Technická univerzita v Liberci

FAKULTA PEDAGOGICKÁ

Katedra: PRIMÁRNÍHO VZDĚLÁVÁNÍ

Studijní program: Učitelství pro 1. stupeň základní školy

Grafy v učivu základní školy

The graphs in subject matter of mathematics

Graphe im Lernstoff der Grundschule

Autor:
Petra Šustrová

Podpis:

Adresa:
Jevíčská 27
569 42, Chornice

Vedoucí práce: RNDr. Jana Příhonská, Ph.D.

Konzultant:

Počet

stran	slov	obrázků	tabulek	pramenů	příloh
64	5788	15	0	8	7

V Liberci dne:

Prohlášení

Byla sem seznámena s tím, že na mou diplomovou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. o právu autorském, zejména § 60 – školní dílo.

Beru na vědomí, že Technická univerzita v Liberci (TUL) nezasahuje do mých autorských práv užitím mé diplomové práce pro vnitřní potřebu TUL.

Užiji-li diplomovou práci nebo poskytnu-li licenci k jejímu využití, jsem si vědoma povinnosti informovat o této skutečnosti TUL; v tomto případě má TUL právo ode mne požadovat úhradu nákladů, které vynaložila na vytvoření díla, až do jejich skutečné výše.

Diplomovou práci jsem vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury a na základě konzultací s vedoucím diplomové práce.

V Liberci dne: Petra Šustrová

Poděkování

Autorka této diplomové práce by touto cestou chtěla poděkovat především vedoucí diplomové práce RNDr. Janě Příhonské Ph.D. Dále patří poděkování paní učitelce Stanislavě Stárkové. Bez jejich odborné pomoci a věnovaného času by tato práce nemohla být realizována

Resumé

Diplomová práce se zabývá využitím teorie grafů, resp. některých jejích prostředků ve výuce matematiky na základní škole. Je zaměřena především na úlohy, které lze řešit pomocí uzlového grafu a logického stromu. Cílem diplomové práce bylo na základě prostudované literatury a používaných učebnic zpracovat přehled úloh, které lze pomocí grafů řešit a některé z těchto úloh otestovat přímo se žáky.
V praktické části jsou předloženy konkrétní ukázky řešení problémů, které byly použity. Podrobněji je zde popsána a analyzována práce několika vybraných žáků v průběhu celého experimentu. V závěru práce jsou uvedeny doporučení a rady pro učitele, jak je možno se žáky pracovat a s odkazem na chyby, kterých by se měli vyvarovat.

My diploma work occupies with explotation of graph Tudory, let us say some of it´s device in teaching mathematics on primary schools. It is first aimed on tasks if it is possible to solve my means of knot graph and logica reason. The aim of my diploma work was to deal an outline of tasks which is possible to solve by means of graphs and to test some of them directly with pupils. I did it on the basis of studied literature and used text-books. In the practical part there are presented practical model of solving problems that were used. There is described in detail and analyse work of some selected pupils through the wholw experiment. At the final of my work there is recommendation and advices for teachers how it is possible to work with pupils, and with reference of mistakes they should avoid.

Die vorliegende Diplomarbeit befasst sich mit der Verwendung der Graphentheorie, bzw. ihrer bestimmten Mittel in der Mathematiklehre auf Grundschulen. Sie fokussiert vor allem auf die Aufgaben, die man mit Hilfe des Knotengraphs und logischen Baums lösen kann. Das Ziel der Diplomarbeit war, auf Grund der durchstudierten Literatur sowie der benutzten Lehrbücher eine

Übersicht von Aufgaben zu erarbeiten, die man mit Hilfe der Graphen lösen kann, und einige davon direkt mit den Schülern zu testen.

Im praktischen Teil werden konkrete Beispiele der verwendeten Problemlösungen dargestellt. Eingehend wird hier die Arbeit von einigen ausgewählten Schülern im Verlauf des gesamten Experiments beschrieben und analysiert. Zum Schluss der Arbeit werden diverse Empfehlungen und Ratschläge für Lehrer aufgeführt, wie man mit den Schülern arbeiten kann, mit dem Hinweis auf eventuelle Fehler, die zu vermeiden sind.

OBSAH..7

1. Úvod

Diplomová práce, která se vám dostala do rukou, se jmenuje **Grafy v učivu základní školy**. Ne každému z nás je matematika blízká. Pro spoustu lidí je to věda, o které říkají, že ji stejně nikdy nebudou chápat a rozumět jí. Já jsem se toto snažila pro některé z vás alespoň trošku změnit. Protože se zaměřuji na využití některých metod z teorie grafů při řešení problémů v matematice, vycházím v teoretické části práce především z knihy: Sedláček, J.: *Úvod do teorie grafů*. Cesta k vědění, Academia, Praha 1981.

Diplomová práce je pojata didakticky. Z tohoto důvodu jsem zavedla pouze pojmy, které jsem pro další práci s dětmi potřebovala, nebo ty, na které by učitel mohl při řešení úloh a problémů pomocí grafů narazit. Prostudovala jsem učebnice, se kterými se na základní škole pracuje a zjišťovala jsem, do jaké míry jsou grafy jako prostředek k řešení úloh v matematice využívány. Toto se stalo východiskem pro sestavení souboru úloh, které jsou dále využity v experimentální části. V praktické části je popsán celý experiment – práce s dětmi, sled jednotlivých činností s případným komentářem tak, jak vyplynulo při jeho realizaci. Jsou zde uvedeny konkrétní příklady, které děti řešily. Dále je uveden návrh řešení, pozorování vývoje a případného zlepšení u některých žáků, rady a typy pro učitele, kteří by se rozhodli grafy více zařadit do hodin matematiky. Součástí práce jsou i další zajímavá žákovská řešení, která byla podkladem pro vyhodnocení experimentu. V příloze je kompletní soubor testů.

1.1 Cíle:

Práce si klade za cíl prostudovat učebnice matematiky, které jsou běžně dostupné. Dále sestavit soubor testů, které lze řešit užitím uzlového grafu a logického stromu. Žáky budeme postupně seznamovat s pojmy z teorie grafů.

I. část – Teoretická číst

2. Motivace

Každé lidské chování je něčím motivováno, musí dávat smysl. Motivace nás vede k cíli proč něco dělat či nedělat. Motivaci bychom mohli definovat jako soubor vnitřních faktorů, které nás podněcují k činnosti, která směřuje k určitému cíli.

Motivace vychází :

- z **vnitřních** pohnutek (vnitřní chování)
- z **vnějšího** popudu (incentiva).

Potřeby jsou pocity vnitřního přebytku nebo nedostatku, který nastává při narušení rovnovážného stavu organismu. Potřeby dále dělíme na *vrozené* a *naučené*.

Incentivy jsou vnější podněty, které jsou schopny vzbudit a uspokojit potřeby člověka. Incentivy lze rozdělit na *pozitivní* a *negativní*.

Motiv vzniká vyvoláním potřeby. Je to důvod, proč člověk jedná nějakým způsobem. Za motiv lze považovat vše, co člověka aktivizuje k nějaké činnosti.

2.1 Motivování žáků

Nejdříve musí učitel v žácích vyvolat zájem pracovat. Je důležité rozlišovat vnitřní a vnější motivaci. Pokud žák vykonává určitou činnost bez očekávání vnějšího podnětu, odměny nebo pochvaly, tak hovoříme o ***vnitřní*** motivaci. O **vnější** motivaci hovoříme tehdy, když se jednotlivec neučí z vlastního zájmu, ale pod vlivem vnějším motivačních činitelů. Takové chování bychom mohli nazvat **instrumentální**, protože je nástrojem pro dosažení vnějším motivačních činitelů (získání odměny, vyhnutí se trestu).

V prvních ročnících mladšího školního věku převládá vnější motivace. Velký vliv na motivaci žáků mají pochvaly a tresty. Postupujícím věkem si žáci začínají klást větší nároky sami na sebe, formuje se u nich systém vnitřní učební motivace.

Metody jak žáky rozvíjet jsou mnohostranné. Výklad učitele by měl být zajímavý. Je dobré používat názorné ukázky, vhodně zvolit motivaci. Samozřejmě záleží s jakou skupinou žáků pracujeme, rozhoduje věk, zájmy a mnoho dalších okolností. Učitel si musí k žákům najít cestu, aby byla jeho práce s nimi co nejefektnější.

Vzhledem k tomu, že slovní úlohy, které jsou předmětem této diplomové práce jsou pro většinu žáku nové, tak nebylo vhodné žáky vést k přílišné soutěživosti. Snažili jsme se motivovat samotným zadáním, volit text, který by je zaujal. Motivací pro ně mělo by být už samotné řešení, žáci se mohli sami zapojit, zajímavá žákovská řešení byla prezentována před celou třídou.

Velká část žáků je zvyklá být za všechno známkovaná. Pro některé žáky byl tento typ slovních úloh příliš obtížný, proto jsme se rozhodli žáky neznámkovat. Špatné známky by pravděpodobně vyvolaly negativní reakce a další nezájem.

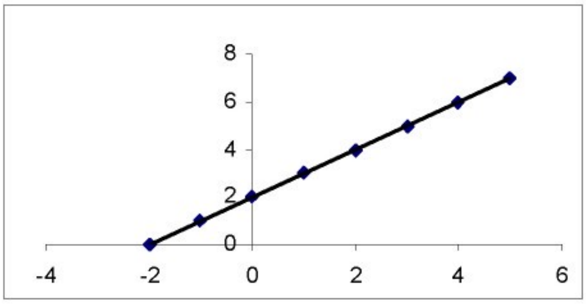
2.2 Rozvoj logického myšlení

Rozvíjet logické myšlení je možné mnoha způsoby. Dnes je na trhu velká řada publikací ze kterých lze čerpat. Pro rozvoj a trénink mozku nám slouží hádanky, hry, hlavolamy, rébusy, bludiště, IQ testy, znalostní i zábavné testy. V první řadě rozvíjí logické myšlení, fantazii, představivost, inteligenci, napomáhá rozvíjet paměť, duševní svěžest. Při řešení tohoto typu úloh se učíme pracovat s problémy, které nám následně mohou pomoci řešit problémy v běžném životě. Úlohy bývají sestaveny podle věkové skupiny, které jsou určeny. Měli bychom postupovat od snazších ke složitějším. Pokud bychom postupovali opačně, tak by to mohlo vyvolat nezájem, protože úlohy bývají sestaveny, aby nás dále motivovaly a vedly k dalšímu poznání a rozvoji. Jen těžko nás rozvine něco, co je na nižší úrovni, než jsou naše dosažené znalosti a zkušenosti.

3. Teorie grafů

Asi každý z nás už někdy slovo graf slyšel. S pojmem ***graf*** se můžeme setkat denně. V novinách si přečteme statistiku nezaměstnanosti, která je znázorněna grafem. Grafem lze vyjádřit úspěšnost studentů u zkoušky, spotřebu paliva, kolísání teploty. Aniž bychom si to uvědomovali, tak lze s grafy spojit mnoho jevů z běžného života. Ve školské matematice hovoříme o grafu zejména v souvislosti s grafem funkce. např. lineární (Obr. 1), kvadratické nebo při statistickém zpracování údajů…

Vzhledem k tomu, že věty a definice zde uvedené nám slouží pouze k zavedení základních vztahů mezi pojmy, tak je nebudeme dokazovat, protože to není cílem diplomové práce.



Obr. 1 **Graf lineární funkce**

Pro účely diplomové práce budeme grafem rozumět určitý útvar, který lze znázornit obrázkem v rovině nebo prostoru. Grafy nám často pomáhají pochopit matematické vztahy a úvahy.

Definice:

*Nechť je dána libovolná neprázdná množina U. Označme písmenem K množinu všech dvouprvkových částí množiny U a zvolme libovolnou část H množiny K. Potom uspořádanou dvojici [U, H] nazýváme **neorientovaným grafem**.*

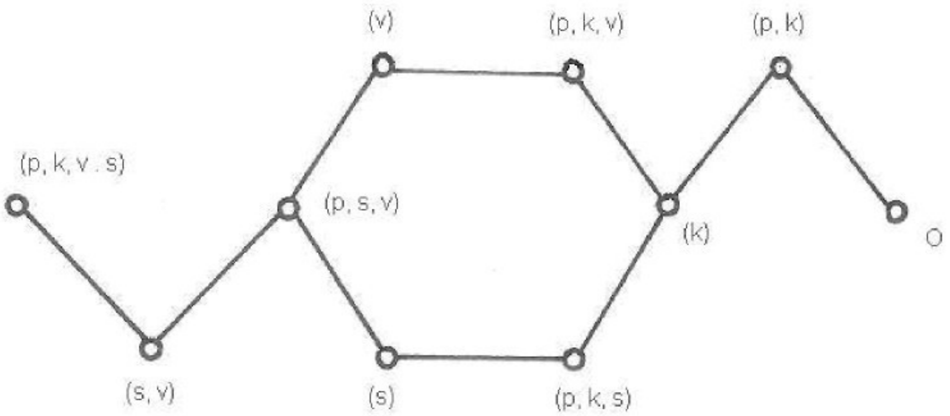
Pro ilustraci a názornější vysvětlení pojmů bych uvedla jednu ze známých převoznických úloh (Obr. 2).

Zadání:

Na levém břehu řeky stojí převozník, který má za úkol dopravit přes řeku kozu, vlka a seno. Loďka uveze pouze převozníka a jednoho z uvedených tří pasažérů. Na břehu nesmí zůstat o samotě ani koza s vlkem, ani koza se senem. Může převozník převézt přes řeku kozu, vlka i seno?

Řešení:

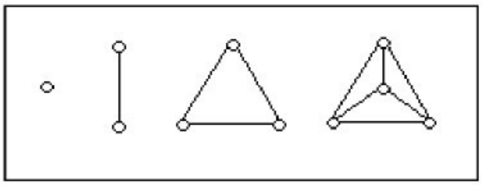
Tuto starou úlohu lze názorně vyřešit způsobem, který popsal D. König. Na začátku máme na levém břehu čtveřici **p**řevozník, **k**oza, **v**lk a **s**eno.
Pro stručnost budeme značit (p, k, v, s). (Obr. 2)
Na levém břehu jsou dále přípustné trojice (p, k, s), (p, k, v) a (p, s, v), dvojice (p, k) a (s, v) a samostatně tu může zůstat (v), (k) nebo (s).
Konečný stav, při němž převozník, koza, vlk i seno budou na pravém břehu, označíme písmenem O. Uvedli jsme možné případy, které mohou nastat na levém břehu řeky. Každý z těchto bodů případů znázorníme bodem v rovině, jak to ukazuje obrázek. Pak spojíme některé body úsečkou, tím vyjádříme, že jedinou cestou lodičky lze přejít z jednoho stavu do druhého. Z obrázku je už zřejmé, jak přecházet po úsečkách z bodu (p, k, v, s) do bodu O. Ke splnění úkolu musí cestovat přes řeku nejméně sedmkrát.



Obr. 2 **Přípustné situace na levém břehu**

1. Převozník převeze kozu z břehu **l**evého na břeh **p**ravý.
2. Vrátí se z **p** na **l**.
3. Vlk z **l** na **p**.
4. Koza z **p** na **l**.
5. Seno z **l** na **p**.
6. Vrátí se z **p** na **l**.
7. Koza z **l** na **p**.

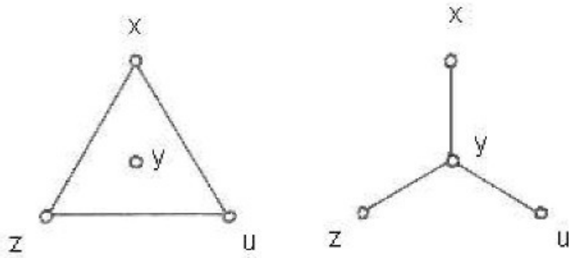
Na obrázku se objevovala určitá množina bodů, kterou budeme značit písmenem U. Prvky množiny U se nazývají ***uzly***, v obrázcích je lze značit malými kroužky, zapisujeme je malými písmeny latinské abecedy. Dále budeme v obrázcích používat oblouky a úsečky. Není podstatná délka ani zakřivení těchto čar. Důležité je, které prvky množiny U jsou těmito čarami spojeny. Každá spojnice je určitým znázorněním dvouprvkové části množiny U. Lze mluvit o množině všech spojnic na daném obrázku, tuto množinu budeme značit písmenem H. Pro prvky množiny H se ustálil název ***hrany.*** Hrany jsou dvouprvkové části množiny U, které jsou zadány dvojicí uzlů ***u*, *v***. Přesnější matematické značení by bylo$\{u, v\}$, v praxi se většinou používá značení uvedené výše. Celý graf zpravidla značíme jediným písmenem, které lze opatřit indexem nebo jinou značkou, např. G, G_1, G*. Pokud chceme vyjádřit, že G má U za množinu svých uzlů a H za množinu svých hran, napíšeme G = [U, H]. Z obrázků lze vypozorovat určité skutečnosti. Například říkáme, že *u, v* jsou ***koncové*** uzly hrany *uv*, že uzel *u* ***inciduje*** s hranou *uv*, že *u, v* jsou ***sousední*** uzly, že uzly *u,v* ***spojuje*** hrana *uv* apod. Graf, jehož každé dva uzly jsou spojeny hranou, se nazývá ***úplný*** (Obr. 3).



Obr. 3 **Úplné grafy K_1, K_2, K_3, K_4**

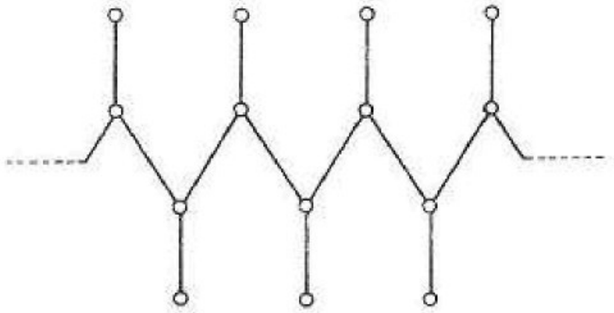
Nechť jsou dány grafy $G_1 = [U, H_1]$, $G_2 = [U, H_2]$, které mají společnou množinu U. Nechť $H_1 \cap H_2 = \{\}$(prázdná množina) a nechť $[U, H_1 \cup H_2]$ je ***úplný*** graf. Pak hovoříme o vzájemné ***komplementárnosti*** grafů G_1 a G_2. (*pozn. pojem komplementární vychází z latinského slova complementum = doplněk).*

Na Obr.4 vidíme dva vzájemně komplementární grafy se čtyřmi uzly.



Obr. 4 **Komplementární grafy**

Pro graf je důležité určit konečnost či nekonečnost množiny uzlů. Graf, který má konečnou množinu uzlů se nazývá ***konečný*** (Obr. 3), pokud je množina uzlů nekonečná, jedná se o graf ***nekonečný*** (Obr. 5).

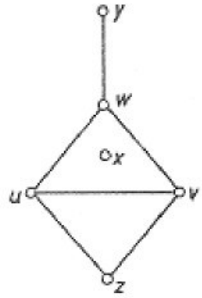


Obr. 5 **Nekonečný graf**

Jsou-li dány dva grafy $G_1 = [U_1, H_1]$, $G_2 = [U_2, H_2]$ takové, že $U_1 \cap U_2 = \{\}$(prázdná množina) potom říkáme, že G_1, G_2 jsou ***disjunktní***.
Jestliže o grafech $G_3 = [U_3, H_3]$, $G_4 = [U_4, H_4]$ platí vztahy: $U_3 = U_4$, $H_3 = H_4$, pak říkáme, že G_3, G_4 jsou si ***rovny***, a píšeme $G_3 = G_4$.
Obvykle se předpokládá, že uzlová množina a hranová množina grafu jsou disjunktní. Pokud je uzlová množina grafu prázdná, pak je zřejmě prázdná i hranová množina, graf nazveme ***prázdný.***

3.1 Stupeň uzlu

Pokud existuje konečně mnoho hran, které incidují se zvoleným uzlem grafu, řekneme, že uzel *x* je ***konečného*** stupně. V případě, že je nekonečně mnoho hran incidentních s uzlem *x*, pak řekneme, že *x* je konečného stupně. Je-li uzel *x* konečného stupně v daném grafu G, potom počet hran, které incidují s uzlem *x*, se nazývá stupeň uzlu *x* a značí se st *x* nebo podobněji st (*x*, G).
Když je st $x = 0$, tak se uzel *x* nazývá ***izolovaný*** (Obr. 6).



Obr.6 **Graf s izolovaným uzlem *x***

Věta 1.

Nechť G = [U, H] je konečný graf, přičemž U = $\{u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n\}$,

a nechť $|H| = h$. Potom platí:

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{st}\,(u_i, \mathrm{G}) = 2h.$$

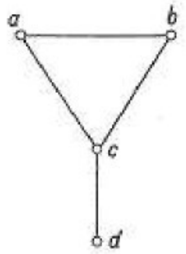
Věta 2.

Počet uzlů lichého stupně v daném konečném grafu je vždy číslo sudé.

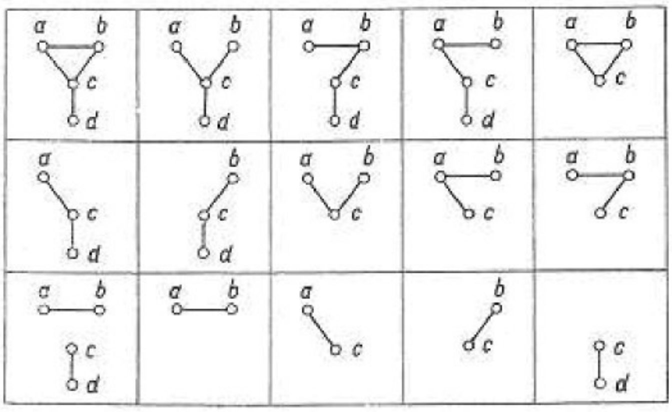
3.2 Podgrafy

Mějme grafy $G_1 = [U_1, H_1]$, $G_2 = [U_2, H_2]$ a že současně platí $U_1 \subset U_2$, $H_1 \subset H_2$. Potom řekneme, že G_1 je **podgrafem** grafu G_2.

Neplatí-li současně $U_1 = U_2$, $H_1 = H_2$, pak G_1 se nazývá ***vlastní*** podgraf grafu G_2. Na Obr. 7 je graf na čtyřech uzlech *a, b, c, d* a všechny jeho podgrafy (Obr. 8, které neobsahují žádný izolovaný uzel.



Obr. 7 **Graf na čtyřech uzlech**

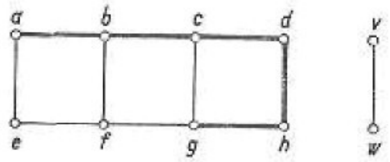


Obr. 8 **Podgrafy**

K danému grafu lze sestrojit 15 různých podgrafů (Obr. 8).

3.3 Souvislost grafů

Máme daný neorientovaný graf G = [U, H], v němž si zvolíme uzly x_0 a x_n. Pokud je možné sestavit konečnou posloupnost uzlů a hran grafu G tvaru x_0, x_0x_1, x_1, x_1x_2, x_2, …, x_{n-1}, $x_{n-1}x_n$, x_n, pak se tato posloupnost nazývá **sled** (Obr. 9) mezi uzly x_0 a x_n. Sled začíná v uzlu x_0, končí v uzlu x_n, ostatní uzly jsou *vnitřní* uzly sledu. Číslo n vyjadřuje počet hran v uvažované konečné posloupnosti. Lze říci, že n je délka uvedeného sledu mezi uzly x_0 a x_n.



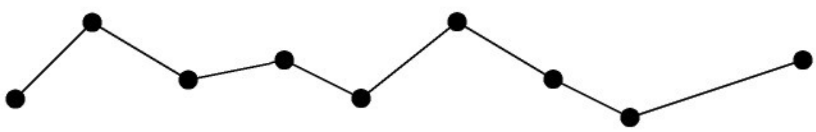
Obr.9 **Sled**

Věta 3.

Nechť v grafu G existuje mezi uzly x a y sled. Potom v tomto grafu existuje mezi x a y též alespoň jedna **cesta** (Obr. 10).

Cesta C_n (kde $n \geq 0$)

$$U = \{0,1,...,n\}, H = \{\{i-1, i\}, i = 1,...,n\}$$



Obr. 10 **Cesta C_8**

Cestou v grafu G rozumíme tedy posloupnost $(u_0, h_1, u_1, ..., h_t, u_t)$, kde $u_0, u_1, ...u_t$ jsou navzájem různé uzly grafu G a pro každé $i = 1, 2, ..., t$ je $h_i = \{u_{i-1}, u_i\} \in H(G)$. Obšírněji se cesta $(u_0, h_1, u_1, ..., h_t, u_t)$ nazývá *cesta z* u_0 *do* u_t *délky* t. Poznamenejme, že připouštíme $t = 0$, tj. cestu délky 0.

Definice:

Graf G se nazývá souvislý, jestliže mezi každými dvěma jeho uzly x a y existuje alespoň jeden sled.

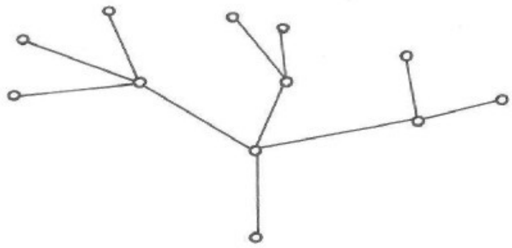
Mezi souvislé grafy řadíme i graf G = [U, {}], kde $|U| = 1$.

Věta 4.

Nechť je dán souvislý graf G a v něm uzel x, který je 1.stupně. Odstraníme-li z grafu G uzel x a hranu xy s ním incidentní, dostaneme ***podgraf G_1***, který je rovněž souvislý.

3.4 Strom a kostra grafu

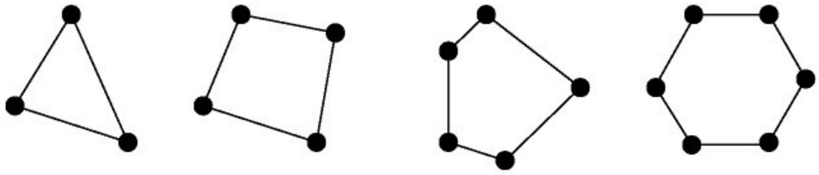
Konečný graf, který neobsahuje jako podgraf žádnou kružnici (Obr. 12), se nazývá ***strom*** (Obr. 11).



Obr. 11 **Strom**

Kružnice K$_n$ (kde $n \geq 3$)

$$U = \{1, 2, ..., n\},\ \ H = \{\{i, i+1\}; i = 1, ..., n-1\} \cup \{\{1, n\}\}$$



K_3 K_4 K_5 K_6

Obr. 12 **Příklady kružnic**

V 19.století studovali stromy především A. Cayley, který stromům věnoval pozornost kvůli vztahu k vzorcům z organické chemie. G. K. Chr. Staudt a G. Kirchhoff k nim dospěli roku 1847 současně, ale každý díky jinému podnětu. Kirchhoff se zabýval fyzikálním vyšetřováním vedení elektrického proudu. Staudt studoval matematické úvahy v souvislosti s mnohostěny.

Věta 5.

Budiž dán strom S = [U, H], kde $|H| \geq 1$. Potom v S existují alespoň dva různé uzly, které jsou 1. stupně.

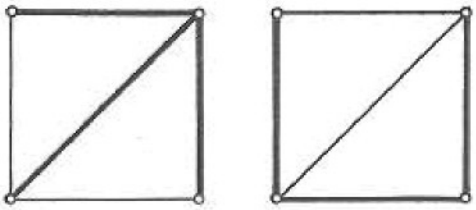
Věta 6.

Nechť je dán strom S = [U, H]; potom platí $|H| = |U| - 1$.

Věta 7.

Nechť G = [U, H] je konečný souvislý graf, potom existuje jeho faktor S = [U, H], který je strom.
pozn. Graf G´ nazýváme faktorem grafu G, vznikne-li z grafu G pouze vynecháním některých (nebo žádných) hran.

Faktor S se nazývá ***kostra*** (Obr. 13) grafu G.



Obr. 13 **Příklad kostry grafu**

II. část – Stanovení hypotéz

4. Hypotézy

Na základě prostudované literatury a získaných materiálů jsme zvolili následující hypotézy:

1. Pravidelné používání grafů je v žákovských řešeních patrné až po delší systematické práci učitele.

2. Grafický způsob řešení problémů ovlivňuje pozitivně úspěšnost řešení.

III. EXPERIMENTÁLNÍ ČÁST

5. Metody řešení

Obecně platí, že je důležité při řešení slovních úloh postupovat systematicky. Každý z nás má svůj vlastní systém, který je pro něj přehledný. Někomu z nás pro lepší názornost pomůže např. využití barev. K přehlednosti si také pomůžeme použitím zkratek (počáteční písmena slov). V některých úlohách lze použít např. očíslování uzlů.

Diplomová práce se zabývá způsoby řešení slovních úloh pomocí grafů. Za graf považujeme i ***tabulku,*** se kterou se žáci již dříve setkali a běžně s ní pracují. Asi nejčastější využití tabulek by bylo v úlohách se sportovní tematikou (zde uvádíme úlohu, která ale se sportem nesouvisí). Na závěr řešení je však potřebné údaje v tabulce vyhodnotit a uvědomit si, co je vlastně řešením (ne všechny údaje, které z tabulky vyplynou uvádíme jako výsledek). Pokud se výsledky opakují, tak je do počtu řešení počítáme pouze jednou (v tabulce jsou šedivě proškrtnuta řešení, která se již jednou vyskytují).

<u>Zadání</u>:

V obchodě mají pět druhů zákusků: <u>v</u>ětrník, <u>š</u>pička, <u>k</u>okosky, <u>r</u>olády a <u>i</u>ndiány. Děti si kupovaly po dvou kusech. Jak si mohly vybrat? Najdi co nejvíc způsobů řešení.

<u>Řešení</u>:

	V	**Š**	**K**	**R**	**I**
V	VV	VŠ	VK	VR	VI
Š	ŠV	ŠŠ	ŠK	ŠR	ŠI
K	KV	KŠ	KK	KR	KI
R	RV	RŠ	RK	RR	RI
I	IV	IŠ	IK	IR	II

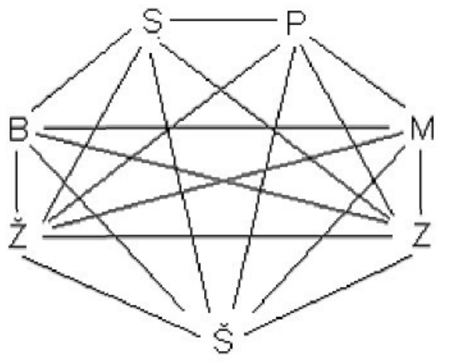
Děti si mohly vybrat z patnácti dvojic.

Jako další způsob řešení uvádíme ***uzlové grafy***. Ve třetí kapitole jsou podrobněji vysvětleny pojmy, které je potřeba postupně zavést: *uzly, hrany*. V následující úloze jsme uzly pojmenovali počátečními písmeny oddílů (S, P, Ž, Š, M, R, Z, B). Hrany spojují jednotlivé uzly znamenají utkání, která se odehrála. Hranou je myšlena např. „čára„ spojující uzly S-P, B-M…Abychom zjistili kolik utkání rozhodčí odpískal, tak stačí spočítat kolik hran je v grafu. Ve složitějších příkladech by bylo možné hrany očíslovat nebo barevně odlišit, aby se nám lépe počítal počet řešení.

<u>Zadání</u>:

Na táboře je 7 osmičlenných smíšených oddílů (Sněženky, Piráti, Žabáci, Škorpióni, Zmijozelové, Mrzimorové a Bradavice). Vedoucí tábora se rozhodl uspořádat sportovní odpoledne. Oddíly se postupně prostřídaly a zahrály si vybíjenou s ostatními. Kolik musel celkem vedoucí odpískat utkání?

Řešení:

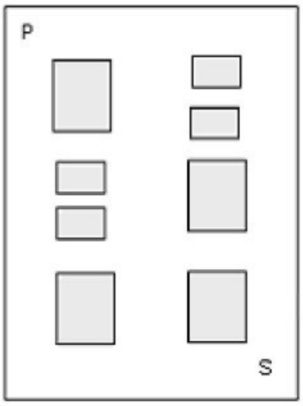


Vedoucí odpískal 21 her utkání.

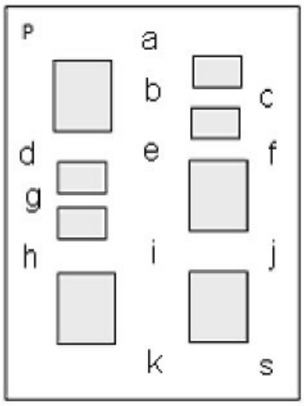
Co je ***logický strom*** je dobře patrné z řešení následující úlohy. Nejdříve si označíme křižovatky (malá písmena v pravém plánku – Obr. b). Za křižovatku budeme považovat místo, ze kterého lze dále postupovat více než jedním směrem. Potom zjistíme kde je start (P) a cíl (S). V zadání máme podmínky, které musíme dodržovat (lze postupovat pouze směrem nahoru a vlevo). Je dobré žákům připomínat, aby dbali na přesné čtení a dodržování podmínek uvedených v zadání. Mnoho z nich čte totiž zadání nedbale, pak se stane, že nedodržují podmínky zadání, ale pracují s podmínkami, které byly kdysi uvedeny v obdobném typu úlohy. Při zápisu řešení nejdříve zapíšeme místo, ze kterého startujeme, pak postupujeme na první křižovatku. Každá křižovatka přes kterou postupujeme musí být zaznamenána.

Zadání:

Na obrázku vidíš plánek města (obr. a). Potřebuješ se dostat z parku (P) na stadion (S). Kolika cestami můžeš jít? Smíš postupovat pouze směrem nahoru a vlevo.

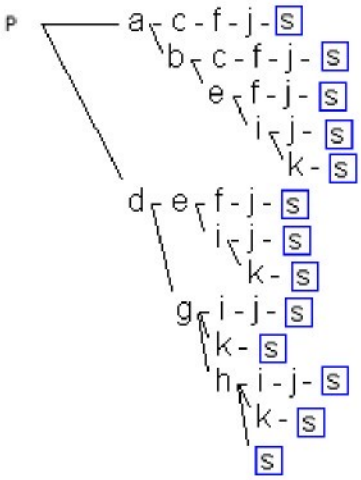


Obr. **a**



Obr. **b**

<u>**Řešení**</u>:

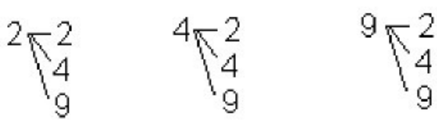


Z parku na stadion je možné dostat se 13 různými cestami

5.1 PRETEST – vzorové řešení

1. ***Zapiš všechna dvojciferná čísla složená z číslic 2, 4, 9. Které z nich je největší? Které z nich nejmenší?***

a)



b)

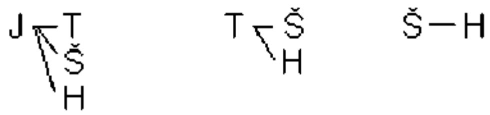
	2	**4**	**9**
2	22	24	29
4	42	44	49
9	92	94	99

Dvojciferná čísla jsou: 22, 24, 29, 42, 44, 49, 92, 94, 99.

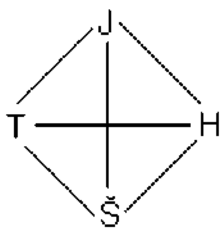
Největší je číslo 99, nejmenší je 22.

2. ***Na zahradu si chci zasadit dva různé stromy a mám tuto nabídku: jabloň, třešeň, švestku a hrušeň. Kolik mám možností výběru?***

a)



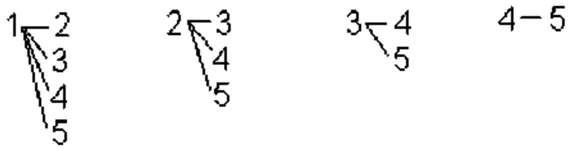
b)



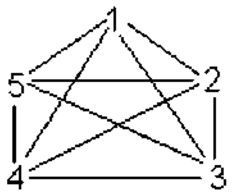
Mám 6 možných výběrů.

3. ***Pět dívek ze čtvrté třídy hrálo šachy. Kolik zápasů se odehrálo, když hrály systémem „každý s každým"?***

a)



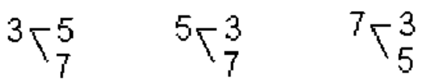
b)



Odehrálo se 10 zápasů.

5.2 1.TEST – vzorové řešení

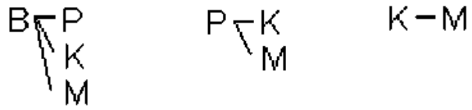
1. ***Zapiš všechna dvojciferná čísla, která můžeš složit z číslic 3, 5, 7. Číslice se nesmí v jednotlivých číslech opakovat.***



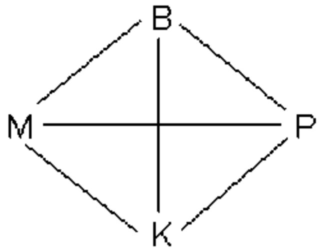
Z číslic lze zapsat čísla: 35, 37, 53, 57, 73, 75.

2. ***Maminka chce synovi koupit dva kusy ovoce . Vybírá z těchto druhů ovoce: banán, pomeranč, kiwi, mango. Kolik má možností výběru?***

a)



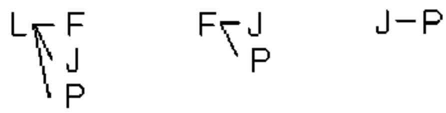
b)



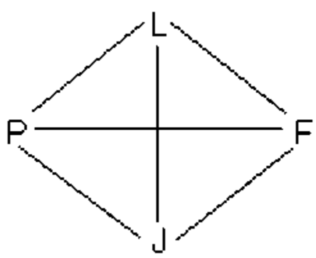
Maminka má na výběr 6 možností.

3. ***Čtyři chlapci: Leoš, Filip, Jirka a Petr hráli stolní tenis. Kolik odehráli celkem zápasů, když hráli každý s každým?***

a)



b)

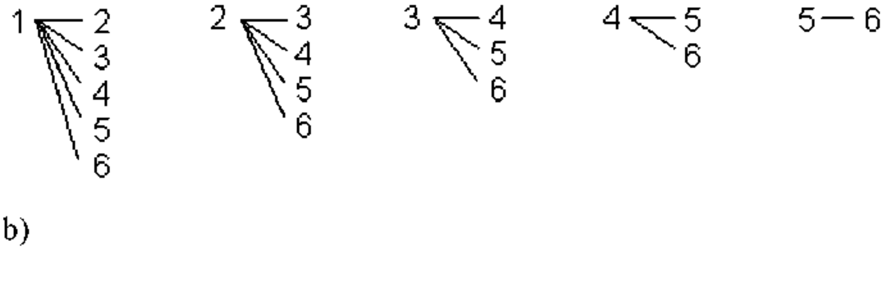


Chlapci odehráli 6 zápasů.

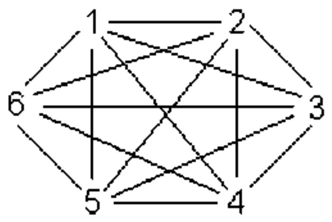
5.3 2. TEST – vzorové řešení

1. ***Na schůzku přišlo 6 osob. Každá se pozdravila s každou. Kolik to bylo celkem podání rukou?***

   a)



   b)



Podání rukou bylo 15.

2. ***Petr dostal šifrovací (kódovací) zámek ke kolu. Zapomněl ale kombinaci čísel, která mu zámek otevře. Ví, že se trojciferná kombinace skládá z čísel: 2, 5, 3. Kolik je celkem takových kombinací? Vypiš je.***

2–5–3 (253)
 \3–5 (235)

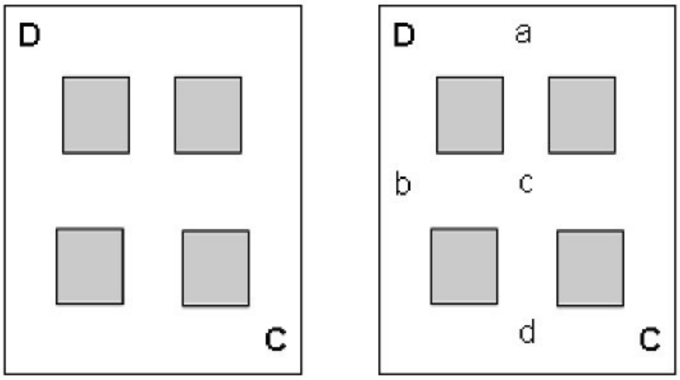
3–2–5 (325)
 \5–2 (352)

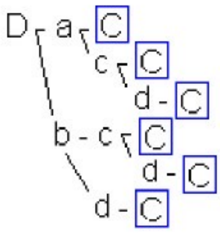
5–2–3 (523)
 \3–2 (532)

Mám šest možností: 253, 235, 325, 352, 523, 532.

3. ***Maminka chodí s Pepíkem každou neděli na zmrzlinu. Na obrázku vidíš mapku. Kolik je cest z domu do cukrárny, když víš, že smíš postupovat pouze směrem dolů a doprava?***

zadání: řešení:



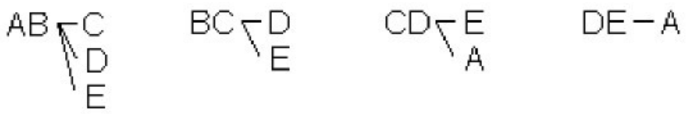


Z domu do cukrárny vede 6 cest.

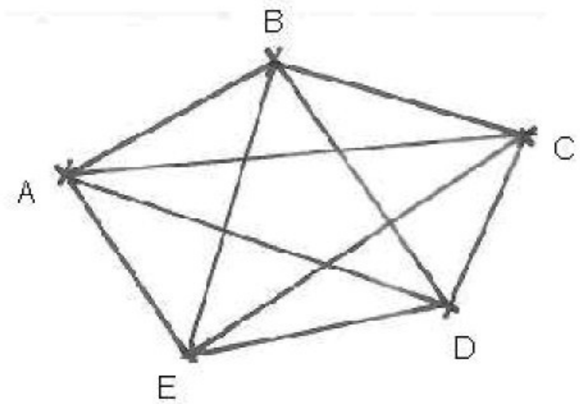
5.4 3. TEST - řešení

1. ***Je dáno pět bodů, které neleží na přímce. Kolik můžeš z těchto bodů získat trojúhelníků?***

   a)

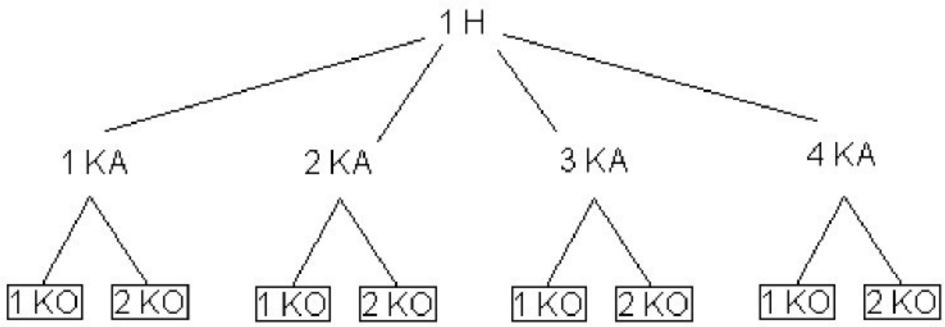


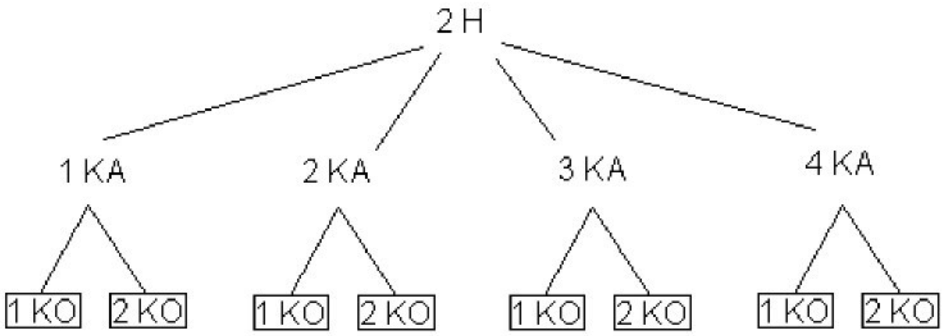
b)

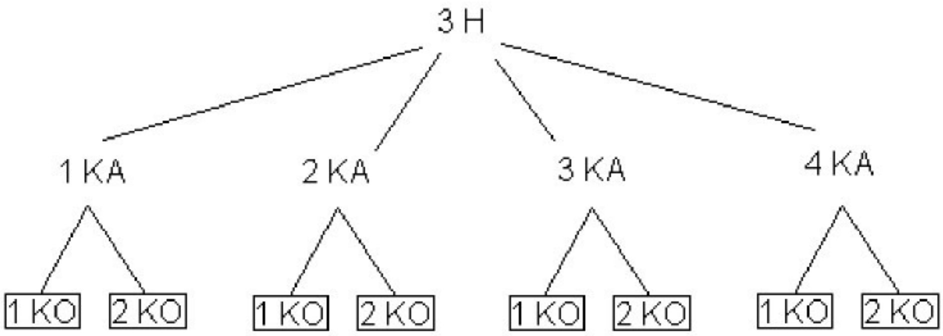


Získám 8 trojúhelníků.

2. ***Alice se chystá na přehlídku. Maminka jí donesla tašku ve které jsou: tři halenky, čtvery kalhoty a dvoje korále. Kolik si může Alice obléknout různých kostýmů, když každý musí mít halenku, kalhoty a korále?***



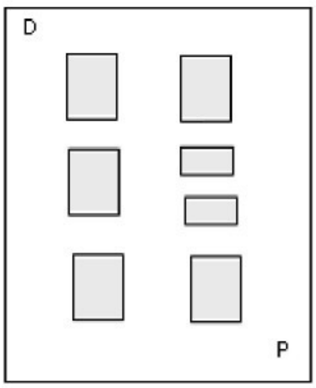




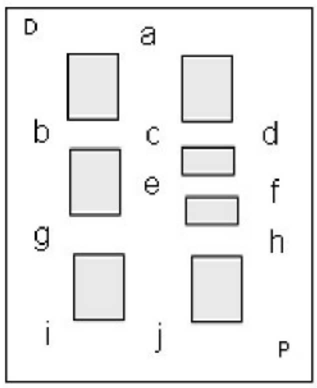
Alice si může obléknout 24 různých kostýmů.

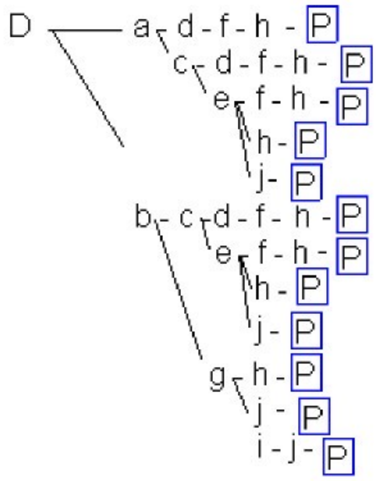
3. ***Kolika cestami může jít Lucie z domu (D) do pekařství (P). Smí postupovat pouze směrem dolů a doprava.***

a) zadání



b) řešení



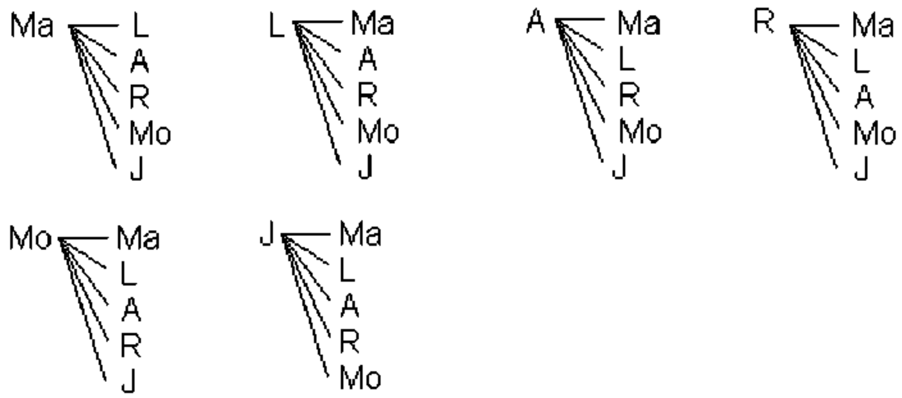


Z domu do pekařství vede 12 cest.

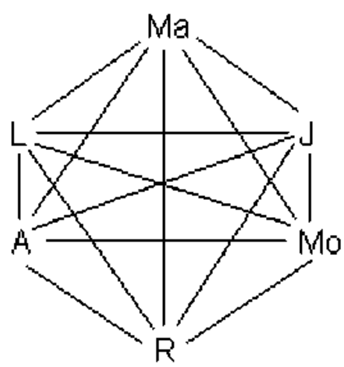
5.5 RETEST – vzorové řešení

1. ***Marie, Lucie, Aneta, Radka, Monika a Jana se dohodly, že dá každá každé malý dárek na vánoční besídce. Kolik bude pod stromkem dárků, když je tam všechny dají?***

a)

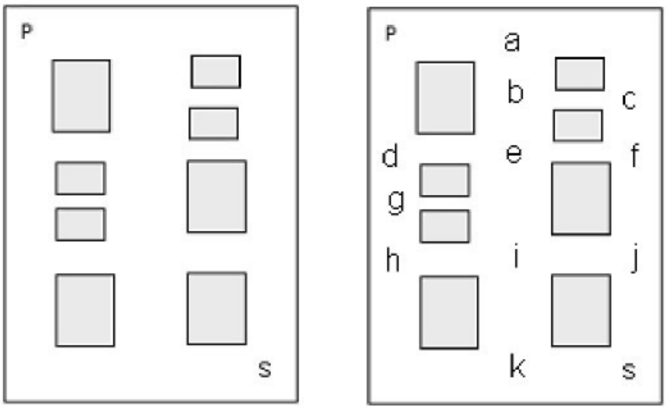


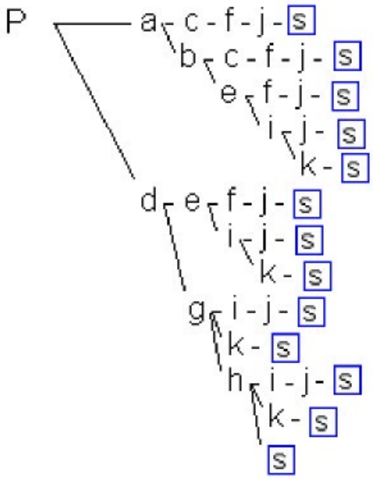
b)



Pod stromkem bude 30 dárků.

2. ***Na obrázku vidíš plánek města. Potřebuješ se dostat z parku (P) na stadion (S). Kolika cestami můžeš jít? Smíš postupovat pouze směrem nahoru a vlevo.***

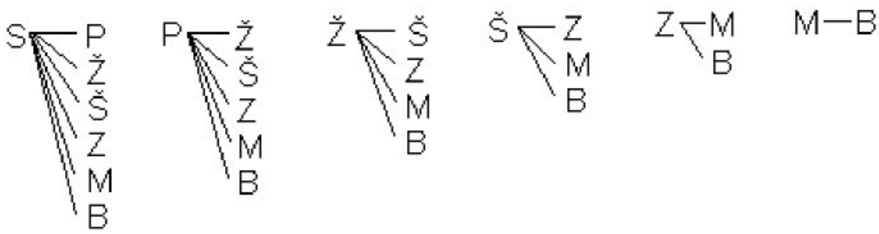




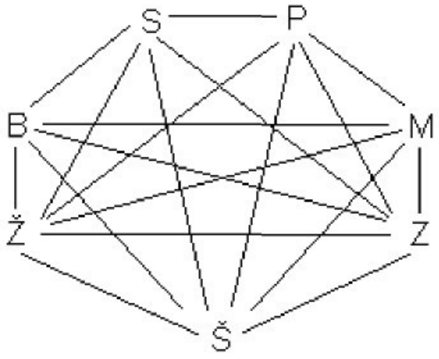
Z parku na stadion je možné dostat se 13 různými cestami.

3. ***Na táboře je 7 osmičlenných smíšených oddílů (Sněženky, Piráti, Žabáci, Škorpióni, Zmijozelové, Mrzimorové a Bradavice). Vedoucí tábora se rozhodl uspořádat sportovní odpoledne. Oddíly se postupně prostřídaly a zahrály si vybíjenou s ostatními. Kolik musel celkem vedoucí odpískat utkání?***

a)

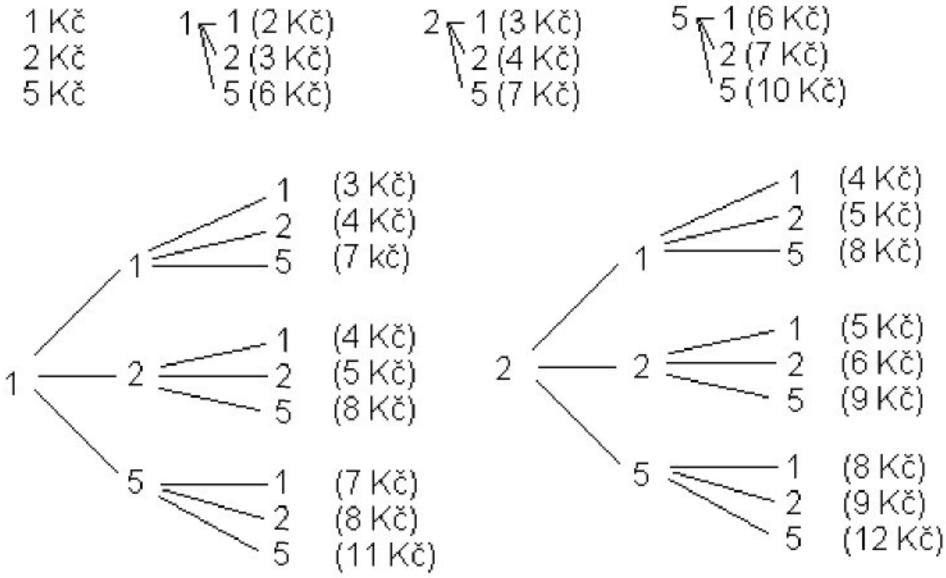


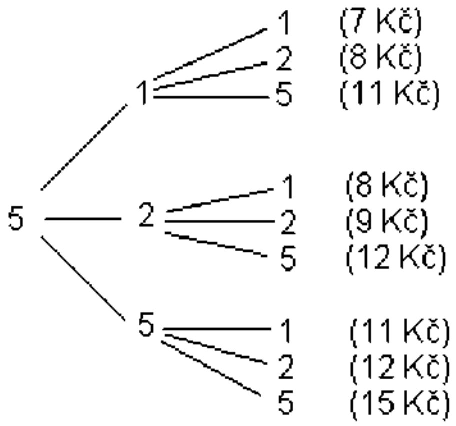
b)



Vedoucí odpískal 21 her utkání.

4. *V peněžence mám mince o hodnotě: 1 Kč, 2 Kč a 5 Kč. Vybírám nejvýše tři mince (alespoň jednu musím vybrat). Kolik různých částek takto mohu zaplatit?*

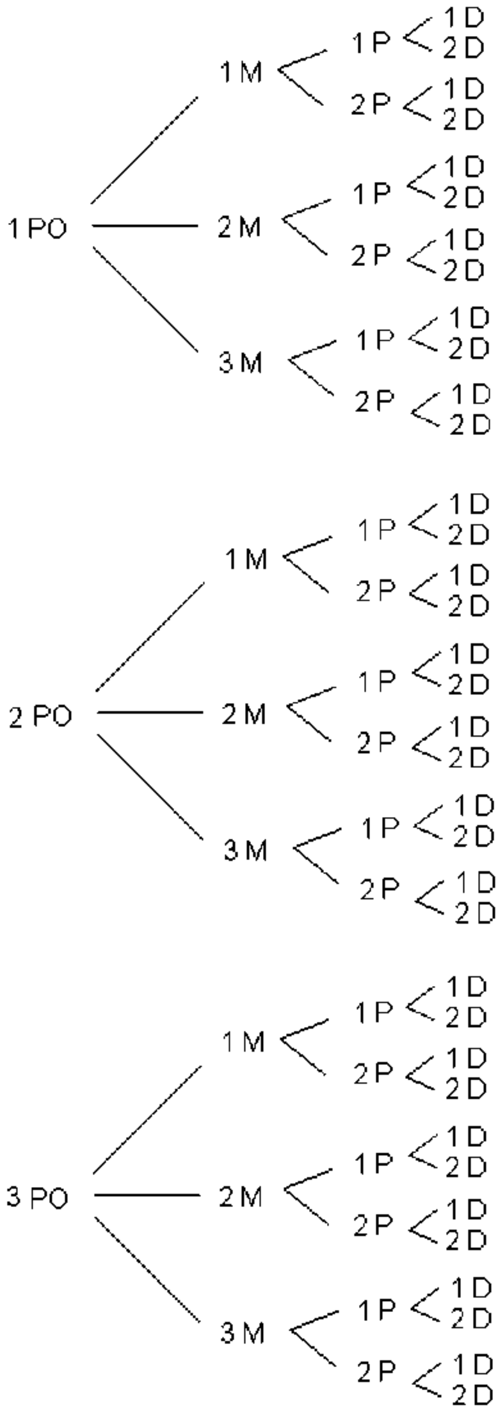




Mincemi lze zaplatit 13 různých částek (viz. závorky).

5.6 DOMÁCÍ PRÁCE - řešení

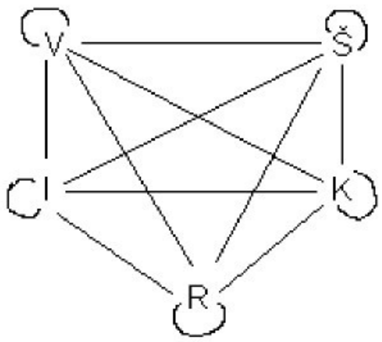
1. ***Na jídelním lístku stálo: „Dnes nabízíme: 4 polévky, 3 druhy masa, 2 přílohy, 2 dezerty“. Kolik můžeš z této nabídky sestavit kompletních menu? Víš, že se menu skládá z polévky, masa, přílohy a dezertu.***



Celkem lze sestavit 48 různých menu.

2. ***V obchodě mají pět druhů zákusků: větrník, špička, kokosky, rolády a indiány. Děti si kupovaly po dvou kusech. Jak si mohly vybrat? Najdi co nejvíc způsobů řešení.***

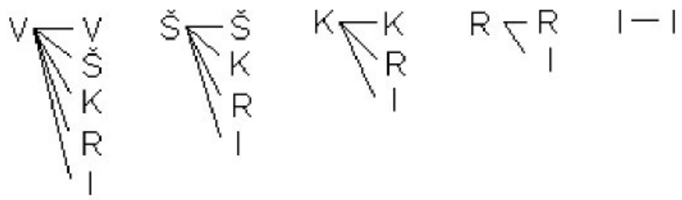
a)



b)

	V	**Š**	**K**	**R**	**I**
V	VV	VŠ	VK	VR	VI
Š	ŠV	ŠŠ	ŠK	ŠR	ŠI
K	KV	KŠ	KK	KR	KI
R	RV	RŠ	RK	RR	RI
I	IV	IŠ	IK	IR	II

c)



Děti si mohly vybrat z patnácti dvojic.

IV. část – Vyhodnocení experimentální části

6. Jak probíhal experiment

Ve třetím ročníku jsem souvislou 5-ti týdenní praxi absolvovala na Základní škole Liberec, Sokolská 328. Vzhledem k tomu, že se mi prostředí školy líbilo, tak jsem se rozhodla požádat o pomoc s experimentem diplomové práce paní učitelku Stanislavu Stárkovou. Sedm týdnů jsem chodila učit do páté třídy jednu hodinu matematiky za týden. Bohužel nebylo možné testovat úlohy ve více hodinách, protože bylo potřeba, aby žáci nezameškali mnoho času, který je potřeba na standardní hodiny matematiky.
Ve třídě bylo celkem 28 žáků. Nepodařilo se nám shromáždit všechny testy a domácí práce jednotlivých žáků. Z toho důvodu jsme měli omezený výběr pro celkový rozbor jednotlivých žáků.

6.1 Využití grafů v učebnicích

Prostudovali jsme několik učebnic různých nakladatelství, které jsou běžně dostupné ve školách. Snažili jsme se zjistit, jestli se v nich vyskytují slovní úlohy, které lze řešit využitím grafů. Zajímali jsme se především o uzlový graf a logický strom. Z prostudovaných materiálů vyplynulo, že žáci na prvním stupni nejsou příliš vedeni k řešení pomocí grafu. Několik úloh se objevilo především v učebnicích nakladatelství Alter. Na konci těchto učebnic je kapitola nazvaná Oříšky, kde je několik takových příkladů. Podobné typy těchto příkladu jsme také zařadili do testů. Bohužel mnohdy ani tyto úlohy nebyly zcela správně vyřešeny.

6.2 Pozorování - analýza

Shromáždili jsme kompletní řešení některých žáků, kteří absolvovali všechny uvedené testy (pretest, 1. test, 2. test, 3. test, retest a domácí práce). Jejich řešení jsou analyzována a využita pro ověření hypotéz. K analýze jsou využita i ostatní žákovská řešení.

V následující části uvádíme podrobnější rozbor řešení dvou žáků. Nastíníme chyby, kterých se dopouštěli a pozornost věnujeme zajímavým způsobům řešení. Text je doplněn komentářem s případnými radami pro učitele. Je potřeba podotknout, že jsme do testů nechtěli zasahovat, proto jsme gramatické chyby ponechali a neopravovali.

6.3 KAUZA ANDREA K.

Pretest

1. Zapiš všechna dvojciferná čísla složená z číslic 2, 4, 9. Které z nich je největší? Které z nich nejmenší? 24

~~22, 24, 44, 42, 49, 99, 94, 92~~ 29

22, 24, 29, 42, 44, 49, 92, 94, 99

Nejmenši je čislo 22.

Největši je čislo 99.

***Komentář**: Dvojciferná čísla vypsala správně. Jsou seřazena od nejmenšího k největšímu, odpověď na otázku uvedla.*

2. Na zahradu si chci zasadit dva různé stromy a mám tuto nabídku: jabloň, třešeň, švestku a hrušeň. Kolik mám možností výběru?

~~(Má ma výběr 4 druhy stromů)~~

4 : 2 = 2

Na výběr ma 2 druhy stromků.

***Komentář**: Vůbec nepochopila zadání.*

3. Pět dívek ze čtvrté třídy hrálo šachy. Kolik zápasů se odehrálo, když hrály systémem „každý s každým“?

hrálo .... 5 dívek

Odehrálo se zápasů .... ?

$5 \cdot 5 = 25$

Hrálo se 25 zápasů.

Komentář: *Zadání nepochopila.*

1. Test

1. **Zapiš všechna dvojciferná čísla, která můžeš složit z číslic 3, 5, 7. Číslice se nesmí v jednotlivých číslech opakovat.**

3 < 5 35

7 37

5 < 3 53

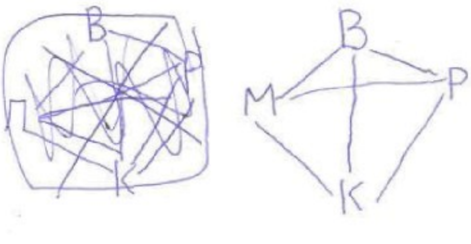
7 57

7 < 5 75

3 73

Komentář*: Úloha vyřešena správně. Chybí odpověď.*

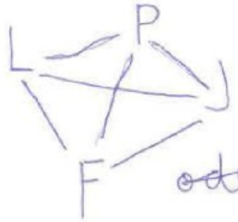
2. **Maminka chce synovi koupit dva kusy ovoce . Vybírá z těchto druhů ovoce: banán, pomeranč, kiwi, mango. Kolik má možností výběru?**



Na výběr má 6 druhů ovoce

Komentář*: K řešení správně využila uzlový graf.*

3. Čtyři chlapci: Leoš, Filip, Jirka a Petr hráli stolní tenis. Kolik odehráli celkem zápasů, když hráli každý s každým?



~~odehráli 6 zápasů~~

odehráli 6 zápasů.

***Komentář**: Stejně jako v předchozí úloze správně vyřešila pomocí uzlového grafu.*

2. Test

1. Na schůzku přišlo 6 osob. Každá se pozdravila s každou. Kolik to bylo celkem podání rukou?

Podání rukou se odehrálo 12.

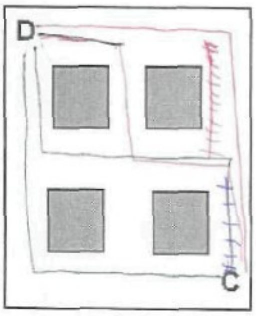
***Komentář:** Andrea si kreslí příliš malé obrázky. V grafu se pak těžko orientuje a zapomíná na některá řešení.*

2. Petr dostal šifrovací (kódovací) zámek ke kolu, ale zapomněl kód, který zámek otevírá. Kolik má možností nastavení kódu, který mu zámek otevře? Ví, že se trojciferný kód skládá z čísel: 2, 5, 3. Vypiš jaké má možnosti.

253
235
352
325
523.
532

***Komentář:** Řešení je správné, ale bez použití grafu.*

3. Maminka chodí s Pepíkem každou neděli na zmrzlinu. Na obrázku vidíš mapku. Kolik je cest z domu do cukrárny, když víš, že smíš postupovat pouze směrem dolů a doprava?



Cest do cukrárny jsou 4.

Komentář: *Do plánku si začala kreslit cesty, ale nenašla všechny.*

3. test

1. Je dáno pět bodů, které neleží na přímce. Kolik můžeš z těchto bodů získat trojúhelníků?

A — D, E
X — B, C
B — C, D
X — E
C — D, E
X
D — E,
X
E
X

Jde narýsovat 5 trojúhelníku.

Komentář: *Nepochopila zadání.*

2. Alice se chystá na přehlídku. Maminka jí donesla tašku ve které jsou: tři halenky, čtvery kalhoty a dvoje korále. Kolik si může Alice obléknout různých kostýmů, když každý musí mít halenku, kalhoty a korále?

3 halenky, 4 kalhoty, ~~dvoje~~ 2 korále.

H → K, KO
KOR. → H, K
KAL. → H, K

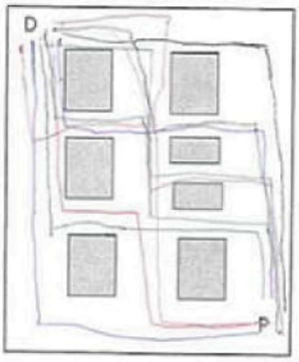
H III, KAL. IIII, KOR. II

Může si obléknout 3 způsoby.

H III, K IIII, KOR II

Komentář: *Je zde patrný náznak logického stromu. Pravděpodobně ale nepochopila zadání.*

3. Kolika cestami může jít Lucie z domu (D) do pekařství (P). Smí postupovat pouze směrem dolů a doprava.



Má 10 cest na výběr

Komentář: *Do plánku si zakreslila cesty (na dvě zapomněla).*

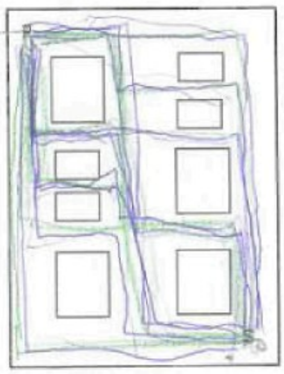
Retest

1. Marie, Lucie, Aneta, Radka, Monika a Jana se dohodly, že dá každá každé malý dárek na vánoční besídce. Kolik bude pod stromkem dárků, když je tam všechny dají?

Pod stromečkem bude 12 dárků.

Komentář: *Je zde patrný náznak uzlového grafu, který ale není dotažen do konce.*

2. Na obrázku vidíš plánek města. Potřebuješ se dostat z parku (P) na stadion (S). Kolika cestami můžeš jít? Smíš postupovat pouze směrem nahoru a vlevo.



Na stadion vede 12 cest.

Komentář: *Stále řeší tento typ úloh bez použití grafu, pouze zakresluje cesty do plánku, neuvedla všechny.*

3. Na táboře je 7 osmičlenných smíšených oddílů (Sněženky, Piráti, Žabáci, Škorpióni, Zmijozelové, Mrzimorové a Bradavice). Vedoucí tábora se rozhodl uspořádat sportovní odpoledne. Oddíly se postupně prostřídaly a zahrály si vybíjenou s ostatními. Kolik musel celkem vedoucí odpiskat utkání?

Je 21 odpiskání.

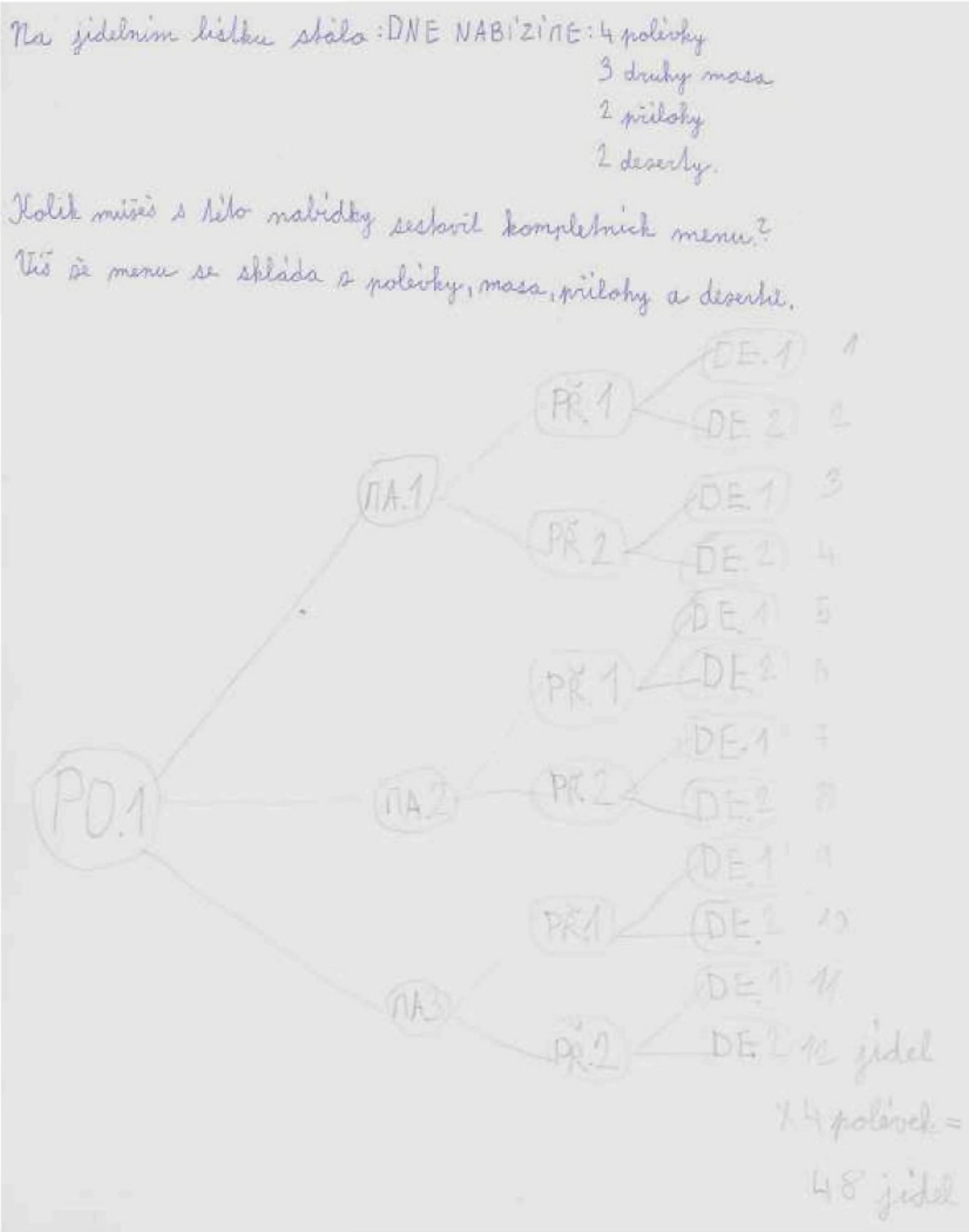
Komentář: *Zajímavě využila k názornosti řešení barev.*

4. V peněžence mám o hodnotě: 1 Kč, 2 Kč a 5 Kč. Vybírám nejvýše tři mince (alespoň jednu musím vybrat). Kolik různých částek takto mohu zaplatit?

1+2+5=8 2+5=7
1+2=3
1+5=6 Mohu zaplatit 8 Kč, 9 Kč, 6 Kč, 7 Kč.

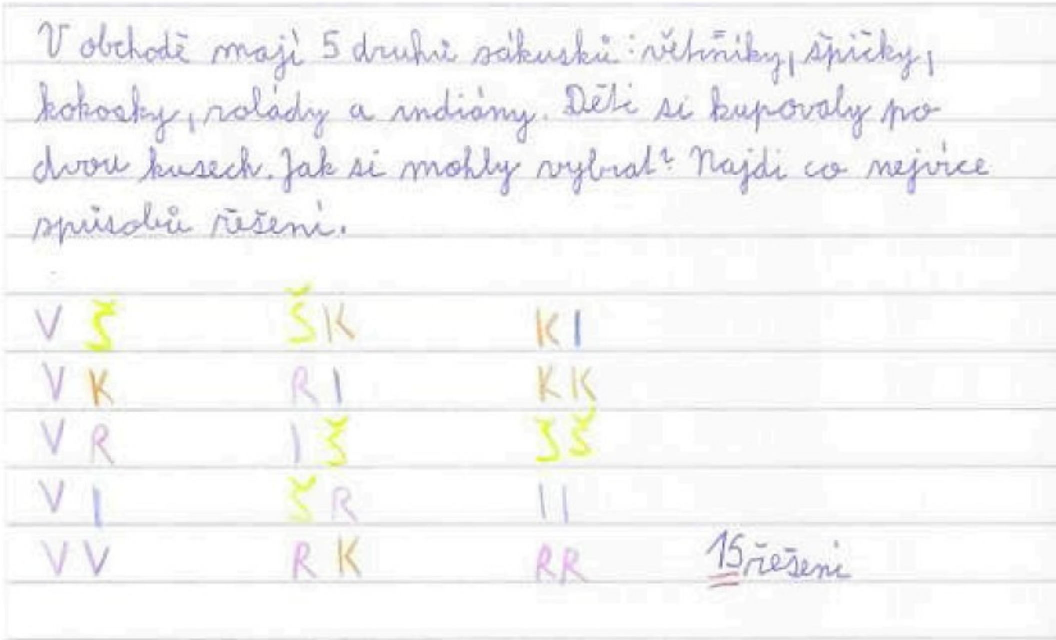
Komentář: *Stejně jako ostatní žáci nepochopila zadání.*

Domácí práce 1



Komentář: *Tuto domácí úlohu správně vyřešila pomocí logického stromu. Nejdříve vypsala všechny možnosti jak lze kombinovat polévku s ostatními složkami menu. Pak uvedla, že lze vybrat ze čtyř polévek. Pro zbylé tři polévky už možnosti nevypisovala, ale uvedla je do výsledku. (Protože graf kreslila tužkou, tak při naskenování došlo ke zhoršení kvality obrázku).*

Domácí práce 2


V obchodě mají 5 druhů zákusků: větrníky, špičky, kokosky, rolády a indiány. Děti si kupovaly po dvou kusech. Jak si mohly vybrat? Najdi co nejvíce způsobů řešení.

VŠ	ŠK	KI	
VK	RI	KK	
VR	IŠ	ŠŠ	
VI	ŠR	II	
VV	RK	RR	15 řešení

Komentář: *Pro větší přehlednost opět užila barevné odlišení zákusků. Vyřešila správně, ale nepostupovala příliš systematicky.*

Zhodnocení:

Celkově lze říct, že Andrea byla při řešení jednou z nejúspěšnějších. Objevuje se u ní řešení pomocí uzlového grafu i logického stromu. Bohužel ne vždy je řešení dotaženo do zdárného konce. Se složitějšími plánky měst si nevěděla rady, nevyužívala co bylo o řešení tohoto typu úloh uvedeno. Nepoužívala značení křižovatek, pouze zakreslovala cesty přímo do plánku. Myslím, že pokud by byla dále vedena k používání grafů, tak by byla postupně při řešení úspěšnější.

6.4 KAUZA ANDREA R.

Pretest

1. Zapiš všechna dvojciferná čísla složená z číslic 2, 4, 9. Které z nich je největší? Které z nich nejmenší?

24 , 94 , 42 , 49 , 44, 99, 22 , 92, 29, 94,

Největší číslo je 99.

Nejmenší číslo je 22.

***Komentář**: Vzhledem k tomu, že čísla nevypisovala postupně, tak udělala chybu a dvakrát napsala číslo 94.*

2. Na zahradu si chci zasadit dva různé stromy a mám tuto nabídku: jabloň, třešeň, švestku a hrušeň. Kolik mám možností výběru?

jabloň + třešeň + švestka + hrušeň = 4 stromy

Množství výběru mám 4 stromy.

***Komentář**: Nepochopila zadání úlohy. Nevypisovala možnosti, ale uvedla, že vybíráme ze čtyř stromů.*

3. Pět dívek ze čtvrté třídy hrálo šachy. Kolik zápasů se odehrálo, když hrály systémem „každý s každým“?

1. dívka hrála 5 zápasů

$5 \cdot 5 = 25$

Odehrálo se 25 zápasů.

***Komentář**: Nechápe zadání. Náhodně násobila číslo, které je v zadání.*

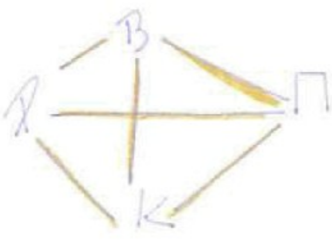
1. Test

1. Zapiš všechna dvojciferná čísla, která můžeš složit z číslic 3, 5, 7. Číslice se nesm v jednotlivých číslech opakovat.

3. , 35, 37
5. , 53, 57
7. , 73, 75

***Komentář**: Správně vypsala dvojciferná čísla.*

2. Maminka chce synovi koupit dva kusy ovoce . Vybírá z těchto druhů ovoce: banán, pomeranč, kiwi, mango. Kolik má možností výběru?



K výběru máme 6 druhů ovoce.

Komentář: *Pomocí uzlového grafu správně vyřešila.*

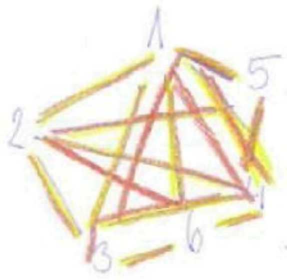
3. Čtyři chlapci: Leoš, Filip, Jirka a Petr hráli stolní tenis. Kolik odehráli celkem zápasů, když hráli každý s každým?

Odehráli 6. zápasů.

Komentář: *Stejně jako v předchozí úloze řešila správně uzlovým grafem.*

2. Test

1. Na schůzku přišlo 6 osob. Každá se pozdravila s každou. Kolik to bylo celkem podání rukou?



Podávalo se 15 ruk.

Komentář: *Pomocí uzlového grafu správně vyřešila.*

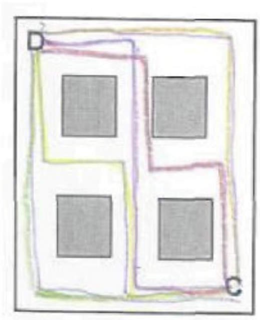
2. Petr dostal šifrovací (kódovací) zámek ke kolu, ale zapomněl kód, který zámek otevírá. Kolik má možností nastavení kódu, který mu zámek otevře? Ví, že se trojciferný kód skládá z čísel: 2, 5, 3. Vypiš jaké má možnosti.

2 25, 23, 22
5 55, 53, 52
3 35, 32, 33

Má 9 možností výběru.

Komentář: *Pravděpodobně neví (nebo si neuvědomila) co je trojciferné číslo.*

3. Maminka chodí s Pepíkem každou neděli na zmrzlinu. Na obrázku vidíš mapku. Kolik je cest z domu do cukrárny, když víš, že smíš postupovat pouze směrem dolů a doprava?

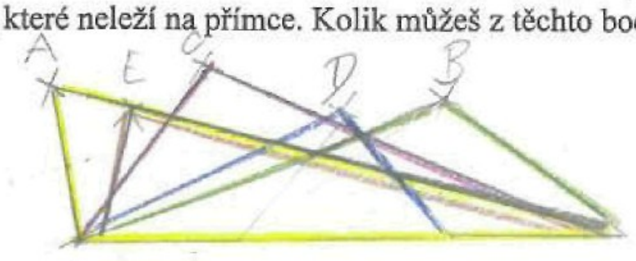


Z domu do cukrárny je 5. cest

Komentář: *Do plánku si různými barvami zakreslila cesty, jednu neuvedla.*

<u>3. test</u>

1. Je dáno pět bodů, které neleží na přímce. Kolik můžeš z těchto bodů získat trojúhelníků?



Můžu získat 5. trojúhelník

Komentář: *Jako jedna z mála testovaných si nakreslila body, které neleží v přímce. Dále už si ale s řešením nevěděla rady.*

2. Alice se chystá na přehlídku. Maminka jí donesla tašku ve které jsou: tři halenky, čtvery kalhoty a dvoje korále. Kolik si může Alice obléknout různých kostýmů, když každý musí mít halenku, kalhoty a korále?

~~1. kostým: halenka, kalhoty, korále~~

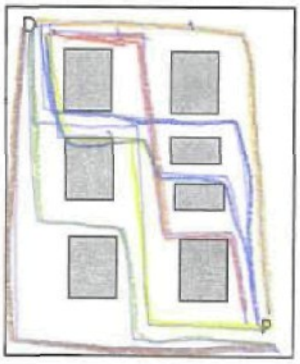
~~2. kostým: halenka, kalhoty~~

~~3. kostým: halenka, kalhoty~~

Může si vzít 3 kostými.

Komentář: *Tento typ složitějších úloh není schopna úspěšně vyřešit.*

3. Kolika cestami může jít Lucie z domu (D) do pekařství (P). Smí postupovat pouze směrem dolů a doprava.



Máme 7 možností.

Komentář: *Stejně jako v předchozí úloze tohoto typu kreslí cesty barevně. Vzhledem k tomu, že je tato úloha ještě složitější, tak bylo téměř jasné, že ji nevyřeší zcela správně.*

<u>Retest:</u>

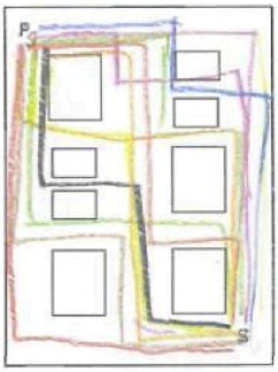
1. Marie, Lucie, Aneta, Radka, Monika a Jana se dohodly, že dá každá každé malý dárek na vánoční besídce. Kolik bude pod stromkem dárků, když je tam všechny dají?

MA.) LU., AN., RAD., MON., JAN.
LU.) MA., AN., RAD., MON., JAN.
AN.) MA., LU., RAD., MON., JAN.
RAD.) MA., LU., AN., MON., JAN.
MON.) MA., LU., AN., RAD., JAN.
JAN.) MA., LU., AN., RAD., MON.

Pod stromečkem bude 30 dárků.

Komentář: *Systematicky si vypsala všechna řešení. Na první pohled to připomíná tabulkové schéma.*

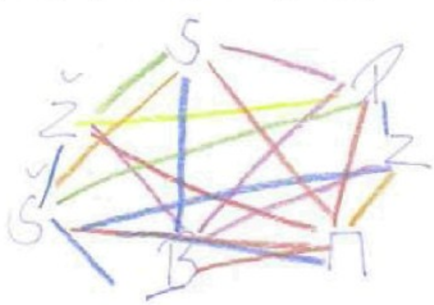
2. Na obrázku vidíš plánek města. Potřebuješ se dostat z parku (P) na stadion (S). Kolika cestami můžeš jít? Smíš postupovat pouze směrem nahoru a vlevo.



Máme 12. cest.

Komentář: *Opět nevyužila, již známého řešení, pomocí vypsání křižovatek, ale barevně zakreslovala do plánku. Vzhledem k záměrné obtížnosti úlohy bylo dost obtížné tímto způsobem řešit.*

3. Na táboře je 7 osmičlenných smíšených oddílů (Sněženky, Piráti, Žabáci, Škorpióni, Zmijozelové, Mrzimorové a Bradavice). Vedoucí tábora se rozhodl uspořádat sportovní odpoledne. Oddíly se postupně prostřídaly a zahrály si vybíjenou s ostatními. Kolik musel celkem vedoucí odpískat utkání?



Musel odpískat 20. utkání

Komentář: *Hezky si hrany uzlového grafu nakreslila barevně. Vedle grafu si navíc dělala barevné čárky, aby se jí výsledný počet řešení lépe počítal. I přesto se dopustila chyby a do výsledku zapomněla uvést jedno utkání (Zmijozelové - Žabáci).*

mince

4. V peněžence mám o hodnotě: 1 Kč, 2 Kč a 5 Kč. Vybírám nejvýše tři mince (alespoň jednu musím vybrat). Kolik různých částek takto mohu zaplatit?

1, 2, 5
1, 1, 1
2, 2, 2
5, 5, 5

Mohu zaplatit 4. částkami.

Komentář: *Stejně jako ostatní testování žáci nepochopila zadání.*

Domácí práce 1:

Na jídelním lístku stálo: DNES NABÍZÍME:
4 polévky
3 druhy masa
2 přílohy
2 deserty
Kolik můžeš z této nabídky sestavit kompletních menu?
Když se menu se skládá z polévky. masa. přílohy a desertu

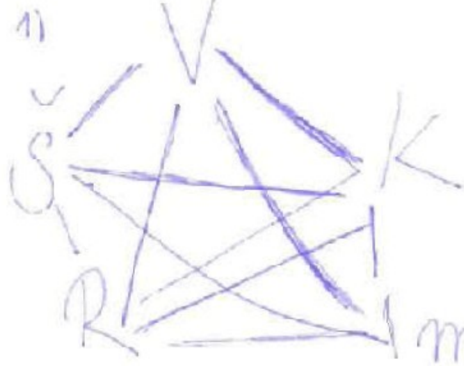
$4 \cdot 3 + 12 \cdot 4 + 24 \cdot 2 = 48$

Máme 48 variant.

***Komentář:** Pravděpodobně se od spolužáků dozvěděla správný výsledek. Pak náhodně a nesmyslně sepsala příklad, jako výsledek uvedla číslo, které mělo skutečně vyjít.*

V obchodě mají 5 druhů zákusků: věterníky, špičky, kokosky, rolády a indiány
Děti si koupily po dvou kusech. Jak si mohly vybrat?
Najdi co nejvíce způsobů řešení.

1)



Máme 10. způsobů řešení.

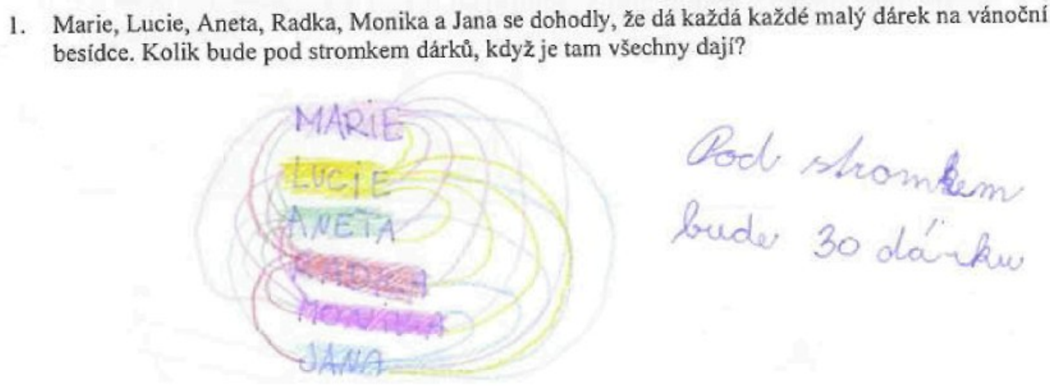
2) V - VŠ, VK, VI, VR, VV
Š - ŠK, ŠR, ŠI, ŠŠ
K - KR, KI, KK
R - RI, RR
I - II Máme 15. způsobů řešení!

Komentář: *U prvního způsobu dvakrát uvedla I (indián). Nepočítala s možností výběru dvou zákusků stejného druhu. Je zajímavé, že u druhého řešení s možností dvou stejných zákusků počítala. Je zvláštní, že ji rozdílná řešení u jedné úlohy nezarazila.*

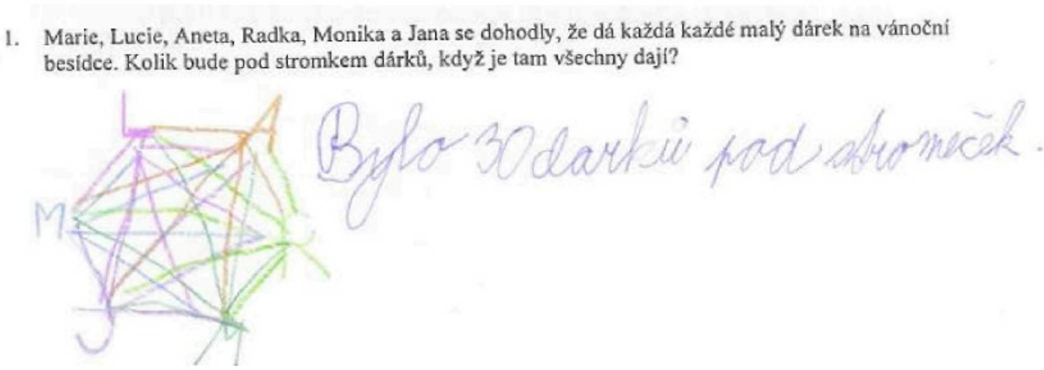
Zhodnocení:

Ne všechny úlohy byly vyřešeny dobře. Některé příklady řešila uzlovými grafy. Líbilo se mi zapojení barev do řešení. I když použila uzlový graf, tak to přesto bohužel neznamenalo zcela správný výsledek. V úlohách s plánky měst také nepoužívala značení křižovatek, jehož princip jsem žákům vysvětlila. I přesto všechno bych Andreu zařadila mezi žáky, kteří byli celkově úspěšnější.

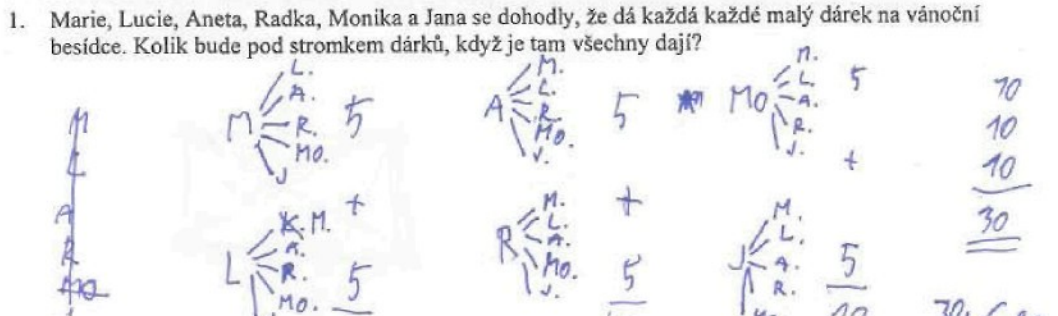
6.5 Ukázka dalších žákovských řešení



***Komentář**: Barevně a názorně řešila uzlovým grafem Nepoužila zkratek (pouze začátečních písmen slov) jako většina ostatních. Přesto je graf přehledný.*



***Komentář**: V tomto řešení je opět barevný uzlový graf. Na první pohled si myslím, že je o něco přehlednější než předchozí řešení.*

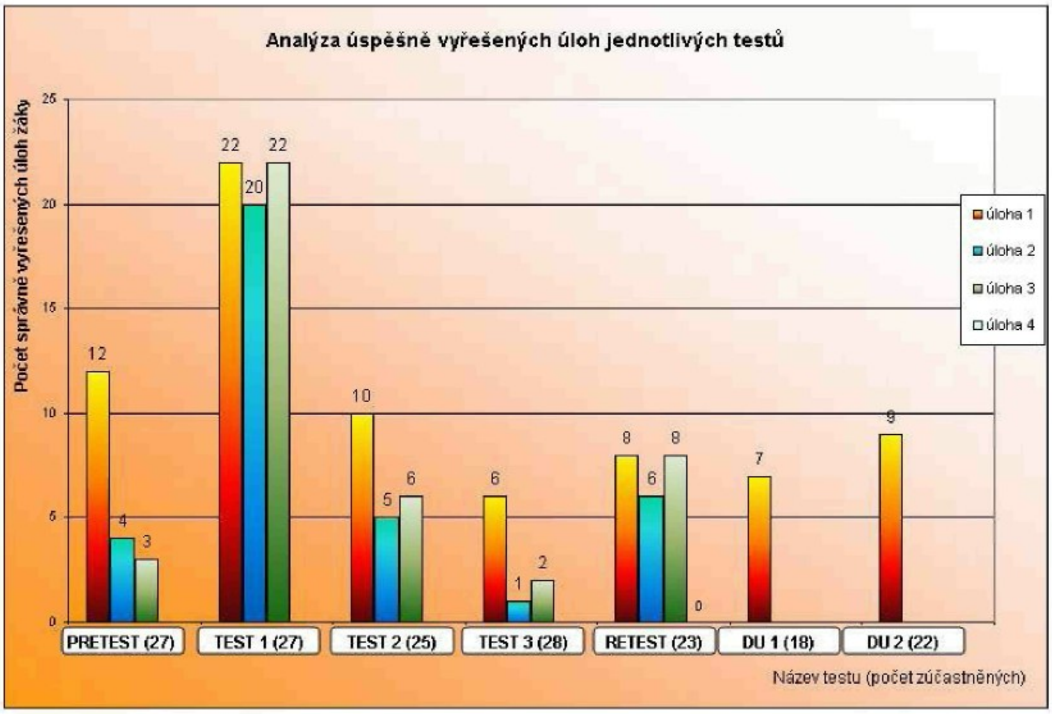


***Komentář**: Žák si kreslil logické stromy (kdo koho obdaroval), pak sečetl počet dárků.*

Pro porovnání a názornější ukázku, jak je možné řešit pomocí grafů, uvádíme konkrétní žákovská řešení první úlohy retestu, kterou vyřešila téměř třetina žáků dobře. U této úlohy byl u většiny žáků problém v tom, že si žáci neuvědomili, že každá dívka, dává dárek každé z uvedených dívek (nepochopili zadání).

6.6 Analýza úspěšně vyřešených úloh jednotlivých testů

Na obr. 14 vidíme graf, který ukazuje kolik žáků bylo v jednotlivých úlohách úspěšných. Každá úloha je posuzována samostatně. Podle legendy, která je v grafu uvedena vidíme, kolik bylo v testu celkem úloh. Obě domácí práce obsahují pouze jednu úlohu. Z grafu vyplývá, že zcela neúspěšná byla čtvrtá úloha RETESTU, kterou správně nevyřešil žádný žák. Nejúspěšnější byli žáci u první a třetí úlohy TESTU 1.

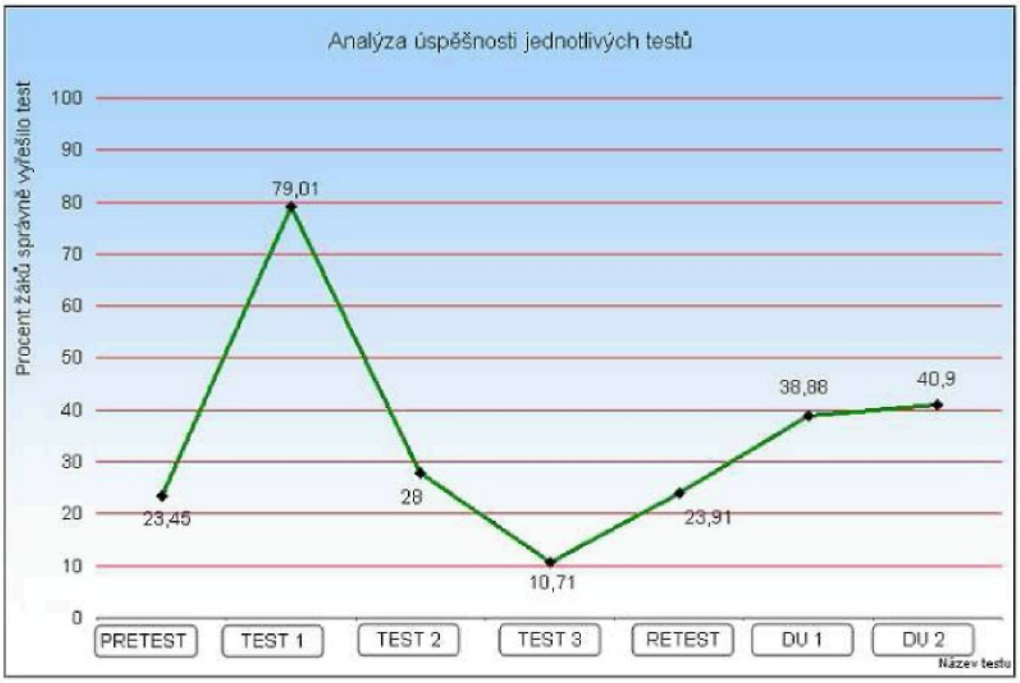


Obr.14 **Úspěšnost vyřešených úloh jednotlivých testů**

Na ose x jsou uvedeny názvy grafů. V závorkách za názvy jsou počty žáků, kteří testy a domácí práce vypracovali. Pouze TESTU 3 se zúčastnili všichni žáci testované třídy.

6.7 Analýza úspěšnosti jednotlivých testů

V následujícím obrázku (Obr. 15) vidíme graf, který posuzuje celkovou průměrnou procentuální úspěšnost testů a domácích prací. Z obrázku je na první pohled zřejmé, že při řešení TESTU 1 byli žáci nejvíce úspěšní. V TESTU 3 bylo úspěšných pouze 10,71 procent.



Obr. 15 **Úspěšnost jednotlivých testů**

Z obou grafů je patrné, že úspěšnost žáků kolísá. Celkově je zřejmé, že TEST 1 byl pro žáky nejsnazší, protože byl vyřešen největším počtem žáků správně. Aby bylo hodnocení úspěšnosti co nejobjektivnější, tak by bylo ideální shromáždit všechny práce od všech žáků.

6.8 Ověření hypotéz

1. *Pravidelné používání grafů je v žákovských řešeních patrné až po delší systematické práci učitele.*

Z poznatků, které z experimentu vyplynuly je zřejmé, že typ slovních úloh, který jsme na žácích testovali, byl pro ně většinou dost neobvyklý. S řešením některých typů úloh si žáci nevěděli rady vůbec. Bohužel se nám nepodařilo shromáždit kompletní práce všech žáků, protože ne všichni z nich se účastnili všech testů. Pro zcela objektivní potvrzení hypotézy by bylo potřeba s žáky pracovat ještě delší dobu, abychom mohli s jistotou hypotézu zcela potvrdit či vyvrátit. Lze ale konstatovat, že někteří žáci postupně začali s využitím grafů při řešení úloh pracovat.

2. *Grafický způsob řešení problémů ovlivňuje pozitivně úspěšnost řešení.*

Ze získaných vyřešených testů jsme vypozorovali, že většina grafických řešení byla správná. U některých se vyskytly chyby, které byly způsobeny především nepozorností žáků, nesystematičnosti při sčítání počtu řešení a nepřehledností grafů (příliš malé obrázky). Celkově bychom ale mohli říct, že se hypotéza potvrdila. Žáci, kteří k řešení využívali grafy byli většinou úspěšní.

6.9 Rady a typy pro učitele

Na základě provedených testů a domácích prací jsme narazili na některé problémy, které mohou v žákovských řešeních nastat.

- Jedním z hlavních problémů je neporozumění zadání. Často se pak stává, že žáci odpovídají na věci, které vůbec zjišťovat nemají.
- Spousta z nich si pletla dvojciferná a trojciferná čísla.
- Většině činily potíže úlohy s plánky měst. Je dobré žákům vysvětlit jak si v plánku označit křižovatky. Pro lepší orientaci navrhuji značit pouze místa, ze kterých lze postupovat víc než jedním směrem. Říct, že si každou křižovatku přes kterou „projdou“ musí zapsat. Při sčítání počtu řešení (cest, kterými lze postupovat) je dobré cílové místo označit kvůli větší přehlednosti barevně.
- Téměř nikdo nevěděl, co znamená, že body neleží na přímce.
- Pokud měli sestavovat různé kombinace (varianty), které mohou nastat (při sestavování menu, kostýmů na přehlídku či zjištění počtu částek, které lze danými mincemi zaplatit), byli většinou dost neúspěšní. Myslím, že by bylo dobré tento typ úloh dále trénovat. Některým žákům by pro lepší názornost jistě pomohla praktická ukázka. Jsem přesvědčena, že mnoho z nich vůbec nepochopilo na co se ptáme.
- Problém nastal i u slovního spojení „nejvýše tři mince“ .
- Kvůli přehlednosti a názornosti navrhuji, aby učitel využíval v řešení zkratek, které také pomohou ke zjednodušení grafů.
- Vzhledem k tomu, že všechny uvedené příklady jsou slovní úlohy, tak by bylo dobré po žácích vyžadovat odpovědi na otázky, které jsou položeny v zadání.

6.9.1 Rady pro učitele

Z hlediska porozumění textu:

- Problém je nutné jasně formulovat.
- Při odpovědi se znova vracet do textu úlohy.
- Je dobré pracovat se zadáním slovních úloh, které je žákům tematicky blízké, protože to přispívá k jejich motivaci.

Z hlediska trvalosti poznatků:

- Procvičovat také typy úloh, které se v učebnicích příliš nevyskytují (viz. praktická část této diplomové práce), protože napomáhají rozvoji logického myšlení.
- Naučit žáky využívat řešení pomocí grafů, které pak budou schopni aplikovat i v jiných slovních úlohách.

Z hlediska metod řešení:

- Vést žáky k systematičnosti.
- V řešení využívat zjednodušující prvky (zkratky, číslování).
- K názornosti a přehlednosti lze použít řešení pomocí barev.

Myslím, že je dost pravděpodobné, že učitelé narazí na spoustu dalších problému a nedostatků v žákovských řešeních. Důležité je vzít si z žákovských chyb ponaučení.

7. Závěr

Teoretická část práce se zabývá vysvětlením základních pojmů z teorie grafů, které jsou potřeba pro práci s žáky prvního stupně základní školy. Prostudovali jsme učebnice, které jsou na základních školách běžně dostupné a dospěli jsme k závěru, že tento typ úloh se v učebnicích příliš nevyskytuje. Sestavili jsme soubor testů, které jsme prakticky ověřili na skupině žáků páté třídy. Na základě poznatků, které jsme z testů získali vyplynulo, že většina žáků začala postupně k řešení používat v některých typech úloh uzlový graf a logický strom. Narazili jsme ovšem na některé typy úloh, které nebyli schopni žáci řešit vůbec.

Slovní úlohy pomáhají rozvíjet logické myšlení. Pokud jsou žáci vhodně motivování, tak je řešení navíc baví. Proto myslíme, že by bylo vhodné zařadit tyto úlohy do hodin matematiky více. Nám se stávalo, že byli někteří žáci ke konci projektu méně ochotni spolupracovat, protože je nudilo řešit stále stejný typ úloh. Pokud by ale učitel zařazoval tyto úlohy do hodin pouze občas, tak by to jistě bylo jen ku prospěchu a celkovému rozvoji dětí.

8. Použitá literatura:

Gahér, F.: *Logické hádanky, hlavolamy a paradoxy*, IRIS, Bratislava, 1997.
Hejný, M. a kol.: *Teória vyučovania matematiky*, 2. SPN, Bratislava 1990.
Lokšová, I., Lokša J.: *Pozornost, motivace, relaxace a tvořivost dětí ve škole*, PORTAL, Praha, 1999.
Plocki, A.: *Pravděpodobnost kolem nás. Počet pravděpodobností v úlohách a problémech*, Univerzita J. E. Turkyně, Ústí nad Labem, 2001.
Rougier, R.: *Rozvíjíme logické myšlení*, PORTAL, Praha, 2002.
Townsend, CH.: *Malá kniha velkých hádanek*, PORTAL, 2001.
Voňavková, J.: *Bludiště a jejich uplatnění v matematice*, DP FP TUL, 2001.
Učebnice matematiky pro základní školy.

Šustrová Petra DP-06 Ved. DP: RNDr. J. Příhonská, Ph.D

Grafy v učivu základní školy

Klíčová slova:

Matematika, graf, logický strom

The graphs in subject matter of mathematics

Key words:

Mathematics, Graph, Logica reason

Graphe im Lernstoff der Grundschule

Schlüsselwörter:

die Mathematik, der Graph, logischen Baum

<u>Příloha- souhrn testů</u>

PRETEST

Jméno:

1. ***Zapiš všechna dvojciferná čísla složená z číslic 2, 4, 9. Které z nich je největší? Které z nich nejmenší?***

2. ***Na zahradu si chci zasadit dva různé stromy a mám tuto nabídku: jabloň, třešeň, švestku a hrušeň. Kolik mám možností výběru?***

3. ***Pět dívek ze čtvrté třídy hrálo šachy. Kolik zápasů se odehrálo, když hrály systémem „každý s každým"?***

1.TEST Jméno:

1. ***Zapiš všechna dvojciferná čísla, která můžeš složit z číslic 3, 5, 7. Číslice se nesmí v jednotlivých číslech opakovat.***

2. ***Maminka chce synovi koupit dva kusy ovoce . Vybírá z těchto druhů ovoce: banán, pomeranč, kiwi, mango. Kolik má možností výběru?***

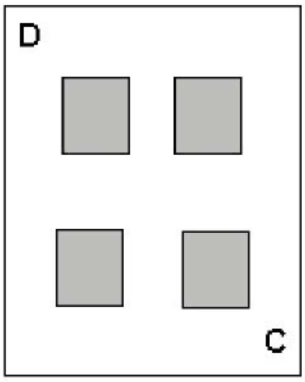
3. ***Čtyři chlapci: Leoš, Filip, Jirka a Petr hráli stolní tenis. Kolik odehráli celkem zápasů, když hráli každý s každým?***

2. TEST Jméno:

1. ***Na schůzku přišlo 6 osob. Každá se pozdravila s každou. Kolik to bylo celkem podání rukou?***

2. ***Petr dostal šifrovací (kódovací) zámek ke kolu. Zapomněl ale kombinaci čísel, která mu zámek otevře. Ví, že se trojciferná kombinace skládá z čísel: 2, 5, 3. Kolik je celkem takových kombinací? Vypiš je.***

3. ***Maminka chodí s Pepíkem každou neděli na zmrzlinu. Na obrázku vidíš mapku. Kolik je cest z domu do cukrárny, když víš, že smíš postupovat pouze směrem dolů a doprava?***



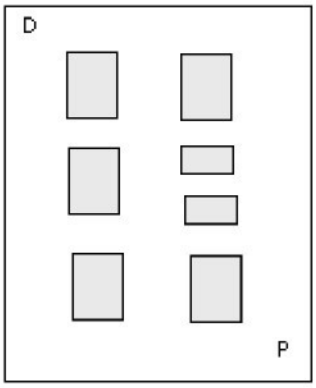
3. TEST

Jméno:

1. ***Je dáno pět bodů, které neleží na přímce. Kolik můžeš z těchto bodů získat trojúhelníků?***

2. ***Alice se chystá na přehlídku. Maminka jí donesla tašku ve které jsou: tři halenky, čtvery kalhoty a dvoje korále. Kolik si může Alice obléknout různých kostýmů, když každý musí mít halenku, kalhoty a korále?***

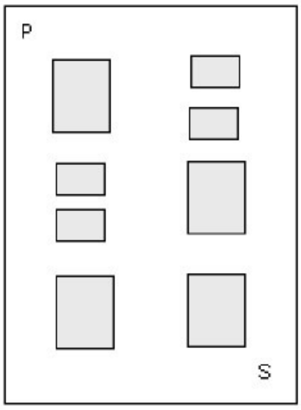
3. ***Kolika cestami může jít Lucie z domu (D) do pekařství (P). Smí postupovat pouze směrem dolů a doprava.***



RETEST jméno:

1. ***Marie, Lucie, Aneta, Radka, Monika a Jana se dohodly, že dá každá každé malý dárek na vánoční besídce. Kolik bude pod stromkem dárků, když je tam všechny dají?***

2. ***Na obrázku vidíš plánek města. Potřebuješ se dostat z parku (P) na stadion (S). Kolika cestami můžeš jít? Smíš postupovat pouze směrem nahoru a vlevo.***



3. ***Na táboře je 7 osmičlenných smíšených oddílů (Sněženky, Piráti, Žabáci, Škorpióni, Zmijozelové, Mrzimorové a Bradavice). Vedoucí tábora se rozhodl uspořádat sportovní odpoledne. Oddíly se postupně prostřídaly a zahrály si vybíjenou s ostatními. Kolik musel celkem vedoucí odpískat utkání?***

4. ***V peněžence mám mince o hodnotě: 1 Kč, 2 Kč a 5 Kč. Vybírám nejvýše tři mince (alespoň jednu musím vybrat). Kolik různých částek takto mohu zaplatit?***

Domácí práce

1. ***Na jídelním lístku stálo: „Dnes nabízíme: 4 <u>p</u>olévky, 3 druhy <u>m</u>asa, 2 <u>p</u>řílohy, 2 <u>d</u>ezerty“. Kolik můžeš z této nabídky sestavit kompletních menu? Víš, že se menu skládá z polévky, masa, přílohy a dezertu.***

2. ***Na jídelním lístku stálo: „Dnes nabízíme: 4 <u>p</u>olévky, 3 druhy <u>m</u>asa, 2 <u>p</u>řílohy, 2 <u>d</u>ezerty“. Kolik můžeš z této nabídky sestavit kompletních menu? Víš, že se menu skládá z polévky, masa, přílohy a dezertu.***