový list s celkovým technickým popisem je v příloze 5 až 7 na straně 100 a 101.

K měření byly použity čtyři tenzometry rozmístěné podle schématu na obr. 5.2.5 vlevo a zapojené do úplného můstku. Tenzometry ***M1*** a ***M2*** (měřící) byly orientovány ve směru obvodového napětí. Střed tenzometrů ležel přibližně na ***Φ44 mm***. Poloha tenzometrů tedy přibližně odpovídá místu, ve kterém lze spočítat obvodové napětí $\boldsymbol{\sigma_{OM}}$, dané vzorcem (3.9). Kompenzační tenzometry ***K1***, ***K2*** byly nalepeny kolmo k obvodovému směru, tedy přibližně ve směru radiálním. Měření napětí bylo provedeno ve dvou na sebe kolmých rovinách. Fotografie na obr. 5.2.5 vpravo ukazuje pružinu s nalepenými tenzometry.

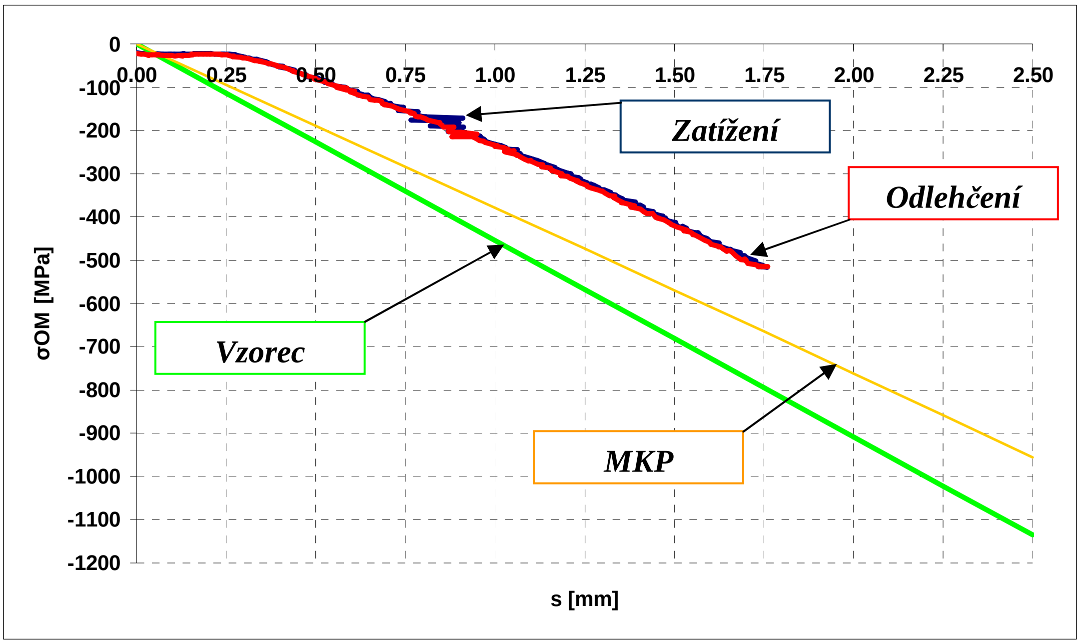



*Obr. 5.2.5: Rozmístění tenzometrů*

Napjatost byla měřena pouze na jedné pružině, a to jak pro zatěžování, tak i pro odlehčování pružiny. V následujícím grafu je provedeno srovnání naměřených hodnot s hodnotami získanými výpočtem užitím MKP, další křivka pak ukazuje průběh $\boldsymbol{\sigma_{OM}}$ získaný klasickým výpočtem.

Tenzometry přirozeně neměří napjatost, resp. deformaci v osamělém místě zanedbatelných rozměrů, ale na ploše, jejíž velikost závisí na rozměrech použitého tenzometru. Proto získáme pouze jakousi střední hodnotu napětí na měřené ploše. Z tohoto důvodu nebylo napětí z výsledků výpočtů užitím MKP odečteno jen v jediném uzlu, ale ve všech uzlech ležících v místě nalepeného tenzometru. Za směrodatnou srovnávací hodnotu z výpočtu byl brán aritmetický průměr hodnot obvodových napětí ve všech uvažovaných uzlech.

Z průběhu naměřených hodnot vyplývá, že na počátku zatěžování byla tenzometry naměřena téměř konstantní hodnota napětí. To je patrně způsobeno vymezováním vůlí na počátku zatěžování. Další vliv na průběh napětí na začátku zatěžování mohla mít vrstva lepidla pod tenzometrem. Ta byla nejspíše silnější než optimální, takže došlo nejprve k prokluzu ve vrstvě lepidla a až později se začal deformovat tenzometr. V další fázi zatěžování vykazují již čáry naměřených a vypočtených hodnot stejný sklon. Při porovnávání číselných hodnot vykazuje nejvyšší napětí výpočet klasickými vzorci, právě nižší napětí měření i při výpočtech pomocí MKP lze vysvětlit způsobem zacházení s výsledky, tedy užíváním průměrných hodnot.




*Obr. 5.2.6: Naměřená obvodová napětí (pružina A)*

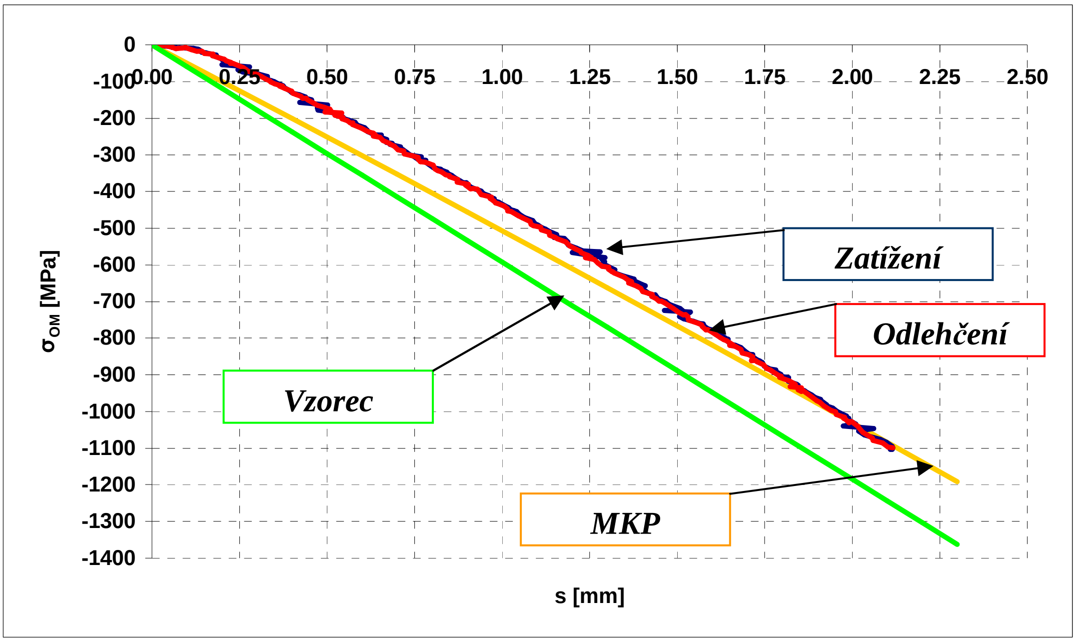
V tab. 5.2.4 jsou uvedeny hodnoty obvodového napětí, které odpovídají stlačení ***s* = 1,75 *mm***. Tamtéž je také uveden procentuelní rozdíl mezi těmito hodnotami. Za základ byla vzata hodnota napětí získaná pomocí MKP.

*Tab. 5.2.4: Porovnání obvodových napětí (pružina A) pro s = 1,75mm*

| | ***Měření*** | | ***MKP*** | | ***Vzorec*** |
|---|---|---|---|---|---|
| ***$\sigma_{OM}$ [MPa]*** | -515 | | -665 | | -795 |
| ***Rozdíl [%]*** | | 22 | | 20 | |

Všechna výše uvedená měření a výpočty byly provedeny obdobným způsobem i pro sadu talířových pružin ***B*** s rozměry uvedenými v tab. 4.3.1. Výsledky měření a výpočtů vykazovaly podobnou shodu jako v případě pružiny ***A***, a proto nejsou uvedeny. V případě měření napjatosti na pružině ***B*** byla shoda výsledků mnohem lepší.

Je to patrné z porovnáním průběhů křivek získaných ze vzorce, výpočtem pomocí MKP a měření. Stejně jako v předchozím případě i zde nevětší hodnoty napětí dává výpočet pomocí vzorce. Porovnání je provedeno v grafu na obr. 5.2.7.




*Obr. 5.2.7: Naměřená obvodová napětí (pružině B)*

V tab. 5.2.5 jsou uvedeny hodnoty napětí pro stlačení ***s = 1 mm***. Tato velikost stlačení odpovídá přibližně polovině zdvihu pružiny. Při výpočtu rozdílu byla za základ vzata hodnota napětí získaná pomocí MKP. Rozdíl mezi naměřenou hodnotou a MKP činí přibližně ***11%***. Pokud porovnáme výsledky z MKP a hodnotu napětí získanou pomocí vzorce je již rozdíl poněkud větší.

*Tab. 5.2.5: Porovnání obvodových napětí (pružina B) pro s = 1 mm*

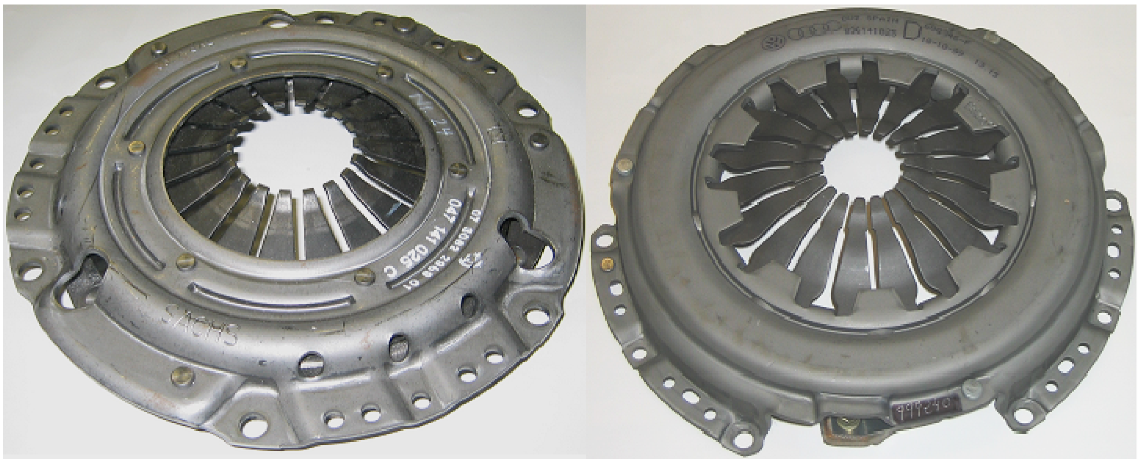
| | ***Měření*** | ***MKP*** | ***Vzorec*** |
|---|---|---|---|
| ***$\sigma_{OM}$ [MPa]*** | -452 | -506 | -593 |
| ***Rozdíl [%]*** | 11 | | 17 |

# 6 TALÍŘOVÁ PRUŽINA S VYPÍNACÍMI PAPRSKY

Jak již bylo uvedeno v předcházejících kapitolách, v praxi se mimo běžných talířových pružin používají také pružiny nestandardních tvarů. Typickým případem jsou talířové pružiny s vypínacími paprsky používané ve spojkách vozidel. Zástavbu talířových pružin ve dvou spojkách užívaných v osobních automobilech firmy ŠKODA-AUTO, a. a. s. ukazuje obr. 6.1.1.

## 6.1 Konstrukční uspořádání spojky vozidla

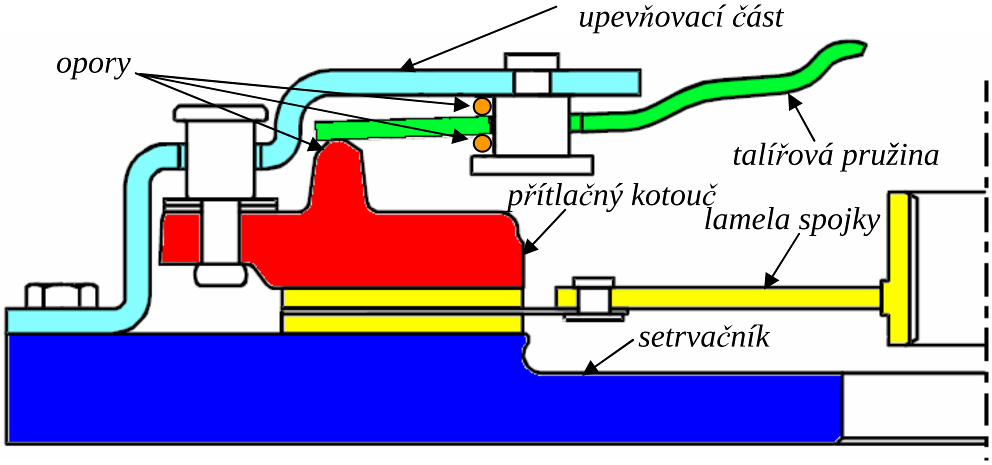
Vozidlová spojka musí zajistit spolehlivý přenos kroutícího momentu mezi motorem a převodovým ústrojím a zároveň musí umožnit, aby byl jeho tok snadno přerušen. Přenos kroutícího momentu je uskutečněn třením lamely spojky mezi přítlačným kotoučem spojky a setrvačníkem. Abychom ho byli schopni bezpečně přenést, musí být přítlačná síla dostatečně veliká. Je to právě talířová pružina, která je schopna na malém zástavbovém prostoru a při mírných stlačeních (v porovnání s vinutými pružinami) tuto sílu vyvodit. Pro přerušení přenosu kroutícího momentu je pružina opatřena vypínacími paprsky. Celý zatěžovací proces a konkrétní silové poměry budou podrobně popsány v následujících kapitolách.



*Obr. 6.1.1: Konstrukční provedení spojky automobilu*

Existuje velké množství nejrůznějších konstrukčních uspřádání spojek od různých výrobců. Spojka je navržena pro konkrétní typ motoru a převodovky. Na obr. 6.1.1 vlevo je spojka určená pro tříválcový motor o objemu 1,2 litru s výkonem 45 kW. Výrobcem této spojky je německá firma SACHS. Ve spolupráci s firmou ŠKODA-

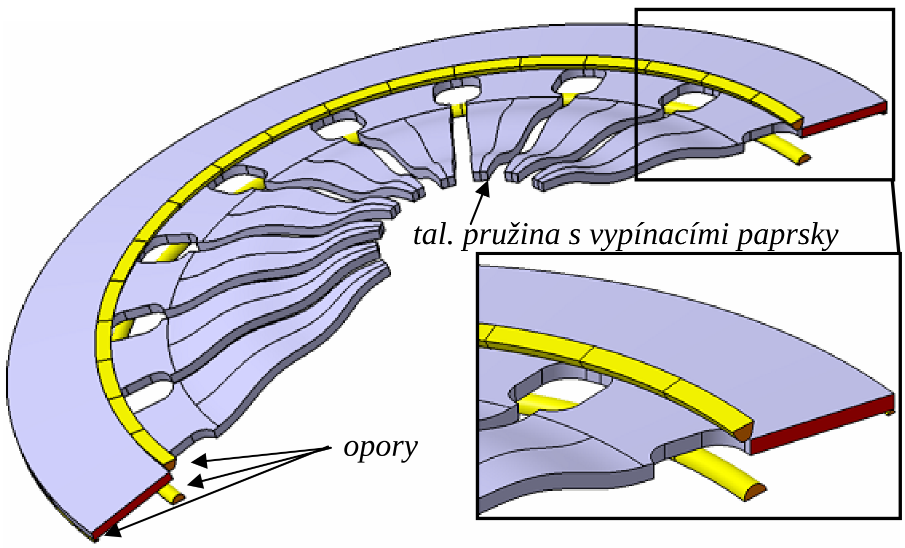
AUTO, a. a. s. se podařilo získat dva kusy spojek, proto byl zvolen k výzkumu právě tento typ.




*Obr. 6.1.2: Schéma sestavení automobilní spojky*

## 6.2 Tvorba modelu pro MKP

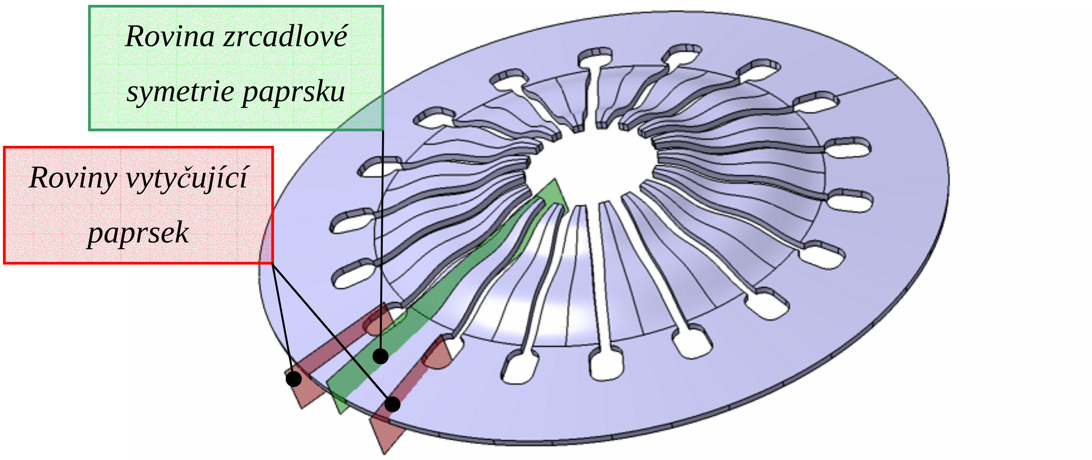
Pro výzkum talířové pružiny, jakožto jednoho z řady členů vozidlové spojky (viz obr. 6.1.2), není třeba modelovat celou spojku, protože relativní pohyb pružiny a jejich opor nastává výhradně ve směru osy rotace. Zahrnutím dalších součástí by se model stal příliš složitým. Lze též předpokládat, že tuhost a napjatost pružiny zásadně neovlivní např. přítlačný kotouč nebo upevňovací část. Postačí tedy modelování vlastní pružiny s příslušnými oporami.




*Obr. 6.2.1: Trojrozměrný model talířové pružiny s oporami*

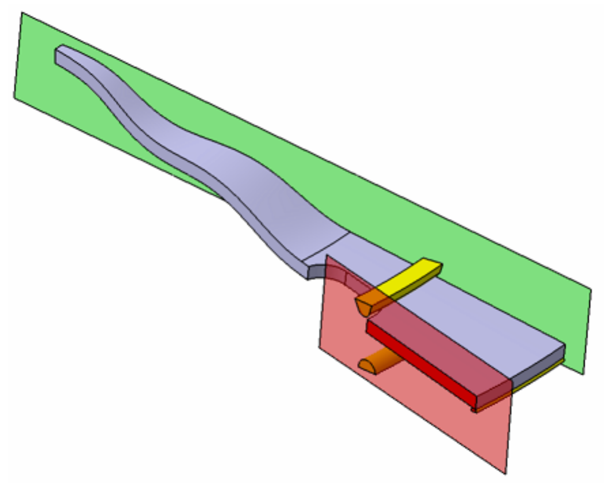
Pro větší názornost je pružina zobrazena pouze v polovičním řezu, roviny řezu jsou označené červenou barvou. CAD model pružiny se nepodařil od výrobce získat, proto byl povrch pružiny proměřen tříosým souřadnicovým měřícím zařízením. Souřadnice bodů povrchu byly snímány po malých krocích v radiálním směru. Z takto získaného souboru bodů bylo možné zkonstruovat meridiální řez pružiny postačující přesnosti.

Zkoumaná talířová pružina má 18 vypínacích paprsků a řadu rovin symetrie, čehož se dá s výhodou využít při tvorbě výpočtové struktury, viz kap. 4.2.1. Jeden z paprsků je na obr. 6.2.2 vytčen červenými rovinami. Navíc paprsky jsou zrcadlově symetrické podle roviny procházející jejich středem (zelená rovina). Tím se nám celá úloha zredukuje na řešení segmentu s úhlem rovin o velikosti deseti stupňů.




*Obr. 6.2.2: K znázornění rovin symetrie pružiny a paprsku*

Přinejmenším shodný počet rovin symetrie jako pružina mají i opory, protože se jedná o rotačně symetrická tělesa. Desetistupňový segment (obr. 6.2.3) tedy plně vyhovuje pružině i jejím oporám, stejně jako určení okrajových podmínek a zatížení, jak to bude podrobněji popsáno v následujících odstavcích.

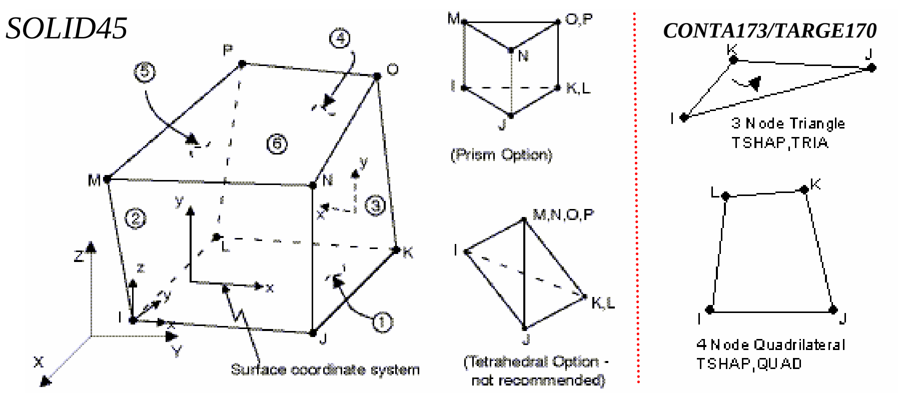


*Obr. 6.2.3: Vyšetřovaný segment talířové pružiny*

## 6.2.1 Síť pro MKP

Výpočtovou strukturu je nutné vyplnit odpovídajícím typem prvku. Pokud bychom řešili pouze talířovou pružinu bez opor, bylo by možné použít skořepinové nebo objemové prvky. Pro vyplnění opor však nelze použít skořepinové prvky, ale pouze objemové. Z výše uvedeného vyplývá nutnost užití výhradně objemových prvků.

Pro náš účel byly zvoleny objemové prvky v systému ANSYS nazývané SOLID45. Jedná se o šestistěn s osmi uzly umístěnými v rozích prvku a lineární aproximací posuvů na hranách prvku, jak ukazuje obr. 6.2.4 vlevo. Tento prvek má několik různých tvarových modifikací, např. šestistěn, klín nebo nejjednodušší variantu – čtyřstěn. Prvky SOLID45 při malé hustotě sítě špatně postihují velké gradienty napětí a proto je nutné v těchto místech vytvořit hustší síť. Jejich předností je malý počet rovnic popisující celý prvek, což je výhodné oproti prvku SOLID95.

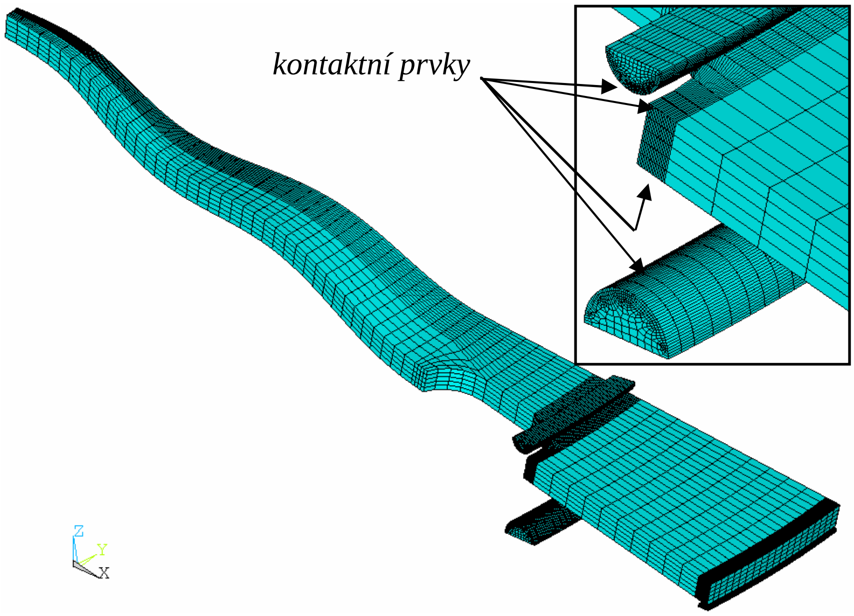



*Obr. 6.2.4: Použité prvky*

Zatížení je na pružinu přenášeno prostřednictvím opor, není sama tedy přímo zatížená, např. silou nebo nuceným posuvem. V takovémto případě je nezbytně nutné vložit mezi oporu a dosedací místo na pružině tzv. kontaktní prvky. Takto vytvořené prvky přirozeně počítají s možným relativním pohybem mezi pružinou a oporou (přemisťování čar dotyku na opoře i pružině) a zabrání proniknutí opor do vlastního objemu pružiny Zavedením kontaktních prvků do struktury se úloha při řešením užitím MKP stává úlohou nelineární.

V systému ANSYS existuje několik různých druhů kontaktních prvků, které svými vlastnostmi a tvarem odpovídají prvku vyplňující strukturu pod ním. Při použití osmiuzlových prvků SOLID45 nabízí systém kontaktní prvky typu CONTA173 a TARGE170, zřetelné v obr. 6.2.4 vpravo.

Při tvorbě sítě pro kontaktní úlohu je třeba brát na zřetel několik zásad. Vždy je lepší, aby uzly dotýkajících se těles v místě kontaktu ležely přímo na sobě nebo co možná nejblíže k sobě – rychlejší konvergence úlohy. Pokud se tělesa vůči sobě smýkají, je nutné vytvořit síť v kontaktu dostatečně jemnou. Pokud by síť byla příliš řídká, velké elementy – uzly by ležely příliš daleko od sebe, úloha by velmi špatně konvergovala. V případě výpočtu talířové pružiny dochází k vzájemnému smýkání mezi oporami a dosedacími plochami pružiny a proto bylo nutné ve shodě s předcházejícím tvrzením právě v těchto místech vytvořit síť velmi jemnou, jak ukazuje obr. 6.2.5.

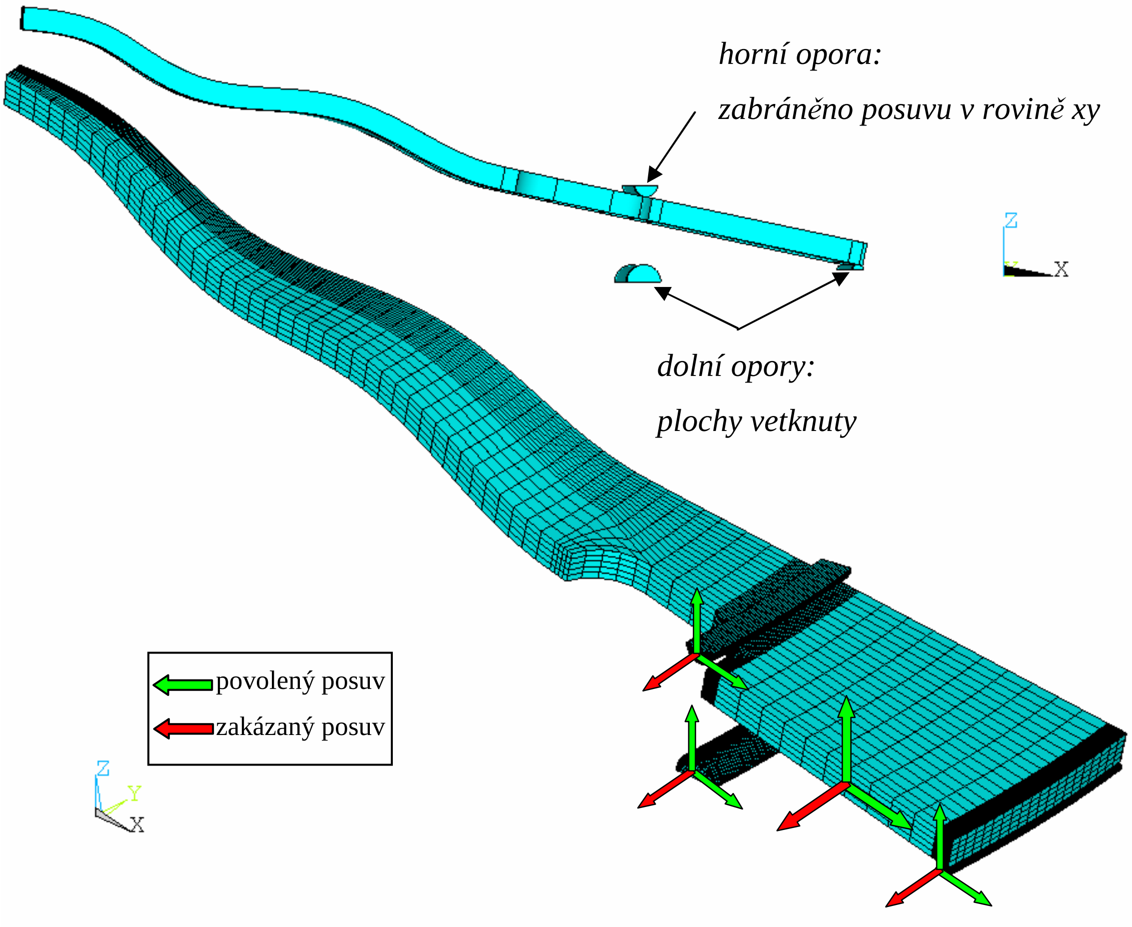



*Obr. 6.2.5: Síť objemových a kontaktních prvků talířové pružiny a opor*

### 6.2.2 Okrajové podmínky a zatížení

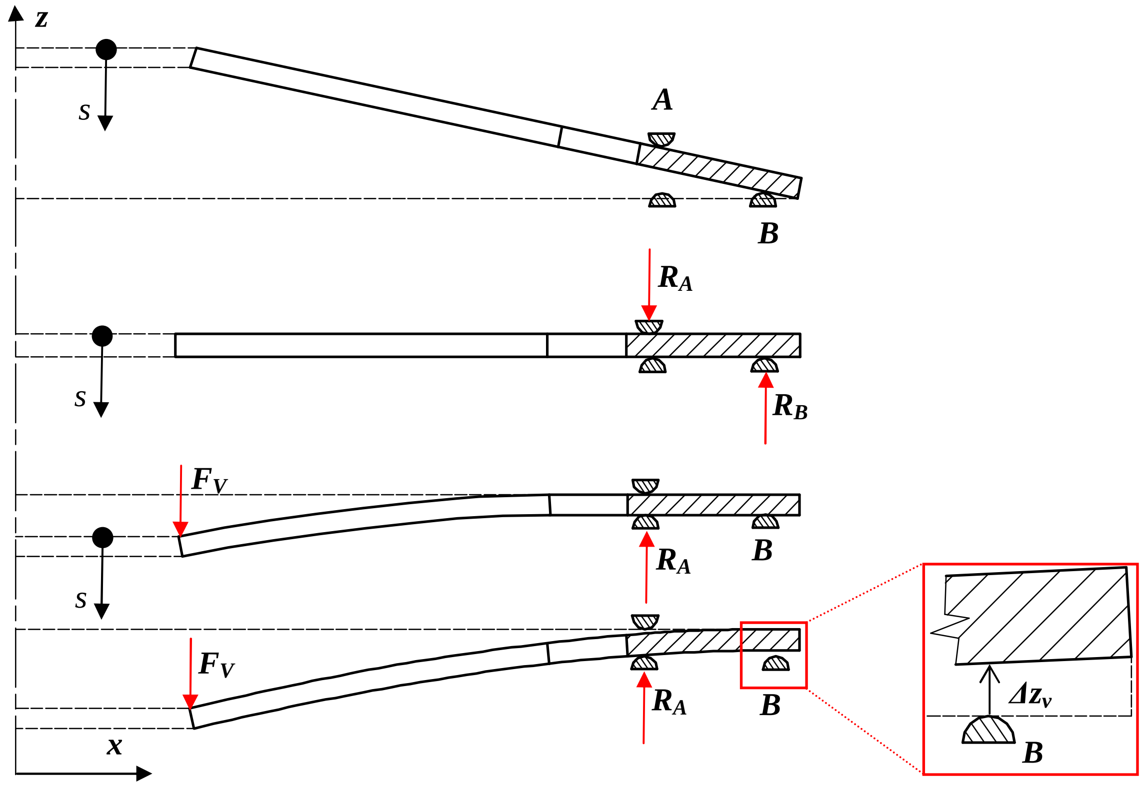
Výpočtovou strukturu je nutné opatřit vhodnými okrajovými podmínkami a správným zatížením odpovídajícím reálným poměrům ve spojce.

Uzlům v rovinách symetrie pružiny i opor bylo zamezeno posuvu ve směru kolmém na tyto plochy, jak ilustruje obr. 6.2.6. Tím byla zajištěna symetrie segmentu. Na horní opoře bylo zabráněno posuvu uzlů ve směru ***x*** a ***y***, ve směru ***z*** nebyly uzly fixovány. Uzlům ležícím na spodní straně dolních opor bylo zamezeno posuvu ve všech směrech (vetknuto).




*Obr. 6.2.6: Okrajové podmínky*

Zatěžování pružiny spojky probíhá v několika krocích, podle obr. 6.2.7. Nejprve je tato pružina podepřena na spodním povrchu oporou anuloidového tvaru v místě ***B*** a prohýbána shora posuvnou podporou do přibližně rovinného tvaru, přičemž vzniká zátěžná síla $\boldsymbol{R_A}$. Na oporu v místě ***A*** nebyla tedy při výpočtu přímo zavedena síla, ale nucený posuv v osovém směru. Stlačující síla byla pak po výpočtu odečtena jako reakce v opoře. Takovouto úpravou zatížení úloha nikterak neutrpí, ba naopak zlepší se stabilita celého procesu výpočtu. V druhé fázi působí vzrůstající přídavná (vypínací) síla $\boldsymbol{F_V}$ na vypínacích paprscích, což má za následek vytvoření vůle $\boldsymbol{\Delta z_v}$ v osovém směru pružiny, a tím přerušení přenosu točivého momentu. I tato síla byla v souladu s předchozím postupem nahrazena nuceným posuvem v osovém směru. Zjištěné průběhy sil budou podrobněji popsány v následujících kapitolách.




*Obr. 6.2.7: Zatížení talířové pružiny*

## 6.3 Výsledky řešení užitím MKP

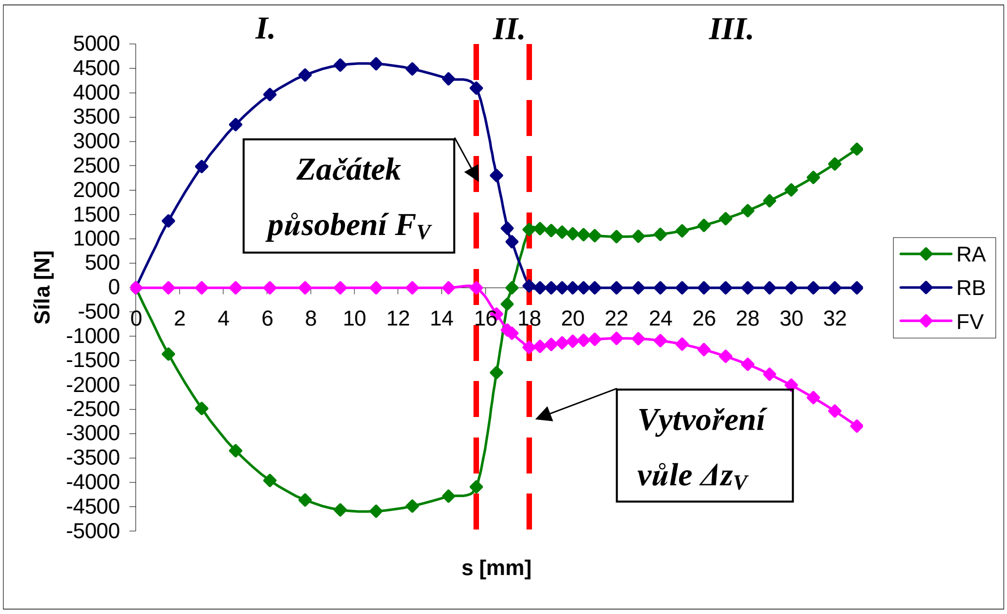
V následujících odstavcích budou podrobně rozebrány výsledky výpočtů získaných pomocí MKP, bude podrobně zhodnocena zatěžovací charakteristika i napjatost v pružině.

### 6.3.1 Zatěžovací charakteristika talířové pružiny

Závislostí rozhodující důležitosti, kterou nezbytně potřebujeme znát o talířové pružině s vypínacími paprsky, je zatěžovací charakteristika. Pomocí MKP lze velmi snadno a účinně stanovovat její průběh. Postačí, když nucené posuvy, předepisované nejprve na opoře a pak na paprsku, budeme měnit po dostatečně jemných krocích.

Velikost kroku je závislá na nelinearitě vyšetřovaného průběhu, obecně lze říci, že čím nelineárnější je sledovaná závislost, tím jemnější krok musíme zvolit.

Graf na obr. 6.3.1 znázorňuje vypočtenou zatěžovací charakteristiku pružiny s vypínacími paprsky vyšetřovaného případu. Na vodorovné ose je vynášen posuv paprsku v osovém směru a na svislou pak síla, rovněž v osovém směru, podle obr. 6.2.7.




*Obr. 6.3.1: Zatěžovací charakteristika talířové pružiny s vypínacími paprsky*

Zatížení takovéto pružiny probíhá v několika fázích:

I. Na vnitřní opoře, která je označena písmenem ***A***, je v prvním kroku aplikována síla $\boldsymbol{R_A}$ (v MKP nucený posuv). Tato síla způsobí, že se pružina narovná do přibližně rovinného stavu. Síla $\boldsymbol{R_B}$, která vzniká na vnější opoře ***B***, má stejnou velikost a směr avšak opačný smysl. Z průběhů sil $\boldsymbol{R_A}$ a $\boldsymbol{R_B}$ je jasně viditelná nelineární závislost mezi zatížením a deformací. Tento zatěžující krok v praxi odpovídá montáži spojky do vozidla.

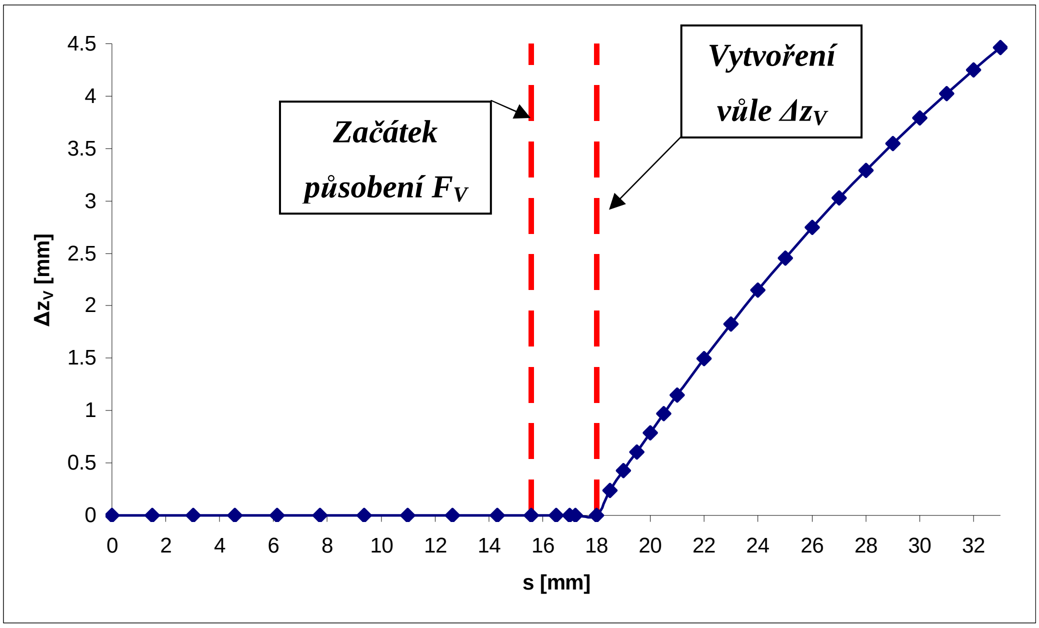
II. V druhé fázi zatěžování aplikujeme vypínací sílu $\boldsymbol{F_V}$ na koncovou část paprsku (v MKP opět nucený posuv). Ta má za následek rychlý pokles absolutních hodnot sil $\boldsymbol{R_A}$ a $\boldsymbol{R_B}$, jak je patrné z grafu. Síla $\boldsymbol{R_B}$ dosáhne nulové hodnoty a u $\boldsymbol{R_A}$ mění znaménko.

III. V posledním kroku dochází k vytvoření vůle $\boldsymbol{\Delta z_V}$ v osovém směru pružiny a tím k přerušení přenosu kroutícího momentu. Zatěžující fáze II. a III. odpovídají sešlápnutí spojkového pedálu automobilu.

Z výše uvedených průběhů je jasně patrné, že poměrně malou silou $\boldsymbol{F_V}$ jsme schopni ovládat velkou sílu $\boldsymbol{R_B}$. Tato skutečnost je další výhodou při záměně vinutých šroubových pružin za jedinou talířovou pružinu s vypínacími paprsky u vozidlových spojek.

### 6.3.2 Vůle $\Delta z_V$ talířové pružiny

Další zajímavou závislostí je vztah mezi stlačením pružiny a vůlí $\boldsymbol{\Delta z_V}$, která vzniká mezi oporou ***B*** a vnějším průměrem pružiny. Právě vznik vůle dovoluje přerušení toku kroutícího momentu. Graf na obr. 6.3.2 ukazuje tuto závislost.




*Obr. 6.3.2: Závislost vůle $\boldsymbol{\Delta z_V}$ na stlačení*

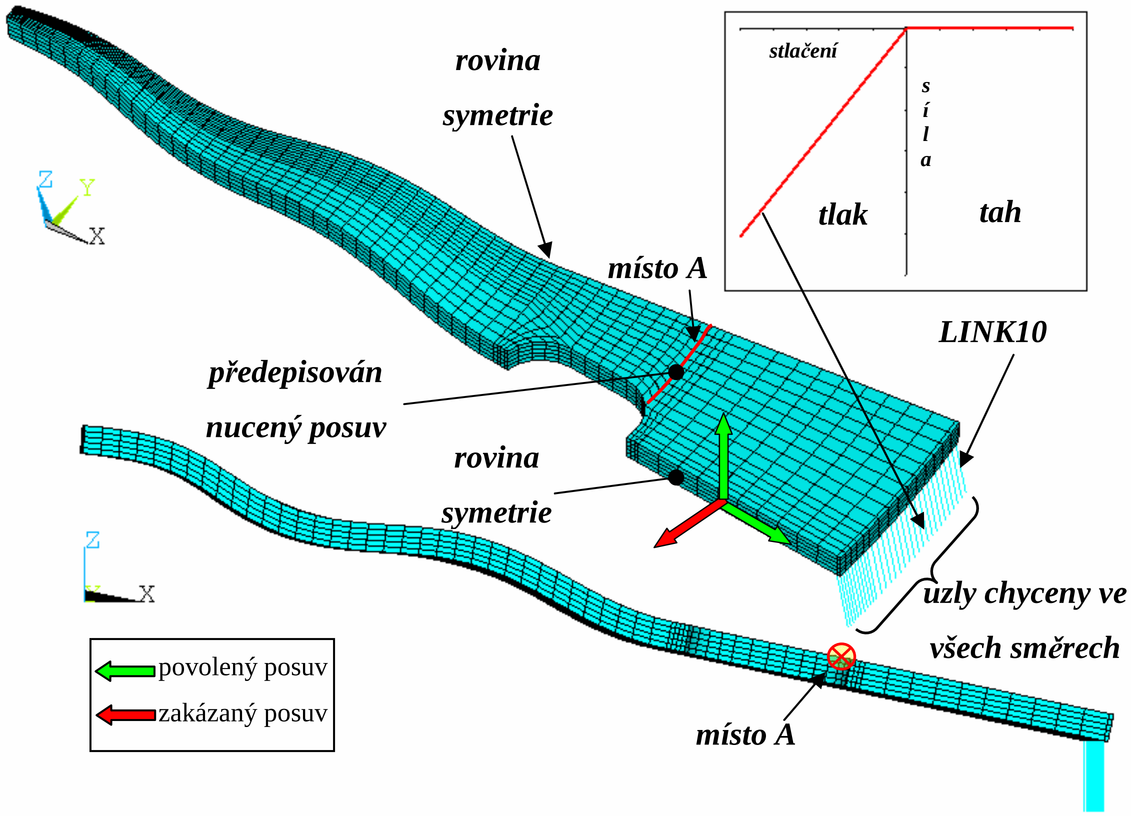
Z průběhu vůle $\boldsymbol{\Delta z_V}$ je vidět, že je podle očekávání v první a druhé fázi nulová. U sledovaného typu pružiny je její průběh jen slabě nelineární a prudce rostoucí.

### 6.3.3 Zjednodušený model pro MKP

Výše popsaný model se všemi oporami je po stránce tvorby a zejména doby řešení velmi náročný. K nelinearitě způsobené velkými posuvy, přibyla totiž ještě další od kontaktů mezi oporami a pružinou. Přítomnost kontaktních prvků klade velké nároky na hustotu sítě a z toho pramení nutnost velkého počtu elementů, resp. uzlů v místech dotyku součástí. Další nepříjemnou vlastností takto vytvořeného modelu je, že dotyk mezi oporami a pružinou je realizován pouze na kružnici (teoreticky v nulové ploše). Navíc dochází k vzájemnému smýkání mezi tělesy.

Nový zjednodušený výpočtový model pro užití MKP by měl být rovnocenný s předchozím, tj. umožňovat určit všechny důležité závislosti a charakteristiky. Vnitřní opora ***A*** byla tedy z modelu zcela vypuštěna, pružina byla v místě dotyku opory zatěžována přímo nucenými posuvy v osovém směru. Vnější opora ***B*** byla nahrazena prvky speciálního druhu, který je schopen přenášet pouze osový tlak. Tento prvek (bývá v systémech MKP často nazýván LINK10) při tahovém zatížení tedy nevykazuje žádný odpor a proto může napodobit dotyk mezi zmíněnou oporou a pružinou velmi jednoduše. K vyplnění vlastního objemu pružiny byl zvolen dvacetiuzlový prvek typu SOLID95, jehož vlastnosti jsou podrobněji popsány v kapitole 4.2.2.

Celou situaci u modelu vidíme na obr. 6.3.3. Okrajové podmínky odpovídající symetrické úloze jsou stejné jako u modelu předcházejícího. Koncům prvků LINK10 byly na jedné straně odebrány všechny stupně volnosti a na straně druhé byly připojeny k uzlům na pružině. Délka těchto prvků je 10 mm.




*Obr. 6.3.3: Zjednodušený model pro MKP*

Pružina byla zatěžována v první fázi postupně nucenými posuvy v místě ***A*** opět až do rovinného stavu. V další fázi byla stejně jako v předchozím případě aplikována vypínací síla $\boldsymbol{F_V}$ jako nucený posuv.

### 6.3.4 Porovnání zjednodušeného modelu a modelu s kontakty

Užitím nově vytvořeného výpočtového modelu se podařilo výrazně zmenšit počet uzlů, prvků struktury a především zkrátit výpočetní čas. Porovnání obou modelů z hlediska těchto parametrů je provedeno v následující tabulce. Pokud bychom v obou případech použili prvky osmiuzlové, byla by redukce počtu uzlů u zjednodušeného modelu ještě větší.

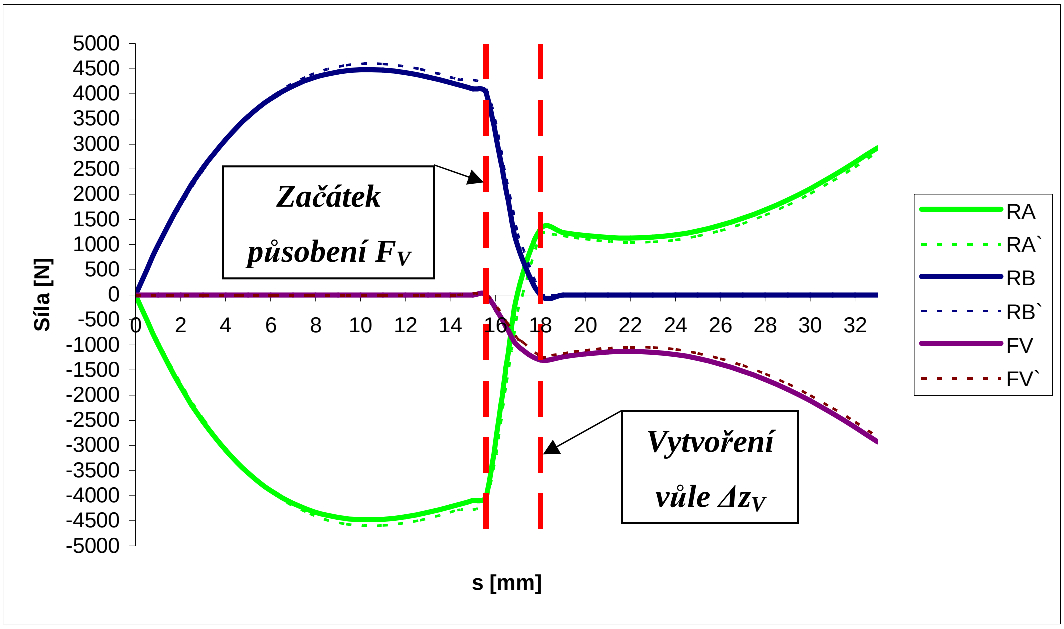
*Tab. 6.3.1: Porovnání modelů pro MKP*

| | ***Počet prvků*** | ***Počet uzlů*** | ***Výpočetní čas*** |
|---|---|---|---|
| ***Model s kontakty*** [4] | 34209 | 37553 | ~22 hodin |
| ***Zjednodušený model*** [5] | 4356 | 21297 | ~60 minut |

V následujícím grafu je provedeno srovnání výsledků výpočtu užitím zjednodušeného modelu a modelu s kontakty. V grafu jsou křivky získané z modelu s kontakty vykresleny přerušovanou čarou. V legendě jsou pak jednotlivé síly označeny apostrofem, tedy ***RA`***, ***RB`***, ***FV`***.

[4] Osmiuzlové prvky typu SOLID45

[5] Dvacetiuzlové prvky typu SOLID95



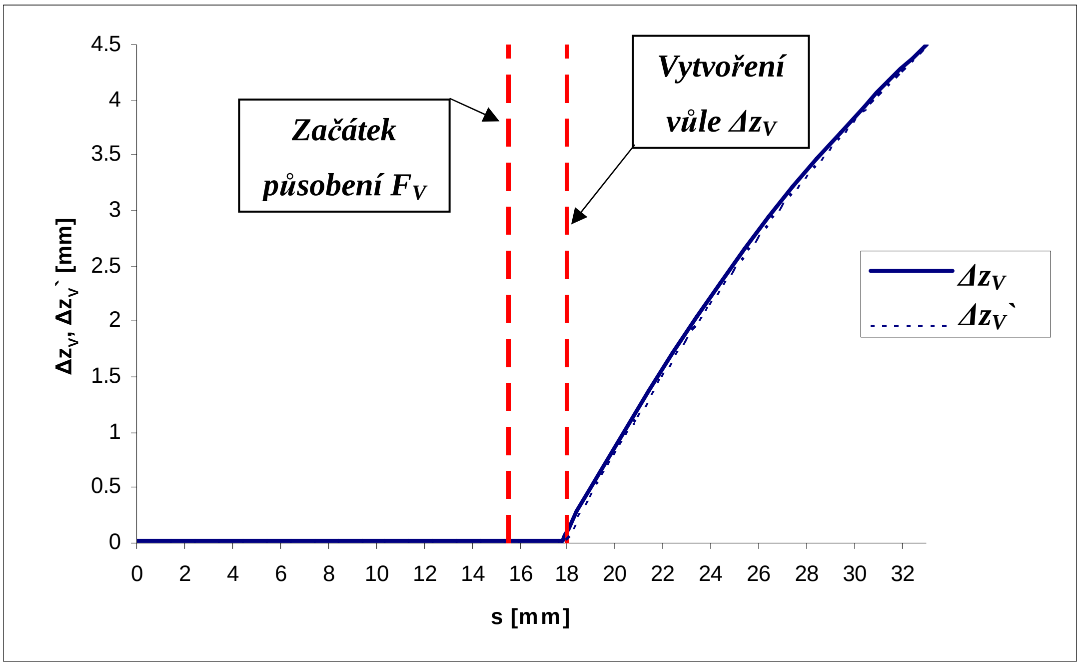

*Obr. 6.3.4: Porovnání zatěžovacích charakteristik dvou modelů*

Z uvedených průběhů je zřetelně vidět, že ve sledovaném případě oba modely dávají velmi podobné výsledky. Největší rozdíl je mezi reakcemi $R_A$ a $R_B$ při stlačení ***s***, které je přibližně rovno ***25 mm***. Jak uvádí tab. 6.3.2, není tento rozdíl nikterak velký, je menší než ***9%***. Za základ byla vzata hodnota síly získaná z modelu s kontakty. K dalšímu srovnání byl vybrán stav pružiny odpovídající stlačení ***s = 11 mm***. I v tomto případě je rozdíl mezi hodnotami sil přijatelně velký.

*Tab. 6.3.2: Porovnání sil*

| ***Stlačení s [mm]*** | ***Rozdíl [%]*** | | |
|---|---|---|---|
| | $R_A$ vs. $R_A$` | $R_B$ vs. $R_B$` | $F_V$ vs. $F_V$` |
| ***11*** | 2,7 | 2,7 | 0,0 |
| ***25*** | 8,9 | 0,0 | 8,9 |

Další porovnávanou veličinou je vůle $\Delta z_V$ vytvořená mezi vnější oporou a talířovou pružinou. Srovnání je provedeno v následujícím grafu.




*Obr. 6.3.5: Porovnání vůle $\Delta z_V$ dvou modelů*

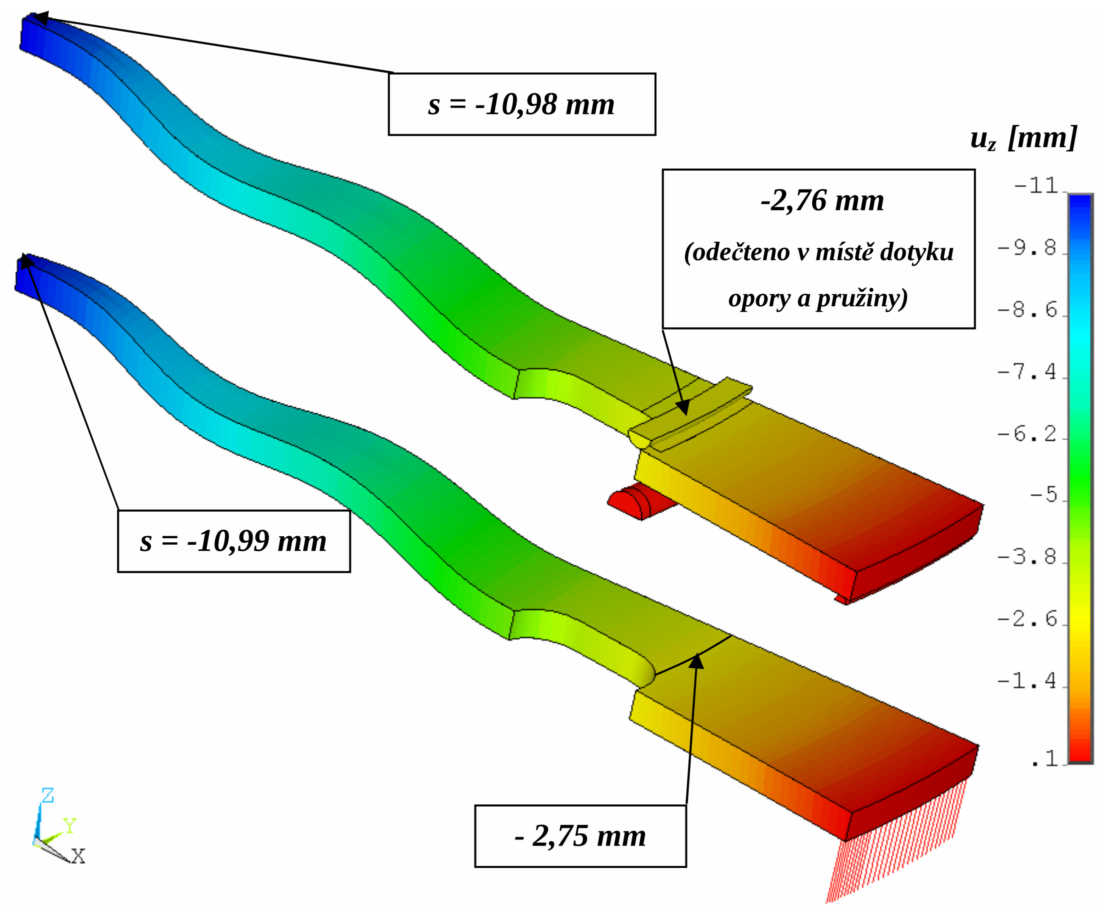
Z průběhů vůle $\Delta z_V$ je patrné, že oba modely dávají v podstatě shodné výsledky. Například rozdíl pro hodnotu stlačení ***s = 25 mm*** je ***2,4%***, což je přijatelné. Lze proto konstatovat, že oba modely jsou z těchto hledisek prakticky rovnocenné.

## 6.3.5 Osové a radiální posuvy talířové pružiny

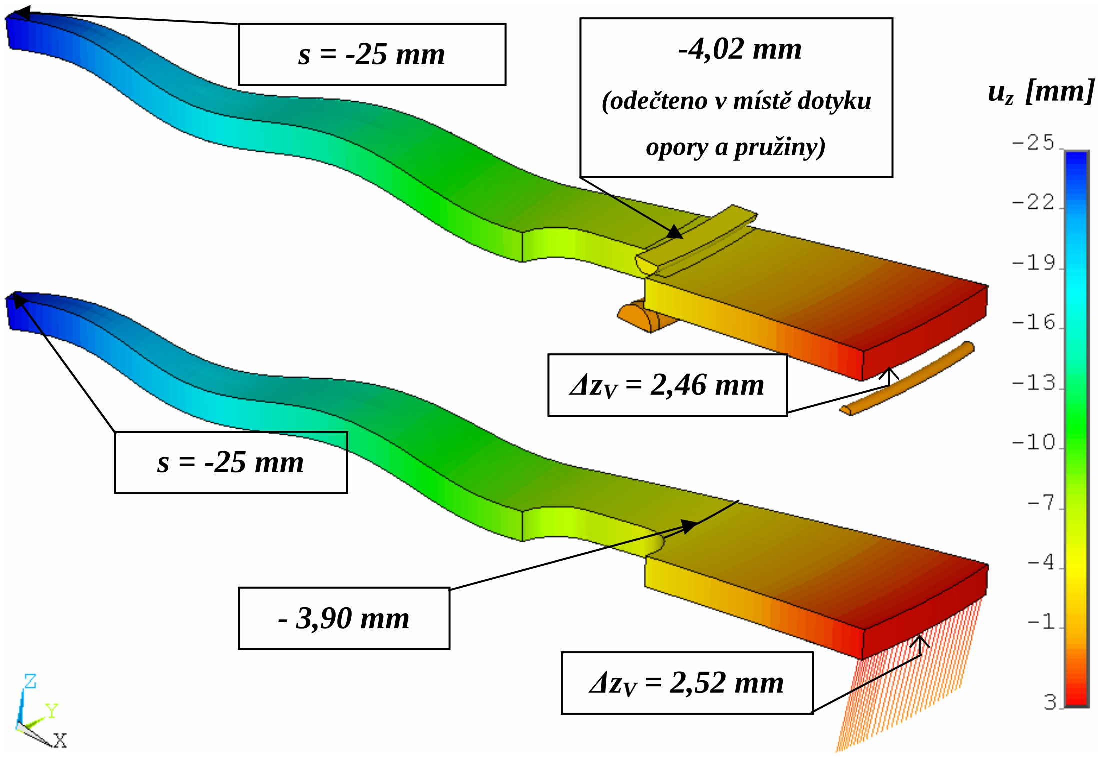
V této kapitole je provedeno srovnání obou modelů z hlediska posuvů a deformací. Pro stručnost jsou uvedeny výsledky pouze ve dvou zatěžovacích stavech.

Na obr. 6.3.6 je v horní části vyobrazen model s kontakty, dole pak zjednodušený model. Vybraný zatěžovací stav odpovídá situaci, kdy síly $R_A$ a $R_B$ nabývají své maximální hodnoty. Dále jsou na obrázku uvedeny hodnoty posuvů v místě dotyku opory. V případě zjednodušeného modelu je v tomto místě předepisován nucený posuv. Při tomto zatížení není ještě vytvořená žádná vůle $\Delta z_V$. Posuvy mají záporné znaménko, což znamená, že jejich směr je opačný ke směru osy ***z***.

Výsledky na následujícím obrázku odpovídají hodnotě stlačení ***s = 25 mm***, což je stav, při kterém je již vytvořena poměrně velká vůle $\Delta z_V$. Oba modely poskytují téměř shodnou velikost vůle.




Obr. 6.3.6: Posuvy v osovém směru – stlačení s = 11 mm

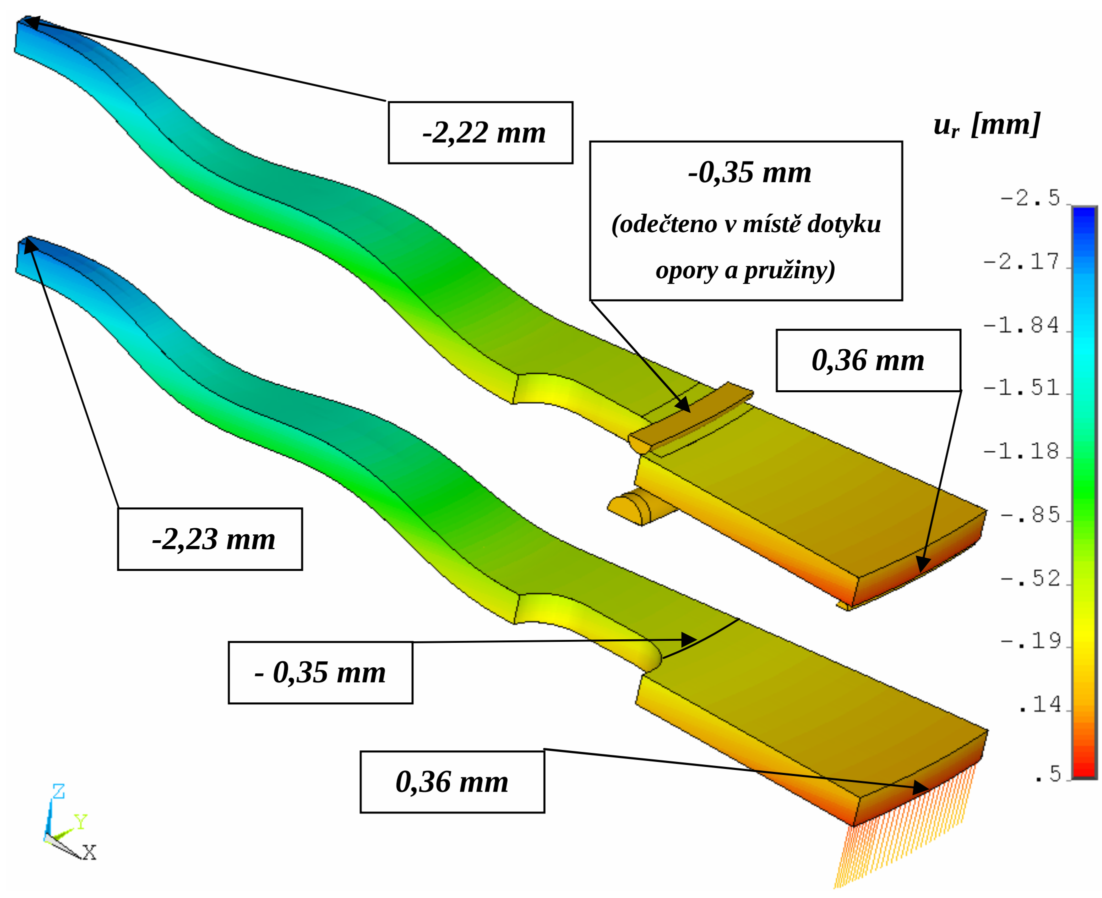



Obr. 6.3.7: Posuvy v osovém směru – stlačení s = 25 mm

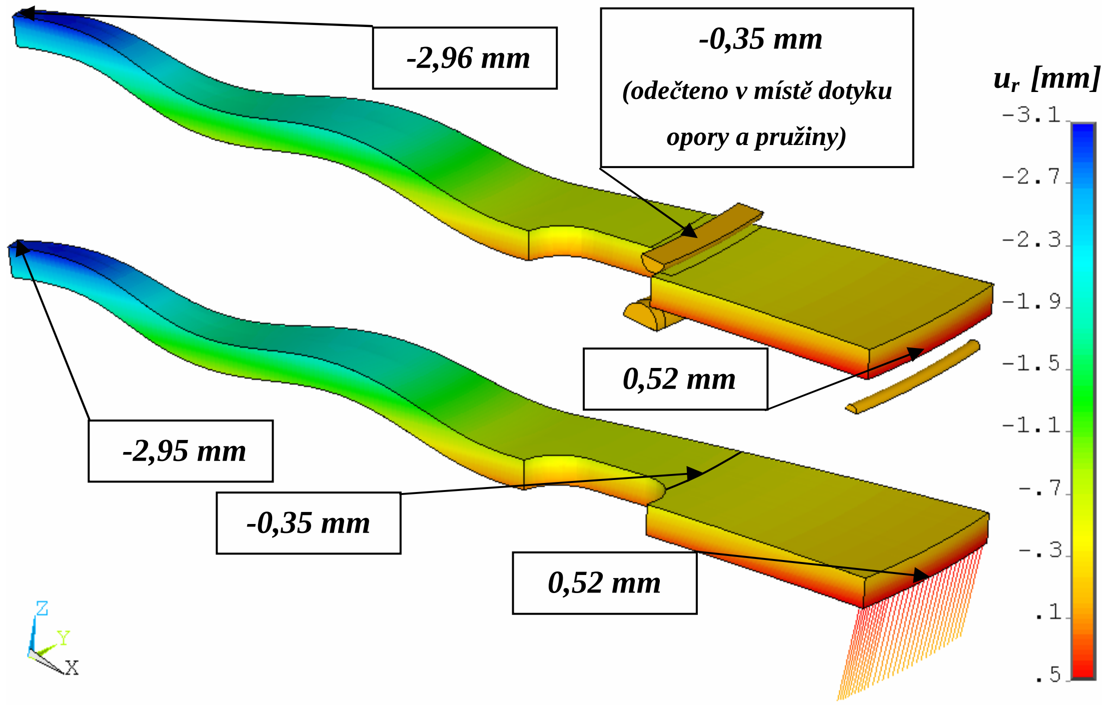
Uvedené barevné mapy a hodnoty ve vybraných místech ukazují ve sledovaném případě též velmi dobrou shodu mezi oběma modely, takže i pro výpočet posuvů je zjednodušený model plně použitelný.

K dalšímu srovnání byly vybrány posuvy v radiálním směru pružiny. Ty je vhodné znát při návrhu spojky, abychom byli schopni správně navrhnout vůli mezi pružinou a okolními díly. Na tomto místě je však nutné připomenout, že talířové pružiny s vypínacími paprsky nepracují v sadách, nehrozí jim tedy ztráta stability a na svých vnějších vnitřních průměrech nebývají výrazně omezeny prostorově. Vyšetřování posuvů v radiálním směru slouží tedy zejména k porovnání obou modelů.

Prezentované výsledky jsou pro stejná zatížení jako v předcházejícím případě, tj. ***s = 11*** a ***25 mm***. Číselné hodnoty radiálních posuvů uvedené na obr. 6.3.8 a obr. 6.3.9 odpovídají vnější hraně pružiny, dále jsou zde ještě uvedeny hodnoty v místě dotyku opory a radiální posuv konce paprsku.




*Obr. 6.3.8: Posuvy v radiálním směru – stlačení s = 11 mm*




*Obr. 6.3.9: Posuvy v radiálním směru – stlačení s = 25 mm*

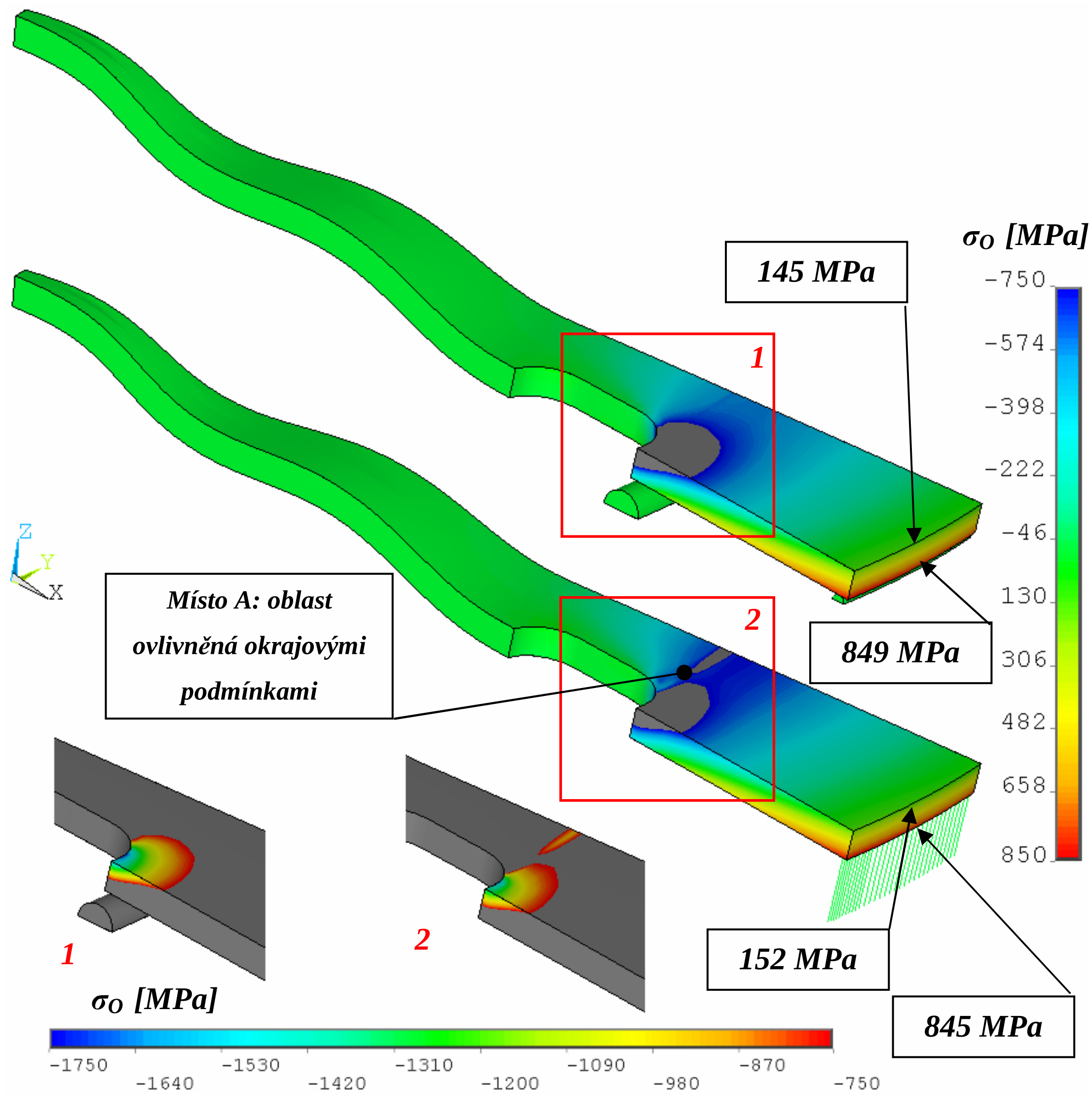
Oba modely dávají v podstatě shodné výsledky, takže i pro určování radiálních posuvů lze použít zjednodušený model.

### 6.3.6 Napjatost talířové pružiny

Metoda konečných prvků nám mimo sil a posuvů poskytuje komplexní představu o napjatosti v pružině. Snadno lze získat informace o velikosti a rozložení obvodového napětí, které má dominantní charakter u pružin s vypínacími paprsky stejně tak jako u běžných talířových pružin.

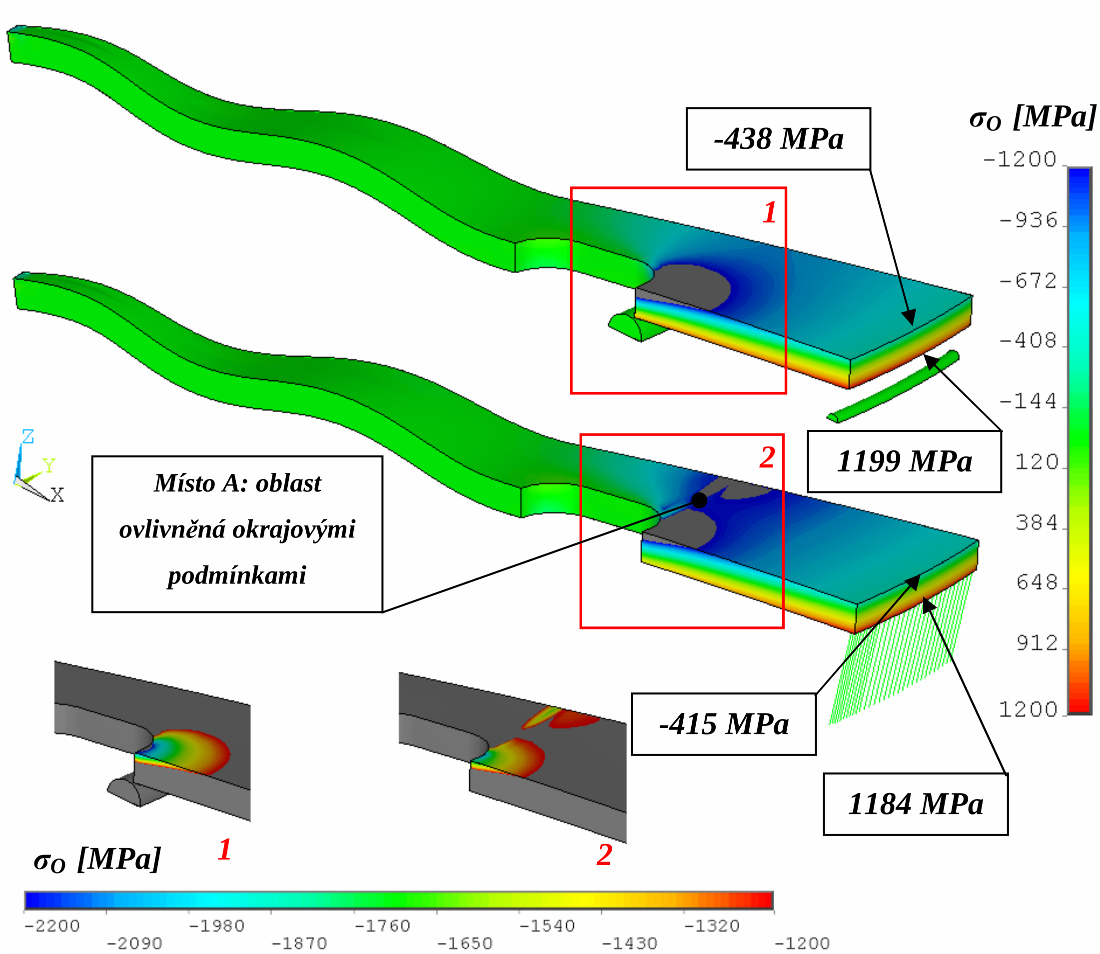
Rozložení obvodového napětí na pružině odpovídající stlačení ***s = 11 mm*** je na obr. 6.3.10. V pružině při deformaci vznikají poměrně vysoká napětí, zvláště pak v místech, která jsou označená červenými rámečky. Prostřih plechového polotovaru z pružinové oceli by působil jako silný koncentrátor napětí. Proto je doplněn prostřihem oválného tvaru, jehož vrubový účinek je přijatelný. Z důvodů lepší přehlednosti není na modelu s kontakty zobrazena horní podpora. Šedá místa na modelu značí místa, ve kterých jsou hodnoty napětí mimo rozsah barevné škály.

U zjednodušeného modelu jsou v místě ***A*** předepsány nucené posuvy, takže tyto okrajové podmínky ovlivňují napjatost v jejich bezprostředním okolí. Toto ovlivnění má však pouze lokální charakter a se vzdáleností rychle ubývá. V tomto smyslu poskytuje model s kontakty přirozeně přesnější výsledky než zjednodušený model.




*Obr. 6.3.10: Obvodové napětí – stlačení s = 11 mm*

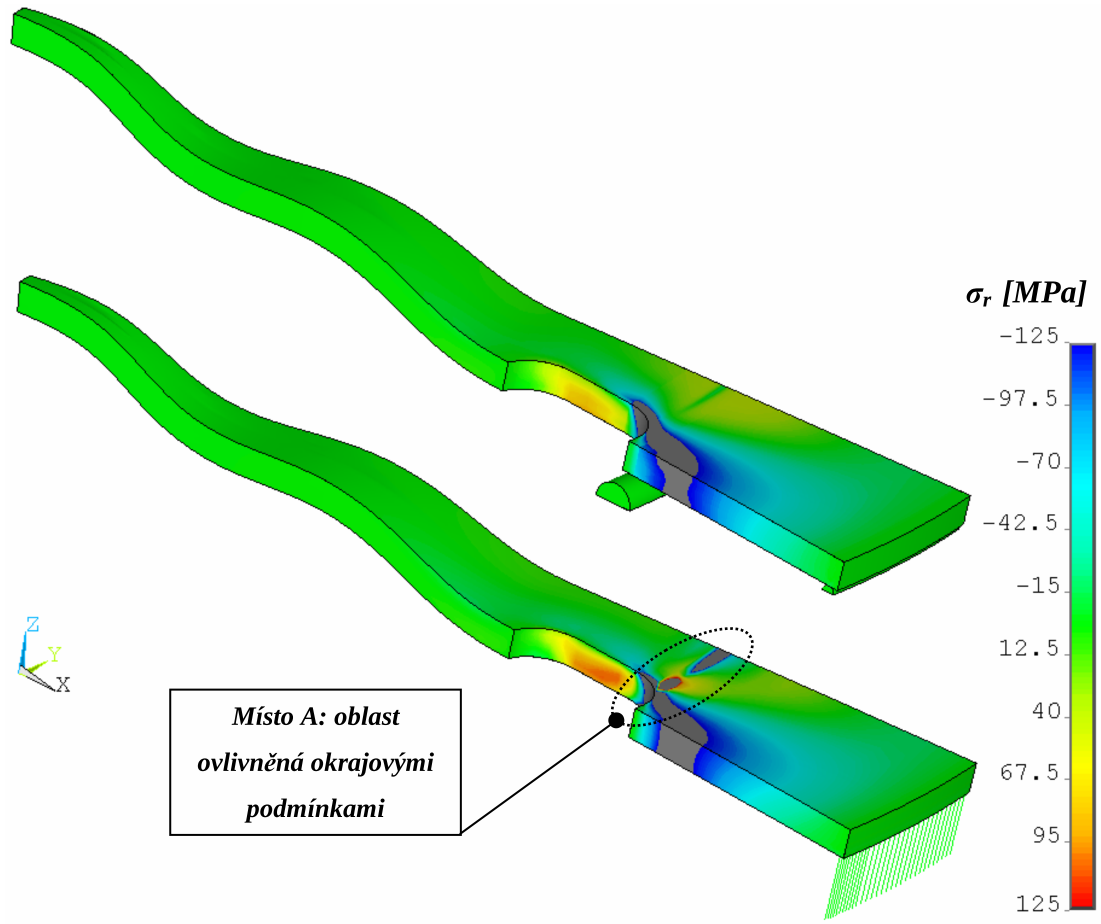
Pro další srovnání obou modelů jsou na obr. 6.3.11 vykreslena opět obvodová napětí, tentokráte odpovídající stlačení ***s = 25 mm***. Zde je mnohem více patrné ovlivnění napjatosti okrajovými podmínkami v místě ***A***. Opět se jedná o ovlivnění lokálního charakteru, i když zasažená oblast je poněkud větší.




*Obr. 6.3.11: Obvodové napětí – stlačení s = 25 mm*

Výpočtem užitím MKP lze snadno určit napětí v dalších směrech, k dalšímu srovnání bylo zvoleno radiální napětí, jež se na celkové napjatosti v pružině podílí menší měrou – jeho velikost je ve srovnání s obvodovým napětím menší.

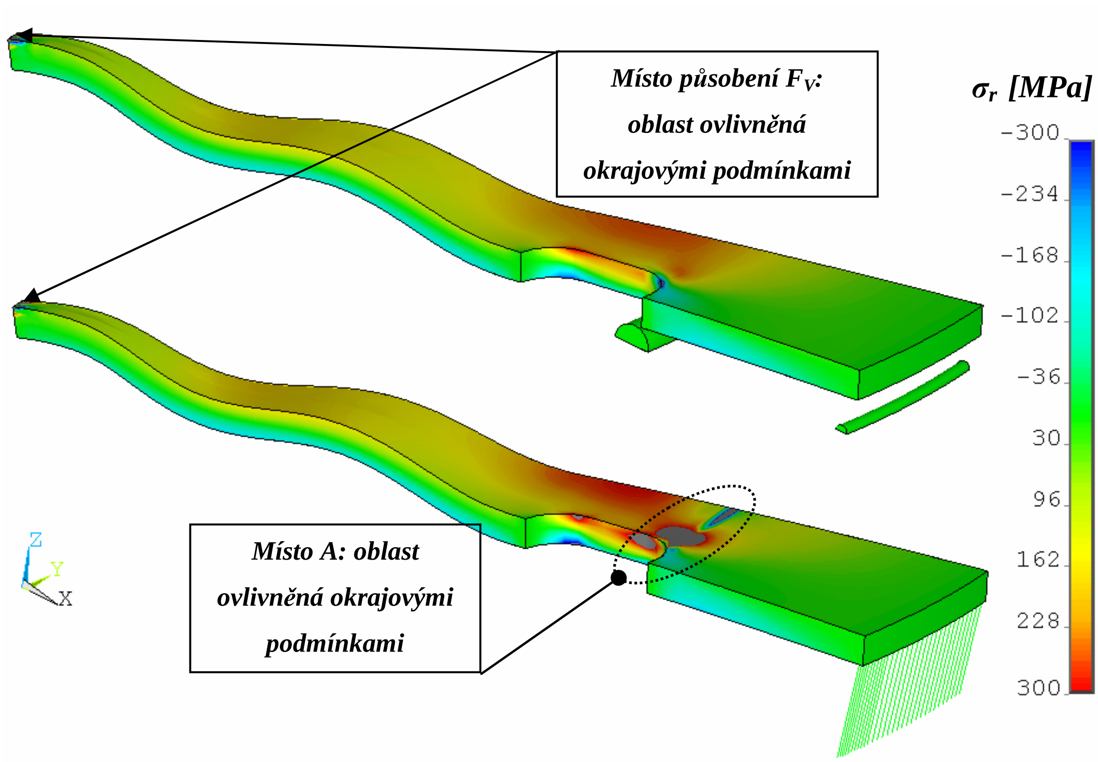
Na obr. 6.3.12 jsou zobrazeny barevné mapy radiálního napětí odpovídající stlačení ***s = 11 mm***. Na zjednodušeném modelu je zřetelně vidět, že radiální napětí v místě ***A*** je ovlivněno okrajovými podmínkami. V oblastech dostatečně vzdálených poskytují oba modely v podstatě rovnocenné výsledky. Na vypínacích paprscích jsou radiální napětí blízká nule, protože v tomto zatěžovacím kroku ještě nepůsobí vypínací síla $\boldsymbol{F_V}$.




*Obr. 6.3.12: Radiální napětí – stlačení s = 11 mm*

Pro úplnost je na obr. 6.3.13 vykresleno radiální napětí pro zatěžující stav odpovídající stlačení ***s = 25 mm***. Také v tomto případě je patrné ovlivnění napjatosti pružiny od okrajových podmínek na zjednodušeném modelu.

Na koncích paprsků je již přiložena vypínací síla $\boldsymbol{F_V}$ (nucený posuv), proto není radiální napětí nulové. Na horní straně pružiny nabývá kladných hodnot, na straně dolní záporných. Na obou modelech je také vidět, jak nucený posuv, který nahrazuje vypínací sílu, ovlivňuje radiální napětí. Jedná se však o lokální vliv, který se již v určité vzdálenosti od zmíněného místa neprojevuje.



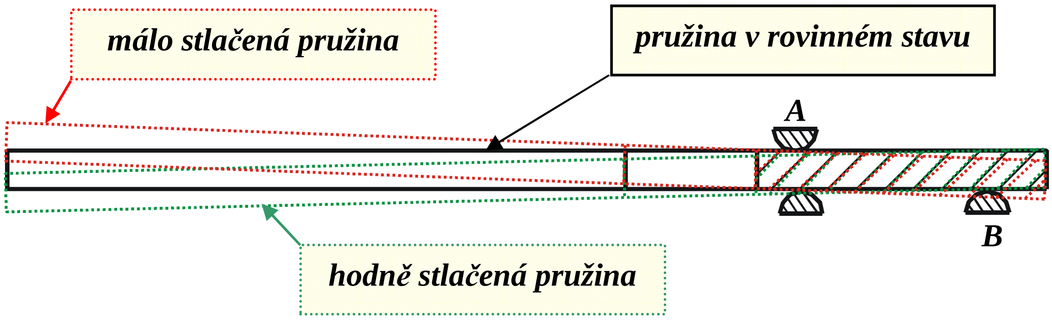

*Obr. 6.3.13: Radiální napětí – stlačení s = 25 mm*

# 6.4 Činitelé ovlivňující zatěžovací charakteristiku

U skutečné talířové pružiny i celé spojky vystupují do popředí činitelé, které mají větší či menší vliv na tvar a průběh zatěžovací charakteristiky. Následující odstavce jsou zaměřeny především na vliv výrobních a montážních nepřesností, dále pak na vliv opotřebení obložení lamely spojky.

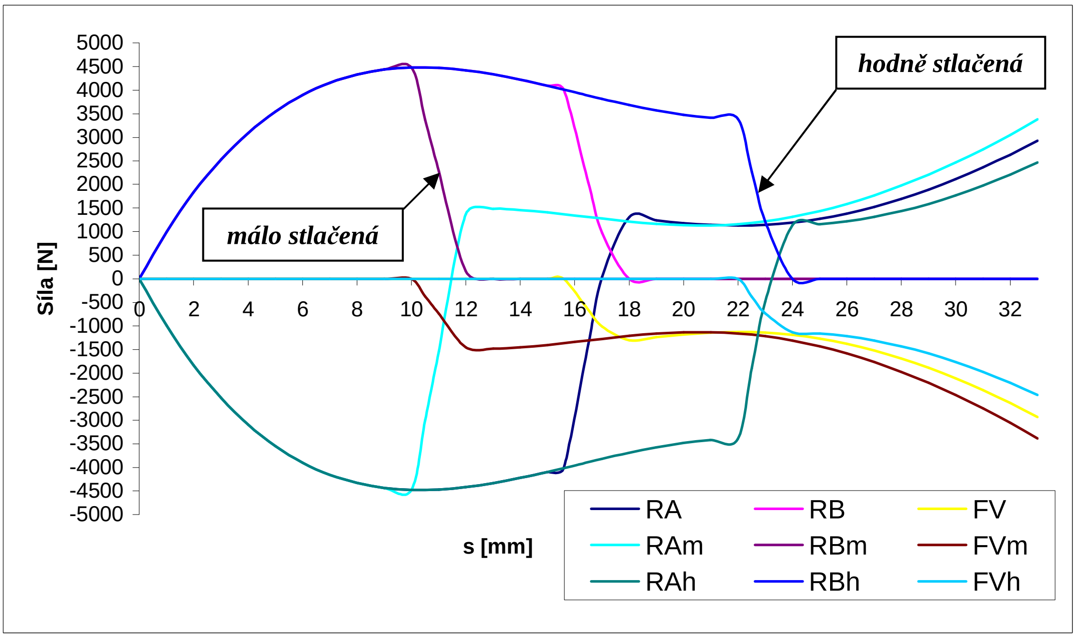
## 6.4.1 Vliv výrobních a montážních nepřesností na zatěžovací charakteristiku

Při výpočtu užitím MKP byla pružina postupně zatěžována v místě ***A*** do stavu, který byl velmi blízký rovinnému, a až poté začíná působit vypínací síla. Ve skutečné spojce vyrobené a smontované s určitou nepřesností nemusí být pružina v dokonale rovinném stavu. Může nastat taková situace, že pružina je málo stlačená (na obr. 6.4.1 označeno červenou přerušovanou čarou) nebo je naopak pružina stlačena přes svůj rovinný stav (je již částečně prolomena), např. vlivem montážní nepřesnosti (na schématu označeno zelenou přerušovanou čarou).




*Obr. 6.4.1: Nepřesnosti při stlačování pružiny*

V grafu na obr. 6.4.2 jsou vykresleny zatěžovací charakteristiky pro tři výše uvedené situace. Indexem „***m***“ se u jednotlivých sil označuje případ, kdy pružina byla stlačená málo a nedosáhla rovinného tvaru. Vypínací síla $F_{Vm}$ začala působit dříve. Z jejího průběhu (hnědá křivka) je vidět, že absolutní hodnota je vyšší než v ostatních případech, je tedy nutné na pedál spojky vyvinout větší sílu. Síla $R_{Am}$ a $R_{Bm}$ jsou také větší, což není na závadu, protože vyvodí větší přítlak na spojkovou lamelu. Síly označené indexem „***h***“ naopak odpovídají stavu, kdy je pružina stlačena přes svůj rovinný stav, je tedy mírně prolomená. Velikost vypínací síly $F_{Vh}$ je menší. Zároveň se sníží přítlačná síla působící na spojkovou lamelu.




*Obr. 6.4.2: Změněné průběhy zatěžovacích charakteristik*

Rozptyl mezi ideálně rovnou pružinou a nepřesně stlačenými stavy byl zvolen záměrně větší než je ve skutečnosti. Důvodem je lepší přehlednost vynášených průběhů a daleko jasnější jsou i jednotlivé tendence změn v zatěžovacích charakteristikách.

K výpočtu průběhů zatěžovacích charakteristik byl použit zjednodušený model bez kontaktů, se kterým se dá cíle dosáhnout rychleji.

### 6.4.2 Vliv opotřebení obložení lamely spojky na zatěžovací charakteristiku

V předchozí kapitole jsme uvažovali, že nepřesnost při stlačení byla způsobena výrobou a montáží. Podobné změny v průběhu zatěžovací charakteristiky mohou nastat i při provozu. Talířová pružina je v sestavě spojky v dokonale rovinném stavu. Během provozu spojky však dochází k postupnému opotřebování spojkové lamely. To se projevuje úbytkem obložení na lamele. Opora v místě $\boldsymbol{B}$ se posouvá směrem dolů od opory $\boldsymbol{A}$, takže deformace pružiny ubývá. Zatěžovací charakteristika se pak svým průběhem blíží charakteristice označené v grafu na obr. 6.4.2 indexem „$\boldsymbol{m}$“.

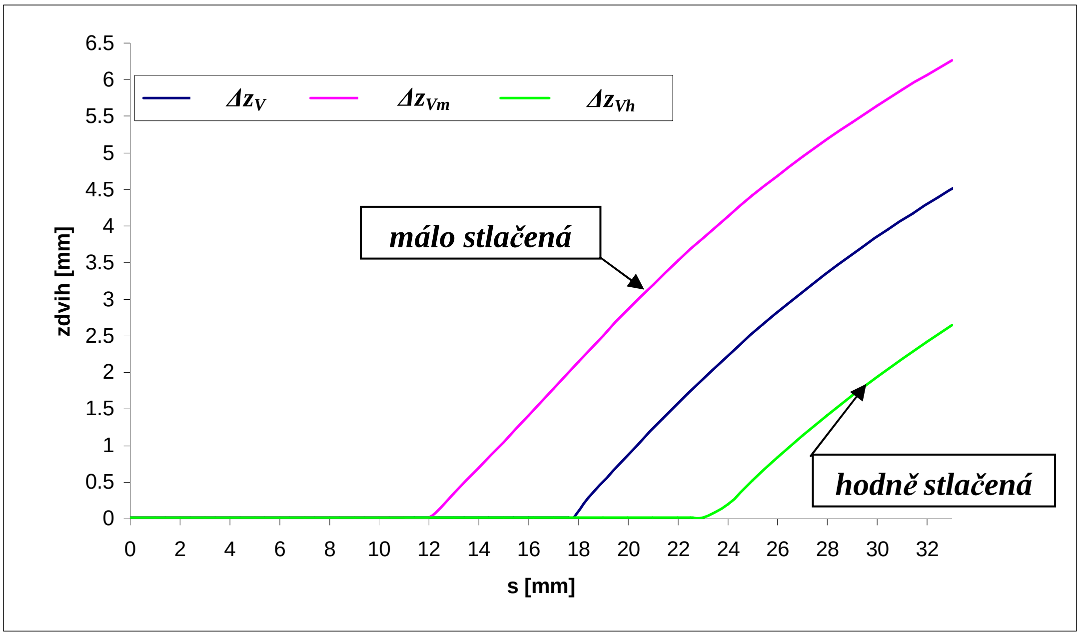
Schopnost spojky přenášet kroutící moment vzrůstá, avšak dochází ke zvyšování potřebné vypínací síly $\boldsymbol{F_V}$, tedy síly na pedál spojky (zvětšují se síly $\boldsymbol{R_A}$ i $\boldsymbol{R_B}$).

Podobně jako v předcházejícím případě byl použit při výpočtu zjednodušený model bez kontaktních prvků.

### 6.4.3 Ovlivnění vypínací vůle vlivem výrobních nepřesností

V grafu na obr. 6.4.3 je provedeno srovnání průběhů vypínací vůle $\boldsymbol{\Delta z_V}$ pro výše uvedené případy. Křivky vykazují téměř stejný sklon, liší se pouze posunem od počátku. Při stejném stlačení dostaneme různě velké hodnoty vypínací vůle $\boldsymbol{\Delta z_V}$.

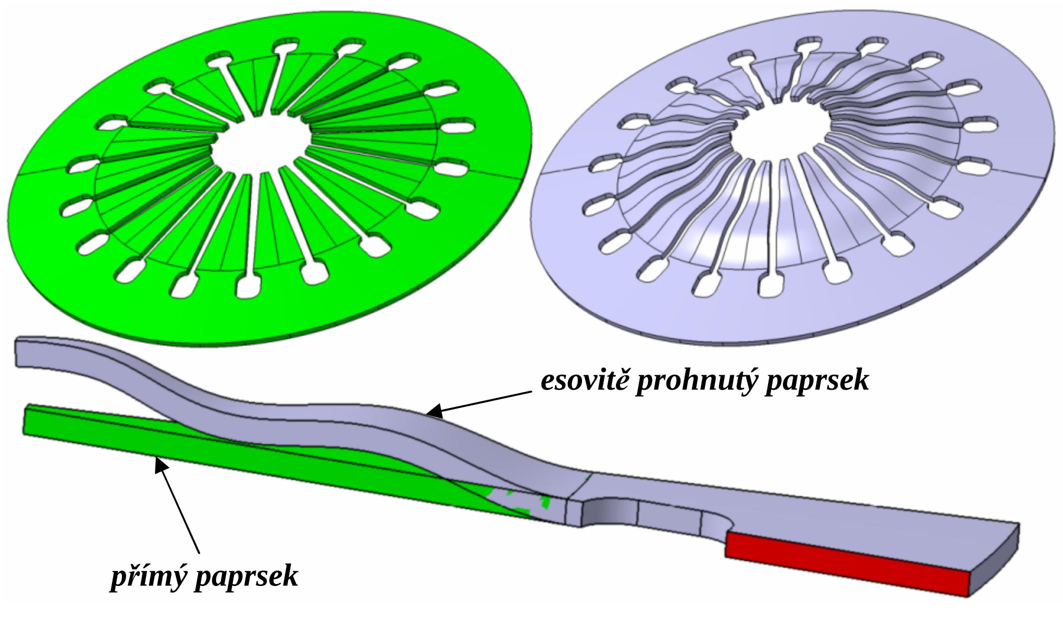
Stejně jako v předchozích případech bylo pro vyšetření průběhu vypínací vůle použito zjednodušeného modelu bez kontaktů.




*Obr. 6.4.3: Vliv stlačení na vypínací vůli $\Delta z_V$*

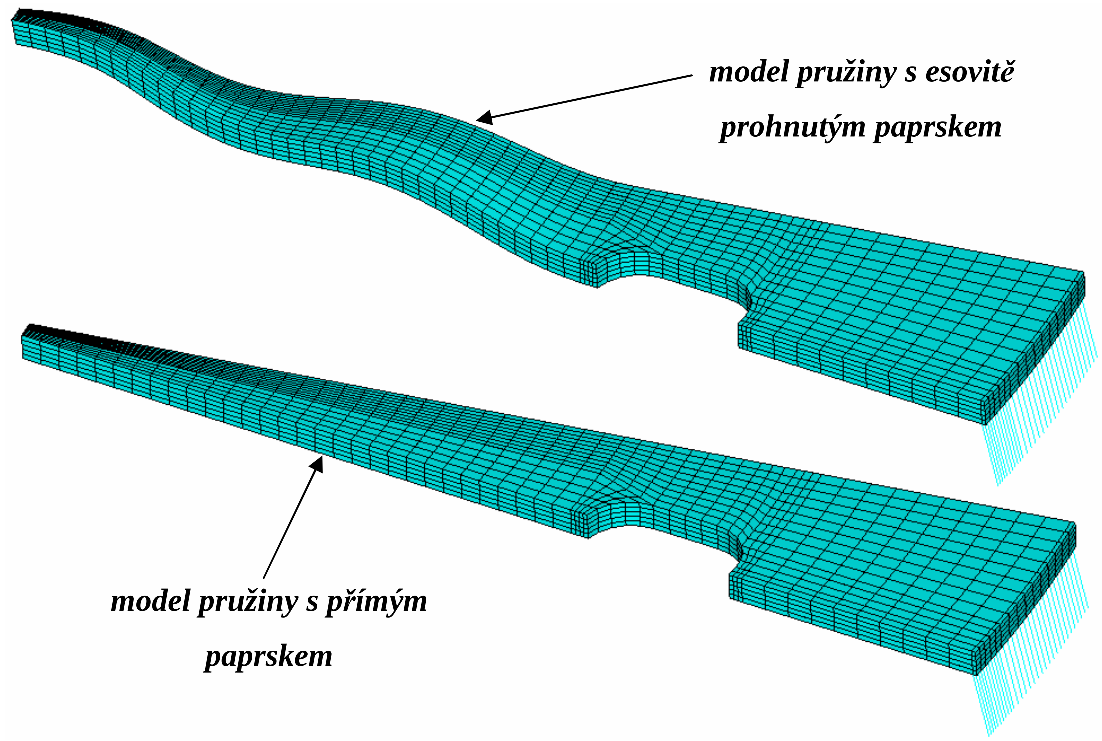
## 6.4.4 Vliv tvaru vypínacího paprsku na zatěžovací charakteristiku a napjatost

Vypínací paprsky, kterými je talířová pružina opatřena, mohou mít nejrůznější tvary. Ty jsou určeny především zástavbou okolních dílů. Pružina použitá ve spojce SACHS (obr. 6.4.4 vpravo nahoře) má paprsek esovitě prohnutý. Starší typy spojek používané v osobních automobilech ŠKODA měly paprsky přímé, jak je vidět z obr. 6.4.4 vlevo.




*Obr. 6.4.4: Dvě varianty tvarů vypínacích paprsků*

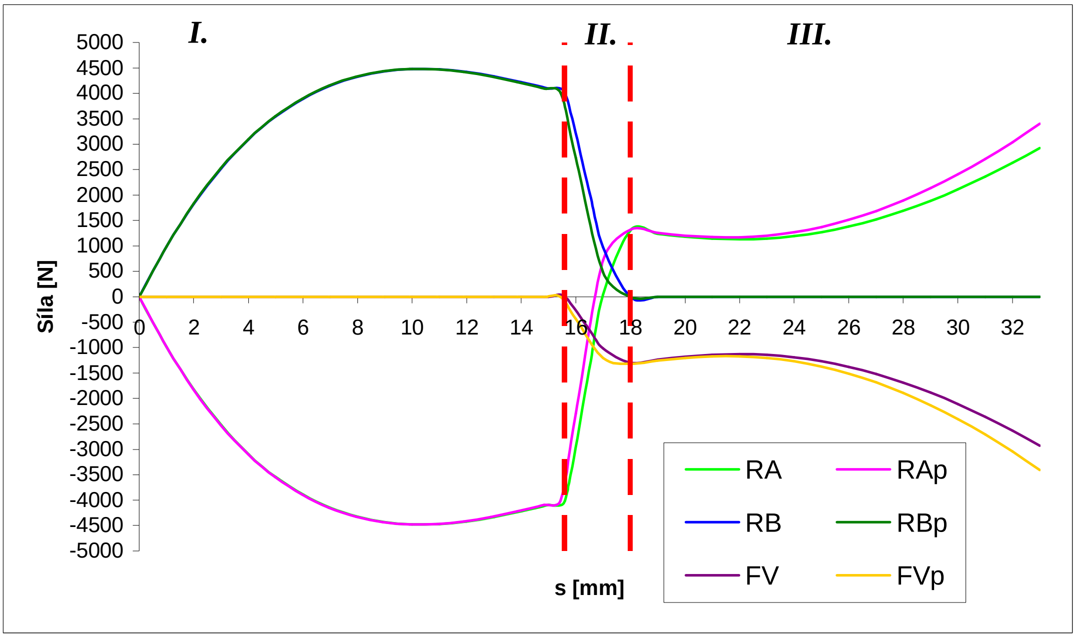
Pro vyšetření užitím MKP byl sestaven zjednodušený model, tedy bez použití kontaktních prvků. Okrajové podmínky a zatížení byly předepsány způsobem odpovídajícím zjednodušenému modelu. Oba modely jsou na obr. 6.4.5.




*Obr. 6.4.5: Modely variant vyšetřovaných paprsků*

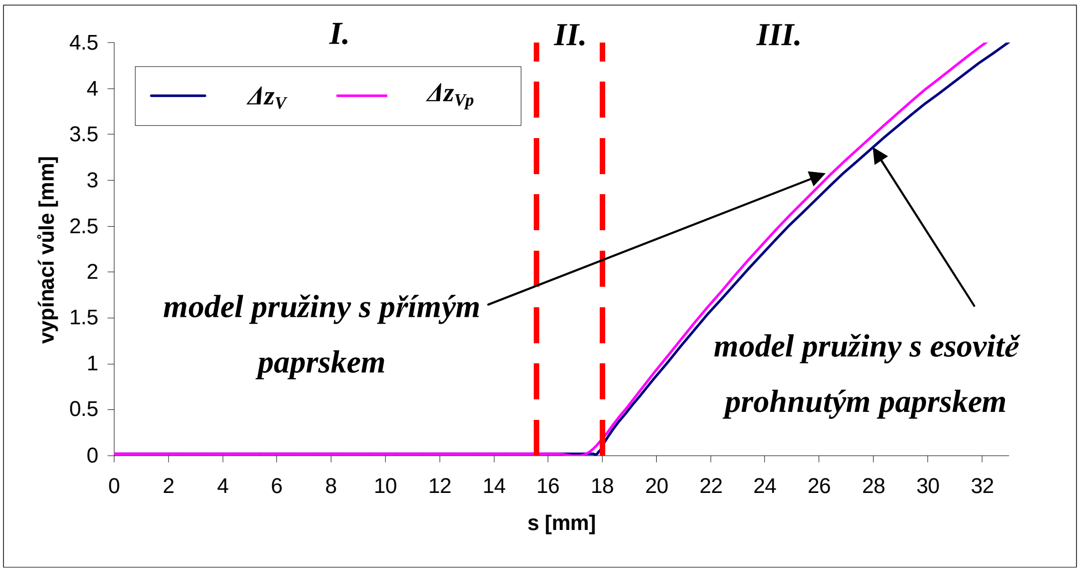
V grafu na obr. 6.4.6 jsou vyneseny zatěžovací charakteristiky pro oba tvary vypínacích paprsků. Síly odpovídající modelu s přímým paprskem jsou označeny v grafu indexem „ ***p*** “, tj. $\boldsymbol{R_{Ap}}$, $\boldsymbol{R_{Bp}}$ a $\boldsymbol{F_{Vp}}$.

V první fázi zatěžování, do doby než začne působit vypínací síla, jsou podle očekávání průběhy sil pro oba řešené případy téměř shodné. Ve fázi ***II.*** se již průběhy sil neshodují, v tomto úseku začíná působit vypínací síla. V posledním fázi označené ***III.*** však panuje poněkud odlišná situace. Zpočátku jsou průběhy velmi podobné, avšak se vzrůstajícím stlačením se křivky rozcházejí. Přímý paprsek je tužší než esovitě prohnutý. Dalším účelem prohnutého paprsku je tedy zřejmě snížit vypínací sílu.




*Obr. 6.4.6: Porovnání zatěžovacích charakteristik pro různé tvary vypínacích paprsků*

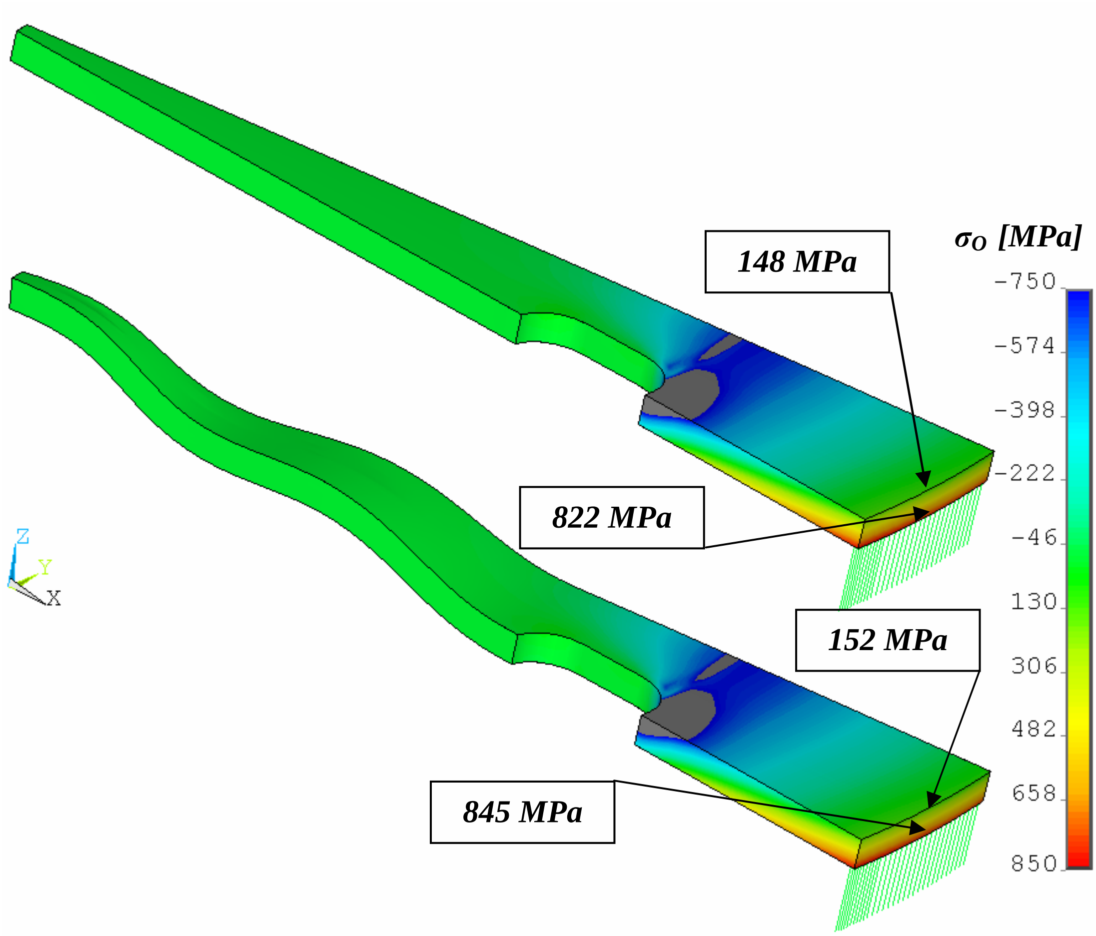
V grafu na obr. 6.4.7 je provedeno srovnání průběhu vypínací vůle v závislosti na stlačení pružiny. Obdobně jako v předchozím odstavci je průběh odpovídající přímému paprsku označen indexem „ ***p*** “.




*Obr. 6.4.7: Porovnání průběhů vypínací vůle*

V první fázi jsou oba průběhy totožné, protože vypínací vůle je rovna nule. V další fázi ( ***II.***) se zpočátku oba průběhy shodují avšak u pružiny s přímým vypínacím paprskem dochází k vytvoření vypínací vůle dříve. V poslední části zatížení označené ***III.*** se vypínací vůle v obou případech zvětšuje téměř lineárně. Oba dva průběhy mají přibližně shodnou směrnici, jsou však různě posunuty od počátku.

Další porovnávanou veličinou je obvodové napětí vzniklé v pružině. Na obr. 6.4.8 jsou vykresleny barevné mapy s rozložením obvodového napětí odpovídajícím stlačení ***s* = *11 mm***. Tato hodnota stlačení odpovídá stavu, kdy ještě nepůsobí vypínací síla na paprsku.



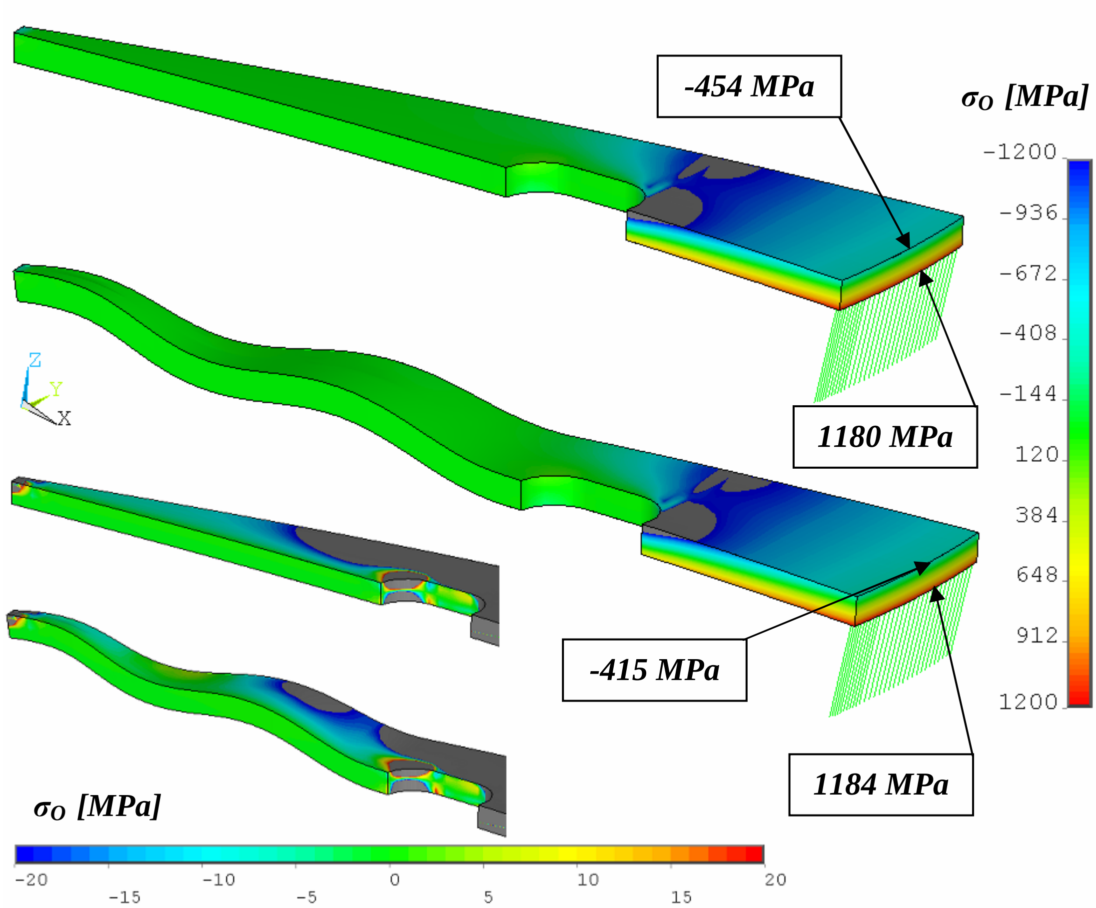

*Obr. 6.4.8: Obvodové napětí – stlačení s = 11 mm*

V následující tabulce je provedeno srovnání číselných hodnot ve vybraných místech (vnější průměr - horní a dolní strana pružiny). Z hodnot uvedených v tabulce a určených rozdílů je vidět, že tvar paprsku neovlivňuje napjatost v prstenci pružiny. Rozdíl nepatrně přesahuje ***2,5%***. Při výpočtu rozdílu byla za základ vzata hodnota obvodového napětí získaná při výpočtu pružiny s esovitě prohnutým paprskem.

*Tab. 6.4.1: Porovnání hodnot obvodového napětí ve vybraných místech – s = 11 mm*

| | **Stlačení s = 11 mm** | | | |
|---|---|---|---|---|
| | **obvodové napětí [MPa]** | **rozdíl [%]** | **obvodové napětí [MPa]** | **rozdíl [%]** |
| **přímý paprsek** | 148 | 2,6 | 822 | 2,7 |
| **esovitě prohnutý** | 152 | | 845 | |

K posouzení napjatosti jsou ještě na následujícím obrázku vykresleny hodnoty obvodového napětí odpovídající stlačení ***s* = 25 mm**. Při tomto zatížení již působí vypínací síla na paprsek. Na vlastním prstenci pružiny je v obou případech rozložení napětí v podstatě shodné. Lze tedy říci, že tvar paprsku zásadním způsobem neovlivňuje napjatost v prstenci pružiny. To potvrzuje i srovnání hodnot obvodového napětí ve vybraných místech, které je provedeno v tab. 6.4.2.




*Obr. 6.4.9: Obvodové napětí – stlačení s = 25 mm*

Napětí bylo v obou případech odečteno na vnějším průměru pružiny; jedna hodnota na horní straně a druhá na straně spodní. Při stanovení rozdílu byla za základ vzata hodnota napětí vypočtená pomocí modelu s esovitě prohnutým paprskem. V prvním případě je rozdíl mezi hodnotami napětí poněkud vyšší, přibližně ***9,5%***. Na dolní straně jsou hodnoty napětí shodné, rozdíl činí pouze ***0,4%***.

*Tab. 6.4.2: Porovnání hodnot obvodového napětí ve vybraných místech – s = 25 mm*

| | ***Stlačení s = 25 mm*** | | | |
|---|---|---|---|---|
| | ***obvodové napětí [MPa]*** | ***rozdíl [%]*** | ***obvodové napětí [MPa]*** | ***rozdíl [%]*** |
| ***přímý paprsek*** | -454 | 9,4 | 1180 | 0,4 |
| ***esovitě prohnutý*** | -415 | | 1184 | |

V dolní části obr. 6.4.9 jsou vyobrazeny detailní pohledy na paprsky. Přestože na paprsky působí vypínací síla, vniklé napětí není nikterak velké ( ±20 MPa ). Napjatost se zvětšuje až v místě napojení paprsku k prstenci talířové pružiny. Napětí je také větší na konci paprsku v místech působení vypínací síly. V tomto místě jsou předepsány okrajové podmínky, které ovlivní lokálně napjatost v paprsku.

Na základě výše uvedených výsledků výpočtů lze konstatovat, že přímý tvar paprsku zásadně neovlivňuje zatěžovací charakteristiku ani průběh vypínací vůle. Nicméně zavedení prohnutých paprsků vede k mírnému snížení vypínací síly, což je užitečné. Vliv na napjatost není nikterak velký.

# 7 DODATEK

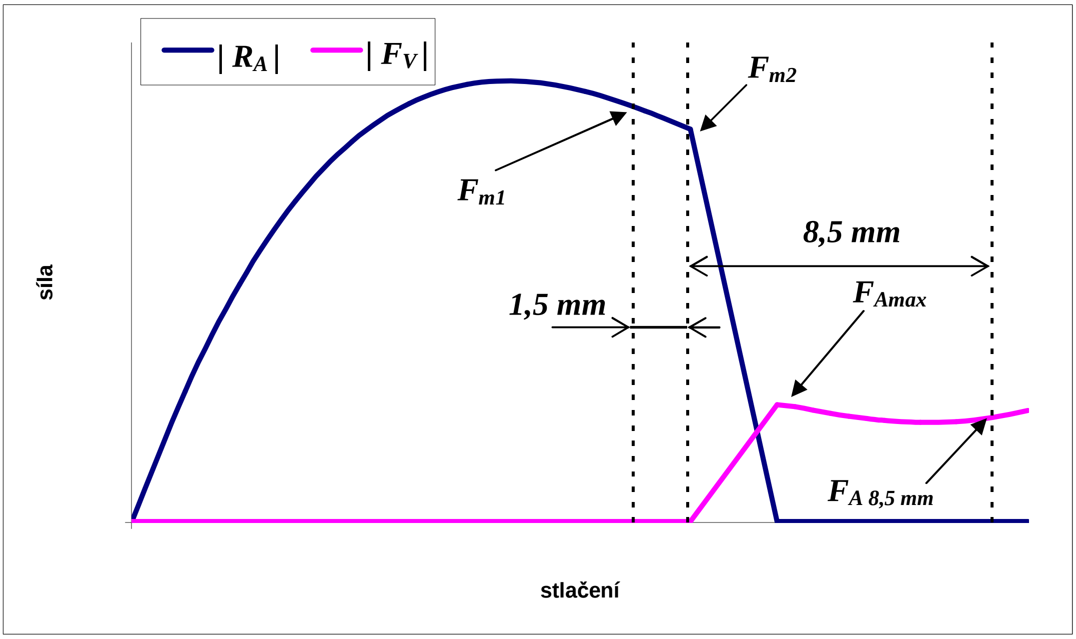
Pro vyšetřovanou talířovou pružinu s vypínacími paprsky se podařilo u výrobce spojek zjistit několik hodnot sil pro různá stlačení. Jsou uvedeny v následující tabulce a porovnány s vypočtenými hodnotami (jejich označení bylo převzato od výrobce spojky). Místa odečtu jednotlivých sil jsou vyznačena v grafu na obr. 7.1.1 V grafu jsou vyneseny absolutní hodnoty $\boldsymbol{R_A}$ a $\boldsymbol{F_V}$.

*Tab. 7.1.1: Porovnání hodnot udaných výrobcem a získaných výpočtem pomocí MKP*

| | **údaj výrobce** | **MKP** | **rozdíl** |
|---|---|---|---|
| $\boldsymbol{F_{m1}}$ | ≥ 4500 [N] | 4330 [N] | 3,8 [%] |
| $\boldsymbol{F_{m2}}$ | 4500 ÷ 5100 [N] | 4100 [N] | 8,9 [%] |
| $\boldsymbol{F_{A\,max}}$ | ≤ 1450 [N] | 1191 [N] | - |
| $\boldsymbol{F_{A\,min}}$ | 950 ÷ 1350 [N] | 1250 [N] | - |
| $\boldsymbol{F_{A\,8,5\,mm}}$ | 950 ÷ 1350 [N] | 1143 [N] | - |

Síly požadované výrobcem nejsou dány jedinou hodnotou, ale buď svojí horní nebo dolní mezí, popřípadě intervalem, ve kterém se vyskytují.

Při výpočtu rozdílu, např. pro sílu $\boldsymbol{F_{m1}}$**,** byla za základ vzata hodnota síly od výrobce. V tomto případě činí rozdíl necelá ***4%***, což je velmi dobrá shoda. Výpočet rozdílu pro sílu $\boldsymbol{F_{m2}}$ byl proveden obdobně. Rozdíl je sice o něco větší než předcházející, avšak nepřesahuje ***9%***. Pro síly $\boldsymbol{F_{A\,max}}$, $\boldsymbol{F_{A\,min}}$ a $\boldsymbol{F_{A\,8,5\,mm}}$ nebyly rozdíly spočteny, protože vypočtené hodnoty sil leží uvnitř požadovaného intervalu.




*Obr. 7.1.1: Schéma označení míst pro odečet sil*

Rozdíly mezi hodnotami od výrobce a získaných pomocí MKP jsou přijatelně velké. Tento mírný nesoulad byl patrně způsoben nepřesným modelováním tvaru pružin (povrch byl snímán souřadnicovým měřícím zařízením), protože se nepodařilo získat model pružiny přímo od dodavatele.

# 8 ZÁVĚR

Klasické výpočtové postupy jsou v dnešní době stále více nahrazovány modernějšími metodami, např. metodou konečných prvků. Avšak i tyto moderní metody mají svá omezení a zvláštnosti, takže je nutné takto získané výsledky podrobit kritickému rozboru zejména s ohledem na okrajové podmínky. Porovnání s experimentálním měřením bývá zpravidla též užitečné.

V první části disertační práce byla podrobně uvedena analytická metoda výpočtu běžné talířové pružiny. Takto lze získat mnoho užitečných informací o jejích vlastnostech, jako je např. zatěžovací charakteristika nebo velikosti obvodových napětí ve vybraných místech. K porovnání byly vytvořeny výpočtové modely pro MKP, pomocí nichž mohly být určeny též požadované další výsledky. V další části práce je provedeno podrobné porovnání obou přístupů, které ukázaly na přijatelnou shodu.

Výpočtové modely pro MKP byly následně porovnány s experimentálním měřením provedeným na dvou zvolených typech pružin. V případě měření zatěžovací charakteristiky bylo dosaženo dobré shody mezi vypočtenými a naměřenými hodnotami. V případě měření napjatosti na povrchu pružin již nebyla shoda tak dobrá.

Poznatky získané v první části práce mohou sloužit jako podklad pro další výzkum talířových pružin, např. určování jejich životnosti při dynamickém zatížení. I v této oblasti se dá s úspěchem použít metoda konečných prvků, ovšem doplněná velmi rozsáhlým experimentálním měřením, které by ověřilo správnost výpočtových modelů.

Druhá část disertační práce je věnovaná výzkumu talířových pružin s vypínacími paprsky. Podrobně popisuje postup řešení pomocí MKP, protože neexistuje analytická metoda, která by poskytovala komplexní pohled na zatěžovací charakteristiku nebo dokázala určit rozložení napjatosti v pružině.

K určení potřebných závislostí byly vytvořeny dva různé výpočtové modely. První model podrobnější s využitím kontaktních prvků, druhý zjednodušený bez uvažování kontaktů. Při srovnání vyšlo najevo, že oba modely jsou v podstatě rovnocenné, protože poskytují velmi podobné výsledky. Zjednodušený model je vzhledem k daleko menším nárokům na výpočetní čas vhodnější pro úlohy spojené s návrhem a optimalizací talířových pružin s vypínacími paprsky. Při řešení takovéhoto typu úloh je nutné vytvořit a spočítat velké množství konstrukčních variant.

Měření charakteristik a napětí na povrchu talířových pružin s vypínacími paprsky se přes veškerou snahu nepodařilo uskutečnit. Předběžné konstrukční návrhy totiž ukázaly, že stavba zátěžného zařízení použitelného pro několik druhů (dokonce i pro jeden druh) těchto pružin v současné době přesahuje ekonomické možnosti školicího pracoviště. Příčina spočívá též ve skutečnosti, že v naší republice není výrobce těchto pružin a vyrobené jednoúčelové zátěžné zařízení by stěží mohlo být využito jinak.

# 9 LITERATURA


[1] Almen, J.O., László, A.: The Uniform-Section Disk Spring. Trans., ASME 58, 1936

[2] ANSYS, Inc.: Online manuals ANSYS 8.1, ANSYS, Inc., 2003

[3] Babák, J.: Výpočet talířových pružin, Auto Škoda, Mladá Boleslav, 1978

[4] Batanov, M., Petrov, N.: Ocelové pružiny, SNTL, Praha, 1953

[5] Bittnar, Z., Šejnoha, J.: Numerické metody mechaniky 1, ČVUT, Praha, 1992

[6] Bittnar, Z., Šejnoha, J.: Numerické metody mechaniky 2, ČVUT, Praha, 1992

[7] Curti, G., Orlando, M., Podda, G.: Vereinfachtes Verfahren zur Berechnung von Tellerfedern, Draht, 1980

[8] ČSN 02 6060: Talířové pružiny. Základní pojmy a výpočet, Český normalizační institut, 1978

[9] ČSN 02 6061 Talířové pružiny. Technické dodací předpisy, Český normalizační institut, 1978

[10] ČSN 02 6063: Talířové pružiny. Rozměry, Český normalizační institut, 1991

[11] DIN 2092: Tellerfedern – Berechnung, Deutsches Institut für Normung, 1992

[12] DIN 2093: Tellerfedern – Qualitätsanforderungen – Masse, Deutsches Institut für Normung, 2005

[13] Honců, J.: Výzkum talířových pružin s vypínacími paprsky – Část 1. Síly a deformace, XXXV. konference kateder částí a mechanismů strojů, Praha, 1994

[14] Honců, J.: Výzkum talířových pružin s vypínacími paprsky – Část 2. Napětí, XXXVI. konference kateder částí a mechanismů strojů, Brno, 1995

[15] Hugo Bauer Nachf.: Spring systems, Welschingen, 2004

[16] Kanócz, A., Španiel, M.: Metoda konečných prvků v mechanice poddajných těles, ČVUT, Praha 1998

[17] Leinveber, J., Řasa, J., Vávra, P.: Strojnické tabulky, Scientia, Praha, 1999

[18] LuK colloquium: 7th LuK Symposium, LuK GmbH & Co., 2002

[19] Moaveni, S.: Finite Element Analysis, Theory and Application with Ansys, Prentice Hall, New Jersey, 1999

[20] Mubea, GmbH: Das Tellerfedern Handbuch, Attendorn, 1967

[21] Mubea, GmbH: Mubea disc spring manual, Attendorn, 2002

[22] Mubea, GmbH: URL: http://www.mubea.com/tellerfedern/, 2005

[23] Okrouhlík, M.: Mechanika poddajných těles, numerická matematika a superpočítače, Ústav termomechaniky, Praha, 1997

[24] Petruška, J.: Počítačové metody v mechanice II, http://www.umt.fme.vutbr.cz/SKRIPTA/petruska/POCMEME.html Vysoké učení technické v Brně, Brno, 2003

[25] Rektorys, K.: Variační metody v inženýrských problémech a problémech matematické fyziky, Academia, Praha, 1999

[26] Svoboda, T.: Srovnávací rozbor dvou výpočtů talířových pružin, XLIV. konference kateder částí a mechanismů strojů, Praha, 2003

[27] Svoboda, T.: Určení tuhostní charakteristiky talířové pružiny s vypínacími paprsky pomocí MKP, XLV. konference kateder částí a mechanismů strojů, Blansko, 2004

[28] Svoboda, T.: Experimentální měření talířové pružiny, XLVI. konference kateder částí a mechanismů strojů, Sedmihorky, 2005

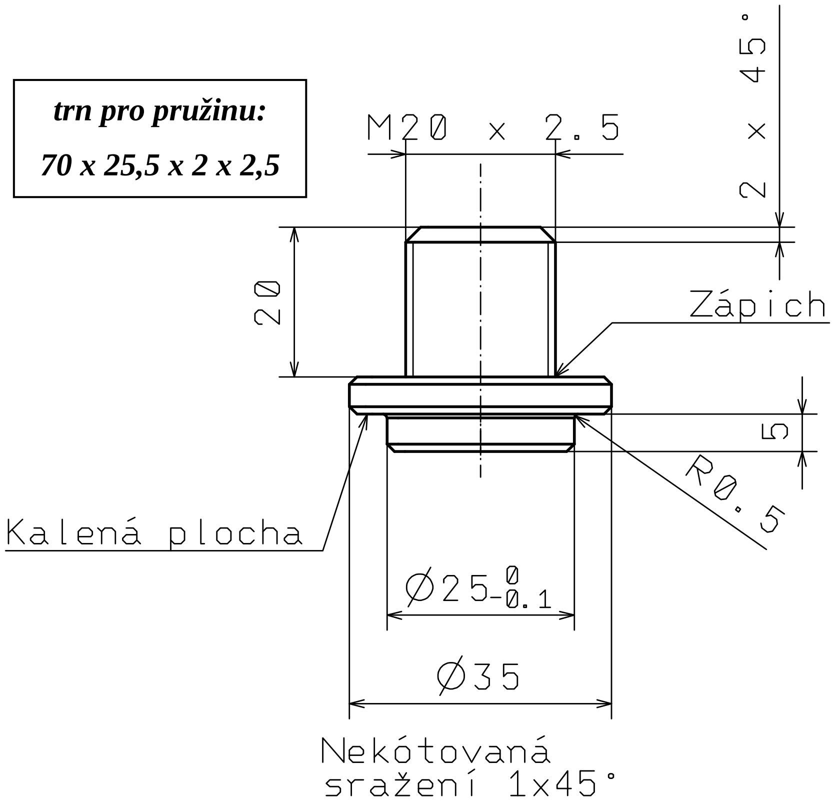
[29] Vlk, F.: Automobilová technická příručka, František Vlk, nakladatelství a vydavatelství, Brno, 2003

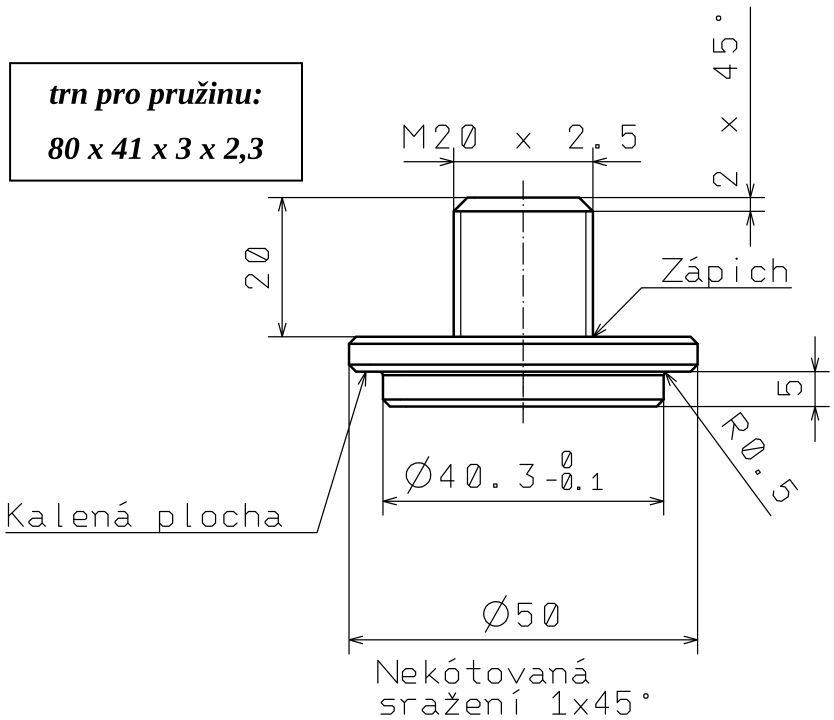
[30] Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L.: The finite element method, Fifth edition, Volume 1: The Basis, Butterworth-Heinemann, London, 2000

[31] Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L.: The finite element method, Fifth edition, Volume 2: The Solid mechanics, Butterworth-Heinemann, London, 2000

# PŘÍLOHY

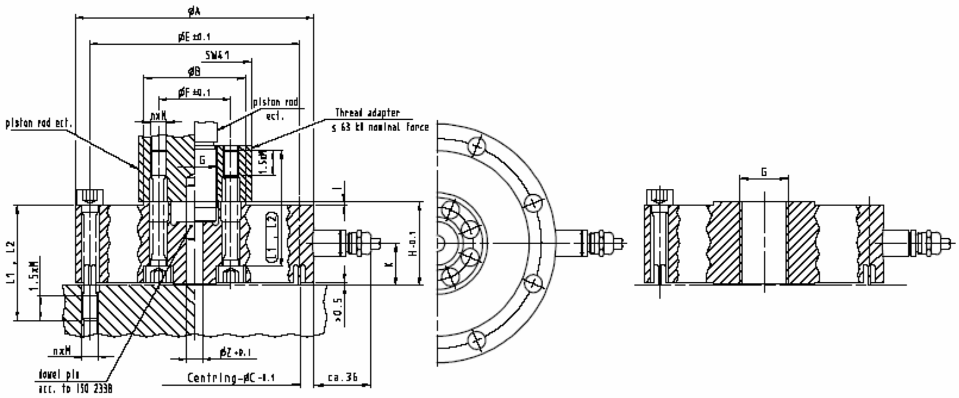
*Příloha 1: Náčrty vodících trnů*



*Příloha 2: Katalogový list siloměru*

## Force Transducers Series K
**Nominal capacity 10 – 160 kN**



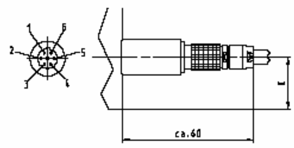
**Picture: Force Transducer Series K 10 – 160 kN**

| Nominal capacity tension/compression | ± $F_{nom}$ | kN | 10; 20; 25 | 50; 63 | 100; 160 |
|---|---|---|---|---|---|
| Outside diameter | Ø A | mm | 95 | 101 | 148 |
| Flange diameter | Ø B | mm | 40 | 38,6 | 63 |
| Outer centring diameter | Ø C | mm | 81 | 87,5 | 131,4 |
| Outer pitch circle diameter | Ø E | mm | 80 | 86 | 130 |
| Centring pin diameter | Ø Z | mm | 8 | 8 | 10 |
| Overall height | H | mm | 31 | 31 | 49 |
| | I | mm | 1 | 1,5 | 0,5 |
| | K | mm | 18 | 18 | 25 |
| N x thread | | | 8 x M6 | 8 x M6 | 8 x M10 |
| Inner pitch circle diameter | Ø F | mm | 30 | 30 | 45 |
| Thread adapter Internal thread | G(M..) | mm | 20 x 1,5 (except 25kN) | 20 x 1,5 | — |
| Stretch bolt quality | | | 10.9 | 10.9 | 10.9 |
| Minimum bolt length (static load) $L_2$ | | mm | 45 | 45 | 70 |
| Minimum bolt length (dynamic load) $L_1$ | | mm | 55 | 55 | 100 |
| Bolt torque | oiled $\mu = 0{,}2$ | Nm | 12 | 12 | 65 |
| Weight | | kg | 1,3 | 1,5 | 7 |
| Natural frequency ± 20 % | | kHz | 4,5 | 6,8 | 5 |
| Displacement at full load | | mm | 0,07 | 0,07 | 0,09 |
| Permissible dynamic load range[1)] | 2*Fa | | 1,6*Fnom | | 2) |
| Electrical connection | | | Cable connected to transducer (5m long, PUR, 6 wires, screened, 6,5 m Ø, open ended | | |

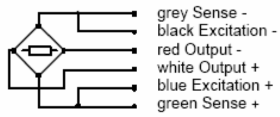
1) With alternating load acc. to DIN 50100: not exceeding ± $F_{nom}$
2) 1,6*Fnom(Type 1mV/V), 1,0*Fnom(Type 2 mV/V)

**Plug connection (LEMO):**

View from pin side



LEMOS, EGG.1B.307.CLL
1 Output +
2 Excitation -
3 Excitation +
4 Output -
5 Sense +
6 Sense -
Screen connected to sensor body
Corresponding plug:
FGG.1B.307.CLA.D72



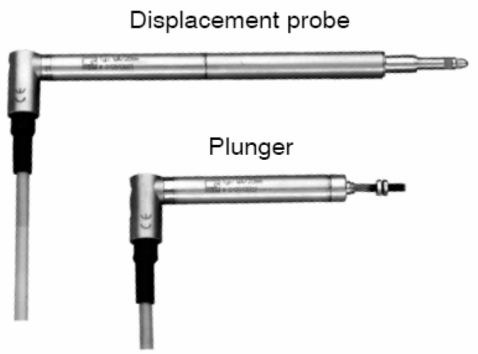

**GTM GASSMANN THEISS MESSTECHNIK GMBH**

*Příloha 3: Katalogový list snímače polohy (strana: 1/2)*

Data Sheet

# WA

## Inductive Standard Displacement Transducers

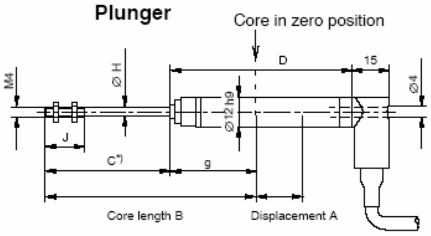



### Special features

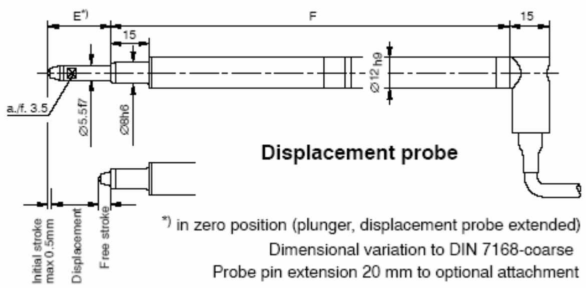
- Displacement probe and transducer with detachable plunger
- Good thermal stability in the event of temperature gradients
- Space-saving, compact design
- Pressure-resistant transducer for measuring displacement in hydraulic cylinders
- Acceleration resistance ensures long service life
- Option: high temperature version up to 150 °C
- Output signal of your choice: 80 mV/V, 0.5–10 V

### Dimensions (in mm; 1 mm= 0.0397 inches)

**Plunger**




Fitted PVC cable, Ø6, optional length and termination




*) in zero position (plunger, displacement probe extended)
Dimensional variation to DIN 7168-coarse
Probe pin extension 20 mm to optional attachment

| | Plunger | | | | | | | Displacement probe | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Measuring range** | **A** | **B** | **C** | **D** | **G** | **ØH** | **J** | **A** | **E** | **F** |
| 0...2 mm | 2 | 75.5 | 40 | 69 | 35.5 | 1.2 | 15 | 2 | 14 | 130 |
| 0...10 mm | 10 | 66 | 40 | 69 | 26±0.5 | 3.7 | 16 | 10 | 14 | 130 |
| 0...20 mm | 20 | 87 | 55 | 84 | 32±0.5 | 3.7 | 16 | 20 | 24 | 170 |
| 0...50 mm | 50 | 117 | 85 | 114 | 32±0.5 | 3.7 | 16 | 50 | 54 | 230 |
| 0...100 mm | 100 | 180 | 134 | 181.6 | 46±10 | 3.7 | 16 | 100 | 104 | 372.6 |
| 0...200 mm | 200 | 280 | 234 | 281.6 | 46±10 | 3.7 | 16 | | | |
| 0...300 mm | 300 | 380 | 334 | 381.6 | 46±10 | 3.7 | 16 | | | |
| 0...500 mm | 500 | 580 | 534 | 581.8 | 46±10 | 3.7 | 16 | | | |

B0553–60 en

HBM

*Příloha 4: Katalogový list snímače polohy (strana: 2/2)*

## Specifications

| Type | | WA2 | WA10 | WA20 | WA50 | WA100 | WA200 | WA300 | WA500 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Nominal displacement** | mm | 0...2 | 0...10 | 0...20 | 0...50 | 0...100 | 0...200 | 0...300 | 0...500 |
| **Nominal sensitivity**<br>Nominal output signal at nominal displacement with output unloaded | mV/V | 80 | | | | | | | |
| **Characteristic tolerance**<br>Deviation of sensitivity from nominal sensitivity | % | ± 1 | | | | | | | |
| **Zero point tolerance**<br>with core in zero position | mV/V | ± 1 | ± 8 | | | | | | |
| **Linearity deviation**<br>Greatest deviation between start and end point (including hysteresis by reference to nominal sensitivity) | % | ≤ ± 0.2 to ≤ ± 0.1 | | | | | | | |
| **Nominal temperature range** | °C | −20...+80 | | | | | | | |
| **Operating temperature range** | | | | | | | | | |
| Standard | °C | −40...+80 | | | | | | | |
| Variant for high temperature | °C | −40...+150 | | | | | | | |
| **Effect of temperature** on zero signal in nominal temp. range per 10 K, by refer. to nominal sensitivity | % | < ± 0.1 | | | | | | | |
| **Effect of temperature** on output signal in nominal temp. range per 10 K, by refer. to actual value | % | < ± 0.1 | | | | | | | |
| **Input resistance** | Ω | 100 ± 10 % | 350 ± 10 % | | | | | | |
| **Output resistance** | Ω | 570 ± 10 % | 680 ± 10 % | | | | | | |
| **Nominal excitation voltage** | V rms | 2.5 | | | | | | | |
| **Operating range of the excitation voltage** | V rms | 0.5...10 | | | | | | | |
| **Carrier frequency,** | | | | | | | | | |
| Nominal range | kHz | 4.8 ± 1 % | | | | | | | |
| Operating range | kHz | 4.8 ± 8 % | | | | | | | |
| **Weight** | | | | | | | | | |
| of transducer body | g | 54 | 56 | 57 | 68 | 104 | 147 | 190 | 276 |
| of plunger | g | 4 | 6 | 7 | 9 | 13 | 20 | 28 | 42 |
| **Surface materials** | – | rust-resistant | | | | | | | |
| **Impact resistance,** test severity level to DIN IEC 68, Part 2-27; IEC 68-2-27-1987 | | | | | | | | | |
| Number of impacts (per direction) | – | 1000 | | | | | | | |
| Impact acceleration | $m/s^2$ | 650 | | | | | | | |
| Impact duration | ms | 3 | | | | | | | |
| Impact form | – | Half sine wave | | | | | | | |
| **Vibration resistance,** test severity level to DIN IEC 68, Part 2-6, IEC 68-2-6-1982 | | | | | | | | | |
| Frequency range | Hz | 5 to 65 | | | | | | | |
| Vibration acceleration | $m/s^2$ | 150 | | | | | | | |
| Stress duration (per direction) | h | 0.5 | | | | | | | |
| **Max. number of stress cycles** | | 10 million | | | | | – | | |
| **Spring constant** | N/mm | 0.116 | | | | 0.063 | – | | |
| **Spring force in zero position (for 1mm initial stroke) approx.** | N | 2.4 | | | | 2 | | | |
| **Spring force in final position (nom. displ.) apprx.** | N | 2.7 | 3.6 | 4.7 | 8.2 | 8.3 | – | | |
| **Max. permissible probe tip acceleration** | $m/s^2$ | 170 | | 140 | 95 | 45 | – | | |
| **Max. permissible plunger acceleration** | $m/s^2$ | 2500 | | | | | | | |
| **Probe tip cut-off frequency for 1 mm stroke appr.** | Hz | 60 | | 55 | 45 | 30 | – | | |
| **Probe tip cut-off frequency at nominal displacem.** | Hz | 18 | | 10 | 5 | 3 | – | | |
| **Degree of protection acc. to EN 60 529**<br>for transducer duct and core channel | – | IP67 (depending on connection piece) | | | | | | | |
| **Max. permissible pressure** (increasing load) | bar | 350 | | | | | | | |
| **Overload limit** (to VDI/VDE 2600, Sheet 4) | bar | 450 | | | | | | | |
| **Destructive range** (to VDI/VDE 2600, Sheet 4) | bar | > 500 | | | | | | | |

HBM 2 B0553−60 en

*Příloha 5: Katalogový list tenzometru (strana: 1/3)*

# Strain Gages / Series Y

HBM

## Series Y Strain Gages

### Technical Data

| | | |
|---|---|---|
| strain gage construction | | foil strain gage complete with embedded measuring grid |
| measuring grid | | |
| material | | Constantan foil |
| thickness | µm | 3.8 or 5, depending on strain gage type |
| carrier | | |
| material | | polyimide |
| base thickness | µm | $45 \pm 10$ |
| cover thickness | µm | $25 \pm 5$ |
| connections | | nickel plated Cu leads, approx. 30mm in length. |
| for strain gages without leads | | integrated solder tabs, approx. 1.5mm in length, approx. 1.6 ... 2.2mm wide |
| nominal resistance | Ω | 120, 350, 700, or 1000, depending on strain gage type |
| resistance tolerance | % | ± 0.3 without; ± 0.35 with leads[2] |
| except for KY types, per chain | % | ± 0.5 |
| gage factor | | approx. 2 |
| nominal factor of gage factors | | specified on each package |
| gage factor tolerance for 0.6mm and 1.5mm measuring grid length | % | ± 1.5 |
| for ≧ 3 mm measuring grid length | | %± 1 |
| temperature coefficient of the gage factor | 1/K | ca. $(115 \pm 10) \cdot 10^{-6}$ |
| nominal value of temperature coefficient of gage factor | | specified on each package |
| reference temperature | °C | 23 |
| operation temperature range | | |
| for static, i.e. zero point related measurements | °C | - 70 ... + 200 |
| for dynamic, i.e. not zero point related measurements | °C | -200 ... + 200 |
| transverse sensitivity within reference temperature range using adhesive Z 70 on strain gage type LY 11-6/120 | % | - 0.1 |
| temperature variation | | specified on each package |
| temperature variation acc. to selection, adjusted to thermal expansion coefficient α | | |
| α for ferritic steel | 1/K | $10.8 \cdot 10^{-6}$ |
| α for aluminium | 1/K | $23 \cdot 10^{-6}$ |
| α for plastic material | 1/K | $65 \cdot 10^{-6}$ |
| α for austenitic steel | 1/K | $16 \cdot 10^{-6}$ |
| α for titanium/ grey steel | 1/K | $9 \cdot 10^{-6}$ |
| α for molybdenum | 1/K | $5.4 \cdot 10^{-6}$ |
| α for quartz | 1/K | $0.5 \cdot 10^{-6}$ |
| temperature variation tolerance | 1/K | $\pm 0.3 \cdot 10^{-6}$ |
| adjustment of temperature variation within range | °C | -10 ... + 120 |
| mechanical hysteresis[1] at reference temperature and strain $\varepsilon = \pm 1000$ µm/m strain gage type LY 11-6/120 | | |
| at 1st load cycle and adhesive Z 70 | µm/m | 1 |
| at 3rd load cycle and adhesive Z 70 | µm/m | 0.5 |
| at 1st load cycle and adhesive X 60 | µm/m | 2.5 |
| at 3rd load cycle and adhesive X 60 | µm/m | 1 |
| at 1st load cycle and adhesive EP 250 | µm/m | 1 |
| at 3rd load cycle and adhesive EP 250 | µm/m | 1 |
| maximum elongation[1] at reference temperature using adhesive Z 70 on strain gage type LY 11-6/120 | | |
| strain limit ε for positive direction | µm/m | 50 000 ( ≙5 %) |
| strain limit ε for negative direction | µm/m | 50 000 ( ≙5 %) |
| fatigue life[1] at reference temperature using adhesive X 60 on strain gage type LY 11-6/120 | | |
| stress cycle value $L_w$ at alternating strain $\varepsilon_w = \pm 1000$ µm/m and zero point drift $\varepsilon_m \Delta \leqq 300$ µm/m | | >> $10^7$ (test was interrupted at $10^7$) |
| $\varepsilon_m \Delta \leqq 30$ µm/m | | > $10^7$ (test was interrupted at $10^7$) |
| minimum radius of curvature, longitudinal and transverse, at reference temperature | | |
| for strain gages c/w leads | mm | 0.3 |
| for strain gages c/w integrated leads | | |
| within the measuring grid area | mm | 0.3 |
| within the area of the solder tabs | mm | 2 |
| usable bonding materials | | |
| cold curing adhesives | | Z 70; X 60; X 280 |
| hot curing adhesives | | EP 250; EP 310 |

[1] The data depend on the various parameters of the specific application and are therefore stated for representative examples only.
[2] With measuring grid lengths of 0.6 mm, the nominal resistance may deviate by ± 1%. For the types LY 51/ ... the deviation is ± 0,75%.

*Příloha 6: Katalogový list tenzometru (strana: 2/3)*

# Strain Gages / Series Y

## with 1 Measuring grid

HBM

| Order designation of preference types: Steel | Aluminum | Variable order designation: Other | Nominal resistance Ω | Dimensions (mm) [1 inch = 25.4 mm] Measuring grid: a | b | Measuring grid Carrier: c | d | Max. perm. effective bridge supply voltage V | Solder terminals |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1-LY11-0,6/120 | 1-LY13-0,6/120 | 1-LY1x-0,6/120# | 120 | 0.6 | 1 | 5 | 3.2 | 1.5 | LS 7 |
| 1-LY11-1,5/120 | 1-LY13-1,5/120 | 1-LY1x-1,5/120 | 120 | 1.5 | 1.2 | 6.5 | 4.7 | 2.5 | LS 7 |
| 1-LY11-3/120 | 1-LY13-3/120 | 1-LY1x-3/120 | 120 | 3 | 1.4 | 8.5 | 4.5 | 4 | LS 7 |
| 1-LY11-3/120A | | 1-LY1x-3/120A | 120 | 3 | 1.4 | 8.5 | 4.5 | 4 | LS 7 |
| 1-LY11-6/120 | 1-LY13-6/120 | 1-LY1x-6/120 | 120 | 6 | 2.8 | 13 | 6 | 8 | LS 5 |
| 1-LY11-6/120A | | 1-LY1x-6/120A | 120 | 6 | 2.8 | 13 | 6 | 8 | LS 5 |
| 1-LY11-10/120 | 1-LY13-10/120 | 1-LY1x-10/120 | 120 | 10 | 4.9 | 18.5 | 9.5 | 13 | LS 5 |
| 1-LY11-10/120A | | 1-LY1x-10/120A | 120 | 10 | 4.9 | 18.5 | 9.5 | 13 | LS 5 |
| 1-LY11-1,5/350 | 1-LY13-1,5/350 | | 350 | 1.5 | 1.2 | 5.7 | 4.7 | 4.5 | LS 212 |
| 1-LY11-3/350 | 1-LY13-3/350 | 1-LY1x-3/350 | 350 | 3 | 1.5 | 8.5 | 4.5 | 7 | LS 7 |
| | | 1-LY1x-3/350A | 350 | 3 | 1.5 | 8.5 | 4.5 | 7 | LS 7 |
| 1-LY11-6/350 | 1-LY13-6/350 | 1-LY1x-6/350 | 350 | 6 | 2.9 | 13 | 6 | 14 | LS 5 |
| 1-LY11-6/350A | | 1-LY1x-6/350A | 350 | 6 | 2.9 | 13 | 6 | 14 | LS 5 |
| 1-LY11-10/350 | | 1-LY1x-10/350 | 350 | 10 | 5 | 18.5 | 9.5 | 23 | LS 5 |
| 1-LY11-10/350A | | 1-LY1x-10/350A | 350 | 10 | 5 | 18.5 | 9.5 | 23 | LS 5 |

**LY11**

Temperature variation adjusted to steel with α = 10.8 · 10⁻⁶/K

**LY13**

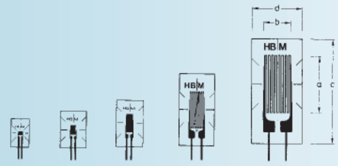
Temperature variation adjusted to Aluminum with α = 23 · 10⁻⁶/K

**LY1x**

Temperature variation adjusted acc. to customer specification

see page 12

Illustrations show actual size
( Dimensions: Grid length in mm )




Contents per package: 10 pcs.

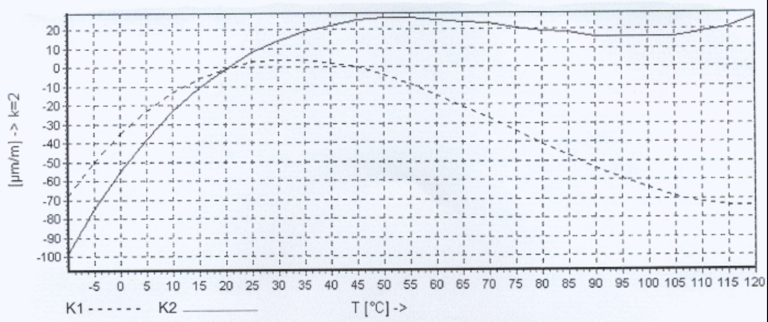
*Příloha 7: Katalogový list tenzometru (strana: 3/3)*

HBM

**Dehnungsmeßstreifen**
**Strain Gauges**
**Jauges d'extensometrie**

| | |
|---|---|
| Bestellnummer / Order No. / No. de référence | **1-LY11-3/120** |
| Typ / Type / Type | 3/120LY11 |
| Stückzahl / Contents / Quantité | 10 |
| Widerstand / Resistance / Résistance | 120 Ω ± 0.35 % |
| k-Faktor / Gauge factor / Facteur k | 2,02 ± 1 % |
| Temperaturkoeffizient des k-Faktors / Temperature coefficient of gauge factor / Coefficient de température du facteur k | 104 ±10 [$10^{-6}$ / °C] (-10...+45°C) |
| Querempfindlichkeit / Transverse Sensitivity / Sensibilité transverse | 0.2 % |
| Folienlos / Lot / Lot de la feuille | A357/09 |
| Herstellungslos / Batch / Lot de fabrication | 812014956 |

Temperaturkompensation: Angepaßt für / Temperature Compensation: Compensated for / Compensation de température: Compensation pour — Ferritischen Stahl mit / Steel with / Acier avec — α = 10.8 [$10^{-6}$ / °C]




$\varepsilon_S(T) = -35.4 + 2.72 \cdot T - 5.38 \cdot 10^{-2} \cdot T^2 + 2.37 \cdot 10^{-4} \cdot T^3 + 0.0333 \cdot L \cdot (T-20)$ µm/m ± 0.3 (µm/m) °C$^{-1}$