

Technická univerzita v Liberci
PEDAGOGICKÁ FAKULTA

Katedra: matematiky a didaktiky matematiky

Kombinace oborů: matematika - fyzika

GEOMETRICKÁ PŘEDSTAVIVOST ŽÁKŮ
ZÁKLADNÍ ŠKOLY

Diplomová práce 96-PF-KMD-003

Autor: Martina Kvasilová

Podpis: *Martina Kvasilová*

Adresa: Nejepín 37

582 45 UHELNÁ PŘÍBRAM

Vedoucí práce: PaedDr. Jaroslav Perný

Počet	stran	obrázků	tabulek	příloh
	49	1	1	2

V Liberci dne 21.05.1996

Technická univerzita v Liberci

PEDAGOGICKÁ FAKULTA

461 17 LIBEREC 1, Hálkova 6

Telefon: 329

Telefax: 21301

Katedra: matematiky a didaktiky matematiky

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

(závěrečného projektu)

diplomant: Martina KVASILOVÁ

adresa: Nejepín 37, 582 45 UHELNÁ, okr. Příbram

obor: matematika - fyzika

Název: .. Geometrická představivost žáků základní školy

Vedoucí práce: PaedDr. Jaroslav Perný

Termín odevzdání: .. květen 1996

Pozn. Podmínky pro zadání práce jsou k nahlédnutí na katedrách. Katedry rovněž specifikují zadání: východiska, cíle, předpoklady, metody zpracování, základní literaturu (zpravidla na rub tohoto formuláře). Zásady pro zpracování DP jsou k dispozici ve dvou verzích (stručné, resp. metodické pokyny) v UK TUL, na katedrách a na Děkanátě Pedagogické fakulty.

V Liberci dne 30. května 1995

.....
vedoucí katedry

.....
děkan

Převzal (diplomant): MARTINA KVASILOVÁ

Datum: 4. 10. 1995

Podpis: Martina Kvasilová

TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI

Univerzitní knihovna
Voroněžská 1329, Liberec 1
PSC 461 17

184/96 P

49A. MA. h

Prohlášení o původnosti práce:

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně a že jsem uvedla veškerou použitou literaturu.

Liberec, 1996.-05.-21.

Martina Kvasilová

Poděkování:

Děkuji vedoucímu práce PaedDr. J. Pernému za odborné vedení a podnětné rady. Dík náleží též učitelkám a žákům základních škol v Kolíně, Liberci a Obříství za jejich ochotnou spolupráci při experimentálním výzkumu.

Prohlášení k využívání výsledků DP:

Jsem si vědoma těchto skutečností:

- a) diplomová práce je majetkem školy,
- b) s diplomovou prací nelze bez svolení školy disponovat,
- c) diplomová práce může být zapůjčena či objednána (kopie) za účelem využití jejího obsahu.

Beru na vědomí, že po pěti letech si mohu diplomovou práci vyžádat v Univerzitní knihovně TU v Liberci, kde bude uložena.

Martina KVASILOVÁ

Martina Kvasilová

Nejepín 37

582 45 Uhelná Příbram

GEOMETRICKÁ PŘEDSTAVIVOST ŽÁKŮ ZÁKLADNÍCH ŠKOL

Resumé

Práce se zabývá problematikou prostorové představivosti. Přináší stručný přehled o stavu problému a dosavadních výzkumech s ním souvisejících. Klade si za cíl na základě experimentu zjišťovat, které faktory a v kterém věkovém období nejvýrazněji ovlivňují vhléd žáka do prostorové představivosti. Slovní hodnocení výsledků je doplněno přehlednými grafy. Na základě zjištěných skutečností jsou navrženy postupy a metody sledující zlepšení úrovně školské geometrie.

GEOMETRICAL IMAGINATION OF THE BASIC SCHOOL LEARNERS

Summary

This paper is interested in a problem of a 3D imagination. It brings a brief survey of this problem and of temporal 3D imagination researches. The aim of this paper is to find out what is to find out what factors are most influencing the 3D imagination of learners. The description of my research is completed by graphs and evaluation. According to my research I suggested several methods and procedures which should improve the level of the geometry learning in basic schools.

DIE GEOMETRISCHE EINBILDUNG DER GRUNDSCHÜLLER

Zusammenfassung

Die Arbeit studiert eine 3D Einbildungskraft an der Grundschule. Sie bringt einen gedrängten Überblick über den bisherigen Grundlagenforschungen dieses Problems. Ihr Ziel ist mit einer experimentelle Methode feststellen, welche Faktoren für die 3D Einbildungskraft entscheidende sind. Die Wortbewertung ergänzen übersichtliche Diagramme. Auf Grund der Resultate vorschlagt die Autorin einige Methoden, die einen Stereometriesbildungsgrad verbessern sollen.

OBSAH

1. ÚVOD	1
2. TEORETICKÁ ČÁST	3
2.1 OD PYTHAGORA K MONGEOVI	3
2.2 GEOMETRIE V DNEŠNÍ ŠKOLE	6
2.2.1 Základní otázky	6
2.2.2 Struktura školské geometrie	7
2.2.3 Geometrické konstrukce	8
2.2.4 Planimetrie proti stereometrii	9
2.2.5 Klasifikace stereometrie	11
2.3 O PŘEDSTAVIVOSTI	13
2.3.1 Význam představivosti	13
2.3.2 Psychologické základy představivosti	16
2.3.3 Analýza dosavadního vývoje zkoumání	19
2.3.4 Funkce představivosti v psychice člověka	23
2.3.5 Pojetí představivosti	25
3. EXPERIMENTÁLNÍ ČÁST	27
3.1 ZÁKLADNÍ VARIANTA EXPERIMENTU	27
3.1.1 Výchozí situace	27
3.1.2 Experiment A	29
3.1.3 Experiment B	39
3.1.4 Rozhovor se žákem	41
3.1.5 Co se tedy ukázalo?	42
3.2 ROZŠÍŘUJÍCÍ EXPERIMENT	44
3.2.1 Procházky trochu jinak	44
3.3 ZÁVĚR	45
Seznam pramenů:	48
Příloha 1	
Příloha 2	

"Před padesáti lety byla geometrie ustálenou a základní částí matematiky. Dnes je geometrie nejproblematictější částí školské matematiky."

M. Hejný

1. ÚVOD

V posledních letech u nás na všech typech škol dochází k poklesu úrovně znalostí geometrie, zejména prostorové. Hledají se příčiny tohoto problému i způsoby nápravy. Považuji za velmi potřebné se touto problematikou zabývat. Předkládaná práce si klade za cíl zjišťovat, které faktory a v kterém věkovém období nejvýrazněji ovlivňují vhléd do prostorové představivosti.

První kapitola je věnována malému ohlédnutí do historie. Je zbytečné považovat geometrii za "strašáka", neboť odedávna byla pro člověka spíše užitečným pomocníkem.

Druhá kapitola pojednává o pojetí geometrie na základní škole, poukazuje na upřednostňování planimetrie před stereometrií.

Třetí kapitola poukazuje na to, že představivost je významnou složkou duševní činnosti člověka. Zdůrazňuje význam představivosti pro tvořivost se zvláštním zaměřením na úlohu představivosti v matematice. Jednotlivé články formulují psychologické základy představivosti a vymezují podrobněji okruh studované problematiky, uvádějí alespoň stručný přehled hlavních teoretických koncepcí a historii dosavadních výzkumných přístupů.

V návaznosti na uvedená teoretická východiska byl proveden výzkum na vzorku žáků čtvrtých a sedmých tříd

základních škol. O charakteru experimentů a jejich výsledcích pojednává třetí část této studie. Na základě získaných poznatků jsem se pokusila formulovat některé závěry přijatelné pro praxi.

Doufám, že se najdou lidé, kteří si tuto práci se zájmem prostudují a získají inspiraci k vlastnímu zkoumání.

Diplomová práce je vypracována s využitím textového editoru Text 602 a tabulkového kalkulátoru Calc 602.

2. TEORETICKÁ ČÁST

2.1 OD PYTHAGORA K MONGEOVI

Pravěký člověk dokázal zhotovovat různé nástroje, zbraně či oděvy, postavit si obydlí, orientovat se v terénu, vyrábět více či méně důmyslné pasti. Právě při těchto praktických činnostech získával první geometrické zkušenosti.

Dodnes vzhlížíme s obdivem k zavlažovacím kanálům, opevněním a zejména k pyramidám z dob starověkého Egypta či Mezopotámie. Geometrické znalosti umožňovaly vyměřovat obsah polí, stavět lodě a vozy, vytesávat sochy z kamenných kvádrů.

Matematika v dnešním slova smyslu se objevuje až s příchodem řecké kultury. Objevy filozofů (např. Thálés z Miletu) zůstávají ve stínu největšího učence té doby, Pythagora ze Samu (580-500 př.n.l.), a jeho školy. O matematických znalostech pythagorejců nemáme bohužel přesné údaje, neboť své učení neradi zveřejňovali. Porovnáme-li však úroveň matematiky před a po Pythagorovi, je jeho přínos zřejmý. Před vstupem Řeků byla matematika převážně aritmetická. Řecká matematika 5.-3.stol.př.n.l. je naopak výrazně geometrická. Ke změně tedy došlo v době Pythagorově. Geometrizace aritmetiky je jednou z pěti jeho myšlenek, obecně považovaných za nejdůležitější. Na tomto místě bych si dovolila uvést výrok Pythagorova současníka, svědčící o matematikově genialitě: "...jsou lidé, jsou bohové a jsou bytosti jako Pythagoras...".

Pro nás, učitele, je nejinspirativnějším obdobím následujících dvěstě let, neboť představuje položení základů matematického myšlení. Určitý pokrok lze vysledovat v těchto oblastech:

- a) jazyk - zvyšuje se přesnost a abstrakce myšlení
- b) argumentace
- c) strukturalizace - vytvoření axiomatického systému
- d) motivace
- e) metody a techniky práce

Vzhledem k zaměření mé práce bych si blíže povšimla posledních dvou bodů. Dříve byla motivace spjata s magickou silou čísel. Nyní člověk, povzbuzen úspěchem, touží objevit další zákonitosti. Hybnou silou rozvoje matematiky je snaha nalézt odpovědi na stále nové otázky. Některé z nich svou obtížností provokovaly několik generací (tzv. klasické problémy matematiky - zdvojení krychle, kvadratura kruhu, trisekce úhlu, konstrukce pravidelných n -úhelníků a rektifikace kružnice).

Problémy, které dlouhodobě motivovaly, usměrňovaly a testovaly matematiku, označili didaktici jako strategické. Strategickou motivaci, známou z fylogeneze, můžeme úspěšně využít při vyučování. Velmi přesně vystihuje tuto situaci známé rčení "nasadit brouka do hlavy". Formulace problému je žákovi jasná, ale řešení zatím nevidí. Strategická motivace plní v žákově psychice dvě funkce:

- a) podněcuje zájem žáka
- b) ukazuje mu cestu.

Rozvoji matematiky napomohly řemeslnické zkušenosti, experimentování a abstrakce. I odtud může učitel čerpat,

umožnit dítěti objevovat matematiku na základě svých vlastních praktických zkušeností. Zkušenosti může získat žák i záměrně, experimentem. Z matematických technik bych upozornila na transformaci problému, což je myšlenkový proces, který sice problém neřeší, ale mění ho na jiný.

Ve 4.stol.př.n.l. vstoupila do matematiky další velká osobnost, Euklides z Alexandrie (380?-300?př.n.l.). Působil v Múzeiónu, kde napsal 13svazkovou encyklopedii tehdejší matematiky, Základy. Axiomaticky vybudovaná práce se stala základní učebnicí největších matematiků historie, přestože dnes už si uvědomujeme i její nedostatky (nejasné pojmy, nedokonalost axiomatického systému, prolínání konstrukcí s tvrzeními). Pro nás jsou Základy především důkazem určité úrovně matematického myšlení.

Převážná část Základů je věnována aritmetice a planimetrii, pouze poslední tři knihy se zabývají stereometrií. V knize XI jsou uvedeny základní prostorové vztahy a objemy rovnoběžnostěnů; kniha XII studuje objem jehlanu, válce, kužele a kulové plochy; kniha XIII je vyvrcholením Základů a přináší nejnovější výsledky řecké stereometrie konce 4.století před n.l., tedy analýzu všech pěti platónských těles: tetraedru, hexaedru, oktaedru, dodekaedru a ikosaedru.

Zatímco metody a cíle planimetrie byly rozpracovány poměrně dobře, v rozvoji stereometrického myšlení od Euklida a Archiméda až po Gaspara Mongea nenajdeme ucelenější tendenci. Dílčí pokroky ve stereometrii byly motivovány potřebami astronomie, astrologie, architektury, optiky, zeměměřičství, ... Proto bych v této souvislosti uvedla jen několik jmen a myšlenek.

Leonardo da Vinci (1452-1519) se vedle malířství zabýval i geometrií a mechanikou.

Albrecht Dürer (1471-1528), malíř a myslitel, hledal pravidla, podle nichž se prostorové útvary zobrazují do roviny. Uskutečnil a popsal celou řadu experimentů, které ho přivedli k základním znalostem perspektivy.

Johannes Kepler (1571-1630) využil matematické poznatky ve svých úvahách o vesmíru.

Dále bych připomněla Geparda Desargua (1593-1662), jehož úvahy o nevlastních bodech a involucích podnítily vznik projektivní geometrie.

Za objevitele deskriptivní geometrie je považován Gaspard Monge (1746-1818). Metoda přesného zobrazení prostoru na dvě či tři průmětny znamenala kvalitativní změnu v syntetické geometrii i ve stavitelství.

2.2 GEOMETRIE V DNEŠNÍ ŠKOLE

2.2.1 Základní otázky

Názory na osnovy, koncepci vyučování nebo na učebnice geometrie se velmi liší. Pro ilustraci uvádím několik otázek, typických pro diskuse o školské geometrii.

1. Jak vypadá struktura školské geometrie?
2. Jak se vyučování geometrie podílí na formování žákova názoru na svět?
3. Které rozumové schopnosti a psychické funkce se podílejí na rozvoji geometrického myšlení?

4. Učit či neučit geometrické konstrukce? Jak učit, v jakém věku a v jakém rozsahu?
5. Které geometrické věty jsou základní? Má je učitel žákům sdělit, nebo se má snažit, aby je sami objevili?
6. V jakém věku začít s důkazy? Která tvrzení dokazovat?
7. Seznámit žáky s axiomatickou výstavbou geometrie?

V následujícím článku bych se pokusila na některé otázky odpovědět.

2.2.2 Struktura školské geometrie

Strukturu školské geometrie můžeme zkoumat z několika různých hledisek. Z hlediska obsahu můžeme učivo rozdělit na tři části:

1. *objekt, jehož se studium týká* - útvar (čtverec), vztah (kolmost, shodnost), invariant (obsah, průměr);
2. *metoda, kterou využíváme* - vektorová, souřadnicová, syntetická, početní;
3. *prostor, v němž se pohybujeme* - jeho dimenze a jeho grupa.

Z metodického hlediska je školská geometrie souhrn činností, které žák vykonává, a zkušeností, znalostí a schopností, které tím získává.

Psychologické hledisko rozděluje učivo geometrie podle psychických funkcí na několik složek: představivost, kombinační schopnosti, paměť, tvořivost, schopnost argumentace, schopnost abstrakce atd.

2.2.3 Geometrické konstrukce

Geometrické konstrukce zaujímaly ve vyučování matematiky důležité místo odedávna. Úroveň české geometrie a deskriptivy byla vynikající, avšak modernizační proud začátkem 60. let konstrukce z učiva téměř vypustil. V dnešní době získávají planimetrické konstrukce opět své místo, neboť:

- a) poskytují krásné motivační úlohy, které podněcují zvědavost žáků a vedou je k samostatnému objevování zákonitostí;
- b) ukazují žákovi jasný cíl, narozdíl od vět a důkazů, jejichž význam a smysl bývá žákovi často nejasný;
- c) umožňují, aby praktické zkušenosti žáka přešly do struktury jeho geometrického poznání;
- d) ukazují, jak je možné teoretické poznatky zužitkovat v praxi;
- e) přispívají k osvojení pojmů a vět;
- f) rozvíjejí schopnost dialektického vidění vztahu mezi teorií a praxí;
- g) jsou vhodným testovacím prostředkem, pomocí něhož může učitel diagnostikovat kvalitu neformálních znalostí žáka.

2.2.4 Planimetrie proti stereometrii

Podíváme-li se do učebnic matematiky (a to nejen do těch pro ZŠ), najdeme stereometrických úloh velice málo. Proč je stereometrie zastoupena ve vyučování matematiky tak

skromně? Příčina zřejmě nebude jen v nedostatku času, jak se někdy uvádí. Geometrii je sice věnováno méně hodin než algebře a aritmetice, ale proč tyto hodiny nejsou rovnoměrně rozděleny mezi planimetrii a stereometrii? Planimetrie je zcela jistě upřednostňována. Pokusme se uvést alespoň několik důvodů, proč tomu tak je.

Svou roli hraje nízká připravenost vyučujících a jejich nechuť věnovat se v hodinách matematiky právě stereometrii. Planimetrie pracuje přímo s geometrickými útvary, zatímco u prostorového útvaru operujeme jen s představou či obrazem objektu v rovině. Velký podíl na úspěšnosti ve stereometrii má tedy prostorové vidění. Řada učitelů se však domnívá, že žák prostorové vidění buď má, nebo nemá. Proto považují stereometrii za "nenaučitelnou". Jednotliví žáci mají, pochopitelně, různé vlohy k prostorovému vidění.

Nejsem jistě jediná, kdo věří, že vhodným přístupem lze schopnost prostorového vidění zvýšit. I žák s nižší úrovní prostorové představivosti má možnost se něco naučit. Učitel mu ovšem musí pomoci.

Při porovnání cílů vyučování planimetrie a stereometrie zjistíme, že společná je pouze axiomatika. Ve stručnosti lze cíle geometrie formulovat následovně.

a) Ve vyučování planimetrie se zaměřujeme na:

- zručnost v rýsování, přesnost
- analýzu obrázku - dokreslit podstatné a nevšímat si nepodstatného
- konstrukční úlohy - využít vlastností rovinných útvarů
- argumentaci
- grupy transformací v rovině

b) Ve vyučování stereometrie se zaměřujeme na:

- zručnost v rýsování, schopnost v rovinném obrázku názorně zachytit prostorovou situaci
- analýzu obrázku - schopnost vidět rovinný obrázek prostorově, nalézt správný úhel pohledu
- konstrukci těles, řezy, sítě
- objasňování
- grupy transformací v prostoru

2.2.5 Klasifikace stereometrie

Chceme-li charakterizovat učivo stereometrie přehlednou tabulkou, vyvstává před námi problém. Do hodnocení by se měl vedle obsahové stránky promítnout i stupeň náročnosti jednotlivých témat. Rozčleníme-li však učivo stereometrie z hlediska obsahu, z výsledného souhrnu nebude zřejmá gradace náročnosti a naopak. Proto mě zaujal přehled, který uvádějí autoři v [Hej]. Jejich poněkud volnější zpracování vychází z obsahové hierarchizace doplněné v závorkách o hierarchizaci z hlediska náročnosti. Středníkem oddělují jednotlivé stupně obtížnosti. Seznam přirozeně není úplný, neboť náročnost nelze posuzovat pouze na základě učebnic a učebních osnov. Každý učitel může přehled doplnit či pozměnit s ohledem na konkrétní třídu.

1. Rozvoj prostorové představivosti (spontánní stereometrie)

- a) geometrické těleso (hry s krychlemi; modelování

- tělesa podle předlohy nebo obrázku; kreslení tělesa;
...úvahy směřující k deskriptivní geometrii;
...platónská tělesa,...),
- b) sítě těles (vytváření sítě tělesa, konstrukce modelu tělesa na základě sítě, manipulace se sítí tělesa,...),
- c) pohyby tělesa (překlápění tělesa, popis tohoto pohybu,...),
- d) geometrie povrchu tělesa (pohyb po hranách tělesa, pohyb po povrchu tělesa,...),
- e) kombinatorická geometrie těles (barevné označování hran, stěn tělesa, kombinatorické hry;...Eulerova věta;...),
- f) prostorová bludiště (řešení, vytváření),
- g) řezy těles (krychle, hranol; hranatá tělesa; oblá tělesa;...)

2. Početní stereometrie

- a) tělesa a jejich vlastnosti (krychle; hranol, čtyřstěn, jehlan; oktaedr, nepravidelné mnohostěny, dodekaedr, ikosaedr; válec; kužel; koule),
- b) měření objemů a povrchů těles,
- c) měření vzdáleností a úhlů uvnitř tělesa a na jeho povrchu

3. Teoretická stereometrie

- a) "rozšíření prostoru" z těles na euklidovský trojrozměrný prostor (vzájemná poloha přímek, rovin, kolmost, úhel v prostoru,...),
- b) prostorová transformace (rovinná souměrnost, posunutí, ...),
- c) axiomatizace poznatků (zpřesnění pojmů bod, přímka, úsečka, rovina;...)

Základním předpokladem pro výuku stereometrie je vytvoření představy geometrického tělesa. Intuitivní představa geometrického tělesa vzniká už v předškolním věku, kdy se dítě prostřednictvím hry s kostkami seznamuje s tvary těles. Zjišťuje, jakým způsobem vytvářet z kostek věže a hrady, vytváří si předpoklady pro pozdější zavedení pojmů hrana, vrchol, stěna, Dítě postupně rozlišuje podstatné geometrické vlastnosti od nepodstatných (barva, tvrdost, ...), čímž se v jeho vědomí začíná utvářet idealizovaný obraz tělesa.

K počátečnímu kombinatoricko-topologickému vnímání [Pial] přibývají zkušenosti s metrikou. Cit pro proporcionalitu napomáháme vytvářet právě tím, že učíme žáky kreslit různá tělesa ve volném rovnoběžném promítání. Namísto reálného tělesa kreslí žák idealizovaný obraz vytvořený ve vědomí jako odraz reálné skutečnosti. Snaží se přitom o zachování geometrických invariant (z vrcholu krychle vycházejí tři hrany, stěna je čtyřúhelník, ...). Kreslením si žák představu konkretizuje, čímž si zpřesňuje pojem geometrické těleso.

Při výuce je nutné dodržovat zákony vývoje a akceptovat postupný nárůst abstrakce. i ve stereometrii vede cesta k myšlenkovým operacím přes manipulaci se skutečnými předměty. V b), c), d) si dítě zpřesňuje pojem geometrické těleso určitou myšlenkovou manipulací tělesem. Pokud žáci ještě nejsou schopni řešit úlohy pomocí představ, můžeme se vrátit k reálným předmětům. V úlohách e), f) se od předmětové skutečnosti přechází k abstraktní. Řezy těles uskutečňujeme čistě v rovině představ geometrického tělesa.

Ze shrnutí výše uvedeného tedy vyplývá, že výuka

stereometrie začíná jednotlivými modely - úroveň 1a). Dítě si začíná postupně uvědomovat určité jevy a souvislosti, učí se je pojmenovat, vytváří si pojmy (stěna, hrana, vrchol, kolmost, průsečík, krychle, ... - úroveň 2a). Přijmutí pojmu je urychlováno častější činností žáka s tělesy, ať už jde o činnost konkrétní - 1b), 1c), 1d), či částečně abstrahující, představovanou úlohami 2b), 2c), 1e), 1f), 1g).

Umožňuje-li úroveň abstraktního myšlení žáka tvořit abstraktní pojmy, hovoříme o stupni 3a), 3b). Závěrečným krokem je utřídění stereometrické struktury do jednotného logického celku pomocí axiomatizace - 3c).

2.3 O PŘEDSTAVIVOSTI

2.3.1 Význam představivosti

Problematika představivosti se jistě jeví významná v matematice, zejména pak v geometrii. Myslím si však, že nezanedbatelný význam pro rozvoj duševního života člověka má rozvíjení představivosti i v širším smyslu.

V literatuře, ale někdy i mezi matematickou veřejností, je chápána představivost více méně geometricky: jako schopnost vybavovat si obrazy těles nebo geometrických útvarů, které mají určité vlastnosti. To je pojetí velmi úzké. Psychologická koncepce představivosti je podstatně širší a vztahuje se většinou k roli, kterou představivost sehrává v životě člověka. V roce 1985 upozornil doc. M. Hejný na skutečnost, že někteří autoři hodnotí úroveň představivosti jako významný faktor úrovně úspěšnosti

člověka ve společnosti. Má-li představivost vliv na možnosti rozvoje a uplatnění jedince ve společnosti, nesmí škola zanedbat žádné cesty k rozvíjení představivosti u žáků. Pro lepší přiblížení k problematice představivosti bych použila myšlenky těch, kteří se touto otázkou ve své práci zabývali.

Známý anglický antropolog a matematik polského původu Jacob Bronowski píše ve své knize Vzestup člověka [Bro] : "Člověk se liší od zvířat svou představivostí. Dovede uvažovat do budoucna, vynalézat, objevovat, dovede užívat různých vloh. To, čemu říkáme kulturní vývoj, je ve své podstatě vývojem lidské představivosti ... Vznik vědy a umění lze připsat též lidské vloze: schopnosti představit si názorně budoucnost, předvídat, co se může stát, a připravit se na to, umět budoucí děje zobrazit a přeměňovat ve vlastní mysli, na osvětlené ploše temné jeskyně nebo na televizní obrazovce ... lidský tvor má řadu jedinečných schopností, ale tou nejzákladnější je umění činit závěry o neviděném na základě viděného, dokázat se přenést v mysli přes prostor a čas. Tato schopnost je skutečným pramenem našeho vědění..."

Výrazně oceňuje obrazotvornost i Napolen Hill, který se ve své populární knize Myšlením k bohatství [Hill] zabývá otázkami úspěchu i ve smyslu duchovním. V kapitole Obrazotvornost např. píše: "Obrazotvornost je v pravém slova smyslu dílnou, ve které všechny plány člověkem stvořené dostávají tvar. Pomocí imaginačních schopností myslí se impuls, touha, proměňuje, formuje se a dává do pohybu ... Člověk může stvořit cokoliv, co si dokáže představit ... Člověka v rámci jeho intelektu ohraničuje pouze to, jak rozvíjí a užívá své obrazotvornosti."

Představivost je předpokladem a základem tvořivosti, z čehož plyne její důležitost pro život člověka. Bez geometrické představivosti není možná technická tvořivost, bez geometrické představivosti není možná tvorba něčeho nového. Jan Amos Komenský v Didaktice analytické [Kom] píše: "Míti znalosti znamená dovést něco zobraziti, ať už myšlenkou, rukou či jazykem ... Všechno totiž má svůj původ v zobrazování, tj. ve vytváření podob a obrazů skutečných věcí. Kdykoli totiž smyslem vnímám nějakou věc, vtiskuje se mi její obraz do mozku. Kdykoli vytvářím podobnou věc, vtiskuji její obraz hmotě. A když jazykem oznamuji to, co si myslím nebo tvořím, vtiskuji představu téže věci vzduchu a vzduchem do uší, mozku a mysli osoby druhé. Prvnímu způsobu říkáme věděti a třetímu způsobu zobrazování říkáme uměti."

Efektivní vzdělávací proces je založen na zkušenostech žáků. V procesu učení žák hledá odpovědi na položené otázky a vytváří si představy, které jsou základem vytváření pojmů a poznatků. Tento proces neprobíhá lineárně. Zkušenosti představy a poznatky se navzájem kombinují, přenášejí a vytvářejí možnosti zvyku dalších zkušeností, představ, pojmů a poznatků.

Nezastupitelnou úlohu má představivost v matematice i ve vyučování matematice. Vidění v matematice je třeba se učit, vidění nelze oddělit od vědění. Vidět geometrické souvislosti v typických pohledech je velmi důležité, je to složka chápání geometrie jako jazyka matematiky. Někteří autoři (Hejný) předpokládají, že i matematické abstrakce jsou podmíněny fantazií: "V matematice je fantazie všudypřítomná. Projektivní rovinu, komplexní číslo či čtyřrozměrný prostor nikdo neviděl a neuvidí. Jsou dílem

fantazie, podobně jako další pojmy."

2.3.2 Psychologické základy představivosti

Zájem o problematiku představivosti se v průběhu kulturního vývoje lidské společnosti v určitých obdobích zvyšoval. Poměrně vysoká vlna zájmu o tuto problematiku, vycházející z tradic filosoficko-psychologického myšlení, vrcholila na počátku 20. století. Byla však nahrazena od dvacátých a třicátých let 20. století obdobím relativního útlumu; toto období přineslo z hlediska studia představivosti pouze některé poznatky, vycházející z klinické zkušenosti a z psychoanalytického zaměření. Přechodné opadnutí zájmu pak bylo vystřídáno novým dynamickým vzestupem po roce 1960, zejména v souvislosti s vytvořením a dalším rozvojem kognitivní psychologie.

Avšak ani v období před vznikem psychologie jako samostatné vědní disciplíny, kdy psychologické poznání se rozvíjelo v rámci filosofie, neexistovala jednotná cesta výzkumu představivosti a jejího posuzování.

Jednota bohužel neexistovala, a neexistuje dosud, ani pokud jde o základní terminologická východiska studia této problematiky.

Terminologický aparát, užívaný při studiu představivosti, je více než jiné oblasti psychologického výzkumu spojen s otázkou obecného a odborného psychologického jazyka. Vzhledem k této skutečnosti je terminologická základna této problematiky neustálená, střetává se s nepřesně vymezenými pojmy i s odlišně

utvářenou artikulací termínů.

Odborná terminologie je v psychologii pojímána duálně: vychází se zde ze vztahu mezi psychickými funkcemi a psychickými procesy. Tento vztah je na obecné úrovni dán vztahem dvěma mezi filosofickými pojmy: "skutečnost" a "možnost". Psychická funkce je pojmem dispozičním, stupeň jejího vývoje a rozvoje se projeví v psychickém procesu.

Na úrovni dispoziční se např. hovoří o obrazivosti, představivosti či imaginaci; tyto dispoziční pojmy vystihují realizovatelnost tvorby obrazů-představ, zatímco např. obrazotvornost, včetně pojmů příbuzných, již vyjadřuje aktivní přepracování obrazů-představ. Na základě tohoto přístupu lze diferencovat mezi představivostí, imaginací či obrazivostí jako potenciální podmínkou, a představováním, fantazií (obrazotvorností) jako aktivní realizací průběhu představování. Podobnou diferenciaci lze koncipovat též v hlavních světových jazycích, kde však - podobně jako v češtině - dosud není terminologie běžně ustálená (viz tabulka č.1).

Všechny tyto složky vytvářejí relativně stejnorodý specifický soubor psychických aktivit, soustředěný kolem ústředního pojmu "představivost" či "imaginace". Zařazení každého z pojmů do užšího či širšího pojetí obrazotvorných aktivit je závislé především na jeho "blízkosti" směrem k centrálnímu pojmu "představivost" či "imaginace".

Tab.č.1

čestina:	angličtina:	francozština:	němčina:	ruština:
imaginace představitivost (obrazivost, obraznost)	imagery (mental imagery)	imagerie	Einbildung	obraznost (imažinacija)
obrazotvornost představování	imagination	imagination (imagination créatrice)	Einbildungskraft (imagination, Vorstellungsvermögen)	voobraženíje voobrazení
fantazie	fantasy	fantaisie	Phantasie	fantazija
představa (obraz, reprezentace)	image (idea, representation)	image (représentation)	Vorstellung (Bild)	představleni
představit si	to imagine	imager	sich vorstellen	představljat (voobrazit')

2.3.3 Analýza dosavadního vývoje zkoumání

V dosavadním vývoji filosoficko-psychologického studia představivosti můžeme vyčlenit dvě základní linie zkoumání, v nichž se později utvářel dichotomicky koncipovaný vztah k představivosti (stejně jako k dalším složkám souboru tzv. obrazotvorných aktivit):

1. V rámci první takto vyčleněné výzkumné linie je hodnocení představivosti v podstatě pozitivní a oceňující. Důraz je kladen především na spojující funkci představivosti jakožto článku *sui generis* mezi vyššími a nižšími psychickými procesy. Role představivosti je v této linii většinou chápána jako nezastupitelná jinými psychickými procesy. Hlavními představiteli této linie jsou především: v antické filosofii Aristoteles, v jehož pojetí je představivost spojovacím článkem mezi vnímáním a myšlením, dále pak Avicenna, M. Kusánský, Paracelsus, T. Hobbes, G. Vico, D. Hartley a četní další. Někteří příslušníci této linie zdůrazňují centrální úlohu představivosti v rámci lidské psychiky (G.Vico, F.Brentano, v současné psychologii např. E. Klinger).

2. Postoj představitelů druhé linie k představivosti jakožto samostatné psychické funkci je negativní, či převážně negativní; promítal se do charakteristik představivosti jako matoucího prvku, jenž zamlžuje či přímo znemožňuje dosažení skutečného, pravého poznání. Tuto linii lze vystopovat ve filosofii platónské, dále též u stoiků. Některé podněty z učení těchto starověkých filosofů později našly ohlas v novověkých pojetích představivosti

spadajících rovněž do této výzkumné linie (např. v díle Schopenhauera či H. Bergsona).

Je zřejmé, že obě tyto výzkumné tendence, zahrnující hodnotící stanovisko vůči představivosti, do značné míry určovaly i další vývoj filosoficko-psychologického poznání o představivosti a obrazotvorných aktivitách: aristotelská pečlivost spolu s přesností výrazu, teoretická a metodická vynalézavost L. da Vinci nebo Hartleyem postulované psychologické a psychofyziologické základy asociativního výkladu představivosti předurčily u psychoanalytiků a později u kognitivních psychologů pozdější výzkumnou orientaci zaměřenou na představivost. Naproti tomu negativní role, jež byla představivosti přisouzena v učení novoplatoniků, byla znovu zdůrazňována v některých iracionalistických koncepcích středověké i novověké filosofie a psychologie.

Řadu dokladů této dichotomicky pojaté výzkumné linie nacházíme po osamostatnění psychologie jako vědní disciplíny již u prvních představitelů psychologického výzkumu představivosti (W. Wundt, Ch. Wolf, F. Brentano, T. Ribot). Po inspirujícím vlivu hlubinné psychologie a některých průkopnických výzkumných pokusech však výzkumná orientace na představivost byla bohužel dále rozvíjena až s odstupem více než půl století. Hlavními stimuly pro nový vzestup zájmu o problematiku představivosti byly zřejmě:

- změna pohledu na výzkum lidského myšlení, vznikající na počátku šedesátých let 20. století pod vlivem teorie informace a počátku využívání počítačů k simulování lidské inteligence;

- pokrok ve výzkumu spánku, především neurofyzilogicky orientovaného, který později umožnil identifikovat ty fáze spánkového cyklu, jež jsou spojeny se sny, představami a dalšími složkami souboru obrazotvorných aktivit;

- rychle se rozrůstající seriózní výzkumy hypnózy, jež dospěly do stadia zkoumání za pečlivě kontrolovatelných podmínek a umožnily zároveň nově koncipovat vztah tohoto jevu k jiným, převážně kognitivním funkcím a procesům, včetně imaginace.

Na rozvoj imaginace a imaginativních aktivit ovšem silně zapůsobilo též vytvoření kognitivní psychologie, jež je vztahováno k roku 1960. Následujících třicet let pak zájem o tuto problematiku rychle rostl.

Jednou z nejvýznamnějších koncepcí z počátku 70. let je model dvojího kódování A. Paivia. Podle jeho teorie se výsledky psychických procesů projevují jednak ve formě slov (verbální kódování), jednak ve formě představ (vizuální, "piktoriální", imaginační kódování). Paivio zjistil, že konkrétní slova jsou zapamatovatelná lépe než slova abstraktní a že obrázky (představy) jsou zapamatovatelné lépe než jakýkoli druh slova.

Nedlouho po Paiviovi publikoval své názory další badatel v této oblasti, G.H. Bower. Podle něj dochází k vyvolání představy tehdy, jestliže centrální mechanismy vytvářejí vzorce informací odpovídající do jisté míry struktuře informací v původním vnímání.

Vedle "piktoriálních" teorií imaginace vznikaly i teorie "non-piktoriální". U. Neisser chápe vnímání jako automatický, uzavřený proces, obsahující anticipační fázi. Následně vytvořená představa je tedy prostorovým uspořádáním

percipovaným bez účasti odpovídajícího smyslového podnětu.

D.O.Hebb pro změnu předpokládá, že určitou organizační roli sehrávají oční pohyby a značný význam připisuje úloze tzv. buněčných seskupení (hierarchicky uspořádaných). Představa je utvářena, pokud některé z neurologických struktur aktivovaných v mozku během percepce jsou aktivovány i bez přítomnosti odpovídajícího smyslového podnětu.

V literatuře posledních 15-20 let patří v rámci výzkumu představivosti jedno z předních míst v diskusi, rozvíjené na stránkách odborného tisku mezi S.Kosslynem a Z.Pylyshynem. S.Kosslyn se domnívá, že vlastnosti představ jsou závislé spíše na zprostředkovateli či médiu, v němž se realizují, než na změnách objektů, jejichž vlastnosti představy zobrazují.

Z.Pylyshyn vidí podstatu představ a představivosti v souboru tzv. tichých, nevyslovených poznatků. Domnívá se, že pokud si člověk představuje nějaký předmět nebo situaci, vytváří představu co nejpodobnější představě, kterou by vytvořil, kdyby tento předmět či situaci viděl. Generování a transformování představ nezávisí tedy dle Z.Pylyshyna ani tak na vlastnostech analogového média, navrhovaného S.Kosslynem, jako spíše na nevyslovených poznatcích. Velký význam je přikládán též cílům a postojům jedince, který představy vytváří, charakteru řešených úloh, ale i podané instrukce.

Kromě výše zmíněných dvou základních stanovisek týkajících se výzkumu představivosti v kognitivní psychologii je třeba alespoň stručně uvést další výzkumné směry. Vedle výzkumů tzv. mentální transformace (R.Shepard, J.Metzler a další) jsou podnětné i výzkumy představivosti

vycházející z počítačového vzoru. Někteří z autorů těchto koncepcí (R. Baron, B. Julstrom atd.) vycházejí z modelu neuronové sítě, zvané "prostorová paměť". Právě tato síť je podle nich základem představivosti.

Celá oblast současného zkoumání představivosti v psychologii i v dalších příbuzných disciplínách je velmi rozsáhlá, je propojena četnými souvislostmi a velmi dynamicky se stále rozvíjí.

2.3.4 Funkce představivosti v psychice člověka

Představivost poměrně úzce souvisí s ostatními psychickými funkcemi a procesy. Domnívám se, že tyto vazby lze zaznamenat na mnoha úrovních. Vyžadují tedy souhrnný pohled na představivost jako na integrovanou součást systému psychiky. V následujících odstavcích bych se proto pokusila stručně charakterizovat nejvýznamnější souvislosti představivosti v rámci psychiky jako sjednoceného systému.

Představivost a vědomí

Mezi základní vazby představivosti patří nepochybně souvislosti s vědomím, a to jak na úrovni individuálního, tak společenského vědomí. Individuální vědomí přitom chápeme jako souhrn veškerých zkušeností jedince, tj. jak zkušeností získaných přímo v průběhu ontogeneze, tak i zkušeností získaných zprostředkovaně, na základě dosavadních zkušeností lidské společnosti.

Obecně lze konstatovat, že představy a jejich skládání a kombinování do určitých nových seskupení tvoří jeden ze

zdrojů lidského vědomí. Jde o zdroj velmi významný, neboť umožňuje nejen předávání dosud shromážděných zkušeností, ale i anticipaci, plánování, jež je jedním ze základních zdrojů tvorby.

V poměrně rozsáhlé míře se současná psychologie zabývá i výzkumem tzv. alterovaných stavů vědomí. Alterovaný stav vědomí bývá v souvislosti se studiem imaginativních aktivit chápán jako psychické zaměření, podněcující obrazotvornou aktivitu jedince.

Představivost a percepce

Představy je třeba chápat jako výsledky vnitřní psychické aktivity člověka. Vznikají převážně na základě vjemů a jejich přehodnocení. Na rozdíl od vjemů jsou představy tradičně charakterizovány jako vnitřní, subjektivní, úlomkovité, méně jasné a živé, často zbavené určitých detailů, vůlí vyvolatelné a ovlivnitelné.

Výsledky novějších výzkumů vysvětlují útržkovitost představ oproti vjemům postupným opomíjením informací, jež jsou v průběhu vytváření představy pro člověka nepodstatné. Vztah mezi vnímáním a představivostí je oboustranný: percepce je prvotním zdrojem, základem pro rozvoj představivosti, avšak plnohodnotné vnímání není realizovatelné bez představ.

Představivost a paměť

Se vztahem představivosti a vnímání je těsně spjat vztah představivosti a paměti; obě tyto vazby jsou pak úzce vázány na vztah představivosti a vědomí.

Vztahují-li se představy k minulosti, jde o vzpomínku.

Představy mohou být ale zaměřeny do budoucnosti. Vznikají-li v souvislosti s činností, jedná se o představy anticipační. Anticipační představy se vytvářejí na úrovni vědomí i nevědomí.

Představivost a myšlení

V některých starších přístupech bylo myšlení zaměřováno s představivostí. Novější koncepce myšlení bývají členěny na dvě složky. Do první bývají zahrnuty imaginativní aktivity, zatímco druhá obsahuje zvl. usuzování (chápání vztahů, řešení problému atd.).

Představivost a emoce

Rovněž vztah představ a emocí se jeví jako vztah oboustranný. Emoce lze vyvolávat, či naopak potlačovat pomocí představ. Emoce mohou působit na tvorbu představ a na průběh představivosti.

2.3.5 Pojetí představivosti

Na základě shrnutí dosavadních poznatků bych pojetí představivosti a představ formulovala následovně:

Představivost je základní psychická funkce, zajišťující možnost aktuálního psychického zpřítomnění jevů, které nejsou ve skutečnosti přítomny.

Představivost lze ovšem definovat i jinak. Encyklopedický slovník uvádí: "představivost je znovuvybavení paměťových představ nebo vytváření představ dosud nikdy nevnímaných objektů, jevů".

Na otázku "Co je prostorová představivost?" odpovídá M. Hejný takto: "Zdá se, že je to něco, co nám umožňuje vidět to, co ještě není - tedy vytvářet si představy geometrických objektů, jejich rozmístění; umět v představách s těmito objekty manipulovat." F. Kuřina v knize Umění vidět v matematice píše: "Geometrická představivost je souhrn schopností, které se týkají našich představ o tvarech a vzájemných vztazích mezi útvary v prostoru." Z mého pohledu je prostorová představivost druh psychické činnosti, která nám umožňuje vytváření geometrických útvarů a operování s nimi, i když nejsou de facto přítomné. Názorů na prostorovou představivost je tedy celá řada. Možná, že právě tato nejednotnost způsobuje do jisté míry nechuť se problematikou zabývat.

V případě geometrie nám prostorová představivost umožňuje reprezentovat abstraktní matematické pojmy jejich hmotnými modely. P. Vopěnka to komentuje následovně [Vop]: "Děti, které se dosud neučily geometrii, geometrický svět neznají. Učitel jim tento svět otevře. Jeho úkol je zdánlivě nesplnitelný, neboť ho nemůže ani ukázat, ani nenalezne dostatek slov, jimiž by ho popsal. Může tento svět pouze navozovat, např. narýsovat čáry pomocí pravítka a kružítko a říci, že se úsečkám a kružnicím podobají, ale ukázat na nich může jen to, čím se jim nepodobají. Do geometrického světa můžeme někoho vést jen na kus cesty, můžeme ho přivést jen před jeho brány, rozhodující krok však musí učinit sám."

O tom, nakolik se daří dětem na základní škole pronikat do světa geometrie, se dozvíme více v následující části diplomové práce.

3. EXPERIMENTÁLNÍ ČÁST

Způsobů, jak zkoumat úroveň prostorového vidění žáka, by se jistě našla celá řada. Jednou z nich jsou tzv. "procházky po krychli", kdy se žák dle pokynů experimentátora pohybuje po myšlené či skutečné krychli. Právě tento způsob jsme zvolili ve své práci i my.

Základní variantu testu jsem vyzkoušela na vzorku žáků ze základních škol v Liberci, Kolíně a Obříství. Celkem bylo testováno 44 dětí, z toho 26 ve čtvrtých třídách a 19 ve třídách sedmých. Na základě jejich výsledků jsem pak vybrala 16 žáků, s nimiž jsem prováděla další experimenty.

3.1 ZÁKLADNÍ VARIANTA EXPERIMENTU

3.1.1 Výchozí situace

Žák a experimentátor sedí proti sobě u stolu. Na stole jsou položeny dva modely krychle - dřevěný a drátěný. Oba mají hranu dlouhou 8 cm. Žák si je může prohlédnout, případně osahat. Poté je seznámen s podstatou experimentu. Jeho úkolem je "chodit po krychli" podle příkazů (kroků) experimentátora - a) dle modelu,

b) bez modelu,

případně posloupnost příkazů (cestu) zopakovat. Pro popis krychle užíváme klasické označení - krychle ABCDEFGH. Užívané příkazy jsou v následujícím textu označovány příslušnými zkratkami - *po hranách*: doprava (P), doleva (L), dolů (D), nahoru (H), dopředu (Př), dozadu (Z)

- *po stěnách*: napříč levou stěnou (LS), napříč pravou stěnou (PS), napříč dolní stěnou (DS), napříč horní stěnou (HS), napříč zadní stěnou (ZS), napříč přední stěnou (PřS).

Jelikož naprostá většina žáků podobný úkol nikdy neřešila, je nezbytný krátký nácvik, aby dítě správně pochopilo, co se od něj žádá. V rámci nácviku experimentátor sdělí výchozí bod na krychli (VB) a dále diktuje jednotlivé kroky cesty, vždy po souhlasném pokynu žáka. Žák nakonec sdělí koncový bod na krychli (KB). Nácvik provádíme nejprve s modelem, kdy žák jednotlivé kroky ukazuje. Po skončení pak ukazuje opět celou cestu. Poté model zakryjeme a žák si jednotlivé kroky představuje, nakonec sdělí koncový bod. Je-li KB chybný, opakuje se s modelem bez ukazování, případně s ukazováním. Ukazuje-li žák na modelu, zvolí si sám, který z nich chce použít. Při vlastním experimentu pak žák sám rozhodne, zda chce model zakrýt, či nikoli. V případě odkrytého modelu se může pouze dívat, nebo si kroky postupně ukazovat. Pokud úloha vyžaduje, aby žák cestu zopakoval, opakuje ji buď se zakrytým modelem, nebo ukazuje cestu na zvoleném modelu. Zvolená forma odpovědi závisí na jeho rozhodnutí.

Posloupnost kroků v experimentech není zcela náhodná. Svůj význam má nejen délka "cesty", ale také střídání hran (h) a úhlopříček (u). Pod značením (u), (h) budeme dále rozumět tzv. neviditelné hrany či úhlopříčky.

Celý průběh pokusu je nahráván pomocí diktafonu, aby se experimentátor mohl plně soustředit a nerozptyloval se psaním příliš dlouhých poznámek.

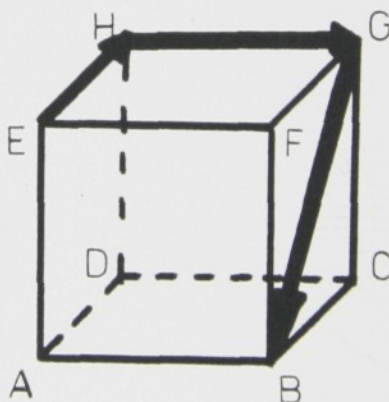
Výsledky experimentů jsou prezentovány prostřednictvím grafů. Grafy znázorňující rychlost reakce žáků na jednotlivé pokyny nalezneme v příloze 1 (P1 až P9).

3.1.2 Experiment A

ÚLOHA A1: (hhu) VB E, dozadu, doprava, napříč pravou stěnou, jaký je KB?

Dovedeš zopakovat cestu?

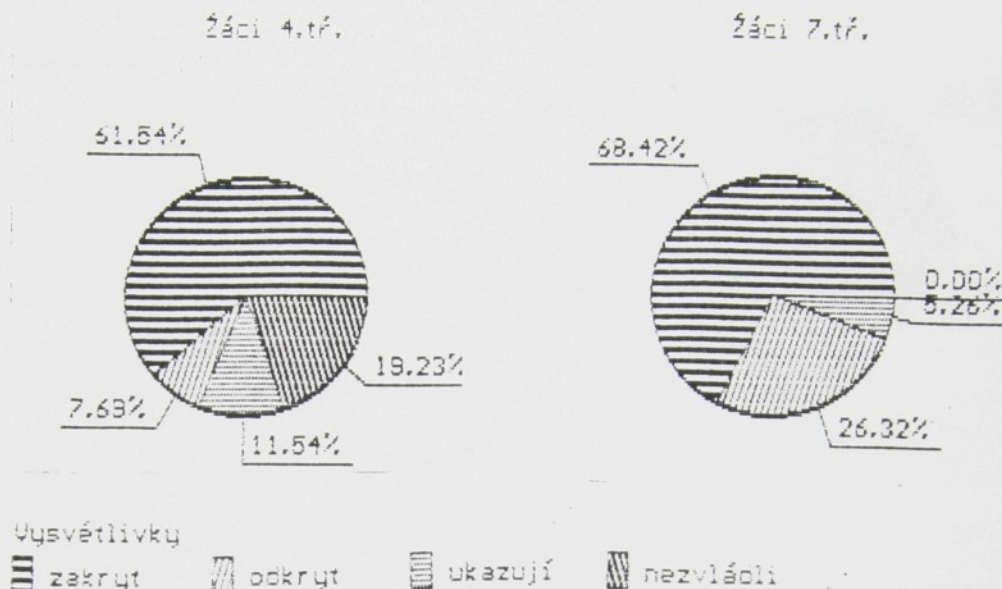
Cesta je volena záměrně krátká. Slouží k nácviku orientace. Pro ilustraci uvádím následující obrázek krychle, šipkami je znázorněna zadaná cesta. Hrany DC, DA, DH budeme v dalším textu nazývat "neviditelné".



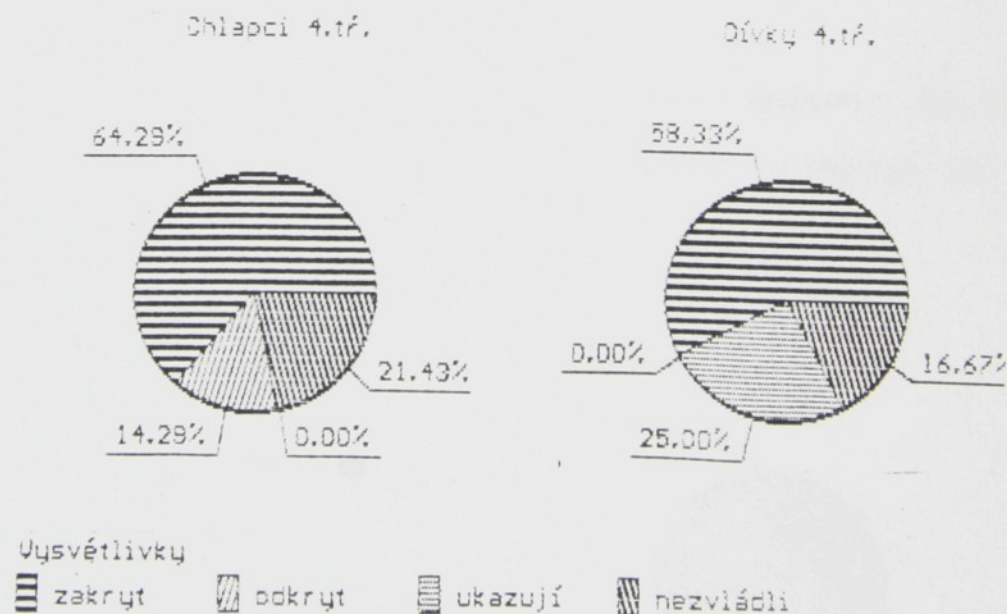
Obr. 1

Naprostá většina zkoumaných žáků zvládla první část úlohy bez modelu. Grafy [P1-P3] vyjadřují závislost reakce žáků na pokyn. Vodorovná osa udává čas v sekundách, svislá osa jednotlivé kroky. Z grafu nevyplývá, že by některý z povelů byl výrazně náročnější, reakce žáků jsou srovnatelné. Zdá se však, že dívky jsou nepatrně pomalejší než chlapci. Zvláště patrný je tento rozdíl ve vzorku žáků ze 7. tříd.

Porovnáme-li úspěšnost jednotlivých skupin (vyjádřenou v procentech), zjistíme následující:



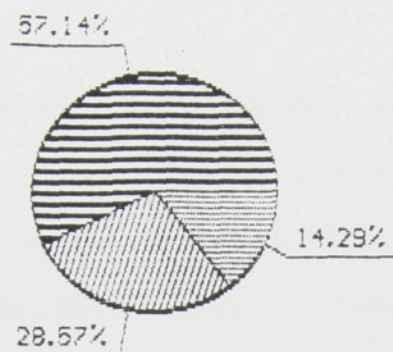
- celkově byli úspěšnější starší žáci, nenašel se mezi nimi nikdo, kdo by úlohu vůbec nezvládl



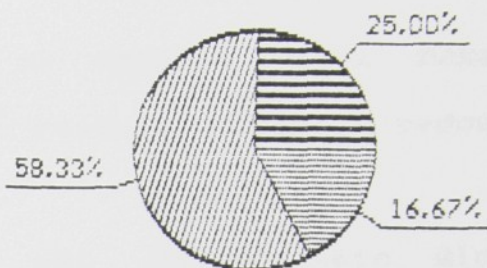
- podíl neúspěšných mezi chlapci a dívkami ve 4. třídě je přibližně stejný

- chlapcům, kteří úlohu nezvládnou, stačí model odkrýt, zatímco dívky raději cestu ukazují

Chlapci 4.tř.



Dívky 4.tř.



Vysvětlivky

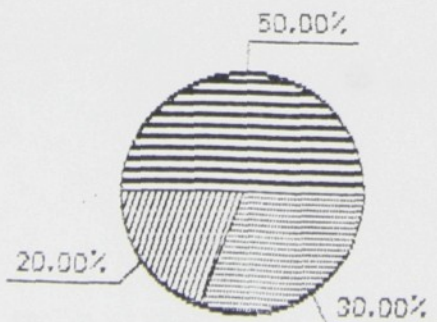
z paměti

s ukazováním

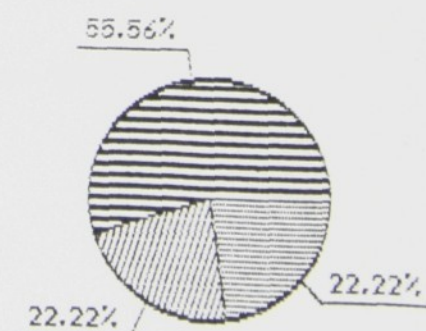
neopakuje

- ve 4. třídě jsou v opakování bez použití modelu výrazně úspěšnější chlapci, avšak dívky zvládnou cestu znovu ukázat, takže počet zcela neúspěšných je stejný
- u starších žáků je schopnost opakovat cestu přibližně stejná u dívek i chlapců
- z uvedených grafů je dále zřejmé, že mladší chlapci jsou úspěšnější než starší, u děvčat je tomu naopak

Chlapci 7.tř.



Dívky 7.tř.



Vysvětlivky

z paměti

s ukazováním

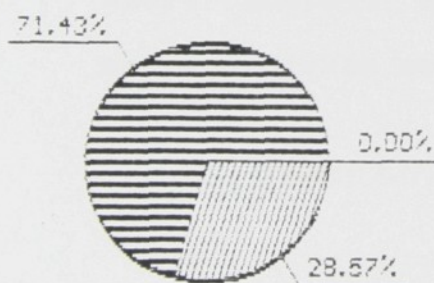
neopakuje

ÚLOHA A2: (uhhhu) - VB F, napříč pravou stěnou, doleva, dopředu, nahoru, napříč horní stěnou, jaký KB?
Dovedeš zopakovat cestu?

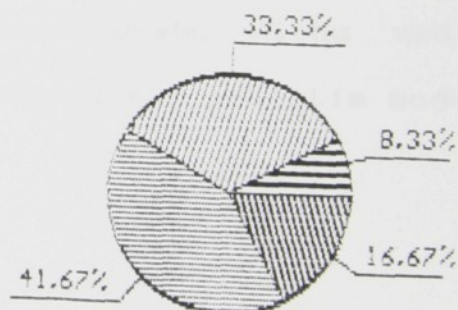
Posloupnost kroků je volena se záměrem přimět žáka k delšímu soustředění a zjistit, jak reaguje na povely vedoucí k pohybu po neviditelných hranách.

Celkově byly reakce žáků při řešení této úlohy pomalejší než při A1. Z grafu [P4-P6] vyplývá, že nejtěžším úkolem, zejména pro starší žáky, je pohyb po "neviditelných" hranách. Mladším žákům činí potíže orientace doleva-doprava. Všem skupinám je společná pomalá reakce na pokyn "dopředu".

Chlapci 4.tř.



Dívky 4.tř.



Vysvětlivky

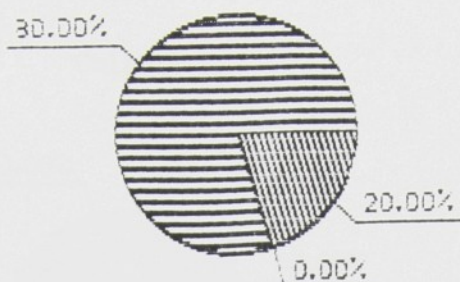
zakryt

odkryt

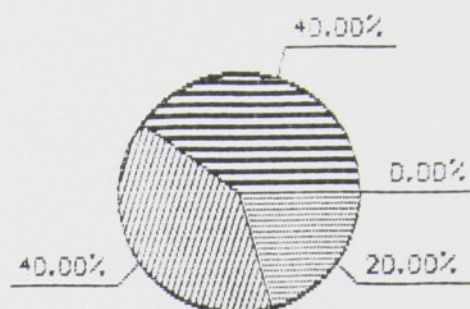
ukazují

nezvládli

Chlapci 7.tř.



Dívky 7.tř.



Vysvětlivky

≡ zakryt

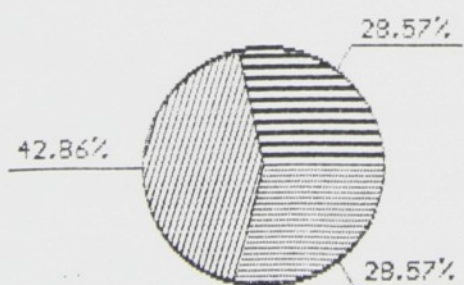
▨ odkryt

▩ ukazují

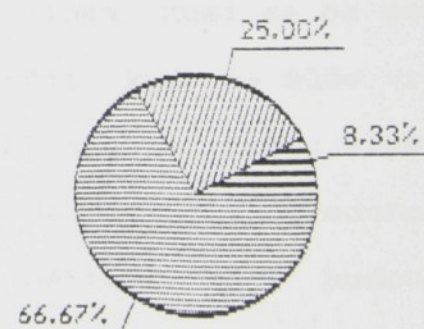
□ nezvládli

- v obou věkových kategoriích jsou úspěšnější chlapci
- ve 4.třídě zvládají dívky úlohu v podstatě pouze s použitím modelu
- při porovnání žáků 7.tříd se ukazuje, že chlapci, kteří nuspějí bez modelu mají snahu úlohu vzdát, zatímco dívkám se daří dosáhnout cíle s použitím modelu

Chlapci 4.tř.



Dívky 4.tř.



Vysvětlivky

≡ zpaměti

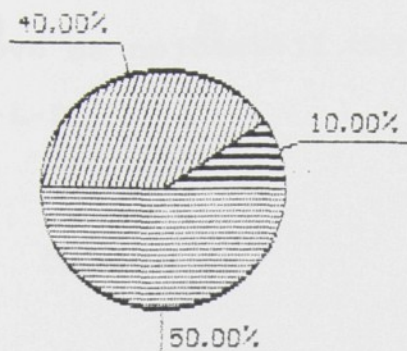
▨ s ukazováním

▩ neopakuje

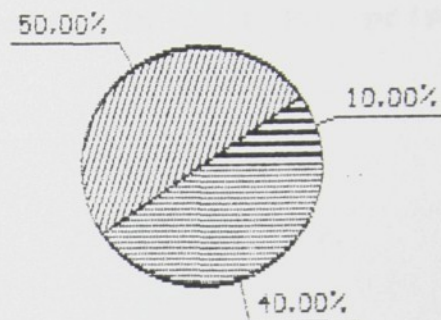
- opakovat delší cestu bez modelu se dařilo pouze mladším chlapcům, ovšem zaujímají stejné procento jako neúspěšní

- mladším dívkám se příliš nedařilo, a to ani s použitím modelu
- celkově však druhou část úlohy zvládli úspěšněji žáci ze 4. tříd

Chlapci 7.tř.



Dívky 7.tř.



Vysvětlivky

≡ zpaměti

▨ s ukazováním

≡ neopakuje

ÚLOHA A3: (huuhuh) - VB A, nahoru, napříč přední stěnou, napříč dolní stěnou, doprava, dopředu, napříč pravou stěnou, dolů

Jakou cestou zpět do VB? Je i jiná?

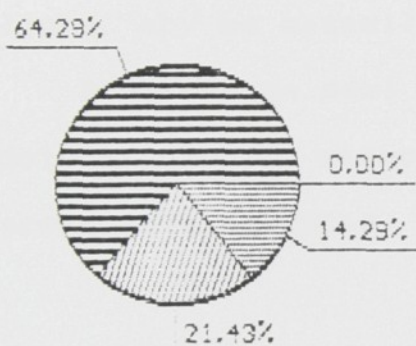
Nyní úkol žáka spočívá v něčem jiném. Musí se na modelu orientovat tak dobře, aby dokázal určit, kudy se může vrátit do výchozího bodu. Je žádoucí, aby navrhl cestu vlastní. Proto je posloupnost kroků volena delší než v předchozích úlohách. Lze však očekávat, že někteří žáci budou mít problémy se zapamatováním si VB.

Nejvíce žáků zaváhalo při pokynech vyžadujících pohyb po stěně nebo po "neviditelné úhlopříčce". Mladší žáci se zřejmě nedokázali soustředit tak dlouhou dobu a chybovali proto často v několika posledních krocích [P7-P9].

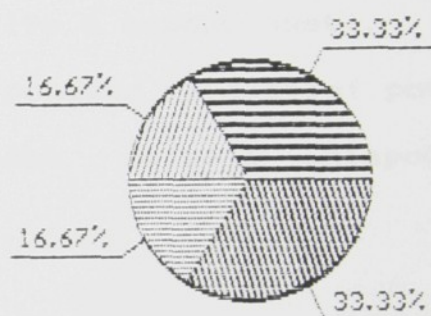
Zajímavé je, jaké cesty zpět do výchozího bodu

navrhovali. Většina žáků správně dospěla do bodu C, ale výchozí bod si zapamatovali spíše ti starší. Mezi žáky 4.tř. se našlo velice málo těch, kteří by volili cestu napříč dolní stěnou. Navrhovali překvapivě složité cesty, ale častěji po hranách než stěnách. Starší dívky i chlapci shodně navrhovali zpáteční cestu napříč dolní stěnou. Celkově se nejčastěji objevovaly cesty PŘ-L, L-PŘ, případně PŘ-H-L-D.

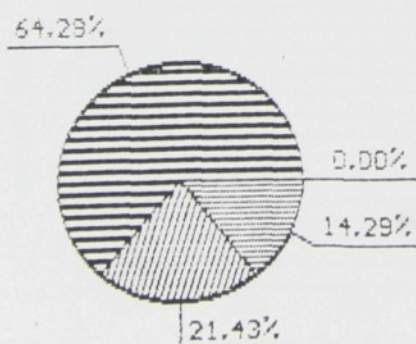
Chlapci 4.tř.



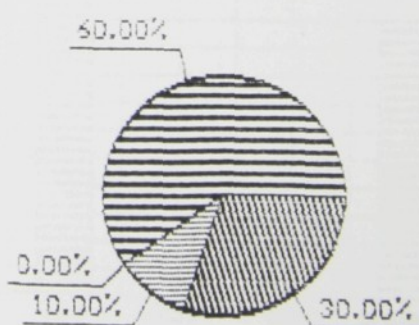
Dívky 4.tř.



Chlapci 7.tř.



Dívky 7.tř.



Vysvětlivky

zakryt

odkryt

ukazují

nezvládli

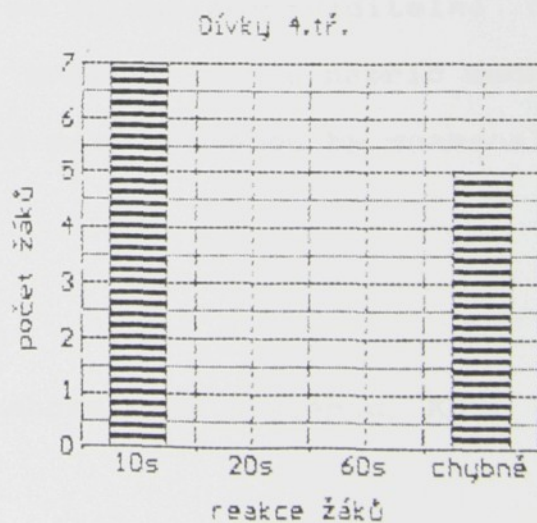
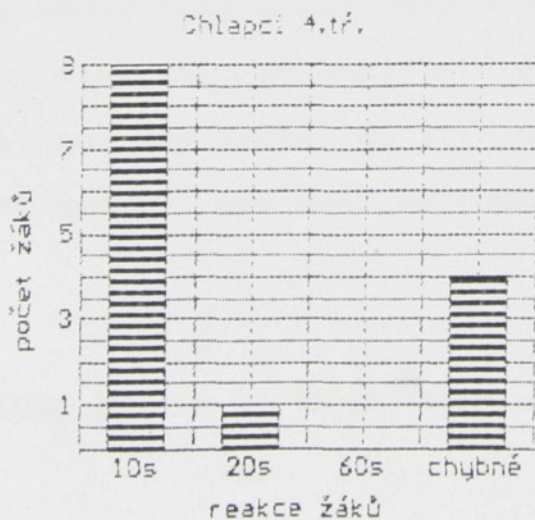
- opět nejúspěšnější byli mladší chlapci
- mezi žáky 7. tříd se dařilo více dívkám, zřejmě proto, že starší chlapci buď zareagovali správně hned, nebo přemýšlení "vzdali"

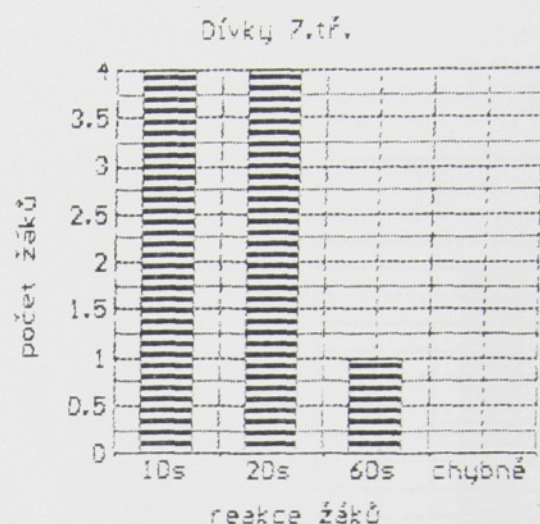
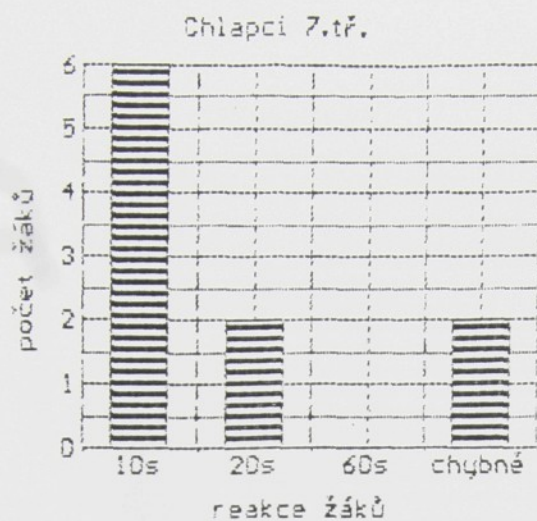
ÚLOHA A4: (h-u) VB F, dozadu, doleva napříč stěnou, jaký KB?

\u)

Cílem této úlohy je zjistit, jak budou žáci postupovat, mají-li více možností, kudy pokračovat v cestě. Cesta není dlouhá, aby se zamezilo chybám vzniklým z nepozornosti.

Přestože se mezi kroky objevil poněkud zavádějící povel "doleva napříč stěnou", většina žáků, zejména chlapců, zareagovala okamžitě.





Většina chybných pokusů spočívala v tom, že žák provedl nejprve krok doleva a potom napříč stěnou (zpravidla LS). Starší žáci, zvláště dívky, odpovídali až po krátkém zaváhání, zato však správně. Při správném pochopení pokynu si mohli žáci zvolit cestu buď po úhlopříčce viditelné či neviditelné. Všichni si však zvolili cestu napříč zadní stěnou. Prý proto, že jít napříč pravou stěnou by znamenalo jít zpátky, což není přirozené.

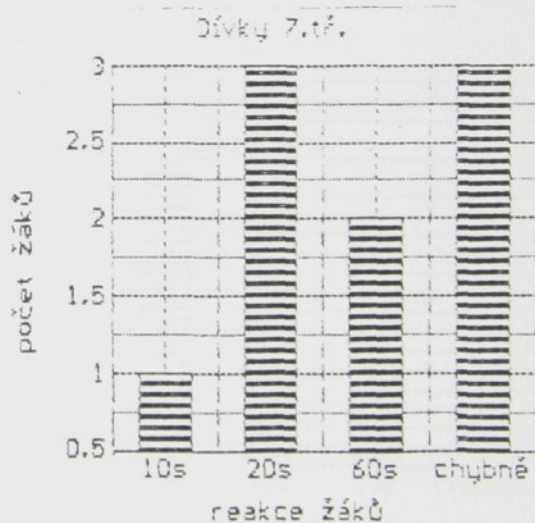
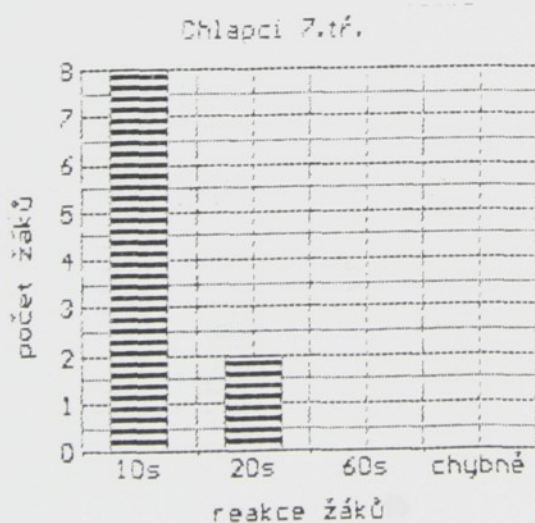
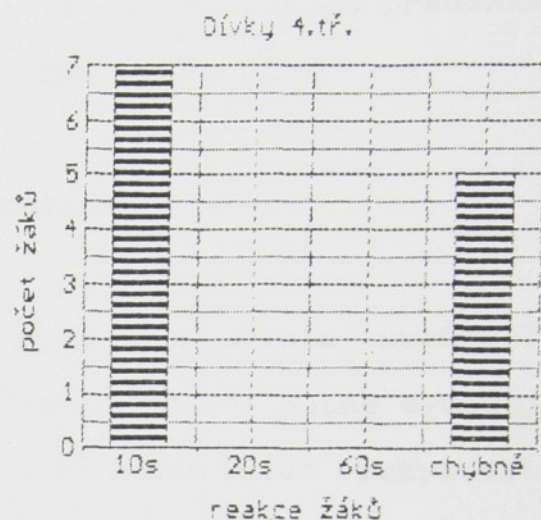
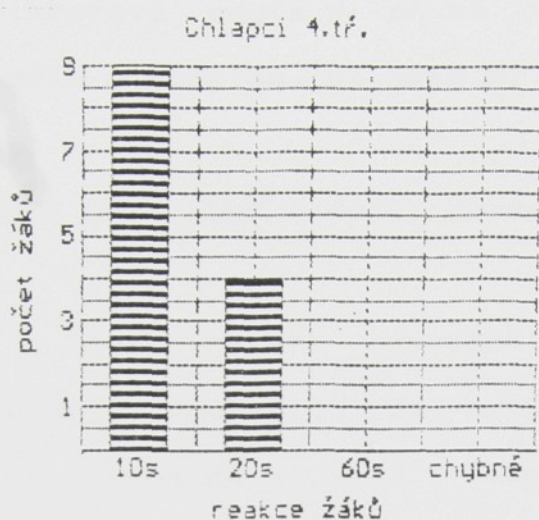
ÚLOHA A5: (h-u) VB D, doprava, nahoru napříč stěnou, KB?

(u)

Změna oproti předchozí úloze spočívá zejména v tom, že žák musí začít cestu v "neviditelném bodě".

Tentokrát je v odpovědích žáků viditelná úhlopříčka zastoupena stejně často jako neviditelná. Viditelnou však

volí zejména žáci 7. tříd, zatímco jejich mladší kolegové se raději pohybují po zadní stěně.



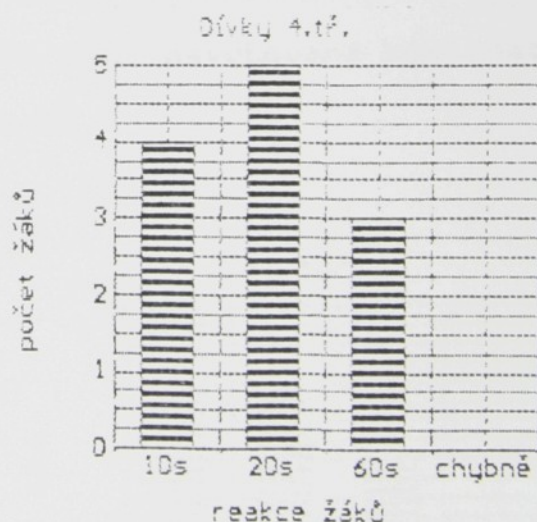
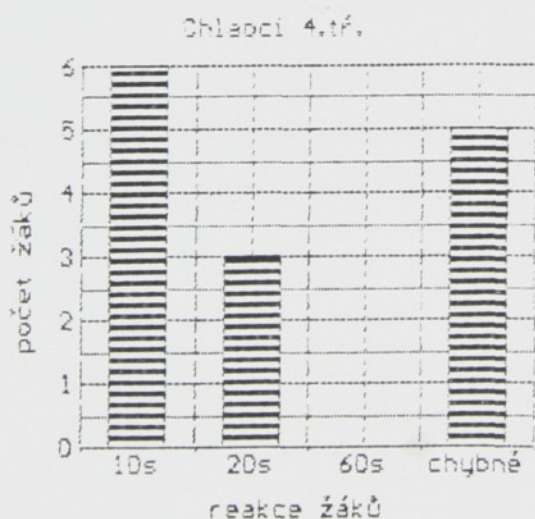
- chlapci jsou úspěšnější než dívky
- mladší reagují bezprostředněji, i když někdy chybně
- velmi obtížná se zdála úloha dívkám ze 7. tříd

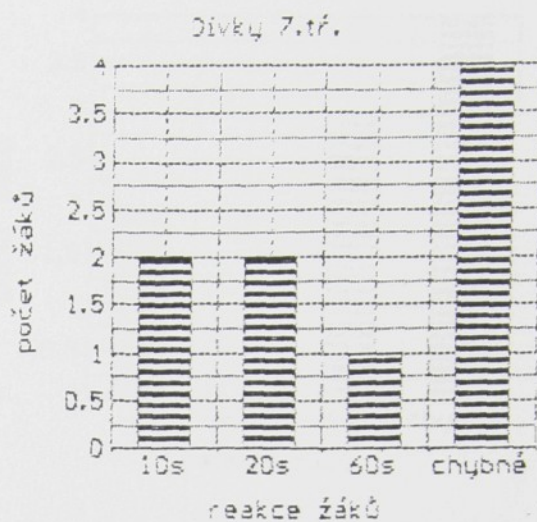
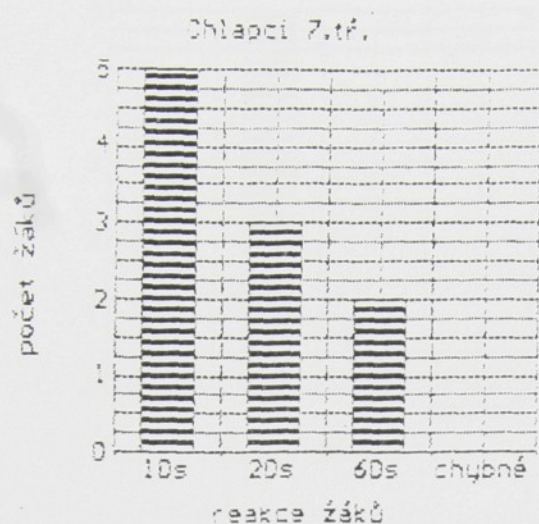
3.1.3 Experiment B

Experiment B spočívá v tom, že žákovi je sdělena tříkroková cesta a on má určit VB a KB. Pokusu předchází nácvik s modelem, na němž si žák může ukazovat.

ÚLOHA B6: (hhh) - dolů, dozadu, doleva

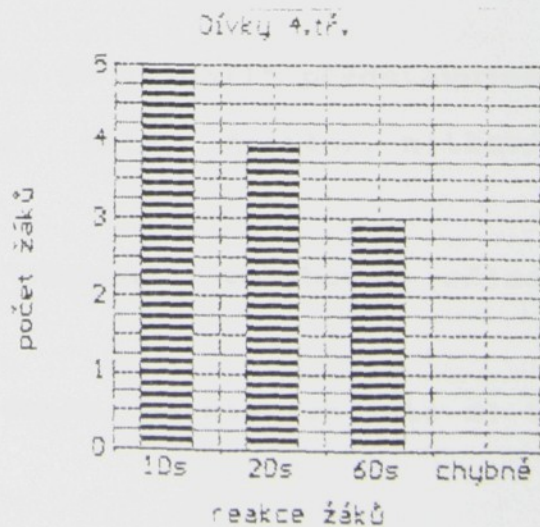
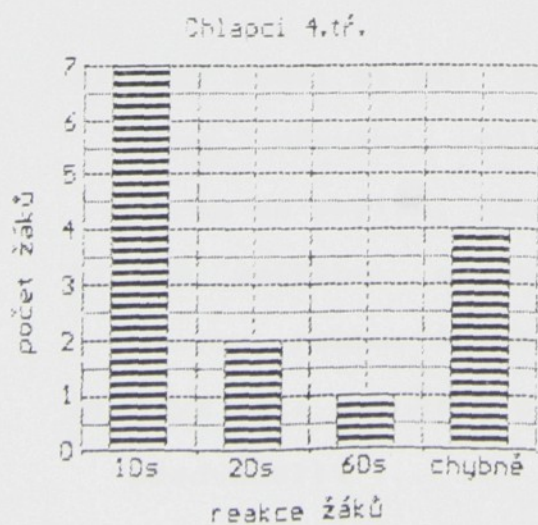
Žáci, kteří odpověděli hned, zpravidla uvažovali logicky. Pochopili, že první příkaz "dolů" nutně vyžaduje výchozí bod na HS, atd. Tito žáci se překvapivě vyskytovali zvláště v nižších třídách. Dívky, a částečně též chlapci, ze 7. tříd používaly spíše metodu pokus-omyl.

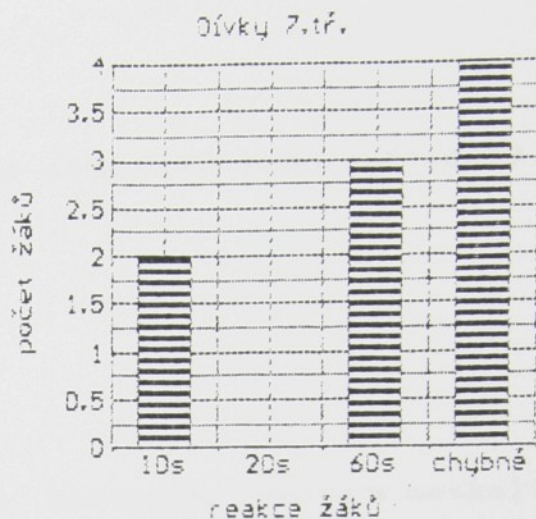
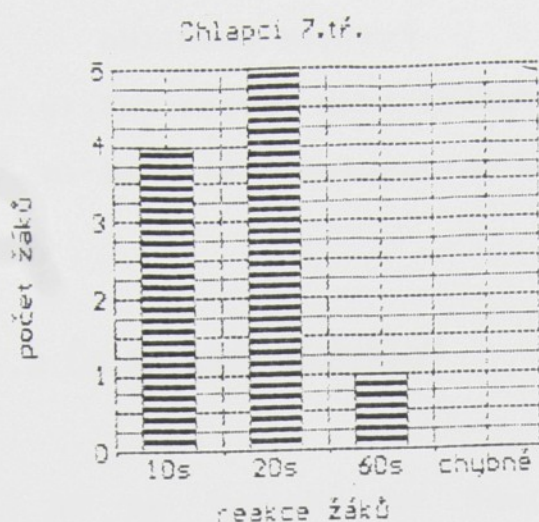




ÚLOHA B7: (hhh) - doleva, nahoru, dopředu

Při řešení tohoto úkolu většina žáků používala model, třebaže pouze vizuálně. Nejčastěji jimi navrhovaná kombinace neumožňovala poslední krok "dopředu".





3.1.4 Rozhovor se žákem

Po provedení výše uvedených experimentů následoval rozhovor se žákem. Jeho cílem bylo poodhalit myšlenkové pochody žáka během pokusu. Obsah rozhovoru lze shrnout do následujících otázek:

- Jaký model si při "chození po krychli" představuješ?
Plný, dřevěný, skleněný, dutý, drátěný, nitkový, obraz na papíru, jiný ...
- Máš potřebu si při "chození" pohybovat očima, hlavou, rukou, jinak ...
- Když jste se učili o tělesech, na kterých jste si to předváděli? ...
- (u starších): Pohybuješ se po krychli s vrcholy pojmenovanými nebo po prázdné?
- Zkoušel s vámi někdo procházky po krychli?

- f) Vyráběli jste nějaký model? Patřily kostky mezi tvé oblíbené hračky?
- g) Jsi pravák nebo levák?
- h) Baví tě v matematice spíše geometrie nebo počítání?

3.1.5 Co se tedy ukázalo?

Až na výjimky se žáci s podobným pokusem setkali poprvé. Přesto jsou jejich reakce značně rozdílné i v rámci jedné věkové skupiny.

Z průběhu a výsledků souboru experimentů plyne několik skutečností, které se v rozhovoru potvrdily.

Obecně lze konstatovat, že problémy se objevují při "chození" po neviditelných částech tělesa, zvláště pak po úhlopříčkách. Mnohem patrnější je ovšem neochota některých žáků provést krok dopředu či dozadu. Jako kdyby měli snahu setrvat v rovině, v níž se právě nacházejí. Rovinou je však nyní myšlena jakákoli plocha kolmá na směr pohledu.

Když se řekne krychle, představí si většina dětí krychli vyrobenou ze dřeva, papíru, plechu či skla. Ve škole pak pracovaly převážně s modely drátěnými. Možná proto si představovaly při "chození po krychli" častěji právě model drátěný. Pohybovat se po myšlené krychli činilo zřejmě menší potíže mladším žákům. Jejich případné neúspěchy byly z větší části způsobeny chybami v popisu tělesa. Pokud měli model zakryt, ale koncový bod pak směli ukázat, reagovali správně, bez delšího uvažování.

Po popsaném modelu se ostatně nepohybovali ani starší žáci. Většina dotazovaných uvedla, že body si "odpočítají"

až na závěr. Jako perličku bych uvedla příklad, kdy žák 4.třídy popisoval krychli ABCČDD... Zřejmě by stálo za úvahu, kdy začínat s označováním vrcholů.

Někteří žáci měli potřebu při "chození" pohybovat očima nebo rukou, prstem si ukazovali ve vzduchu cestu. Žáci se snažili nalézt koncový bod nejprve bez modelu, jen několik jich vyžadovalo dívat se na model hned od začátku. Děti bychom zřejmě k podobným hrátkám s krychlí i jinými tělesy nemuseli příliš nutit.

Nepotvrdila se žádná souvislost výsledků v experimentu s hodnocením v matematice, spíše naopak. Geometrii je totiž přikládán tak malý význam, že na výslednou známku nemá téměř žádný vliv. Jinak by se těžko mohlo stát, že mezi žáky 7.tř. nejlépe dopadl chlapec, označovaný učitelkou za naprosto neschopného.

Někteří psychologové uvádějí souvislost představivosti s lateralitou. Zkoumaný vzorek byl zřejmě tak malý, že nic takového nebylo možné vysledovat.

Otázka týkající se oblíbených hraček v dětství je zcela namístě. Děti hrající si často s kostkami a stavebnicemi napomáhají rozvoji svého prostorového vidění. Nesmíme zapomenout, že matematické myšlení se rozvíjí zejména ve dvou obdobích, mezi 5-7 lety a mezi 10-12 lety. Stejně omezení zcela jistě platí i pro myšlení geometrické. Blíže se této otázce věnuji ještě v závěru práce.

3.2 ROZŠÍŘUJÍCÍ EXPERIMENT

3.2.1 Procházky trochu jinak

Vzhledem ke skutečnosti, že většina neúspěšných žáků měla problémy s porozuměním pokynům "vpřed", "vzad", popříp. zaměňovali "přední", "horní" stěnu, zkusila jsem následující experiment.

Z celého vzorku jsem vybrala 8 dětí, které chybovaly. Každý z nich si zvolil kamaráda, který se předtím pokusů neúčastnil. Kamarád byl seznámen s principem "chození po krychli", obdržel "cestu" zapsanou pomocí bodů, jimiž má žák projít. Jeho úkolem bylo správně "navigovat". Samozřejmě si zvolil příkazy dle vlastního uvážení tak, jak by je chápal sám.

Jak jsem očekávala, žákům neúspěšným v části A či B se najednou dařilo lépe. Důvodem mohl být, pochopitelně, "cvik" či odstranění pocitu trémy. Nepovažuji je však za důvody jediné. Mou domněnku potvrzuje fakt, že pouze jediná dvojice používala příkazy "dopředu", "dozadu". U ostatních se objevovaly povely - "rovně", "pryč", "zpátky", "od sebe", "k sobě", přičemž poslední dva vedly k úspěchu nejčastěji.

Nahrazena byla i formulace "napříč stěnou". Pro žáky se zdá být přijatelnější "šíkmo".

Pro srovnání výsledků těchto žáků v experimentu A a A* uvádím v příloze 2 grafické znázornění jejich reakcí.

3.3 ZÁVĚR

Od narození se člověk pohybuje v prostoru. Všechno, co vidí, čeho se dotýká, co vnímá, je trojrozměrné. Přesto si trojrozměrnost prostoru uvědomujeme velice zřídka. Schopnost představit si prostorovou situaci je třeba záměrně rozvíjet a pěstovat.

Už v předškolním věku pomáhají rozvíjet prostorovou představivost všechny aktivity, při nichž dítě přichází do styku s geometrickými objekty. Především mám na mysli hraní s kostkami a různými stavebnicemi. Snaží-li se dítě podle obrázku postavit nějaký objekt, rozvíjí svou představivost rozhodně více než při počítačových hrách. Na to by neměli rodiče v dnešní době zapomínat. Mnoho věcí se sice člověk může naučit později, až "dostane rozum", ale schopnost vidět prostorově mezi ně nepatří. První období příznivé pro rozvoj v této oblasti je dle názoru psychologů ve věku 5 až 6 let. Jelikož si v tomto věku hrají s kostkami častěji chlapci než dívky, mají mladší chlapci (oproti stejně starým dívkám) prostorové vidění rozvinuté lépe. Druhé významné období nastupuje mezi 10 a 12 lety. Žáci v tomto věku snadněji manipulují s myšlenkovými modely a jsou schopni řešit i složitější stereometrické úlohy. V dalších letech zůstává úroveň prostorového vidění téměř stejná, pouze se přidávají matematické poznatky, které spolu s logickým uvažováním zjednodušují orientaci v zadání stereometrické úlohy.

Základní škola má tedy šanci do rozvoje představivosti dítěte zasáhnout. Myslím, že by neměli učitelé tuto šanci propást. Průzkum jasně ukázal, jak málo času bylo věnováno práci s tělesy. Mladší žáci se setkali pouze s demonstračním modelem, přestože v kabinetě matematiky se vyskytovaly sady těles pro frontální práci.

Dle mého názoru by výuka stereometrie na ZŠ měla navazovat na praktické zkušenosti žáků. Hraje-li si dítě rádo s kostkami, proč mu to neumožnit i v hodinách matematiky? Jistě by se našla vhodná forma, jak podobnou činnost zařadit do výuky.

V každém případě bych nejdříve pracovala s modely plnými. Je-li pro žáky problém pojmenování stěn, zvolila bych krychli s různobarevnými stěnami nebo zvětšený model kostky se hry "Člověče, nezlob se". Během své pedagogické praxe jsem zkusila ve 4. třídě pracovat s barevnou krychlí. Časem si žáci podobu krychle zažili natolik, že dokázali bez pohledu na model "přetáčet" krychli ve svých představách a určovat barvu stěny, která je právě nahoře, vpravo, vlevo, ... Označení vrcholů pomocí písmen přijme dítě později jako prostředek ulehčující mu popis tělesa např. drátěného. Z výše uvedeného je zřejmé, že existuje ještě celá řada otázek, na které je třeba hledat odpověď. Kdy začít zařazovat do výuky práci s modely těles? Jakých těles? Nutit děti k této činnosti? Kdy zavést abecední pojmenování? Jak náročné úlohy jsou žáci v daném věku schopni řešit? Cesty hledající odpovědi na podobné otázky však nejsou jednoduché, jednou z možností jsou experimenty, které popisuje tato diplomová práce.

Nechápu, proč se někteří učitelé staví k výuce geometrie s nechutí. Dle mého názoru je geometrie ideálním prostředkem, jak vyvolat u žáků zájem o matematiku. V mých hodinách matematiky geometrie rozhodně chybět nebude, neboť poznatky získané při vypracovávání této studie bych chtěla v praxi nejen využít, ale i dále rozvíjet.

Seznam pramenů:

- [Bro] Bronowski, J.: Vzestup člověka. 1.vyd. Praha, Odeon 1985.
- [Či1] Čižmár, J. a kol.: Matematika pro 6.ročník ZŠ I.díl. Praha, SPN 1989.
- [Či2] Čižmár, J. a kol.: Matematika pro 6.ročník ZŠ II.díl. Praha, SPN 1990.
- [Hej] Hejný, M. a kol.: Teória vyučovania matematiky 2. Bratislava, SPN 1990.
- [Hil] Hill, N.: Myšlením k bohatství. Pragma 1990.
- [Kom] Komenský, J.K.: Didaktika analytická. Praha, Samcovo nakladelství 1946.
- [Koš] Košč, L.: Psychológia matematických schopností. 1.vyd. Bratislava, SPN 1972.
- [MŠM] MŠMT ČR : Učební osnovy základní školy. Praha, Fortuna 1991.
- [Mü1] Müllerová, J. a kol.: Matematika pro 7.ročník ZŠ I.díl. Praha, SPN 1990.
- [Mü2] Müllerová, J. a kol.: Matematika pro 7.ročník ZŠ II.díl. Praha, SPN 1990.
- [PaV] Pala, K. - Všianský, J.: Slovník českých synonym. Praha, LNL 1994.
- [Pia] Piaget, J. - Inhelderová, B.: Psychologie dítěte. 1.vyd. Praha, SPN 1970. 116s.
- [PKK] Půlpán, Z. - Kuřina, F. - Kebza, V.: O představivosti a její roli v matematice. 1.vyd. Praha, Academia 1992. 112s.
- [PWM] Průcha, J. - Walterová, E. - Mareš, J.: Pedagogický slovník. 1.vyd. Praha, Portál 1995.
- [Še1] Šedivý, O.: Matematika pro 8.ročník ZŠ I.díl. Praha, SPN 1991.
- [Še2] Šedivý, O.: Matematika pro 8.ročník ZŠ II.díl. Praha, SPN 1991.
- [Vil] Vild, J.: Metodické pokyny k diplomovým a závěrečným pracím na PF TUL. 1.vyd. Liberec, TUL 1995.
- [UKŘ] Urbanová, J. - Koman, M. - Řebíčková, D.: Matematika pro 5.ročník ZŠ II.díl. Praha, SPN 1988.

[Urb] Urbanová, J. a kol.: Matematika pro 5.ročník ZŠ I.díl.
Praha, SPN 1988.

[Vop] Vopěnka, P.: Rozpravy s geometrií. Praha,
Panorama 1989.

[ZnK] Znám, Š. a kol.: Pohľad do dejín matematiky. Praha,
SNTL 1986.

Jak se v přílohách orientovat?

Obsahem příloh P1 až P10 jsou grafy znázorňující, jak rychle žáci reagují na jednotlivé pokyny. Cesta žáka je vyjádřena lomenou čarou. Měřítko bylo zvoleno tak, že posun o 0.5 cm doprava odpovídá 1 sekundě rozmýšlení. Jednotlivé kroky znázorňuje posun ve svislém směru, jednomu kroku odpovídá opět 0.5 cm. Označení lomených čar je třeba chápat takto: ♂4.....chlapec ze 4.třídy

♂7.....chlapec ze 7.třídy

♀4.....dívka ze 4.třídy

♀7.....dívka ze 7.třídy

Každá lomená čára představuje reakci jednoho žáka. Do přílohy jsem zařadila pouze grafy žáků, jejichž reakce lze považovat za typické pro příslušnou skupinu.

ÚLOHA A1

(bez modelu)



♂4



♂4



♀4



♀4



♂7



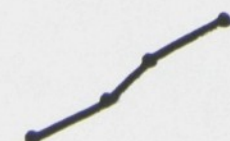
♂7



♀7



♀7



♀7

┌ 1s I 1krok

ÚLOHA A1

(s modelem)



♂4



♂4



♂7



♂7



♀7



♀7



♀7

ÚLOHA A1

(s ukazováním)



♀4



♀4



♀4



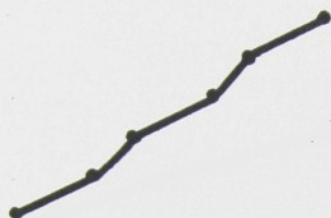
♂7

ÚLOHA A2

(bez modelu)



♂4



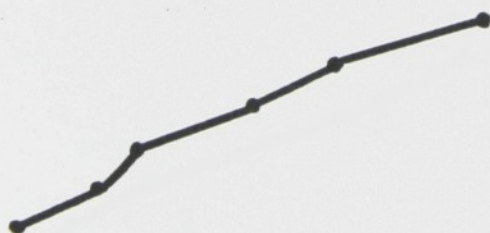
♂4



♀4



♂7



♀7

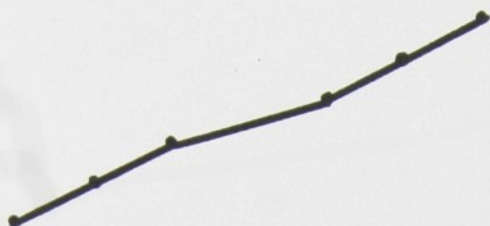


♀7

— 1s I 1krok

ÚLOHA A2

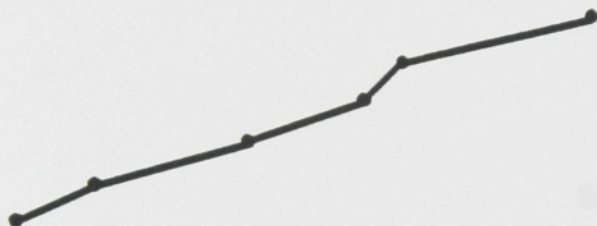
(s modelem)



♂4



♂4



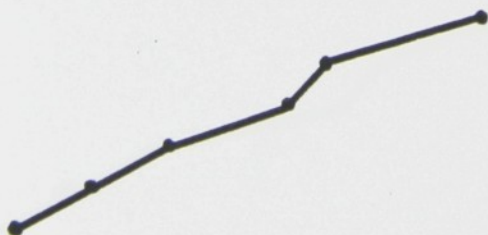
♀4



♀4



♀7



♀7

ÚLOHA A2

(s ukazováním)



♀4



♀4



♀4



♀4



♀7

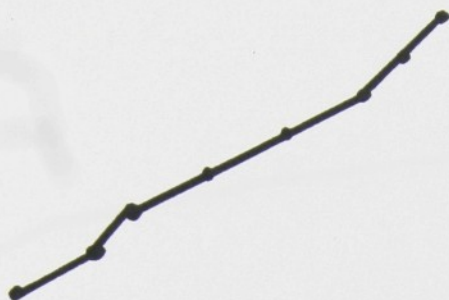


♀7

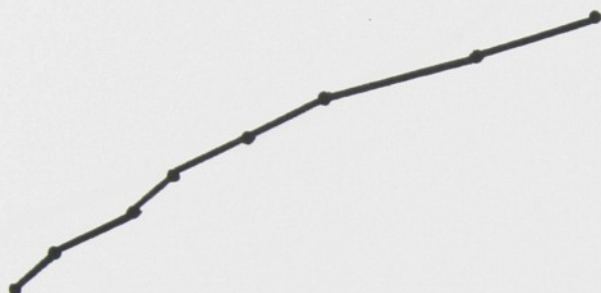
I 1s I 1 krok

ÚLOHA A3

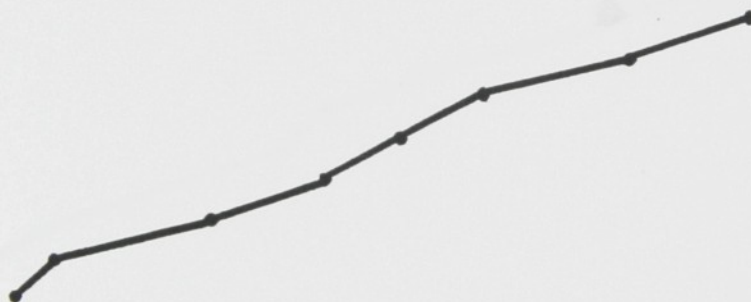
(bez modelu)



♂4



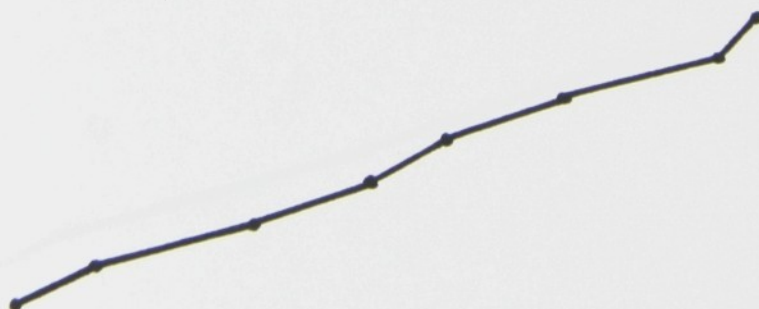
♂4



♀4



♂7



♀7

I 1s

I 1 krok

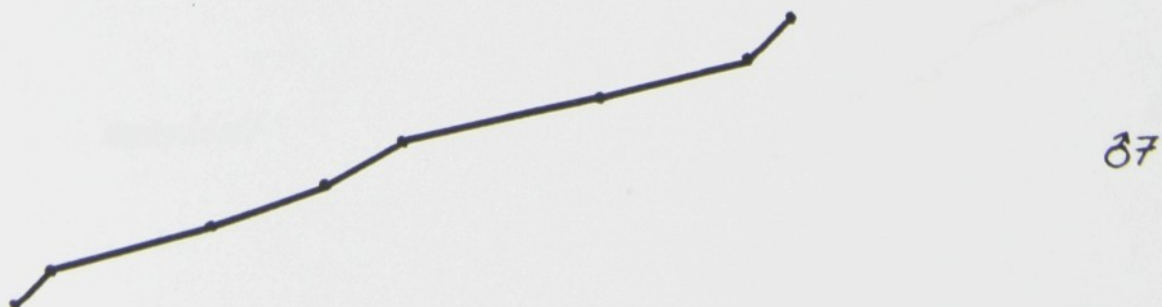
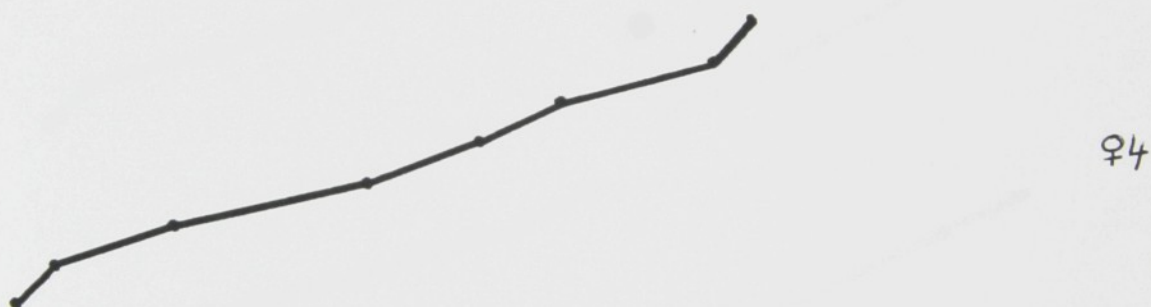
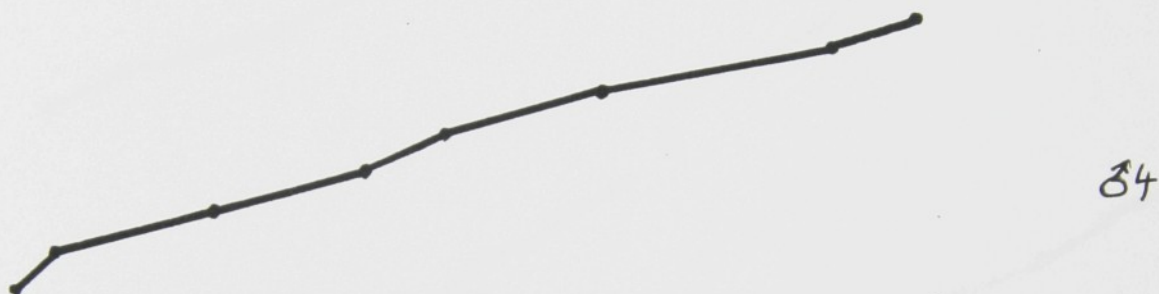
ÚLOHA A3

(s modelem)



ÚLOHA A3

(s ukazováním)



experiment A

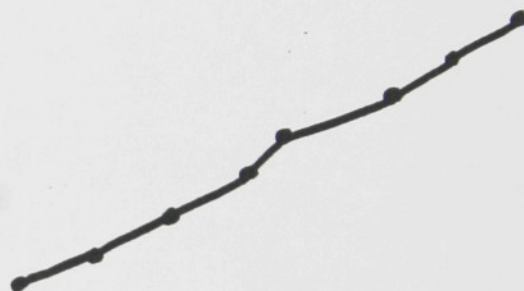
experiment A*



♂4



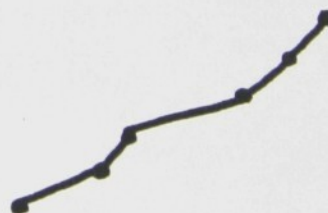
♂4



♀7

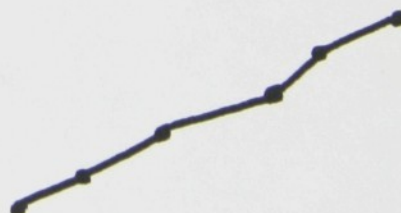


♀4



♀4

nezvládl



♂7

A..... základní část

A*..... rozšiřující část