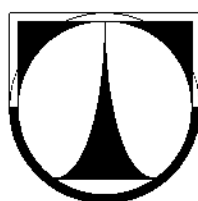


TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI

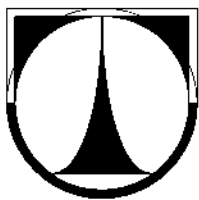
Fakulta mechatroniky, informatiky
a mezioborových studií



DISERTAČNÍ PRÁCE

Liberec 2009

Ing. Lenka Kretschmerová



**TECHNICKÁ UNIVERZITA
V LIBERCI**

**Fakulta mechatroniky, informatiky
a mezioborových studií**

Studijní program: **P 2612 Elektrotechnika a informatika**
Studijní obor: **3901V025 Přírodovědné inženýrství**

DISERTAČNÍ PRÁCE

Vybrané nelineární vlastnosti piezoelektrických křemenných rezonátorů

Autor: Ing. Lenka Kretschmerová

Školitel: Prof. Ing. Jaroslav Nosek, CSc.

Disertační práce: Vybrané nelineární vlastnosti piezoelektrických křemenných rezonátorů

Autor:	Lenka Kretschmerová	lenka.kretschmerova@tul.cz
Školitel:	Jaroslav Nosek	jaroslav.nosek@tul.cz

Studijní program: P 2612 Elektrotechnika a informatika

Adresa pracoviště: Technická univerzita v Liberci
Fakulta mechatroniky, informatiky a mezioborových studií
Ústav řízení systémů a spolehlivosti

Studentská 2
461 17 Liberec
Česká republika

Obsah

Anotace	5
Abstract	6
1. Úvod	7
1.1 Historie měření času	7
1.2 Piezoelektrický jev	8
1.3 Shrnutí výzkumu v oboru disertace	10
2. Vlastnosti piezoelektrických látek	12
2.1 Dielektrické a piezoelektrické vlastnosti krystalů	13
2.2 Elastické vlastnosti krystalů	14
2.2.1 Efektivní hodnoty tenzorových vlastností krystalů	19
2.3 Lineární piezoelektrické stavové rovnice	21
2.4 Nelineární elektroelastické rovnice	22
3. Metody pro určení parametrů a vlastností piezoelektrických rezonátorů	25
3.1 Nejistoty měření a výpočtu	26
3.1.1 Materiálové konstanty	26
3.1.2 Přímá měření	27
3.1.3 Nepřímá měření	29
3.2 Náhradní elektrický obvod	31
3.3 Rezonanční kmitočet	33
3.4 Statická kapacita C_0	35
3.5 Odpor R_h	36
3.6 Činitel jakosti Q_h , indukčnost L_h a kapacita C_h	36
4. Změny rezonančního kmitočtu	38
4.1 Změna rezonančního kmitočtu rezonátoru vlivem teploty	39
4.1.1 Výpočet Tk_f pro AT-řez křemenného rezonátoru	40
4.1.2 Vliv elektrické tuhosti desky	47
4.1.3 Měřené a vypočtené teplotní charakteristiky	48
4.2 Určení nelineárního koeficientu γ	50

4.3	Určení $\tilde{c}_{6666}$	52
4.4	Metody pro určení nelineárního koeficientu γ	54
4.4.1	Negativní vlivy na všechny typy měření nelineárního koeficientu γ	55
4.5	Intermodulační metoda	58
4.5.1	Měřicí řetězec	59
4.6	Vliv budicího napětí	65
4.6.1	Měřicí řetězec pro vliv budicího napětí	67
4.6.2	Výsledky měření	69
Shrnutí		74
Závěr		75
A		76
B		77
C		78
D		79

Seznam použitých symbolů

A	amplituda kmitu resp. směrnice regresní přímky
A_i	váhové zastoupení prvků základní matice tenzoru
C_0	statická kapacita piezoelektrického rezonátoru
C_h	kapacita dynamické větve náhradního obvodu rezonátoru
$c_{ijkl}, c_{\lambda\mu}, c_{\lambda\mu\nu}, c_{\lambda\mu\nu\xi}$	složky tenzoru elastických modulů
$\tilde{c}_{\lambda\mu}, \tilde{c}_{\lambda\mu\nu}, \tilde{c}_{\lambda\mu\nu\xi}$	efektivní hodnoty tenzoru elastických modulů
D, d	průměr vzorku rezonátoru, průměr elektrody
$\mathbf{D}, D_L$	vektor elektrického posunutí
D_i	složky vektoru elektrického indukce
$d_{ijk}, d_{i\mu}$	složky tenzoru piezoelektrického koeficientu
$\mathbf{E}, E_j$	vektor a složky intenzity elektrického pole
e_{ijk}	složky tenzoru piezoelektrického modulu
f_a, ω_a	antirezonanční kmitočet
f_h, ω_h	rezonanční kmitočet kmitů h -tého řádu
f_m, ω_m	kmitočet odpovídající minimální absolutní hodnotě impedance
f_n, ω_n	kmitočet odpovídající maximální absolutní hodnotě impedance
f_p, ω_p	paralelní rezonanční kmitočet
f_r, ω_r	rezonanční kmitočet odpovídající nulové reaktanci elektrického náhradního obvodu
f_s, ω_s	sériový rezonanční kmitočet
$F_1^{(n)}$	n -tý řád povrchového napětí
F_{Lj}	elektrické posunutí
h	řád rezonance, resp. tloušťka rezonátoru
I_r	proud tekoucí rezonátorem
k	pravděpodobnostní koeficient
k_{26}^2	koeficient elektromechanické vazby
$\hat{K}_{LM}$	PiolaKirchhoffův tlakový tensor
L_h	indukčnost náhradního obvodu rezonátoru
M_{Lj}	Maxwell-Piola-Kirchhoffův tenzor
$\mathbf{P}$	vektor polarizace
P, P_r	budicí příkon rezonátoru
Q_h	činitel jakosti rezonátoru
R_h	odpor náhradního elektrického obvodu rezonátoru
$R_h(\omega), R_h(f)$	reálná část impedance náhradního elektrického obvodu rezonátoru v okolí h -té rezonance
$s_{ijkl}, s_{\lambda\mu}$	složky tenzoru elastického koeficientu
S_{ij}	tenzor deformace

$\mathbf{T}$	vektor mechanického napětí působící ve směru osy X_i
T_{ij}, T_μ	složky vektoru mechanického napětí
$t_{ij}^{(n)}$	přírůstek napětí
$Tk_f^{(n)}$	teplotní činitel n -tého řádu
U, u, u_A, u_B	složky nejistoty
$\hat{u}_M, u_i^{(n)}$	mechanické posunutí, složka přírůstku posunutí
V_n	napětí, kde n je index dle použití
$X_h(\omega), X_h(f)$	imaginární část impedance náhradního elektrického obvodu rezonátoru v okolí h -té rezonance
Y	admitance piezoelektrického rezonátoru; reálná složka admitance
Z_j	zdroj nejistoty typu
α_f^n	teplotní činitel n -tého řádu
β_{ij}	složky tenzoru impermeability
γ	nelineární koeficient
ϵ_{ij}	složky tenzoru permitivity
η	hodnota ztrátového tření
Θ	teplota resp. pravděpodobnostní koeficient
ρ	hustota
ψ	úhel vyjadřující natočení rezonátoru vůči základnímu ortogonálnímu systému os
$\Phi_i^{(n)}$	povrchové napětí
Ω	intermodulační frekvence

Poděkování

Tato disertační práce byla zrealizována díky podpoře státního rozpočtu České republiky:

Grantu MŠMT ČR VS 96006 Studium elektromechanických vlastností látek a
jejich využití ve vědě a technice

Prohlašuji,

že jsem tuto předkládanou disertační práci vypracovala samostatně a uvedla jsem veškeré prameny, které jsem použila.

Datum:

Podpis:

Chtěla bych zde upřímně poděkovat všem, kteří mi svou radou, pomocí, konzultací či podporou pomohli při tvorbě a realizaci této disertační práce a bez jejichž přispění by tato práce nikdy nevznikla. Především bych ráda poděkovala svému školiteli prof. Jaroslavu Noskovi a prof. Jiřímu Zelenkovi za neúnavné vedení a cenné zkušenosti, které mi během tvorby této práce předávali a svým kolegům z LCEP ENSMM Besancon, France za cenné rady a možnost využití jejich laboratoře pro měření napěťových závislostí změny rezonančního kmitočtu.

Anotace

Hlavním cílem disertační práce je rozšíření poznatků o nelineárních vlastnostech piezoelektrických rezonátorů, především Y -řezů, které jsou vázány na elastické vlastnosti piezoelektrického materiálu.

V práci jsou uvedeny přehledy možností měření jednotlivých parametrů charakterizujících piezoelektrický rezonátor v náhradním elektrickém obvodu [27], [40] a je zde diskutována nejistota těchto měření.

Práce se bude věnovat určení teplotní závislosti piezoelektrické rezonanční frekvence a dále teorii určení nelineárního koeficientu γ , pro jehož velikost byla použita rovnice odvozená Tierstenem [29]. Jednotlivé elastické moduly, které jsou v této rovnici obsazeny, budou také podrobeny podrobné analýze.

Poznatek o efektivní hodnotě elastického modulu čtvrtého řádu vedl k sestavení nové rovnice, která pro Y -řezy v budoucnu umožní určit hodnoty několika prvků základní matice elastického modulu čtvrtého řádu. Tyto hodnoty základní matice pak umožní určit efektivní hodnotu elastického modulu čtvrtého řádu pro libovolný úhel Y -řezu křemenného rezonátoru.

Tato práce by měla přispět k určení nejvhodnějších metod pro určení efektivních hodnot elastických modulů čtvrtého řádu, kdy budou postupně sledovány dvě metody, které se pro některé řezy již dnes běžně používají a budou studovány i negativní vlivy, které tato měření ovlivňují.

Klíčová slova

piezoelektrické rezonátory, elastické moduly, tenzor, nelineární koeficient γ , teplotní závislost rezonančního kmitočtu, intermodulační jev, amplitudově-frekvenční efekt

Abstract

The main aim of the dissertation is the extension of the knowledge about piezoelectric resonators non-linear properties, primarily about Y -slices, which are bound to elastic properties of piezoelectric materials.

The dissertation surveys the possibilities of measurement of the individual parameters characterizing piezoelectric resonator in the equivalent electric circuit [27], [40] and the measurement uncertainty is discussed.

The dissertation deals with the determination of the piezoelectric resonant frequency temperature dependence together with the theory of the nonlinear γ coefficient determination. The value of γ coefficient was computed according to the equation derived by Tiersten [29]. Individual elastic models, which are used in this equation, are submitted to a detailed analysis.

The findings concerning the effective value of the fourth degree elastic electric module led to the compilation of a new electric equation, which will enable the determination of the four degree elastic module basic matrix elements values for the Y -slices in the future. The values of basic matrix then enable the effective value determination of the four degree elastic module for an arbitrary angle of the quartz resonator Y -slice.

The dissertation should contribute to the determination of the optimal methods for the four degree elastic modules effective values determination. Two methods which are commonly used for some slices at present are successively analyzed, and the negative factors which influence these measurements are studied.

Key words

Piezoelectric resonators, elastic modules, tensor, γ nonlinear coefficient, resonance frequency temperature coefficient, inter-modulation phenomenon, amplitude- frequency effect.

1. Úvod

1.1 Historie měření času

Měření času a dělení roku na menší části se vyvíjelo spolu s lidstvem od počátku jeho existence. Od jednoduchého rozeznávání den - noc, přes rozlišení ročních období, až po dělení základní časové jednotky našich předků - jednoho dne. Objev zákonitostí pohybu planet a rozpoznání dráhy Slunce pomohl urychlit vývoj časoměrných systémů. V prvo-počátku byl základním ukazatelem dlouhodobějších dějů cyklus měsíce a doby kratší než jeden den postavení slunce na obloze. Člověk však potřeboval stále přesnější měření času. Přibližně v XXI. století př.n.l. byli kněží v Mezopotámii a v Egyptě prvními učiteli, kteří dokázali měřit kratší i delší úseky času. Určili části dne a roku a sestavili kalendář. Základním nástrojem pro měření času byl gnómon, který patřil mezi první astronomická zařízení. Jednalo se o svisle postavenou tyč na vodorovné rovině. Podle délky a směru vrženého stínu se určovala doba rovnodennosti a slunovratu, později i sklon ekliptiky. V egyptských městech byly veřejně přístupné sluneční hodiny s kolmým kamenným obeliskem. V této době se používaly i stínové hodiny, pomocí kterých se zjistilo, že jsou v letním období denní hodiny "delší", v zimě jsou naopak "delší" hodiny noční. Pro určení času především v noci a temných prostorech chrámů byly kolem roku 1580 př.n.l. v Egyptě využity systémy vodních hodin, které odkapáváním poměrně přesně měřily čas. Pro měření kratší doby se hojně užívaly i přesýpací hodiny plněné jemným pískem. Všechny tyto techniky měření a určování času se vyvíjely v závislosti na kultuře a technice různých národů lidstva.

Kolem roku 850 n.l. byly sestaveny ve Veroně první mechanické kolečkové hodiny poháněné závažím. Stroj uvádělo do pohybu pomalu klesající závaží jehož pohyb se však zrychloval a hodiny proto nepracovaly přesně. Po vynálezu hodinové západky roku 1288 n.l., která zajistila stabilní posun závaží, byly zkonstruovány první mechanické věžní hodiny. Nejprve to byla jen velká mechanická monstra. Posléze docházelo k jejich zmenšování do podoby stolních hodin (XV. století). V roce 1656 n.l. holandský astronom a matematik Christiaan Huygens nechal postavit první kyvadlové hodiny. Tím se vývoj hodin velmi urychlil. Tento vývoj byl motivován úsilím o dosažení stále větší přesnosti jejich chodu. Přesné měření času bylo důležité pro mnoho rozvíjejících se oborů lidské činnosti, především průmyslu, mořeplavectví a astronomie. Použitím kyvadla se přesnost chodu hodin skokem změnila. U věžních hodin se chyba pohybovala v řádu několika desítek minut za den. U kyvadlových hodin klesla denní chyba na několik sekund.

Roku 1821 n.l. francouzský fyzik Dominique Francois Jean Arago vynalezl první aretovací hodiny neboli stopky, které se začaly využívat především ve sportu a dalších odvětvích, kde je důležitá pouze doba trvání děje.

Roku 1844 n.l. skotský elektrikář Alexander Bain zkonstruoval první elektrické hodiny a roku 1861 Matthaeus Hipp, německo-švýcarský vynálezce, zkonstruoval elektrické kyvadlo k hodinám.

Na konci první světové války se objevily první použitelné elektrické hodiny, které sestrojil americký elektromechanik Henry Ellis Warren.

V roce 1929 americký hodinář Warren Alvin Marrison vyvinul první křemíkové hodiny, které používají piezoelektrický rezonátor pro frekvenčně stabilní oscilátor na základě piezoelektrického jevu popsaného v roce 1880 bratry Curierovými. Tím došlo k dalšímu skokovému zpřesnění určování času. K největšímu rozvoji hodin a hodinek s krystalem došlo až po vyvinutí mikroelektrických integrovaných obvodů.

V roce 1946 americký fyzik Willard Frank Libby vynalezl atomové hodiny. Tyto hodiny pracují na základě čítání vlastních kmitů atomů cesia. Kmity jsou vybuzeny v atomech kovu, napařeného ve vakuu, ozářením uměle vyrobenou porovnávací frekvencí. Využívá se k tomu cesia 133, kde nastává rezonance frekvence u kmity 9.192.631.770 Hz. Z toho potom vychází současná definice 1 sekundy v soustavě jednotek SI.

V roce 1969 Výzkumná laboratoř amerického námořnictva vytvořila atomové hodiny, řízené kmity molekuly amoniaku. Odchylka chodu těchto hodin je jedna sekunda za 1,7 milionu let.

Využití atomových hodin je však i dnes v běžném životě stále velmi vzácné. Dnes jsou časové intervaly (frekvenční standardy či obecně používané časování) nejčastěji realizovány přesnými oscilátory nebo mikročipy s piezoelektrickým rezonátorem s danou frekvencí kmity, od které se pak odvozují její násobky nebo díly potřebné pro chod zařízení. To vede k požadavku na zvýšení stability rezonančního kmity oscilátoru. Ta je závislá na řadě faktorů ovlivňujících chování látek při piezoelektrickém jevu. Podívejme se tedy na historii piezoelektrického jevu, jeho popis a využití.

1.2 Piezoelektrický jev

Piezoelektrický jev byl poprvé pozorován a popsán [5] bratry Curieovými v roce 1880 u krystalů turmarínu a název tento jev získal od Hankela. I bratři Curierové tento název přijali a pozorovaný jev nazvali přímým piezoelektrickým jevem. K čemu tedy v průběhu tohoto jevu dochází? Vlivem mechanického napětí nebo deformace vzniká v krystalu elektrická polarizace. Tento jev se nazývá přímý piezoelektrický efekt. V roce 1881 pak objevili a v [6] popsali, že mechanická deformace je úměrná intenzitě elektrického pole. V roce 1881 upozornil M. G. Lippmann, že na základě termodynamických úvah musí u piezoelektrického krystalu nebo výbrusu existovat také převrácený piezoelektrický jev charakterizovaný mechanickou deformací vyvolanou přiloženým elektrickým polem. V příštích 30 letech byly

piezoelektrické vlastnosti látek považovány pouze za vědeckou kuriozitu. Bylo však postupně popsány další látky, které tuto vlastnost mají.

Tato specifická vlastnost křemene a dalších materiálů byla formulována v roce 1910 Voigtem do teorie piezoelektřiny [33]. Teprve v průběhu a po I. světové válce došlo k projevům většího zájmu o tento jev a jeho další aplikace v technice. V roce 1917 A. Langevin [14] poprvé použil střídavého napětí, aby uvedl křemennou destičku - užitím převráceného piezoelektrického jevu - do vynucených mechanických kmitů. Kmity destiček s frekvencí kolem 40 kHz přenášel do mořské vody a využil je pro měření mořských hloubek.

První práci týkající se piezoelektrických rezonátorů publikoval v roce 1921 W. G. Cady [3] a o dva roky ouzději nezávisle s G. W. Piercem v [4], [28]. V nich bylo ukázáno použití piezoelektrického rezonátoru pro frekvenčně stabilní oscilátor. Dále bylo poukázáno na změny rezonančního kmitočtu oscilátorů vlivem teploty, vibrací a dalších vlivů. Tím byl dán impuls vědě pro další výzkum piezoelektrických vlastností látek. Již v roce 1926 byl popisována interference signálu jako důsledek okamžitého rozdílu dvou frekvencí. Tím byla vyzdvižena nutnost konstantní frekvence signálů v průběhu modulačního cyklu přijímačů. Prvotním zájmem všech uživatelů, kteří zařízení s piezoelektrickými členy používali, se tak stala frekvenční stabilita oscilátorů.

Nejvýznamnějším faktorem, který byl zkoumán byla teplotní závislost, protože při provozu elektronických zařízení s piezoelektrickými oscilátory dochází vždy k jejich ohřevu. Proto se stala teplotní závislost rezonančního kmitočtu podrobně zkoumaným jevem u všech typů rezonátorů. Podle úhlu řezu a typu kmitů, které se používají byly nejčastěji používané rezonátory postupně nazývány dvoupísmenným označením např. *AT*-řez, *BT*-řez a další. Tyto řezy jsou blíže popsány např. v [27], [39]. Studium teplotní závislosti *AT*-řezu, *BT*-řezu byla otevřena cesta ke studiu dalších vlastností těchto řezů a vlivu jednotlivých parametrů na tyto vlastnosti. Práce [18] popsala postupně *CT*-řez a *DT*-řez. S objevem a především širším využitím těchto řezů křemenných piezoelektrických rezonátorů pak došlo k dalšímu rozvoji řízení času a další techniky.

V následujících letech došlo v důsledku válečných událostí v Evropě a pak i na celém světě k masivnímu rozvoji vojenských aplikací všech výsledků výzkumu. Především rozvoj letecké a raketové techniky vyžadoval stále přesnější oscilátory a tím i stále přesnější popis vlastností piezoelektrických látek a jejich chování v extrémních situacích. To vedlo k popisu dalších vlivů frekvenční nestability oscilátorů resp. piezoelektrických rezonátorů vyráběných především z křemene. Nedostatek přírodního kvalitního křemene pro jejich výrobu pak vedl jednak k výrobě umělých křemenných krystalů a také k přípravě dalších piezoelektrických látek ve všech vůdčích mocnostech tehdejšího světa.

Při popisu vlastností piezoelektrických látek pak došlo k rozdělení zájmu na dvě oblasti.

- Minimalizace účinků daného okolního vlivu (např. teploty) tj. najít a popsat řezy materiálu, které budou na uvažovaný okolní vliv necitlivé. A nebude pak nutné je jakkoli zohledňovat nebo měřit.
- Hledání řezů piezoelektrického materiálu, které jsou na daný okolní vliv velmi citlivé. Takové řezy se pak začaly využívat jako senzory nebo převodníky při měření daného okolního jevu (např. teploměry).

S nástupem mikroprocesorů při zpracovávání a vyhodnocování procesů již nebylo nutné, aby závislost na uvažovaném okolním jevu byla pokud možno lineární, ale zvýšil se požadavek na přesnost popsání dané závislosti a především na popis její korelace s daným jevem.

1.3 Shrnutí výzkumu v oboru disertace

Lineární teorie popisující základní chování piezoelektrických látek by měla být použita pro piezoelektrické pevné látky, které nejsou vystaveny žádnému elastickému předpětí nebo silnému elektrickému poli [39], [35]. Pokud tyto podmínky nejsou splněny, výsledky teoretických výpočtů musí být upraveny pomocí korekčních faktorů, nebo musí obsahovat některé nelineární vztahy odvozené z příslušných vstupních podmínek.

Tento efekt byl přesně popsán prostřednictvím nelineárních elektro-elastických diferenciálních rovnic uvedených např. v [1] a [39]. Nelineární teorie bere v úvahu konečnou deformaci η_{ij} a vyšší řády elastických, dielektrických, piezoelektrických a pyroelektrických koeficientů, které mohou být odvozeny z termodynamických potenciálů. Podle [39] a [10] může být pro stadium nelineárních elektro-elastických vlastností piezoelektrických látek použito termodynamické napětí t_{LM} , termodynamické elektrické posunutí D_N a termodynamická intensita elektrického pole E_N .

Předchozí výzkumy nelineárních elektro-elastických vlivů byly předvedeny na křemenných rezonátorech vibrujících v tloušťkově střižném módu. Výsledný efekt byl popsán způsobem změny elastických módů nebo koeficientů způsobených elektrickým polem. Vliv elektrického pole na velikost elastických konstant nebo modulů byl popsán použitím nelineárních elektro-elastických diferenciálních rovnic v [31] a [13]. Použití stanovených termodynamických materiálových konstant pro konkrétní módy rezonátorů bylo zaznamenáno v [8]. Důležité úpravy popisu nelineárního jevu byly zaznamenány v [36]. Předpokládáme-li působení malého pole v piezoelektrických látkách, pak současný významný matematický příspěvek k popisu třídimensionálních rovnic nezatížené piezoelektrické látky využívá předpokládané výsledky presentované v [11] a [39].

Přesných výsledků třídimensionálního problému bylo dosaženo v [37] pouze za předpokladu nekonečné desky a prostorových proměnných. Příspěvky řešící piezoelektrické desky v limitovaných rozměrech jsou relativně neobvyklé. Nedávno byl presentován příspěvek [20] popisující přesné analýzy ohraničených piezoelektrických látek.

Kromě nelineárních efektů piezoelektrických látek je zde druhý řád vlivů jako jsou rezonátory se zachycenou energií. Tento vliv by měl být zvažován při zkoumání nebo tvorbě piezoelektrických zařízení. Různorodost zachycené energie elastických vlnových jevů a vibrací a jejich aplikace na různá piezoelektrická zařízení jako jsou pásové rezonátory, monolitické filtry, piezoelektrické přenašeče, vibrační gyroskopy a SAW zařízení jsou popsány v [38]. Teoretické zacházení s efektem zachycené energie bylo pro tloušťkové střižné křemenné rezonátory popsáno a ukázáno v [42]. Nelineární vlastnosti tloušťkové střižných kmitů křemenných rezonátorů byly studovány v [21], [22], [44] a [23].

V poslední době byla věnována velká pozornost piezoelektrickým krystalům s velkým koeficientem elektromechanické vazby. Představiteli této skupiny krystalů jsou především křemenné homeotypy krystalů jako je berlinit, langasit či langatit a dále také $GaPO_4$. Průměrně dvojnásobná velikosti koeficientu elektromechanické vazby k_{26} spojená s rezonátory kmitajícími tloušťkově střižnými módy kmitů dovolují rozšířit vzdálenosti mezi sériovým a paralelním rezonančním kmitočtem. Takovéto typy rezonátorů jsou vhodné pro frekvenční rozsah od 1 do 100 MHz. Velikost koeficientu elektromechanické vazby také zvyšuje rozdíl teplotní závislosti rezonanční frekvence pro základní a harmonické rezonanční frekvence rezonátorů kmitající tloušťkově střižnými módy kmitů. Protože krystaly $GaPO_4$ mají stejnou symetrii jako křemen (SiO_2), rezonátory vyrobené z tohoto materiálu s rotací Y-řezů kmitající tloušťkově střižnými módy kmitů mohou být studovány stejnými metodami jako obdobné rezonátory z křemene. Toto je důležitá výhoda piezoelektrického jednoduchého krystalu. Experimentální studie ukazují že nelineární efekty jako jsou intermodulace nebo amplitudo-frekvenční efekt mohou být použity pro zjištění materiálových konstant vyšších řádů i pro krystaly vyrobené z $GaPO_4$.

Tato práce se věnuje popisu vlivu vybraných parametrů okolního prostředí na rezonanční kmitočet křemenných destiček rezonátorů a možnosti využití těchto vlivů k dalšímu popisu materiálových vlastností piezoelektrických látek

2. Vlastnosti piezoelektrických látek

Jak již bylo zmíněno dříve, piezoelektrický jev byl poprvé popsán a pozorován bratry Curieovými v roce 1880.

Vlivem mechanického napětí nebo deformace vzniká v krystalu elektrická polarizace. Tento jev se nazývá piezoelektrický efekt. Inverzní piezoelektrický efekt se projevuje mechanickou deformací vyvolanou přiloženým elektrickým polem. Piezoelektrický jev se nevyskytuje ve strukturách se středem souměrnosti proto, že polarizace je charakterizovaná vektorem, který není středově souměrný. Dále se tento efekt nevyskytuje u látek s vysokou souměrností kubické soustavy jak je ukázáno v [39].

Piezoelektrických látek je v přírodě velké množství, ne všechny se však dají použít v praktickém životě. Pro takové uplatnění jsou kladeny nároky jako: vykazovat malé ztráty vnitřním třením při kmitání, mít vysokou časovou a teplotní stabilitu materiálových konstant, krystalické tj. nejčastěji používané látky musí mít výrazné piezoelektrické vlastnosti, přírodní monokrystaly musí být s bezdefektními částmi nebo musí být uměle vyrobitelné. Takovýmto požadavkům vyhovují nejvíce krystaly bez středu souměrnosti, kde mezi nejznámější přírodní a uměle pěstované piezoelektrické materiály patří křemen, turmalín a Seignetteova sůl, dále polarizovaná piezoelektrická keramika, dloužené a polarizované polymery a některé biologické látky.

2.1 Dielektrické a piezoelektrické vlastnosti krystalů

Pokud dielektrikum vystavíme působení elektrického pole, dojde k jeho polarizaci. Z makroskopického hlediska platí mezi intenzitou elektrického pole E , elektrickým posunutím D a polarizací P vztah

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} . \quad (2.1)$$

Pokud vztah mezi elektrickým posunutím a intenzitou elektrického pole vyjádříme ve složkovém tvaru

$$D_i = \epsilon_{ij} E_j , \quad (2.2)$$

můžeme složky polarizace vyjádřit takto

$$P_i = \chi_{ij} \epsilon_0 E_j , \quad (2.3)$$

kde

$$\epsilon_{ij} = (1 + \chi_{ij}) \epsilon_0 . \quad (2.4)$$

Symbol ϵ_{ij} označuje složky tenzoru permitivity (ϵ_{ij} je dáno součinem relativní permitivity $\epsilon_{ij}^{(r)}$ a permitivity vakua ϵ_0), symbol χ_{ij} označuje složky tenzoru susceptibility a ϵ_0 vyjadřuje permitivitu vakua, kde $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi 10^9} \text{ F/m}$.

Také elastické napětí, které působí na krystal a vyvolává deformaci krystalu, způsobuje v piezoelektrickém materiálu polarizaci. Tato polarizace je vyvolána přímým piezoelektrickým jevem. Elastické napětí T je tenzor druhého řádu. Polarizace P je na základě symetrie krystalu a povahy vnější příčiny vektorové povahy. Obě veličiny pak určují vlastnosti výsledného piezoelektrického efektu, který je popsán tenzorem třetího řádu. Tento tenzor se nazývá tenzor piezoelektrických koeficientů d_{ijk} a jeho složky určují závislost složek elastického napětí a polarizace.

$$P_j = \epsilon_0 d_{ijk} T_{ij} \text{ pro } i, j, k = 1, 2, 3 \quad (2.5)$$

Pokud použijeme pro vyjádření velikosti polarizace tenzor deformace S , který je stejně jako tenzor napětí tenzorem druhého řádu, pak získáme vztah

$$P_j = \varepsilon_0 e_{ijk} S_{ij} \quad \text{pro } i, j, k = 1, 2, 3 \quad (2.6)$$

Symbolem e_{ijk} je označen piezoelektrický modul a jeho složky určují závislost složek tenzoru deformace a polarizace.

Vedle piezoelektrického modulu e_{ijk} a piezoelektrického koeficientu d_{ijk} existují ještě další piezoelektrické konstanty. Piezoelektrický koeficient g_{ijk} a piezoelektrický modul h_{ijk} . Uvedené piezoelektrické konstanty jsou definovány buď pro děje isotermické (konstantní teplota) nebo adiabatické (konstantní entropie). Piezoelektrické konstanty jsou složkami tenzoru třetího řádu. Při uvážení symetrie piezoelektrických konstant v indexech j a k má např. matice piezoelektrických modulů e_{ijk} ve zkráceném indexovém označení tvar

$$\begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} & e_{15} & e_{16} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & e_{24} & e_{25} & e_{26} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & e_{34} & e_{35} & e_{36} \end{vmatrix}$$

Piezoelektrické konstanty vyjadřují vztah mezi elastickými a elektrickými veličinami takto

$$\begin{aligned} d_{i\lambda} &= \frac{\partial S_\lambda}{\partial E_i} = \frac{\partial D_i}{\partial T_\lambda} ; \quad g_{i\lambda} = \frac{\partial S_\lambda}{\partial D_i} = -\frac{\partial E_i}{\partial T_\lambda} \\ e_{i\lambda} &= -\frac{\partial T_\lambda}{\partial E_i} = \frac{\partial D_i}{\partial S_\lambda} ; \quad h_{i\lambda} = -\frac{\partial T_\lambda}{\partial D_i} = -\frac{\partial E_i}{\partial S_\lambda} . \end{aligned} \quad (2.7)$$

2.2 Elastické vlastnosti krystalů

Na každou elementární část uvnitř deformovaného tělesa působí obecně dva druhy sil:

- síly objemové
- síly plošné.

Objemové síly jsou úměrné hmotě elementu a za jejich působiště můžeme zvolit jeho libovolný bod. Tyto síly jsou pak pro elementární část i pro celé těleso silami vnějšími.

Plošné síly působí na povrch uvažované elementární části a jsou úměrné ploše, na kterou působí. Jsou to síly, kterými působí na zvolenou elementární část ostatní části elastického tělesa. Pro elementární část jsou sice silami vnějšími, ale z hlediska celého tělesa jsou tyto síly silami vnitřními. Plošné síly, které působí na jednotkovou plochu budeme dále nazývat elastickým napětím. Kladný smysl mu přisuzujeme ve směru kladné normály

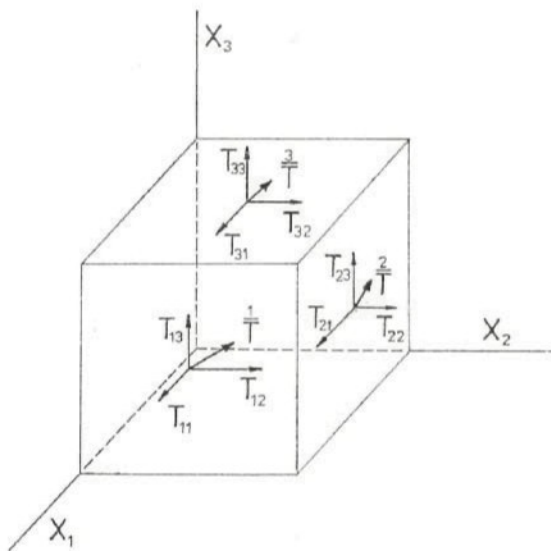
plošky elementární části tělesa. Elastické napětí budeme vyjadřovat jako vektor a označovat symbolem T . Průmět vektoru napětí T do směru kladné normály budeme nazývat normálovým napětím, průmět do tečné roviny uvažované plošky elementární částice pak tečným napětím.

K úplnému určení stavu napětí v okolí libovolně zvoleného bodu stačí znát vektor elastických napětí působících ve třech vzájemně kolmých rovinách, které prochází zvoleným bodem. Roviny se nejčastěji volí shodně s ortogonálním systémem os X_i , kde $i = 1, 2, 3$. Vektory takto získané označíme $\mathbf{T}^i$. Každý z těchto vektorů je určen třemi složkami ve směru os souřadného systému následovně:

$$\mathbf{T}^i = T_{i1}\mathbf{n}_1 + T_{i2}\mathbf{n}_2 + T_{i3}\mathbf{n}_3 \quad \text{pro } i = 1, 2, 3,$$

kde $\mathbf{n}_j$ jsou jednotkové vektory rovnoběžné s osami X_j .

Jak je z rovnice patrné, je napjatost v okolí zvoleného bodu popsána devíti složkami T_{ij} tenzoru napětí (jak se dá ukázat z jejich chování při transformaci souřadnic např. v [2]). Na obr. 2.1 jsou zobrazena napětí působící na elementární krychli.



Obrázek 2.1: Složky elastických napětí působících na elementární krychli [39]

Tenzor napětí je tenzorem druhého řádu. Pro nepolární prostředí je tenzor napětí symetrický a platí

$$T_{ij} = T_{ji}$$

Napjatost v okolí zvoleného bodu tělesa je pak určena šesti nezávislými složkami T_{11} , T_{12} , T_{13} , T_{22} , T_{23} a T_{33} .

Elastické napětí, které působí na těleso, vyvolává jeho deformaci. Při deformaci dochází k přesunu elementární části tělesa. Pro názornost si zvolíme dva velmi blízké body P a Q, které nám určují úsečku $d\mathbf{x}$ (viz obrázek). Souřadnice bodu P označíme x_i a souřadnice bodu Q pak jsou $x_i + dx_i$. Deformací se bod P posune do polohy P' o souřadnicích ξ_i a bod Q zaujme polohu Q' o souřadnicích $\xi_i + d\xi_i$. Tuto změnu poloh dvou bodů si můžeme rozdělit na čisté posunutí celé původní úsečky, na její pootočení a na její vlastní deformaci. Posunutí celé úsečky pak bude charakterizováno vektorem $\mathbf{u} = \overline{PP'}$. Zbývající dva děje, pootočení celé úsečky a její deformace, se pak již podílí jen na relativní změně polohy bodu Q' vzhledem k bodu P'. Pro souřadnice bodu Q' pak tedy platí

$$\xi_i + d\xi_i = x_i + dx_i + \sum_j \frac{\partial u_j}{\partial x_j} dx_j$$

Poslední člen této rovnice $\sum_j \frac{\partial u_j}{\partial x_j} dx_j$ představuje pootočení úsečky a její deformaci. Podíl obou dějů je vhodné dále rozlišit. Výrazy $\frac{\partial u_j}{\partial x_j}$ jsou složkami tenzoru druhého řádu. Jak je ukázáno v [2], každý tenzor druhého řádu lze pouze jedním způsobem rozložit na část symetrickou a antisymetrickou. Symetrická část pak v tomto případě popisuje deformaci úsečky a její tenzor si označíme S_{ij} , antisymetrická část pak její pootočení, které označíme ω_{ij} . Pro tenzor deformace pak můžeme psát, že

$$S_{ij} = S_{ji} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

Tenzor deformace má stejně jako tenzor napětí šest nezávislých složek $S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{22}, S_{23}$ a S_{33} , které mají jednoduchý fyzikální význam. Složky se stejnými indexy značí přímo relativní prodloužení přímkových elementů, které do deformace byly rovnoběžné s osami souřadnic. Pro vysvětlení významu složek se smíšenými indexy se zavádí pojem úhel střihu. Rozumíme jím úhel, o který se deformací změní pravý úhel přímkových elementů, z nichž jeden byl do deformace rovnoběžný s osou x_i s druhý s osou x_j .

Jak již bylo zmíněno, napětí a deformace spolu vzájemně souvisí. Jejich vzájemný vztah je dán elastickými vlastnostmi uvažovaného prostředí, v našem případě tedy závisí na fyzikálních vlastnostech elastického tělesa i na vnějších podmínkách, ve kterých se těleso právě nachází. Pokud jsou deformace malé, můžeme podle Hookova zákona o deformaci předpokládat, že deformace je úměrná působícímu napětí. Každou složku tenzoru napětí tedy můžeme vyjádřit pomocí lineární funkce tenzoru deformace

$$T_{ij} = c_{ijkl} S_{kl}. \quad (2.8)$$

Uvedenou rovnici (2.8) nazýváme zobecněným Hookovým zákonem.

Veličiny c_{ijkl} ($i, j, k, l = 1, 2, 3$) jsou složkami tenzoru čtvrtého řádu a nazýváme je elastickými moduly. Z vlastností uvedených výše pro ně plyne, že jsou symetrické jak v indexech

i a j , tak v indexech k a l a proto platí, že

$$c_{ijkl} = c_{ijlk} = c_{jikl} = c_{jilk}. \quad (2.9)$$

Jak je uvedeno např. v [27], platí i rovnost elastických modulů při záměně první dvojice indexů s druhou, takže je možno psát

$$c_{ijkl} = c_{klij}.$$

Tím se počet nezávislých elastických modulů redukuje na 21 a můžeme je schematicky zapsat ve tvaru poloviny symetrické matice

$$\begin{array}{cccccc} c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & c_{1123} & c_{1131} & c_{1112} \\ & c_{2222} & c_{2233} & c_{2223} & c_{2231} & c_{2212} \\ & & c_{3333} & c_{3323} & c_{3331} & c_{3312} \\ & & & c_{2323} & c_{2331} & c_{2312} \\ & & & & c_{3131} & c_{3112} \\ & & & & & c_{1212} \end{array}$$

Vztah mezi elastickým napětím a deformací lze také vyjádřit rovnicí

$$S_{kl} = s_{klij} T_{ij} , \quad (2.10)$$

kde s_{klij} jsou složky tenzoru elastických koeficientů, který je stejně jako tenzor elastických modulů tenzorem čtvrtého řádu.

Mezi složkami tenzoru elastických koeficientů a modulů platí vztahy

$$s_{ijkl} = \frac{\Delta_{ijkl}^c}{\Delta^c} , \quad c_{ijkl} = \frac{\Delta_{ijkl}^s}{\Delta^s} , \quad (2.11)$$

kde Δ^c a Δ^s jsou determinanty elastických modulů a koeficientů a Δ_{ijkl}^c a Δ_{ijkl}^s jsou doplňky příslušných matic.

Protože doposud uváděné indexové značení je pro výpočty značně nevhodné (při opisech složitých indexů dochází často k chybám). V praxi se vzhledem k symetrii tenzorů zpravidla používá jednodušší zkrácené indexování, které vychází ze sdružení dvojic indexů podle pravidla

$$\begin{aligned} \text{pro } i = j \text{ je } \lambda = i = j , \\ \text{pro } i \neq j \text{ je } \lambda = 9 - i - j \end{aligned} \quad (2.12)$$

a nové indexy nabývají hodnot od 1 do 6.

Pro přiřazení vzájemně si dopovídajících složek pro tenzor napětí a tenzor elastických modulů platí jednoduché pravidlo

$$T_{ij} = T_\lambda \quad \text{a} \quad c_{ijkl} = c_{\lambda\mu} . \quad (2.13)$$

Poněkud složitější je postup u složek tenzoru deformace a elastických koeficientů. Pro ně je zvykem (jak je např. ukázáno v [18]) složky se zkráceným indexovým značením definovat takto

a) V případě složek tenzoru deformace

$$\begin{aligned} S_\lambda = S_{ij} \text{ pro } i = j , \quad \lambda = 1, 2, 3 , \\ S_\lambda = 2S_{ij} \text{ pro } i \neq j , \quad \lambda = 4, 5, 6 \end{aligned} \quad (2.14)$$

b) V případě složek tenzoru elastických koeficientů

$$\begin{aligned} s_{\lambda\mu} = s_{ijkl} \text{ pro } i = j \text{ a } k = l , \\ s_{\lambda\mu} = 2s_{ijkl} \text{ pro } i \neq j \text{ nebo } k \neq l , \\ s_{\lambda\mu} = 4s_{ijkl} \text{ pro } i \neq j \text{ a } k \neq l \end{aligned} \quad (2.15)$$

V důsledku zjednodušení indexace (rovnice 2.14) se modifikují vztahy pro vyjádření deformace pomocí posunutí následovně

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} , \quad S_2 = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} , \quad S_3 = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} , \\ S_4 &= \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} , \quad S_5 = \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} , \quad S_6 = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Zobecněný Hookovův zákon pak můžeme ve zkráceném indexovém značení psát následujícím způsobem

$$T_\lambda = c_{\lambda\mu} S_\mu \text{ pro } \lambda, \mu = 1 \text{ až } 6 \quad (2.17)$$

$$S_\mu = s_{\mu\lambda} T_\lambda \text{ pro } \lambda, \mu = 1 \text{ až } 6 \quad (2.18)$$

a mezi složkami elastických koeficientů a modulů platí vztah

$$s_{\lambda\tau} c_{\mu\tau} = \delta_{\lambda\mu} \text{ pro } \lambda, \mu, \tau = 1 \text{ až } 6 , \quad (2.19)$$

kde $\delta_{\lambda\mu}$ je Kroneckerův symbol (Kroneckerovo δ).

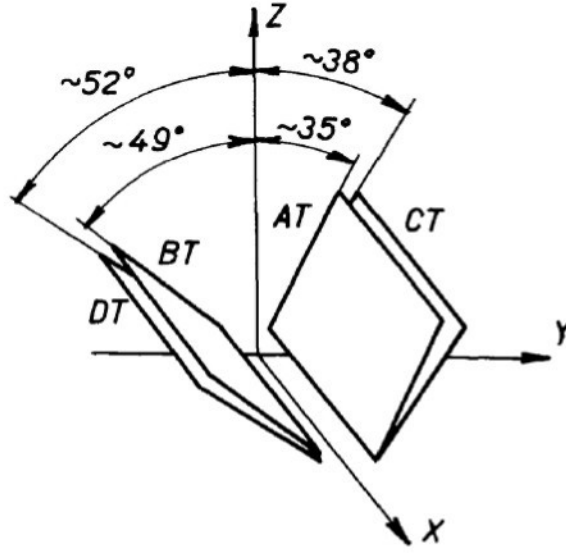
2.2.1 Efektivní hodnoty tenzorových vlastností krystalů

Až dosud jsme se zabývali pouze základními maticemi tenzorů vlastností piezoelektrických krystalických látek vázanými na ortogonální systém os. Pokud v praxi používáme libovolný piezoelektrický krystalický materiál, používáme především různé řezy těchto materiálů, které mají vůči základnímu ortogonálnímu systému os obecnou polohu. Na obr. 2.2 jsou ukázány nejstarší používané řezy křemenných destiček - AT , BT , CT , DT , o kterých jsme se zde již zmínili v kapitole věnované vývoji výzkumu v oblasti piezoelektřiny.

Zvolme v prostoru pravoúhlou soustavu XYZ s počátkem O . Souřadnice x, y, z určitého řezu se otočením změni na x', y', z' . Celou transformaci lze popsat pomocí lineárních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z , \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z , \\ z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z , \end{aligned} \quad (2.20)$$

kde a_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) jsou směrové kosiny úhlů mezi novými a starými osami, index i se vztahuje k novým osám a index j ke starým. Obr. 2.2 znázorňuje otočení souřadného systému os o úhel Ψ kolem osy X , která se u piezoelektrických látek nazývá také osou elektrickou. Otočení proti směru hodinových ručiček se zapisuje kladným úhlem. Otočení po směru hodinových ručiček se popisuje úhlem záporným.



Obrázek 2.2: Orientace os nejčastěji používaných křemenných rezonátorů

Tabulka 2.1: Směrové kosiny pro otočení kolem jedné ortogonální osy

Osa otáčení je rovnoběžná s osou	X			Y			Z		
	x	y	z	x	y	z	x	y	z
x'	1	0	0	$\cos \Phi$	0	$\sin \Phi$	$\cos \Phi$	$-\sin \Phi$	0
y'	0	$\cos \Phi$	$-\sin \Phi$	0	1	0	$\sin \Phi$	$\cos \Phi$	0
z'	0	$\sin \Phi$	$\cos \Phi$	$-\sin \Phi$	0	$\cos \Phi$	0	0	1

V tabulce 2.1 jsou uvedeny obecné hodnoty směrových kosinů a_{ij} pro otočení kolem jedné základní ortogonální osy X , Y nebo Z .

V tabulkách materiálových vlastností jsou vždy uvedeny základní matice materiálových tenzorů vztahené k základnímu ortogonálnímu systému os.

Pokud je chceme použít pro konkrétní piezoelektrický řez, musíme tyto matice přepočítat na matice efektivních hodnot dle úhlu řezu materiálu, tedy do nového systému souřadnic, který je oproti základnímu ortogonálnímu systému v obecné poloze. Pro výpočet se používají matice v základním tenzorovém tvaru a nelze pro něj použít zkrácené indexování. Hodnoty složek tenzoru základní materiálové matice se však nemění. Výpočet se provádí podle následujícího obecného vztahu transformačních rovnic

$$\tilde{A}_{i\dots p} = A_{a\dots h} \sum_{a\dots h} \alpha_{ia} \dots \alpha_{ph}, \quad (2.21)$$

kde $\tilde{A}_{i\dots p}$ je efektivní hodnota složky tenzoru, $A_{a\dots h}$ je složka základní matice tenzoru a

$\alpha_{ia} \dots \alpha_{ph}$ jsou směrové kosiny úhlu natočení, které jsou pro natočení kolem jedné ortogonální osy X , Y a Z zobrazeny v tabulce 2.1. V této práci se budeme zabývat pouze řezy pootočenými kolem ortogonální osy X .

2.3 Lineární piezoelektrické stavové rovnice

K souhrnnému popisu elastických, piezoelektrických a dielektrických vlastností piezoelektrických látek lze při zanedbání tepelných jevů zvolit jednu dvojici ze čtyř nezávislých proměnných T_λ , S_λ , E_i , D_i a zbývající dvě proměnné vyjádřit pomocí piezoelektrických stavových rovnic

$$\begin{aligned} T_\lambda &= \sum_\mu c_{\lambda\mu}^E S_\mu + \sum_i e_{i\lambda} E_i ; \quad T_\lambda = \sum_\mu c_{\lambda\mu}^D S_\mu + \sum_i h_{i\lambda} D_i ; \\ S_\lambda &= \sum_\mu s_{\lambda\mu}^E T_\mu + \sum_i d_{i\lambda} E_i ; \quad S_\lambda = \sum_\mu s_{\lambda\mu}^D T_\mu + \sum_i g_{i\lambda} D_i ; \\ D_i &= \sum_\mu e_{i\mu} S_\mu + \sum_j \epsilon_{ij}^S E_j ; \quad D_i = \sum_\mu d_{i\mu} T_\mu + \sum_j \epsilon_{ij}^T E_j ; \\ E_i &= - \sum_\mu h_{i\mu} S_\mu + \sum_j \beta_{ij}^S D_j ; \quad E_i = - \sum_\mu g_{i\mu} T_\mu + \sum_j \beta_{ij}^T D_j . \end{aligned} \quad (2.22)$$

kde β_{ij} jsou složky symetrického tenzoru impermeability dané vztahem

$$\beta_{ij} = \frac{\partial E_j}{\partial D_j} \quad (2.23)$$

a vázané se složkami permitivity ϵ_{ij} vztahem

$$\beta_{ij} = \frac{\Delta_{ij}^\epsilon}{\Delta^\epsilon}, \quad (2.24)$$

kde

$$\Delta^\epsilon = \begin{vmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{vmatrix} \quad (2.25)$$

a Δ_{ij}^ϵ je doplněk složky permitivity ϵ_{ij} v determinantu daného vztahem 2.25.

V uvedených piezoelektrických stavových rovnicích jsou symboly $c_{\lambda\mu}^E$ a $s_{\lambda\mu}^E$ označeny elastické moduly a koeficienty změřené při konstantní intenzitě elektrického pole E a symboly $c_{\lambda\mu}^D$ a $s_{\lambda\mu}^D$ označují elastické moduly a koeficienty změřené při konstantním elektrickém posunutí D . Podobně ϵ_{ij}^S a ϵ_{ij}^T označují složky permitivity změřené při konstantní deformaci S respektive konstantním elastickým napětí T a symboly β_{ij}^S a β_{ij}^T označují složky impermeability změřené při konstantní deformaci S , respektive konstantním elastickým napětí T .

2.4 Nelineární elektroelastické rovnice

Lineární teorie piezoelektriny uvažovaná v předchozích částech je vhodná pro popis šíření akustických vln s malou amplitudou a pro řešení kmitů s malou amplitudou těles, na která nepůsobí elastické předpětí nebo která nejsou vystavena působení silného elektrického pole. Pokud není tento předpoklad splněn, je nutno výsledky výpočtu korigovat zavedením různých korekčních faktorů nebo při výpočtu vycházet z nelineární teorie, která musí být přizpůsobena počátečním podmínkám.

Při popisu lineární teorie bylo předpokládáno, že elastické deformace jsou velmi malé a byl pro ně zaveden symbol S_{ij} . Při formulaci nelineární teorie použijeme konečnou deformaci, kterou označíme η_{ij} . Vnitřní energii v konečné objemové jednotce uvažované látky pak můžeme vyjádřit obdobně, jak tomu bylo učiněno v 2.21. Elastické moduly definované vztahem

$$c_{ijkl...pq} = \left(\frac{\partial^n U}{\partial \eta_{ij} \partial \eta_{kl} \dots \partial \eta_{pq}} \right)_{D, \sigma = \text{konst}} \quad (2.26)$$

nazýváme elastickými moduly n -tého řádu, kde $n \geq 2$.

Podobně by bylo možno i pomocí entropie a složek tenzoru elastických napětí definovat elastické koeficienty n -tého řádu a dále by bylo možno definovat i další dielektrické, piezoelektrické a pyroelektrické konstanty. K nim by přibýly další koeficienty jako elektrooptický, elektrostrikční atd. Všechny uvedené koeficienty nazveme koeficienty druhého a vyšších řádů.

Nelineární elektroelastické rovnice byly odvozeny Tierstenem v [29]. Při odvození uvažil nejen materiálové, ale i geometrické nelinearity. Pro popis elastických a elektrických vlastností využil jednak celkového Piolova - Kirchhoffova tenzoru elastických napětí K_{Lj} daného součtem elastických napětí F_{Lj} a Maxwellova - Piolova - Kirchhoffova tenzoru M_{Lj}

$$K_{Lj} = F_{Lj} + M_{Lj}$$

a také vektoru elektrického posunutí D_L

$$D_L = \epsilon_0 E_L + P_L,$$

kde velká písmena v indexech uvedených vztahů odpovídají prostorovým souřadnicím, malá písmena materiálovým souřadnicím.

Pro veličiny F_{Lj} , M_{Lj} , E_L a P_L odvodil Tiersten při uvažování lineárních, kvadratických a kubických členů následující vztahy

$$\begin{aligned}
F_{Lj} = & \delta_{jM} [c_{LMAB}^{(2)}(u_{A,B} + \frac{1}{2}u_{K,A}u_{K,B}) + e_{ALM}\Phi_{,A} + c_{LKAB}^{(2)}u_{M,K}u_{A,B} + \\
& + \frac{1}{2}c_{LKABCD}^{(3)}u_{A,B}u_{C,D} + e_{ALK}u_{M,K}\Phi_{,A} - d_{ABCLM}^{(1)}u_{B,C}\Phi_{,A} - \frac{1}{2}b_{ABLB}\Phi_{,A}\Phi_{,B} + \\
& + \frac{1}{2}c_{LRAB}^{(2)}u_{M,R}u_{K,A}u_{K,B} + \frac{1}{2}c_{LKABCD}^{(3)}u_{M,K}u_{A,B}u_{C,D} + c_{LMABCD}^{(3)}u_{A,B}u_{K,C}u_{K,B} + \\
& + \frac{1}{6}c_{LMABCDEF}u_{A,B}u_{C,D}u_{E,F} - d_{ABCLK}u_{B,C}u_{M,K}\Phi_{,A} - \frac{1}{2}d_{ABCLM}u_{K,B}u_{K,C}\Phi_{,A} - \\
& - \frac{1}{2}d_{ABCDELM}u_{B,C}u_{D,E}\Phi_{,A} - \frac{1}{2}b_{ABLK}u_{M,K}\Phi_{,A}\Phi_{,B} + \frac{1}{6}a_{ABCDLM}u_{C,D}\Phi_{,A}\Phi_{,B} + \\
& + \frac{1}{6}d_{ABCLM}\Phi_{,A}\Phi_{,B}\Phi_{,C}],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{Lj} = & \epsilon_0 \delta_{jM} [\Phi_{,L}\Phi_{,M} - \frac{1}{2}\Phi_{,K}\Phi_{,K}\delta_{LM} - \Phi_{,K}\Phi_{,M}u_{L,K} + \\
& + \Phi_{,L}\Phi_{,M}u_{K,K} - \Phi_{,L}\Phi_{,K}u_{K,M} + \Phi_{,K}\Phi_{,R}u_{R,K}\delta_{LM} + \frac{1}{2}\Phi_{,K}\Phi_{,K}u_{L,M} - \\
& - \Phi_{,R}\Phi_{,R}u_{K,K}\delta_{LM}],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_L = & \epsilon_0 [-\Phi_{,L} + \Phi_{,K}u_{L,K} - \Phi_{,L}u_{K,K} - \Phi_{,M}u_{L,K}u_{K,M} + \\
& + \Phi_{,K}u_{M,M}u_{L,K} - \frac{1}{2}\Phi_{,L}u_{K,K}u_{M,M} + \frac{1}{2}\Phi_{,L}u_{K,M}u_{M,K} - \\
& - \Phi_{,M}u_{L,K}u_{M,K} + \Phi_{,M}u_{M,L}u_{K,K} - \Phi_{,M}u_{M,K}u_{K,L}], \tag{2.27}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_L = & e_{LBC}(u_{B,C} + \frac{1}{2}u_{K,B}u_{K,C}) - \chi_{AL}\Phi_{,A} - d_{LB CDE}(u_{B,C}u_{D,E} + u_{B,C}u_{K,D}u_{K,E}) - \\
& - b_{ABCD}(u_{C,D}\Phi_{,A} + \frac{1}{2}u_{K,C}u_{K,D}\Phi_{,A}) + \frac{1}{2}\chi_{ABL}\Phi_{,A}\Phi_{,B} - \\
& - \frac{1}{6}d_{LB CDEFG}u_{B,C}u_{D,E}u_{F,G} + \frac{1}{2}a_{ALCDEF}u_{C,D}u_{E,F}\Phi_{,A} + \\
& + \frac{1}{2}d_{ABLDE}u_{D,E}\Phi_{,A}\Phi_{,B} - \frac{1}{6}\chi_{ABCL}\Phi_{,A}\Phi_{,B}\Phi_{,C},
\end{aligned}$$

kde ϕ vyjadřuje elektrický potenciál.

Ve vztahu (2.27) vyjadřuje c_{ABCD} , c_{ABCDEF} a $c_{ABCDEF GH}$ elastické moduly druhého, třetího a čtvrtého řádu, e_{ABC} piezoelektrický modul, d_{ABC} , d_{ABCDE} a $d_{ABCDEF G}$ liché elektroelastické koeficienty prvního, druhého a třetího řádu, a_{ABCDEF} sudý elektroelastický koeficient prvního řádu, χ_{AB} , χ_{ABC} a χ_{ABCD} složky permitivity druhého, třetího a čtvrtého řádu a b_{ABCD} elektroetrický koeficient. Symboly v indexu uvedenými za čárkou

jsou označeny derivace příslušné veličiny podle souřadnice x_i , kde i odpovídá indexu uvedenému za čárkou.

Teorie nelinearity vede ke zjištění celkové deformace η_{ij} . Elastická tuhost vyššího řádu může být získána z vnitřní energie U . Elastické koeficienty n -tého řádu stejně tak jako koeficienty vyšších řádů charakterizující dielektrické, piezoelektrické a pyroelektrické vlastnosti křemene mohou být získány z různých termodynamických potenciálů. Elektrooptické, elektrostriční a další koeficienty mohou být určeny stejnými metodami. Termodynamický tlak t_{LM} , termodynamický elektrický posun D_N a termodynamická intenzita elektrického pole E_N mohou být brány jako základ pro studium nelineárních elektroelastických vlastností piezoelektrických hmot.

Při adiabatickém procesu mohou být komponenty tensoru termodynamického tlaku a komponenty elektrického posunutí D_N vyjádřeny tak jak bylo popsáno v [39]. Pohybové tlakové rovnice a elektroelastická rovnice pro elektroelastické materiály s malou piezoelektrickou vazbou mohou být popsány ve tvaru

$$\hat{K}_{LM,L} = \rho^0 \ddot{u}_M \quad (2.28)$$

$$D_{L,L} = 0 \quad (2.29)$$

Kde symboly ρ^0 , $\hat{u}_M$, $\hat{K}_{LM}$ a D_L , jsou postupně hustota, mechanické posunutí a Piola-Kirchhoffův tlakový tensor a vektor elektrického posunutí.

Při sledování malých piezoelektrických vazeb v křemenu jsme přidali pouze nelineární elastické podmínky. Elektrické a elektroelastické podmínky bereme jako lineární. Druhá skupina nelineárních problémů ukazuje na prezentaci malého amplitudového vlnění ve středu předpjetí. Teoretická analýza je zjednodušena skutečností, že vlnění nemá vliv na statickou deformaci. Obvykle se zabýváme pouze změnou charakteristiky vlnění v důsledku předpjetí.

3. Metody pro určení parametrů a vlastností piezoelektrických rezonátorů

V této kapitole se budeme zabývat především obecným popisem piezoelektrických krystalických rezonátorů a podrobně se seznámíme s náhradním obvodem piezoelektrického rezonátoru a s určením jeho elektrických parametrů. Bude také popsáno, jak lze určit rezonanční frekvenci rezonátoru a parametry náhradního elektrického obvodu ze známých rozměrů piezoelektrického výbrusu a hodnot piezoelektrických, elastických a dielektrických konstant (případně modulů) a hustoty použitého piezoelektrického materiálu.

Mimo teoretického výpočtu lze frekvenci i hodnoty náhradního elektrického obvodu stanovit experimentálním měřením. Proto se také budeme věnovat měření elektrických parametrů piezoelektrického rezonátoru. Pro určení elektrických parametrů se používají základní metody měření pro stanovení velikosti pasivních elektrických součástí a dalších parametrů elektrických obvodů při současném využití tenzorových vlastností piezoelektrického rezonátoru, které byly popsány v předchozí kapitole.

3.1 Nejistoty měření a výpočtu

Dříve, než se budeme věnovat jednotlivým metodám měření a stanovení hodnot veličin náhradního elektrického obvodu rezonátoru, pozastavíme se ještě u přesnosti takto určených hodnot tj. u určení nejistoty zjištěných hodnot obecně a dále se podíváme, jak se tyto obecné metody použijí pro naše konkrétní měření a stanovení hodnot určovaných veličin. Také pro nastavené hodnoty (např. frekvence generátoru) je výrobcem zařízení dána nejistota těchto hodnot.

Vyjádření nejistoty výsledku měření podle mezinárodních norem nám umožňuje korektně porovnat výsledky měření dosažené v různých laboratořích či zkušebnách a případně i různými metodami, popř. porovnat výsledky s referenčními hodnotami uvedenými ve specifikacích či normách. Posouzením jednotlivých složek nejistot je možno také určit, kterým vlivům měření je třeba věnovat zvýšenou pozornost, potřebujeme-li zlepšit stávající postupy měření. Celková nejistota se tedy skládá z několika dílčích složek (nejistot). Ke stanovení jejich velikosti je nejprve nutno určit o jaký typ veličiny případně měření se jedná:

- materiálové konstanty - hodnota veličiny je známá z tabulek hodnot
- přímá měření - hledaná hodnota je určena přímo měřicím zařízením
- nepřímé měření - výsledná hodnota je určena výpočtem z jedné nebo více naměřených veličin a konstant.

Pro každý typ veličiny se nejistota určuje jiným způsobem.

3.1.1 Materiálové konstanty

Jak již bylo zmíněno v kapitole věnované materiálovým vlastnostem piezoelektrických látek, jsou tyto konstanty dány tenzorovými maticemi n - tého řádu a pro konkrétní piezoelektrický řez si musíme vždy určit efektivní hodnotu potřebného prvku transponované matice. V tabulkách uvedených např. v [39] nejsou k tenzorovým maticím materiálových konstant nebo modulů uvedeny nejistoty, se kterými byly tyto hodnoty stanoveny. Proto tyto hodnoty bereme jako konstanty tj. hodnoty bez nejistoty určení. Přesto si musíme být vědomi skutečnosti, že i stanovení těchto základních materiálových matic mělo svou nejistotu určení, protože neexistuje měření nebo stanovení jakékoliv hodnoty bez nejistoty použitého procesu určení.

Ve všech vztazích, kde jsou materiálové konstanty uvedeny, však pracujeme s efektivními hodnotami těchto materiálových konstant, které jsou již určeny výpočtem (viz. str.20) a všechny řezy piezoelektrických destiček jsou vyrobeny s určitou nejistotou, kterou určuje výrobce. Efektivní hodnoty všech materiálových konstant tedy spadají do kategorie nepřímých měření. Určení nejistoty nepřímého měření bude popsáno dále.

3.1.2 Přímá měření

Pro určení nejistoty přímých měření jsou k dispozici dvě metody:

- statistické zpracování naměřených údajů - nejistota typu A,
- jiné než statistické zpracování naměřených hodnot - nejistota typu B. Nejistota typu

A může být nulová, pokud počet opakování měření není dostatečný pro zavedení statistického zpracování dat. Nejistota typu B nikdy nulová není.

Z toho vylývá, že v některých případech zpracování jsou v nejistotě započítány oba tyto základní typy nejistot a pak mluvíme o kombinované nejistotě a při použití ještě statistického rozšíření o rozšířenou kombinovanou nejistotu. Pro výpočet kombinované rozšířené nejistoty byl podle [24] a [25] vytvořen postup v podobě vývojového diagramu, který je uveden v příloze A na str. 76. Dále budou popsány jednotlivé kroky tohoto výpočtu.

Nejistota typu A

Nejistota typu A má charakter náhodné chyby. Při zpracování nejistot typu A vycházíme ze statistické analýzy opakované série měření. Tato nejistota je způsobena kolísáním naměřených údajů a při počtu opakovaných měření menším než 10 je výpočet nejistoty typu A málo spolehlivý a nejistotu nelze touto metodou určit. To tedy znamená, že potřebujeme minimálně 10 opakování nezávislého měření při konstantních podmínkách měření, kdy $n \geq 10$. Naopak, pokud je počet opakování $n \geq 200$, výpočet nejistoty typu A již dále získává jen na robustnosti. Odhad výsledné hodnoty měření $\bar{x}$ pak bude dán hodnotou aritmetického průměru naměřených hodnot spočteného podle následujícího vztahu:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (3.1)$$

Nejistota typu A se zpravidla označuje $u_A(\bar{x})$ a určíme ji podle vztahu

$$u_A(\bar{x}) = s(\bar{x}) = \frac{(x_i)}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} \quad (3.2)$$

Nejistota typu A se nikdy nevyskytuje samostatně, vždy je součástí komplexní nejistoty, protože vliv zdrojů nejistoty typu B nelze zanedbat.

Nejistota typu B

Vyhodnocení standardních nejistot naměřené veličiny nejistotou typu B je založeno na jiných než statistických přístupech k analýze naměřených hodnot. Zde se jedná o systematické složky chyb. Touto metodou lze odhadnout i vliv náhodných chyb (např. při kalibraci využitím minulých měření). Tato nejistota se odhaduje na základě racionálního (logického) úsudku na základě všech dostupných informací.

Jako zdroje informací se nejčastěji používají:

- údaje výrobce měřicí techniky (manuály s tabulkami přesnosti měření atd.)
- zkušenosti z předchozích sérií měření
- zkušenosti a znalosti o vlastnostech a chování materiálů (roztavnost látek, teplotní závislost látek atd.)
- údaje z certifikátů, kalibračních listů atd,
- nejistoty referenčních údajů převzaté z různých pramenů

Nejistoty typu B jsou tedy vázány na známé, identifikovatelné a kvantifikovatelné zdroje. Rámcový postup při určování nejistot typu B je následující:

1. Vytipují se možné zdroje $Z_1, Z_2, \dots, Z_j$ nejistot.
2. Určí se nejistota vlivem každého zdroje buď převzetím z certifikátu, technické dokumentace, tabulek, technických norem atd., nebo její odhad podle dalších metod. Je třeba si dát pozor, jestli nám materiály, týkající se zdroje nejistoty, určují nejistotu tohoto zdroje (přímo $u_B(Z_j)$ nebo pouze chybu měření $\Delta(Z_j)$ nebo rozšířenou nejistotu $U_B(Z_j)$). Druhé dvě jmenované veličiny je nutno upravit způsobem, který bude uveden dále.
3. Určí se celková nejistota typu B.

Nyní se vrátíme k výše zmíněným typům stanovení nejistoty zdroje.

Nejčastěji nám tabulky měřicích zařízení udávají pouze přesnost tohoto měřicího zařízení, ze které určíme absolutní chybu měřicího zařízení $\Delta(Z_j)$, pak hodnotu nejistoty vypočteme ze vztahu

$$u_B(Z_j) = \frac{\Delta(Z_j)}{\Theta}, \quad (3.3)$$

kde Θ je parametr dle použitého rozdělení a nabývá hodnot uvedených v tabulce 3.1

Jednotlivá statistická rozdělení jsou podrobněji popsána např. v [25]

Tabulka 3.1: Hodnoty parametru Θ a k

Hodnota Θ , k	statistické rozdělení	Nejčastější použití
$\sqrt{3}$	rovnoměrné rozdělení	základní výstupní kontrola výrobce
$\sqrt{6}$	trojúhelníkové rozdělení	výstupní kontrola při vyspělé technologii výrobce
2	normální rozdělení při pravděpodobnosti $P = 95\%$	měření na přesných přístrojích v laboratořích
3	normální rozdělení při pravděpodobnosti $P = 99,73\%$	měření na měřidlech s velmi vysokou přesností (např. etalony)

Pokud nám certifikát výrobce zařízení definuje rozšířenou nejistotu zdroje $U_B(Z_j)$, je nutno znát použitý koeficient rozšíření k_r , pak ke stanovení nejistoty zdroje $u_B(Z_j)$ použijeme vztah

$$u_B(Z_j) = \frac{U_{B_j}(Z_j)}{k_r}. \quad (3.4)$$

Kombinovaná a rozšířená nejistota

Jak bylo zmíněno dříve, každé přímé měření má alespoň jeden zdroj nejistoty typu B. Pokud však je i nejistota typu A nenulová, je nutno stanovit kombinovanou nejistotu u , která je definována vztahem

$$u = \sqrt{u_A^2 + u_B^2}. \quad (3.5)$$

K naměřené hodnotě pak přiřazujeme rozšířenou nejistotu, která je dána vztahem

$$U = k_r u, \quad (3.6)$$

kde k_r je koeficient rozšíření, který je dán statistickou pravděpodobností výskytu celé nejistoty. Jeho hodnoty nabývají podle zvoleného pravděpodobnostního rozložení stejných hodnot, jako koeficient Θ při výpočtu nejistoty typu B uvedené v tab 3.1 na str. 29.

3.1.3 Nepřímá měření

Nejistoty naměřených veličin se přenáší při výpočtu přes vztahy na veličiny vypočtené [26]. Pokud veličinu určíme ze vztahu

$$y = f(x_i), \quad (3.7)$$

nejistota nekorelované veličiny se určí podle vztahu

$$u(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^m A_i^2 u^2(x_i)} \quad (3.8)$$

a pro koeficient A_i platí

$$A_i = \frac{\partial f(x_i)}{\partial x_i} \quad (3.9)$$

Nejistota korelované veličiny se určí podle vztahu

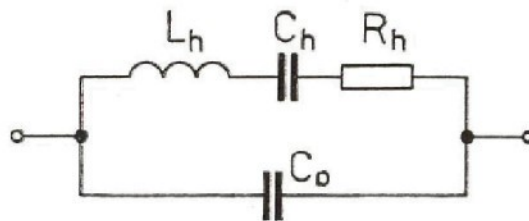
$$u(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^m A_i^2 u^2(x_i) + \sum_{i=2}^m \sum_{j<i}^{m-1} A_i A_j u(x_i, x_j)}, \quad (3.10)$$

kde $u(x_i, x_j)$ je kovariance mezi navzájem korelovanými odhady x_i, x_j , což mohou být jak dvě vzájemně závislé veličiny, tak i dvě hodnoty téže veličiny, mezi nimiž existuje jistá korelační vazba.

Pro naměřené a vypočtené hodnoty, které zde budou dále uvedeny, se nejistoty stanoví dle předchozích vztahů a u veličiny bude uveden jen konečný obecný vztah výpočtu nejistoty.

3.2 Náhradní elektrický obvod

Elektrické vlastnosti piezoelektrického rezonátoru lze vyjádřit nekonečným počtem paralelně spojených rezonančních elektrických obvodů, jak je uvedeno např. v [39]. V praxi je většinou stěžejní chování piezoelektrického rezonátoru v okolí h -té rezonance. Zde lze piezoelektrický rezonátor nahradit paralelním spojením sériového rezonančního obvodu R_h , L_h , C_h a statické kapacity C_0 , který je zobrazen na obr. 3.3. Prvky obvodu R_h , L_h a C_h jsou zvány dynamickými parametry, kde h značí harmonickou rezonanční frekvenci rezonátoru. Tyto elektrické parametry jsou dány piezoelektrickými, elastickými a ztrátovými vlastnostmi rezonátoru. Dalším parametrem, který náhradní elektrický obvod charakterizuje, je činitel jakosti Q_h . Celý náhradní obvod je pak charakterizován impedancí piezoelektrického rezonátoru $Z_h(\omega)$ a její reálnou hodnotou $R_h(\omega)$ a imaginární hodnotou $X_h(\omega)$.



Obrázek 3.3: Lineární elektrický náhradní obvod piezoelektrického rezonátoru v okolí rezonančního kmitočtu f_n [39]

V následujícím výčtu se podíváme na jednotlivé parametry náhradního elektrického obvodu a jejich velikost z obecného pohledu:

- Kapacita C_0 odpovídá kapacitě kondenzátoru tvořeného částí výbrusu mezi elektrodami a závisí pouze na permitivitě materiálu, tloušťce výbrusu a velikosti plochy elektrod.
- Odpor R_h charakterizuje ztráty vzniklé vnitřním třením ve výbrusu, tlumením kmitů okolní atmosférou a uchycením výbrusu.
- Hodnota dynamických parametrů L_h , C_h závisí na velikosti příslušných piezoelektrických modulů nebo koeficientů, využívaném typu kmitů i některých rozměrech výbrusů a velikostí elektrod.
- Koeficient kvality Q_h bývá u krystalových rezonátorů bývá několik desítek až set tisíc, u piezokeramických rezonátorů několik desítek až set.
- Poměr kapacit $r_h = C_0/C_h$ bývá od několika desítek do několika set.

Pro impedanci náhradního elektrického obvodu platí následující vztah

$$Z_h(j\omega) = \frac{\omega L_h - \frac{1}{\omega C_h} - jR_h}{\omega C_0 R_h + j[\omega C_0(\omega L_h - \frac{1}{\omega C_h}) - 1]} \quad (3.11)$$

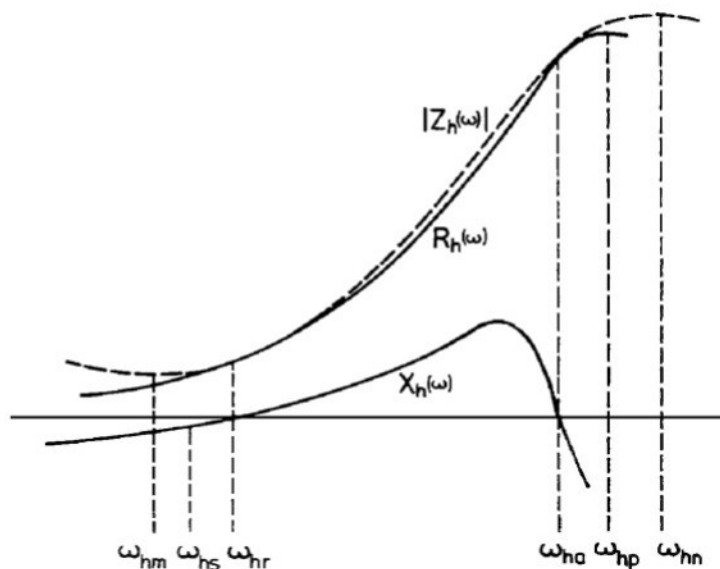
Reálnou a imaginární část vzorce 3.11 lze vyjádřit následujícími vzorci

$$R_h(\omega) = \frac{R_h \frac{C_h^2}{C_0^2}}{(\omega C_h R_h)^2 + (1 + \frac{C_h}{C_0} - \omega^2 C_h L_h)^2} \quad (3.12)$$

$$X_h(\omega) = \frac{1}{\omega C_0} \frac{(\omega C_h R_h)^2 + (1 - \omega^2 C_h L_h)(1 + \frac{C_h}{C_0} - \omega^2 C_h L_h)}{(\omega C_h R_h)^2 + (1 + \frac{C_h}{C_0} - \omega^2 C_h L_h)^2} \quad (3.13)$$

K rezonanci piezoelektrického výbrusu pak dochází tehdy, jestliže je imaginární část tj. rovnice 3.13 rovna nule. V okolí rezonance se tedy piezoelektrický rezonátor chová jako odpor [39].

Frekvenční závislost impedance piezoelektrického rezonátoru $|Z_h(\omega)|$ a její reálné $R_h(\omega)$ a imaginární $X_h(\omega)$ části jsou vyneseny na obr. 3.4.



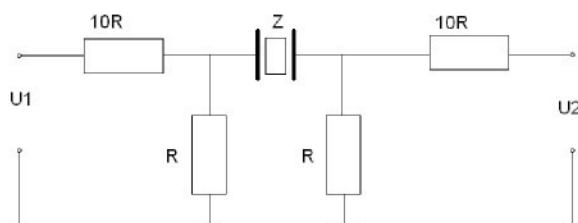
Obrázek 3.4: Závislost absolutní hodnoty impedance $|Z_h(\omega)|$ a její reálné $R_h(\omega)$ a imaginární $X_h(\omega)$ složky impedance elektrického náhradního obvodu na kmitočtu. Vyznačení charakteristických kmitočtů [39]

Charakteristické kmitočty v okolí h -té rezonance

ω_{hr}	rezonanční kmitočet (sériový rezonanční kmitočet)
ω_{ha}	antirezanční kmitočet (paralelní rezonanční kmitočet)
ω_{hr} , ω_{ha}	kmitočty, při nichž je imaginární část impedance elektrického náhradního obvodu rezonátoru v okolí h -té rezonance rovna nule
ω_{hm} , ω_{hn}	kmitočty odpovídající minimu respektive maximu absolutní hodnoty impedance elektrického náhradního obvodu rezonátoru v okolí h -té rezonance a vyhovují vztahu $\frac{d Z_h(\omega) }{d\omega} = 0$.

3.3 Rezananční kmitočty

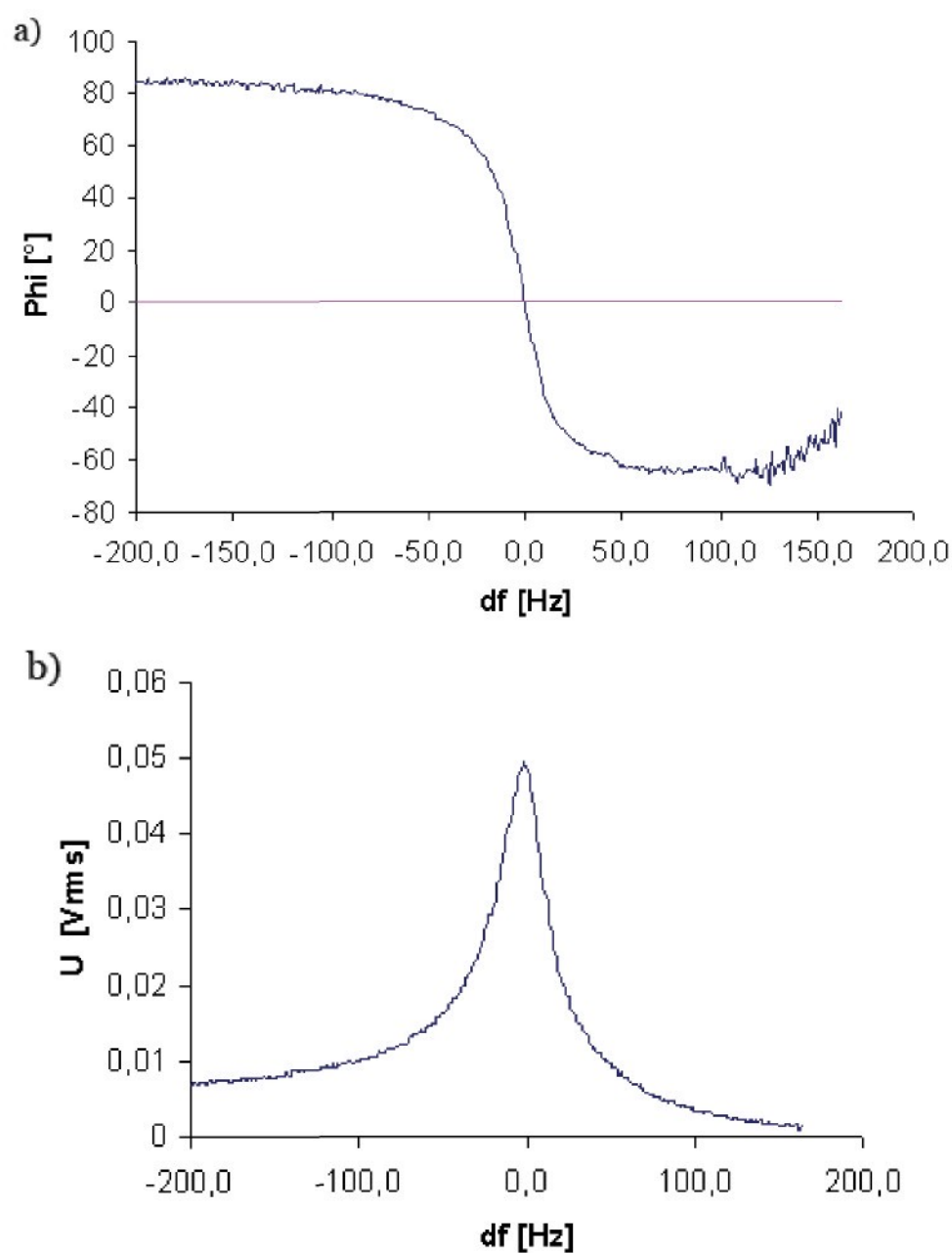
Pro experimentální určení rezonanční frekvence se používá nejčastěji sériová nebo paralelní rezonanční frekvence [39]. Měřený rezonátor se zapojuje buď do vhodného osilátoru nebo do pasivního obvodu. Nejčastěji se používá pasivní obvody typu π -článku, který je možno vidět na obrázku 3.5.



Obrázek 3.5: Schema zapojení π -článku

Měření rezonančního kmitočtu se tak pro měření sériového rezonančního kmitočtu převádí buď na měření fázového posunu mezi vstupním a výstupním napětím U_1 a U_2 π -článku (tím určíme kmitočet ω_{hr} nebo na měření maxima amplitudy výstupního napětí U_2 (kmitočet ω_{hm}). Na obrázku 3.6 jsou vidět výstupy obou těchto metod měření. Jak je vidět především na obr. 3.4, kmitočty ω_{hr} a ω_{hm} jsou od sebe odchýleny. Proto je vždy nutno při měření rezonanční frekvence uvádět, kterou metodou byl rezonanční kmitočet určen.

Pokud budeme rezonátor považovat za bezztrátový ($R_h = 0$), potom $\omega_{hm} = \omega_{hr} = \omega_{hs}$, kde kmitočet ω_{hs} je sériový rezonanční kmitočet měřené harmonické rezonanční frekvence. V praxi se často pro označování rezonanční frekvence místo kruhového kmitočtu ω_{hs} používá f_{hs} , který je dán vztahem $f_{hs} = \omega_{hs}/(2\pi)$. A obdobně můžeme upravit všechny doposud uvedené kruhové rezonanční frekvence rezonátoru.



Obrázek 3.6: Výstupy pro měření rezonančního kmitočtu rezonátoru
a) fázový posun vstupu a výstupu π -článku
b) zesílení amplitudy výstupního signálu

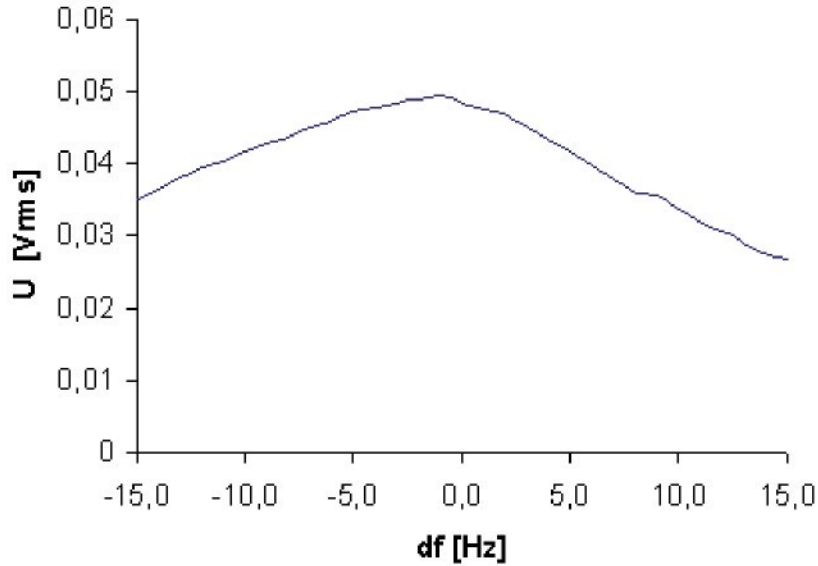
Při uvažování ztrát bude, jak bylo ukázáno v [40], platit vztah

$$f_{hm} = f_{hs} \left[1 - \frac{r_h}{Q_h^2} + \frac{1}{2} \left(r_h^3 + \frac{3r_h^2}{4} \right) \frac{1}{Q_h^4} + \dots \right] \quad (3.14)$$

a

$$f_{hr} = f_{hs} \left[1 + \frac{r_h}{Q_h^2} + \frac{1}{2} \left(r_h^3 + \frac{3r_h^2}{4} \right) \frac{1}{Q_h^4} + \dots \right] , \quad (3.15)$$

kde Q_h a r_h jsou definovány na str. 33.



Obrázek 3.7: Detail zesílení amplitudy výstupního signálu π -článku

Jak bylo ukázáno např. v práci [7] a je to i patrné z reálně naměřené závislosti na obrázku 3.7, je křivka popisující závislost amplitudy výstupního napětí U_2 na budícím kmitočtu značně plochá a tím je při nalezení hodnoty ω_{hm} nutno počítat s nepřesností stanovení ω_{hm} v rozmezí $\pm 10^{-6}$ až $\pm 10^{-7}$ [39]. U závislosti fázové odchylky mezi vstupním a výstupním napětím U_1 a U_2 hledáme její rovnost nule, a proto je i stanovení ω_{hr} o jeden až dva řády přesnější.

3.4 Statická kapacita C_0

Stanovení velikosti statické kapacity C_0 je velmi jednoduché. Piezoelektrický výbrus se chová mimo oblast rezonance jako kapacita viz obr. 3.6 a). Pro její určení lze použít libovolnou metodu, která se hodí pro měření kapacit o velikosti řádově jednotek či desítek pF .

Pokud tedy pro určení C_0 použijeme buzení střídavým napětím, je nutné dbát na to, aby použitá budicí frekvence nebyla blízko žádné vlastní nebo harmonické rezonanční frekvence výbrusu. Ideální je měřit opakovaně na různých frekvencích mimo rezonanční frekvence výbrusu a pak s hodnotami dále pracovat jako se souborem dat a vlastní hodnotu statické kapacity určit jako statistický průměr naměřených hodnot. čímž se vyloučí případné přiblížení k některé vlastní či harmonické frekvenci výbrusu, které se projeví jako hrubá chyba měření tj. naměřená hodnota se bude výrazně lišit od ostatních naměřených hodnot.

Nejistota výsledku měření pak bude dána kombinovanou rozšířenou neistotou a je nutno provést minimálně 10 měření na různých frekvencích.

3.5 Odpor R_h

Sériový odpor R_h se dá určit poměrně jednoduchými metodami. Nejčastěji se určuje:

- přímým měřením odporu při rezonanční frekvenci
- metodou substituční.

V obou případech využíváme vlastnosti rezonátoru, díky které se při sériové rezonanční frekvenci piezoelektrický výbrus chová jako čistě ohmický odpor.

První metoda vyžaduje nutnost měřit přímo ohmický odpor při vysokých frekvencích. Nejistota takového měření bude dána výrobcem takového měřicího zařízení. Při jednotlivém měření se bude počítat jako rozšířená nejistota typu B a při opakovaném měření jako rozšířená kombinovaná nejistota.

Při substituční metodě použijeme poměrovou metodu s kalibračním odporem v identickém π -článku. Tato metoda spočívá v porovnání zesílení, které způsobí kalibrační odpor a piezoelektrický rezonátor při sériové rezonanci. Nejistota zjištěného odporu R_h bude pak nejistotou nepřímého měření a budou se na ní podílet přesnost použitého kalibračního odporu a přesnosti všech přímo měřených veličin.

3.6 Činitel jakosti Q_h , indukčnost L_h a kapacita C_h

Dalším parametrem, kterému se budeme věnovat, je činitel jakosti Q_h . Jak bylo ukázáno např. v [39], pro piezoelektrické rezonátory platí, že čím příkřejší je sklon frekvencní charakteristiky a čím větší má piezoelektrický výbrus zesílení výstupního signálu v oblasti sériové rezonance viz obr. 3.6 , tím vyšší je činitel jakosti Q_h .

Pokud od kmitajícího piezoelektrického výbrusu odpojíme budící zdroj, zmenšuje se amplituda v závislosti na čase exponenciálně podle vztahu

$$A = A_0 e^{-\delta t}, \quad (3.16)$$

ve kterém A_0 označuje počáteční amplitudu, A amplitudu v čase t a δ dekrementútlumu, který je v okolí sériového rezonančního kmitočtu roven

$$\delta = \frac{R_h}{2L_h} = \frac{\omega_{hs}}{2Q_h} \quad (3.17)$$

Známe-li dekrement δ , dovedeme činitel jakosti Q_h při dané frekvenci ω_{hs} snadno vypočítat ze vztahu

$$Q_h = \frac{\omega_{hs}}{2\delta}. \quad (3.18)$$

nebo při známé velikosti odporu R_h , indukčnosti L_h při dané frekvenci ω_{hs} určíme Q_h ze vztahu

$$Q_h = \frac{\omega_{hs} L_h}{2R_h}. \quad (3.19)$$

Po úpravě tohoto vztahu dostaneme pro L_h

$$L_h = \frac{Q_h R_h}{\omega_{hs}}. \quad (3.20)$$

a s využitím Thomsonova vztahu pro C_h

$$C_h = \frac{1}{\omega_{hs} Q_h R_h}. \quad (3.21)$$

Nejistota určení činitele jakosti Q_h je dána vztahem nepřímého měření 3.19 a má na ni vliv přesnost určení jednotlivých parametrů vztahu výpočtu.

Tím jsme si specifikovali postupy pro zjištění jednotlivých parametrů, které použitý piezoelektrický rezonátor charakterizují.

4. Změny rezonančního kmitočtu

Je obecně známo, že lineární teorie piezoelektrického jevu se používá pro popis šíření akustických vln v pevných piezoelektrických materiálech a pro řešení pohybových rovnic, pokud jsou amplitudy kmitů malé.

Uvažované kmity pevných látek nesmí být zároveň vystaveny žádnému elastickému předpětí nebo silnému elektrickému poli. Pokud tyto požadavky nejsou splněny, musí být výsledky výpočtů upraveny pomocí různých korekčních faktorů nebo tyto výpočty musí obsahovat některé nelineární popisy definované pomocí jednotlivých vstupních podmínek. Vlastnosti akustického vlnění rezonátoru nebo jiných piezoelektrických zařízení jsou vždy ovlivněny vnitřními a vnějšími parametry, které způsobují nelineární vlastnosti krystalu. Tyto nelinearity můžeme nalézt na počátku nelineárních jevů, jako jsou frekvenčně-amplitudový efekt, intermodulace a citlivost na různé fyzikální jevy jako např. elektrické pole, teplota, mechanické síly, zrychlení nebo tlak jak bylo popsáno v [16] a [17]. Je zřejmé, že řada těchto nelineárních jevů není žádoucí a naopak, nelinearity mohou být využity pro funkci snímačů [34], které pracují na bázi BAW a SAW rezonátorů.

Popis nelineárního chování rezonátorů vyžaduje znalost základních matic materiálových konstant nejen druhého řádu, ale také třetího řádu a v některých případech i čtvrtého řádu.

Dosud jsme pro zjednodušení úprav zcela pominuli závislost vlastností piezoelektrického rezonátoru na teplotě a jiných vlivech. V praxi jsou však tyto změny často velmi důležité. Pro použití piezoelektrických rezonátorů jako kmitočtových normálů je např. důležité, aby jejich frekvence byla co nejméně závislá na teplotě a to i v případech, kdy je rezonátor umístěn v termostatu. Ukazuje se, že toho lze díky anizotropnímu charakteru piezoelektrických látek dosáhnout jen u vhodně zvolených úhlů řezů piezoelektrických destiček (výbrusů, rezonátorů).

Vlastní rezonanční frekvence určitého druhu kmitu piezoelektrického výbrusu je obecně funkcí rozměrů výbrusu, hustoty materiálu a elastických konstant piezoelektrického materiálu, ze kterého je rezonátor vyroben. Každá z těchto veličin je však závislá na externích vlivech jako je teplota, budicí napětí, materiál elektrod, jejich tloušťka atd. V následujících statích se budeme některým těmto okolním vlivům věnovat podrobněji.

Tato kapitola bude pojednávat o vlivech, které se přisuzují elastickým nelinearitám křemene speciálně pro Y -řezy rezonátorů kmitajících tloušťkově - střižnými módy kmitů. Z celého spektra parametrů, které na rezonátor působí, se dále budeme věnovat teplotnímu vlivu na změnu rezonančního kmitočtu a určení nelineárního koeficientu γ pomocí dvou metod měření, které byly popsány v [22], [29], a možnosti stanovení efektivní hodnoty elastického modulu čtvrtého řádu $\tilde{c}_{6666}$ pro měřené Y -řezy křemene. V teoretické části se budeme věnovat určení počtu prvků základní materiálové matice elastického modulu čtvrtého řádu. Z tohoto prvotního zjištění vychází druhá část této práce.

4.1 Změna rezonančního kmitočtu rezonátoru vlivem teploty

Jak již bylo zmíněno, na změnu rezonančního kmitočtu piezoelektrického křemenného rezonátoru má vliv mnoho jevů. Když pomineme rozměry a materiál výbrusu, dalším velmi silným vlivem je závislost rezonančního kmitočtu na teplotě. Ta je dána součtem vlivů teploty na elastické koeficienty (moduly) a další materiálové vlastnosti piezoelektrického rezonátoru. Výslednicí těchto dílčích teplotních závislostí je pak celková teplotní závislost rezonanční frekvence uvažovaného kmitu na teplotě. V našem případě budeme uvažovat první a třetí harmonickou rezonanční frekvenci tloušťkově - střižných kmitů. Tato závislost je nejčastěji charakterizována tzv. teplotním koeficientem frekvence α_f a definována vztahem

$$\alpha_f = \frac{1}{f} \frac{\Delta f}{\Delta T} \quad (4.1)$$

kde Δf značí změnu rezonanční frekvence f piezoelektrického výbrusu způsobenou změnou teploty $\Delta T = T - T_0$ (ta je někdy značena Θ). Pro teplotní koeficient frekvence α_f se také používá označení Tk_f a obdobně se značí i teplotní koeficienty elastických a piezoelektrických konstant a modulů. Je zřejmé, že takto definovaný teplotní koeficient je sám funkcí teploty. $Tk_f = f(T)$

Možnost zhotovení piezoelektrického výbrusu s nulovým nebo velmi malým teplotním koeficientem je podmíněno tím, že všechny dílčí jevy, které se na jeho celkové velikosti podílejí, nemají co do smyslu působení stejný charakter. Tím se mohou v některých případech jejich účinky vzájemně vykompenzovat. Na změnu rezonanční frekvence vlivem teploty má největší vliv teplotní závislost elastických vlastností piezoelektrického materiálu. V praxi to znamená, že pro uvažovaný materiál musí být mezi elastickými konstantami $s_{\lambda\mu}$ resp. moduly $c_{\lambda\mu}$ hodnoty s kladnou i zápornou teplotní závislostí. Této podmínce vyhovuje např. křemen. Teplotní závislosti elastických modulů druhého řádu pro křemen jsou uvedeny v příloze D. V přírodě existují i materiály, které tuto podmínku nesplňují např. turmarín.

Pro obecně orientovaný řez piezoelektrického materiálu musíme samozřejmě pro výpočet používat hodnoty efektivních elastických konstant $\tilde{s}_{\lambda\mu}$ resp. elastických modulů $\tilde{c}_{\lambda\mu}$.

Bohužel, nulového teplotního koeficientu rezonanční frekvence piezoelektrického výbrusu α_f lze dosáhnout jen za zcela určité teploty. Obecně je závislost vlastní rezonanční frekvence na teplotě funkcí třetího řádu a má tvar

$$f = f_0(1 + Tk_f^{(1)}\Theta + Tk_f^{(2)}\Theta^2 + Tk_f^{(3)}\Theta^3 + \dots) \quad , \quad (4.2)$$

kde $\Theta = T - T_0$, f je výsledná frekvence piezoelektrického výbrusu při teplotě T , f_0 je frekvence při teplotě T_0 . K této teplotě se také vztahují koeficienty $Tk_f^{(1)}$, $Tk_f^{(2)}$ a $Tk_f^{(3)}$. Frekvence f_0 se označuje jako základní nebo nominální frekvence.

Podaří-li se najít takový řez, který má v okolí pracovní teploty T_0 nulový teplotní koeficient prvního řádu $Tk_f^{(1)} = 0$, pak jsme našli řez s nulovým teplotním koeficientem, ale jen v bezprostředním okolí pracovní teploty. Pokud chceme oblast rozšířit, musí být nulový i koeficient druhého případně i dalších řádů. Prakticky nulový je teplotní koeficient v bodě lokálního maxima či minima kubické křivky dané rovnicí (4.2).

Dále se budeme věnovat teoretickému stanovení teplotního koeficientu pro AT-řez křemenného rezonátoru a z nich jsou spočteny frekvenčně-teplotní charakteristiky zvolených rezonátorů. Tyto výsledky budou následně porovnány s experimentálně naměřenými frekvenčně-teplotními charakteristikami reálných piezoelektrických rezonátorů. Z nich jsou stanoveny experimentální hodnoty teplotních koeficientů Tk_f . Všechny výsledky jsou stanoveny a naměřeny pro základní a třetí harmonickou frekvenci piezoelektrického rezonátoru.

4.1.1 Výpočet Tk_f pro AT-řez křemenného rezonátoru

Je známo, že dochází k nepatrným rozdílům mezi vypočtenými a naměřenými frekvenčně-teplotními charakteristikami u rezonátorů Y-řezů, které kmitají tloušťkově-střížnými kmity na základní a třetí harmonické. Tyto změny jsou způsobeny rozdílnými okrajovými a elektrickými podmínkami. Na zvoleném AT-řezu budeme dále analyzovat vlivy těchto podmínek a pokusíme se přesněji stanovit teplotní závislost rezonančního kmitočtu.

AT-řez je definován jako XY-řez, kde $\Psi = -32, 25^\circ$. Uvažujeme tenkou destičku křemene se středem v ortogonálním systému os x_1 , x_2 a x_3 , kde osa x_1 je totožná s elektrickou osou (X-osou) křemene. Tloušťka a šířka destičky je $2b$ a $2a$. Na povrchu destičky, kde hodnota $x_2 = \pm b$, je nanесena elektroda. Hustota a tloušťka elektrody je ρ' a $2b'$. Vnější strana elektrod a okraje destičky, kde $x_1 = \pm a$, nejsou zatíženy napětím. Proto stejně jako bylo ukázáno v [19] můžeme pro další výpočet uvažovat pouze takové módy vibrací, které jsou antisymetrické k osám x_1 a x_2 a nezávislé na ose x_3 .

Pokud budeme aplikovat teorii popsanou v [17], na dvourozměrnou pohybovou rovnici odvozenou v [15], použijeme-li pouze výše uvedené módy vibrací a pokud zanedbáme piezoelektrické vlastnosti rezonátoru, pak se dá soustava pohybových rovnic křemenné destičky bez elektrod zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned}
\beta_{22}t_{21,1}^{(0)} + \beta_{23}t_{31,1}^{(0)} + \frac{1}{b}\beta_{22}F_2^{(0)} + \frac{1}{b}\beta_{23}F_3^{(0)} &= 2\rho\ddot{u}_2^{(0)}, \\
\beta_{32}t_{21,1}^{(0)} + \beta_{33}t_{31,1}^{(0)} + \frac{1}{b}\beta_{32}F_2^{(0)} + \frac{1}{b}\beta_{33}F_3^{(0)} &= 2\rho\ddot{u}_3^{(0)}, \\
\beta_{11}t_{11,1}^{(1)} - \frac{\pi}{2b}\beta_{11}\bar{t}_{21}^{(1)} + \frac{1}{b}\beta_{11}F_1^{(1)} &= \rho\ddot{u}_1^{(1)}, \\
\beta_{22}t_{21,1}^{(2)} + \beta_{23}t_{31,1}^{(2)} - \frac{\pi}{b}\beta_{22}\bar{t}_{22}^{(2)} - \frac{\pi}{b}\beta_{23}\bar{t}_{23}^{(2)} + \frac{1}{b}\beta_{22}F_2^{(2)} + \frac{1}{b}\beta_{23}F_3^{(2)} &= \rho\ddot{u}_2^{(2)}, \\
\beta_{32}t_{21,1}^{(2)} + \beta_{33}t_{31,1}^{(2)} - \frac{\pi}{b}\beta_{32}\bar{t}_{22}^{(2)} - \frac{\pi}{b}\beta_{33}\bar{t}_{32}^{(2)} + \frac{1}{b}\beta_{32}F_2^{(2)} + \frac{1}{b}\beta_{33}F_3^{(2)} &= \rho\ddot{u}_3^{(2)}, \\
\beta_{11}t_{11,1}^{(3)} - \frac{3\pi}{2b}\beta_{11}\bar{t}_{21}^{(3)} + \frac{1}{b}\beta_{11}F_1^{(3)} &= \rho\ddot{u}_1^{(3)},
\end{aligned} \tag{4.3}$$

kde $F_1^{(n)}$ je n -tý řád povrchového napětí a určí se z rovnice

$$F_i^{(n)} = t_{i2}(b) - (-1)^n t_{i2}(-b), \tag{4.4}$$

kde $t_{ij}^{(n)}$ a $\bar{t}_{ij}^{(n)}$ jsou přírůstky napětí získané ze vztahů popisujících vztah napětí, posunutí a teploty

$$\begin{aligned}
t_{12}^{(0)} &= 2[D_{56}(\beta_{23}u_{2,1}^{(0)} + \beta_{33}u_{3,1}^{(0)}) + D_{66}(\beta_{22}u_{2,1}^{(0)} + \beta_{23}u_{3,1}^{(0)}) + \frac{1}{b}D_{66}\beta_{11}(k_1u_1^{(1)} + u_1^{(3)})], \\
t_{13}^{(0)} &= 2[D_{55}(\beta_{23}u_{2,1}^{(0)} + \beta_{33}u_{3,1}^{(0)}) + D_{56}(\beta_{22}u_{2,1}^{(0)} + \beta_{23}u_{3,1}^{(0)}) + \frac{1}{b}D_{56}\beta_{11}(k_1u_1^{(1)} + u_1^{(3)})], \\
t_{11}^{(1)} &= k_2D_{11}\beta_{11}u_{1,1}^{(1)} + \frac{8}{3b}[D_{12}(\beta_{22}u_2^{(2)} + \beta_{32}u_3^{(2)}) + D_{14}(\beta_{23}u_2^{(2)} + \beta_{33}u_3^{(2)})], \\
t_{12}^{(2)} &= D_{56}(\beta_{23}u_{2,1}^{(2)} + \beta_{33}u_{3,1}^{(2)}) + D_{66}(\beta_{22}u_{2,1}^{(2)} + \beta_{23}u_{3,1}^{(2)}) - \frac{2}{3b}D_{66}\beta_{11}u_1^{(1)} + \\
&\quad + \frac{18}{5b}D_{66}\beta_{11}u_1^{(3)}, \\
t_{13}^{(2)} &= D_{55}(\beta_{23}u_{2,1}^{(2)} + \beta_{33}u_{3,1}^{(2)}) + D_{56}(\beta_{22}u_{2,1}^{(2)} + \beta_{23}u_{3,1}^{(2)}) - \frac{2}{3b}D_{56}\beta_{11}u_1^{(1)} \\
&\quad + \frac{18}{5b}D_{56}\beta_{11}u_1^{(3)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_{11}^{(3)} &= D_{11}\beta_{11}u_{1,1}^{(3)} - \frac{8}{5b}[D_{12}(\beta_{22}u_2^{(2)} + \beta_{32}u_3^{(2)}) + D_{14}(\beta_{23}u_2^{(2)} + \beta_{33}u_3^{(2)})], \\
\bar{t}_{12}^{(1)} &= \frac{\pi}{2b}D_{66}\beta_{11}u_1^{(1)} + \frac{4k_1}{\pi}[D_{56}(\beta_{23}u_{2,1}^{(0)} + \beta_{33}u_{3,1}^{(0)}) + D_{66}(\beta_{22}u_{2,1}^{(0)} + \beta_{23}u_{3,1}^{(0)})] - \\
&\quad - \frac{4}{3\pi}[D_{56}(\beta_{23}u_{2,1}^{(2)} + \beta_{33}u_{3,1}^{(2)}) + D_{66}(\beta_{22}u_{2,1}^{(2)} + \beta_{23}u_{3,1}^{(2)})], \\
\bar{t}_{22}^{(2)} &= \frac{\pi}{b}[D_{22}(\beta_{22}u_2^{(2)} + \beta_{32}u_3^{(2)}) + D_{24}(\beta_{23}u_2^{(2)} + \beta_{33}u_3^{(2)})] + \frac{8}{3\pi}D_{12}\beta_{11}u_{1,1}^{(1)} - \\
&\quad - \frac{8}{5\pi}D_{12}\beta_{11}u_{1,1}^{(3)}, \\
\bar{t}_{23}^{(2)} &= \frac{\pi}{b}[D_{24}(\beta_{22}u_2^{(2)} + \beta_{32}u_3^{(2)}) + D_{44}(\beta_{23}u_2^{(2)} + \beta_{33}u_3^{(2)})] + \frac{8}{3\pi}D_{14}\beta_{11}u_{1,1}^{(1)} - \\
&\quad - \frac{8}{5\pi}D_{14}\beta_{11}u_{1,1}^{(3)}, \\
\bar{t}_{12}^{(3)} &= \frac{3\pi}{2b}D_{66}\beta_{11}u_1^{(3)} + \frac{4}{3\pi}[D_{56}(\beta_{23}u_{2,1}^{(0)} + \beta_{33}u_{3,1}^{(0)}) + D_{66}(\beta_{22}u_{2,1}^{(0)} + \beta_{23}u_{3,1}^{(0)})] - \\
&\quad + \frac{12}{5\pi}[D_{56}(\beta_{23}u_{2,1}^{(2)} + \beta_{33}u_{3,1}^{(2)}) + D_{66}(\beta_{22}u_{2,1}^{(2)} + \beta_{23}u_{3,1}^{(2)})]. \tag{4.5}
\end{aligned}$$

β_{ij} je získáno ze vztahu

$$\beta_{ij} = \delta_{ij} + \alpha_{ij}^{\Theta},$$

$$\alpha_{ij}^{\Theta} = \alpha_{ij}^{(1)}\Theta + \alpha_{ij}^{(2)}\Theta^2 + \alpha_{ij}^{(3)}\Theta^3, \quad (i, j = 1, 2, 3), \tag{4.6}$$

kde δ_{ij} je Kroneckerovo delta, $\alpha_{ij}^{(n)}$ je n -tý řád teplotně-roztažného koeficientu a Θ je teplotní přírůstek vztažený k nominální teplotě T_o určený ze vztahu $\Theta = T - T_o$.

Elastické moduly D_{ab} a β_{ij} jsou závislé na teplotním přírůstku podle vztahů

$$D_{ab} = C_{ab} + D_{ab}^{(1)}\Theta + D_{ab}^{(2)}\Theta^2 + D_{ab}^{(3)}\Theta^3, \quad (a, b = 1, 2, \dots, 6),$$

$$\beta_{ij} = \delta_{ij} + \alpha_{ij}^{(1)}\Theta + \alpha_{ij}^{(2)}\Theta^2 + \alpha_{ij}^{(3)}\Theta^3, \tag{4.7}$$

kde C_{ab} je elastický modul při nominální teplotě T_o a hodnoty $D_{ab}^{(n)}$ jsou podrobněji popsány v [17].

Vzhledem k mechanickému efektu pokovení destičky rezonátoru můžeme rovnici (4.4) nahradit vztahem

$$\begin{aligned} F_k^{(m)} &= \Phi_k^{(m)} - 2Rb\varrho\ddot{u}_k^{(m)} \quad (k = 2, 3; \quad m = 0, 2), \\ F_1^{(q)} &= \Phi_1^{(q)} + 4b'D_{11}'\beta_{11}'u_{1,11}^{(q)} - 2Rb\varrho\ddot{u}_1^{(q)} \quad (p = 1, 3). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Protože povrchové napětí pro vnější stranu elektrody je rovno nule, můžeme psát

$$\Phi_i^{(n)} = 0 \quad (i = 1, 2, 3; \quad n = 0, 1, 2, 3). \quad (4.9)$$

V rovnici (4.8) je hmotnostní zatížení R získáno ze vztahu

$$R = \frac{2\varrho'b'}{\varrho b}, \quad (4.10)$$

kde b' je poloviční tloušťka elektrody na jedné straně destičky a ϱ' je hustota elektrody. D_{11}' a β_{11}' jsou závislé na teplotním přírůstku Θ podle vztahů

$$\begin{aligned} D_{11}' &= D_{11}' + D_{11}'^{(1)}\Theta, \\ \beta_{11}' &= 1 + \alpha_{11}'^{(1)}\Theta, \end{aligned} \quad (4.11)$$

kde D_{11}' je elastický modul roviny elektrody při nominální teplotě T_0 , $D_{11}'^{(1)}$ je první řád teplotní derivace elastického modulu elektrody a $\alpha_{11}'^{(1)}$ je první řád koeficientu teplotní roztažnosti elektrody.

Použitých šest složek přírůstku posunutí $u_i^{(n)}(x_i, t)$ je v souřadném systému funkcí souřadnice x_1 a času.

$$u_i^{(n)}(x_i, t) = u_i^{(n)}e^{j\omega t}, \quad (4.12)$$

kde $u_i^{(n)}$ jsou již pouze funkcí souřadnice x_1 a

$$\begin{aligned} u_2^{(0)} &= A_2^{(0)} \sin \xi x_1, & u_3^{(0)} &= A_3^{(0)} \sin \xi x_1, & u_1^{(1)} &= A_1^{(1)} \cos \xi x_1, \\ u_2^{(2)} &= A_2^{(2)} \sin \xi x_1, & u_3^{(2)} &= A_3^{(2)} \sin \xi x_1, & u_1^{(3)} &= A_1^{(3)} \cos \xi x_1. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Dosazením soustavy rovnic (4.13) do rovnic (4.5) spolu s výsledky z rovnic (4.3) dostaneme soubor šesti homogenních lineárních algebraických rovnic se šesti amplitudami $A_i^{(n)}$ definovanými v rovnicích (4.13).

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ 0 & 0 & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & 0 & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_2^{(0)} \\ A_3^{(0)} \\ A_1^{(1)} \\ A_2^{(2)} \\ A_3^{(2)} \\ A_1^{(3)} \end{bmatrix} = 0, \quad (4.14)$$

kde

$$\begin{aligned} a_{11} &= (\beta_4^2 D_{55} + 2\beta_2\beta_4 D_{56} + \beta_2^2 D_{66})z^2 - (1 + \beta_2 R)D_{66}\left(\frac{\Omega}{k_2}\right)^2, \\ a_{12} &= [\beta_3\beta_4 D_{55} + (\beta_2\beta_3 + \beta_4^2)D_{56} + \beta_2\beta_4 D_{66}]z^2, \\ a_{13} &= \frac{2}{\pi}k_1\beta_1(\beta_4 D_{56} + \beta_2 D_{66})z, \\ a_{16} &= \frac{2}{\pi}\beta_1(\beta_4 D_{56} + \beta_2 D_{66})z, \\ a_{21} &= [\beta_3\beta_4 D_{55} + (\beta_2\beta_3 + \beta_4^2)D_{56} + \beta_2\beta_4 D_{66}]z^2, \\ a_{22} &= (\beta_3^2 D_{55} + 2\beta_3\beta_4 D_{56} + \beta_4^2 D_{66})z^2 - (1 + \beta_3 R)D_{66}\Omega^2, \\ a_{23} &= \frac{2}{\pi}k_1\beta_1(\beta_3 D_{56} + \beta_4 D_{66})z, \\ a_{26} &= \frac{2}{\pi}\beta_1(\beta_3 D_{56} + \beta_4 D_{66})z, \\ a_{31} &= \frac{4}{\pi}k_1\beta_1(\beta_4 D_{56} + \beta_2 D_{66})z, \\ a_{32} &= \frac{4}{\pi}k_1\beta_1(\beta_3 D_{56} + \beta_4 D_{66})z, \\ a_{33} &= \beta_1^2 D_{11}z^2 + \beta_1^2 D_{66} - (1 + 2\beta_1 R)D_{66}\Omega^2, \\ a_{34} &= -\frac{4}{3\pi}\beta_1[4(\beta_2 D_{12} + \beta_4 D_{14}) + \beta_4 D_{56} + \beta_2 D_{66}]z, \\ a_{35} &= -\frac{4}{3\pi}\beta_1[4(\beta_4 D_{12} + \beta_3 D_{14}) + \beta_3 D_{56} + \beta_4 D_{66}]z, \\ a_{43} &= -\frac{4}{3\pi}\beta_1[4(\beta_2 D_{12} + \beta_4 D_{14}) + \beta_4 D_{56} + \beta_2 D_{66}]z, \\ a_{44} &= (\beta_4^2 D_{55} + 2\beta_2\beta_4 D_{56} + \beta_2^2 D_{66})z^2 + 4(\beta_2^2 D_{22} + 2\beta_2\beta_4 D_{24} + \beta_4^2 D_{44}) - \\ &\quad - (1 + 2\beta_2 R)D_{66}\Omega^2, \\ a_{45} &= [\beta_3\beta_4 D_{55} + (\beta_2\beta_3 + \beta_4^2)D_{56} + \beta_2\beta_4 D_{66}]z^2 + \\ &\quad + 4[\beta_2\beta_4 D_{22} + (\beta_2\beta_3 + \beta_4^2)D_{24} + \beta_3\beta_4 D_{44}], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{46} &= \frac{4}{5\pi}\beta_1[4(\beta_2 D_{12} + \beta_4 D_{14}) + 9(\beta_4 D_{56} + \beta_2 D_{66})]z, \\
a_{53} &= -\frac{4}{3\pi}\beta_1[4(\beta_4 D_{12} + \beta_3 D_{14}) + \beta_3 D_{56} + \beta_4 D_{66}]z, \\
a_{54} &= [\beta_3 \beta_4 D_{55} + (\beta_2 \beta_3 + \beta_4^2) D_{56} + \beta_2 \beta_4 D_{66}]z^2 + \\
&\quad + 4[\beta_2 \beta_4 D_{22} + (\beta_2 \beta_3 + \beta_4^2) D_{24} + \beta_3 \beta_4 D_{44}], \\
a_{55} &= (\beta_3^2 D_{55} + 2\beta_3 \beta_4 D_{56} + \beta_4^2 D_{66})z^2 + 4(\beta_4^2 D_{22} + 2\beta_3 \beta_4 D_{24} + \beta_3^2 D_{44}) - \\
&\quad - (1 + 2\beta_3 R) D_{66} \Omega^2, \\
a_{56} &= \frac{4}{5\pi}\beta_1[4(\beta_4 D_{12} + \beta_3 D_{14}) + 9(\beta_3 D_{56} + \beta_4 D_{66})]z, \\
a_{61} &= \frac{4}{\pi}\beta_1(\beta_4 D_{56} + \beta_2 D_{66})z, \\
a_{62} &= \frac{4}{\pi}\beta_1(\beta_3 D_{56} + \beta_4 D_{66})z, \\
a_{64} &= \frac{4}{5\pi}\beta_1[4(\beta_2 D_{12} + \beta_4 D_{14}) + 9(\beta_4 D_{56} + \beta_2 D_{66})]z, \\
a_{65} &= \frac{4}{5\pi}\beta_1[4(\beta_4 D_{12} + \beta_3 D_{14}) + 9(\beta_3 D_{56} + \beta_4 D_{66})]z, \\
a_{66} &= \beta_1^2 D_{11} z^2 + 9\beta_1^2 D_{66} - (1 + 2\beta_1 R) D_{66} \Omega^2.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

kde koeficienty k_1 a k_2 byly získány z [34] a

$$z = \frac{2}{\pi}, \quad \Omega = \frac{\omega}{\bar{\omega}}, \quad \bar{\omega}^2 = \frac{\pi^2 C_{66}}{4\rho b^2}$$

Pokud položíme determinant matice koeficientů $A_j^{(n)}$ z rovnice (4.14) roven nule

$$\left| a_{ij} \right| = 0 \tag{4.16}$$

dostaneme rozptyl poměru Ω vs z .

Pro všechny kořeny z rovnice (4.16) je možno vyjádřit pěti ze šesti rovnic (4.14) pět poměrů amplitud

$$\frac{A_2^{(0)}}{A_1^{(1)}} = \alpha_{1n}, \quad \frac{A_3^{(0)}}{A_1^{(1)}} = \alpha_{2n}, \quad \frac{A_2^{(2)}}{A_1^{(1)}} = \alpha_{3n}, \quad \frac{A_3^{(2)}}{A_1^{(1)}} = \alpha_{4n}, \quad \frac{A_1^{(3)}}{A_1^{(1)}} = \alpha_{5n}. \tag{4.17}$$

Dále můžeme použít následující okrajové podmínky

a) Nulové napětí na povrchu pro $x_2 = \pm(b + 2b')$

$$p_k^{(m)} = \beta_{22}t_{12}^{(m)} + \beta_{23}t_{13}^{(m)} = 0 \quad (k = 2, 3; \quad m = 0, 2). \quad (4.18)$$

b) Nulové napětí na hranách pro $x_2 = \pm a$

$$p_1^{(q)} = \beta_{11}t_{11}^{(q)} = 0 \quad (q = 1, 3). \quad (4.19)$$

S šesti koeficienty z_n z rovnice (4.14) a třiceti koeficienty α_{qn} určenými z rovnice (4.17) můžeme nyní psát

$$\begin{aligned} u_2^{(0)} &= \sum_{n=1}^6 A_n \alpha_{1n} \sin \xi x_1, & u_3^{(0)} &= \sum_{n=1}^6 A_n \alpha_{2n} \sin \xi x_1, \\ u_1^{(1)} &= \sum_{n=1}^6 A_n \cos \xi x_1, & u_2^{(2)} &= \sum_{n=1}^6 A_n \alpha_{3n} \sin \xi x_1, \\ u_3^{(2)} &= \sum_{n=1}^6 A_n \alpha_{4n} \sin \xi x_1, & u_1^{(3)} &= \sum_{n=1}^6 A_n \alpha_{5n} \cos \xi x_1. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Po dosazení rovnic (4.20) do rovnic (4.5) a použití okrajové podmínky určené v (4.19) dostaneme následující homogenní rovnici

$$\sum_{n=1}^6 A_n b_{mn} = 0, \quad (m = 1, \dots, 6), \quad (4.21)$$

kde

$$\begin{aligned} b_{1n} &= [(\beta_{23}^2 D_{55} + 2\beta_{22}\beta_{23}D_{56} + \beta_{22}^2 D_{66})\alpha_{1n}z_n + \\ &+ (\beta_{23}\beta_{33}D_{55} + (\beta_{23}^2 + \beta_{22}\beta_{33})D_{56} + \beta_{22}\beta_{23}D_{66})\alpha_{2n}z_n + \\ &+ \frac{2}{\pi}k_1\beta_{11}(\beta_{23}D_{56} + \beta_{22}D_{66}) + \frac{2}{\pi}\beta_{11}(\beta_{23}D_{56} + \beta_{22}D_{66})\alpha_{5n}] \cos(\xi_n \frac{a}{b}), \\ b_{2n} &= [(\beta_{23}\beta_{33}D_{55} + (\beta_{23}^2 + \beta_{22}\beta_{33})D_{56} + \beta_{22}\beta_{23}D_{66})\alpha_{1n}z_n + \\ &+ (\beta_{33}^2 D_{55} + 2\beta_{23}\beta_{33}D_{56} + \beta_{23}^2 D_{66})\alpha_{2n}z_n + \\ &+ \frac{2}{\pi}k_1\beta_{11}(\beta_{33}D_{56} + \beta_{23}D_{66}) + \frac{2}{\pi}\beta_{11}(\beta_{33}D_{56} + \beta_{23}D_{66})\alpha_{5n}] \cos(\xi_n \frac{a}{b}), \\ b_{3n} &= [-k_2\beta_{11}D_{11}z_n^2 + \frac{16}{3\pi}(\beta_{22}D_{12} + \beta_{23}D_{14})\alpha_{3n}z_n + \\ &+ \frac{16}{3\pi}(\beta_{32}D_{12} + \beta_{33}D_{14})\alpha_{4n}z_n] \frac{1}{z_n} \sin(\xi_n \frac{a}{b}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{4n} &= \left[-\frac{4}{3\pi}\beta_{11}(\beta_{23}D_{56} + \beta_{22}D_{66}) + (\beta_{23}^2D_{55} + 2\beta_{22}\beta_{23}D_{56} + \beta_{22}^2D_{66})\alpha_{3n}z_n + \right. \\
&\quad + (\beta_{23}\beta_{33}D_{55} + (\beta_{22}\beta_{33} + \beta_{23}^2)D_{56} + \beta_{22}\beta_{23}D_{66})\alpha_{4n}z_n + \\
&\quad \left. + \frac{36}{5\pi}\beta_{11}(\beta_{23}D_{56} + \beta_{22}D_{66})\alpha_{5n} \right] \cos(\xi_n \frac{a}{b}), \\
b_{5n} &= \left[-\frac{4}{3\pi}\beta_{11}(\beta_{33}D_{56} + \beta_{23}D_{66}) + (\beta_{23}\beta_{33}D_{55} + (\beta_{23}^2 + \beta_{22}\beta_{33})D_{56} + \right. \\
&\quad + \beta_{22}\beta_{23}D_{66})\alpha_{3n}z_n + (\beta_{33}^2D_{55} + 2\beta_{23}\beta_{33}D_{56} + \beta_{23}^2D_{66})\alpha_{4n}z_n + \\
&\quad \left. + \frac{36}{5\pi}\beta_{11}(\beta_{33}D_{56} + \beta_{23}D_{66})\alpha_{5n} \right] \cos(\xi_n \frac{a}{b}), \\
b_{6n} &= \left[\frac{16}{5\pi}(\beta_{22}D_{12} + \beta_{23}D_{14})\alpha_{3n}z_n + \frac{16}{5\pi}(\beta_{23}D_{12} + \beta_{33}D_{14})\alpha_{4n}z_n \right] + \\
&\quad + \beta_{11}D_{11}z_n^2 \frac{1}{z_n} \sin(\xi_n \frac{a}{b}).
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Kořeny poměru a/b získáme, pokud položíme determinant koeficientů A_n v rovnici (4.21) roven nule

$$|b_{mn}| = 0 \tag{4.23}$$

a získáme tím výsledky pro sledování závislosti frekvenčního spektra Ω vs poměr a/b .

4.1.2 Vliv elektrické tuhosti desky

Analýza volných vibrací piezoelektrického rezonátoru kmitajícího tloušťkově-střižnými kmity se zkratovanými elektrodami ukázala, že vztah mezi základní a dalšími rezonančními frekvencemi není dán jednoduchými integrálními výrazy. Jejich vzájemný vztah závisí na faktoru elektromechanické vazby. Pro piezoelektrický rezonátor s malou hodnotou faktoru elektromechanické vazby a šířkou $2b$ můžeme určit rezonanční frekvenci základní a třetí harmonické tloušťkově - střižných kmitů z matematických popisů Tierstena [30]

$$f_n = \frac{n}{4b} \sqrt{\frac{\bar{c}_{66}}{\varrho}} \left(1 - \frac{4k_{26}^2}{n^2\pi^2} \right), \tag{4.24}$$

kde

$$\bar{c}_{66} = c_{66}(1 + \bar{k}_{26}^2), \quad \bar{k}_{26}^2 = \frac{e_{26}^2}{c_{66}\epsilon_{22}}.$$

Z rovnice (4.24) získáme

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{4b} \sqrt{\frac{c_{66}}{\varrho}} (1 + 0.095k_{26}^2), \\ f_3 &= \frac{3}{4b} \sqrt{\frac{c_{66}}{\varrho}} (1 + 0.455k_{26}^2). \end{aligned} \quad (4.25)$$

Koeficienty $0.095k_{26}$ a $0.455k_{26}$ v rovnici (4.25) představují přírůstkové změny frekvenčně-teplotních charakteristik. Teplotní koeficient prvního řádu pro základní a třetí harmonickou rezonanční $\Delta T f_1^{(1)}$ a $\Delta T f_3^{(1)}$ je dán vztahem

$$\begin{aligned} \Delta T f_1^{(1)} &= 0.095k_{26}^2 (T k_{26}^2)^{(1)}, \\ \Delta T f_3^{(1)} &= 0.455k_{26}^2 (T k_{26}^2)^{(1)}, \end{aligned} \quad (4.26)$$

kde

$$(T k_{26}^2)^{(1)} = 2T e_{26}^{(1)} - T \epsilon_{22}^{(1)} - T c_{66}^{(1)}.$$

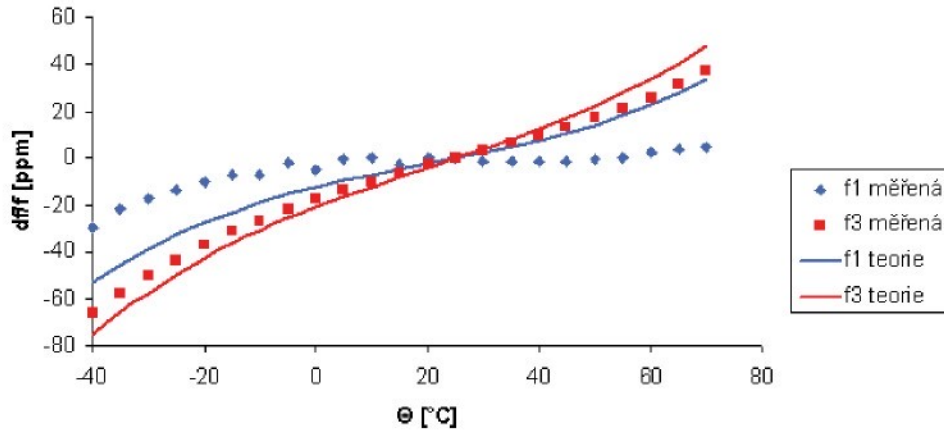
Pro AT-řez křemenné desky je $k_{26} = 0.08806$, $(T k_{26}^2)^{(1)} = 2.12 \times 10^{-4}$, $\Delta f_1^{(1)} = 1.64 \times 10^{-7}$ a $\Delta f_3^{(1)} = 7.47 \times 10^{-7}$. Vypočtené hodnoty teplotního koeficientu $(T k_{26}^2)^{(1)}$ odpovídají reálně naměřené teplotní závislosti AT-řezů křemenného piezoelektrického rezonátoru jsou uvedeny v tabulce 4.1 na straně 50.

4.1.3 Měření a vypočtené teplotní charakteristiky

Předchozí část byla věnována obecnému odvození teplotní závislosti Y-řezu křemenného výbrusu kmitajícího tloušťkově - střížnými kmity. Teplotní závislost Y-řezu libovolného výbrusu piezokeramického materiálu lze také stanovit experimentálně měřením změny rezonančního kmitočtu vlivem okolní teploty (např. v teplotní komoře).

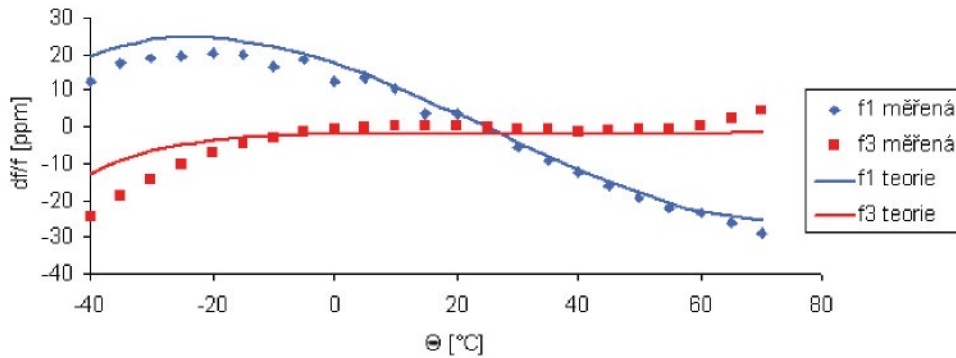
Pro porovnání měření a výpočtů byly vybrány dvě skupiny AT-řezů křemenných deskových piezoelektrických rezonátorů s orientacemi $-35^\circ 13'$ a $-35^\circ 21'$. Na povrch destiček o průměru 7.95 mm byly nanесeny stříbrné elektrody o průměru 4 mm a hmotnostním zatížením $R = 0.008$. Obě skupiny rezonátorů kmitají tloušťkově-střížnými typy kmitů na základní harmonické 10 MHz. Základní a třetí harmonická rezonanční frekvence byla u obou skupin rezonátorů měřena a počítána v rozsahu teplot od -35°C do $+70^\circ\text{C}$.

Z teoreticky získaných hodnot frekvenčně-teplotních koeficientů byly vypočteny frekvenčně-teplotní charakteristiky, které jsou společně s naměřenými frekvenčně-teplotními



Obrázek 4.1: Teplotní charakteristiky AT -řezu ($-35^{\circ}13'$)

charakteristikami pro základní i třetí harmonickou rezonanční frekvenci pro řezy s orientací $-35^{\circ}13'$ zobrazeny na obr. 4.1. Na obr. 4.2 je typická naměřená a vypočtená frekvenčně-teplotní charakteristika pro základní i třetí harmonickou rezonanční frekvenci pro řezy s orientací $-35^{\circ}21'$.



Obrázek 4.2: Teplotní charakteristiky AT -řezu ($-35^{\circ}21'$)

Z naměřených hodnot frekvenčně-teplotních charakteristik byly vypočteny frekvenčně-teplotní koeficienty, které jsou pro obě skupiny piezoelektrických rezonátorů shrnuty v tabulce (4.1).

Tabulka 4.1: Frrekvenčně-teplotní koeficienty z naměřených charakteristik

$n = 1$ základní harmonická
 $n = 3$ třetí harmonická

Úhel orientace	n=1			n=3		
	$Tk_f^{(1)}$ [10 ⁻⁷]	$Tk_f^{(2)}$ [10 ⁻⁹]	$Tk_f^{(3)}$ [10 ⁻¹¹]	$Tk_f^{(1)}$ [10 ⁻⁷]	$Tk_f^{(2)}$ [10 ⁻⁹]	$Tk_f^{(3)}$ [10 ⁻¹¹]
-35°13'	-0.259	-0.846	9.361	6.359	7.432	9.250
-35°21'	-7.325	-1.487	0.717	-0.645	-0.680	9.379

V tabulce (4.2) jsou zobrazeny frekvenčně-teplotní koeficienty vypočtené z rovnic (4.7), (4.11), (4.16), (4.21) a (4.23) s ohledem na (4.26).

Tabulka 4.2: Frrekvenčně-teplotní koeficienty vypočtené teoreticky

$n = 1$ základní harmonická
 $n = 3$ třetí harmonická

Úhel orientace	n=1			n=3		
	$Tk_f^{(1)}$ [10 ⁻⁷]	$Tk_f^{(2)}$ [10 ⁻⁹]	$Tk_f^{(3)}$ [10 ⁻¹¹]	$Tk_f^{(1)}$ [10 ⁻⁷]	$Tk_f^{(2)}$ [10 ⁻⁹]	$Tk_f^{(3)}$ [10 ⁻¹¹]
-35°13'	4.633	1.547	10.847	7.917	1.251	10.834
-35°21'	-7.774	-0.203	10.953	0.091	0.394	11.168

Rozdíly mezi naměřenými hodnotami $Tk_f^{(m)}$ a výpočtem určenými hodnotami $Tk_f^{(m)}$ jsou dány nejistotou naměřených veličin a také možnými příměsemi v materiálu, ze kterého jsou rezonátory vyrobeny. Teoretické výpočty jsou určeny pro křemen bez příměsí, čehož lze při výrobě umělého křemene dosáhnout jen velmi obtížně. Dalším důvodem nepřesností je tolerance výroby rezonátoru, tedy přesnost úhlu řezu a hmotnosti nanesených elektrod. Úhel řezu je dle výrobce rezonátorů určen s přesností $\pm 1'$.

4.2 Určení nelineárního koeficientu γ

Jak již bylo uvedeno ve 2. kapitole, existuje velké množství vlivů, které mají vliv na stabilitu rezonančního kmitočtu. Teplotní závislost rezonančního kmitočtu je z těchto vlivů sice většinou nejvýraznější, ale není jediným jevem, který má na stabilitu rezonančního kmitočtu vliv. V dnešní době je stále vyšší požadavek uživatelů na stabilitu rezonančního kmitočtu nebo naopak na výraznou a zároveň přesně definovanou závislost rezonančního kmitočtu na nějakém jevu. Toho se využívá při speciálních aplikacích, kdy je tato závislost převodníkem nějaké měřené veličiny. Piezoelektrický rezonátor je v takovém případě využíván jako senzor nebo jako součást senzoru měřené veličiny. Mezi takové jevy patří např.

úroveň buzení (amplitudo-frekvenční vliv), okolní vibrace, hmotnostní zatížení elektrod (nejčastěji používané mikrováhy), intermodulační jev atd.

Z této velké skupiny jevů se dále budeme věnovat dalším nelineárním vlastnostem elastických vlastností piezoelektrických látek, v našem případě ale pouze křemeni. Tyto nelinearity se nejčastěji sledují pomocí vlivu intermodulačního buzení rezonátoru nebo se sleduje vliv úrovně budícího signálu (tzv. amplitudo-frekvenční vliv) na změnu rezonanční frekvence. Tomuto tématu se pro Y -řezy podrobněji věnoval Tiersten a ve své práci [29] ukázal vliv nelineárních vlastní elastických modulů a z nich odvodil základní vztah pro nelineární koeficient γ v následující podobě

$$\gamma = 1/2\tilde{c}_{22}^E + \tilde{c}_{266}^E + 1/6\tilde{c}_{6666}^E, \quad (4.27)$$

kde $\tilde{c}_{22}^E$, $\tilde{c}_{266}^E$ a $\tilde{c}_{6666}^E$ značí postupně efektivní elastické moduly druhého, třetího a čtvrtého řádu.

Jak již bylo uvedeno dříve, základní materiálové konstanty libovolného řádu je pro každý piezoelektrický řez nutno přepočítat a určit efektivní hodnoty těchto konstant. Při experimentálním určování vlastností jednotlivých rezů piezoelektrických rezonátorů je tedy určena pouze efektivní hodnota této konstanty platná pouze pro použitý řez a při známém úhlu řezu je možno s konkrétní nejistotou měření předpokládat, že je tato hodnota obecně platná i pro řezy stejného úhlu. Nelineární koeficient γ je podle rovnice (4.27) složen ze tří efektivních elastických modulů. Efektivního elastického modulu druhého, třetího a čtvrtého řádu. Základní matice elastického modulu jsou známy pouze pro druhý a třetí řád. Efektivní hodnoty $\tilde{c}_{22}^E$ a $\tilde{c}_{266}^E$ je tedy možno určit s pomocí tabulek, které obsahující hodnoty základních prvků matice elastického modulu druhého a třetího řádu, dosazením do obecné rovnice (2.21). Tabulky s materiálovými vlastnostmi druhého a třetího řádu jsou uvedeny v příloze B.1 - C.2

Pro výpočet elastických modulů druhého a třetího řádu byly v jazyce Delphi vytvořeny jednoduché programy, které po zadání úhlu natočení pro Y -řezy křemenných piezoelektrických rezonátorů základní matice přepočítají na efektivní hodnoty. Výstupem není jen potřebná hodnota $\tilde{c}_{22}^E$ a $\tilde{c}_{266}^E$, ale celá matice efektivních hodnot. Pro vlastní výpočet jsme použili zjednodušenou verzi programu, která nám určí jen žádanou hodnotu elastického modulu druhého a třetího řádu.

Elastický modul čtvrtého řádu $\tilde{c}_{6666}^E$ je v této rovnici neznámou, protože prvky základní matice elastického modulu čtvrtého řádu ještě nikde nebyly publikovány. Pro určení koeficientu γ však existuje několik metod a je ho tedy možno měřením pro konkrétní řez určit. Ve své práci ho postupně určili jak Tiersten [29], tak i Nosek [22] pro AT -řez piezoelektrického rezonátoru. Popisu těchto metod měření a jejich další specifikaci se budeme věnovat dále.

4.3 Určení $\tilde{c}_{6666}$

Jak již bylo zmíněno dříve, pro elastický modul čtvrtého řádu $c_{\lambda\mu\kappa\tau}^E$ základní matice známa není a tak je určení efektivní hodnoty tohoto modulu stejným postupem jako u modulů nižších řádů nemožné. Byly však nalezeny metody, které nám umožňují určit závislost rezonančního kmitočtu na různých vlivech, které jsou charakteristické pro vliv elastické nelinearity vyšších řádů. Pro tyto vlivy byly také odvozeny vztahy pro určení nelineárního koeficientu γ . V celé rovnici (4.27) je tedy jen jedna neznámá a tou je právě efektivní hodnota elastického modulu čtvrtého řádu c_{6666}^E po její úpravě dostaneme

$$\tilde{c}_{6666}^E = 6\gamma - 3\tilde{c}_{22}^E - 9\tilde{c}_{266}^E. \quad (4.28)$$

Touto rovnicí je možno určit efektivní hodnotu změřeného Y -řezu piezoelektrického výbrusu. I když není známa základní matice elastických modulů čtvrtého řádu, lze podle rovnice (2.21) obecně určit, z kolika prvků základní matice elastického modulu čtvrtého řádu je efektivní hodnota elastického modulu $\tilde{c}_{6666}^E$ určena. Pro tento výpočet byl vytvořen program, který nám vypíše obecnou rovnici výpočtu tenzoru osmého řádu, kterým elastický modul čtvrtého řádu je. Rovnice je složena z nenulových násobků prvků základní tenzorové matice.

Program byl vytvořen v obecné poloze, tedy pro určení $c_{\lambda\mu\kappa\tau}^E$. Základním prvkem programu pro výpočet efektivní hodnoty prvku matice tenzoru osmého řádu je tato transformační matice

$$\tilde{c}_{ijklmnop} = \sum_{abcdefgh} \alpha_{ia}\alpha_{jb}\alpha_{kc}\alpha_{ld}\alpha_{me}\alpha_{nf}\alpha_{og}\alpha_{ph}, \quad (4.29)$$

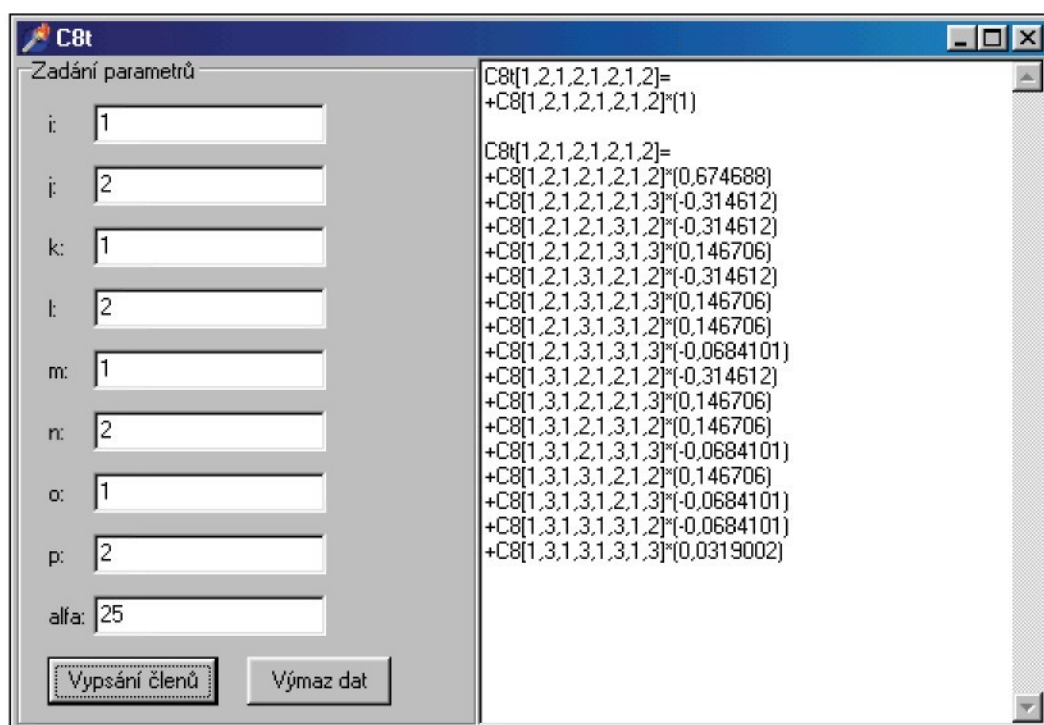
kde $\alpha_{ia} \div \alpha_{ph}$ jsou směrové kosiny úhlu natočení, které jsou pro Y -řezy určeny v tabulce 4.3. Jedná se tedy o otočení kolem elektrické osy X základního ortogonálního systému os.

Tabulka 4.3: Směrové kosiny pro Y -řezy křemenných výbrusů

Osa	x	y	z
x'	1	0	0
y'	0	$\cos \Phi$	$-\sin \Phi$
z'	0	$\sin \Phi$	$\cos \Phi$

Jak již bylo uvedeno v předcházejících částech, program pro transformaci nám nemůže spočítat konkrétní hodnotu elastického modulu. Proto byl tento program oproti programům pro výpočet efektivních hodnot tenzorů druhého a třetího řádu upraven na pouhý výčet nenulových násobků prvků základní tenzorové matice. V první verzi programu byly vypisovány všechny nenulové prvky transformované matice. Výsledkem tedy stejně jako u elastických modulů druhého a třetího řádu byla celá matice efektivních hodnot elastického modulu čtvrtého řádu. Celý výstup byl však velmi nepřehledný a proto v konečné verzi vypisuje program výčet nenulových násobků prvků základní matice pouze pro jeden zvolený prvek matice efektivních hodnot elastického modulu čtvrtého řádu.

Celý program je postaven tak, že spočítá transformační rovnici pro libovolný úhel natočení Y -řezu (stejně jako je tomu zvykem u programů pro elastické moduly nižších řádů), ale pouze pro jeden libovolný prvek matice efektivních hodnot elastického modulu čtvrtého řádu. Na obr. 4.3 je vidět vzorový výpis tohoto programu pro prvek $\tilde{c}_{6666}^E$, který nás zajímá. Tato efektivní hodnota je složena z 16 prvků základní matice tenzoru osmého řádu.



Obrázek 4.3: Okno programu pro výpočet efektivní hodnoty koeficientu tenzoru osmého řádu

Pro elastický modul čtvrtého řádu předpokládáme platnost stejných pravidel symetrie, která jsou uvedena např. v [27] a v této práci na straně 16. Tím se nám počet prvků základní matice, které se svými váhovými poměry podílí na velikosti efektivní hodnoty hledaného prvku elastického modulu, redukuje. Výsledkem redukce vlivem symetrie pro námi hledanou efektivní hodnotu $\tilde{c}_{6666}^E$ je následující rovnice

$$\tilde{c}_{6666}^E = A_1 c_{5555}^E + A_2 c_{5556}^E + A_3 c_{5566}^E + A_4 c_{5666}^E + A_5 c_{6666}^E, \quad (4.30)$$

kde koeficienty A_1 , A_2 , A_3 , A_4 a A_5 jsou váhovým zastoupením jednotlivých prvků základní matice elastického modulu čtvrtého řádu. Počet prvků základní matice tenzoru osmého řádu se nám tedy redukoval na pouhých 5 nezávislých prvků.

Dostali jsme tedy základní rovnici o 5 neznámých. Pokud dokážeme určit hodnotu $\tilde{c}_{6666}^E$ pro 5 různých Y -řezů, bude možno výpočtem určit 5 neznámých prvků základní matice elastického modulu čtvrtého řádu.

4.4 Metody pro určení nelineárního koeficientu γ

Pro určení nelineárního koeficientu γ předpokládáme použití dvou základních metod. Internodulační metody a závislosti rezonanční frekvence na buzení. Pro obě metody jsou popsány vztahy, které vedou k určení nelineárního koeficientu γ . Tyto vztahy jsou podrobně popsány v částech věnovaných jednotlivým metodám. V těchto částech je také diskutována vhodnost použití těchto metod pro měřené Y -řezy křemenných piezoelektrických rezonátorů.

Pro měření byly vybrány následující komerčně využívané Y -řezy : AT -řez, BT -řez, CT -řez, DT -řez, $Y90$ -řez a $Y67,5$ -řez. Jak je vidět, pro řezy rezonátorů se používá více typů označení. V tabulce 4.4 jsou shrnuty všechny typy označení pro použité řezy. V dalším textu budeme většinou používat komerční typ označení nebo označení výrobce (pokud komerční označení není zažito).

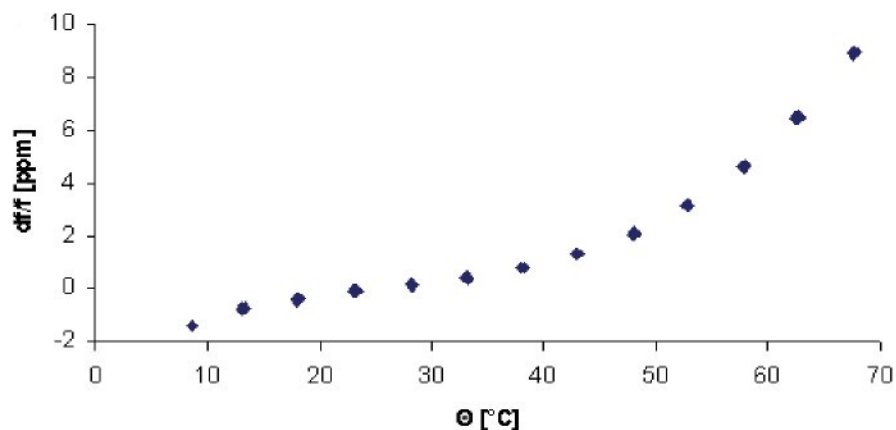
Tabulka 4.4: Označení použitých rezonátorů
 Y -řezů křemene

Natočení osy Y	$-36,25^\circ$	$-35,2^\circ$	$-22,5^\circ$	0°	$49,05^\circ$	$52,5^\circ$
Označení řezu výrobcem	$Y53,75$	$Y54,8$	$Y67,5$	$Y90$	$Y139,05$	$Y142,5$
Komerční označení	CT -řez	AT -řez			BT -řez	DT -řez

V předchozí kapitole bylo řečeno, že pro určení efektivní hodnoty elastického modulu je potřeba 5 prvků základní matice. Přesto bylo vybráno 6 řezů, ze kterých by se po určení jejich efektivní hodnoty elastického modulu čtvrtého řádu mělo dát dle vztahu (4.30) určit 5 hodnot základní matice elastického modulu čtvrtého řádu. Šestý řez je brán jako kontrolní pro porovnání výsledku efektivní hodnoty elastického modulu čtvrtého řádu vypočteného a naměřeného. Zároveň je tu díky šestému řezu možnost různých kombinací použitých naměřených hodnot pro výpočet a zjištění rozptylu takto určených hodnot v budoucnosti. V rozsahu předložené práce je porovnávacím řezem především AT -řez, pro který již byla efektivní hodnota $\tilde{c}_{666}^E$ několikrát experimentálně určena. Bude tedy používán i pro specifikaci, zda je použitá měřicí metoda pro určení hodnoty nelineárního koeficientu γ vhodná a za jakých podmínek je nutno měření provádět.

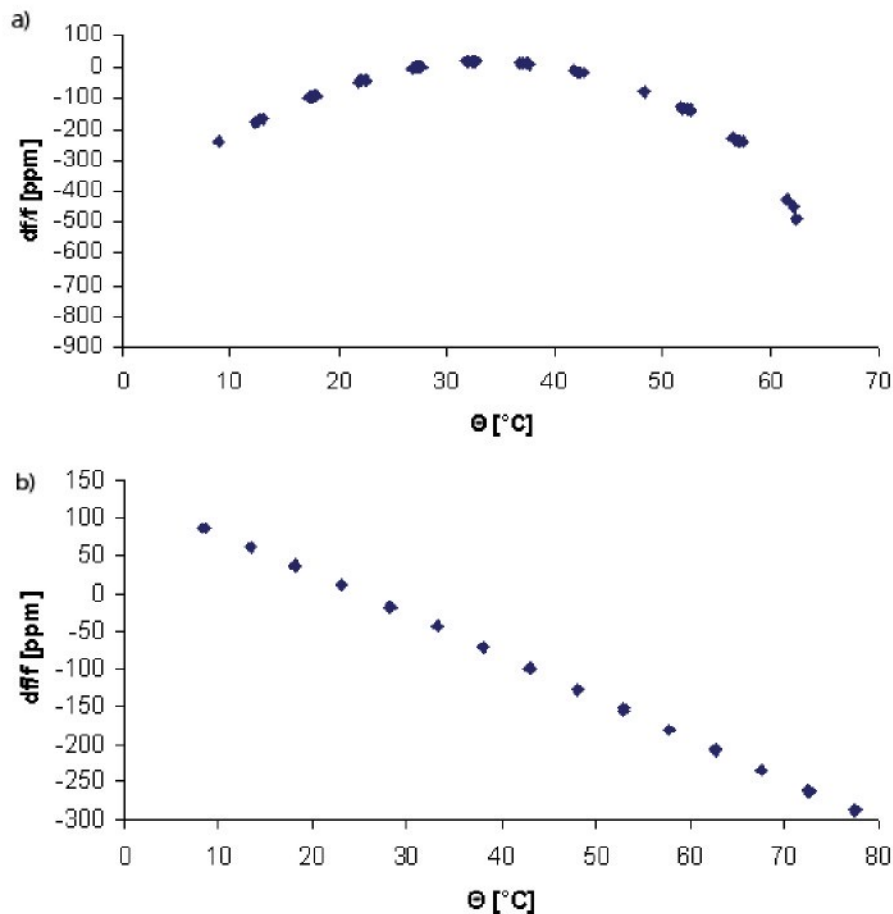
4.4.1 Negativní vlivy na všechny typy měření nelineárního koeficientu γ

Nelineární koeficient γ patří mezi nelineární jevy, které jsou velmi obtížně sledovatelné. Největším problémem, který brání přesnému měření všech slabších nelineárních vlivů, je již dříve popsáný vliv teplotní závislosti rezonančního kmitočtu. Tento vliv je velmi dominantní a zkresluje a tím znehodnocuje výsledky měření jiných typů nelinearit na piezoelektrických rezonátorech. Obě zvolené metody pro měření nelineárního koeficientu γ jsou ovlivněny teplotními závislostmi rezonančního kmitočtu. Vliv teploty tedy naměřené hodnoty v určitých případech znehodnocuje nebo silně zatěžuje nepřesností.



Obrázek 4.4: Teplotní charakteristika pro AT -řez

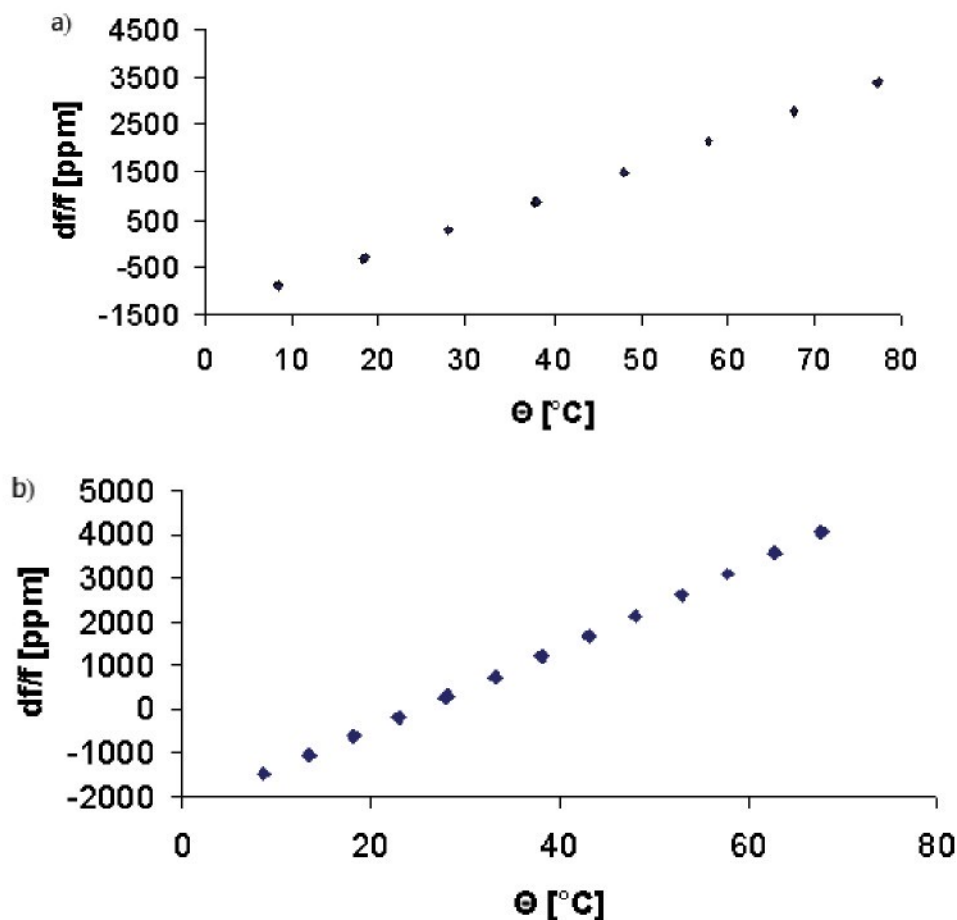
Pro všechny použité piezoelektrické rezonátory jednotlivých Y -řezů je potřeba změřit teplotní závislost rezonančního kmitočtu a určit pásmo teplotní necitlivosti nebo bod obratu teplotní závislosti rezonančního kmitočtu piezoelektrického rezonátoru (lokální maximum nebo minimum křivky). Při měření na této teplotě bude eliminován vliv teplotní závislosti rezonančního kmitočtu v průběhu celé doby měření. Proto byly pro všechny piezoelektrické rezonátory jednotlivých Y -řezů změřeny teplotní závislosti v oblasti teplot, které lze na použité teplotní komoře nastavit. Na obrázku 4.4 až obr. 4.6 jsou postupně teplotní charakteristiky AT -řezu, BT -řezu a CT -řezu, řezu $Y90$ a řezu $Y67,5$.



Obrázek 4.5: Teplotní charakteristika pro a) BT -řez b) CT -řez

Jak je z těchto charakteristik vidět, jsou především řezy $Y90$ a $Y67,5$ velmi teplotně závislé a v intervalu teplot nastavitelných na měřicí komoře je jejich teplotní závislost téměř lineární.

Řez CT má také téměř lineární teplotní závislost v oblasti normálních teplot, ale změna rezonanční frekvence je ve srovnání s řezy $Y90$ a $Y67,5$ téměř nevýrazná.



Obrázek 4.6: Teplotní charakteristika řezu a) Y67, b) Y90

U řezu *BT* je v rozsahu teplotní komory možno najít bod obratu teplotní závislosti rezonančního kmitočtu a dá se předpokládat, že při měření v okolí tohoto bodu bude vliv teplotní závislosti především elastických vlastností piezoelektrického rezonátoru minimalizován.

U řezu *AT* je v rozsahu teplotní komory tzv. "pásma teplotní necitlivosti". Jak již bylo v části věnované teplotní závislosti řečeno, teplotní závislost rezonančního kmitočtu je křivkou 3. řádu a má tedy dva body obratu. Křivka teplotní závislosti *AT*-řezu má body obratu velmi blízko vedle sebe a tak se pro praktické využití celé pásmo považuje za teplotně velmi stabilní. *AT*-řez je také díky tomu nejčastěji používaným řezem pro stavbu oscilátorů pro využití při normálních teplotách (od 18° do 28°C).

Všechny teplotní charakteristiky rezonátorů byly změřeny na zařízení Saunders, které se v praxi často průmyslově používá pro měření teplotních závislostí rezonátorů při jejich výrobě. Toto zařízení má přesnost stanovení rezonanční frekvence ± 2 ppm. Vzhledem

k tomu, že pro zvolené řezy byla stanovena rezonanční frekvence 10 MHz, jsou rezonanční frekvence pro koeficient $\Theta = \sqrt{6}$ a $k = 2$ stanoveny s nejistotou $\pm 1,7$ Hz.

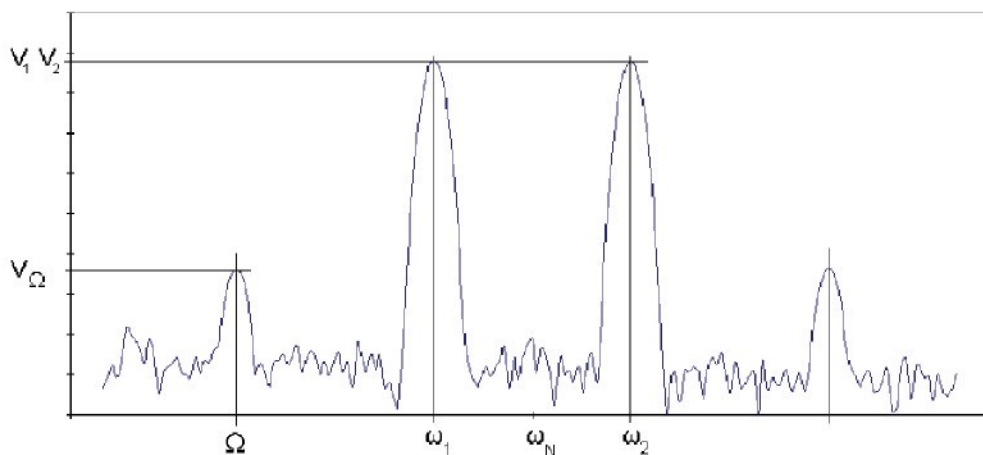
4.5 Intermodulační metoda

Dále se budeme věnovat metodám, které se dají využít pro zjištění nelineárního koeficientu γ . Nejprve se budeme věnovat intermodulační metodě. Tato metoda již byla v minulosti na pracovišti realizována, proto se ji pokusíme pro měření použít. Popíšeme si, jak intermodulační efekt vzniká.

Jestliže jsou dva nebo více harmonických signálů s amplitudami V_1 a V_2 a kmitočty ω_1 a ω_2 rovnoměrně rozloženy kolem rezonančního kmitočtu rezonátoru ω_N a zároveň působí současně, vzniká v důsledku nelineárních elastických vlastností rezonátoru prostřednictvím piezoelektrického jevu intermodulační signál o napětí V_Ω a úhlovém kmitočtu Ω , jehož velikost získáme ze vztahu

$$\Omega_1 = 2\omega_1 - \omega_2 \quad (4.31)$$

Na obrázku 4.7 je znázorněn intermodulační jev a jsou zde i popsány jednotlivé charakteristické veličiny.



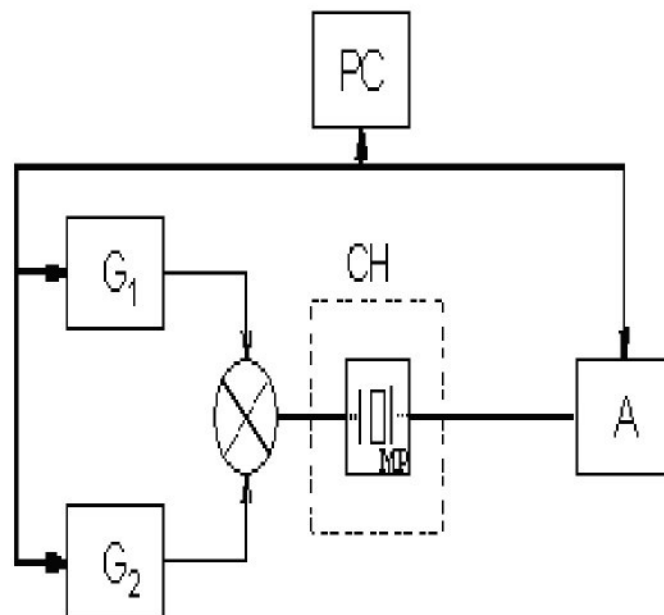
Obrázek 4.7: Průběh amplitud výstupního signálu obvodu pro měření intermodulace

Tohoto jevu lze využít k zjištění nelineárních elastických vlastností piezoelektrického materiálu, ze kterého je rezonátor vyroben. Protože se vždy jedná o určitý úhel řezu piezoelektrickým materiálem, zjišťujeme tedy pouze efektivní hodnoty elastických vlastností,

které se na jevu podílí. Odvození vzorců pro stanovení elastických vlastností je uvedeno dále a je odvozeno z použitého měřicího řetězce. Z předchozího popisu tedy vyplývá, že pro určení frekvencí ω_1 a ω_2 je nutné nejdříve změřit rezonanční kmitočet všech použitých rezonátorů. K tomu bylo použito standartní zařízení firmy Saunders.

4.5.1 Měřicí řetězec

Pro vlastní měření intermodulačního jevu byl vytvořen měřicí řetězec, který je zobrazen na obrázku 4.8. V řetězci byly použity dva identické generátory HP 33120A s frekvenčním rozsahem $0,1 \div 13\text{ MHz}$ s amplitudou harmonického signálu do $23,95\text{ dBm}$, teplotní komora Saunders 4220 a Network/Spectrum analyzátor HP 4195A, který je možno použít pro měření frekvencí až do 500 MHz v úrovních signálů $-9 + 20\text{ dBm}$.



Obrázek 4.8: Měřicí řetězec pro měření intermodulačního jevu

CH - teplotní komora Saunders

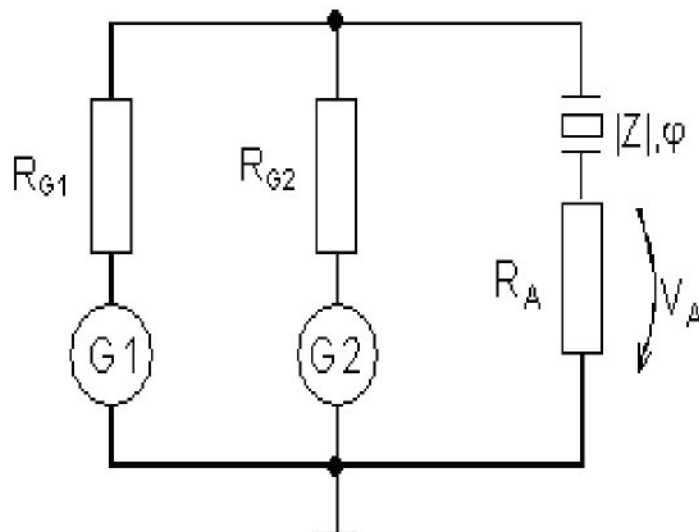
G_1, G_2 - identické generátory

A - analyzátor HP 4195A

MP - měřicí přípravek

PC - řídicího PC

Náhradní elektrický obvod měřicího řetězce je zobrazen na obrázku 4.9.



Obrázek 4.9: Elektrický obvod zapojení měřicího řetězce

R_A - vnitřní odpor analyzátoru

R_{G1} , R_{G2} - vnitřní odpory generátorů

V_A - napětí na odporu R_A

φ - fázový posun výst. napětí na rezonátoru

$|Z|$ - impedance rezonátoru

Při realizaci měření byly použity dva identické generátory s nastavením stejného vnitřního odporu, které jsou vůči sobě zapojeny paralelně. Rezonátorem tedy protéká intermodulační proud $\hat{I}_\Omega$. Pro intermodulační napětí po zavedení zjednodušujících konstant tedy platí Komplexní hodnota intermodulačního napětí pro obvod na obr. 4.9 může být odvozena stejně jako v [22].

$$\hat{V}_\Omega = \frac{-RA_{1\Omega}^2 A_{23} A_4 + jRA_{1\Omega} A_4}{1 + R^2 A_{1\Omega}^2 A_{23}^2} \quad (4.32)$$

kde $R = R_G + R_L$ a R_G a R_L jsou postupně vnitřní odpory generátoru a analyzátoru,

$$A_{1\Omega} = S_c \Omega \frac{\varepsilon_{22}}{2h} \quad (4.33)$$

$$A_{23} = 1 + k_{26}^{*2} + \frac{8k_{26}^{*2} N^2 \pi^2}{\Delta_\Omega} \frac{1}{\Delta_\Omega} = A_2 + \frac{A_3}{\Delta_\Omega} \quad (4.34)$$

$$A_4 = \frac{18\gamma k_{26}^2 e_{26}^2 V_1^2 V_2}{c_{66}^3 h^2 N^4 \pi^4 \Delta_{\Omega c}} = A_5 \frac{V_1 V_2}{\Delta_{\Omega c}} \quad (4.35)$$

$$\Delta_{\Omega} = \frac{\omega_N^2}{\Omega^2} - 1 \quad (4.36)$$

$$\Delta_{\Omega c} = [(\Omega^2/\omega_N^2) - 1][(\omega_N^2/\omega_1^2 - 1)]^2[(\omega_N^2/\omega_2^2) - 1] \quad (4.37)$$

Intermodulační proud tvoří složka závislá na intermodulačním napětí $\hat{V}_{\Omega}$ a složka závislá na velikostu budících signálů V_1 a V_2 . Pro stanovení intermodulačního proudu $\hat{I}_{\Omega}$ po úpravě a zjednodušení dostaneme

$$\hat{I}_{\Omega} = -\hat{Y}_{\Omega}\hat{V}_{\Omega} + jA_{1\Omega}A_5\frac{V_1^2V_2}{\Delta_{\Omega c}} \quad (4.38)$$

kde $\hat{Y}_{\Omega}$ je admitance rezonátoru, $\hat{V}_{\Omega}$ je intermodulační napětí, V_1 a V_2 amplitudy budících signálů a ostatní parametry již byly určeny dříve.

Na obrázku 4.7 na str. 58 je zobrazen celý spektrální průběh amplitud výstupního signálu obvodu a jsou zde i názorně ukázány výše jmenované amplitudy V_1 , V_2 a V_{Ω} a kmitočty ω_1 , ω_2 , ω_N a Ω .

Protože pro výpočet nelineárního koeficientu γ je do vzorce (4.35) nutno zadat mnoho změřených nebo vypočtených hodnot, bylo pro měření využito několik měřicích pracovišť. Nejprve byla změřena rezonanční frekvence na základní harmonické včetně křivky impedance v okolí rezonanční frekvence ω a předpokládané frekvence intermodulace Ω_1 a Ω_2 . Intermodulační frekvence Ω_1 a Ω_2 byly pro nastavení rozsahu frekvence analyzátoru HP 4195A. předběžně určeny dle vztahu (4.31) z rezonanční frekvence ω_N a uvažovaného rozdílu mezi rezonanční frekvencí a frekvencemi buzení ω_1 a ω_2 .

Pro celkový výpočet byl opět vytvořen program v jazyce Delphi, který ze zadaných hodnot počítá hledaný koeficient γ . Na obr. 4.10 na straně 62 je vidět, že pro výpočet je potřeba zadat skutečně velké množství nejen nastavenitelných hodnot, ale především hodnot, které je potřeba výpočtem určit nebo změřit. To do celého procesu výpočtu zanáší celkově velkou nejistotu měření, která není žádoucí pro co nejpřesnější určení nelineárního koeficientu γ . Podívejme se tedy podrobněji na přesnost daného měření.

V tabulce (4.5) na str. 63 jsou zobrazeny hodnoty nastavených veličin včetně nejistoty, která je dána výrobcem použitého zařízení. Pro měření byl zvolen generátor HP 33120A s frekvenčním rozsahem $0,1 \div 13\text{MHz}$ s amplitudou harmonického signálu do $23,95\text{dBm}$.

C6666			
Typ rezonátoru (úhel natočení)		-35,20000	°
Harmonická	N	1	
Rezonanční kmitočet	ω_N	10000053,0	Hz
Plocha elektrod	Se	12,56637061436	mm ²
Intermodulační frekvence	Ω	9999755,0	Hz
Budící kmitočet	ω_1	9999955,0	Hz
	ω_2	10000155,0	Hz
Buzení	V_1	5,0	dBm
	V_2	5,0	dBm
Intermodulační odezva	V_Ω	-48,5147	dBm
Impedance rezon. při Ω	$ Z $	50,89	Ω
	φ	-1,3354	rad
	při ω_1	$ Z $	20,04 Ω
		φ	-0,9572 rad
	při ω_2	$ Z $	20,29 Ω
		φ	1,0012 rad
Výpočet Uložit Log do souboru Vymazat Log			
A1o	:	1.21594143217937E-0004	
A2o	:	1.07298868400775E+0002	
A3o	:	3.72454087546665E-0006	
A3o	:	4.89995742654971E-0013	
Z omega	:	7.66464776412667E+0001	
gama re	:	-1.86988666236003E+0011	N m ⁻²
gama im	:	2.81627483313580E+0011	j N m ⁻²
gama	:	3.38051476343855E+0011	N m ⁻²
ct6666	:	1.28052232173727E+0012	N m ⁻²

Obrázek 4.10: Okno programu pro výpočet nelineárního koeficientu γ

Tabulka 4.5: Budící intermodulační signály

Parametr	hodnota			
ω_1	9,999955	$\pm$	0,000082	[MHz]
ω_2	10,000155	$\pm$	0,000082	[MHz]
V_1	-0,34522	$\pm$	0,0057	[dBm]
V_2	-0,716	$\pm$	0,017	[dBm]
R_G	50		fixed	[Ω]
R_L	50		fixed	[Ω]

Přesnosti efektivních hodnot materiálových konstant piezoelektrického rezonátoru jsou dány přesností výroby piezoelektrických rezonátorů. Výrobcem stanovená přesnost úhlu natočení jednotlivých řezů je $\pm 1'$. Hodnoty jednotlivých parametrů základních materiálových matic tenzorových vlastností bereme s nulovou nejistotou. V tabulce (4.6) jsou použité efektivní hodnoty materiálových konstant použité pro výpočet.

Tabulka 4.6: Efektivní hodnoty materiálových konstant pro AT -řez

Parametr	hodnota	
$\tilde{c}_{66}$	$2,9008623 \cdot 10^{10}$	Nm^{-2}
k_{26}^2	0.007724	
$\tilde{e}_{26}$	$-0,09501024$	Cm^{-2}
$\tilde{c}_{266}$	$5,97579148 \cdot 10^{10}$	Nm^{-2}

Další skupinou hodnot použitých ve vzorci pro výpočet koeficientu γ jsou naměřené hodnoty. V tabulce 4.7 jsou naměřené hodnoty pro jeden konkrétní AT -řez s vypočtenými nejistotami, které jsou dány přesností použitých měřicích zařízení a vycházejí tedy z podkladů daných výrobcem.

Tabulka 4.7: Naměřené hodnoty pro výpočet koeficientu γ

Parametr	hodnota			
ω_N	10,000053	$\pm$	0,000002	[MHz]
$\hat{V}_\Omega$	-48,5147	$\pm$	0,0058	[dBm]
$\hat{Y}_{\Omega_1}$	0,01965	$\pm$	0,00018	[S]

Přes všechny negativní vlivy, které byly výše vzpomenuty, jsme pro AT -řez při měření v oblasti teplotní necitlivosti došli k srovnatelnému výsledku s dříve publikovanými v pracích [22], [29], a metoda se zdála použitelná i pro další Y -řezy.

Vliv měřicího řetězce na vypočtenou hodnotu i vliv mezivýpočtů byl již ukázán, dalších negativním vlivem je teplotní závislost rezonančního kmitočtu. Nejprve se podíváme na teplotní charakteristiky uvedené na obr (4.4), (4.5), a (4.6) na stránce 55 - 57.

Mimo AT -řezu a BT -řezu není možno pro ostatní zvolené Y -řezy najít pásmo nebo bod teplotní necitlivosti. Vzhledem k tomu, že je celý proces měření poměrně dlouhý (řádově desítky minut), dochází k velkému lokálnímu ohřevu piezoelektrického rezonátoru vlastním mechanickým pohybem piezoelektrické destičky rezonátoru. Přesto jsme se o to pokusili a snažili jsme se udržet teplotu v průběhu měření konstantní.

V tabulce 4.8 jsou uvedeny celkové výsledky měření koeficientu γ pomocí intermodulační metody. Přestože výsledky vypadají adekvátně a především u řezů $Y90$ a $Y67.5$ jsou i s poměrně malým rozptylem, nevypovídají o nelineárním koeficientu γ . Všechny jsou zatíženy velmi velkou chybou způsobenou teplotní závislostí jednotlivých řezů. Pro řezy $Y90$ a $Y67.5$ dochází k zajímavé anomálii. Teplotní křivka těchto řezů, jak bylo uvedeno výše, je téměř lineární a významná. Tato skutečnost určuje převažující vliv teploty na tato měření. Naměřené výsledky proto nelze použít pro určení nelineárního koeficientu γ a tím ani pro určení efektivní hodnoty elastického modulu čtvrtého řádu $\tilde{c}_{6666}$.

Tabulka 4.8: Vypočtené hodnoty koeficientu $\gamma[Nm^{-2}]$

Úhly řezu	$-36, 25^\circ$	$-35, 2^\circ$	$-22, 5^\circ$	0°	$49, 05^\circ$	$52, 5^\circ$
Rez. č.1	$1, 13 \cdot 10^{10}$	$1, 84 \cdot 10^{11}$	$7, 11 \cdot 10^{10}$	$9, 16 \cdot 10^{10}$	$2, 06 \cdot 10^{11}$	$5, 50 \cdot 10^{11}$
Rez. č.2	$6, 02 \cdot 10^9$	$2, 74 \cdot 10^{11}$	$6, 77 \cdot 10^{10}$		$1, 76 \cdot 10^{11}$	$5, 83 \cdot 10^{11}$
Rez. č.3	$5, 14 \cdot 10^9$	$3, 28 \cdot 10^{11}$	$7, 25 \cdot 10^{10}$	$5, 98 \cdot 10^{10}$	$1, 70 \cdot 10^{11}$	$4, 97 \cdot 10^{11}$
Rez. č.4		$4, 26 \cdot 10^{11}$	$6, 23 \cdot 10^{10}$	$1, 62 \cdot 10^{11}$	$1, 56 \cdot 10^{11}$	$5, 45 \cdot 10^{11}$
Rez. č.5		$2, 19 \cdot 10^{11}$	$6, 14 \cdot 10^{10}$	$1, 18 \cdot 10^{11}$		$5, 03 \cdot 10^{11}$
$\oslash D$ [mm]	13, 95	9	9	9	13, 95	13, 95
$\oslash d$ [mm]	7	4	4	4	7	7

kde $\oslash D$ je $\oslash$ rezonátoru a $\oslash d$ je $\oslash$ elektrody.

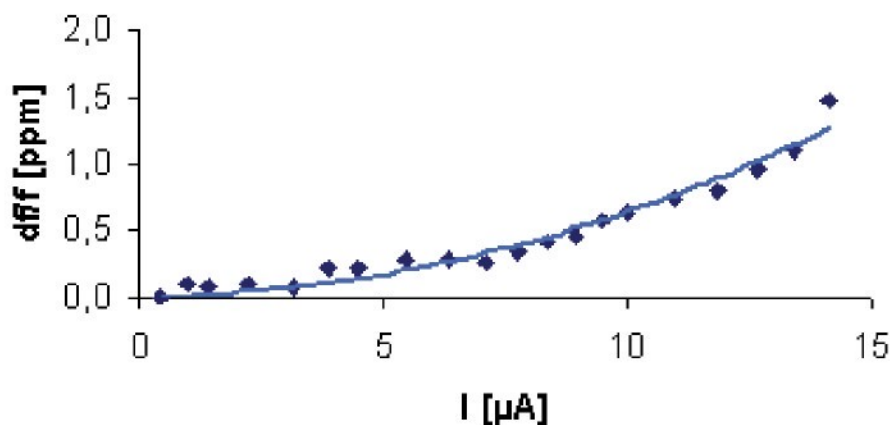
Pokoušeli jsme se vliv teploty odstranit měřením v teplotní komoře, ale s velmi malými odchylkami od zde uvedených výsledků měření. Jednotlivá měření jsou při zvolené velké přesnosti naměření amplitudy signálu velmi dlouhá (jedno trvalo cca 2 hod) a to při poměrně velkém budicím signálu znamená příliš velkou zátěž rezonátoru. Při této dlouhodobé zátěži dochází vlivem kmitavého pohybu desky rezonátoru k velkému lokálnímu ohřevu středu elektrody, kde jsou výchylky kmitů desky největší a tím dojde k lokálnímu ohřevu rezonátoru.

Protože se nepodařilo přijít na způsob, jak teplotní závislost rezonančního kmitočtu v průběhu dlouhého měření eliminovat, bylo od této metody ustoupeno.

4.6 Vliv budicího napětí

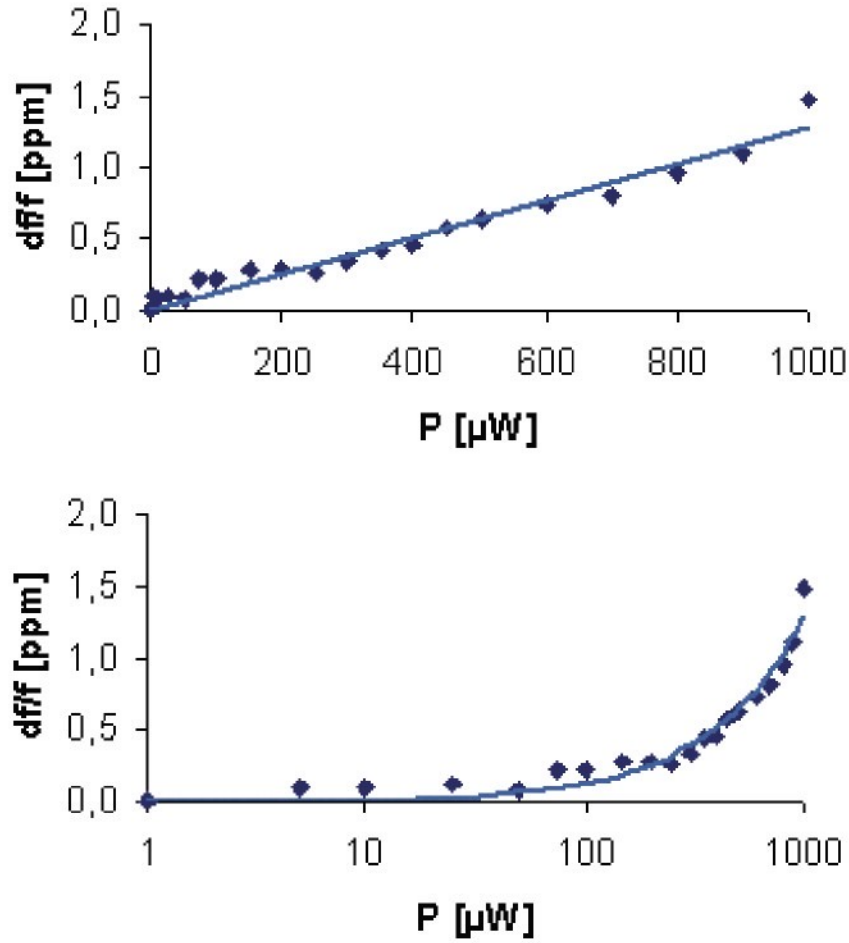
Dalším způsobem, kterým je možno určit nelineární koeficient γ , je vliv budicího napětí. Již před více jak 50 lety bylo teoreticky odvozeno a u některých řezů piezoelektrických rezonátorů experimentálně ověřeno, že při měření rezonančního kmitočtu piezoelektrického rezonátoru dochází při vyšší napěťové zátěži k určitým odchylkám změřeného rezonančního kmitočtu. Díky zvyšující se přesnosti měřicích zařízení bylo zaznamenáno, že při odstranění vlivu teploty, který je dominantním jevem při měření, je možno podrobně změřit i vliv budicího napětí. Teplotní vliv změny rezonančního kmitočtu se nejčastěji odstraňuje měřením při teplotě bodu obratu teplotní křivky. Jak již bylo uvedeno dříve, je vliv budicího napětí na rezonanční kmitočet vysvětlován nelineárními závislostmi elastických vlastností piezoelektrických látek a je tedy specifikován pomocí nelineárního koeficientu γ .

Jedná se tedy o měření sériové rezonanční frekvence při stálé teplotě okolí, kdy se mění úroveň budicího napětí. Toto měření není oproti měření intermodulace tak časově náročné, jedna hodnota je při známé výrobcem udané rezonanci cca 2 min.



Obrázek 4.11: Závislost df/f na protékajícím proudu I rezonátorem

Výsledkem takovéto naměřené závislosti je jak bylo např. ukázáno v [39] závislost $\frac{\Delta f}{f} = f(I^2)$, která je na obr. 4.11. V dnešní době se ale spíše používá závislost $\frac{\Delta f}{f} = f(P)$, která je zobrazena na obr. 4.12 ve dvou variantách. S osou x v lineárních souřadnicích viz. obr. 4.11a) a logaritmických souřadnicích viz obr. 4.11 b). Jak je z proložených křivek s naměřenými hodnotami zřejmé, tato závislost je čistě lineární. Pro obě závislosti je nutno určit velikost proudu I_r , který rezonátorem při rezonanci protéká a pro závislost na příkonu je nutno určit i velikost elektrického odporu R_h při rezonanci a z nich pak příkon $P_r = R_h I_r^2$.



Obrázek 4.12: Závislost df/f na příkonu P rezonátoru a) lineární osa x
b) logaritmická osa x

Závislost $\frac{\Delta f}{f} = f(P)$ je tedy čistě lineární a vztah můžeme psát ve tvaru

$$\frac{\Delta f}{f} = AP, \quad (4.39)$$

kde A je směrnici přímky závislosti změny rezonančního kmitočtu na příkonu.

Pro tuto závislost Tiersten ve své práci [31] pro destičky rezonátorů kmitajících tloušťkově -střížnými kmity odvodil vztah

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{9\sqrt{2}}{32} \frac{\gamma\rho}{\pi^2\eta n\bar{c}^{3/2}R_e^{1/2}(M_nP_n)^{1/4}\sqrt{h}} \cdot P, \quad (4.40)$$

kde η označuje hodnotu ztrátového tření, která je považována za nezávislou na frekvenci a

je rovna $\eta = 0.3 \cdot 10^{-3} \text{ Nm}^{-2}\text{s}$, plocha rezonátoru je dána vztahem $2\pi r_r^2$ a plocha elektrod vztahem $2\pi r_e^2$. M_n a P_n jsou odvozeny na str. 23.

Již metoda s využitím intermodulačního signálu ukázala nepříznivý vliv teplotní závislosti rezonančního kmitočtu. Podíváme se tedy nejdříve na vliv teploty okolí na měření pomocí závislosti rezonančního kmitočtu na budicí napětí. Budeme se tedy dále odkazovat pouze na rovnici 4.39, tedy na lineární závislost rezonanční frekvence rezonátoru na budícím napětí.

Pro tloušťku desky rezonátoru h můžeme psát vztah uvedený v [39], kde po úpravě dostaneme

$$h = \frac{n\tilde{e}_{26}}{2f} \sqrt{\frac{\tilde{c}_{66}}{\epsilon_{22}\rho}}. \quad (4.41)$$

Po změření závislosti rezonanční frekvence na budícím příkonu pak je v rovnici (4.40) jedinou neznámou koeficient γ , který z ní určíme.

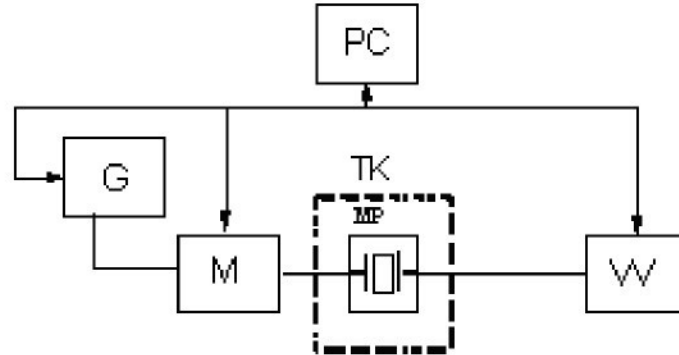
4.6.1 Měřicí řetězec pro vliv budicího napětí

Pro první testy měření závislosti rezonanční frekvence rezonátoru na budícím napětí (resp. příkonu) bylo v první fázi použito stejného měřicího systému Sounders, na kterém byly měřeny teplotní závislosti Y -řezů uvedené výše. Sledované změny rezonanční frekvence se však pohybují v řádech 10^{-7} až 10^{-8} nominální rezonanční frekvence. Jsou tedy zhruba 100krát menší než změny rezonanční frekvence způsobené teplotou. Proto byly tímto systémem změny vlivem buzení sice zaznamenány, ale vzhledem, k nejistotě měření v řádu 10^{-6} šlo spíše o potvrzení existence jevu a hrubý odhad.

V rámci spolupráce s École Nationale Supérieure de Mécanique et des Microtechniques bylo využito jejich laboratoře specializované pro studium piezoelektrických materiálů, kde byla na jejich zařízeních provedena všechna následující měření.

Pro měření byl vytvořen měřicí řetězec, který je zobrazen na obr. (4.13) včetně popisu jednotlivých částí tohoto měřicího řetězce. Teplotní komora TK slouží k nastavené požadované teploty. Jak bylo zmíněno výše, měření jedné hodnoty je poměrně krátké, jedinou výraznější časovou prodlevou je vždy nastavení teploty okolí. Proto je měřicí řetězec doplněn multiplexem M, který přepíná kanály pro měření rezonanční frekvence pomocí vektorového voltmetru VV, který měří úroveň zesílení výstupního signálu i fázový posuv vstupního a výstupního napětí. Tímto způsobem upravený měřicí řetězec umožňuje měřit celou sérii rezonátorů tj. všechny rezonátory stejného řezu) na jedné nastavené teplotě.

Pro měření je použit upravený π -článek, který je zobrazen na obr. (4.14) na str. 69. Na celé měřicí desce je těchto π -článeků 8, z toho 6 měřicích a 2 kalibrační, kde je místo



Obrázek 4.13: Měřicí řetězec pro měření závislosti df/f na budicím napětí

TK - teplotní komora

M - multiplexer

G - generátor

VV - vektorového voltmetru

MP - obvodu s π -články

PC - řídicího PC

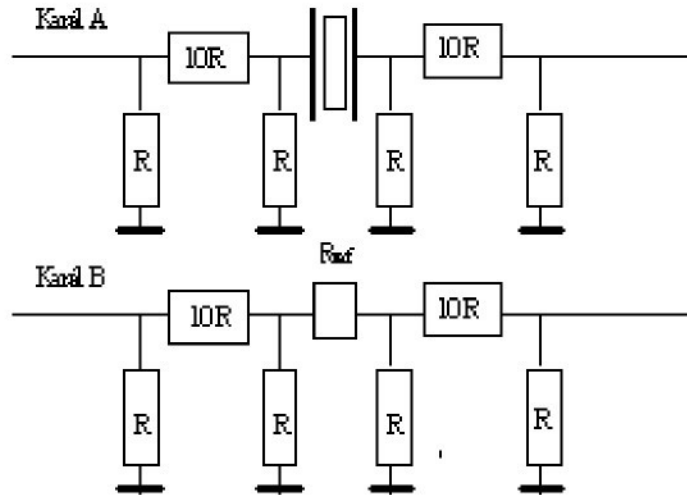
rezonátoru zapojen přesný odpor $R_n = 25\Omega$, který určuje výstupní amplitudu signálu V_a . Tento odpor je ve dvojici π -článku zapojen stále a k němu se do páru zapojuje multiplexem vždy jedna větev π -článku s měřeným rezonátorem nebo druhý kalibrační odpor. Výstupy měření při páru dvou kalibračních odporů jsou označeny V_{ac} a V_{bc} . Tyto výstupy se používají pro přesné výpočty prvků náhradního elektrického obvodu a také pro eliminaci vlivu vedení na měření. Proces měření probíhá tak, že nejprve jsou na začátku změřeny oba kalibrační odpory a pak je vždy změřena dvojice rezonátor a kalibrační odpor, jak je ukázáno na obr. 4.14. Výslednými naměřenými hodnotami této fáze měření jsou výstupní napětí V_a stálého kalibračního odporu R_n a výstupní napětí měřeného rezonátoru V_b .

Pro stanovení R_h použijeme rezonanční křivku amplitudového zesílení výstupního signálu π -článku a nominálního odporu $R_n = 25\Omega$. Pro R_h je odvozen vztah

$$R_h = \left(\frac{2V_a V_{ac}}{V_b V_{bc}} \right) \cdot 25, \quad (4.42)$$

kde naměřené hodnoty V_{ac} , V_{bc} , V_a a V_b již byly definovány výše. Pro výpočet I_r je pro obvod na obr. 4.13 vztah

$$I_r = 0.2186 V_b V_{bc}, \quad (4.43)$$



Obrázek 4.14: Upravený π -článek

Pro vynesení do grafu musíme ještě určit příkon, kterým je rezonátor v okolí rezonančního kmitočtu buzen. Výkon určíme ze vztahu

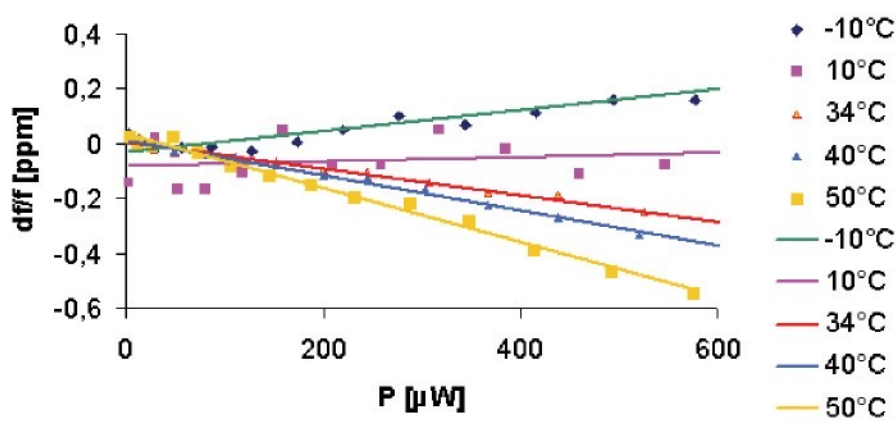
$$P_r = R_h I_r^2, \quad (4.44)$$

Naměřená data jsou zpracována pouze v programu MS Excel, kde byla pro výpočet vytvořena šablona.

4.6.2 Výsledky měření

Tato měření probíhala zhruba s ročním odstupem od měření pomocí intermodulační metody a teplotní charakteristiky změřené na systému Saunders (teplotní komora s měřicím systémem pro průmyslová měření piezoelektrických rezonátorů) pomocí metody maximálního zesílení. Nově postavený měřicí řetězec však využívá měření rezonanční frekvence pomocí nulového fázového posuvu vstupu a výstupu. Proto byla všechna měření teplotních charakteristik všech použitých rezonátorů provedena znovu. Průběhy grafů jsou pro jednotlivé řezy stejné, proto je zde již graficky neuvádíme. Pouze konkrétní hodnoty rezonančních frekvencí jsou mírně odlišné, protože jak je vidět na obr. 3.4 na str. 32, rezonanční frekvence ω_{hs} je nižší než rezonanční frekvence ω_{hr} .

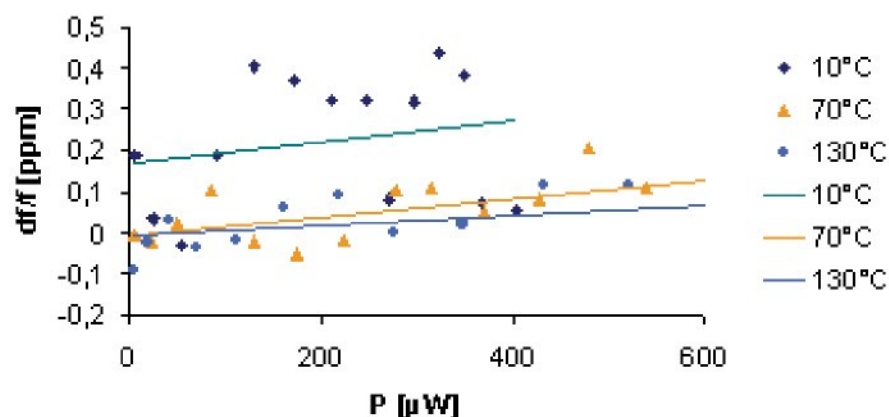
Také pro toto měření předpokládáme vliv teplotní závislosti rezonančního kmitočtu. Tento vliv je vyloučen pouze v místě teplotní necitlivosti rezonátoru, tedy pouze v bodech obratu teplotní závislosti rezonančního kmitočtu. V teplotním rozsahu teplotní komory je možno tento bod obratu pouze u *BT*-řezu, kdy je bodem obratu $\Theta = 34^{\circ}\text{C}$. Poněkud specifickou teplotní závislost je vidět u *AT*-řezu, kde jsou oba dva body obratu velmi blízko od sebe a kdy mezi těmito teploty je u zvoleného úhlu řezu celé pásmo necitlivosti tj. oblast s minimálním vlivem teploty na změnu rezonanční frekvence. Všechny ostatní použité rezonátory mají bod obratu teplotní závislosti rezonančního kmitočtu mimo teplotní rozsah teplotní komory.



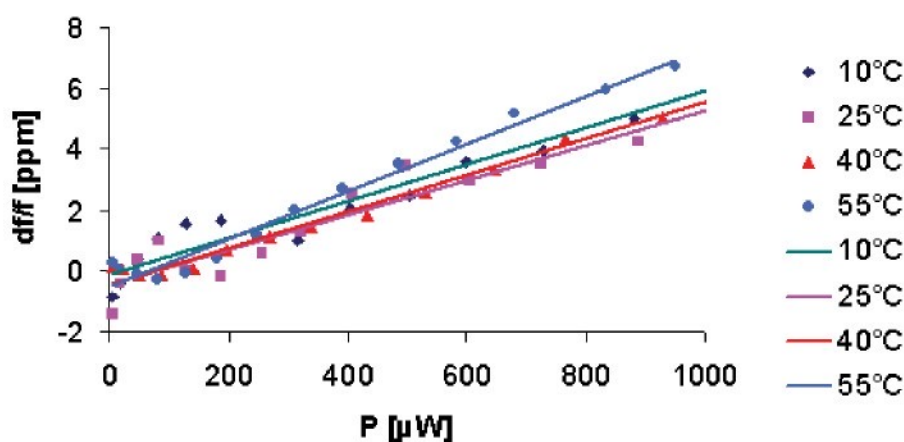
Obrázek 4.15: Závislost f na P - *BT*-řez

Na obr. 4.15 jsou zobrazena naměřené hodnoty závislosti změny rezonančního kmitočtu na budícím příkonu a na teplotě proložené regresními přímkami. Jako nominální křivku vezmeme lineární regresi při bodu obratu $\Theta = 34^{\circ}\text{C}$. Teploty nižší než tato teplota leží na rostoucí křivce teplotní závislosti a proto jsou i lineární regrese naměřených dat ovlivněny pozitivně. Směrnice těchto tečen jsou větší než směrnice nominální přímk. Teploty vyšší než 34°C leží na klesající křivce teplotní závislosti a proto dochází k opačnému jevu. Směrnice lineárních regresí jsou ovlivněny negativně, tj. jsou menší než směrnice nominální regresní přímk.

Pro *CT*-řez jsou naměřená data a odpovídající regresní přímk. zobrazeny na obr. 4.16. Z teplotní závislosti rezonančního kmitočtu *CT*-řezu je vidět, že všechny teploty měření závislosti rezonančního kmitočtu na buzení jsou na klesající křivce, dá se tedy předpokládat, že neznámá nominální přímk. je při všech měřeních ovlivněna negativně. Zároveň je z minimální závislosti rezonančního kmitočtu na buzení možno předpokládat, že buď oba vlivy působí pro tento řez proti sobě a dochází téměř k jejich vzájemné kompenzaci při krátkodobých měření. Jistě by bylo zajímavé sledovat dlouhodobý vliv vyššího buzení na stabilitu rezonančního kmitočtu v oblasti normálních teplot.

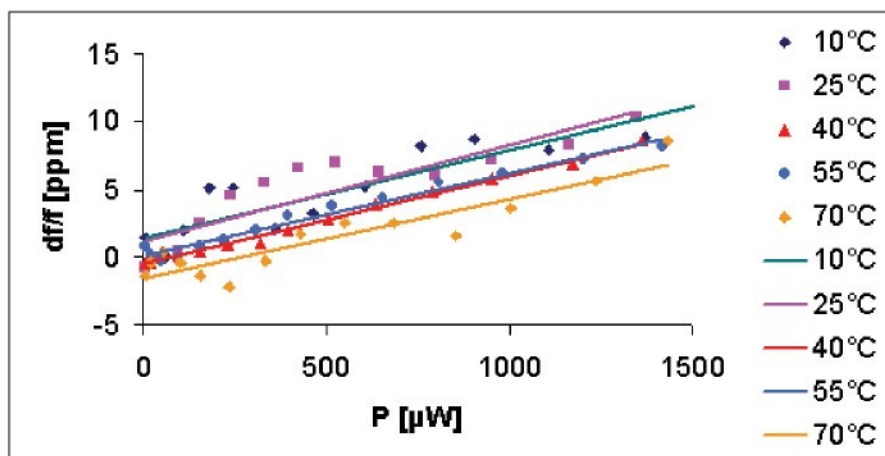


Obrázek 4.16: Závislost f na P - CT -řez



Obrázek 4.17: Závislost f na P - řez $Y67$

Na obr. 4.17 je pro $Y67$ -řez vidět, že naměřená data mají oproti předchozím měřením skutečně velký vliv teplotní závislosti rezonančního kmitočtu, který je způsoben velkou závislostí rezonančního kmitočtu na teplotě. Teploty leží na rostoucí křivce a proto je vliv na směrnice regresních přímků pozitivní. Menší rozptyl jednotlivých směrnic je způsoben nepřesnostmi měření.



Obrázek 4.18: Závislost f na P - řez Y90

Naměřená data a regresní přímky závislosti rezonančního kmitočtu na buzení jsou pro Y90-řez zobrazena na obr. 4.18. Na tomto grafu je vidět, že regresní přímky jsou skutečně téměř rovnoběžné, tj. směrnice těchto přímek jsou tedy téměř identické. V případě zjištění efektivní hodnoty elastického modulu čtvrtého řádu by se u tohoto řezu jednalo přímo o hodnotu základní elastické matice čtvrtého řádu c_{6666} .

Vzhledem k tomu, že teplotní závislost řezu Y90 je v porovnání s teplotní závislostí řezu Y67 téměř dvojnásobná, předpoklad, že i závislost rezonančního kmitočtu na budicím napětí bude téměř dvojnásobná (vlivem teplotní závislosti). Tento předpoklad se nenaplnil a směrnice závislosti rezonančního kmitočtu na budicím příkonu Y90-řezu a Y67-řezu jsou srovnatelné.

Tabulka 4.9: Směrnice A regresních přímek závislosti $df/f = f(P)$

Úhly řezu	$-36, 25^\circ$	$-22, 5^\circ$	0°	$49, 05^\circ$	
$-10^\circ C$				3,757	10^{-4} W^{-1}
$10^\circ C$	2,669	60,59	64,86	0,813	
$25^\circ C$		56,72	71,77		
$34^\circ C$				-4,859	
$40^\circ C$		59,65	64,83	-6,427	
$55^\circ C$		77,93	60,44	-9,863	
$70^\circ C$	2,247		58,43		
$130^\circ C$	1,226				

Z výsledků tedy budeme porovnávat směrnice průběhů měření závislosti rezonanční frekvence na budicím výkonu a pro výpočet směrnice regresní přímky budeme používat pouze program MS Excel, kam se nahrála data z měřicího řetězce a z vypočtených dat pak jen byly vytvořeny grafy a tabulky výsledků.

V tabulce 4.9 jsou shrnuty naměřené směrnice pro všechny použité Y -řezy piezoelektrických křemenných rezonátorů.

Z naměřených dat pro všechny uvedené řezy je jasné, že BT - řez půjde použít pro modelování a bližší zkoumání korelace mezi teplotní závislostí rezonančního kmitočtu a budicím výkonem. Proto v konečné tabulce výsledků měření závislosti rezonančního kmitočtu na budicím výkonu jsou zcela vypovídající jen směrnice BT - řezu při měřených teplotách, které se dají použít pro přesnou kvantifikaci korelace teplotní závislosti rezonančního kmitočtu a závislosti rezonančního kmitočtu na buzení. Pro tuto korelaci bude nutno stanovit další vlivy, které ji mohou ovlivnit, což je především doba měření jednotlivých bodů závislosti a také odpor rezonátoru, a z nich poté odvodit lokální ohřev středu desky rezonátoru, kde je pohyb největší a dále přesun tepla po elektrodách a proti tomuto ohřevu působící přenos tepla z teplotní komory.

5. Shrnutí

V práci byly studovány nelineární vlivy především elastických koeficientů a modulů na stabilitu rezonančního kmitočtu piezoelektrických rezonátorů. Pro popis byly vybrány Y -řezy křemene kmitající tloušťkově-střižnými módy kmitů.

Nejprve byly odvozeny rovnice pro závislost rezonančního kmitočtu na okolní teplotě pro zvolené řezy. Konečný výpočet a měření reálných křemenných rezonátorů bylo provedeno na dvou sadách AT-řezů s různými úhly řezu. Z výsledků je vidět, že pro základní i třetí harmonickou rezonanční frekvenci je shoda mezi teoretickým výpočtem i prakticky naměřenými hodnotami změny rezonančního kmitočtu. Menší odchylky u teplotních koeficientů závislosti $\Delta f/f = f(\Theta)$ jsou vysvětleny jevy, které nelze přesně definovat jako je kvalita materiálu křemene tj. množství příměsí a jejich molekulární rozložení v řezu, přesnost řezu výbrusu (výrobce udává odchylku $\pm 1'$) atd.

Ve druhé části byl odvozen vzorec pro možnost určení pěti základních hodnot matice elastického modulu čtvrtého řádu, které je možno určit, pokud bude určen nelineární koeficient γ pro 5 různých Y -řezů piezoelektrických rezonátorů použitého materiálu. Proto byly studovány dvě metody, které by se daly využít pro zjištění nelineárního koeficientu γ .

Metoda využívající intermodulačního jevu se však vzhledem k velké časové náročnosti a především k velkým teplotním závislostem rezonančního kmitočtu rezonátorů, který má vliv na přesné rozložení budících signálů jsem nakonec dospěla k názoru, že tato metoda je pro stanovení nelineárního koeficientu γ pro řezy s větší teplotní závislostí rezonančního kmitočtu v rozsahu teplotní komory nepoužitelná. Vzájemná korelace rezonančního kmitočtu rezonátoru a budících signálů vyžaduje stabilitu rezonančního kmitočtu a je ji tedy možno použít jen v bodech obratu křivky teplotní závislosti, kde je lokální závislost rezonanční frekvence na teplotě nulová.

U metody změny rezonančního kmitočtu vlivem buzení se vliv teplotní závislosti rezonančního kmitočtu projevil také. Doba měření je však krátká a dochází k jednotlivým měřením bodů závislosti. I zde se předpokládá korelace teplotní závislosti s úrovní buzení. Byla tedy provedena měření závislosti $df/f = f(P)$ při různých teplotách a z nich se podařilo tuto vzájemnou korelaci prokázat.

Závěr

Pro studium nelineárních vlastností piezoelektrických látek se předpokládá, že jejich původcem jsou nelineární vlastnosti elastických koeficientů resp. modulů. V práci jsem se věnovala pouze křemenným Y -řezům. Byly popsány obecné rovnice pro teplotní závislost křemenných destiček Y -řezů kmitajících tloušťkově-střižnými módy kmitů.

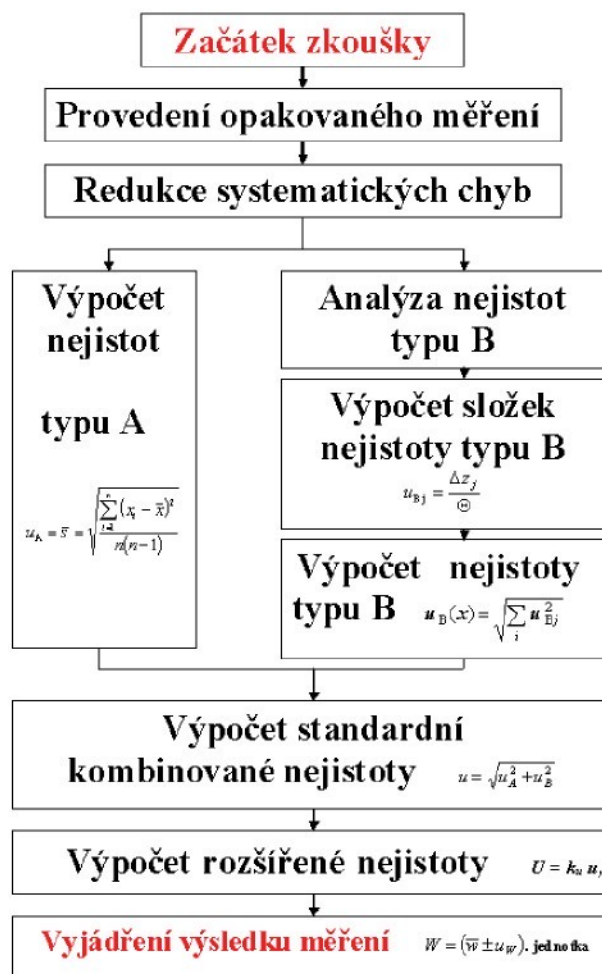
Nově byla pro Y -řezy odvozena a prezentována rovnice pro výpočet efektivní hodnoty elastického modulu čtvrtého řádu, která po využití symetrie pro krystalickou třídu 32 vedla k závěru, že na její hodnotu má vliv pouze 5 hodnot základní matice elastického modulu čtvrtého řádu. Pokud by se povedlo měřením určit 5 efektivních hodnot elastického modulu čtvrtého řádu, je možno určit 5 hodnot základní matice elastického modulu čtvrtého řádu.

Rovnoměrné rozložení budicích signálů kolem rezonančního kmitočtu je základní podmínka vzniku intermodulačního produktu, jehož hodnotu je pro určení efektivní hodnoty elastického modulu čtvrtého řádu třeba přesně změřit. Díky silnému vlivu teplotní závislosti rezonančního kmitočtu se toho nepodařilo docílit a protože se nepodařilo učít metodu, kterou by se podařilo udržet rezonanční kmitočet mezi dvěma budicími signály, byla intermodulační metoda vyhodnocena jako nevhodná.

Závislost rezonančního kmitočtu na úrovni buzení piezoelektrického rezonátoru je pro přesné vyhodnocení vlivu zatížení korelací mezi zkoumaným jevem a teplotní závislostí rezonančního kmitočtu piezoelektrického rezonátoru. Tuto korelaci se podařilo identifikovat a její vliv dokumentovat. Tato metoda se tedy jeví jako skutečně použitelná pro stanovení efektivní hodnoty elastického modulu čtvrtého řádu. Daný jev tedy bude dále zkoumán, budou provedena měření, kde bude přesně stanovena doba zatížení piezoelektrického rezonátoru a z ní se pak pokusíme tento vliv eliminovat jako systematickou chybu měřicí metody.

Celý postup měření ukázaný zde na křemenu bude pak dále možno beze změny rovnic použít na všechny piezoelektrické látky krystalizující ve stejné soustavě jako křemen tj např. langasit a langatit. Při stanovení 5 základních hodnot elastického modulu čtvrtého řádu pak bude možno modelovat velikost nelineárního koeficientu γ a pokusit se stanovit takové Y -řezy křemene, které budou mít tento koeficient nulový, což by znamenalo i nulovou závislost piezoelektrického rezonátoru na budícím napětí.

Příloha A



Obrázek A.1: Výpočet kombinované rozšířené nejistoty

Příloha B

c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	0	0	e_{11}	0	0
c_{12}	c_{11}	c_{13}	$-c_{14}$	0	0	$-e_{11}$	0	0
c_{13}	c_{13}	c_{33}	0	0	0	0	0	0
c_{14}	$-c_{14}$	0	c_{44}	0	0	c_{12}	0	0
0	0	0	0	c_{44}	c_{14}	0	$-e_{14}$	0
0	0	0	0	c_{14}	c_{44}	0	$-e_{11}$	0
e_{11}	$-e_{11}$	0	e_{14}	0	0	ε_{11}	0	0
0	0	0	0	$-e_{14}$	$-e_{11}$	0	ε_{11}	0
0	0	0	0	0	0	0	0	ε_{33}

Obrázek B.1: Elasto-piezo-dielektrická matice krystalů třídy (32)

Příloha C

Tabulka C.1: Elastické piezoelektrické a dielektrické konstanty křemene

Konstanta	Rozměr	Hodnota
c_{11}^E	$10^9 Nm^{-2}$	86,74
c_{12}^E		6,99
c_{13}^E		11,91
c_{14}^E		-17,01
c_{33}^E		107,2
c_{44}^E		57,94
c_{66}^E		40,63
e_{11}	Cm^{-2}	0,171
e_{14}		-0,0407
ε_{12}^T	$10^{-12} Fm^{-1}$	39,21
ε_{12}^T		41,03

Tabulka C.2: Elastické moduly třetího řádu křemene dle [32]

Konstanta	Hodnota $10^9 Nm^{-2}$	Konstanta	Hodnota $10^9 Nm^{-2}$
c_{111}^E	-210	c_{134}	2
c_{112}^E	-345	c_{144}	-134
c_{113}^E	12	c_{155}	-200
c_{114}^E	-163	c_{222}	-332
c_{123}^E	-294	c_{333}	-815
c_{124}^E	-15	c_{343}	-110
c_{133}^E	-312	c_{444}	-276

Příloha D

Tabulka D.1: Teplotní činitele elastických modulů α -modifikace křemene vztažené k 25°C

$\lambda\mu$	$Tc_{\lambda\mu}^{E(1)}$ $10^{-6}K^{-1}$	$Tc_{\lambda\mu}^{E(2)}$ $10^{-9}K^{-2}$
11	-44,3	-107
12	-2690,0	-3050
13	-550,0	-1150
14	117,0	-48
33	-160,0	-275
44	-175,4	-216
66	187,6	118

Literatura

- [1] Alexandrov, K.S., Kokorin, J.I., Zajceva, M.P.: *Relations between the nonlinear electromechanical coefficients of the piezoelectric matter* Kristallografia, vol.22, pp.1266-1267, 1977. (v ruštině)
- [2] Brdička, M.: *Mechanika kontinua* Nakladatelství ČSAV, Praha 1959
- [3] Cady, W.G.: *The piezoelectric Resonators* Proc. I. R. E., Vol.10, str. 83-114, 1922.
- [4] Cady, W.G.: *Piezoelectrically driven tuning-forks and rods* Ohys. Rev.21, str. 371, 1923.
- [5] Curie, P., Curie, P.: *Development by pressure of polar electricity in hemihedral crystals with including faces* Bulletin Sov. Min. de France 3, str. 90, 1880.
- [6] Curie, P.: *Oeuvre de Pierre Curie* Gauthier-Villars & Cie, Paris 1908
- [7] Černík, K.: *Meranie piezoelektrických jednotiek pomocou prenosového článku* Elektrotechnický časopis XVII, str. 105, 1966.
- [8] Gagnepain, J.J., Besson, R.: *Nonlinear effects in piezoelectric quartz crystals* Physical Acoustics, vol.XI, W.P.Mason, R.N.Thurston, Eds. New York: Academic, pp.245-288. Proc. 41st Annual Frequency Control Symposium (1987), str. 266-276, 1975.
- [9] Gufflet, N.: *Default d'isochronisme des resonateurs a quartz vibrant en cisaillement d'epaisseur - theorie et experience* disertační práce, LCEP Besancon, Franc, 2000.
- [10] Hruška, K.: *An attempt at a phenomenological interpretation of the influence of a polarizing field on piezoelectric resonators* Czech J.Phys., vol. B11 p.150, 1961, and vol. B12, pp.338-343, 1962.
- [11] Hu, T.Y., Chen, C.Y., Yang, X.H., Du, Q.D., Cui, Z.J.: *Electric energy transmission between two piezoelectric transducers* Acta Mechanica Solida Sinica, vol.24, pp.304-312, 2003.
- [12] Hypius, S.: *Příspěvek k otázce přesnosti měření sériového rezonančního kmitočtu piezoelektrických rezonátorů pomocí pasivních prenosových článků* Čs. časopis fysiků 12, str. 128, 1962.

- [13] Kittinger, K., Tichý, J.: *Electroelastic effect of crystal rods expressed by fundamental material constants* J.Acoust.Soc.Am. vol. 83, 2, pp. 647-651, 1988.
- [14] Langevin, A.: *Utilisation de l'effekt piézoélectrique* Presses universitaires de France, Paris, 1942.
- [15] Lee, P.C.Y.; Syngellakis, S.; Hou, J.P.: *A two dimensional theory for high-frequency vibrations of piezoelectric crystal plates with or without electrodes* J. Appl. Phys. 61, pp. 1249-1262, 1987.
- [16] Lee, P.C.Y., Nikodem, Z.: *An approximate theory for high-frequency vibrations of elastic plate*, Int. J.Solids Structures, 8, pp. 581-612, 1972.
- [17] Lee, P.C.Y.; Yong, Y.K.: *Frequency-temperature behavior of thickness vibrations of doubly rotated quartz plates affected by plate dimensions and orientations* J. Appl. Phys. 60, str. 2327-2341, 1986.
- [18] Mason, W. P.: *Piezoelectric crystals and their application to ultrasonics* D. Van Nostrand Comp. Inc., New York, 1950.
- [19] Mindlin, R.,D.: *Third overtone quartz resonator* Int. J. Solids Structure, **18**, pp. 809-827, 1982.
- [20] Nakanuta, K.: *Elastic wave energy-trapping and its application to piezoelectric device* Electronics and Communications in Japan (Part II:Electronics), vol.27, pp.30-39, 2007.
- [21] Nosek, J.: *Nelineární elektrický náhradní obvod piezoelektrického rezonátoru* Slaboproudý obzor, vol.46, no.3, pp. 133-137, 1984.
- [22] Nosek, J.: *Měření intermodulace křemenných rezonátorů typu AT* Československý časopis pro fyziku (A), vol. 35, pp. 143-148, 1985.
- [23] Nosek, J.: *SAW propagation in the two domain states of ferroelectric LiNbO₃ crystal* Proc. 2004 Joint 50th Anniversary IEEE International UFFC Symposium, Ultrasonics Symposium, August 23-27, Montréal, CA, pp.1565-1568, 2004.
- [24] Palenčár, R., Vdoleček, F., Halaj, M.: *Nejistoty v měření I: vyjadřování nejistot* Automa 7, č.7-8, str.50-54, 2001.
- [25] Palenčár, R., Vdoleček, F., Halaj, M.: *Nejistoty v měření II: nejistoty přímých měření* Automa 7, č.10, str.52-56, 2001.
- [26] Palenčár, R., Vdoleček, F., Halaj, M.: *Nejistoty v měření III: nejistoty nepřímých měření* Automa 7, č.12, str.28-33, 2001.
- [27] Petržílka, V., Slavík, J.B., Šolc, I., Taraba, O., Tichý, J., Zelenka, J.: *Piezoelektrina a její technické použití* Nakladatelství ČSAV, Praha, 1960.

- [28] Pierce, G.W.: *Piezoelectric crystal resonators and crystal oscillators applied to the precision calibration of wavumeter* Proc. Amer. Acad. Sci. 59, str. 81, 1923.
- [29] Tiersten, H. F.: *Analysis intermodulation in thickness shear and trapped-energy resonators*, J. Acoust. Soc. Amer. 57, pp. 667, 1976.
- [30] Tiersten, H.F.: *Analysis of trapped-energy resonators operating in overtones of coupled thickness shear and thickness twist* J. Acoust. Soc. Amer. 59, pp.879-888. 1976.
- [31] Tiersten, H. F. : *Analysis of nonlinear resonance on thickness shear and trapped-energy resonators*, J. Acoust. Soc. Amer. 59, pp. 866, 1976.
- [32] Thurston, R. N., Brugger, K.: *Third-order elastic constants and the velocity small amplitudeelastic waves in homogeniously stressedmedia* Phys. Rev. A133, str. 1604 , 1964.
- [33] Voigt, W.: *Lehrbuch der Kristallphysik* B. G. Teubner, Leipzig-Berlin, 1910.
- [34] Wang, J.: *The frequency-temperature analysis equations of piezoelectric plates with Lee plate theory* Proc. IEEE International Frequency Control Symposium, Orlando, Florida, pp. 677-681, 1997.
- [35] Yang, J. S.: *An Introduction to the Theory of Piezoelectricity* New York: Springer, 2005.
- [36] Yang, J. S., Zhang, X.: *Extensional vibration of a nonuniform piezoelectric rod and high voltage generation* Int. J. Appl. Electromagn. Mechan., vol.16, pp.29-42, 2002.
- [37] Yang, J. S., Guo, S.H.: *Thickness-twist modes in a rectangular piezoelectric resonator of hexagonal crystals* Appl.Phys.Lett., vol. 88, art no.153506, 2006.
- [38] Yang, J. S., Xue, H., Fang, H., Hu, Y., Wang, J., Shen, L.: *Effects of electrodes with varying thickness on energy trapping in thickness-shear quartz resonators* IEEE Trans., Ultrason., Ferroelect., Frequency Control, vol.54, No.4, pp.892-895, 2007.
- [39] Zelenka, J.: *Piezoelektrické rezonátory a jejich využití* Academia Praha, 1984.
- [40] Zelenka, J.: *Příspěvek k vyjádření elektrického náhradního obvodu piezoelektrického rezonátoru* Elektrotechnický časopis XII, str. 142, 1962.

Vlastní publikace

- [41] Kretschmerová, L, Richter, A, Nosek, J.: *The nitrogen cryostat for piezoelectric devices measurement*, Proc. 3rd International Workshop on ECMS97, 997, Toulouse, France, pp. 208-213, 1997.
- [42] Nosek, J., Kretschmerová, L., Kretschmer, P.: *Determination of high-order constants using the resonant and laser interferometry methods* Proc. Joint Meeting of the 12th EFTF, Warsaw, Poland, vol.2, pp.72-76, 1998.
- [43] Zelenka, J.; Kretschmerová, L.: *Relation between the frequency - temperature dependence of the fundamental and third harmonic of AT - cut quartz plates* International Symposium on Surface Waves in Solid and Layered Structures, Russia, 1998.
- [44] Nosek, J., Kretschmerová, L., Kretschmer, P.: *Contribution to the Determination of High order Elastic Stiffnesses from Measurement of BT-cut Quartz Resonators* Proc. Joint Meeting of the 13th EFTF and 1999 IEEE IFCS, France, vol.2, pp.746-749, 1999.
- [45] Kretschmerová, L., Kretschmer, P. : *Measuring and evaluation of characteristics quartz piezoelectric crystals* Proc. 4th International Workshop on ECMS99, Liberec, Czech Republic, pp. 47-50, 1999.
- [46] Mateescu I., Nosek J., Kretschmerova L., Tsoi E., Manea A.: *Frequency-temperature characteristic of the plan-parallel langasite resonators* Proc.15th European frequency and time forum, Neuchatel, Switzerland, 2001.
- [47] Kretschmerová L., Boy J.J., Bourquin R.: *Characterisation of LD-cut resonators operating in anharmonic modes* Proc.16th European frequency and time forum, Saint Petersburg, Russia, 2002.