



KONSTRUKCE EXPERIMENTÁLNÍHO ZAŘÍZENÍ PRO STANOVENÍ AMPLITUDOVÉ FREKVENČNÍ CHARAKTERISTIKY

Diplomová práce

Studijní program: N2301 – Strojní inženýrství
Studijní obor: 3901T003 – Aplikovaná mechanika
Autor práce: **Bc. Ondřej Kovács**
Vedoucí práce: Ing. David Církľ, Ph.D.





ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

Jméno a příjmení

Ondřej Kovács

Studijní program

N 2301 Strojní inženýrství

Studijní obor

3901T003 Aplikování mechanika

Zaměření

Inženýrská mechanika

Ve smyslu zákona č. 111/1998 Sb. o vysokých školách se Vám určuje diplomová práce na téma:

Konstrukce experimentálního zařízení pro stanovení amplitudové frekvenční charakteristiky

Zásady pro vypracování:

(uveďte hlavní cíle diplomové práce a doporučené metody pro vypracování)

1. Seznámení se s problematikou stanovování amplitudových fázových charakteristik materiálů a modelováním mechanických vlastností PU pěny.
2. Návrh konstrukčních variant zkušebního zařízení (posuvná, rotační).
3. Návrh budící funkce pro získání přenosových charakteristik.
4. Porovnání přenosových charakteristik získaných analytickým výpočtem idealizovaných soustav (posuvná, rotační) bez pasivních odporů s lineárním materiálem.
5. Numerická simulace posuvné varianty s uvažováním pasivních odporů a nelineárního materiálového modelu.
6. Vyhotovení výrobních výkresů a výkresu sestavení experimentálního zařízení.
7. Montáž zkušebního zařízení a provedení ověřovacího experimentu.



Forma zpracování diplomové práce:

- průvodní zpráva: Písemná.

- přílohy: Výrobní výkresy a výkres sestavení experimentálního zařízení.

Seznam literatury (uveďte doporučenou odbornou literaturu):

BREPTA, Rudolf, Ladislav PŮST a František TUREK. Mechanické kmitání. 1. vyd. Praha: Sobotáles, 1994, 589 s. ISBN 80-901-6848-5.

BRÁT, Vladimír, Václav JÁČ a Josef ROSENBERG. Kinematika. Praha: SNTL, 1987.

JULIŠ, Karel a Rudolf BREPTA a kol. Mechanika I. díl. Praha: SNTL, 1986.

JULIŠ, Karel a Rudolf BREPTA. Mechanika II. díl. Praha: SNTL, 1987.

Vedoucí diplomové práce: Ing. David Círk, Ph.D.

Konzultant diplomové práce: ---



prof. Ing. Miroslav Václavík, CSc.
vedoucí katedry

doc. Ing. Miroslav Malý, CSc.
děkan

V Liberci dne 8. 11. 2013

Platnost zadání diplomové práce je 15 měsíců od výše uvedeného data. (v uvedené lhůtě je třeba podat přihlášku ke SZZ). Termíny odevzdání diplomové práce jsou určeny pro každý studijní rok a jsou uvedeny v harmonogramu výuky.

Prohlášení

Byl jsem seznámen s tím, že na mou diplomovou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb., o právu autorském, zejména § 60 – školní dílo.

Beru na vědomí, že Technická univerzita v Liberci (TUL) nezasahuje do mých autorských práv užitím mé diplomové práce pro vnitřní potřebu TUL.

Užiji-li diplomovou práci nebo poskytnu-li licenci k jejímu využití, jsem si vědom povinnosti informovat o této skutečnosti TUL; v tomto případě má TUL právo ode mne požadovat úhradu nákladů, které vynaložila na vytvoření díla, až do jejich skutečné výše.

Diplomovou práci jsem vypracoval samostatně s použitím uvedené literatury na základě konzultací s vedoucím diplomové práce.

Současně čestně prohlašuji, že tištěná verze práce se shoduje s elektronickou verzí, vloženou do IS STAG.

Datum: 23. 5. 2014

Podpis:

ANOTACE

Diplomová práce se zabývá konstrukčními návrhy experimentálního zařízení pro zjištění amplitudové frekvenční charakteristiky viskoelastických materiálů (v tomto případě PU pěny) pomocí vhodně navržené budící funkce. Práce vyhodnocuje výsledky numerické simulace kmitavé soustavy s nelineárním materiálovým modelem PU pěny a naměřená data získaná prostřednictvím posuvné varianty experimentálního zařízení.

KLÍČOVÁ SLOVA: experimentální zařízení, budící funkce, amplitudová frekvenční charakteristika, nelineární kmitání, numerická simulace, matematický model UPěny, přenos zrychlení

ANNOTATION

The thesis deals with engineering design of experimental device for finding amplitude frequency response characteristics of viscoelastic materials (in this case PU foam) by using of suitable exciting function. In this work the results of numerical simulations and experimental data are evaluated. The nonlinear material model of PU foam has been used and tested experimentally by means of experimental device with sliding motion.

KEYWORDS: experimental device, exciting function, amplitude frequency response characteristics, nonlinear vibrations, numerical simulation, mathematical model of PU foam, acceleration transfer

Poděkování

V úvodu bych rád poděkoval za podporu, rady a odborný dohled vedoucímu své diplomové práce doc. Ing. Davidu Cirklovi, Ph.D. a nemalé poděkování také patří panu prof. RNDr. Janu Šklíbovi, CSc. za velmi odborné rady ohledně nelineárního kmitání a konzultace při vyhodnocování výsledků.

Dále bych rád poděkoval panu Ing. Michalovi Sivčákovi, PhD. za vynikající pomoc při simulování kmitavé soustavy v softwaru počítačové algebry Maple 14.

Poděkování patří také celé mé rodině, kolegům ze zaměstnání, přítelkyni a přátelům za morální a i finanční podporu při studiu.

Seznam použitého značení

b	$[N \cdot s/m]$	konstanta tlumení
b_k	$[N \cdot s/m]$	součinitel kritického tlumení
c	$[1/s^2]$	konstanta budící funkce
c_i	$[-]$	konstanta tlumiče
e	$[\%]$	chybová funkce
f	$[Hz = 1/s]$	frekvence
f_0	$[Hz = 1/s]$	počáteční frekvence
f_k	$[Hz = 1/s]$	konečná frekvence
f_T	$[-]$	koeficient smykového tření
f_{T0}	$[1]$	konstanta koeficientu smykového tření
g	$[m/s^2]$	gravitační zrychlení
h_i, h_p	$[m]$	výška válce
k	$[N/m]$	konstanta tuhosti
k_1	$[s/m]$	konstanta koeficientu smykového tření
k_2	$[-]$	konstanta koeficientu smykového tření
k_3	$[1]$	konstanta koeficientu smykového tření
k_u	$[N/m]$	konstanta únosnosti struktury
l	$[m]$	délka rotačního ramene
m	$[kg]$	hmotnost
m_u	$[N]$	mez únosnosti
n	$[-]$	exponent budící funkce
n_i	$[1]$	exponent rychlosti nelineárního tlumiče
n_p, n_{oi}	$[1]$	polytropický exponent pneumatického válce
p_p	$[Pa]$	konstanta modelu vratné síly PU pěny
p_{oi}	$[Pa]$	konstanta modelu tlumící síly PU pěny
t	$[s]$	čas
t_0	$[s]$	počáteční čas budící funkce
x	$[m]$	výchylka, deformace
$\dot{x} = v$	$[m/s]$	rychlost
$\ddot{x} = a$	$[m/s^2]$	zrychlení
$\tilde{x}$	$[m]$	komplexní výchylka
$\tilde{x}_a$	$[m]$	komplexní amplituda odezvy
x_a	$[m]$	amplituda odezvy
x_{ti}	$[m]$	deformace i -tého prvku tlumiče
$\dot{x}_{ti} = v_{ti}$	$[m/s]$	rychlost i -tého prvku tlumiče
x_{rel}	$[m]$	relativní výchylka
$\dot{x}_{rel}$	$[m/s]$	relativní rychlost
x_{stat}	$[m]$	statická výchylka

z	$[m]$	výchylka kinematického buzení základny
$\dot{z} = v_z$	$[m/s]$	rychlost kinematického buzení základny
$\ddot{z} = a_z$	$[m/s^2]$	zrychlení kinematického buzení základny
z_a	$[m]$	amplituda kinematického buzení základny
A, B, C	$[m]$	integrační konstanty
$A(f)$	$[-]$	frekvenční spektrum zrychlení odezvy
$A_z(f)$	$[-]$	frekvenční spektrum zrychlení budící funkce
F	$[N]$	budící síla
$\tilde{F}$	$[N]$	komplexní budící síla
$\tilde{F}_a$	$[N]$	komplexní amplituda budící síly
F_a	$[N]$	amplituda budící síly
F_p	$[N]$	síla charakterizující přechování základního materiálu
F_u	$[N]$	síla únosnosti struktury PU pěny
F_v	$[N]$	vratná síla
F_t	$[N]$	tlumicí síla
F_{ti}	$[N]$	tlumicí síla i -tého prvku tlumiče
F_{vt}	$[N]$	síla, tvořící základ pro výpočet třecí síly
$\tilde{H}$	$[-]$	komplexní přenosová funkce
J_A	$[kg \cdot m^2]$	moment setrvačnosti
M_D	$[Nm]$	dynamický moment
$\vec{O}$	$[N]$	vektor odstředivé síly
R_A	$[N]$	reakční síla
S_p	$[m^2]$	konstanta modelu vratné síly PU pěny
S_{0i}	$[m^2]$	konstanta i -tého prvku tlumiče
T	$[s]$	perioda kmitu nebo celková doba zatěžování
$\vec{T}$	$[N]$	vektor tečné síly
Z_a	$[m \cdot s^2]$	konstanta amplitudy budící funkce

Řecká abeceda

δ	$[1/s]$	konstanta dozívání
ζ	$[-]$	poměrný útlum
η, η_{res}	$[-]$	činitel naladění, činitel naladění v rezonanci
ξ	$[-]$	přenosová funkce
φ	$[rad]$	fázový posuv
φ_0	$[rad]$	integrační konstanta (fázový posuv)
φ_z	$[rad]$	fázový posuv kinematického buzení základu
ψ	$[rad]$	úhlová poloha rotačního ramena
ω	$[rad/s]$	úhlová frekvence
Ω	$[rad/s]$	vlastní úhlová frekvence tlumného kmitání
Ω_0	$[rad/s]$	vlastní úhlová frekvence

Obsah

1. ÚVOD	11
2. KMITÁNÍ LINEÁRNÍCH SOUSTAV	12
2.1. Volné netlumené kmitání	13
2.2. Volné tlumené kmitání	14
2.3. Vynucené kmitání tlumené soustavy	17
2.4. Kinematické buzení tlumené soustavy	25
3. KMITÁNÍ NELINEÁRNÍCH SOUSTAV	29
3.1. Vynucené kmitání nelineárního systému	31
3.1.1. Vliv nelinearity na rezonanční vrcholy	32
3.2. Přechodové kmitání při přejíždění rezonančních oblastí	33
4. MODELOVÁNÍ MECHANICKÝCH VLASTNOSTÍ PU PĚNY	36
4.1. Sestavení simulačního modelu PU pěny	36
4.1.1. Vratná síla	36
4.1.2. Tlumící síla	39
4.1.3. Celkový simulační model PU pěny	40
5. NÁVRH KONSTRUKČNÍCH VARIANT ZKUŠEBNÍHO ZAŘÍZENÍ	43
5.1. Zkušební zařízení s rotačním ramenem	43
5.2. Zkušební zařízení s lineárním vedením	49
5.3. Porovnání a výběr vhodné varianty	50
5.4. Konstrukce zkušebního zařízení s lineárním vedením	52
6. NÁVRH BUDÍCÍ FUNKCE PRO KINEMATICKÉ BUZENÍ	54
7. NUMERICKÁ SIMULACE SOUSTAVY	57
7.1. Soustava s lineárním materiálovým modelem	59
7.1.1. Odezva lineární soustavy na kinematické buzení	60
7.1.2. Frekvenční spektrum zrychlení odezvy	63
7.1.3. Amplitudová frekvenční charakteristika lineární soustavy	64
7.2. Soustava s nelineárním materiálovým modelem	65
7.2.1. Odezva nelineární soustavy na kinematické buzení	66

7.2.2.	Frekvenční spektrum zrychlení odezvy	72
7.2.3.	Amplitudová frekvenční charakteristika nelineární soustavy	73
8.	PILOTNÍ EXPERIMENT ZKUŠEBNÍHO ZAŘÍZENÍ	74
8.1.	Vyhodnocení naměřených dat z pilotního experimentu	76
8.1.1.	Odezva zrychlení na kinematické buzení	78
8.1.2.	Frekvenční spektrum zrychlení odezvy	81
8.1.3.	Amplitudová frekvenční charakteristika	82
9.	DISKUZE	83
10.	ZÁVĚR	85
11.	POUŽITÁ LITERATURA	86

PŘÍLOHY

- č. 1 – Výpis z programu Maple – Přenos soustavy s lineárním materiálovým modelem
- č. 2 – Výpis z programu Maple – Přenos soustavy s nelineárním materiálovým modelem
- č. 3 – Výkresy sestavení a výrobní výkresy zkušebního zařízení

DP-PV-00.00.00 – ZKUŠEBNÍ ZAŘÍZENÍ

- DP-PV-00.00.01 – ZÁVAŽÍ 0
- DP-PV-00.00.02 – ZÁVAŽÍ
- DP-PV-00.00.03 – PU VZOREK

DP-PV-01.00.00 – POSUVNÁ KONSTRUKCE

- DP-PV-01.01.00 – ÚHELNÍK 60 ZN
- DP-PV-01.02.00 – ÚHELNÍK 30 ZN
- DP-PV-01.03.00 – ÚHELNÍK 45 ZN
- DP-PV-01.00.01 – AL PROFIL A
- DP-PV-01.00.02 – AL PROFIL B
- DP-PV-01.00.03 – KOLEJNICE
- DP-PV-01.00.04 – VOZÍK S PŘÍRUBOU
- DP-PV-01.00.05 – NOSNÝ AL PROFIL
- DP-PV-01.00.06 – NOSNÁ DESKA
- DP-PV-01.00.07 – ZÁVITOVÁ TYČ B
- DP-PV-01.00.09 – RYCHLOUPÍNACÍ MATICE

DP-PV-02.00.00 – NOSNÁ KONSTRUKCE

- DP-PV-02.00.01 – NOSNÁ DESKA D
- DP-PV-02.00.02 – NOSNÁ DESKA H
- DP-PV-02.00.03 – TRUBKA
- DP-PV-02.00.04 – ZÁVITOVÁ TYČ A



1. ÚVOD

Polyuretanová (PU) pěna je již tradičním a velmi rozšířeným materiálem, který se hojně využívá v mnoha oblastech. Při výrobě automobilových sedaček tvoří PU pěny většinové zastoupení a proto je nezbytně nutné pro počítačovou simulaci statického komfortu (rozložení tlaku v kontaktní oblasti) i dynamického komfortu (přenosové charakteristiky sedačky) její vlastnosti v dostatečné míře popsat.

Automobilová sedačka je jednou z důležitých součástí automobilu, která ovlivňuje kvalitu sezení. Vzhledem k tomu, že po celou dobu cestování je s ní řidič, případně i spolujezdec, v nepřetržitém kontaktu, je nutné, aby vyhovovala vysokým nárokům na bezpečnost a komfort při jízdě. Získávání výsledků z reálných pokusů je velice časově a finančně náročné a proto se také tato práce zabývá sestavením počítačového modelu soustavy pro počítačovou simulaci, který bude sloužit také jako porovnání realizovaného experimentu se vzorky z PU pěny. S použitím počítačové simulace nebo navrženého experimentálního zařízení lze efektivněji dosahovat požadované cílové hodnoty a reálné pokusy minimalizovat.

Špatně navržená sedačka dokáže zcela znepríjemnit pocit z jinak vynikajícího vozu a měla by být navržena tak, aby poskytovala sedícím osobám v automobilu maximální pohodlí při jízdě a zároveň, aby v dlouhodobém časovém měřítku její tvar a vlastnosti trvale nepoškozovaly lidský organismus.

Předmětem této diplomové práce je v první řadě především návrh a zkonstruování specifického experimentálního zařízení, na kterém bude možno zrealizovat měření amplitudových frekvenčních charakteristik na vzorcích z PU pěny. Tyto charakteristiky slouží ke stanovení rezonančních oblastí, ve kterých není vhodné kmitavou soustavu provozovat.

Pro co nejjednodušší pochopení řešení kmitajících soustav a pro definování důležitých veličin a parametrů si v následujících kapitolách uvedeme postupy řešení lineárních soustav s jedním stupněm volnosti pro netlumené i tlumené kmitání, dále potom vynucené kmitání harmonickou silou s tlumením a nakonec tlumené kmitání s kinematickým buzením, které je použito při experimentu v této práci pro zadanou úlohu. Jelikož se tato práce zabývá v první řadě počítačovou simulací lineárního systému a v druhé řadě hlavně nelineárního systému, považuji za nutnost zde zmínit problematiku řešení lineárních i nelineárních soustav.



2. KMITÁNÍ LINEÁRNÍCH SOUSTAV

Lineární soustavy se soustředěnými parametry se vyznačují jednoduchými prvky, jako jsou *hmotné body* nebo *tuhá hmotná tělesa* (nositele kinetické energie), *nehmotné pružiny* (nositele potenciální energie) a *nehmotné tlumiče* (disipátory energie měnící mechanickou energii v teplo).

Tyto lineární soustavy se soustředěnými parametry můžeme rozdělovat podle počtu stupňů volnosti na soustavy s *jedním* nebo *dvěma stupni volnosti*, které jsou analyticky snadno řešitelné a soustavy s *více stupni volnosti*, které obvykle vyžadují numerické řešení.

Další způsob rozdělení je dán převažujícím druhem pohybu. Kmitající soustavy definujeme jako *podélné*, *kroutivé (torzní)*, *ohybové (příčné)* a *krouživé*.

Soustavy, které neobsahují nehmotné tlumiče, jsou *netlumené* a soustavy obsahující nehmotné tlumiče jsou *tlumené*.

Podle druhu buzení, které uvádí soustavu do kmitavého pohybu, rozeznáváme soustavy s *deterministickým* a *náhodným (stochastickým) buzením*. Ve strojích je kmitání převážně způsobeno deterministickým periodickým buzením, nebo v nejjednodušším tvaru harmonickým buzením.

Pohybové rovnice lineárních soustav se soustředěnými (v čase neproměnlivými) parametry tvoří soustavy obyčejných diferenciálních rovnic (obvykle s konstantními koeficienty) homogenních nebo nehomogenních s buzením na pravé straně jako rušivá funkce. Odezva těchto soustav je lineárně závislá a platí u nich zákon superpozice. Postupem řešení těchto rovnic může být např. Laplaceova integrální transformace, Lagrangeova metoda variace konstant apod.

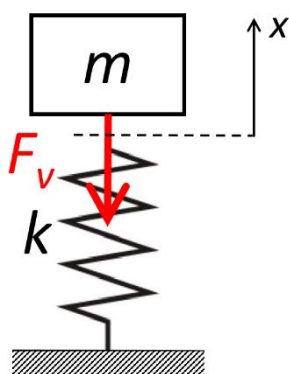
Základní druhy pohybů řešené u kmitajících soustav rozdělujeme na:

- a) *volné kmitání* – vzniká, je-li soustava po vychýlení z rovnovážné polohy uvolněna a ponechána v pohybu bez účinku vnějších sil (buzení). Výpočet volného kmitání se provádí z homogenních pohybových rovnic a nenulové počáteční podmínky se uplatní při určování integračních konstant. Z výpočtu se získají informace o vlastních frekvencích, resp. vlastních hodnotách (vlastních číslech) a vlastních tvarech kmitání soustavy.
- b) *vynucené kmitání* – vzniká, je-li pohyb soustavy vyvolán a udržován účinkem vnějších nebo vnitřních budících sil nebo je-li soustava buzena kinematicky. Pod pojmem vynucené kmitání se často uvažuje pouze ustálené vynucené kmitání, tj. takové

kmitání, na kterém se pohyb soustavy ustálí po utlumení přechodových dějů, jež jsou způsobeny počátečním vzruchem. [1; 2]

2.1. Volné netlumené kmitání

Mechanický model netlumeného volného kmitání (obr. 2.1) je složen z hmotného bodu o hmotnosti m , který je uchycen k rámu prostřednictvím nehmotné pružiny o tuhosti k . Kde na hmotu m působí vratná síla pružiny $F_v = kx$. [6]



Obr. 2.1 - Model mechanické kmitající soustavy netlumené

Z 2. Newtonova pohybového zákona můžeme odvodit pohybovou rovnici:

$$ma = \sum F_i = -F_v = -kx \quad (2.1)$$

neboli

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (2.2)$$

a po vydělení rovnice (2.2) hmotností m vyjde

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \ddot{x} + \Omega_0^2 x = 0, \quad (2.3)$$

kde

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.4)$$

je vlastní úhlová frekvence netlumených kmitů

Řešení pohybové rovnice (2.3) pro výchylku z rovnovážné polohy x v čase t má tvar:

$$x(t) = A \sin \Omega_0 t + B \cos \Omega_0 t \quad (2.5)$$

nebo

$$x(t) = C \sin(\Omega_0 t + \varphi_0), \quad (2.6)$$



kde: A a B , resp. C je amplituda volného kmitání

φ_0 je fázový posuv

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} \quad (2.7)$$

Fázový posuv je

$$\varphi_0 = \arctan \frac{B}{A} \quad (2.8)$$

Derivací pohybové rovnice (2.5) dostaneme:

$$\dot{x}(t) = A\Omega_0 \cos \Omega_0 t - B\Omega_0 \sin \Omega_0 t \quad (2.9)$$

Jsou-li dány počáteční podmínky v čase $t = 0$ $x(0)$ a $\dot{x}(0)$ platí pro integrační konstanty:

$$A = \frac{\dot{x}(0)}{\Omega_0}, \quad B = x(0) \quad (2.10)$$

a po dosazení do rovnice (2.7) a (2.8) dostaneme:

$$C = \sqrt{\left(\frac{\dot{x}(0)}{\Omega_0}\right)^2 + x(0)^2}, \quad \varphi_0 = \arctan \frac{\Omega_0 x(0)}{\dot{x}(0)} \quad (2.11)$$

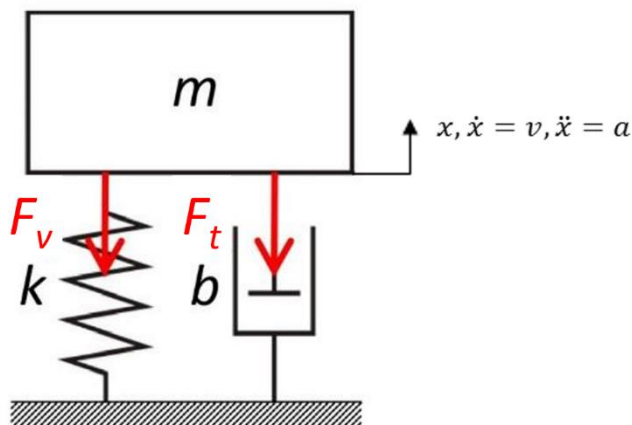
2.2. Volné tlumené kmitání

Z řešení netlumeného kmitání vyplývá, že tento pohyb se periodicky opakuje nekonečně dlouho s konstantní amplitudou. V reálné situaci se amplituda kmitání zmenšuje, až pohyb zanikne. Abychom se této skutečnosti přiblížili, zavádíme do mechanického modelu tlumení s odporem úměrným rychlosti, tzv. viskózní tlumení. [6]

V tomto případě je mechanický model (obr. 2.2) tvořen tělesem o hmotnosti m , pružinou o tuhosti k a tlumičem s konstantou tlumení b . Kde na hmotu m působí vratná síla pružiny $F_v = kx$ a tlumící síla $F_t = b\dot{x}$. [6]

Pohybová rovnice je:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0 \quad (2.12)$$



Obr. 2.2 - Model mechanické kmitající soustavy tlumené

a se zavedením: *poměrného útlumu ζ*
součinitele kritického tlumení b_k
konstanty doznívání δ

$$\zeta = \frac{b}{b_k} \quad (2.13)$$

$$b_k = 2\sqrt{km} = 2m\Omega_0 \quad (2.14)$$

$$\delta = \frac{b}{2m} \quad (2.15)$$

můžeme dále pohybovou rovnici (2.12) upravit na tvar:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \Omega_0^2 x = 0 \quad (2.16)$$

nebo

$$\ddot{x} + 2\zeta\Omega_0\dot{x} + \Omega_0^2 x = 0 \quad (2.17)$$

Převedením rovnice (2.17) na charakteristickou rovnici dostaneme:

$$\lambda^2 + 2\zeta\Omega_0\lambda + \Omega_0^2 = 0 \quad (2.18)$$

jejíž kořeny jsou

$$\lambda_{1,2} = -\zeta\Omega_0 \pm i\Omega_0\sqrt{1-\zeta^2} \quad (2.19)$$

Reálná složka kořenů představuje tlumení, imaginární pak frekvenci kmitání. [6]

Z rovnice (2.19) definujeme *vlastní úhlovou frekvenci tlumeného kmitání* [s^{-1}]:

$$\Omega = \Omega_0\sqrt{1-\zeta^2} \quad (2.20)$$



Pro **podkritické tlumení**, kdy $\zeta < 1$, je řešení pohybové rovnice (2.12 nebo 2.17): [6]

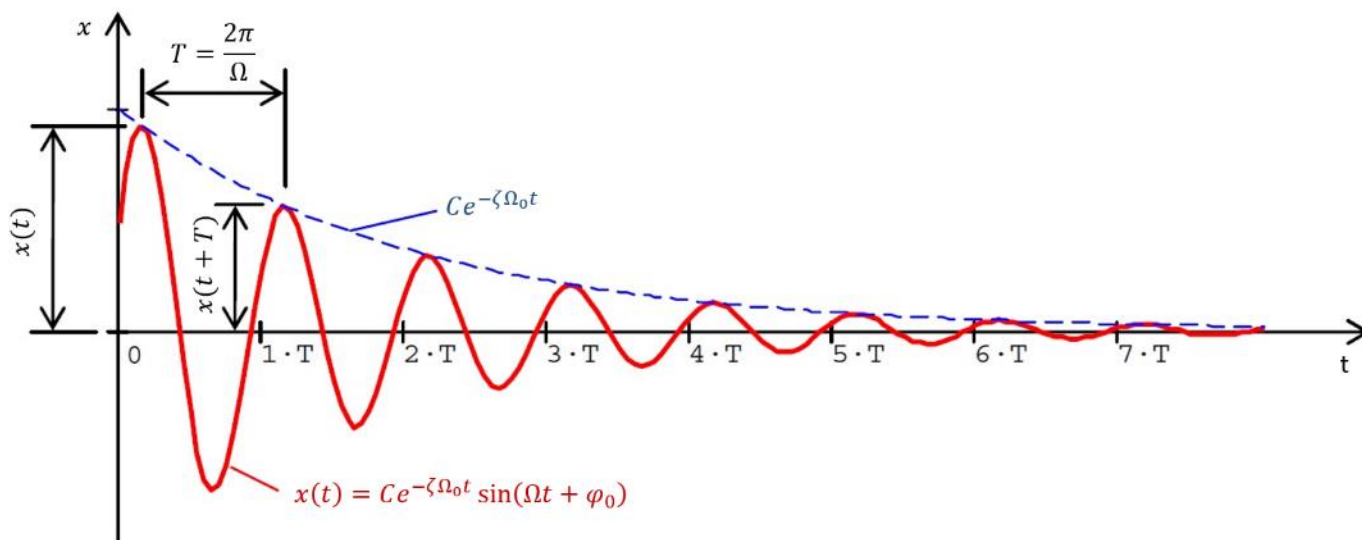
$$x(t) = C e^{-\zeta \Omega_0 t} \sin(\Omega t + \varphi_0) \quad (2.21)$$

Pro **nadkritické tlumení**, kdy $\zeta > 1$, je průběh čistě exponenciální a nedojte tak k rozvinutí kmitavého pohybu. [6]

Jsou-li dány počáteční podmínky v čase $t = 0$ $x(0)$ a $\dot{x}(0)$ platí pro integrační konstantu C a φ_0 :

$$C = \sqrt{\left(\frac{\dot{x}(0) + \zeta \Omega_0 x(0)}{\Omega}\right)^2 + x(0)^2} \quad (2.22)$$

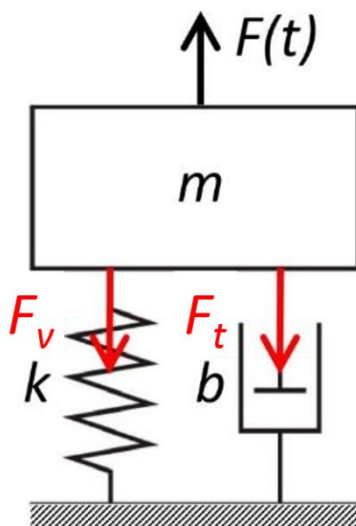
$$\varphi_0 = \arctan \frac{x(0) \Omega}{\dot{x}(0) + \zeta \Omega_0 x(0)} \quad (2.23)$$



Obr. 2.3 - Časový průběh výchylky při podkritickém tlumení [6]

2.3. Vynucené kmitání tlumené soustavy

Nyní se podívejme na stejný případ jako v předchozí kapitole, ovšem zde bude hmota m buzená harmonicky proměnnou silou $F(t)$ [N]. Mechanický model kmitání vynuceného harmonicky proměnnou budící silou je na obr. 2.4.



Obr. 2.4 - Model mechanické kmitající soustavy buzené harmonicky proměnnou budící silou

Harmonický časový průběh budící síly je:

$$F(t) = F_a \sin(\omega t), \quad (2.24)$$

kde: F_a je amplituda budící síly

ω je úhlová frekvence budící síly

Pohybová rovnice je:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F(t) = F_a \sin(\omega t) \quad (2.25)$$

resp.

$$\ddot{x} + 2\zeta\Omega_0\dot{x} + \Omega_0^2x = F(t) = F_a \sin(\omega t) \quad (2.26)$$

Soustavu můžeme řešit následujícími způsoby:

- porovnání členů u součtu $\sin(\omega t)$ a $\cos(\omega t)$
- užití komplexních čísel



ad a) Porovnání členů u součtu $\sin(\omega t)$ a $\cos(\omega t)$

Pohybová rovnice je obyčejná diferenciální rovnice II. řádu s konstantními koeficienty, nehomogenní. Její řešení hledáme ve tvaru superpozice homogenního a partikulárního řešení.

$$x(t) = x_{hom} + x_{part} \quad (2.27)$$

Homogenní řešení

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0 \quad (2.28)$$

Homogenní řešení pohybové rovnice s nulovou pravou stranou (2.28) je:

$$x_{hom} = C e^{-\zeta \Omega_0 t} \sin(\Omega t + \varphi_0)$$

Pozn.: časový průběh x_{hom} viz obr. 2.3.

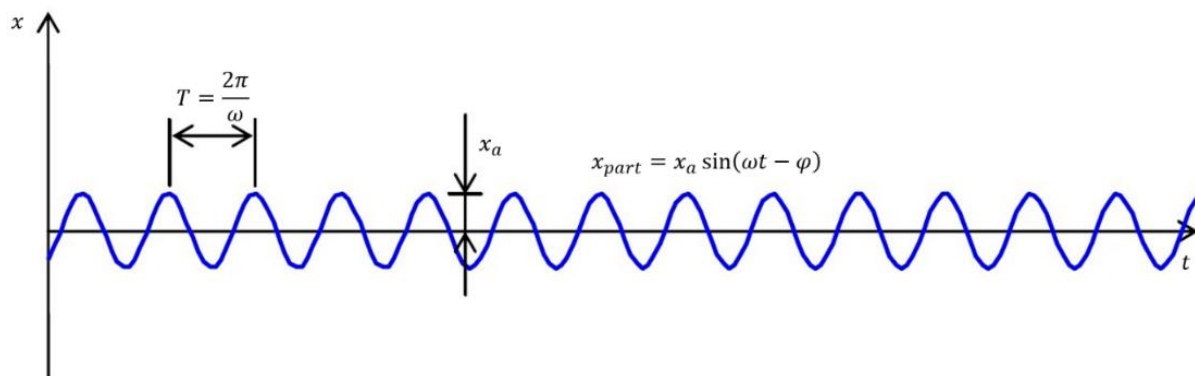
Partikulární řešení, které představuje ustálené vynucené kmitání (odezva soustavy na budící sílu), má tvar odvozený od pravé strany pohybové rovnice (2.25), tedy harmonický průběh s úhlovou frekvencí budící síly. [6]

$$x_{part} = x_a \sin(\omega t - \varphi), \quad (2.29)$$

kde: x_a je amplituda odezvy

ω je úhlová frekvence odezvy (shodná s úhlovou frekvencí budící síly)

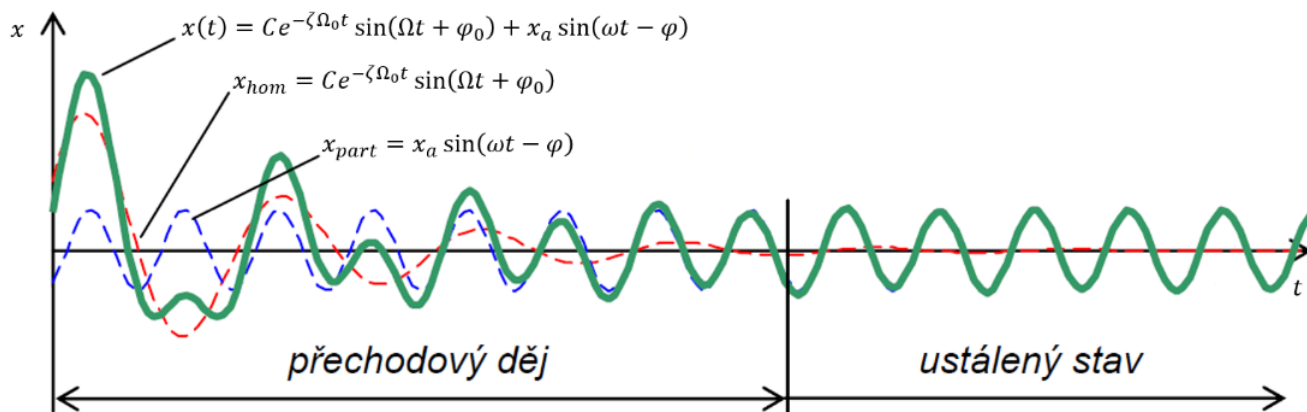
φ je fázový posuv (fázové zpoždění)



Obr. 2.5 - Časový průběh partikulárního řešení [6]

Celkové řešení (viz obr. 2.6) tedy je:

$$x(t) = e^{-\zeta\Omega_0 t} \sin(\Omega t + \varphi_0) + x_a \sin(\omega t - \varphi) \quad (2.30)$$



Obr. 2.6 - Časový průběh celkového řešení [6]

Přechodový děj je superpozicí obou složek - homogenního i partikulárního řešení. Jedná se o komplikovanou křivku (superpozice dvou harmonických průběhů o různých frekvencích). Přechodový děj končí utlumením homogenní složky. [6]

Ustálený stav (ustálené vynucené kmitání) následuje po utlumení vlastního kmitání. Je charakterizován již jen partikulárním řešením. Jedná se o harmonické kmitání s frekvencí budící síly a trvá do nekonečna, resp. pokud působí budící síla. [6]

Derivace partikulárního řešení (2.29) jsou:

$$\dot{x}_{part} = x_a \omega \cos(\omega t - \varphi) \quad (2.31)$$

$$\ddot{x}_{part} = -x_a \omega^2 \sin(\omega t - \varphi) \quad (2.32)$$

Dosazením partikulárního řešení (2.29) a jeho derivací (2.31) a (2.32) do pohybové rovnice (2.25) dostaneme

$$m[-x_a \omega^2 \sin(\omega t - \varphi)] + b[x_a \omega \cos(\omega t - \varphi)] + k[x_a \sin(\omega t - \varphi)] = F_a \sin(\omega t) \quad (2.33)$$

Pro řešení použijeme součtové vzorce:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$



Po roznásobení závorek a vytknutí členů $\sin(\omega t)$ a $\cos(\omega t)$ dostaneme:

$$(-mx_a\omega^2 \cos \varphi + bx_a\omega \sin \varphi + kx_a \cos \varphi) \cdot \sin(\omega t) + \\ + (mx_a\omega^2 \sin \varphi + bx_a\omega \cos \varphi - kx_a \sin \varphi) \cdot \cos(\omega t) = F_a \sin(\omega t) \quad (2.34)$$

Z porovnání členů $\sin(\omega t)$ a $\cos(\omega t)$ vyplývá:

$$-mx_a\omega^2 \cos \varphi + bx_a\omega \sin \varphi + kx_a \cos \varphi = F_a \quad (2.35)$$

$$mx_a\omega^2 \sin \varphi + bx_a\omega \cos \varphi - kx_a \sin \varphi = 0 \quad (2.36)$$

a po úpravě

$$(k - m\omega^2)x_a \cos \varphi + bx_a\omega \sin \varphi = F_a \quad (2.37)$$

$$-(k - m\omega^2)x_a \sin \varphi + bx_a\omega \cos \varphi = 0 \quad (2.38)$$

Z rovnice (2.38) přímo vyplývá fázový posuv φ

$$\tan \varphi = \frac{b\omega}{k - m\omega^2} \quad (2.39)$$

resp. po úpravě

$$\tan \varphi = \frac{2\zeta\Omega_0\omega}{\Omega_0^2 - \omega^2} \quad (2.40)$$

Při zavedení vzorců

$$\sin \varphi = \frac{\tan \varphi}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi}}$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi}}$$

můžeme z rovnice (2.37) vyjádřit amplitudu vynuceného kmitání x_a :

$$x_a = \frac{F_a}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\Omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\Omega_0\omega)^2}} \quad (2.41)$$

S využitím poměrného útlumu ζ (2.13) a zavedením činitele naladění η

$$\eta = \frac{\omega}{\Omega_0} \quad (2.42)$$

můžeme výrazy (2.40) a (2.41) přepsat do tvaru:

$$\tan \varphi = \frac{2\zeta\eta}{1 - \eta^2} \quad (2.43)$$

$$x_a = \frac{F_a}{k} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2\zeta\eta)^2}} = x_{stat} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2\zeta\eta)^2}} \quad (2.44)$$

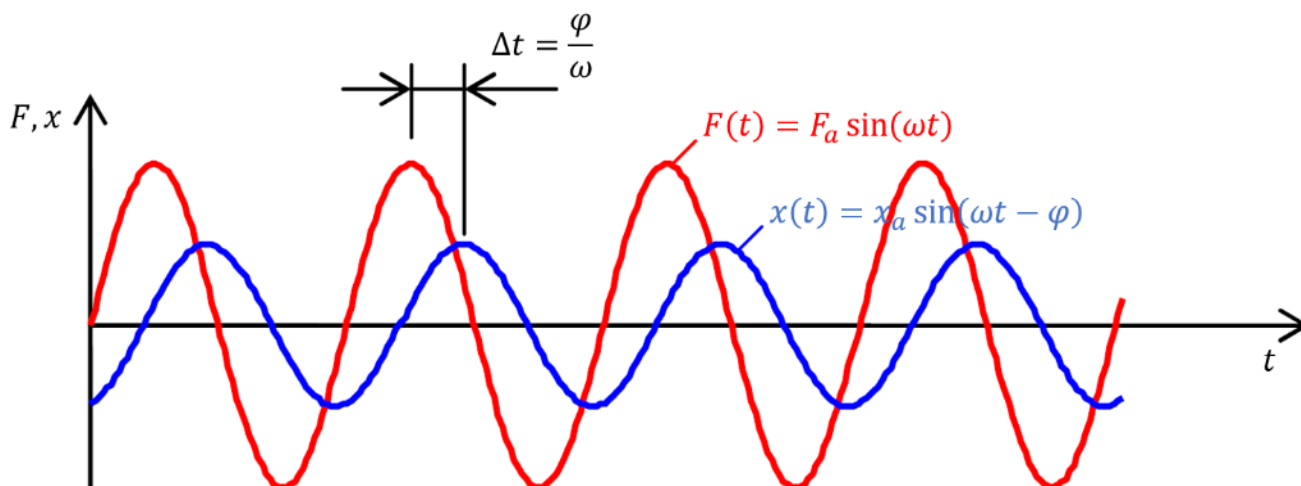
V rovnici (2.44) je x_{stat} tzv. statická deformace (tedy deformace pružiny o tuhosti k způsobená vlivem konstantní síly o velikosti F_a). [6]

$$x_{stat} = \frac{F_a}{k} \quad (2.45)$$

Pozn.: Fyzikální význam fázového posuvu φ (2.43) je časové zpoždění. Maximum výchylky nastává vždy o něco později než maximum budící síly (viz obr. 2.7). [6]

Je-li $\omega < \Omega_0$, $\eta < 1$, je amplituda kladná, tedy kmitání ve stejné fázi (maximální síla i maximální výchylka jdou na stejnou stranu). [6]

Je-li $\omega > \Omega_0$, $\eta > 1$, je amplituda záporná, tedy kmitání v protifázi (maximální výchylka jde na opačnou stranu než maximální síla). [6]



Obr. 2.7 - Zpoždění odezvy vůči budící síle [6]

ad b) Užití komplexních čísel

Komplexní tvar budící síly (2.24) je:

$$\tilde{F} = F_a e^{i\omega t} \quad (2.46)$$

Nechť je budící síla dána imaginární složkou komplexního vektoru:

$$F(t) = \text{Im}\{F_a e^{i\omega t}\} = \text{Im}\{F_a [\cos \omega t + i \sin \omega t]\} = F_a \sin(\omega t) \quad (2.47)$$

Řešení pohybové rovnice (2.25) nebo (2.26) v komplexním tvaru je:

$$\tilde{x} = \tilde{x}_a e^{i\omega t}, \quad (2.48)$$



kde

$$\tilde{x}_a = x_a e^{i\varphi} \quad (2.49)$$

je *komplexní amplituda odezvy*.

Po dosazení do pohybové rovnice (2.26) bude řešení pro komplexní amplitudu:

$$\tilde{x}_a = \frac{F_a}{m} \cdot \frac{1}{\Omega_0^2 - \omega^2 + i \cdot 2\zeta\Omega_0\omega} \quad (2.50)$$

a po úpravě

$$\tilde{x}_a = \frac{F_a}{k} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\Omega_0}\right)^2 + i \cdot 2\zeta \frac{\omega}{\Omega_0}} = x_{stat} \cdot \frac{1}{1 - \eta^2 + i \cdot 2\zeta\eta} \quad (2.51)$$

Dále:

$$\tilde{x} = \tilde{x}_a e^{i\omega t} = \frac{F_a}{k} \cdot \frac{1}{1 - \eta^2 + i \cdot 2\zeta\eta} \cdot e^{i\omega t} = \tilde{H}(\eta) \cdot \tilde{F} \quad (2.52)$$

kde

$$\tilde{H}(\eta) = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{1 - \eta^2 + i \cdot 2\zeta\eta} \quad (2.53)$$

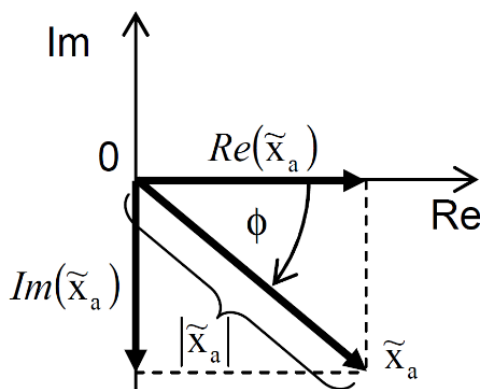
je *komplexní přenosová funkce*.

Komplexní amplituda dle (2.51) pak je:

$$\tilde{x}_a = x_{stat} \cdot \frac{1}{1 - \eta^2 + i \cdot 2\zeta\eta} = x_{stat} \left[\frac{1 - \eta^2}{(1 - \eta^2)^2 + (2\zeta\eta)^2} - \frac{i \cdot 2\zeta\eta}{(1 - \eta^2)^2 + (2\zeta\eta)^2} \right] \quad (2.54)$$

a její reálná a imaginární složka jsou:

$$Re(\tilde{x}_a) = x_{stat} \cdot \frac{1 - \eta^2}{(1 - \eta^2)^2 + (2\zeta\eta)^2} \quad Im(\tilde{x}_a) = x_{stat} \cdot \frac{-2\zeta\eta}{(1 - \eta^2)^2 + (2\zeta\eta)^2} \quad (2.55)$$



Obr. 2.8 - Komplexní amplituda v komplexní rovině [6]



Amplituda pak je (viz též (2.44)):

$$x_a = |\tilde{x}_a| \sqrt{(Re(\tilde{x}_a))^2 + (Im(\tilde{x}_a))^2} = x_{stat} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2\zeta\eta)^2}} \quad (2.56)$$

a fázový posuv je (viz též (2.43)):

$$\varphi = \arctan \frac{Im(\tilde{x}_a)}{Re(\tilde{x}_a)} = \arctan \frac{2\zeta\eta}{1 - \eta^2} \quad (2.57)$$

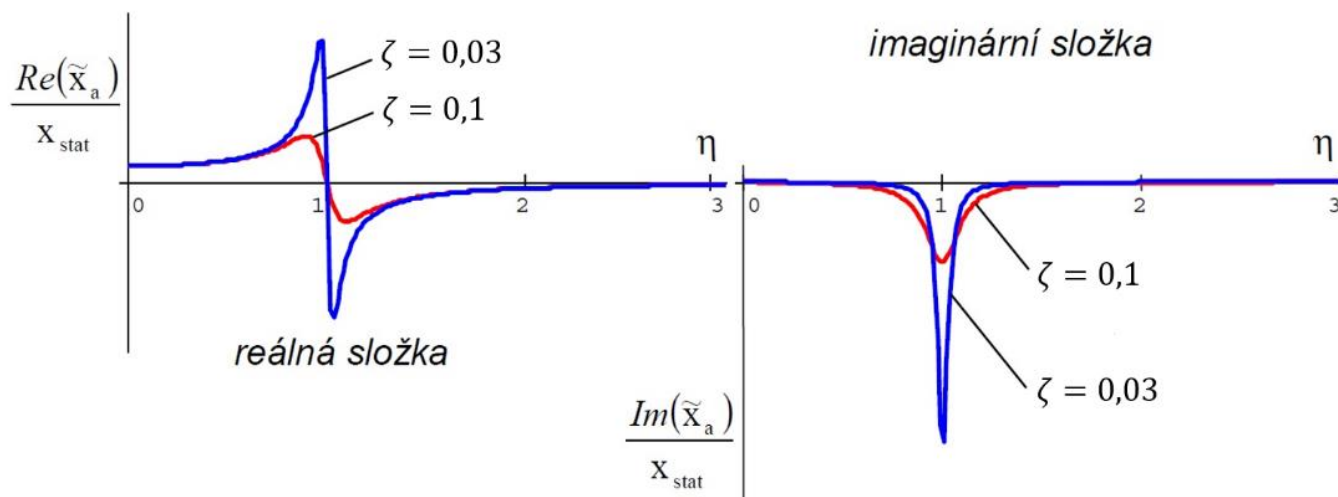
Dynamické zesílení (také přenosová funkce nebo faktor zesílení) je:

$$\xi = \frac{x_a}{x_{stat}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2\zeta\eta)^2}} = |\tilde{H}(\eta)| \cdot k \quad (2.58)$$

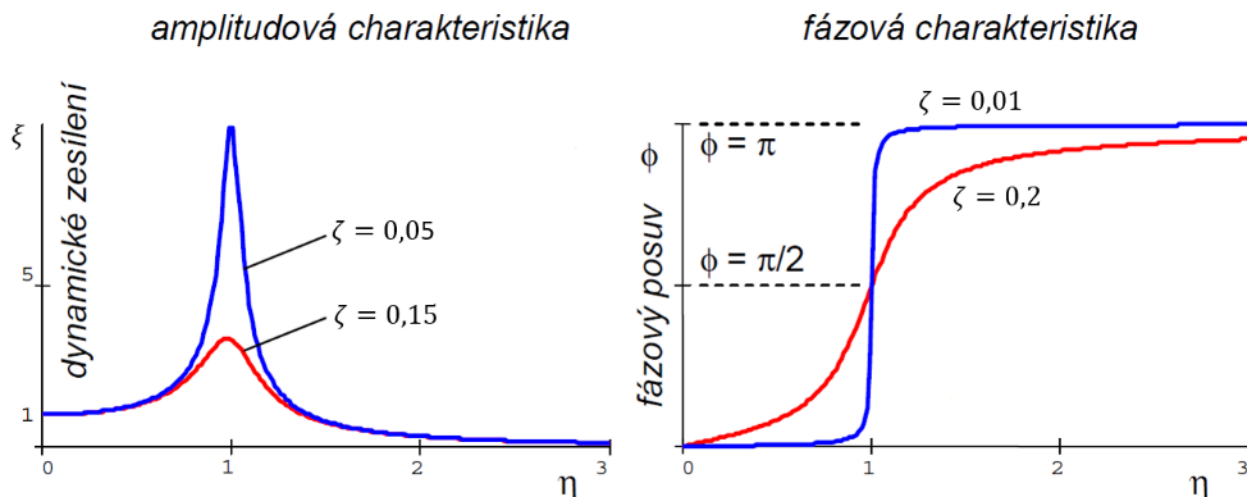
Grafická znázornění odvozených závislostí vyjadřují závislost amplitudy (fáze) na naladění, resp. frekvenci buzení. Zobrazují se jako amplitudová (fázová) frekvenční charakteristika. Frekvenční charakteristika reálné a imaginární složky je možno vidět na obr.

2.9. Tyto charakteristiky se ale nejčastěji používají v podobě uvedené na obr. 2.10. [1; 6]

Rezonance je jev, který nastává, když budící frekvence je blízká vlastní frekvenci ($\omega \cong \Omega_0$) a činitel naladění je blízký jedné ($\eta \cong 1$). Rezonance se projevuje vysokou amplitudou odezvy a to i při poměrně nízké hodnotě amplitudy budící síly. Matematicky se za rezonanci považuje shoda imaginárních částí vlastní hodnoty s úhlovou frekvencí harmonické složky buzení. Rezonance je pro většinu strojních zařízení jev nežádoucí, ve výjimečných případech se ho využívá pro dosažení maximální efektivity činnosti zařízení. [1; 6]



Obr. 2.9 - Frekvenční charakteristika - reálná a imaginární složka [6]



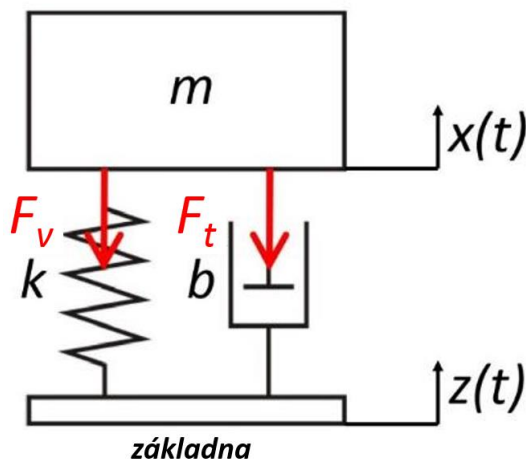
Obr. 2.10 - Amplitudová a fázová frekvenční charakteristika [6]

Nyní provedeme popsání amplitudové frekvenční charakteristiky podle obr. 2.11.

- 1) Pro činitel naladění $\eta = 0$ ($\omega = 0$) je $x_a = x_{stat}$.
 - nulová hodnota frekvence budící síly odpovídá konstantní budící síle. Pak je přirozené, že výchylka je rovna statické výchylce. [6]
- 2) Pro činitel naladění $\eta \rightarrow 1$ ($\omega \rightarrow \Omega_0$) nastává rezonance.
 - pro netlumené kmitání ($\zeta = 0$) amplituda narůstá nade všechny meze. Pro tlumené kmitání ($\zeta > 0$) amplituda dosahuje konečných, avšak velmi vysokých hodnot. [6]
- 3) Pro činitel naladění $\eta \gg 1$ ($\omega \gg \Omega_0$) je amplituda velmi malá $x_a \ll x_{stat}$ a asymptoticky se blíží k nule. [6]



$x(t)$ je časově proměnná souřadnice, která určuje polohu hmotného bodu



Obr. 2.12 – Model kinematicky buzené mechanické kmitající soustavy

Z 2. Newtonova pohybového zákona můžeme odvodit pohybovou rovnici:

$$ma = \sum F_i = -F_v - F_t \quad (2.59)$$

kde směrná síla F_v a tlumící síla F_t je:

$$F_v = k \cdot x_{rel} = k(x - z) \quad (2.60)$$

$$F_t = b \cdot \dot{x}_{rel} = b(\dot{x} - \dot{z}) = b \cdot v_{rel} = b(v - v_z) \quad (2.61)$$

Pozn.: směrná síla zde není primárně dána posunutím tělesa x , ale deformací pružiny neboli relativní výchylkou $x_{rel} = x - z$ (základna „dohání“ těleso a deformace pružiny je dána rozdílem obou pohybů. Podobně ve výrazu pro tlumící sílu $\dot{x}_{rel} = \dot{x} - \dot{z}$ je relativní rychlost jednoho konce tlumiče vůči druhému rozdíl rychlosti hmotného bodu a základny. [6]

Specifikace sil (2.60) a (2.61) dosadíme do rovnice (2.59) a po úpravě dostaneme:

$$ma + bv + kx = bv_z + kz \quad (2.62)$$

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = b\dot{z} + kz = f(t) \quad (2.63)$$

Pozn.: funkce $f(t) = b\dot{z} + kz$ na pravé straně rovnice vyjadřuje pohyb základny. [6]

Pro další postup řešení si definujeme, že pohyb základny bude harmonický:

$$z = z_a \sin(\omega t) \quad (2.64)$$

$$v_z = \dot{z} = z_a \omega \cos(\omega t), \quad (2.65)$$



kde: z_a je *amplituda pohybu základny*
 ω je *úhlová frekvence pohybu základny*

Takovýto pohyb základny (rámu) odpovídá např. pohybu *kulisového mechanismu*, kde amplituda pohybu základny odpovídá poloměru kliky $r = z_a$ a úhlová rychlost rotace kliky ω je současně kruhovou frekvencí pohybu základny. [6]

Po dosazení rovnic (2.64) a (2.65) do pohybové rovnice (2.63) dostaneme novou podobu pohybové rovnice:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = b \cdot z_a \omega \cos(\omega t) + k \cdot z_a \sin(\omega t) \quad (2.66)$$

Použijeme-li substitute:

$$F_a = \sqrt{(b \cdot z_a \omega)^2 + (k \cdot z_a)^2} = z_a \sqrt{(b\omega)^2 + k^2} \quad (2.67)$$

$$\varphi_z = \arctan \frac{b \cdot z_a \omega}{k \cdot z_a} = \arctan \frac{b\omega}{k} \quad (2.68)$$

S pomocí již definovaných vztahů (2.4), (2.13), (2.14), (2.15) a (2.42) v podobě

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \zeta = \frac{b}{b_k}, \quad b_k = 2\sqrt{km} = 2m\Omega_0, \quad \delta = \frac{b}{2m}, \quad \eta = \frac{\omega}{\Omega_0}$$

můžeme rovnici (2.67) přepsat do tvaru

$$F_a = k \cdot z_a \sqrt{(2\zeta\eta)^2 + 1} \quad (2.69)$$

Pohybová rovnice bude po úpravě

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_a \cdot \sin(\omega t + \varphi_z), \quad (2.70)$$

resp.

$$\ddot{x} + 2\zeta\Omega_0\dot{x} + \Omega_0^2 x = \frac{F_a}{m} \cdot \sin(\omega t + \varphi_z) \quad (2.71)$$

Pohybová rovnice (2.71) je analogicky shodná s pohybovou rovnicí (2.26), ovšem s výjimkou fázového posuvu φ_z . [6]

Pozn.: zde je třeba si uvědomit, že člen F_a na pravé straně nemá fyzikální charakter síly, ale vyjadřuje pohyb základny. [6]



Partikulární řešení pro ustálený stav pohybové rovnice je samozřejmě také shodné s (2.29), (2.40), (2.41), (2.43) a (2.44).

$$x(t) = x_a \sin(\omega t + \varphi_z - \varphi) \quad (2.72)$$

$$x_a = \frac{F_a}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\Omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\Omega_0\omega)^2}} \quad (2.73)$$

$$x_a = \frac{F_a}{k} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2\zeta\eta)^2}} = z_a \cdot \frac{\sqrt{1 + (2\zeta\eta)^2}}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2\zeta\eta)^2}} \quad (2.74)$$

$$\tan \varphi = \frac{2\zeta\Omega_0\omega}{\Omega_0^2 - \omega^2} = \frac{2\zeta\eta}{1 - \eta^2} \quad (2.75)$$

Přenosová funkce je

$$\xi = \frac{x_a}{z_a} = \frac{\sqrt{1 + (2\zeta\eta)^2}}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2\zeta\eta)^2}} \quad (2.76)$$

Amplitudová frekvenční charakteristika má stejný průběh jako je na *obr. 2.11*.



3. KMITÁNÍ NELINEÁRNÍCH SOUSTAV

Mechanickou soustavu, která obsahuje alespoň jeden prvek, jehož charakteristika je popsána nelineární závislostí silových a kinematických (deformačních) veličin, nazýváme soustavou nelineární.

Popis dynamických vlastností mechanických soustav pomocí lineárních výpočtových modelů je pouze prvotním přiblížením k reálným vlastnostem. [1]

Každá mechanická soustava je ve své podstatě nelineární, protože lineární vztahy mezi příslušnými deformacemi, rychlostmi a zrychleními platí pouze v často velmi úzké oblasti výchylek a deformací. Avšak s dostatečnou přesností pro technickou praxi můžeme nelineární charakteristiky jednotlivých prvků nahradit lineárními závislostmi. [1]

Obsahuje-li však soustava prvek s výraznějšími nelineárními vlastnostmi, nestačí lineární teorie k popisu všech jevů, které se při kmitání takové nelineární soustavy objevují. Mezi typické jevy nelineárních soustav jsou např. závislost vlastní frekvence a koeficientu tlumení na amplitudě kmitání, víceznačnost řešení a přechody kmitajícího systému z jednoho pohybového stavu do druhého, existence ustáleného samobuzeného kmitání, vznik subharmonických a vícesložkových kmitů, synchronizace různých složek pohybu, oblasti nestability atd. [1]

U nelineárních soustav neplatí princip superpozice. Z toho např. plyne, že u vynuceného kmitání nelze budící sílu rozložit do harmonických složek a jejich dílčí odezvy superponovat, neplatí, že dvojnásobná vnější síla vyvolá dvojnásobnou výchylku atd.

V mechanických diskrétních soustavách se nelinearity nejčastěji vyskytují u pružných a tlumících členů. Lze-li jejich účinky oddělit, je pohyb systému s jedním stupněm volnosti popsán rovnicí

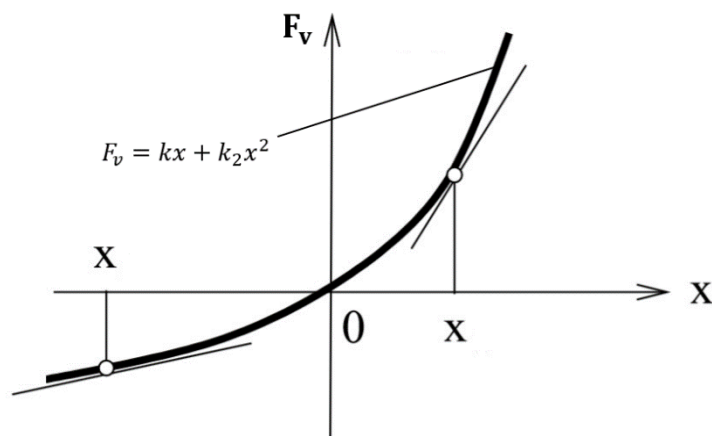
$$m\ddot{x} + g(\dot{x}) + f(x) = 0 \quad (3.1)$$

kde funkce $g(\dot{x})$, resp. $f(x)$ udávají nelineární charakteristiky tlumícího a pružného (vratného) členu. Nemůžeme-li oddělit tlumící a vratné účinky, je pohyb popsán rovnicí

$$m\ddot{x} + f(\dot{x}, x) = 0 \quad (3.2)$$

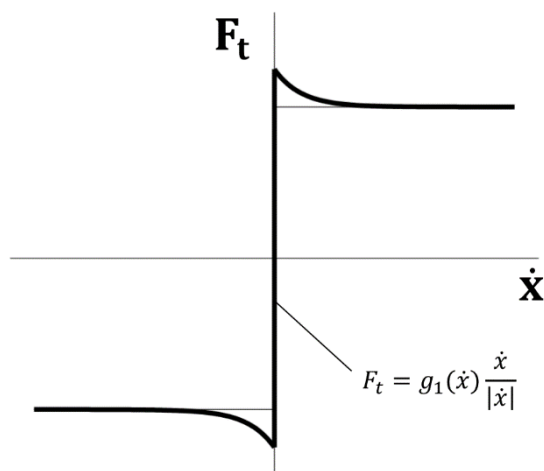
Charakteristiky vratné síly procházející počátkem můžeme definovat jako **tvrdnoucí** (*progresivní*) a **měkhoucí** (*degresivní*) charakteristiky. Příklad charakteristiky vratné síly je

možno vidět na obr. 3.1. Pro $x > 0$ je charakteristika progresivní a pro $x < 0$ regresivní. Jedná se tedy o nesymetrickou charakteristiku, ovšem existují i symetrické charakteristiky.



Obr. 3.1 – Nelineární charakteristika vratné síly

Tlumicí síla může být závislá buď jen na rychlosti deformace tlumicího členu ($g(\dot{x})$) nebo také na výchylce x ($F_t = g(x, \dot{x})$). Jako příklad tlumicí síly (obr. 3.2) si zde uvedeme charakteristiku nejčastějšího tlumicího účinku v mechanických soustavách – **suché tření**. [1]



Obr. 3.2 – Nelineární charakteristika tlumicí síly typu suchého tření

Vzhledem k úrovni a dostupnosti výpočetní techniky je možno získat řešení pohybové rovnice nelineárního kmitání přímo vhodnými numerickými metodami. Z numerického řešení však není možné, bez provedení tzv. numerického experimentu, bezprostředně posoudit vliv jednotlivých parametrů na průběh kmitání. To umožňují přibližné metody analytické, které zde nebudou uváděny, jelikož se při řešení nelineárního systému v této práci použilo numerické řešení pohybové rovnice a analytické řešení nebylo předmětem této práce.



3.1. Vynucené kmitání nelineárního systému

Budící účinek může být buď *silový*, když na nelineární systém s jedním stupněm volnosti působí síla $F(t)$ nebo *kinematický*, když nějaký bod nelineárního systému koná předepsaný pohyb. [2]

Pohybová rovnice pro silové buzení je

$$m\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = F(t) \quad (3.3)$$

a pro kinematické buzení

$$m\ddot{x} + f((x - z(t)), (\dot{x} - \dot{z}(t))) = 0 \quad (3.4)$$

Vnější síla může být harmonická, periodická, náhodná, resp. rázová. Protože u nelineárních soustav neplatí princip superpozice, nelze ani ustálenou odezvu systému na obecnou periodickou budící sílu $F(t)$ určovat jako součet dílčích odezev na jednotlivé složky této síly. Musíme proto pokaždé řešit jednotlivé případy metodami, které sledované soustavě a způsobu zatížení nejlépe vyhovují. [1; 2]

Odezva na periodickou sílu bývá složitější než na sílu harmonickou, a proto se vlastnosti periodického kmitání nelineární soustavy vyšetřují hlavně při rozkmitávání harmonickou budící silou. [1]

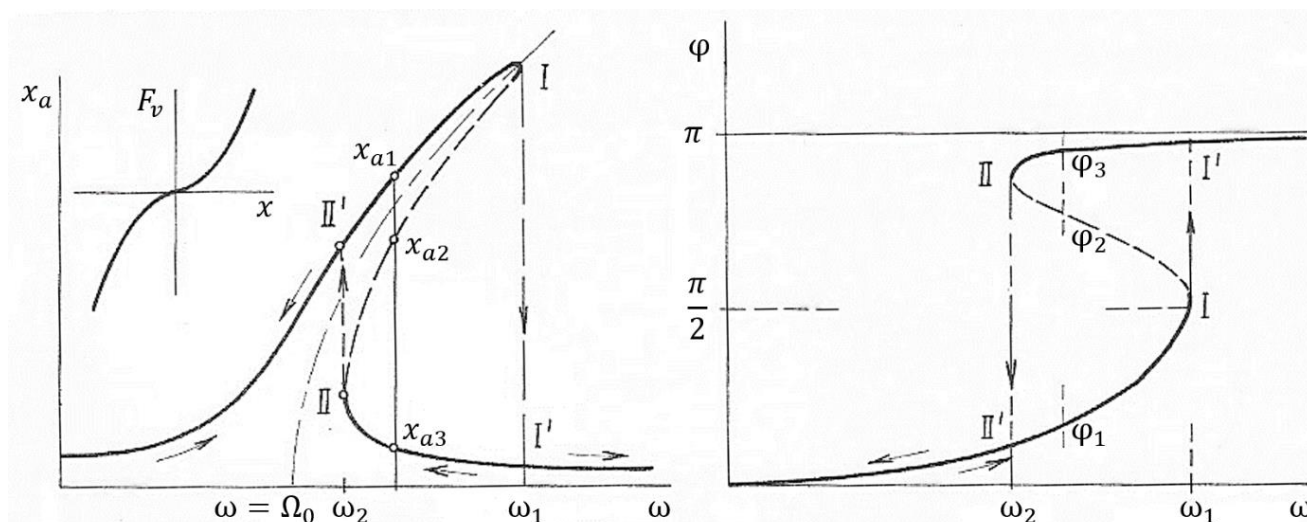
Pohybová rovnice nelineární soustavy je pak

$$m\ddot{x} + g(x, \dot{x}) + f(x) = F_a \cos(\omega t), \quad (3.5)$$

kde: $g(x, \dot{x})$ udává tlumící sílu

$f(x)$ udává vratnou sílu

Vynucené kmitání nelineární soustavy obsahuje většinou jako nejvýraznější první harmonickou složku s úhlovou frekvencí budící síly ω . Závislost této složky na frekvenci udává amplitudová rezonanční křivka, která vykazuje typické odchylky od průběhu rezonančních křivek lineárních soustav (viz *obr. 2.10* nebo *2.11*), jak bude vysvětleno v následujícím textu. [1]



Obr. 3.3 – Amplitudová a fázová charakteristika nelineární soustavy se symetrickou progresivní charakteristikou vratné síly [1]

Jak je zřejmé z obr. 3.3, kde je ukázka rezonanční křivky pro symetrickou progresivní charakteristiku vratné síly, patří mezi jevy vyvolané nelinearitou především naklonění rezonančního vrcholu k vyšším frekvencím (při degresivní charakteristice k nižším frekvencím (viz obr. 3.4)), existence víceznačného řešení (více možných amplitud x_{a1} , x_{a2} , x_{a3} a úhlů fázového posuvu φ_1 , φ_2 , φ_3) při konstantní úhlové rychlosti $\omega \in (\omega_1, \omega_2)$, existence nestabilních částí rezonančních křivek, na kterých se nemůže udržet ustálený stav, přechody z jedné části rezonanční křivky na druhou při hranicích oblastí víceznačnosti, rozdílná amplitudová rezonanční křivka naměřená při pomalu stoupající nebo pomalu klesající frekvenci buzení, a tím vznikající hysterezní smyčka (I, I', II, II'). [1]

3.1.1. Vliv nelinearity na rezonanční vrcholy

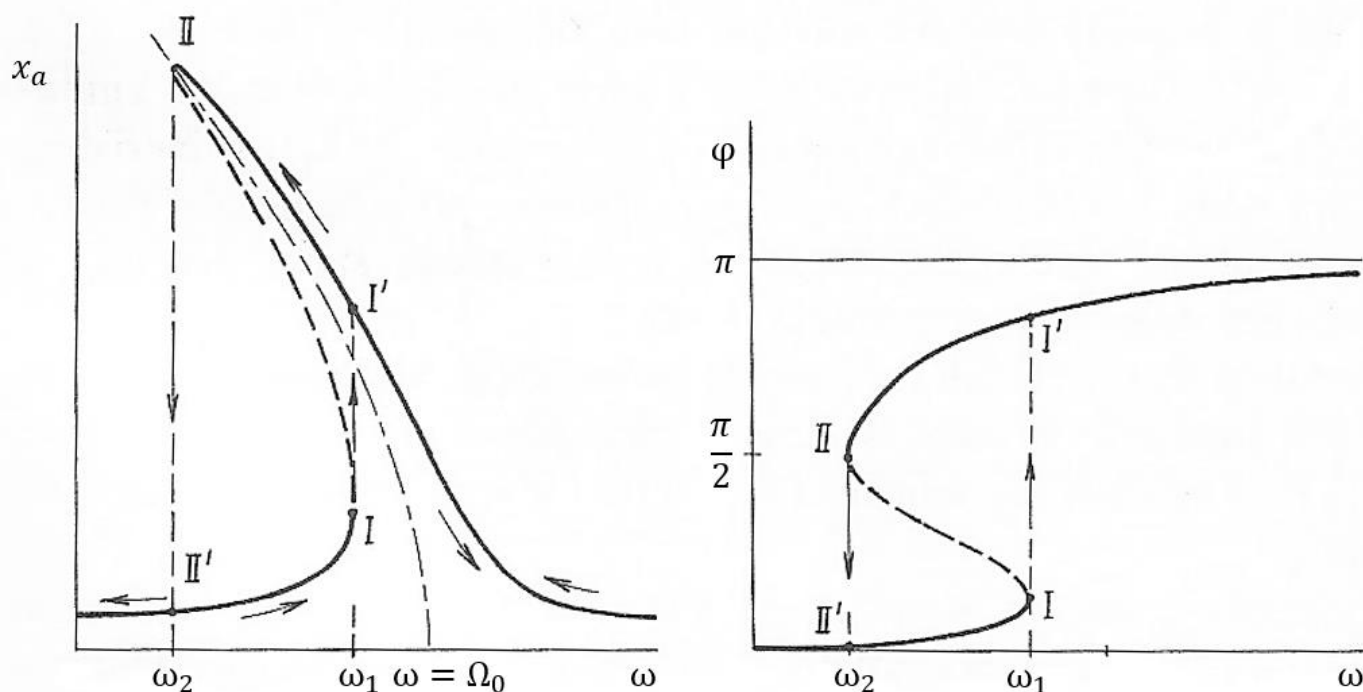
Při pomalém zvyšování frekvence budící síly amplituda kmitů x_a roste spojitě (viz šipky na obr. 3.3, 3.4) až k bodu I , kde dojde k přeskočení amplitudy do stavu popsaného bodem I' ležícím na zarezonanční větvi ($\omega < \Omega_0$) rezonanční křivky. U progresivní soustavy se přitom amplituda skokem (během několika kmitů) silně zmenší, u degresivní soustavy naopak náhle vzroste. Při dalším zvyšování frekvence ω amplituda kmitů klesá podél zarezonanční větve. [1]

Snižuje-li se pomalu budící frekvence ω , sleduje amplituda x_a zarezonanční větev, a to až do bodu II , kde nastává opět přeskok do bodu II' ležící na předrezonanční větvi

($\omega < \Omega_0$), podél které amplituda kmitů spojitě klesá při dalším snižování frekvence ω .

Měříme-li rezonanční křivky nelineární soustavy při pomalu rostoucí frekvenci, naměříme tedy jinou maximální amplitudu a při jiné frekvenci (bod I , resp. I') než při klesající budící frekvenci (bod II , resp. II'). Vzniká zde tedy hystereze daná přeskoky z jedné větve na druhou. [1]

Podobné jevy nastávají i u fázového posuvu φ . Současně se skokovou změnou amplitudy se mění skokem i fázový posuv v bodech I a II (viz obr. 3.3, 3.4). [1]



Obr. 3.4 – Amplitudová a fázová charakteristika nelineární soustavy se symetrickou *degresivní* charakteristikou vratné síly [1]

3.2. Přejížděné kmitání při přejíždění rezonančních oblastí

Při proměnlivé frekvenci budící síly se odezva soustavy liší od odezvy soustavy na stacionární buzení (od tzv. stacionární rezonanční křivky). Při přejíždění rezonanční oblasti nastává posun rezonančních vrcholů k vyšším nebo nižším frekvencím, snížení maximální amplitudy atd. Po přejetí prvního maxima dochází vlivem interference vynucených a vlastních kmitů k pulzacím amplitud a fází, které jsou tím výraznější, čím je rychlost přechodu rezonančního vrcholu vyšší. S rostoucí rychlostí přechodu této oblasti se snižuje velikost rezonančního vrcholu, ale zároveň se rozšiřuje oblast zvýšených výchylek. Tyto jevy jsou společné u lineárních i nelineárních soustav. [1]

Tyto odchylky od stacionárního kmitání jsou způsobeny především tím, že při monotónní změně frekvence soustava zůstává v rezonanční oblasti pouze omezený časový interval závislý na rychlosti přejíždění, a proto se intenzivní rezonanční kmitání nemůže dostatečně rozvinout. [1]

Kmitání soustavy při spojitě změně budící úhlové frekvence $\omega(t)$ může být např. popsáno pohybovou rovnicí

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx + \varepsilon f(x, \dot{x}) = F_0 \cos \Theta, \quad (3.6)$$

kde: $d\Theta/dt = \omega(t)$ je v čase proměnná uhlová rychlost

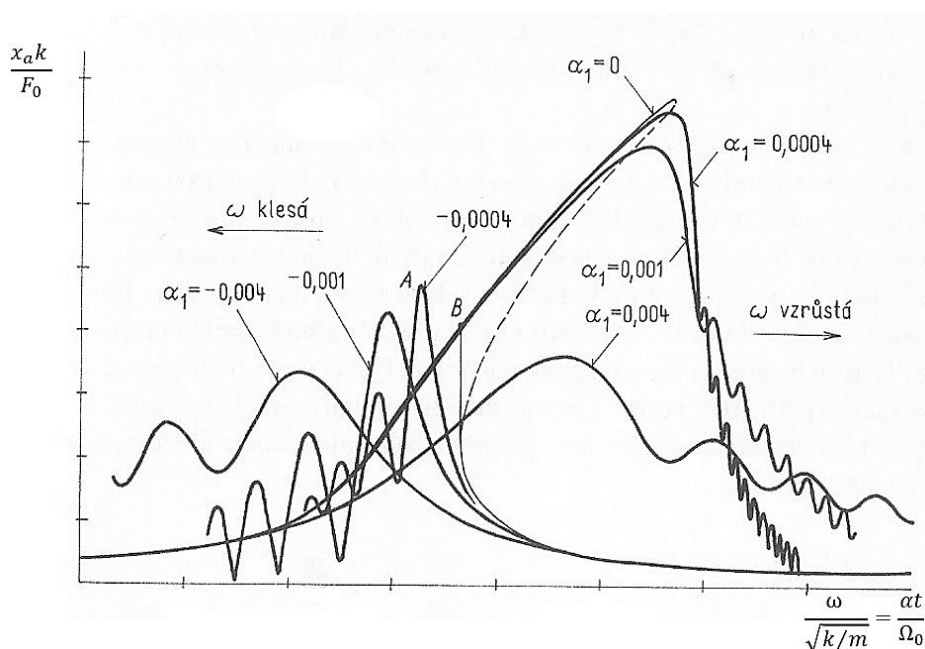
$d\omega(t)/dt = \alpha(t)$ je v čase proměnné úhlové zrychlení

$\varepsilon f(x, \dot{x})$ je člen, který obsahuje jak nelineární část vratné síly, tak tlumící sílu, přičemž

ε je tzv. *malý parametr*, který vyznačuje, že tyto síly jsou malé ve srovnání se silami vyjádřenými prvními třemi členy

Pro zadaný průběh celkové fáze $\Theta(t)$ budící síly (resp. $\omega(t)$) a $\alpha(t)$ lze numerickou integrací vypočítat pro dané počáteční podmínky průběh amplitudy kmitání a průběh fázového posuvu φ . Úhlové zrychlení $\alpha(t)$ může mít spojitý i nespojitý průběh, může být kladné (rozběh soustavy) i záporné (zastavování soustavy). [1]

Na obr. 3.5 jsou v bezrozměrových souřadnicích vypočtené přechodové křivky a pro monotónní vzrůst ($\alpha_1 > 0$) i pro monotónní pokles budící funkce ($\alpha_1 < 0$). α_1 je bezrozměrný parametr charakterizovaný jako $\alpha_1 = \alpha m/k = 0,0004 \div 0,004$. [1]



Obr. 3.5 – Přechodové křivky pro různé α_1 [1]

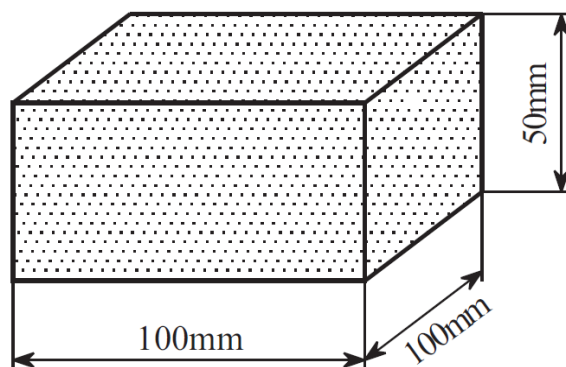


Výpočet nestacionárních rezonančních křivek $x_a(\omega)$, resp. $\varphi(\omega)$ je nutné provést numericky nejlépe metodou Runge-Kutta, která také byla použita při výpočtu pohybové rovnice nelineárního systému konkrétní zadané úlohy použité v této práci.

Pozn.: *teorie nelineárního kmitání je velmi náročná a rozsáhlá. Neexistují v ní obecné a jednoduché metody řešení, tak jako v teorii lineárního kmitání. V kapitole 3. Nelineární kmitání a jejich podkapitolách byl kladen hlavně důraz na fyzikální popis, na vlastnosti takových soustav a na jevy, kterými se odlišují od soustav lineárních.*

4. MODEL MECHANICKÝCH VLASTNOSTÍ PU PĚNY

Nelineárním materiálem může být např. PU pěna. V závislosti na chemickém složení směsi lze vyrobit pěny označující se zkratkou TDI nebo MDI, přičemž obě varianty mohou být v provedení s otevřenými nebo uzavřenými póry. Zkušební vzorky (viz *obr. 4.1*) pocházejí z podniku Škoda Auto a.s. Použité vzorky polyuretanového materiálu byly vyříznuty z automobilového sedáku a měly tvar kvádra o rozměrech (100x100x50) mm (viz *obr. 4.1*). Byly vyrobeny z materiálu TDI s hustotou 55 kg/m³ a s otevřenými póry. [3]



Obr. 4.1 – Vzorek polyuretanové pěny [3]

4.1. Sestavení simulačního modelu PU pěny

V této kapitole je uvedena koncepce reologického modelu se soustředěnými parametry, která se snaží vystihnout dosud poznané vlastnosti PU pěny popsané v disertační práci doc. Ing. D. Církla, Ph.D. [3], ve které byl model vratné a tlumící síly sestaven na základě experimentálních měření.

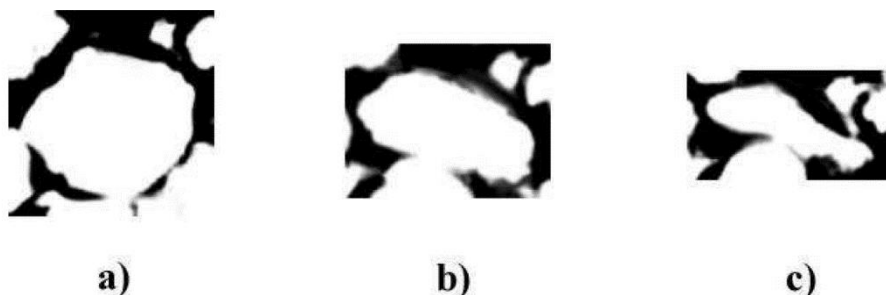
4.1.1. Vratná síla

Sestavení průběhu vratné síly se skládá ze tří fází a výsledný matematický model se pomocí superpozice skládá ze dvou funkcí, jak bude následně ukázáno a vysvětleno.

Fáze I. - borcení struktury materiálové matrice

Póry polyuretanového materiálu vytvářejí typickou strukturu, která je do jisté míry schopna odolávat tlakovému zatížení díky své vzpěrné pevnosti. Nedeformovaný tvar buňky je na *obr. 4.2 a*), částečně deformovaný na *obr. 4.2 b*) a konečně *obr. 4.2 c*) odpovídá stavu, kdy jsou buňky natolik deformované, že byla překročena mez únosnosti struktury m_u

(horizontální asymptota na *obr. 4.3*) a vzpěrná pevnost buněk přestává mít významný vliv na velikost vratné síly. Deformace lze považovat za elastické. [3]



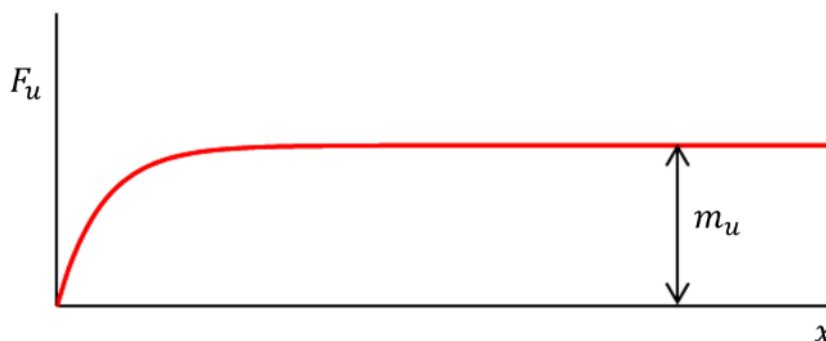
Obr. 4.2 – Postupná deformace zatížené buňky (zvětšeno 10x) [3]

Tato fáze je aproximována funkcí (4.1) – viz *obr. 4.3*. Přírůstek síly vlivem vzpěrné pevnosti struktury je

$$F_u = m_u(1 - e^{-k_u x}), \quad (4.1)$$

kde m_u je mez únosnosti

k_u je koeficient únosnosti struktury



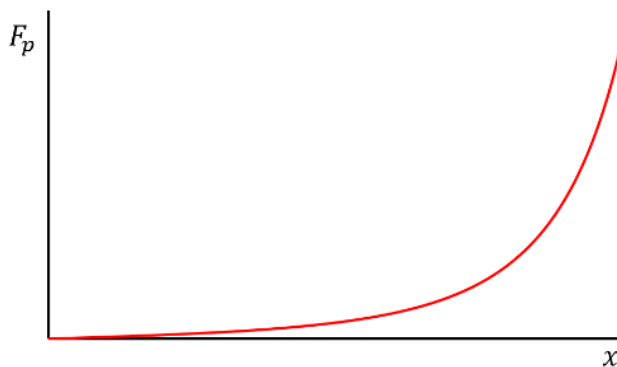
Obr. 4.3 – Průběh síly únosnosti struktury F_u v závislosti na deformaci x

Fáze II. a III. – přechování základního materiálu

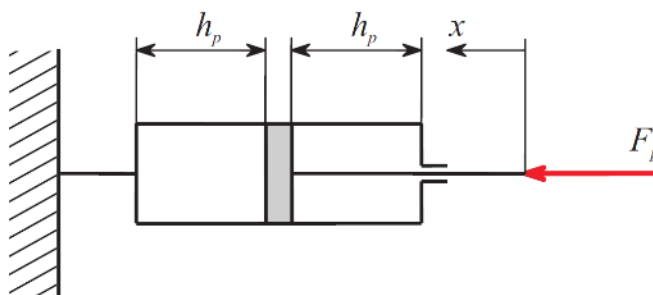
Po počátečním zborcení buněk základního materiálu dochází k dosedání jejich stěn a dále již ke kompresi materiálové matrice. Charakteristika této části je velice podobná průběhu síly při stlačování ideálního plynu (*obr. 4.5*), což vyjadřuje vztah (4.2) – viz *obr. 4.4*. [3]

$$F_p = S_p p_p \left[\left(\frac{h_p}{h_p - x} \right)^{n_p} - \left(\frac{h_p}{h_p + x} \right)^{n_p} \right], \quad (4.2)$$

kde: S_p, p_p, h_p jsou konstanty modelu, přičemž h_p má význam polohy vertikální asymptoty na *obr. 4.6*.



Obr. 4.4 – Průběh působící síly F_p při stlačování pneumatického válce



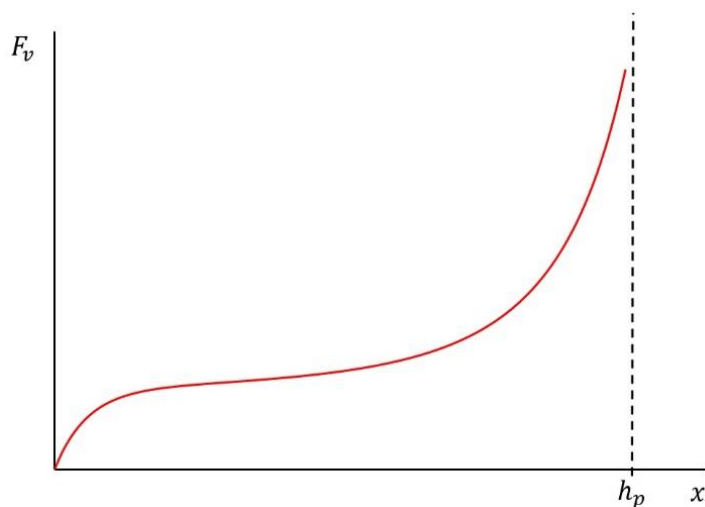
Obr. 4.5 – Stlačování pneumatického válce

Celkový průběh vratné síly je dán součtem funkcí (4.1) a (4.2)

$$F_v = F_u + F_p \quad (4.3)$$

a po dosazení dostaneme

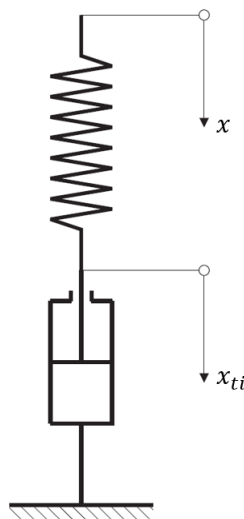
$$F_v = m_u(1 - e^{-k_u x}) + S_p p_p \left[\left(\frac{h_p}{h_p - x} \right)^{n_p} - \left(\frac{h_p}{h_p + x} \right)^{n_p} \right] \quad (4.4)$$



Obr. 4.6 – Průběh vratné síly F_v

4.1.2. Tlumící síla

Tlumení materiálové matrice bylo popsáno viskoelastickým členem Maxwellova typu na *obr. 4.7*. Pružina, ačkoli je z důvodu názornosti zobrazena jako vinutá, je uvažována jako nelineární (plynová) s polytropickou charakteristikou. [3]



Obr. 4.7 – Viskoelastický člen Maxwellova typu [3]

$$F_{ti} = S_{oi}p_{oi} \left[\left(\frac{h_i}{h_i - (x - x_{ti})} \right)^{n_{oi}} - \left(\frac{h_i}{h_i + (x - x_{ti})} \right)^{n_{oi}} \right] \quad (4.5)$$

Následuje sériově řazený nelineární tlumič s konstantou tlumení c_i a exponentem n_i [3]

$$F_{ti} = c_i |v_{ti}|^{n_i} \cdot \text{sign}(v_{ti}) = c_i \left| \frac{dx_{ti}}{dt} \right|^{n_i} \cdot \text{sign} \left(\frac{dx_{ti}}{dt} \right), \quad i = 1..m \quad (4.6)$$

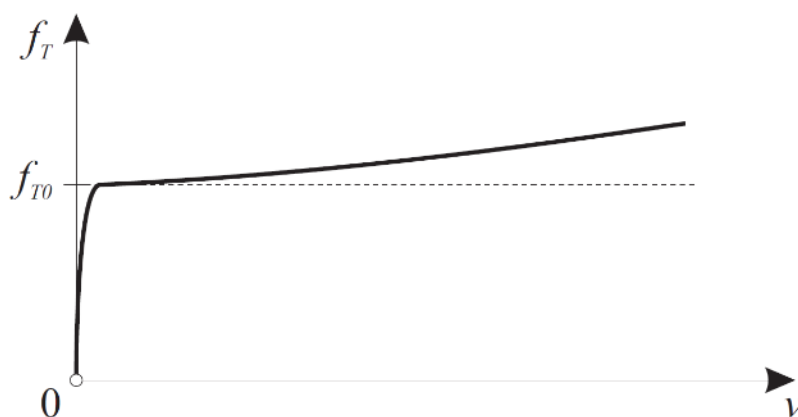
Po dosazení rovnice (4.6) do (4.5) dostane diferenciální rovnici viskoelastického prvku

$$c_i \left| \frac{dx_{ti}}{dt} \right|^{n_i} \cdot \text{sign} \left(\frac{dx_{ti}}{dt} \right) = S_{oi}p_{oi} \left[\left(\frac{h_i}{h_i - (x - x_{ti})} \right)^{n_{oi}} - \left(\frac{h_i}{h_i + (x - x_{ti})} \right)^{n_{oi}} \right] \quad (4.7)$$

Uvažovaným předpokladem je, že svoji úlohu v tlumení bude hrát i smykové tření. Při přechování struktury polyuretanu bortící se stěny pórů dostávají do vzájemného kontaktu a s narůstající deformací se po sobě smýkají. Tak lze zdůvodnit, že v submodelu bude zahrnut současně pasivní odpor s průběhem koeficientu smykového tření f_T , který byl v závislosti na

rychlosti popsán funkcí $\arctan$ v kombinaci s mocninnou funkcí podle rovnice (4.8) – viz obr. 4.8. Vlastností této funkce je, že při nulové rychlosti je síla smykového tření F_T nulová, což nemusí odpovídat skutečnosti, ale pro numerickou simulaci v okolí nulové rychlosti je to výhodné. [3]

$$f_T = \frac{2f_{T0}}{\pi} \arctan(k_1 v) + k_2 |v|^{k_3} \text{sign}(v) \quad (4.8)$$



Obr. 4.8 – Závislost koeficientu smykového tření f_T na rychlosti v [3]

Základem pro stanovení třecí síly je uvažován součet síly vratné (4.4) a tlumicí (4.6) [3]

$$F_{vt} = F_v + \sum_{i=1}^m F_{ti} \quad (4.9)$$

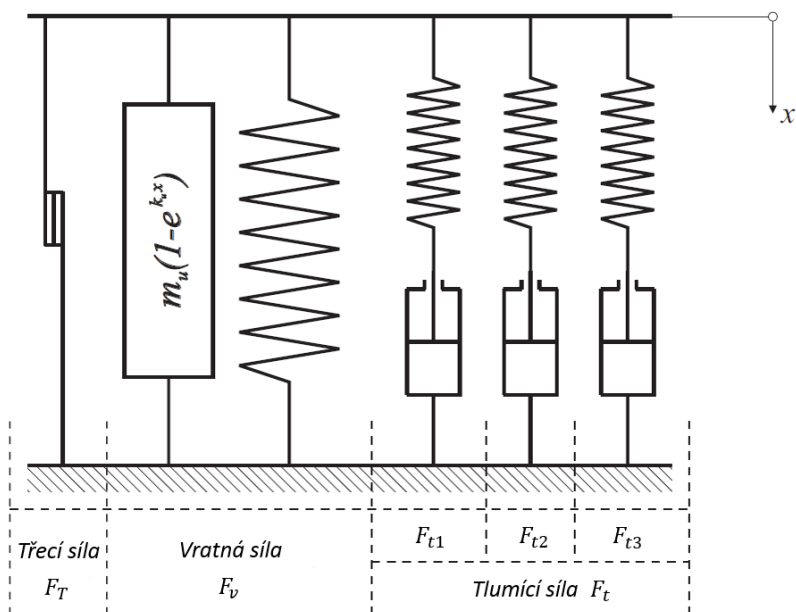
Síla smykového tření potom je

$$F_T = f_T F_{vt} \quad (4.10)$$

4.1.3. Celkový simulační model PU pěny

Celková síla modelu PU pěny (viz obr. 4.9) s pomocí výše uvedených vztahů pro vratnou, tlumicí a třecí sílu je

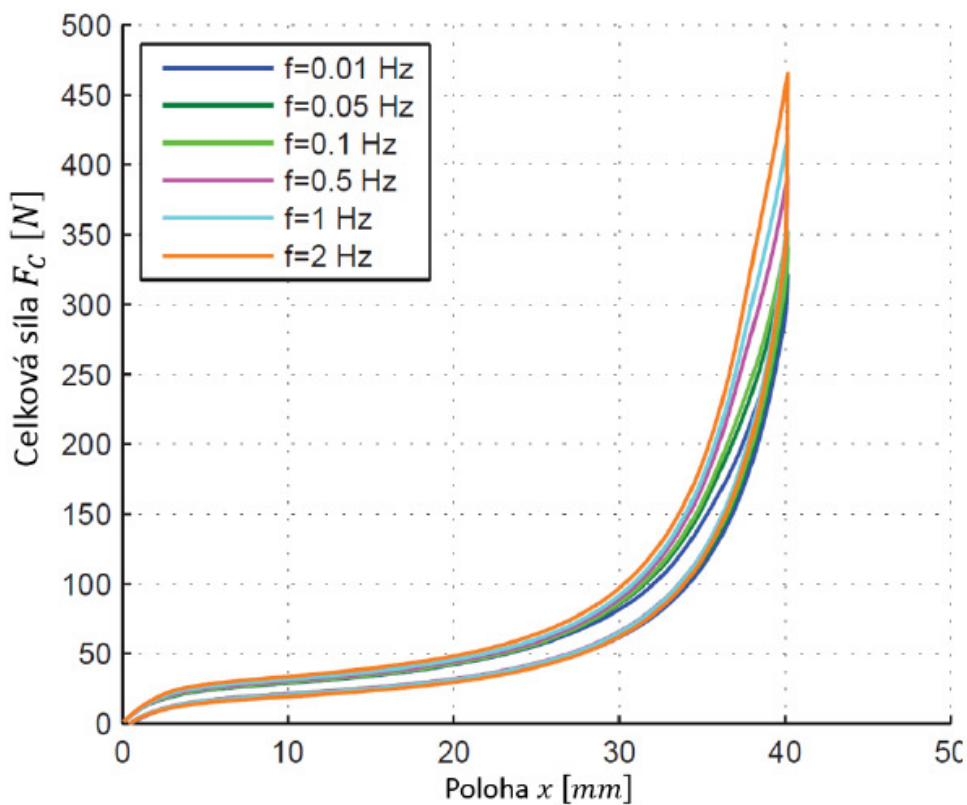
$$F_C = F_{vt} + F_T \quad (4.11)$$



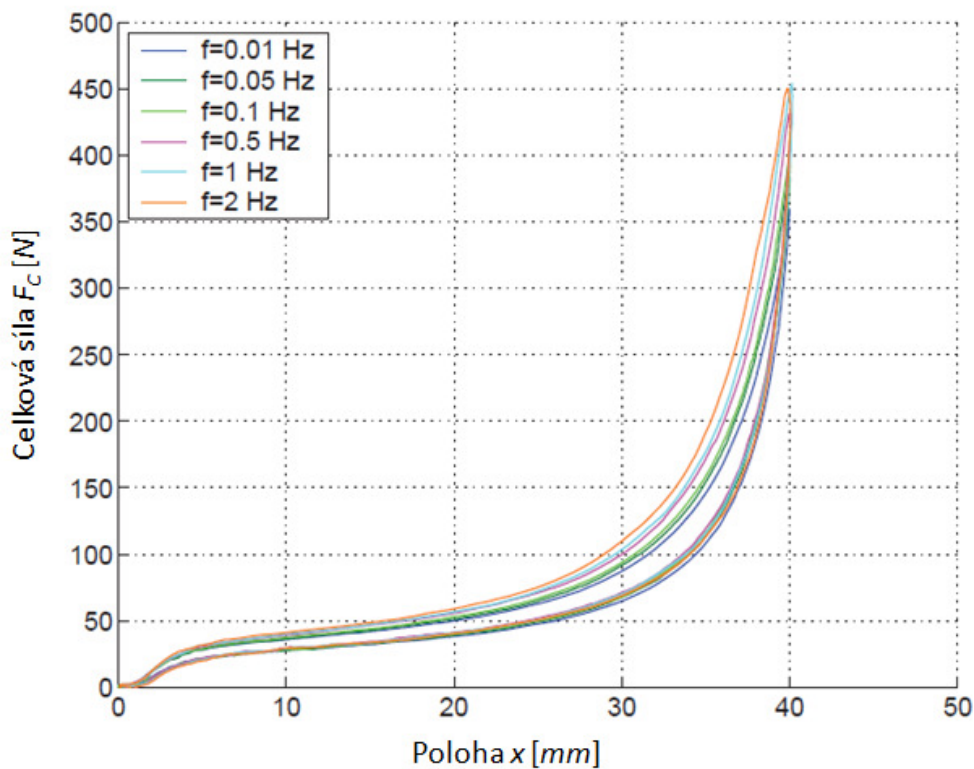
Obr. 4.9 – Schéma modelu PU pěny pro počet tlumících členů $m = 3$ [3]

Simulovaná složka síly	Parametr	Fyzikální jednotka	Hodnota		
F_u	m_u	[N]	20		
	k_u	[N/m]	500		
F_p	S_p	[m ²]	0.03		
	p_p	[Pa]	100		
	h_p	[m]	0.052		
	n_p	[1]	3		
F_{ti}			$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$
	S_{0i}	[m ²]	0.2	0.029	0.00013
	p_{0i}	[Pa]	100		
	h_i	[m]	0.05		
	n_{0i}	[1]	1.5	2.2	6
	c_i	[-]	4	90	95
	n_i	[1]	1/7	1/4	1/4
F_T	f_{T0}	[1]	0.028		
	k_1	[s/m]	$2 \cdot 10^4$		
	k_2	[-]	0.39		
	k_3	[1]	1.2		

Tab. 4.1 – Parametry modelu PU pěny pro simulaci [3]



Obr. 4.10 – Charakteristiky PU pěny (matematický model) [3]



Obr. 4.11 – Charakteristiky PU pěny (experiment) [3]



5. NÁVRH KONSTRUKČNÍCH VARIANT ZKUŠEBNÍHO ZAŘÍZENÍ

Důležitými znaky pro posouzení vlastností soustav těles z hlediska kmitání je vybuzení těchto soustav vnějším prostředím a zjištění jejich amplitudových frekvenčních charakteristik. V některých oblastech budících frekvencí mají soustavy schopnost vibrace zesilovat, v jiných oblastech zeslabovat a tyto vlastnosti záleží na vzájemné kombinaci hmotnosti, tuhosti a útlumu těles, které soustava obsahuje.

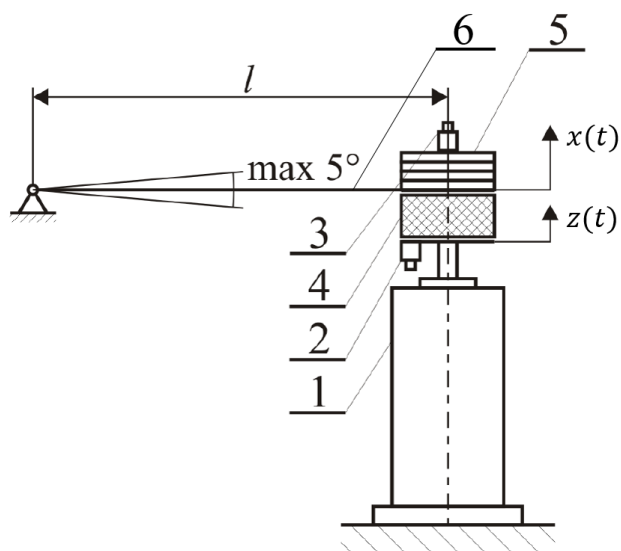
V technické praxi je často nutné účinky vibrací přenášených např. z pohonů na další části stroje omezovat. Tomu se v praxi zabránuje tak, že se mezi hmotu m a zdroje buzení vloží takový prostředek, který vibrace hmoty m v určité oblasti frekvencí sníží. Takovými prostředky např. u automobilů mohou být pružiny a tlumiče, nebo také gumokovová podložka (tzv. silentblok) na tlumení chvění v pračkách. Ovšem vhodnost použití těchto prostředků je potřeba ověřovat experimentálně stanovováním již zmíněných amplitudových frekvenčních charakteristik.

Hlavním cílem této diplomové práce je navrhnout a zkonstruovat takové zařízení, které bude schopno tyto charakteristiky stanovit. Mezi nejdůležitějšími požadavky na konstrukci byla **minimalizace pasivních odporů**, které by měly nepříznivý vliv na výsledky, dále potom **nízká hmotnost** a **jednoduchost** zařízení a **efektivní zvyšování** (příp. **snižování**) **váhy zatěžující hmoty**.

V následujícím textu bude ukázán návrh dvou variant zkušebního zařízení (s rotačním ramenem a s lineárním vedením), jejich vzájemné porovnání a nakonec výběr a zrealizování té nejvhodnější varianty. [7]

5.1. Zkušební zařízení s rotačním ramenem

Jako první uvažovaná varianta bylo zkušebního zařízení s rotačním ramenem. Toto zařízení bylo uvažováno s dostatečně dlouhým ramenem o určité délce l (pozice č. 6 na obr. 5.1), které by bylo uchyceno na otáčivém čepu s kuličkovými ložisky a jeho úhlová výchylka byla na základě funkce kinematického buzení $z(t)$ v rozmezí maximálně $\pm 2.5^\circ$. Na tomto ramenu by byly uchyceny ocelové desky, které by vzorek stlačovaly a daly by se jednoduše přidávat nebo odebírat. Schéma a popis jednotlivých dílů varianty s rotačním ramenem je možno vidět na obr. 5.1. [7]

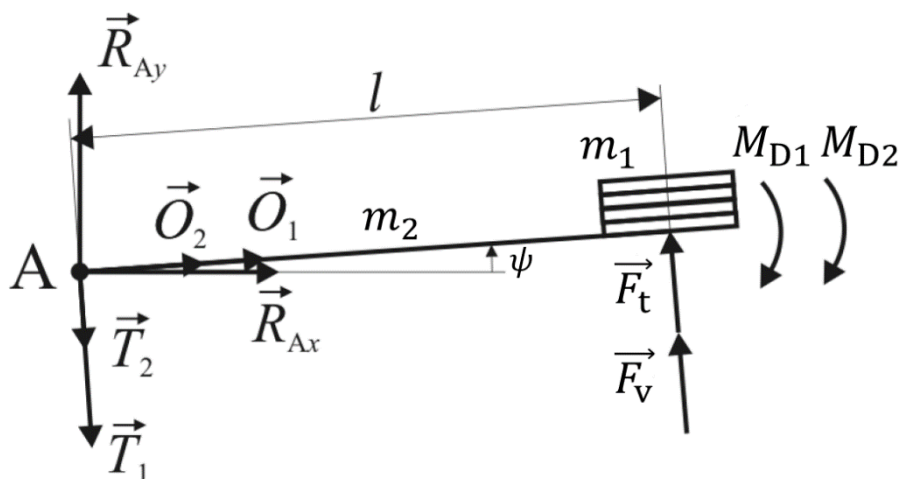


Obr. 5.1 – Zkušební zařízení s rotačním ramenem [7]

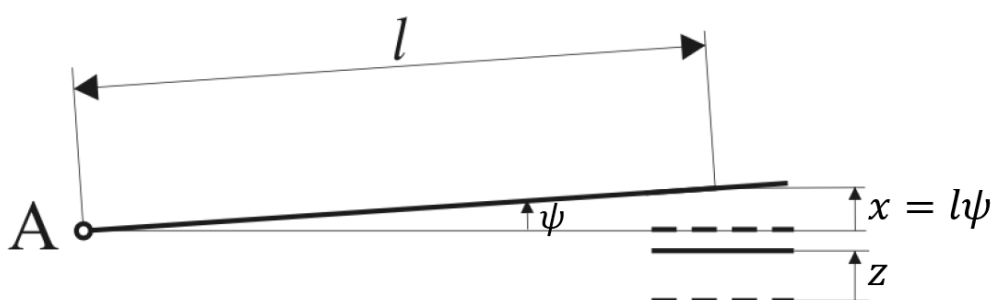
1 – budící válec, 2 – snímač vstupního zrychlení, 3 – snímač výstupního zrychlení, 4 – vzorek,
5 – závaží, 6 – rotační rameno

V následujícím textu bude uveden analytický výpočet amplitudové frekvenční charakteristiky varianty s rotačním ramenem s lineárním materiálovým modelem.

Pohybovou rovnici získáme použitím uvolňovací metody, kde rotační rameno nakreslíme samostatně a v místě vazeb s ostatními tělesy zavedeme síly, kterými tato tělesa na rameno působí (viz obr. 5.2). V místě rotačního uložení ramena zavedeme tedy reakce $\vec{R}_{Ax}$ a $\vec{R}_{Ay}$. Skrze zkoušený vzorek materiálu se z buzené základny přenáší na rameno síla od pružiny F_v a tlumiče F_t . Protože se rameno i závaží pohybují zrychleným rotačním pohybem, zavedeme síly dynamické. D'Alembertovu sílu příslušející závaží rozložíme na složku odstředivou a tečnou ($\vec{O}_1, \vec{T}_1$) a taktéž v případě hmoty ramene ($\vec{O}_2, \vec{T}_2$). Celkový dynamický moment rotující zátěže je dán součtem dílčích momentů M_{D1} od závaží, které budeme pro zjednodušení považovat za hmotný bod a M_{D2} od rotačního ramena. Obě hmoty se pohybují se stejným úhlovým zrychlením $\ddot{\psi}$. Moment setrvačnosti ramena k bodu A označme J_{A2} . K němu přičteme moment setrvačnosti závaží uvažovaný k bodu A, kam musíme též umístit tečné složky D'Alembertových sil $\vec{T}_1$ a $\vec{T}_2$. Sestavíme dvě složkové a jednu momentovou pohybovou rovnici (např. k bodu A). [7]



Obr. 5.2 – Uvolnění ramena a závaží s rotačním pohybem [7]



Obr. 5.3 – Schéma pro odvození kinematických vztahů [7]

$$x: R_{Ax} + (O_1 + O_2) \cos \psi + (T_1 + T_2) \sin \psi - F_t \sin \psi - F_v \sin \psi = 0 \quad (5.1)$$

$$y: R_{Ay} + (O_1 + O_2) \sin \psi - (T_1 + T_2) \cos \psi + F_t \cos \psi + F_v \cos \psi = 0 \quad (5.2)$$

$$M_A: F_t l + F_v l - M_{D1} - M_{D2} = 0 \quad (5.3)$$

Poznamenejme, že klidová zátěž pružiny a tlumiče se skládá z hmotnosti závaží m_1 a částečně hmotnosti ramene m_2 . Aby výsledky získané výpočtem varianty posuvné a rotační byly porovnatelné, musí být splněna podmínka rovnosti statických momentů

$$m = m_1 + \frac{m_2}{2} \quad (5.4)$$

Dále specifikujme odstředivé a tečné složky D'Alembertových sil

$$O_1 = l m_1 \dot{\psi}^2 \quad (5.5)$$

$$T_1 = l m_1 \ddot{\psi} \quad (5.6)$$

$$O_2 = \frac{l}{2} m_2 \dot{\psi}^2 \quad (5.7)$$

$$T_2 = \frac{l}{2} m_2 \ddot{\psi} \quad (5.8)$$



a dynamické momenty závaží a ramene k bodu A jsou

$$M_{D1} = l^2 m_1 \ddot{\psi} \quad (5.9)$$

$$M_{D2} = J_{A2} \ddot{\psi} \quad (5.10)$$

Oba momenty je možno sečíst a moment setrvačnosti ramene se závažím označit J_A

$$M_D = M_{D1} + M_{D2} = (m_1 l^2 + J_{A2}) \ddot{\psi} = J_A \ddot{\psi} \quad (5.11)$$

Deformace pružiny je podle obr. 5.3 dána rozdílem délek x a $l\psi$. Síla v pružině je potom součinem tuhosti a deformace pružiny

$$F_v = k(z - x) = k[z_a \sin(\omega t) - l\psi], \quad (5.12)$$

kde pro připomenutí z_a je *amplituda výchylky základu*

a síla tlumiče

$$F_t = b(\dot{z} - \dot{x}) = b[z_a \omega \cos(\omega t) - l\dot{\psi}] \quad (5.13)$$

Pozn.: k získání hlavní pohybové rovnice postačuje pouze momentová rovnice (5.3), do které dosadíme doplňující vztahy. Rovnice (5.1) a (5.2) by sloužily k eventuálnímu výpočtu reakcí R_{AX} a R_{Ay}

Tedy po dosazení do momentové rovnice (5.3) dostaneme

$$kl[z_a \sin(\omega t) - l\psi] + bl[z_a \omega \cos(\omega t) - l\dot{\psi}] - J_A \ddot{\psi} = 0 \quad (5.14)$$

a po úpravě

$$\ddot{\psi} + \frac{bl^2}{J_A} \dot{\psi} + \frac{kl^2}{J_A} \psi = \frac{z_a kl}{J_A} \sin(\omega t) + \frac{z_a bl \omega}{J_A} \cos(\omega t) \quad (5.15)$$

Abychom mohli sestavit rovnici amplitudové frekvenční charakteristiky, je nutné zjistit amplitudy ustálených vynucených kmitů soustavy. Pro lepší názornost převedeme hlavní pohybovou rovnici (5.15) zapsanou pro členy ψ do tvaru členů x pomocí vztahů $x = l\psi$, resp. $\dot{x} = l\dot{\psi}$, $\ddot{x} = l\ddot{\psi}$. [7]

$$\ddot{x} + \frac{bl^2}{J_A} \dot{x} + \frac{kl^2}{J_A} x = \frac{z_a kl^2}{J_A} \sin(\omega t) + \frac{z_a bl^2 \omega}{J_A} \cos(\omega t) \quad (5.16)$$

Jelikož je kmitající základna buzená harmonickým signálem (2.64), bude zátěž kmitat také harmonicky se stejnou frekvencí, tedy synchronně, ale s odlišnou amplitudou x_a a se zpožděním φ . Můžeme tedy předpokládat průběh polohy $x(t)$ ve tvaru (5.17) s první a druhou derivací (5.18) a (5.19). Tyto rovnice přepíšeme do tvaru obsahujícího kladnou amplitudu a funkci *sinus*. [7]

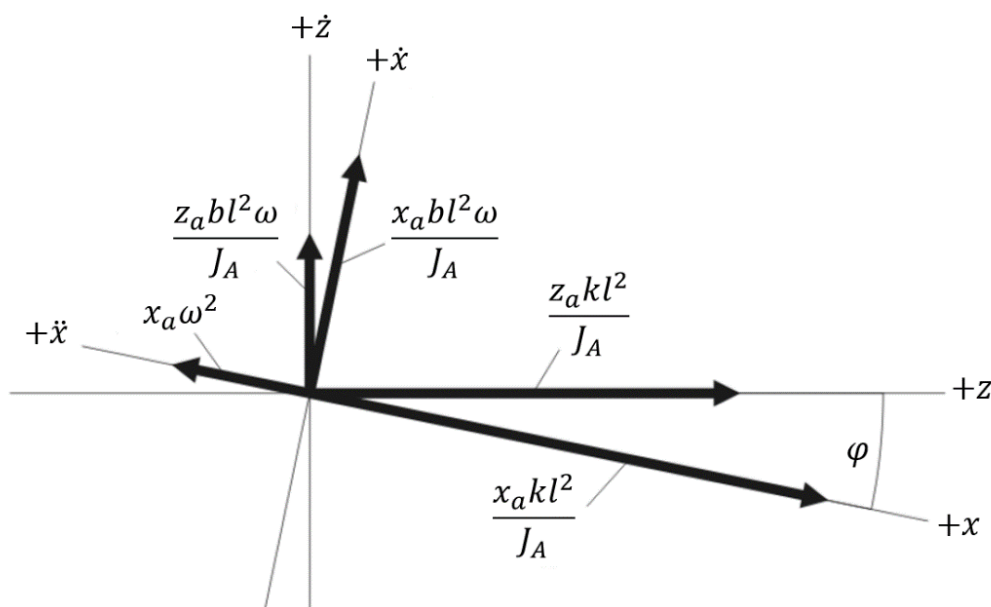
$$x(t) = x_a \sin(\omega t - \varphi) \quad (5.17)$$

$$\dot{x}(t) = x_a \omega \cos(\omega t - \varphi) = x_a \omega \sin\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \quad (5.18)$$

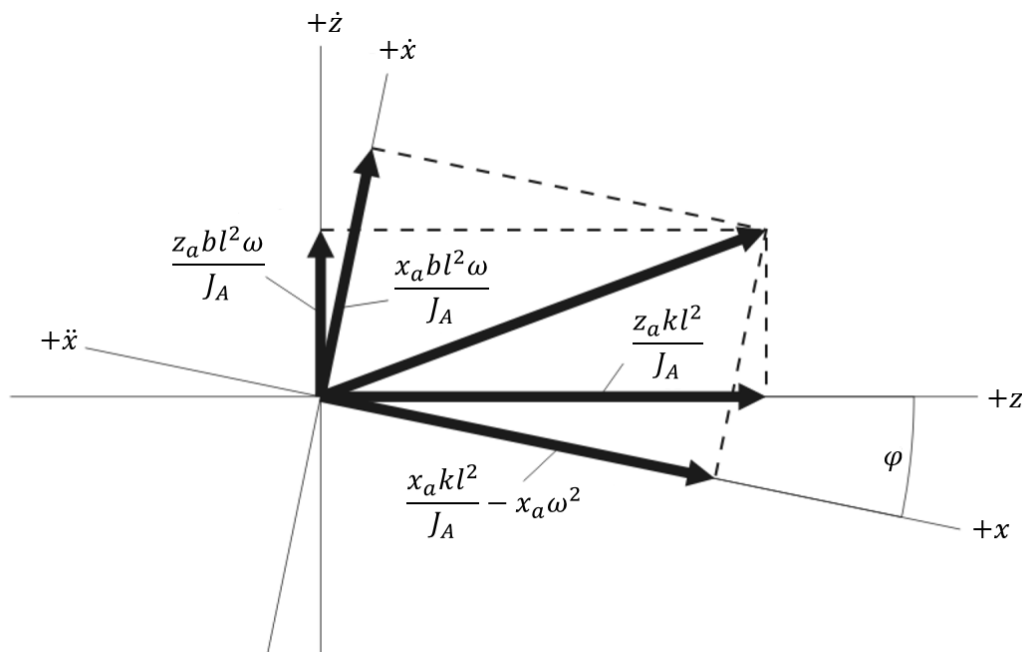
$$\ddot{x}(t) = -x_a \omega^2 \sin(\omega t) = x_a \omega^2 \sin(\omega t - \varphi + \pi) \quad (5.19)$$

Tyto poslední tři vztahy dosadíme do rovnice (5.16) a dostaneme

$$\begin{aligned} x_a \omega^2 \sin(\omega t - \varphi + \pi) + \frac{bl^2 x_a \omega}{J_A} \sin\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{kl^2 x_a}{J_A} \sin(\omega t - \varphi) = \\ = \frac{z_a kl^2}{J_A} \sin(\omega t) + \frac{z_a bl^2 \omega}{J_A} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned} \quad (5.20)$$



Obr. 5.4 – Fázorový diagram [7]



Obr. 5.5 – Sčítání fázorů [7]

Poté s použitím fázorového diagramu na obr. 5.4, resp. obr. 5.5 obdržíme rovnici

$$\left(\frac{x_a k l^2}{J_A} - x_a \omega^2\right)^2 + \left(\frac{x_a b l^2 \omega}{J_A}\right)^2 = \left(\frac{z_a k l^2}{J_A}\right)^2 + \left(\frac{z_a b l^2 \omega}{J_A}\right)^2, \quad (5.21)$$

v níž pro jednoduchost zavedeme označení

$$k_r = \frac{k l^2}{J_A} \quad (5.22)$$

$$b_r = \frac{b l^2}{J_A} \quad (5.22)$$

Na levé i pravé straně rovnice (5.21) vytkneme amplitudy z_a a x_a

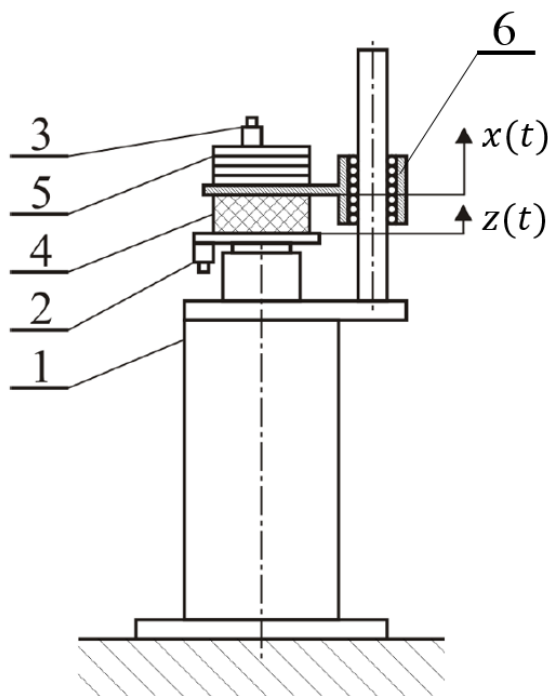
$$x_a^2 [(k_r - \omega^2)^2 + (b_r \omega)^2] = z_a^2 [k_r^2 + (b_r \omega)^2] \quad (5.23)$$

a dostaneme přenosovou funkci pro variantu s rotačním ramenem

$$\xi = \frac{x_a}{z_a} = \sqrt{\frac{k_r^2 + (b_r \omega)^2}{(k_r - \omega^2)^2 + (b_r \omega)^2}} \quad (5.24)$$

5.2 Zkušební zařízení s lineárním vedením

Druhou konstrukční variantou je zkušební zařízení s lineárním vedením. Toto zařízení bylo uvažováno s kuličkovým lineárním vozíkem (pozice č. 6 na obr. 5.6), ke kterému by byla připevněna nosná deska, na níž by se umísťovaly zatěžující desky. Tento vozík by na základě kinematického buzení základny $z(t)$ konal přímočarý vertikální kmitavý pohyb v ocelové kolejnici a spočíval by na zkoumaném vzorku. Schéma a popis jednotlivých dílů varianty s lineárním vedením je možno vidět na obr. 5.6. [7]



Obr. 5.6 – Zkušební zařízení s lineárním vedením [7]

1 – budicí válec, 2 – snímač vstupního zrychlení, 3 – snímač výstupního zrychlení, 4 – vzorek,
5 – závaží, 6 – lineární vedení

Analytický výpočet amplitudové frekvenční charakteristiky varianty s lineárním vedením je totožný s postupem uvedeným v kap. 2.4 a vede na vztah (2.76)

$$\xi = \frac{x_a}{z_a} = \frac{\sqrt{1 + (2\zeta\eta)^2}}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2\zeta\eta)^2}}$$

Pro závislost přenosové funkce na frekvenci přepíšeme pomocí již známých vztahů (2.4), (2.13), (2.14) a (2.42) do tvaru

$$\xi = \frac{x_a}{z_a} = \frac{\sqrt{\left(\frac{k}{m}\right)^2 + \left(\frac{b\omega}{m}\right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{b\omega}{m}\right)^2}} \quad (5.25)$$



5.3 Porovnání a výběr vhodné varianty

Díky kuličkovým ložiskům u varianty s rotačním ramenem by se zcela eliminoval vliv rušivých třecích sil a celková konstrukce zařízení by byla jednoduchá. Ovšem tato varianta sebou také nese nevýhody a to konkrétně nepříznivý vliv momentu setrvačnosti rotačního ramene J_{A2} , který by jistě znehodnocoval výsledky experimentu. Tento vliv by jistě šel do jisté míry minimalizovat v podobě použití lehkého materiálu a vhodně navrženého průřezu ramena (ovšem při zajištění dostatečné tuhosti ramena), ale i tak by se minimálně rušivý účinek projevoval jak je vidět na *obr. 5.7*. Posun rezonančního vrcholu oproti variantě s lineárním vedením (která je uvažována bez pasivních odporů) je způsoben momentem setrvačnosti rotačního ramena a závaží.

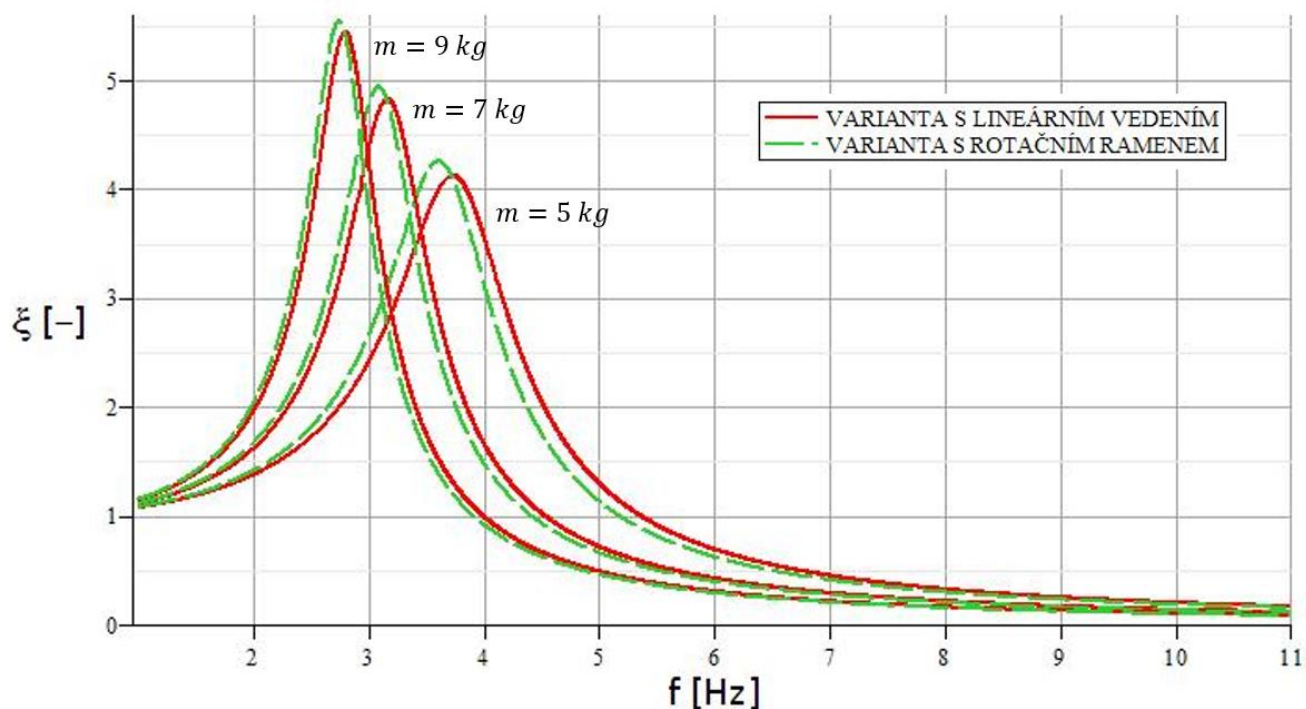
Zařízení s lineárním vedením vyžaduje o málo složitější konstrukci oproti variantě s rotačním ramenem, ale nepříznivý vliv v podobě momentu setrvačnosti zde zcela odpadá. Také má velkou výhodu menšího zástavbového prostoru a lepší mobilitu. A jelikož by byl lineární vozík uvažován s kuličkovými oběžnými drahami s dostatečným mazáním, pasivní odpory ve vedení by byly zcela zanedbatelné, čehož jsme schopni dosáhnout.

Na základě pečlivého posouzení výhod a nevýhod obou variant zkušebního zařízení bylo realizováno **zkušební zařízení s lineárním vedením**, které je konstrukčně popsáno v následující podkapitole.

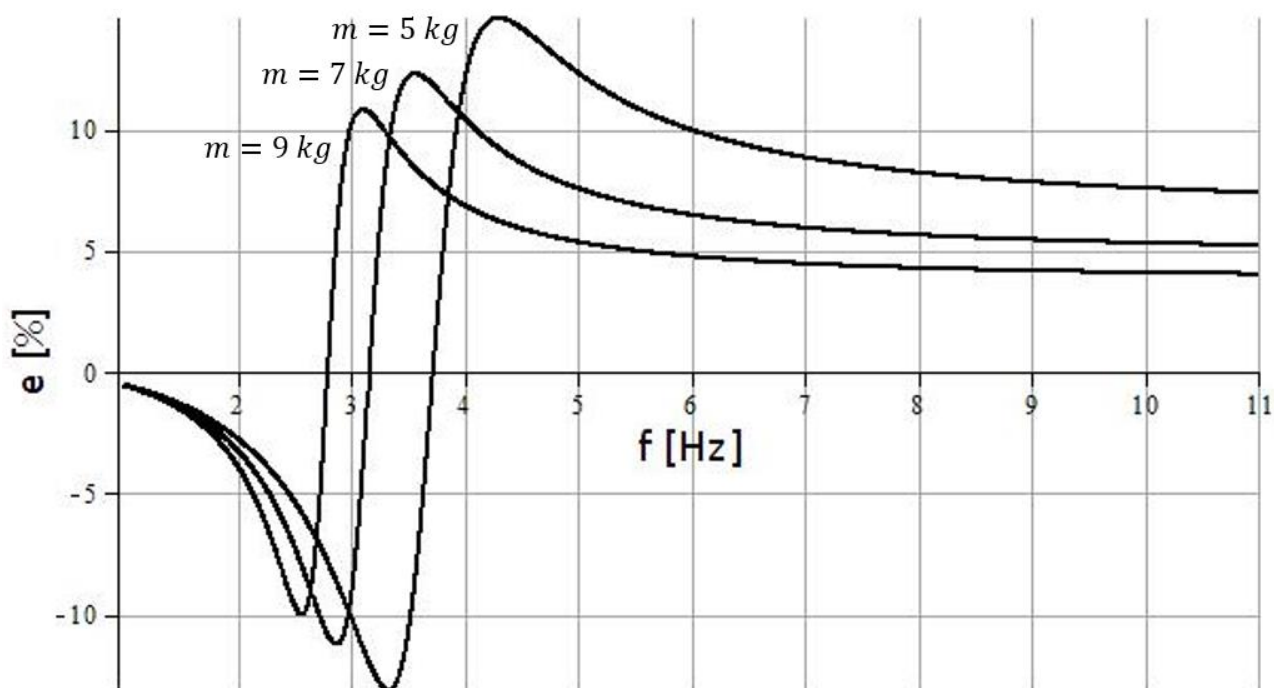
Na následujícím *obr. 5.7* jsou zobrazeny amplitudové frekvenční charakteristiky obou variant pro tři vybrané zatěžující hmotnosti, kde je vidět s pomocí definované chybové funkce (5.26) na *obr. 5.8*, že se snižující zatěžující hmotností se rozdíl varianty s rotačním ramenem od varianty s lineárním vedením zvyšuje.

Chybová funkce

$$e = \frac{\xi^{LIN} - \xi^{ROT}}{\xi^{LIN}} \cdot 100\% \quad (5.26)$$



Obr. 5.7 – Amplitudové frekvenční charakteristiky obou variant pro daná zatížení



Obr. 5.8 – Chybová funkce e pro daná zatížení

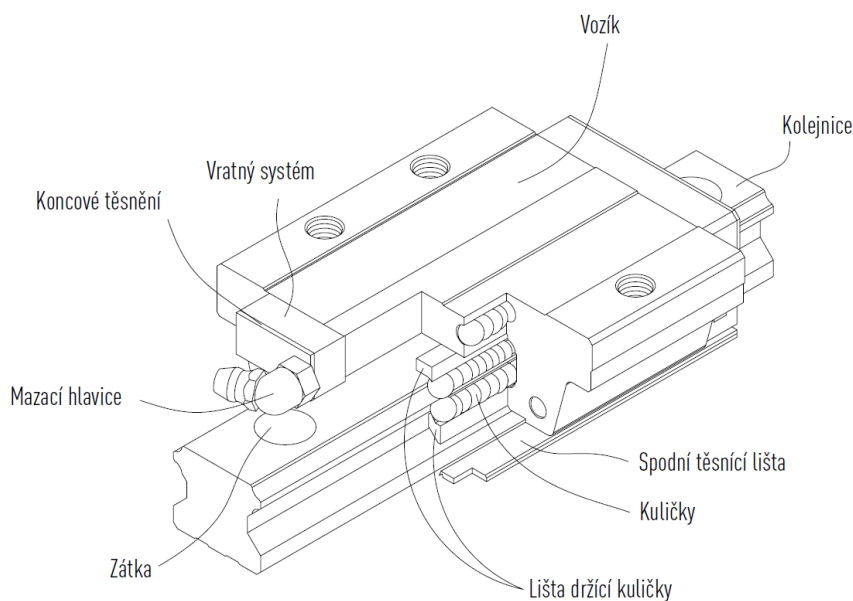
Výpočty byly provedeny pro tyto parametry:

$$m = 5, 7 \text{ a } 9 \text{ kg}, k = 2837 \text{ N/m}, b = 30 \text{ Ns/m}, l = 0.75 \text{ m}, J_{A2} = 0.2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

5.4 Konstrukce zkušebního zařízení s lineárním vedením

Celá konstrukce experimentálního zařízení s lineárním vedením byla z velké části tvořena extrudovanými hliníkovými profily z důvodu relativně nízké ceny a malé hmotnosti.

Lineární vozík i s vodící kolejnicí o délce 300 mm byl objednáán u české firmy HIWIN. Podrobnější popis konstrukce lineárního vozíku je možno vidět na obr. 5.9. Tento typ lineárního vozíku se vyznačuje velmi nízkým koeficientem tření, který uvádí výrobce ve svém katalogu ($f_T = 0.002 - 0.004$). Proto byl také vybrán jako nejvhodnější dynamicky se pohybující člen, ve kterém je možno zanedbat pasivní odpory. Kolejnice i vozíkem byla přišroubována k vertikálnímu hliníkovému profilu, který byl pevně spojen s horizontálním hliníkovým profilem. K vozíku byl přišroubován nosný hliníkový profil, do kterého byla zasunuta a pevně spojena pomocí zinkových úhelníků obráběná hliníková nosná deska se závitovou tyčí. Tato závitová tyč tvořila středění jednotlivých závaží na hliníkové nosné desce a závaží byla zajišťována pomocí rychloupínací matice.



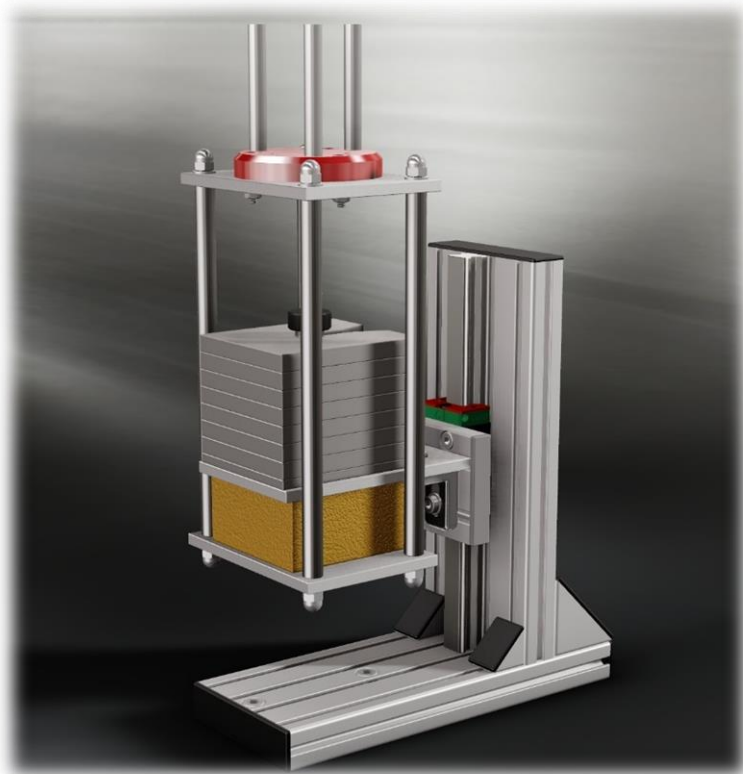
Obr. 5.9 – Lineární přírubový vozík HGW 25CC ZFH s kolejnicí [9]

Další částí experimentálního zařízení byla nosná klec, která byla v horní části pomocí šroubů s maticemi pevně spojena s budícím pístem stroje Instron E3000. Na spodní část nosné klece se umísťovaly zkušební vzorky PU pěny, které podpíraly hliníkovou nosnou desku se závažími.

Model 3D zařízení pomocí softwaru Inventor 2013 je možno vidět na následujících obr. 5.10 a 5.11. Výkresy sestav s výrobními výkresy jsou vloženy v příloze č. 3.



Obr. 5.10 – Zkušební zařízení s lineárním vedením – pohled z boku



Obr. 5.11 – Zkušební zařízení s lineárním vedením



6. NÁVRH BUDÍCÍ FUNKCE PRO KINEMATICKÉ BUZENÍ

Při volbě budící funkce bylo důležité, aby byla schopná vybudit požadovaný rozsah frekvencí a to konkrétně $1 - 11 \text{ Hz}$ při konstantní amplitudě zrychlení $0.1g$ a dále, aby změna frekvence byla natolik pomalá, aby se dostatečně rozvinula odezva v blízkosti rezonance a neprojevil se vliv přechodového stavu. Pro tento případ je vhodná funkce tzv. *modifikovaného rozmítaného sinu*, která byla převzata a důkladněji popsána, ovšem s jiným značením a rozšířena o posunutí veličiny času t o t_0 , z disertační práce Ing. M. Sivčáka, Ph.D. [4].

Obecný tvar budící funkce základu je podle [4]

$$z(t) = z_a(t) \sin(q(t)), \quad (6.1)$$

kde $z_a(t)$ je časově proměnná amplituda výchylky a pro téměř konstantní amplitudu zrychlení je třeba zvolit.

$$z_a(t) = \frac{Z_a}{t^{2(n-1)}} = Z_a t^{2(1-n)}, \quad (6.2)$$

a kde funkce $q(t)$ je definována jako

$$q(t) = ct^n \quad (6.3)$$

Po dosazení (6.2) a (6.3) do vztahu (6.1) dostaneme

$$z(t) = Z_a t^{2(1-n)} \sin(ct^n) \quad (6.4)$$

Derivací vztahu (6.3) dostaneme funkci pro úhlovou rychlost

$$\omega(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}(ct^n) = nct^{n-1} \quad (6.5)$$

Ze vztahu (6.5) je patrné, že úhlová rychlost v čase $t = 0$ je nulová, tomu ovšem neodpovídá náš případ rozsahu frekvencí ($1 - 11 \text{ Hz}$), kdy chceme v čase $t = 0$ dosáhnout frekvence 1 Hz . Proto modifikujme výše uvedené vztahy posunutím veličiny času t o t_0

$$z_a(t) = \frac{Z_a}{(t + t_0)^{2(n-1)}} = Z_a (t + t_0)^{2(1-n)} \quad (6.6)$$

$$q(t) = c(t + t_0)^n \quad (6.7)$$

$$\omega(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}[c(t + t_0)^n] = nc(t + t_0)^{n-1} \quad (6.8)$$



Pro $t = 0$ definujeme

$$\omega(0) = 2\pi f_0, \quad (6.9)$$

kde f_0 je počáteční frekvence.

A zároveň ze vztahu (6.8) dostaneme

$$\omega(0) = nct_0^{n-1} \quad (6.10)$$

Rovnice (6.9) a (6.10) dáme do rovnosti a vyjádříme t_0

$$t_0 = \left(\frac{2\pi f_0}{nc} \right)^{\frac{1}{n-1}} \quad (6.11)$$

Ze vztahu (6.8) je zřejmé, že pro zvolený parametr $n = 2$ bude úhlová frekvence růst lineárně ve zvoleném rozsahu frekvencí.

Výpočet konstanty c např. pro hodnotu konečné frekvence f_k a celkové doby trvání signálu T při $n = 2$ z rovnice (6.8) je

$$2\pi f_k = 2c \left(T + \frac{\pi f_0}{c} \right)$$

$$c = \pi \frac{(f_k - f_0)}{T} \quad (6.12)$$

První a druhou derivací podle času rovnice (6.4) dostaneme vztahy pro rychlost a zrychlení

$$\dot{z}(t) = \frac{2Z_a t}{t^{2n}} \sin(ct^n)(1 - n) + Z_a t^{1-n} cn \cdot \cos(ct^n) \quad (6.13)$$

$$\ddot{z}(t) = \frac{2Z_a}{t^{2n}} \sin(ct^n)(n^2 - n + 1) + \frac{3Z_a cn}{t^n} \cos(ct^n)(1 - n) - Z_a c^2 n^2 \cdot \sin(ct^n) \quad (6.14)$$

Z rovnice (6.14) je patrné, že vliv prvních dvou členů bude s rostoucím časem velice rychle klesat a pro $t \rightarrow \infty$ bude

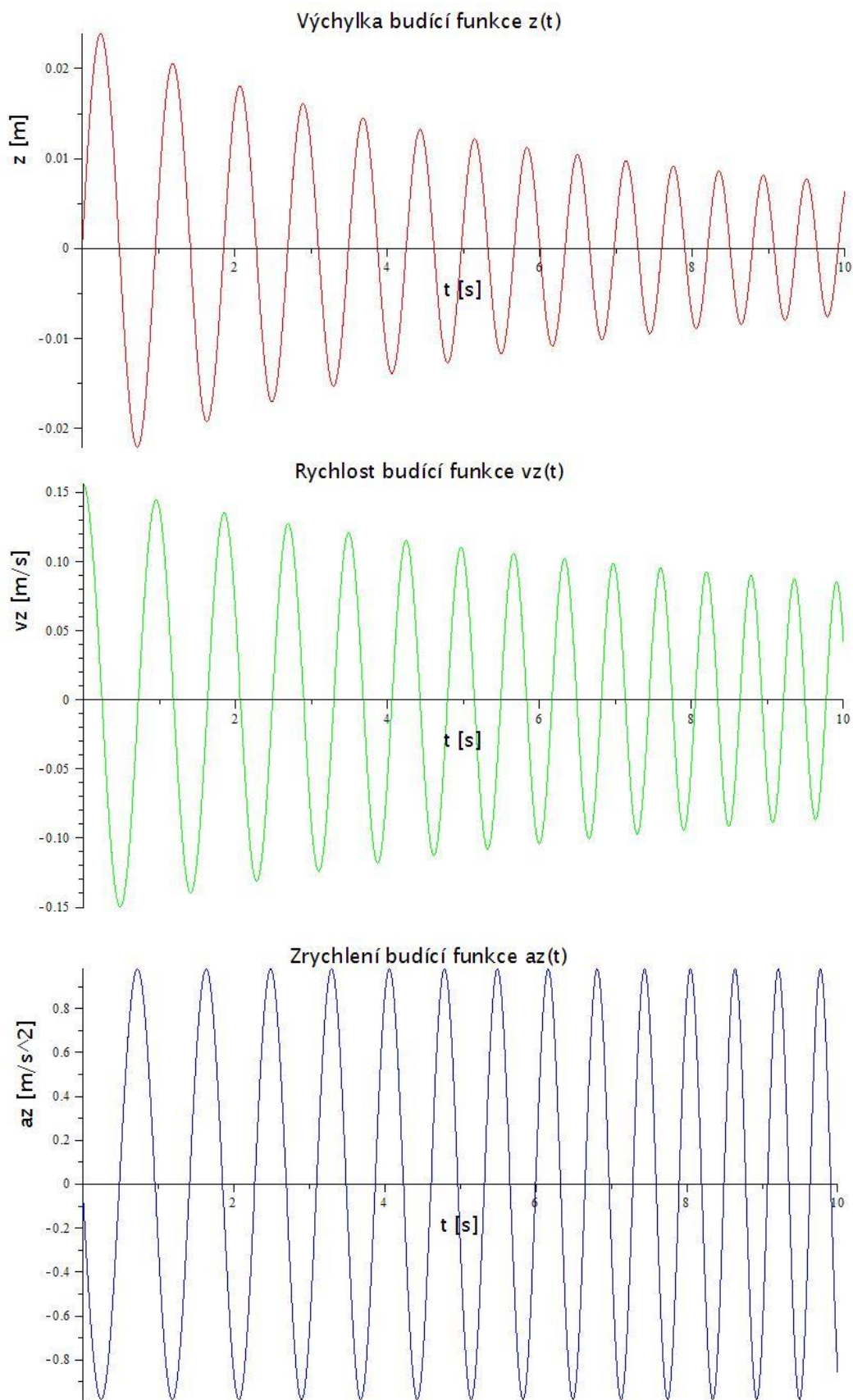
$$\ddot{z}(t) = -Z_a c^2 n^2 \cdot \sin(ct^n), \quad (6.15)$$

kde součin

$$Z_a c^2 n^2 = konst. \quad (6.16)$$

přibližně vyjadřuje konstantní amplitudu zrychlení a při konstantním zrychlení $0.1g$ bude konstanta Z_a

$$Z_a = \frac{0.1g}{c^2 n^2} \quad (6.17)$$



Obr. 6.1 – Modifikovaný rozmitaný sinus s téměř konstantní amplitudou zrychlení

7. NUMERICKÁ SIMULACE SOUSTAVY

Pro numerickou simulaci kmitající soustavy byl zvolen matematický software počítačové algebry Maple 14 z důvodu symbolického zápisu pro lepší přehled a orientaci.

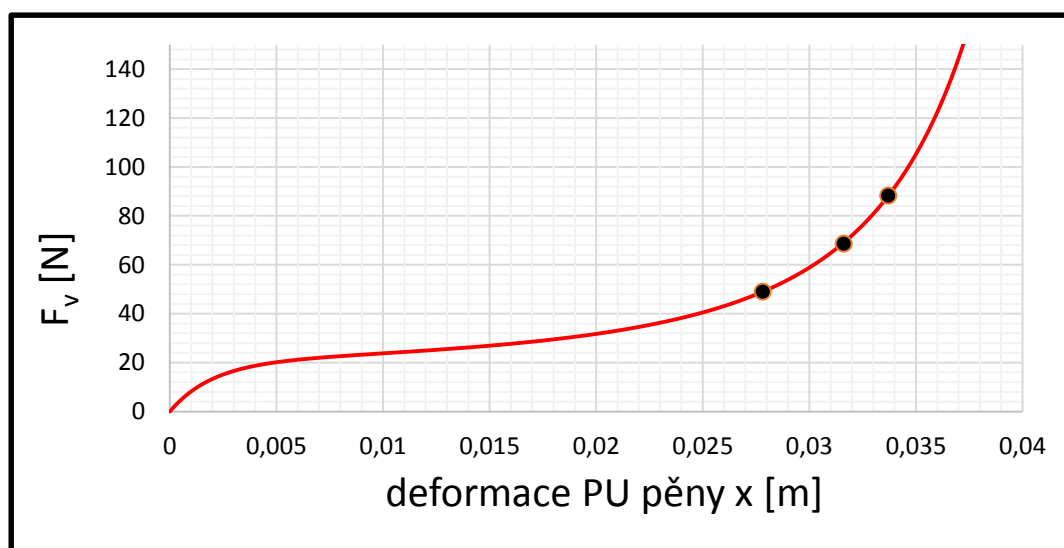
Veškeré numerické výpočty sestavených diferenciálních rovnic byly prováděny numerickou metodou Runge – Kutta – Fehlberg 4. – 5. řádu. V příloze č. 1 a 2 je k dispozici kompletní výpis programu pro řešení lineárního i nelineárního materiálového simulačního modelu.

Společnými parametry pro obě simulace byly:

- celková doba zatěžování $T = 240 \text{ s}$
- hmotnost závaží $m = (5; 7; 9) \text{ kg}$
- počáteční frekvence $f_0 = 1 \text{ Hz}$
- konečná frekvence $f_k = 11 \text{ Hz}$

V této práci budeme při experimentálním měření vyhodnocovat zrychlení jak budícího signálu, tak odezvy soustavy. Proto zde budou vykreslovány pouze zrychlení a pro názornost i výchylky odezev na kinematické buzení. Následně bude z těchto odezev vykresleno frekvenční spektrum pro získání amplitudové frekvenční charakteristiky.

Numerická simulace i samotný experiment byl proveden se závažími o hmotnosti 5, 7 a 9 kg. Na obr. 7.1 jsou vyznačeny body statické výchylky při zátěži těchto tří závaží, okolo kterých sledovaný hmotný bod kmitá. Tyto konkrétní hodnoty jsou zapsány v tab. 7.1.



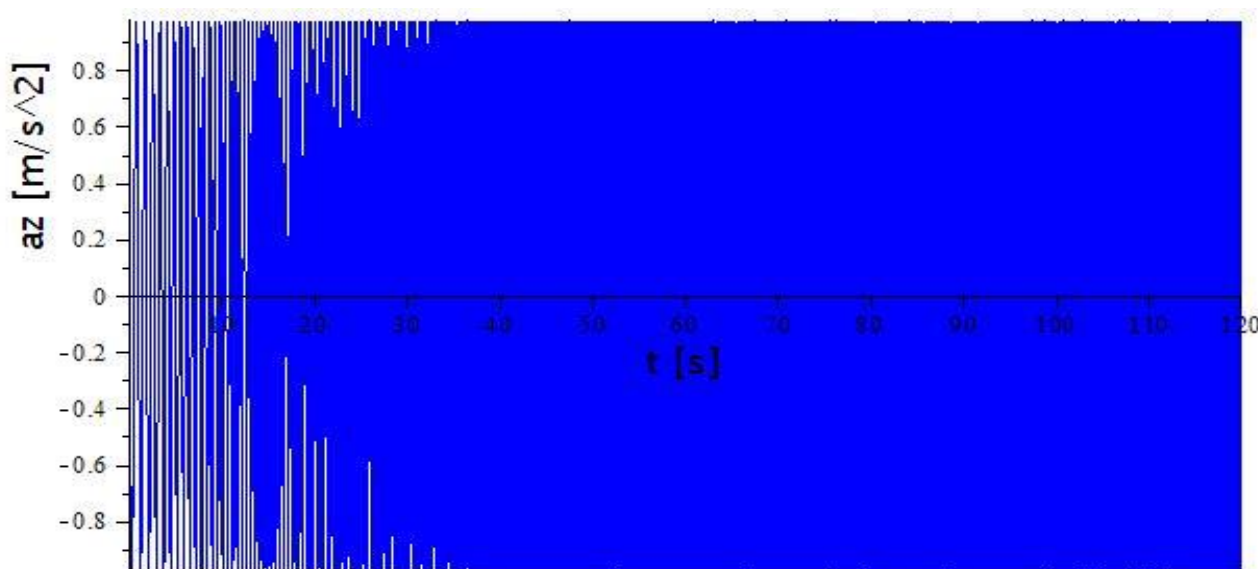
Obr. 7.1 – Charakteristika nelineární vratné síly PU pěny s vyznačenými body statické výchylky po zatížení ocelovými závažími



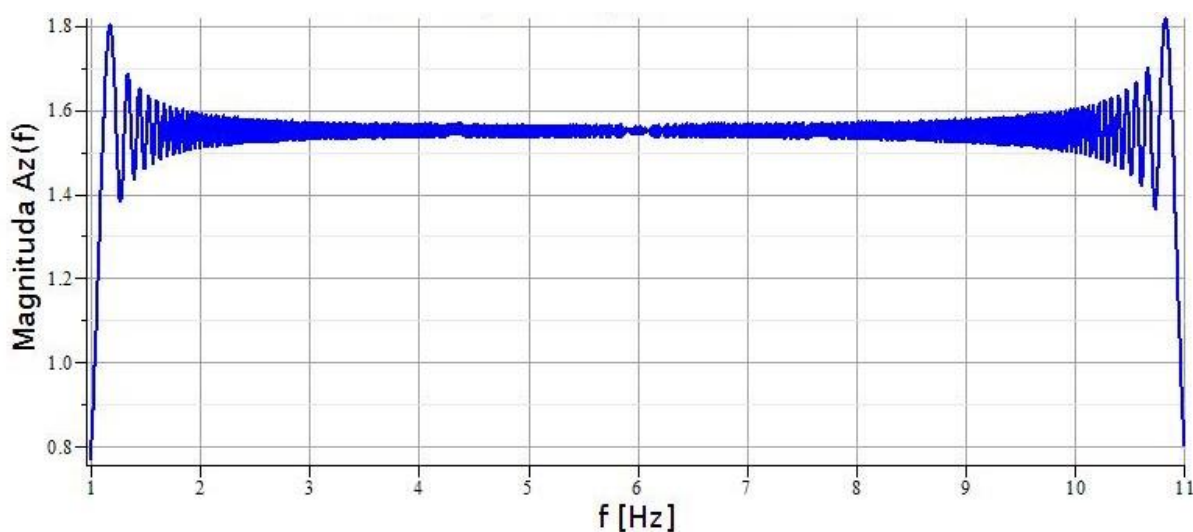
$m [kg]$	$F_v [N]$	$x [m]$
5	49,033	0,0278
7	68,647	0,0316
9	88,260	0,0337

Tab. 7.1 – Hodnoty vratné síly a deformace PU pěny v závislosti na daném zatížení

Pro ucelenost podmínek simulace si zde ještě jednou uvedeme rozmítaný sinus s téměř konstantní amplitudou zrychlení kinematického buzení, který byl použit při experimentu a také při numerické simulaci obou soustav (lineární i nelineární) a také jeho frekvenční spektrum (viz obr. 7.2 a 7.3). Více o frekvenčním spektru viz kapitola 7.1.2.



Obr. 7.2 – Rozmítaný sinus s téměř konstantní amplitudou zrychlení 0,1 g

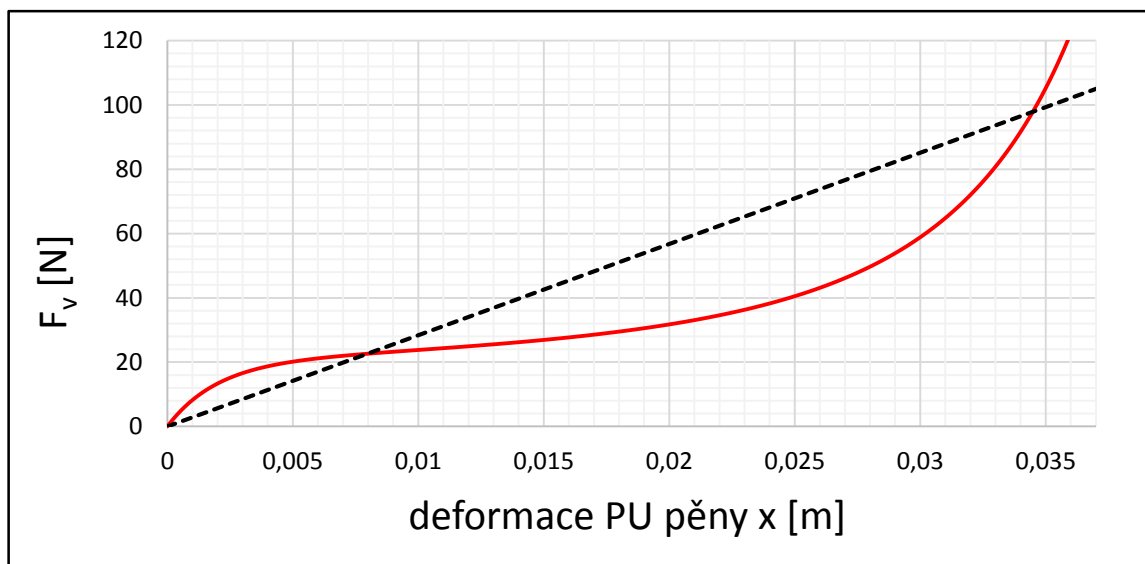


Obr. 7.3 – Frekvenční spektrum zrychlení budící funkce

7.1. Soustava s lineárním materiálovým modelem

Numerické řešení soustavy s lineárním materiálovým modelem bylo použito pro odladění počítačového zápisu, který následně sloužil k simulaci nelineárního materiálového modelu PU pěny (tj. postup od zjednodušené soustavy k té složitější). Z porovnání těchto dvou modelů byl zřejmý rozdíl v chování obou soustav při kinematickém buzení.

Danou charakteristiku nelineární vratné síly PU pěny jsme proložili přímkou za účelem získání tuhosti k pro lineární materiálový model. **V tomto případě se nejedná o linearizaci nelineární vratné síly PU pěny.** Takže konstanta tuhosti byla pro soustavu s lineárním materiálovým modelem zvolena $k = 2837 \text{ N/m}$ a konstanta tlumení byla zvolena na hodnotu $b = 30 \text{ N} \cdot \text{s/m}$.



Obr. 7.4 – Průběh síly lineárního a nelineárního materiálového modelu

Pro numerickou simulaci soustavy s lineárním materiálovým modelem byla sestavena následující diferenciální rovnice

$$m\ddot{x} + b(\dot{x} - \dot{z}) + k(x - z) = -mg, \quad (7.1)$$

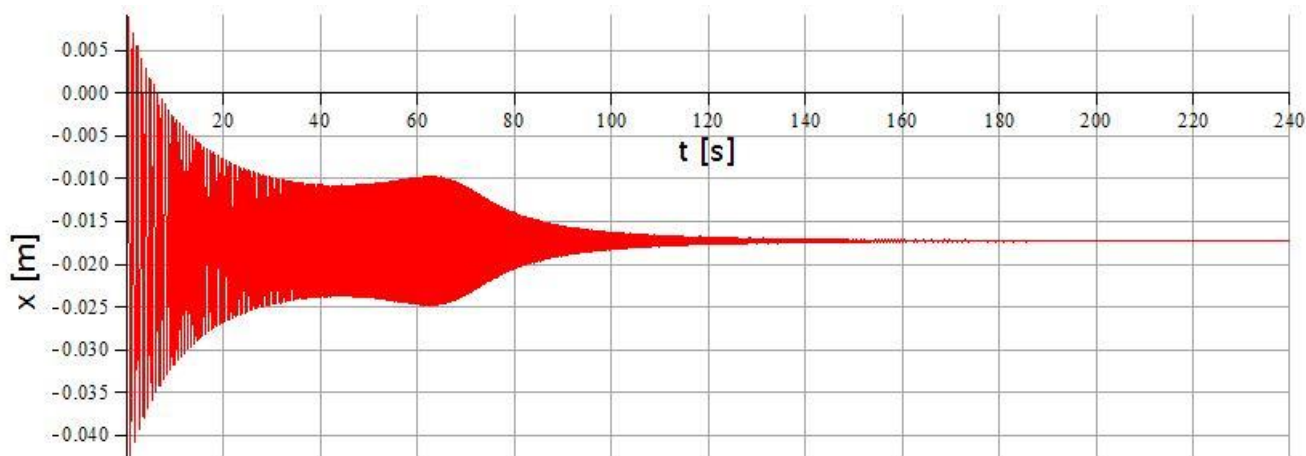
kde z je budící funkce a člen na pravé straně představuje gravitační sílu.

Statická výchylka (resp. počáteční podmínka pro výchylku x) je

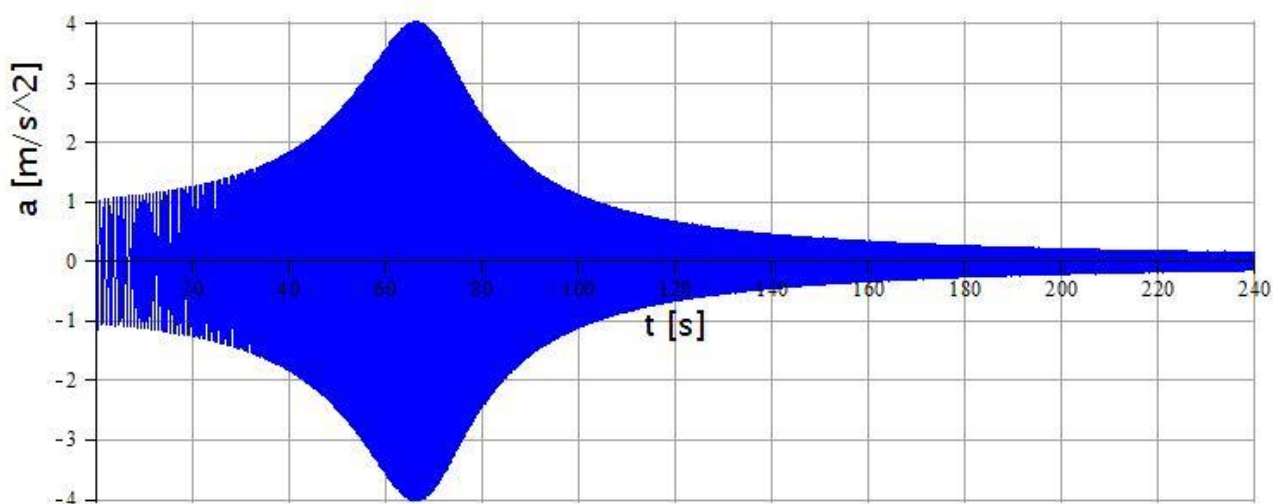
$$x_{stat} = \frac{mg}{k} \quad (7.2)$$

7.1.1. Odezva lineární soustavy na kinematické buzení

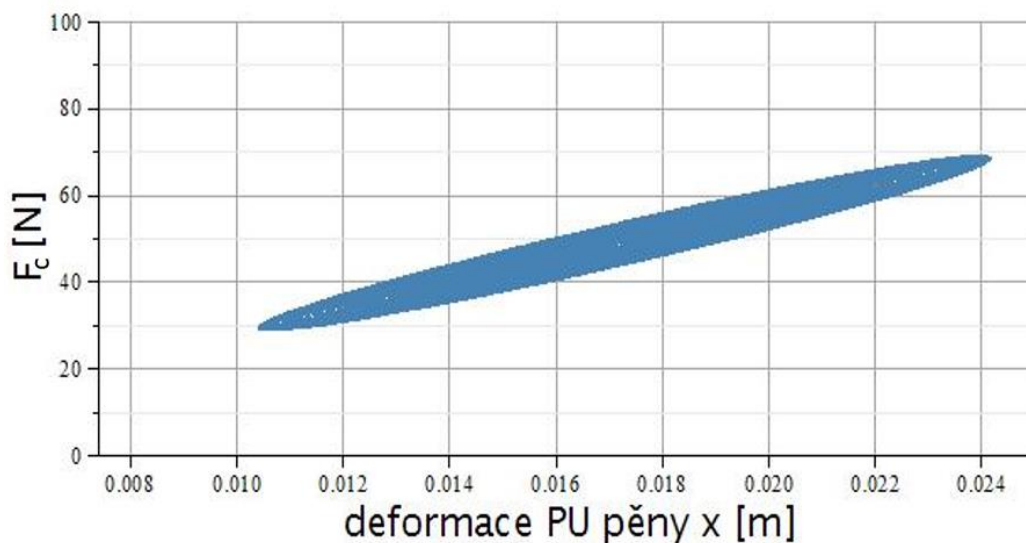
- vykreslení grafů odezvy a pracovní oblasti vratné a tlumící síly pro $m = 5 \text{ kg}$



Obr. 7.5 – Výchylka odezvy $x(t)$



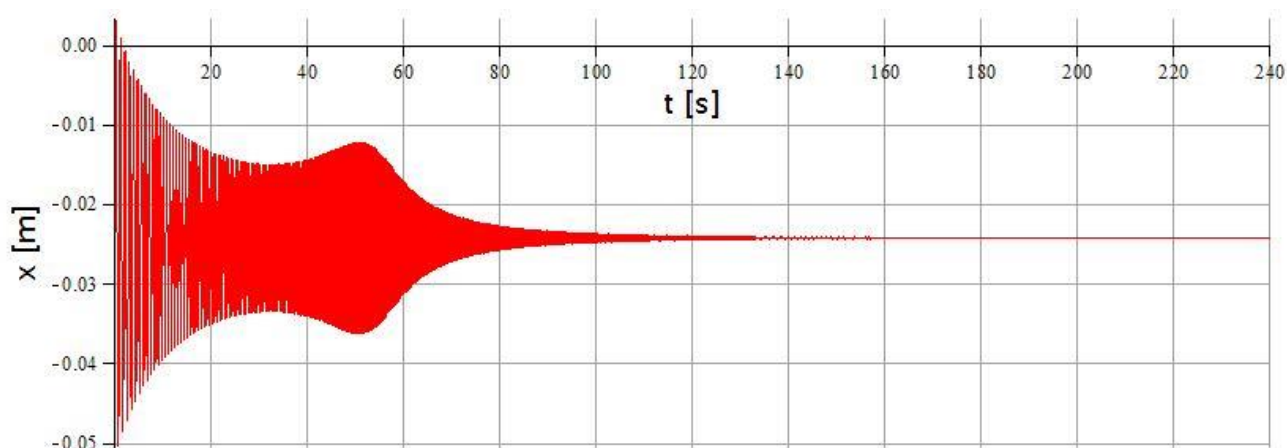
Obr. 7.6 – Zrychlení odezvy $a(t)$



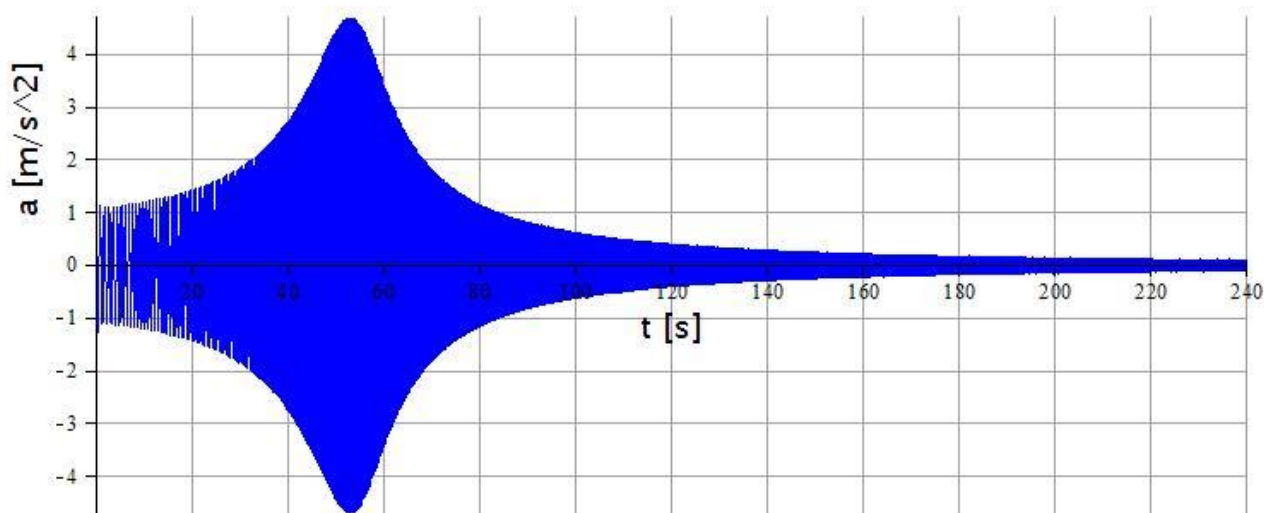
Obr. 7.7 – Celková síla (vratná + tlumící) lineárního materiálového modelu



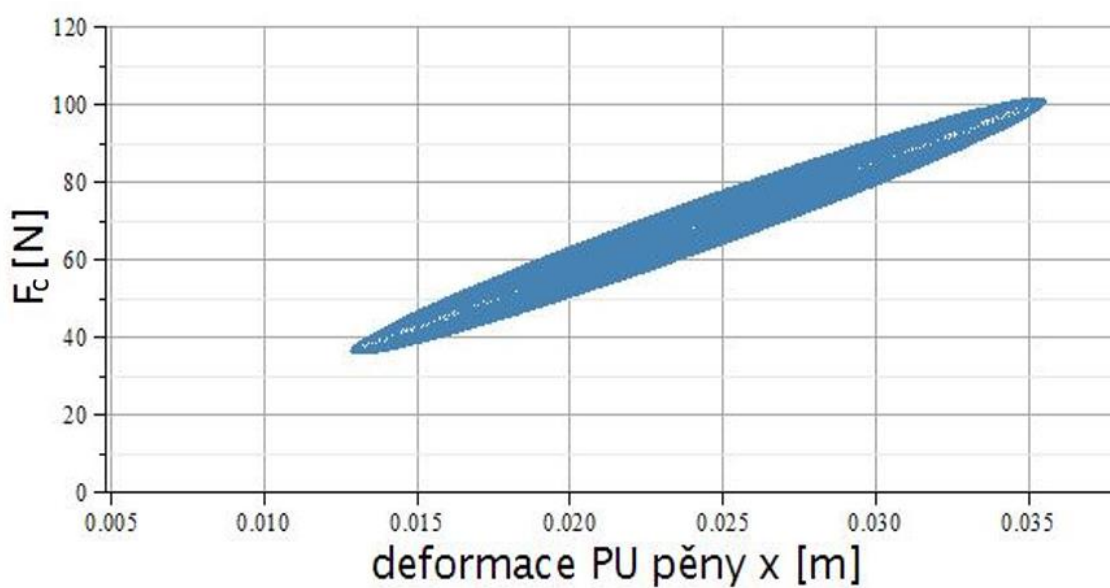
- vykreslení grafů odezvy a pracovní oblasti vratné a tlumící síly pro $m = 7 \text{ kg}$



Obr. 7.8 – Výchylka odezvy $x(t)$



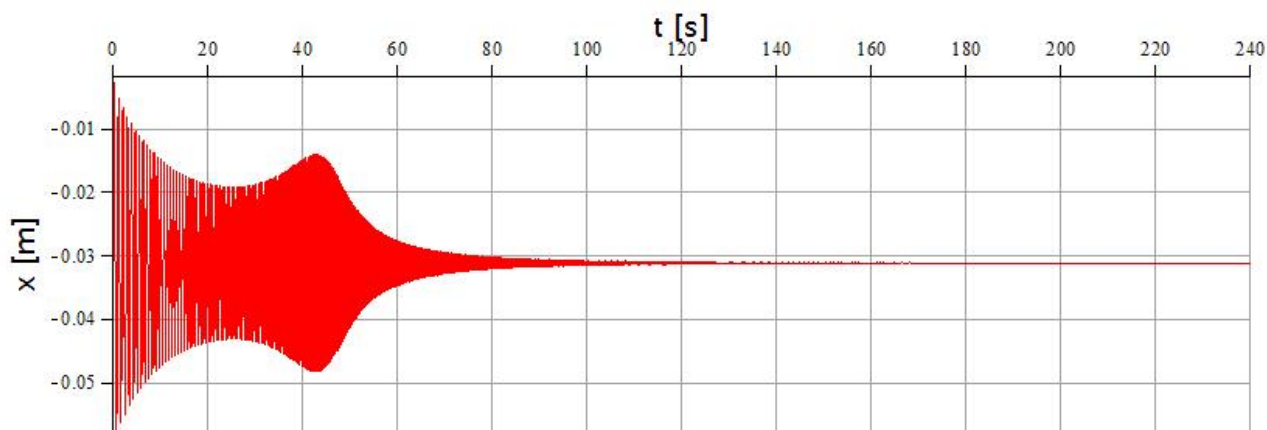
Obr. 7.9 – Zrychlení odezvy $a(t)$



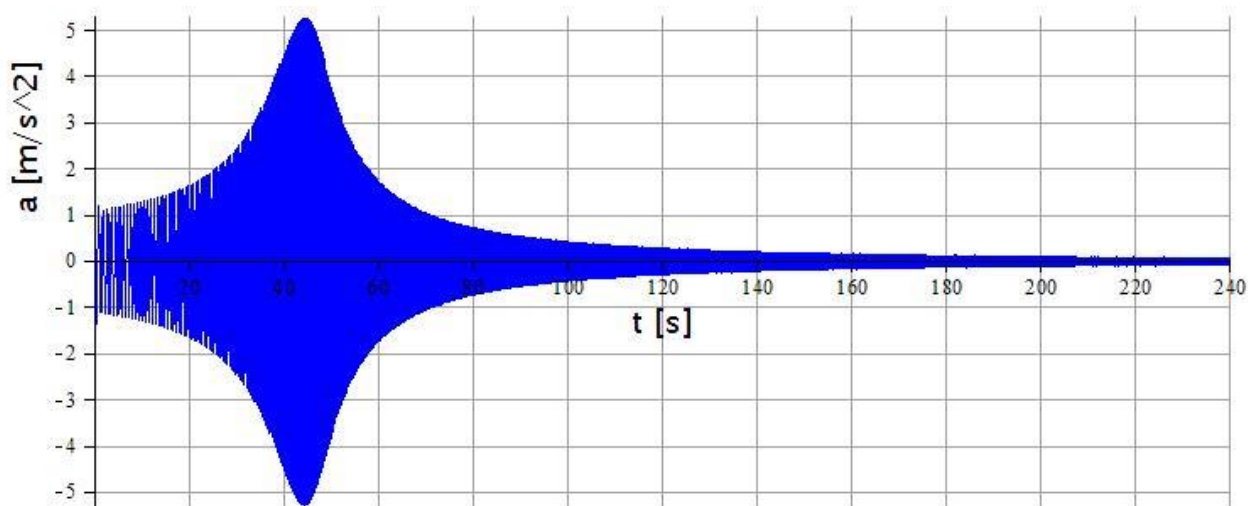
Obr. 7.10 – Celková (vratná + tlumící) síla lineárního materiálového modelu



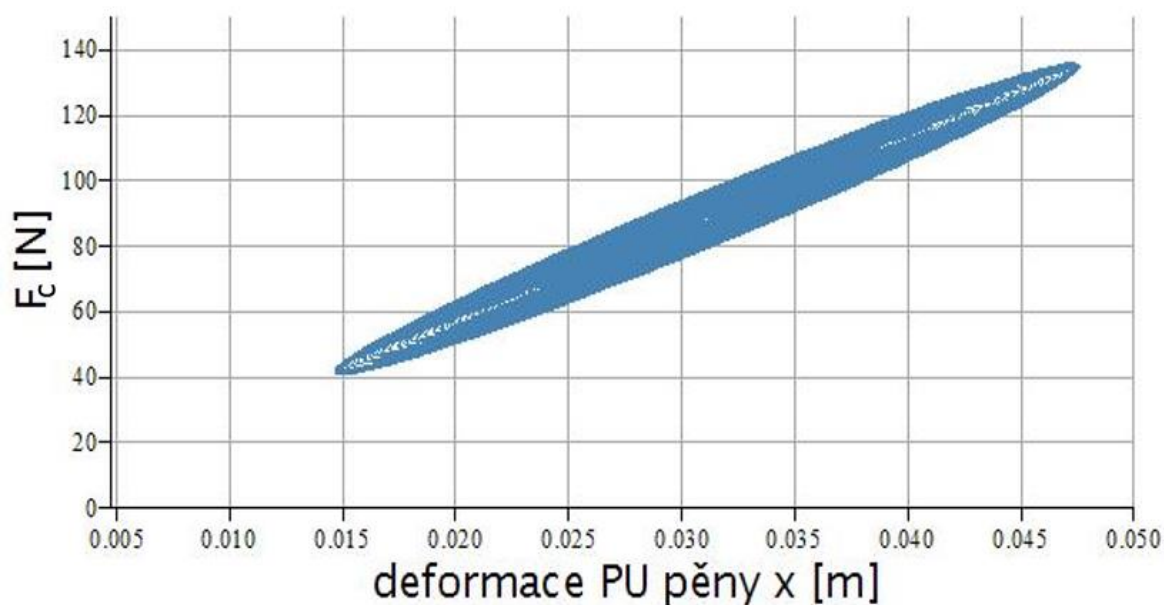
- vykreslení grafů odezvy a pracovní oblasti vratné a tlumící síly pro $m = 9 \text{ kg}$



Obr. 7.11 – Výchylka odezvy $x(t)$



Obr. 7.12 – Zrychlení odezvy $a(t)$



Obr. 7.13 – Celková síla (vratná + tlumící) lineárního materiálového modelu

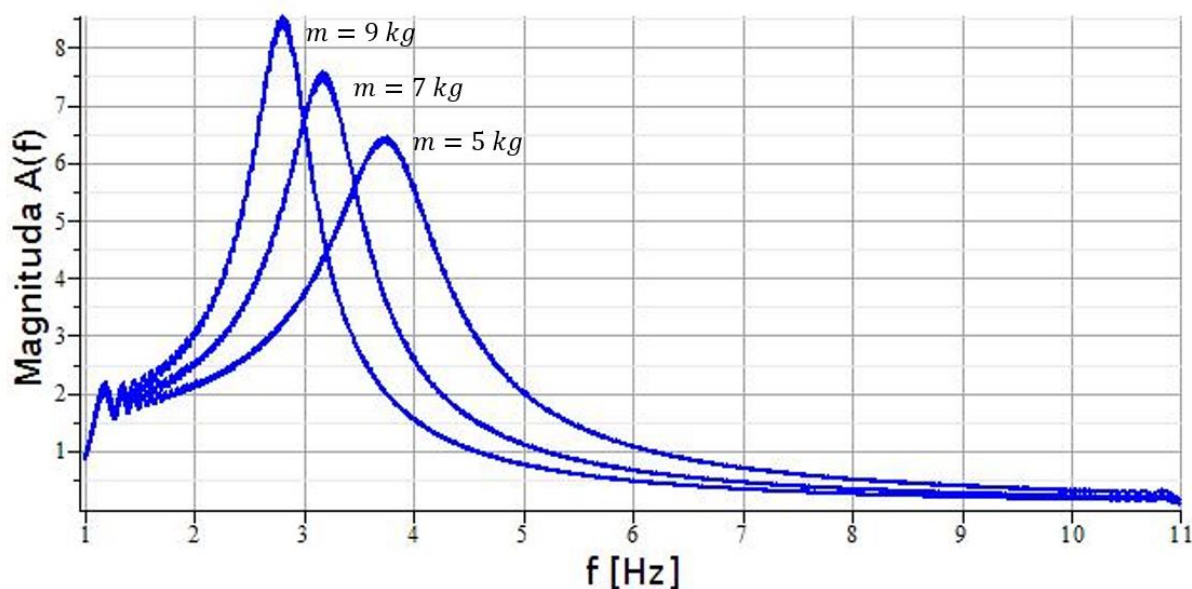
7.1.2. Frekvenční spektrum zrychlení odezvy

Fourierova transformace slouží k vyjádření časově závislého signálu pomocí harmonických funkcí *sinus* a *cosinus* nebo funkce komplexní exponenciály. Slouží pro převod signálů z časové oblasti do oblasti frekvenční i pro neperiodické signály. Fourierova transformace je obecně definována následujícím vztahem

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt, \quad (7.3)$$

který převádí časovou funkci $f(t)$ na funkci komplexně proměnnou $F(j\omega)$.

Na následujícím obr. 7.14 je vykresleno frekvenční spektrum zrychlení odezvy $a(t)$ získané řešením diferenciální rovnice (7.1).



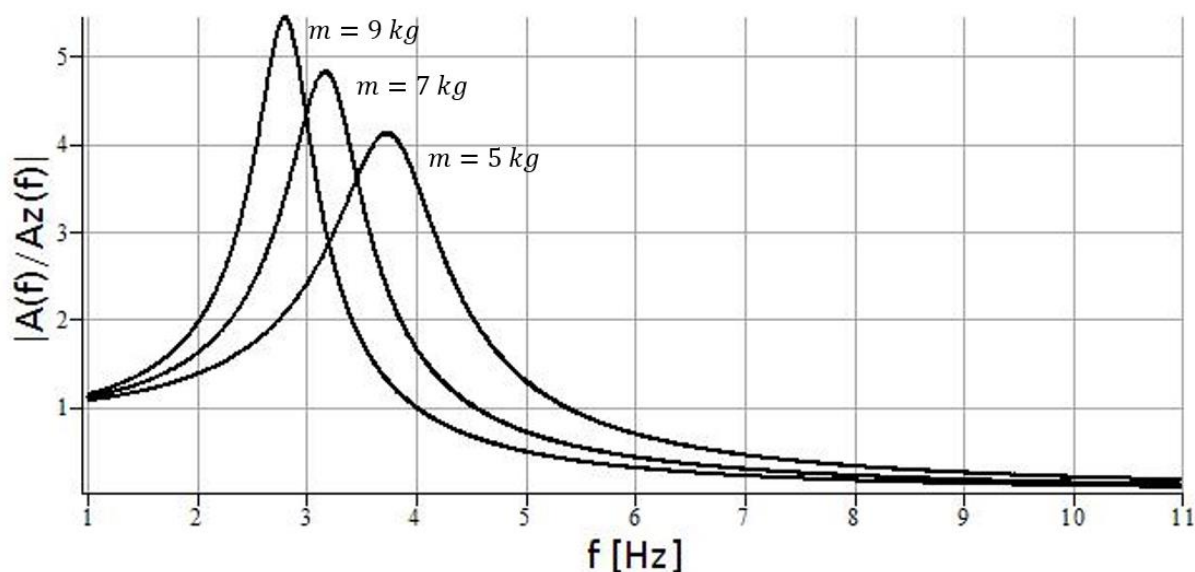
Obr. 7.14 – Frekvenční spektrum zrychlení odezvy pro daná zatížení s lineárním materiálovým modelem

7.1.3. Amplitudová frekvenční charakteristika lineární soustavy

Přenosová funkce je definována jako

$$P = \frac{A(f)}{A_z(f)} \quad (7.4)$$

kde $A(f)$ je frekvenční spektrum signálu zrychlení odezvy a $A_z(f)$ je frekvenční spektrum signálu zrychlení budící funkce. Absolutní hodnota přenosu $\left| \frac{A(f)}{A_z(f)} \right|$ pak udává amplitudovou charakteristiku soustavy.



Obr. 7.15 – Amplitudová frekvenční charakteristika pro daná zatížení s lineárním materiálovým modelem

V následující tab. 7.2 jsou uvedeny odečtené hodnoty pro frekvenci v rezonanci f_r a maximální hodnoty přenosové funkce, resp. maximální hodnoty podílu frekvenčního spektra zrychlení odezvy a frekvenčního spektra zrychlení budící funkce.

m [kg]	f_r [Hz]	$ A(f)/A_z(f) _{max}$
5	3,73	4,12
7	3,17	4,83
9	2,80	5,44

Tab. 7.2 – Veličiny charakterizující daná zatížení v rezonanci



7.2. Soustava s nelineárním materiálovým modelem

Pro numerickou simulaci soustavy s nelineárním materiálovým modelem byla sestavena diferenciální rovnice (7.5) s uvažováním nelineárního matematického modelu vzorku PU pěny, který byl již odvozen v *kap. 4* a také konkrétní číselné hodnoty konstant použitého vzorku PU pěny – viz *tab. 4.1*.

Diferenciální rovnice soustavy s nelineárním materiálovým modelem je

$$m\ddot{x} + F_v + F_T + \sum_{i=1}^3 F_{ti} = -mg, \quad (7.5)$$

kde člen na pravé straně opět reprezentuje gravitační sílu.

Vratná, třecí a tlumicí síla se zakomponováním budící funkce $z(t)$ nyní je

$$F_v = m_u(1 - e^{-k_u(x(t)-z(t))}) + \\ + S_p p_p \left[\left(\frac{h_p}{h_p - (x(t) - z(t))} \right)^{n_p} - \left(\frac{h_p}{h_p + (x(t) - z(t))} \right)^{n_p} \right] \quad (7.6)$$

$$F_T = f_T \left(F_v + \sum_{i=1}^3 F_{ti} \right) \quad (7.7)$$

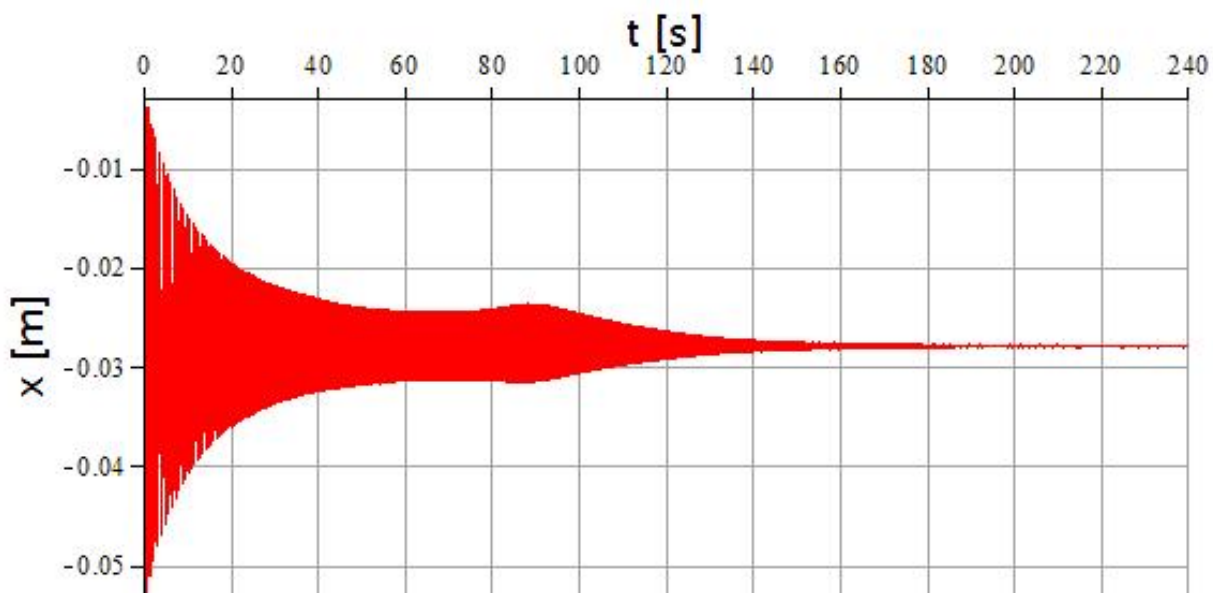
$$f_T = \frac{2f_{T0}}{\pi} \arctan \left[k_1 \left(\frac{dx(t)}{dt} - \frac{dz(t)}{dt} \right) \right] + \\ + k_2 \left| \left(\frac{dx(t)}{dt} - \frac{dz(t)}{dt} \right) \right|^{k_3} \operatorname{sign} \left(\frac{dx(t)}{dt} - \frac{dz(t)}{dt} \right) \quad (7.8)$$

$$F_{ti} = S_{oi} p_{oi} \left[\left(\frac{h_i}{h_i - (x(t) - z(t) - x_{ti}(t))} \right)^{n_{oi}} - \left(\frac{h_i}{h_i + (x(t) - z(t) - x_{ti}(t))} \right)^{n_{oi}} \right] \quad (7.9)$$

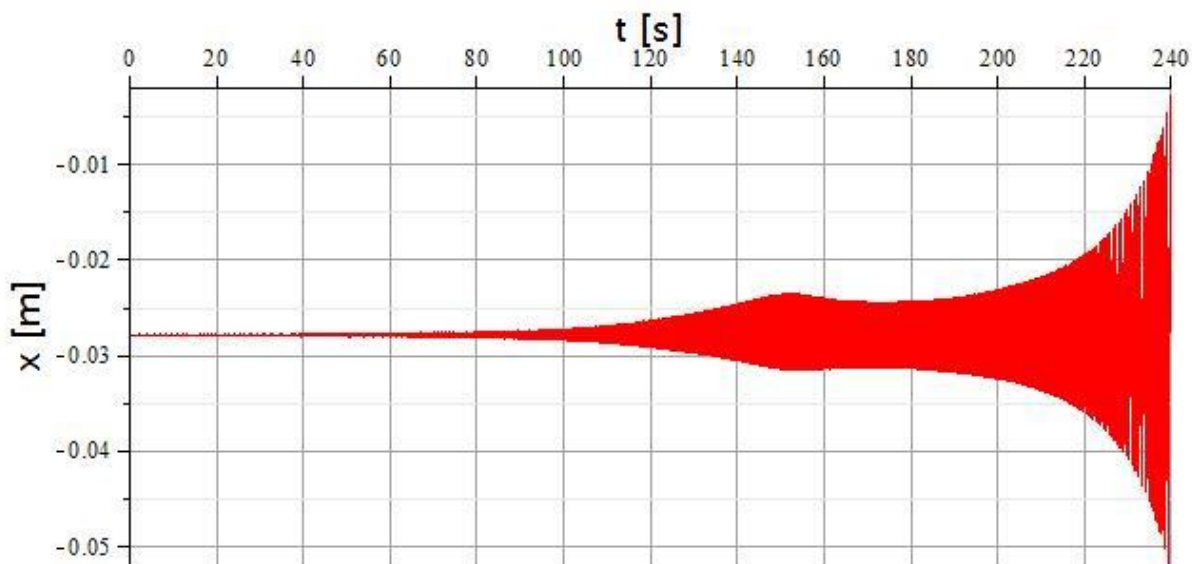
$$F_{ti} = c_i |v_{ti}|^{n_i} \cdot \operatorname{sign}(v_{ti}) = c_i \left| \frac{dx_{ti}}{dt} \right|^{n_i} \cdot \operatorname{sign} \left(\frac{dx_{ti}}{dt} \right) \quad (7.10)$$

7.2.1. Odezva nelineární soustavy na kinematické buzení

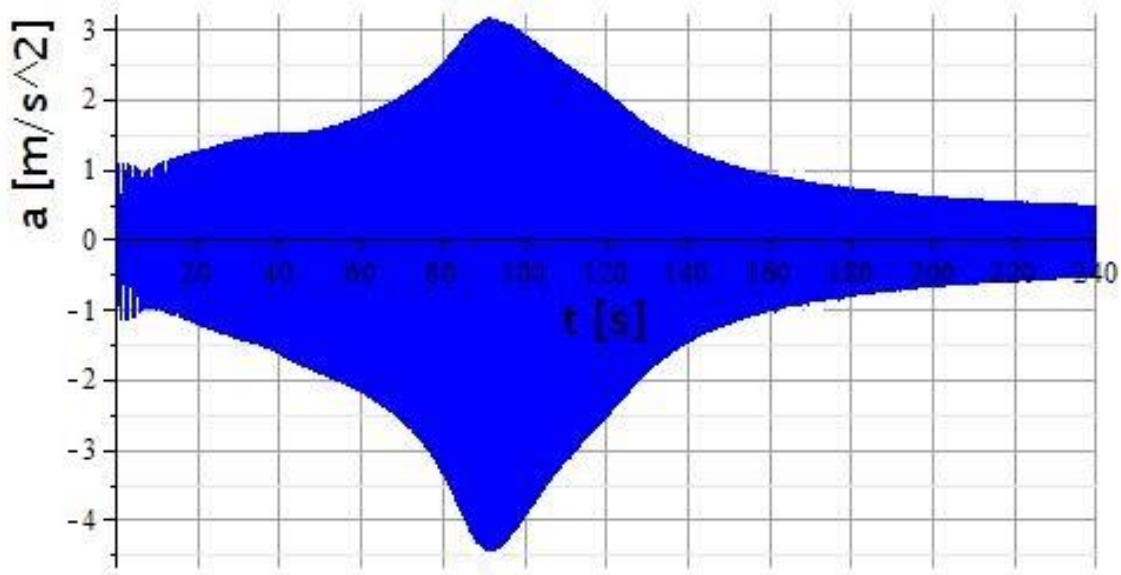
- vykreslení grafů odezvy a pracovní oblasti vratné a tlumící síly pro $m = 5 \text{ kg}$



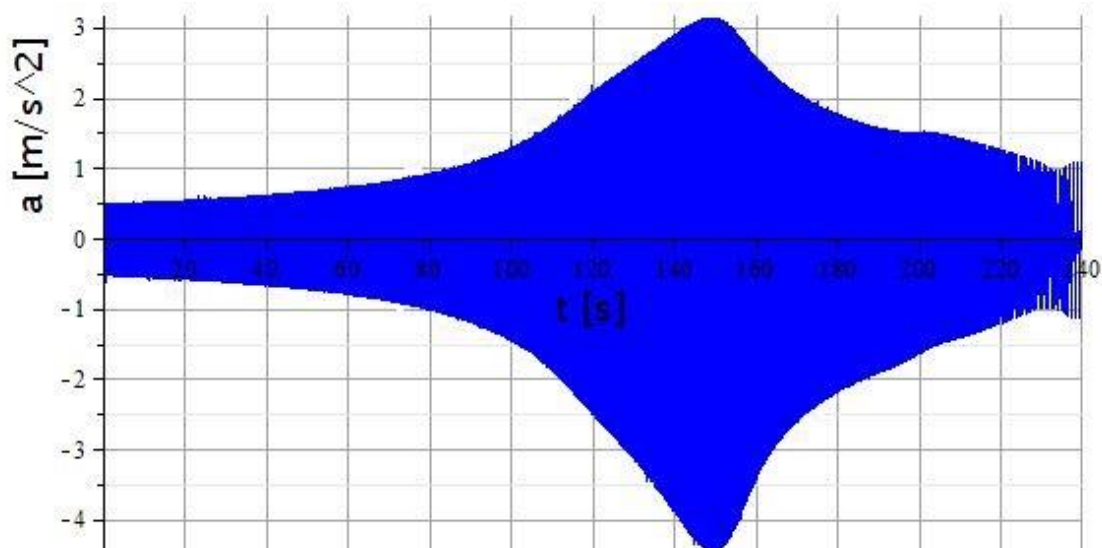
Obr. 7.16 – Výchylka odezvy $x(t)$ při zvyšující frekvenci 1 – 11 Hz (simulace)



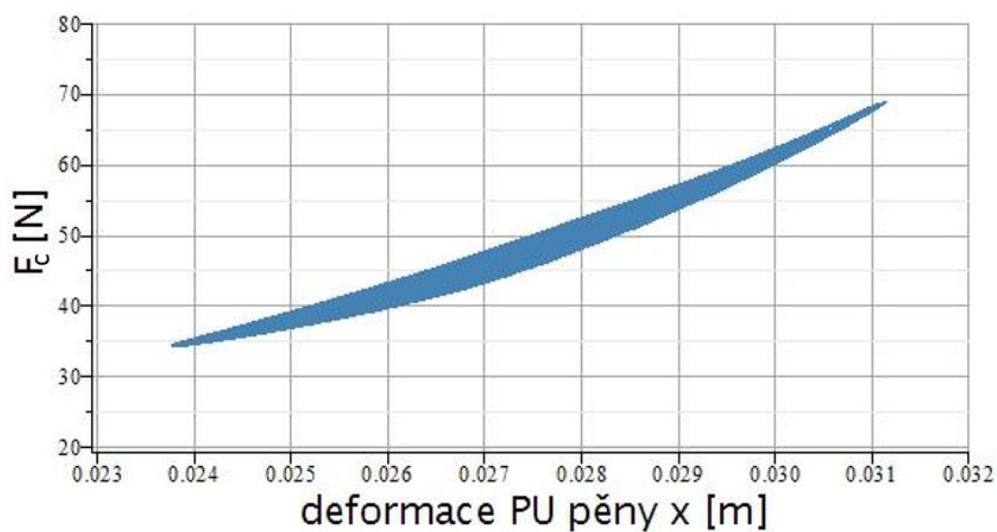
Obr. 7.17 – Výchylka odezvy $x(t)$ při snižující frekvenci 11 – 1 Hz (simulace)



Obr. 7.18 – Zrychlení odezvy $a(t)$ při zvyšující frekvenci 1 – 11 Hz (simulace)



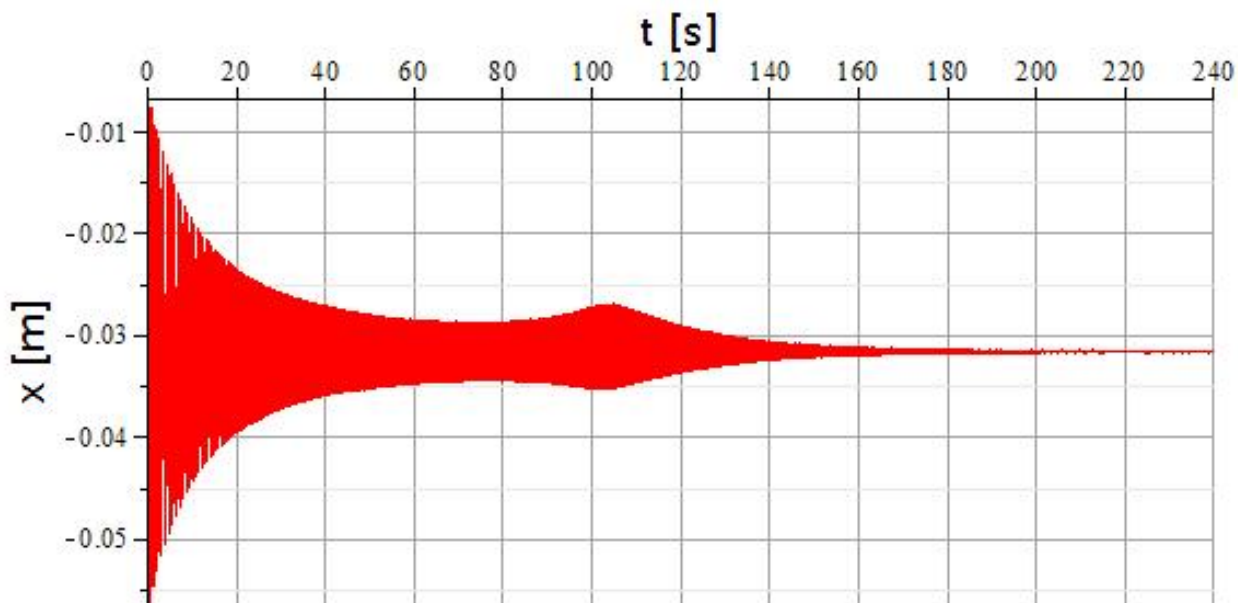
Obr. 7.19 – Zrychlení odezvy $a(t)$ při snižující frekvenci 11 – 1 Hz (simulace)



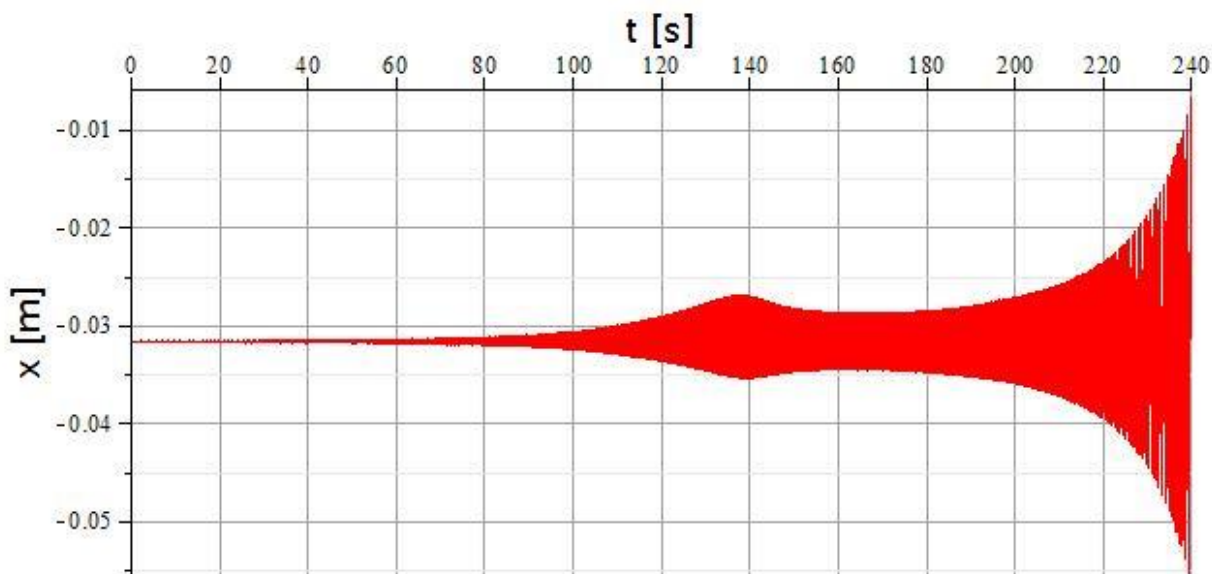
Obr. 7.20 – Celková síla nelineárního materiálového modelu (simulace)



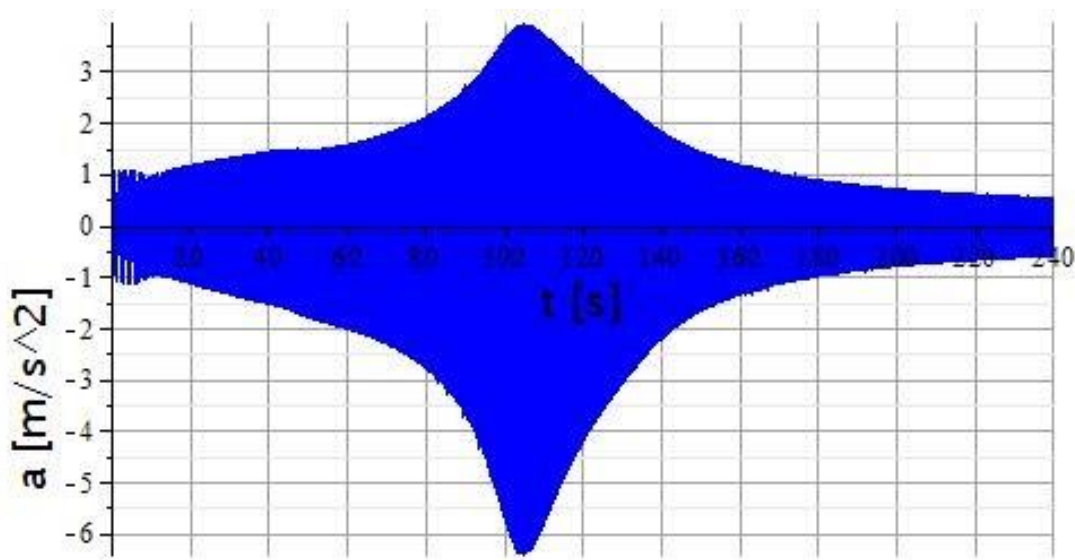
- vykreslení grafů odezvy a pracovní oblasti vratné a tlumící síly pro $m = 7 \text{ kg}$



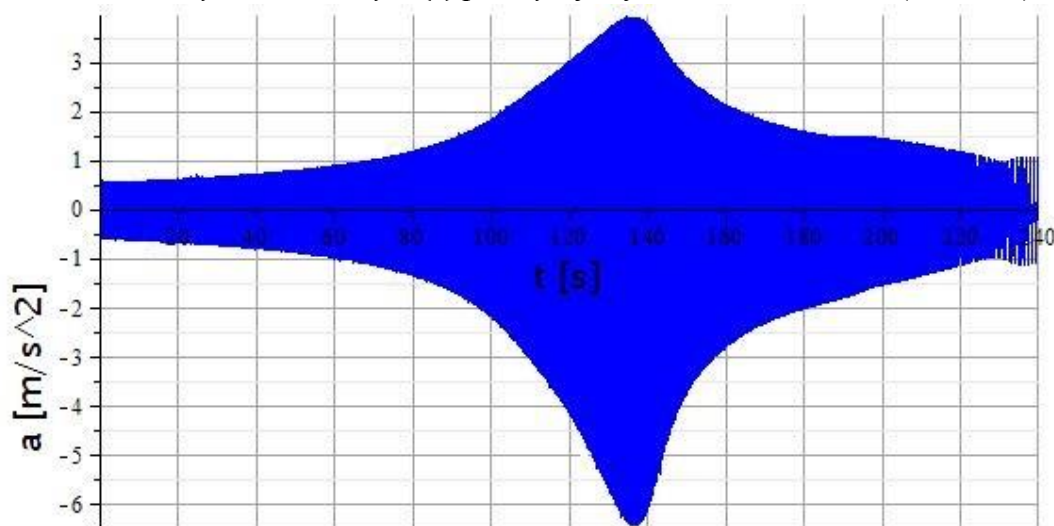
Obr. 7.21 – Výchylka odezvy $x(t)$ při zvyšující frekvenci 1 – 11 Hz (simulace)



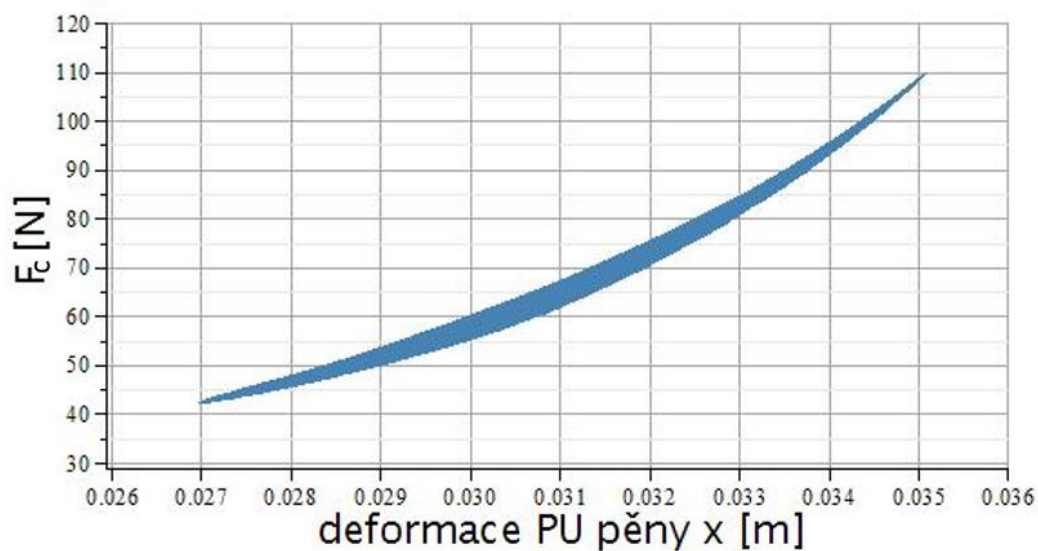
Obr. 7.22 – Výchylka odezvy $x(t)$ při snižující frekvenci 11 – 1 Hz (simulace)



Obr. 7.23 – Zrychlení odezvy $a(t)$ při zvyšující frekvenci 1 – 11 Hz (simulace)



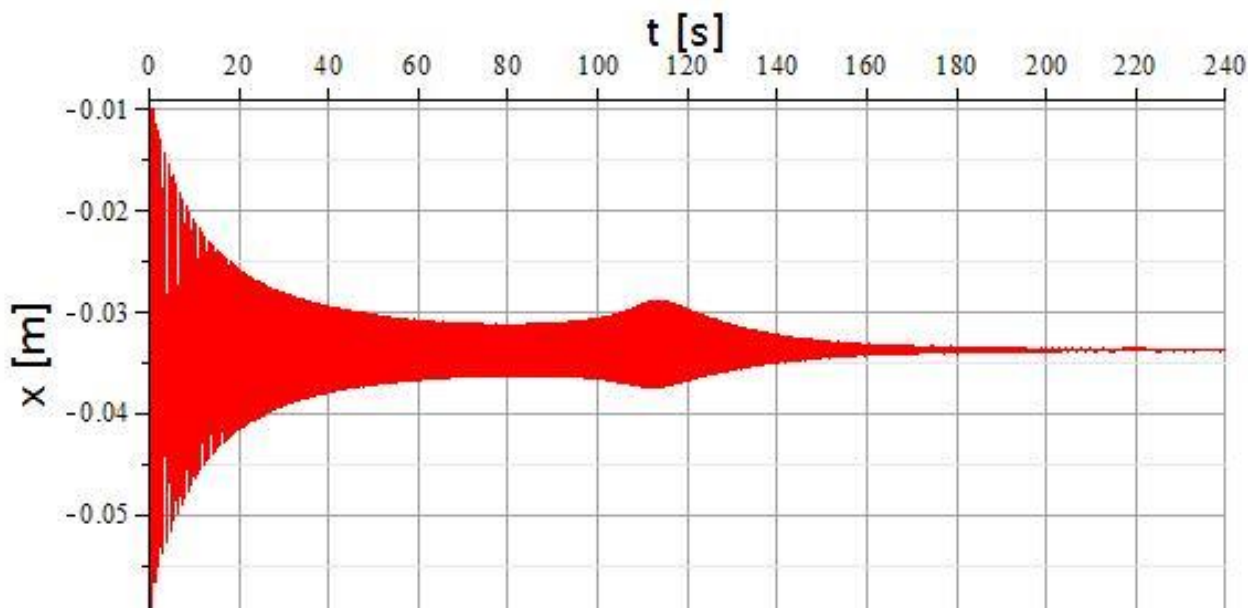
Obr. 7.24 – Zrychlení odezvy $a(t)$ při snižující frekvenci 11 – 1 Hz (simulace)



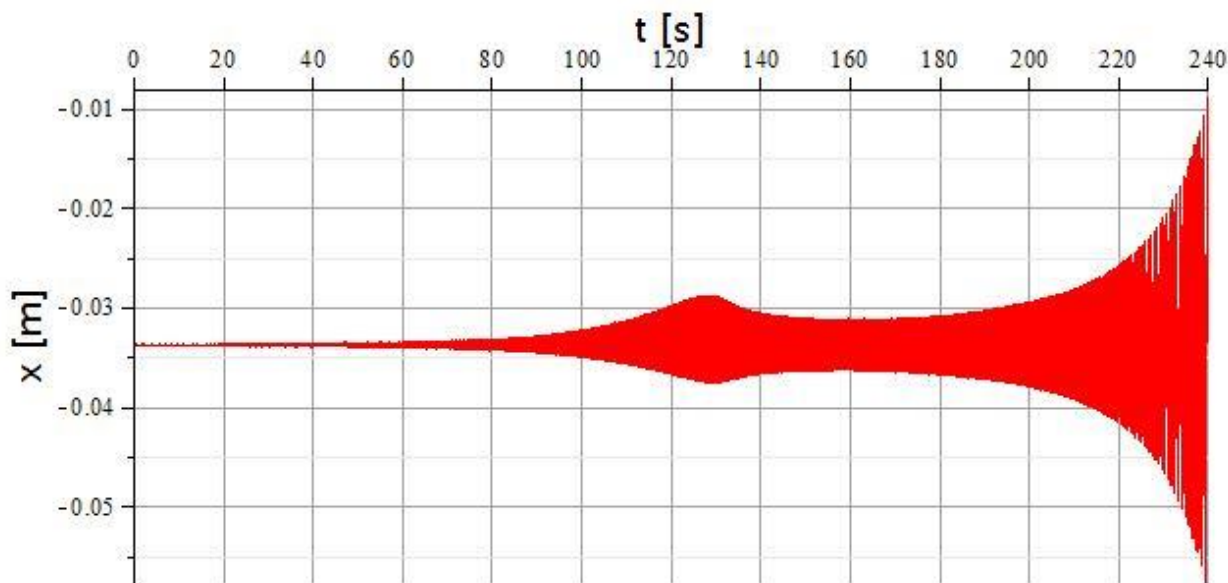
Obr. 7.25 – Celková síla nelineárního materiálového modelu (simulace)



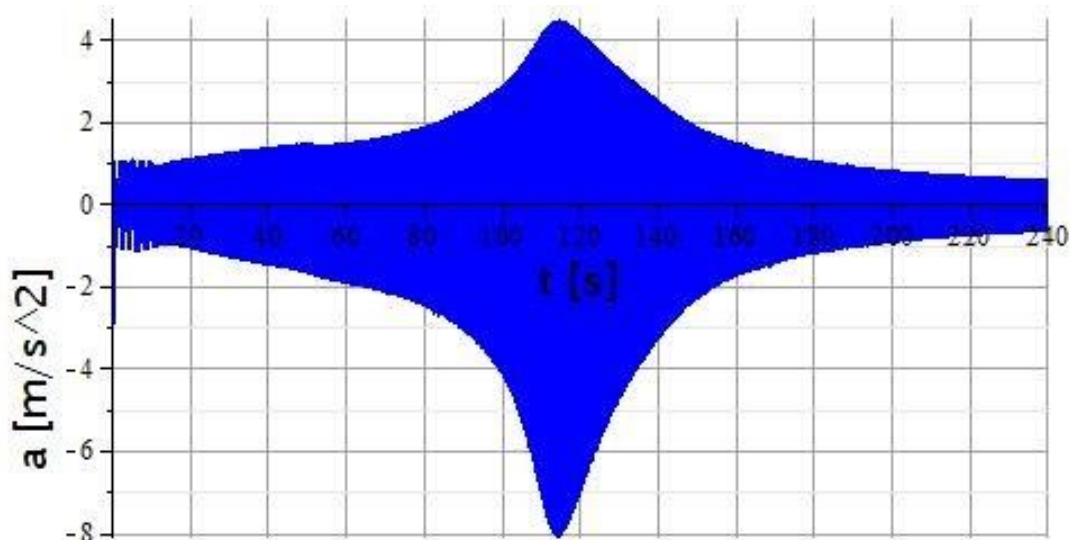
- vykreslení grafů odezvy a pracovní oblasti vratné a tlumící síly pro $m = 9 \text{ kg}$



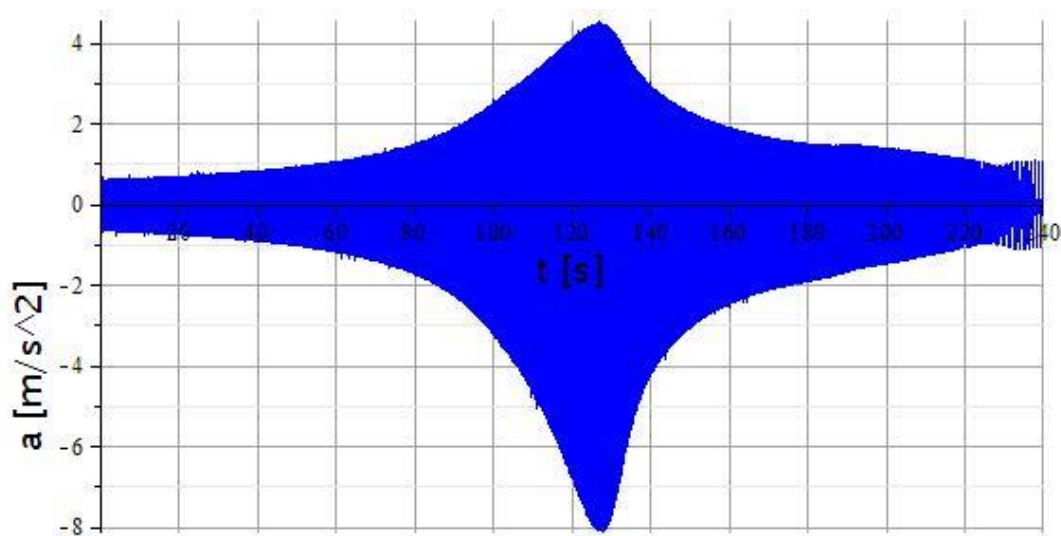
Obr. 7.26 – Výchylka odezvy $x(t)$ při zvyšující frekvenci 1 – 11 Hz (simulace)



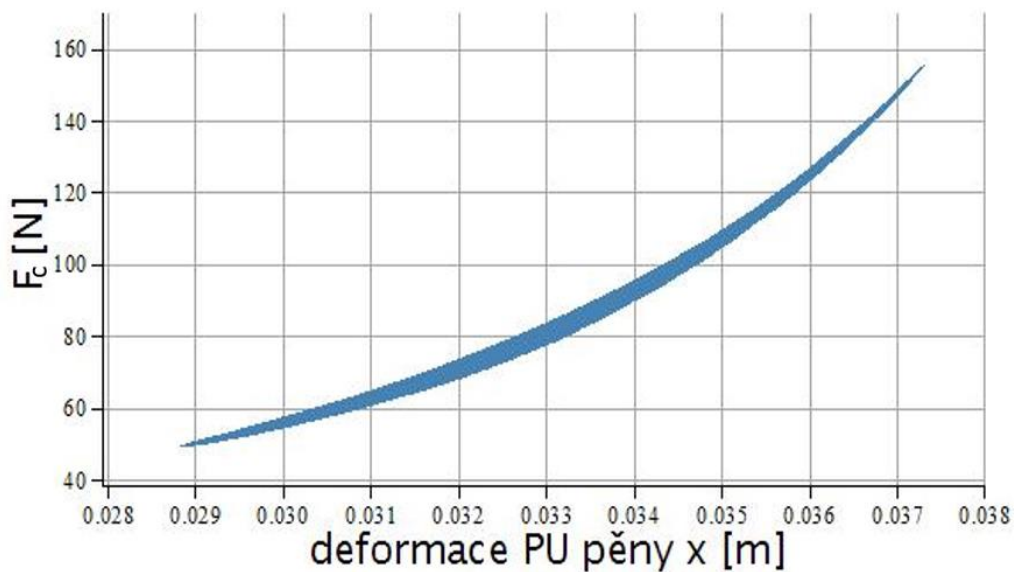
Obr. 7.27 – Výchylka odezvy $x(t)$ při snižující frekvenci 11 – 1 Hz (simulace)



Obr. 7.28 – Zrychlení odezvy $a(t)$ při zvyšující frekvenci 1 – 11 Hz (simulace)



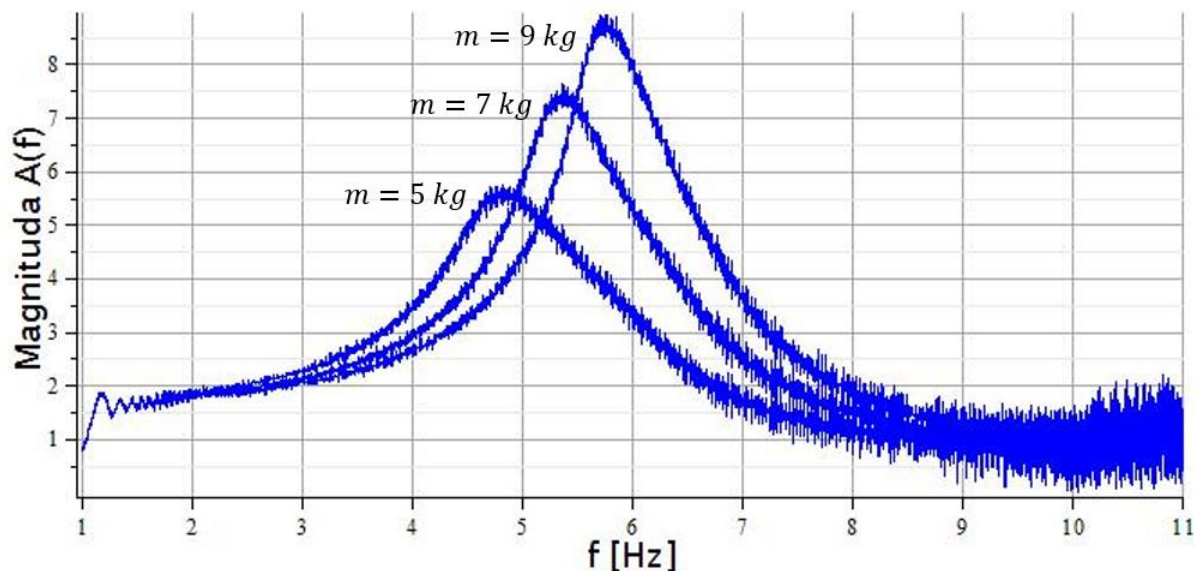
Obr. 7.29 – Zrychlení odezvy $a(t)$ při snižující frekvenci 11 – 1 Hz (simulace)



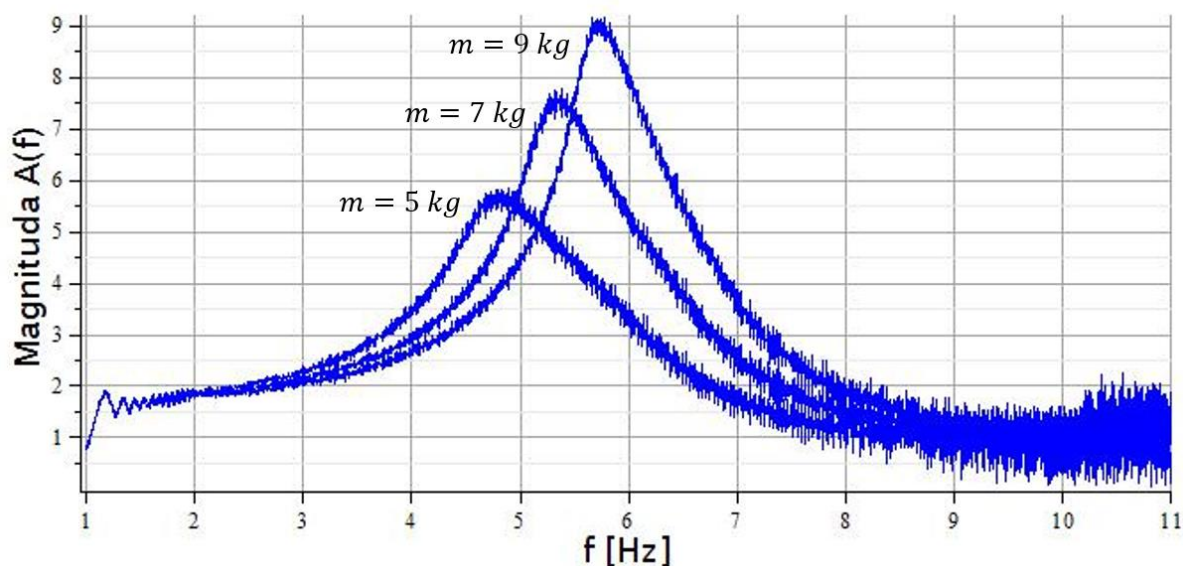
Obr. 7.30 – Celková síla nelineárního materiálového modelu (simulace)

7.2.2. Frekvenční spektrum zrychlení odezvy

Na následujícím obr. 7.31 jsou vykreslena frekvenční spektra zrychlení odezvy s nelineárním materiálovým modelem získané řešením diferenciální rovnice (7.5) s příslušnými nelineárními silami PU pěny a jejich definicemi (7.6), (7.7), (7.8), (7.9) a (7.10) při zvyšující a snižující se frekvenci.



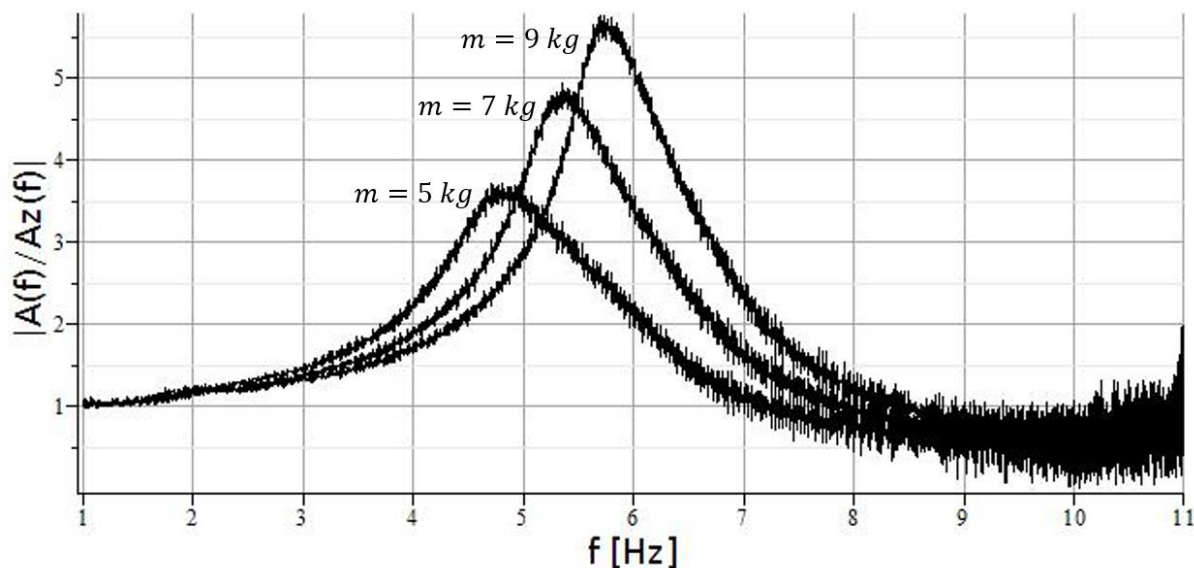
Obr. 7.31 – Frekvenční spektrum zrychlení odezvy pro daná zatížení s nelineárním materiálovým modelem při zvyšující frekvenci 1 – 11 Hz (simulace)



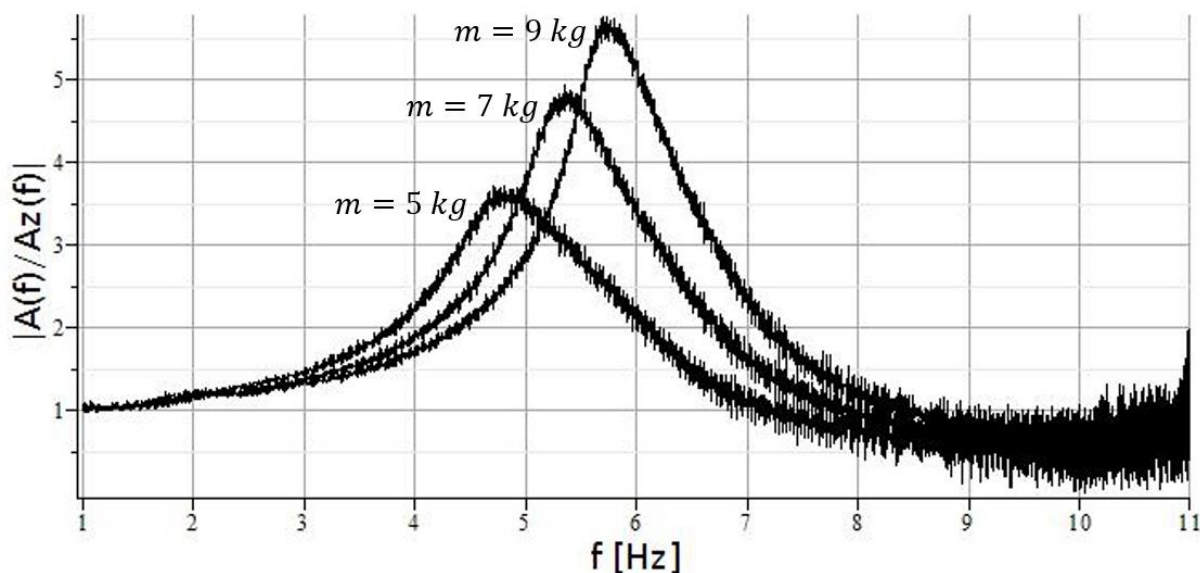
Obr. 7.32 – Frekvenční spektrum zrychlení odezvy pro daná zatížení s nelineárním materiálovým modelem při snižující frekvenci 11 – 1 Hz (simulace)

7.2.3. Amplitudová frekvenční charakteristika nelineárního systému

Přenosová funkce je definována stejně podle již uvedeného vztahu (7.4).



Obr. 7.32 – Frekvenční spektrum zrychlení odezvy pro daná zatížení s nelineárním materiálovým modelem při zvyšující frekvenci 1 – 11 Hz (simulace)



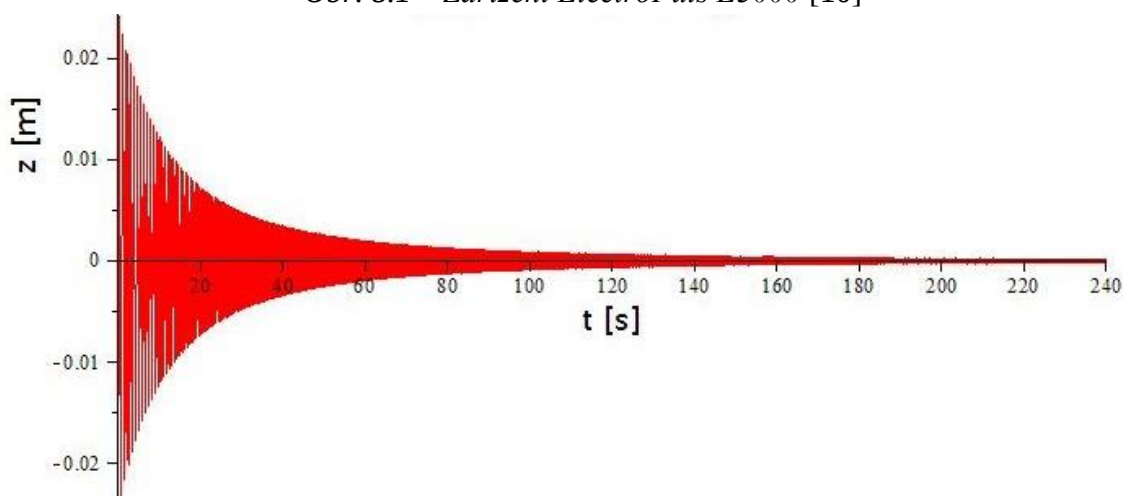
Obr. 7.33 – Frekvenční spektrum zrychlení odezvy pro daná zatížení s nelineárním materiálovým modelem při snižující frekvenci 11 – 1 Hz (simulace)

8. PILOTNÍ EXPERIMENT ZKUŠEBNÍHO ZAŘÍZENÍ

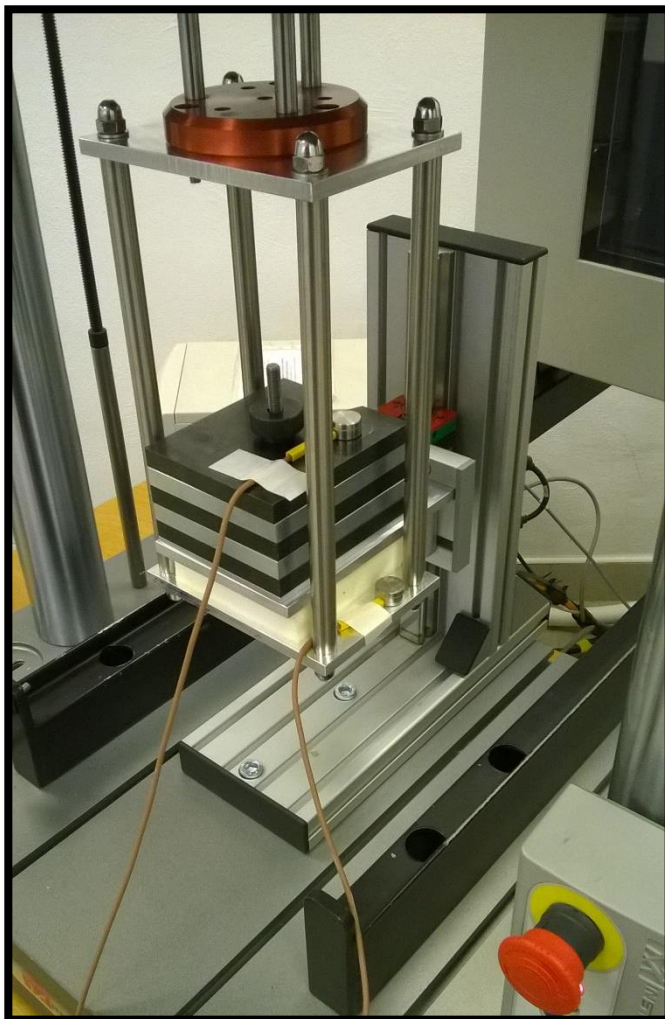
Realizace pilotního experimentu probíhala pomocí zatěžujícího zařízení ElectroPuls E3000 od americké firmy Instron (viz obr. 8.1), prostřednictvím kterého byla přišroubovaná nosná klec zkonstruovaného experimentálního zařízení buzena danou budicí funkcí $z(t)$ – viz kap. 6. Do softwarového prostředí zařízení Instron E3000 (v našem případě budiče signálu) byly nahrány body výchylky $z(t)$ budicí funkce, které jsou vykresleny na obr. 8.2, a zkonstruované experimentální zařízení bylo přímo do tohoto stroje zabudováno (viz obr. 8.3).



Obr. 8.1 – Zařízení ElectroPuls E3000 [10]



Obr. 8.2 – Výchylka budicí funkce $z(t)$ použitá jako vstupní data

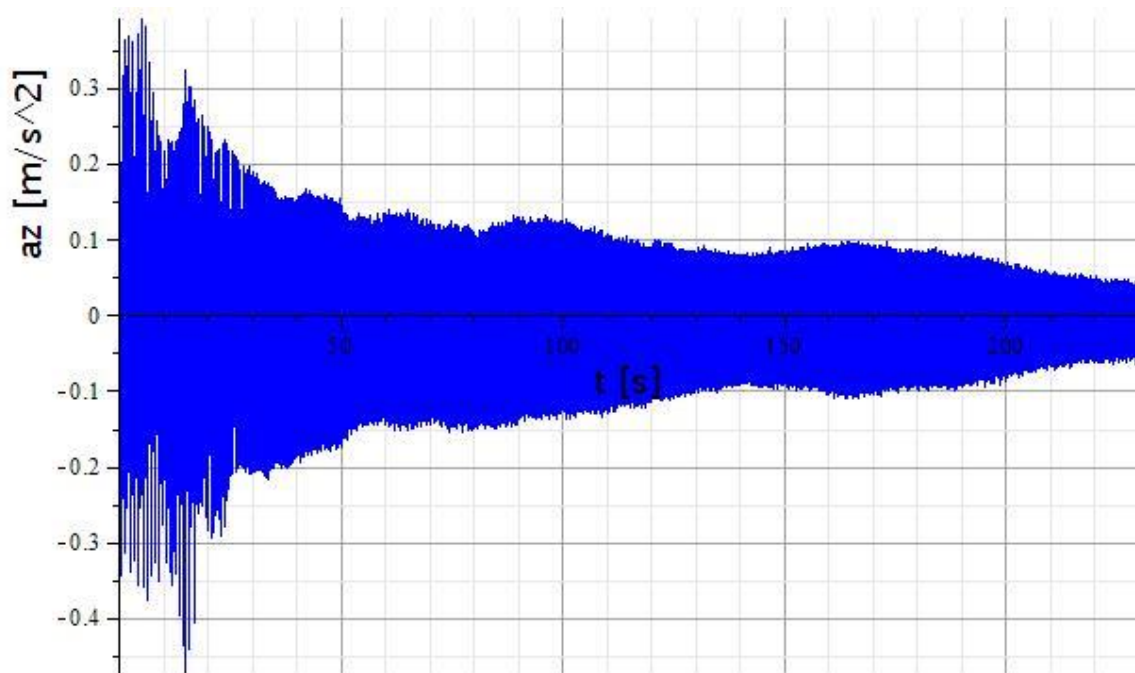


Obr. 8.3 – Experimentální zařízení

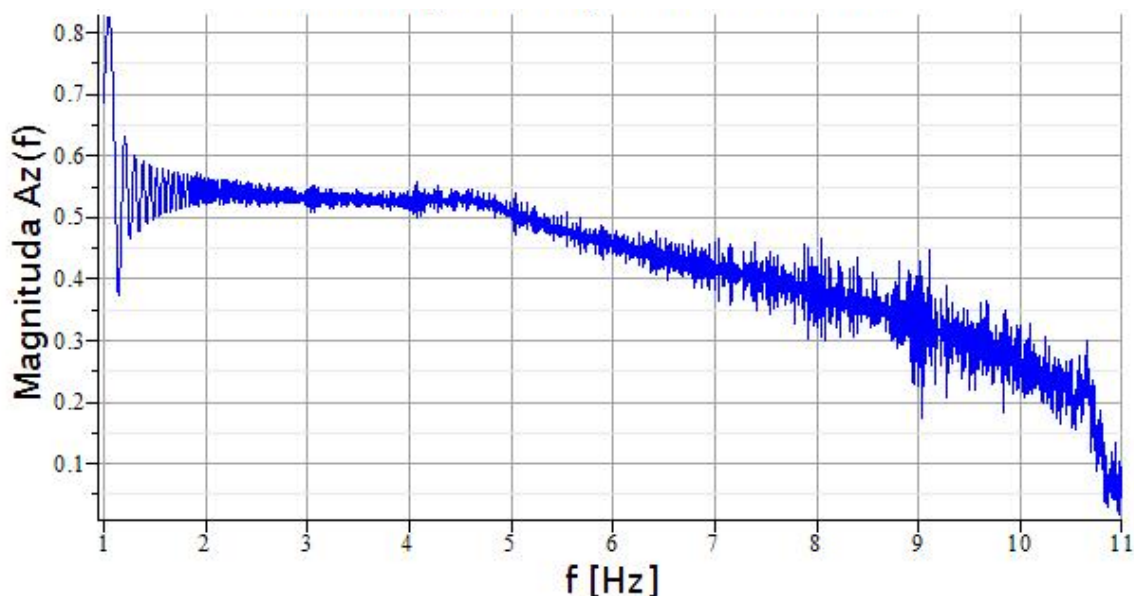
Jak je vidět podle *obr. 3* je nosná klec přišroubovaná k budicímu pístu zařízení ElectroPuls E3000, do kterého byl přiváděn budicí signál. Měření zrychlení nosné klece (buzené základny) a odezvy vzorku PU pěny se závažím bylo zaznamenáváno pomocí dvou připevněných akcelerometrů jak je vidět na *obr. 3*. Hodnoty obou zrychlení byly zaznamenávány pomocí softwaru DEWESoft 7.1 se vzorkovací frekvencí 1000 Hz a následné vyhodnocení naměřených dat bylo provedeno pomocí softwaru Maple 14.

8.1 Vyhodnocení naměřených dat z pilotního experimentu

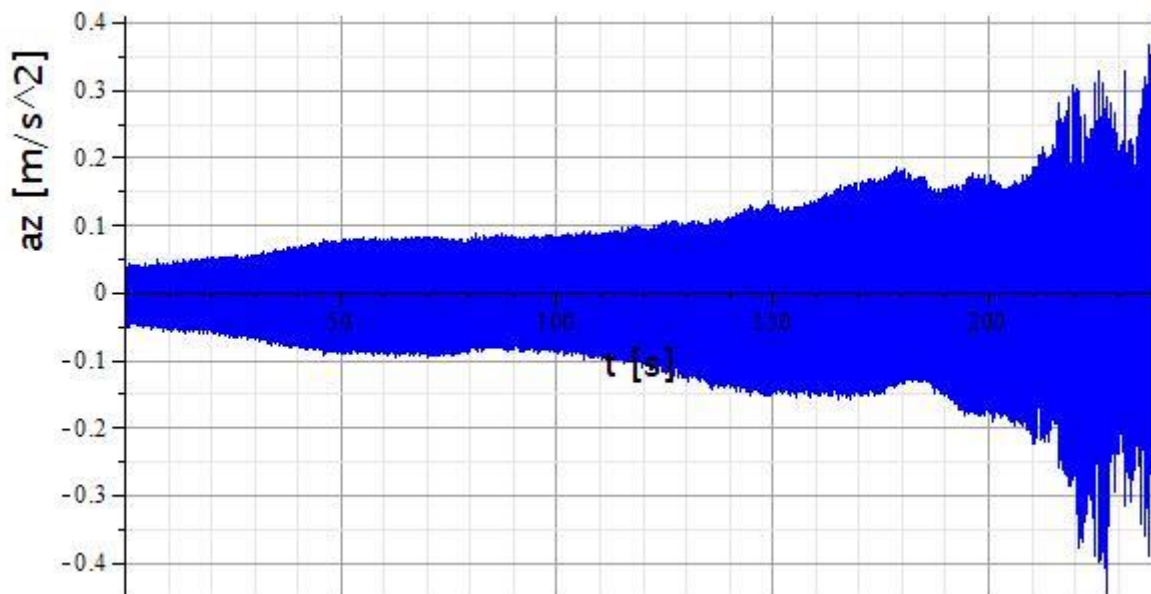
Na následujících obr. 8.4 a 8.6 je vykresleno zrychlení budící funkce pro zvyšující a snižující se frekvenci naměřené z pilotního experimentu, ze kterých je následně na obr. 8.5 a 8.7 vykresleno frekvenční spektrum. Jedná se konkrétně o výsledky z měření pro zatěžující hmotnost $m = 5 \text{ kg}$. Pro hmotnosti 7 a 9 kg byly naměřeny víceméně stejné hodnoty a proto dále tyto grafy nebudou uváděny.



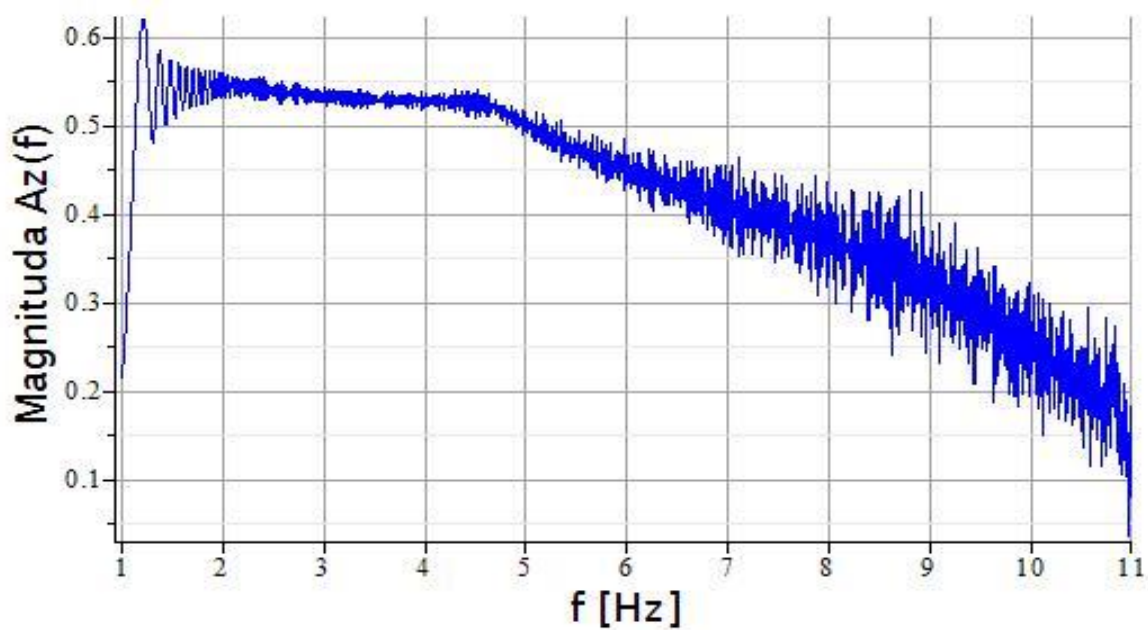
Obr. 8.4 – Zrychlení budící funkce při zvyšující frekvenci 1 – 11 Hz (experiment)



Obr. 8.5 – Frekvenční spektrum budící funkce při zvyšující frekvenci 1 – 11 Hz (experiment)



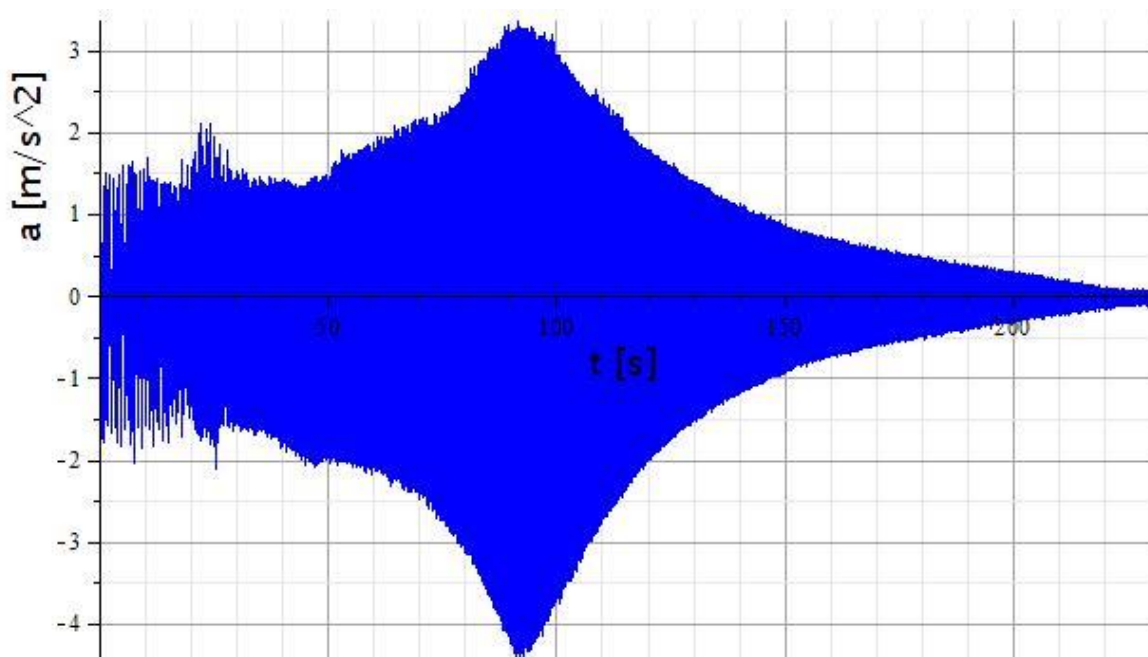
Obr. 8.6 – Zrychlení budící funkce při snižující frekvenci 11 – 1 Hz (experiment)



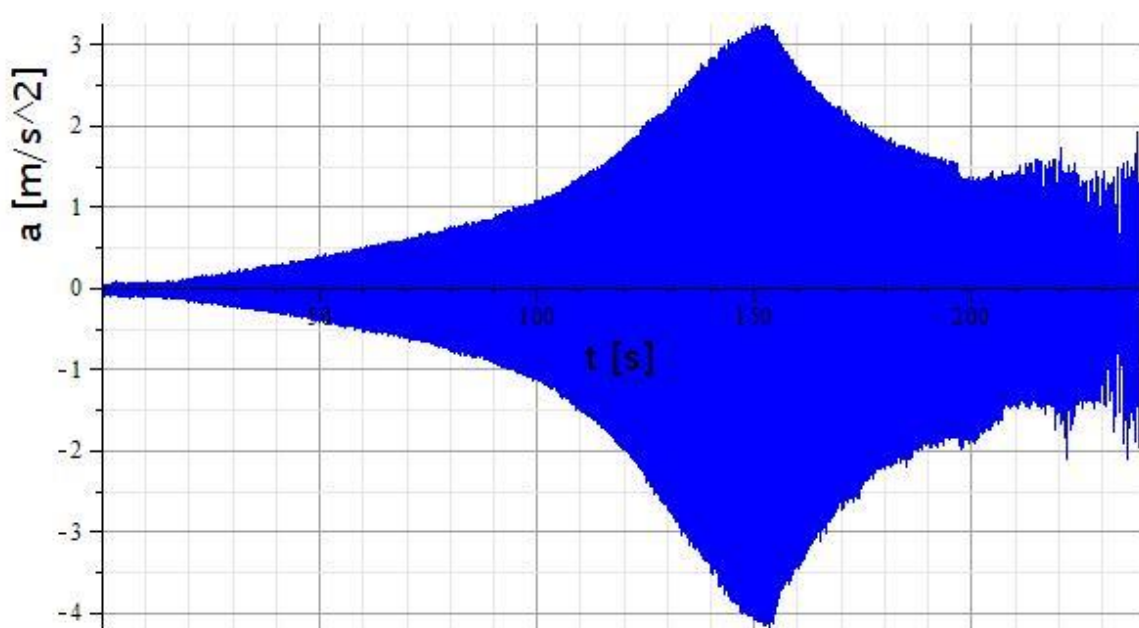
Obr. 8.7 – Frekvenční spektrum budící funkce při snižující frekvenci 11 – 1 Hz
(experiment)

8.1.1 Odezva zrychlení na kinematické buzení

- vykreslení odezvy zrychlení pro $m = 5 \text{ kg}$

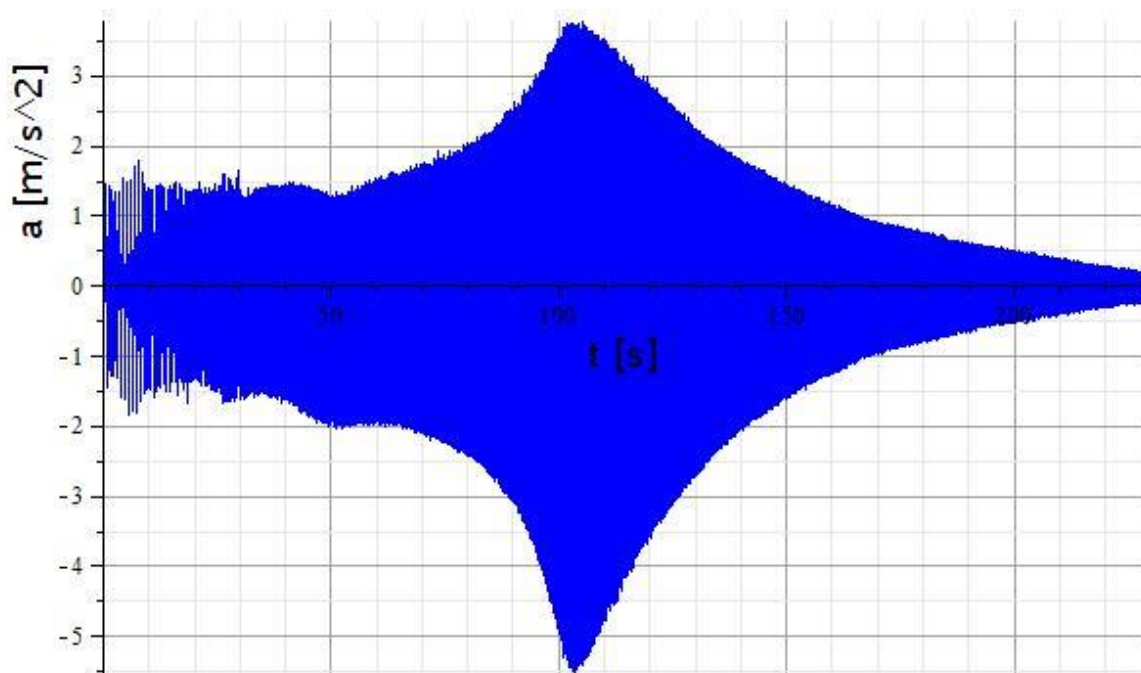


Obr. 8.8 – Zrychlení odezvy při zvyšující frekvenci 1 – 11 Hz (experiment)

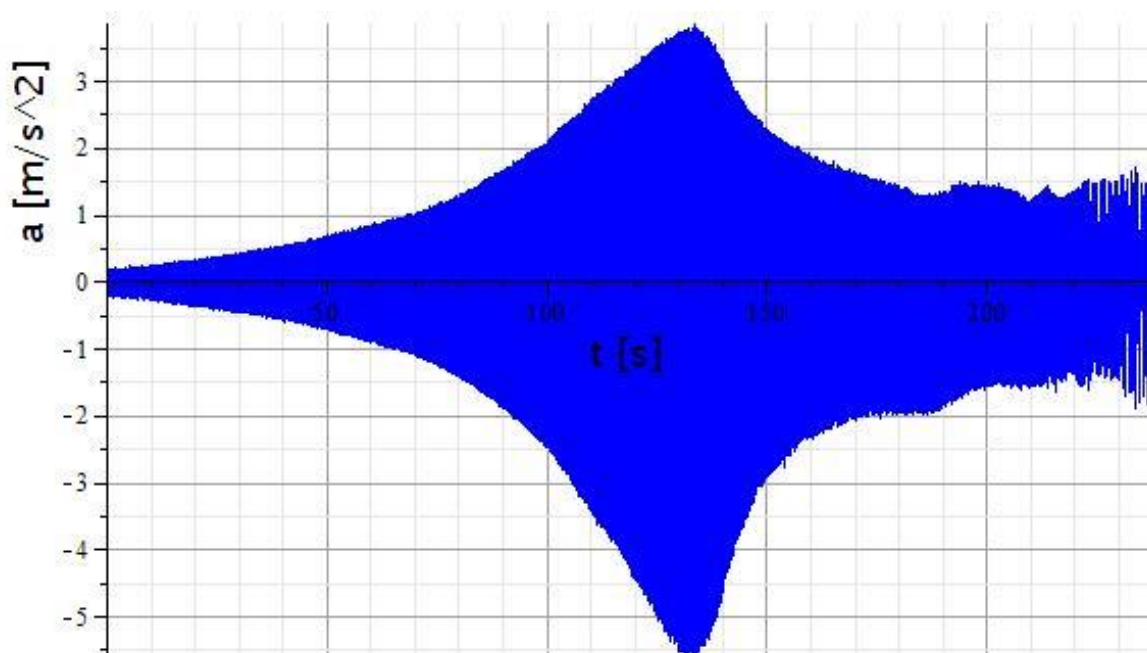


Obr. 8.9 – Zrychlení odezvy při snižující frekvenci 11 – 1 Hz (experiment)

- vykreslení odezvy zrychlení pro $m = 7 \text{ kg}$



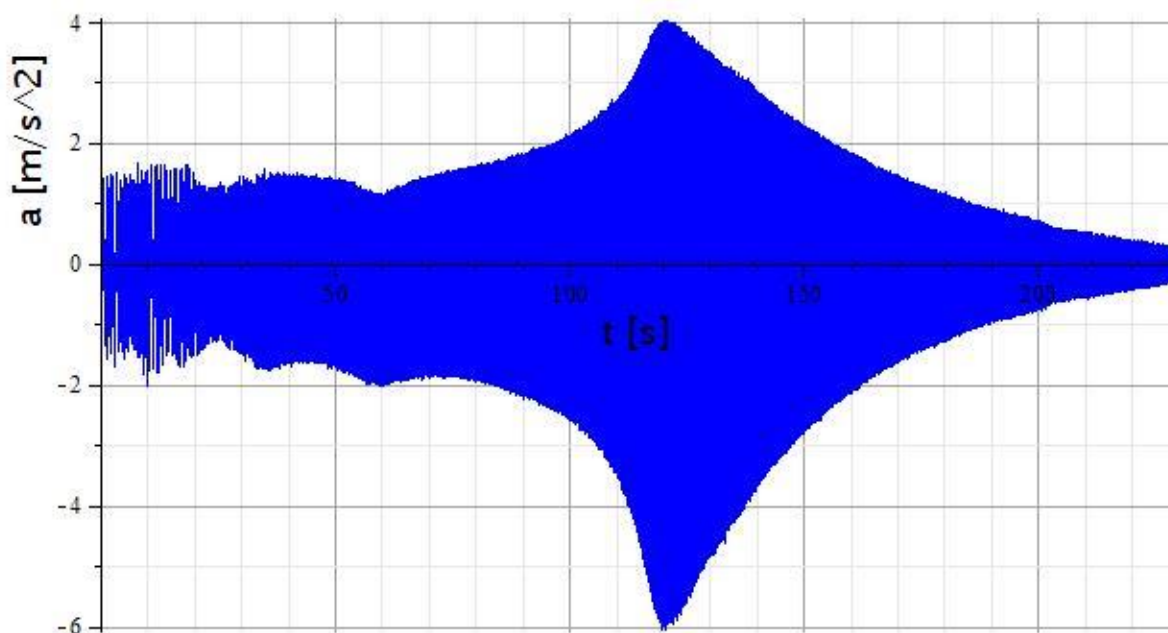
Obr. 8.10 – Zrychlení odezvy při zvyšující frekvenci 1 – 11 Hz (experiment)



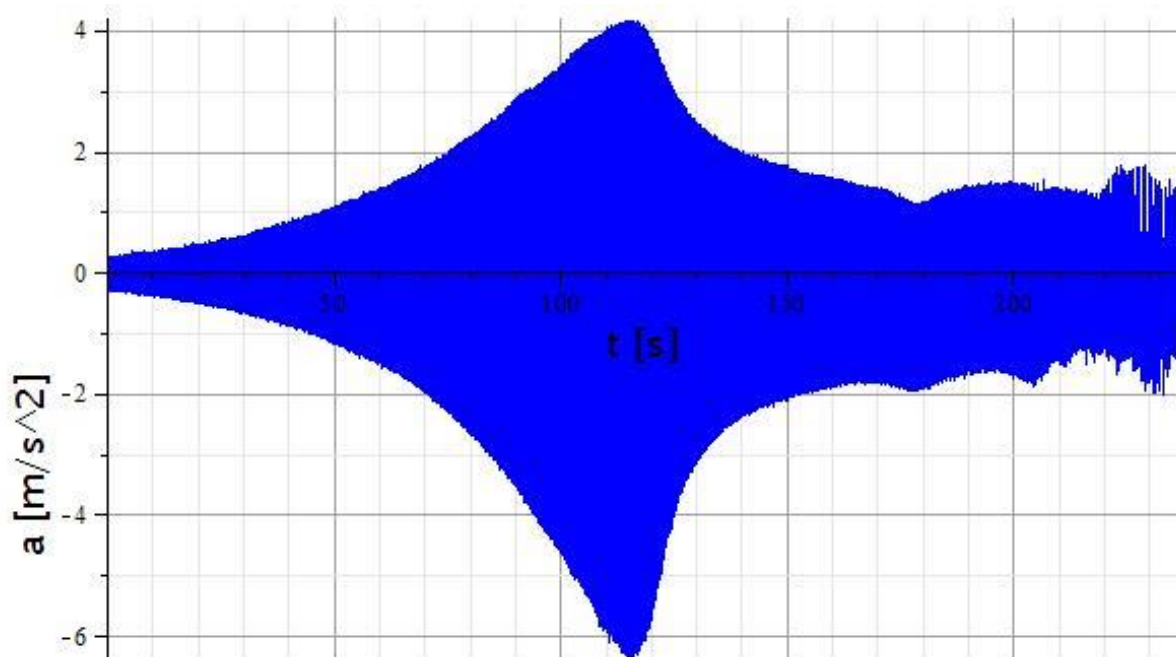
Obr. 8.11 – Zrychlení odezvy při snižující frekvenci 11 – 1 Hz (experiment)



- vykreslení odezvy zrychlení pro $m = 9 \text{ kg}$

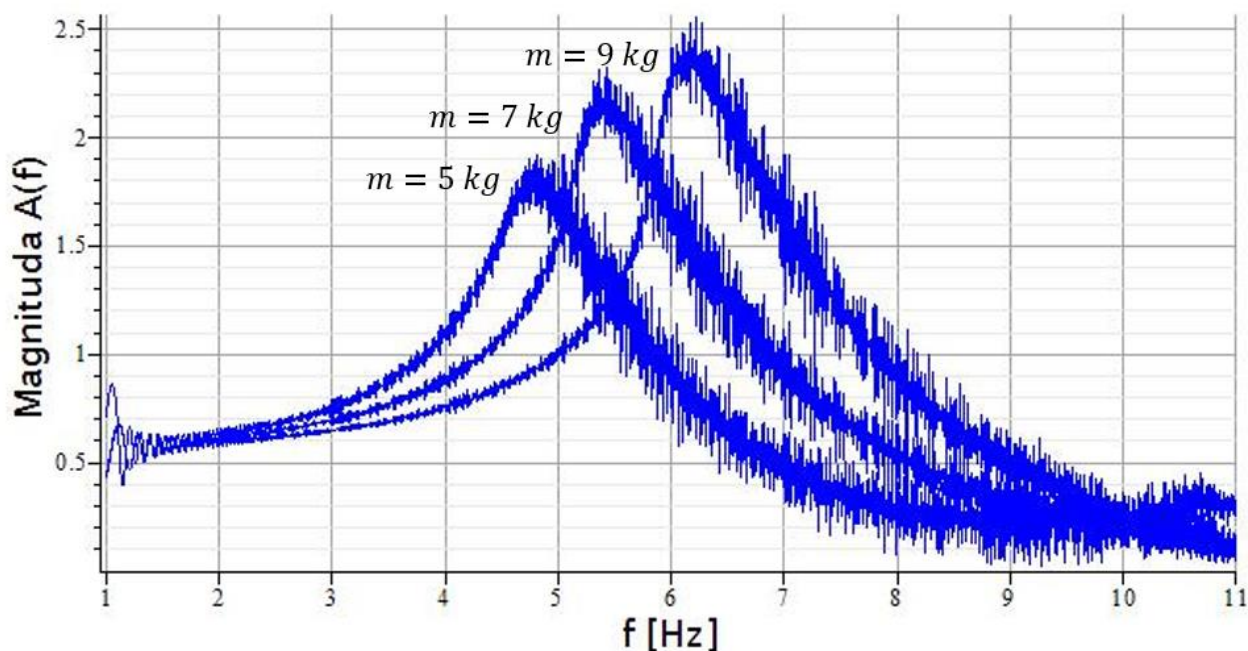


Obr. 8.12 – Zrychlení odezvy při zvyšující frekvenci 1 – 11 Hz (experiment)

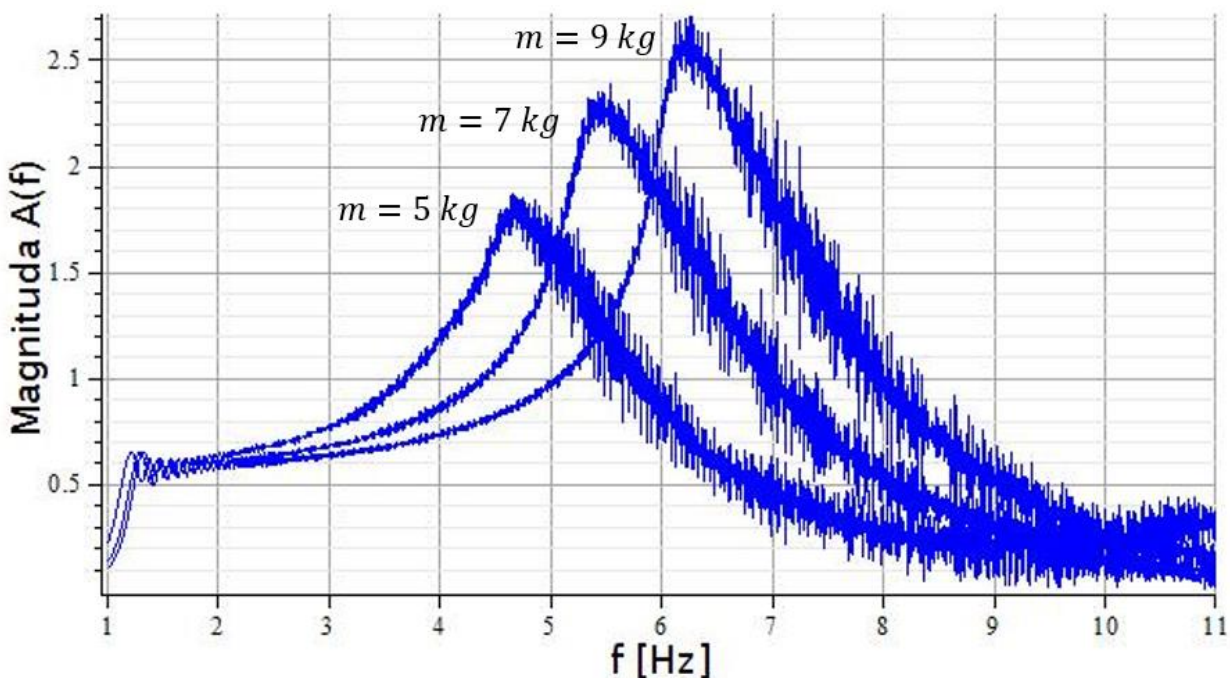


Obr. 8.13 – Zrychlení odezvy při snižující frekvenci 11 – 1 Hz (experiment)

8.1.2 Frekvenční spektrum zrychlení odezvy

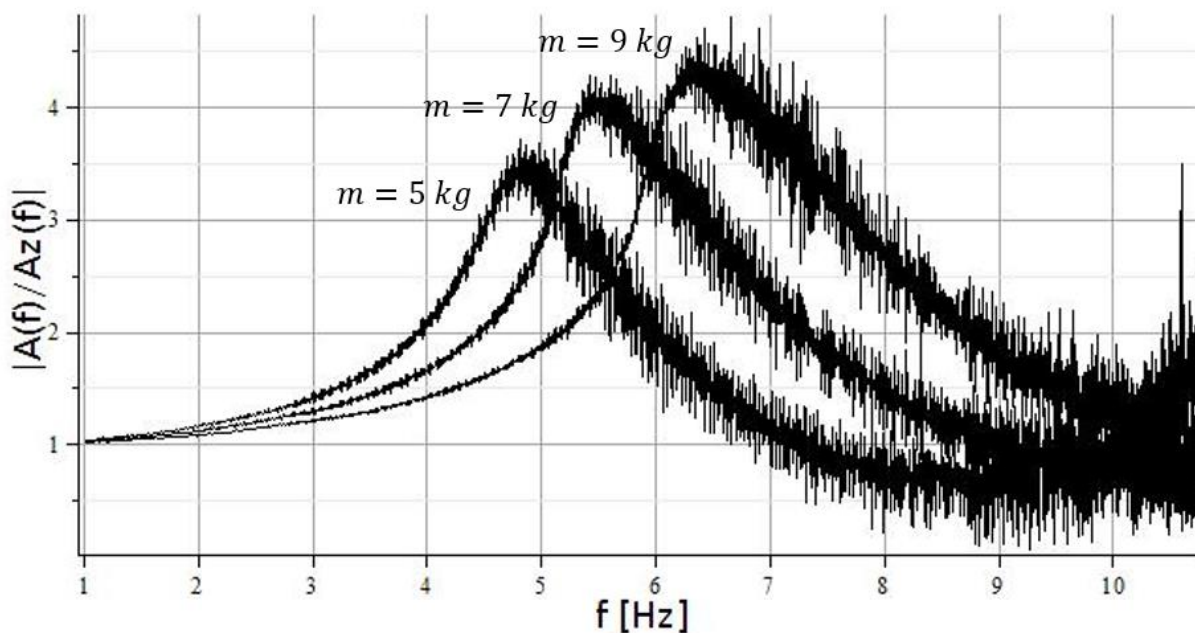


Obr. 8.15 – Frekvenční spektra zrychlení odezvy při zvyšující frekvenci 1 – 11 Hz pro daná zatížení (experiment)

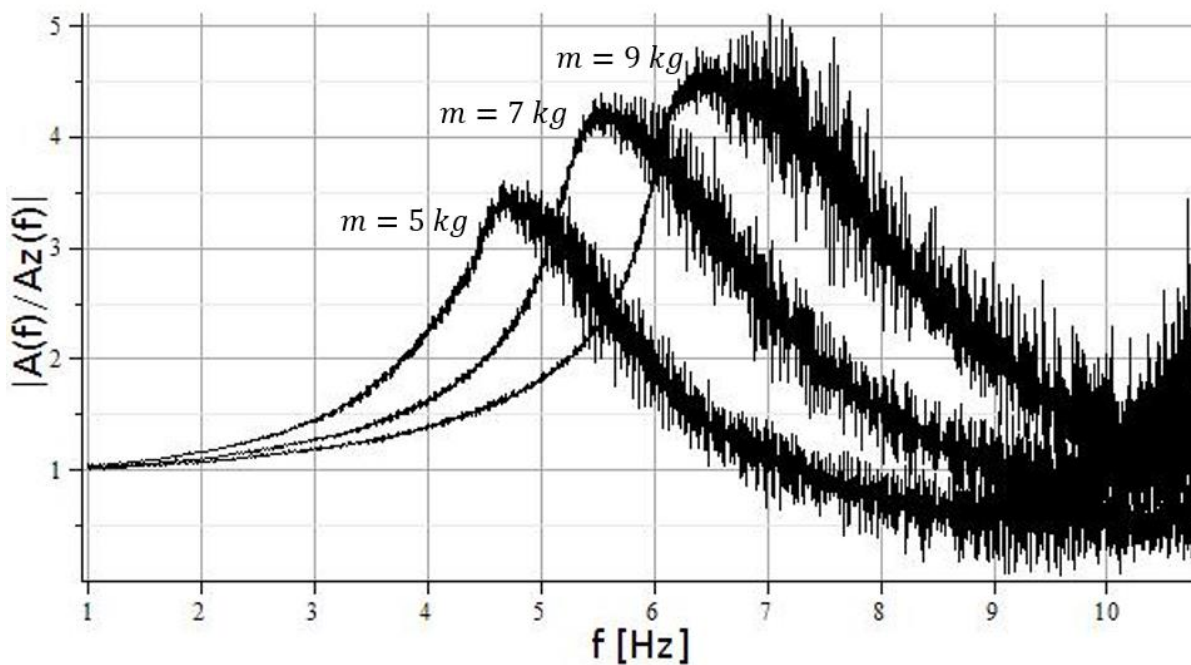


Obr. 8.16 – Frekvenční spektra zrychlení odezvy při snižující frekvenci 11 – 1 Hz pro daná zatížení (experiment)

8.1.3 Amplitudová frekvenční charakteristika



Obr. 8.17 – Amplitudová frekvenční charakteristika při zvyšující frekvenci 1 – 11 Hz pro daná zatížení (experiment)



Obr. 8.18 – Amplitudová frekvenční charakteristika při snižující frekvenci 11 – 1 Hz pro daná zatížení (experiment)



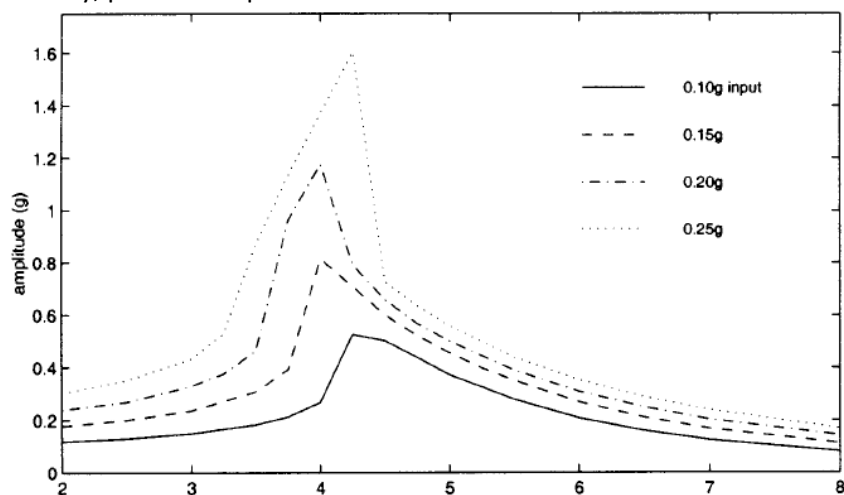
9. DISKUZE

Po důkladnějším porovnání odezev zrychlení získaných z numerické simulace a experimentu můžeme vypořádat celkem podobné výsledky v rezonanční oblasti, jak do tvaru nesymetrických rezonančních vrcholů, tak mírné ohýbání těchto vrcholů na levou stranu při zvyšující frekvenci a na pravou stranu při snižující frekvenci, což přesně odpovídá chování nelineárních materiálů.

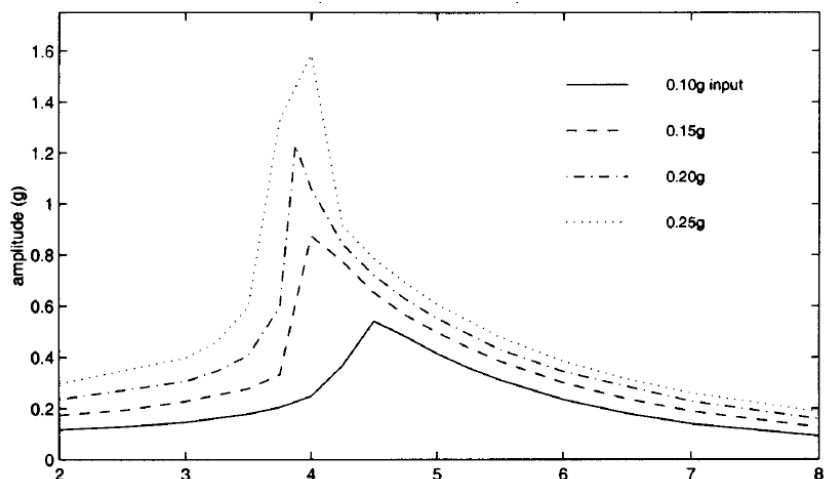
Jak již bylo řečeno v *kap. 8*, jako vstupní hodnoty pro buzení pístu stroje Instron E3000 byly nahrány body výchylky kinematického buzení $z(t)$, které po druhé derivaci dávaly požadovaný výsledek (zrychlení budící funkce s téměř konstantní amplitudou $0.1g$ - viz *obr. 7.2*). Jistá odchylka experimentu od simulace zejména v mimorezanančních oblastech odezev zrychlení můžeme být způsobena systémem zpětnovazebního řízení servoelektrického stroje Instron E3000, který generoval budící signál s jistou odchylkou ve zrychlení - viz *obr. 8.4*, resp. *8.6*. V současné době je připraven podklad pro konzultaci s dodavatelem.

U výsledků amplitudových frekvenčních charakteristik, jak z numerické simulace, tak z experimentálního měření se nelinearita výrazně neprojevila, tak aby docházelo ke vzniku nestabilních částí charakteristiky (viz *obr. 3.4*). Na základě prostudování odborné práce [5], která se také zabývá viskoelastickými vlastnostmi polyuretanových pěn, bylo zjištěno, že vliv vstupní amplitudy zrychlení (až $0.25g$) v různých úrovních stlačení PU pěny na projevy nelinearity je značný. Tyto rozdíly pro různé úrovně stlačení (30 %, 40 % a 50 %) PU pěny je možné vidět na *obr. 9.1*, *9.2* a *9.3*.

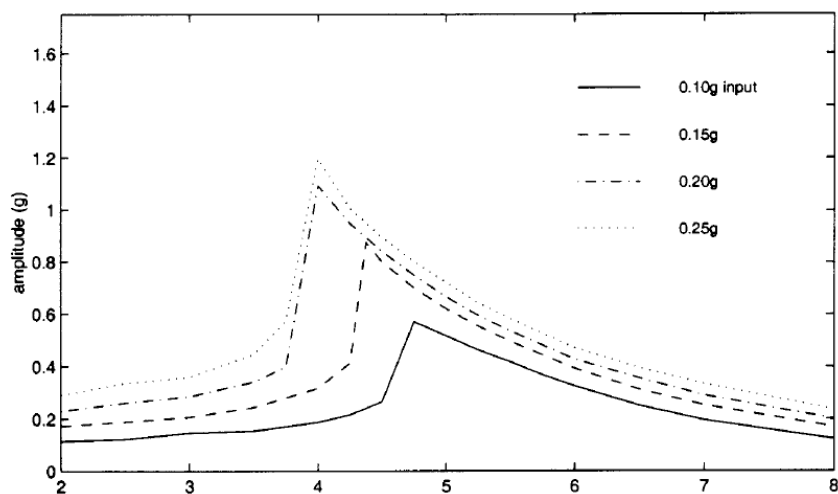
Z těchto obrázků je patrné, že např. při 30% a 40% stlačení pěny a se zvyšující vstupní amplitudou zrychlení se rezonanční vrcholy ohýbají z levé strany na pravou. U 50% stlačení pěny se vrcholy ohýbají pouze na stranu levou stranu. Při úrovni zrychlení $0.1g$ výsledky experimentu v této práci vykazující dobrou shodu charakteru průběhu s výsledky uvedenými v [5].



Obr. 9.1 – Amplitudová frekvenční charakteristika při daných amplitudách vstupního zrychlení a 30% kompresi pěny[5]



Obr. 9.2 – Amplitudová frekvenční charakteristika při daných amplitudách vstupního zrychlení a 40% kompresi pěny[5]



Obr. 9.3 – Amplitudová frekvenční charakteristika při daných amplitudách vstupního zrychlení a 50% kompresi pěny[5]



10. ZÁVĚR

Cílem této diplomové práce bylo především, jak je již z názvu patrné, zkonstruovat takové experimentální zařízení, prostřednictvím kterého bude možné stanovovat amplitudové frekvenční charakteristiky viskoelastických materiálů. Pro vybuzení viskoelastických vzorků s konstantní amplitudou zrychlení byla použita budící funkce modifikovaného rozmítaného *sinu*.

Jako nelineární materiál byl zvolen vzorek polyuretanové pěny získaný z automobilového podniku Škoda Auto a.s. Vzorek pěny byl popsán nelineárním matematickým modelem, který zahrnoval nelineární vratnou, tlumící a třecí sílu.

Na základě těchto vstupních dat a popisu nelineární kmitající soustavy byl také vytvořen program v softwaru Maple 14, který numericky simuloval zadaný kmitající nelineární systém pro konkrétní materiálové konstanty matematického modelu PU pěny a dané zatěžující hmotnosti 5, 7, a 9 kg.

Pokračováním této práce by mohlo být získání takových konstant popisujících nelineární materiál, který bude následně podroben experimentu. a výsledky porovnány. K lepší porovnatelnosti výsledků amplitudových frekvenčních charakteristik by bylo vhodné prověřit, zda by zatěžující stroj Instron E3000 byl schopen lépe generovat zadaný signál s konstantní amplitudou zrychlení, tak jak je navržena v *kap. 5* a použita při numerické simulaci.



Použitá literatura

- [1] JULIŠ, K., BREPTA, R. a kol.: *Mechanika*. Praha: SNTL, 1987, Technický průvodce.
- [2] BREPTA, R., PŮST L., TUREK F.: *Mechanické kmitání*. Praha: Sobotáles, 1994, ISBN 80-901-6848-5.
- [3] CIRKL, D.: *Mechanické vlastnosti polyuretanové pěny*. Disertační práce, TU v Liberci, 2005.
- [4] SIVČÁK, M.: *Dynamika vibroizolačního systému s více stupni volnosti*. Disertační práce, TU v Liberci, 2009.
- [5] WHITE S. W., KIM S. K., BAJAJ A. K., DAVIES P.: *Experimental Techniques and Identification of Nonlinear and Viscoelastic Properties of Flexible Polyurethane Foam*. Ray W. Herrick Laboratories, School of Mechanical Engineering, Purdue University, 1999.
- [6] ONDROUCH, J., PODEŠVA, J.: *Technické kmitání*. Ostrava: Vysoká škola báňská, 2001.
- [7] CIRKL, D.: *Návrh zatěžovacího zařízení pro experimentální zjištění amplitudové frekvenční charakteristiky*. Teze habilitační přednášky, TU v Liberci, leden 2014
- [8] MANSFIELD, Neil J.: *Human response to vibration*. Boca Raton, FL: CRC Press, 2005, ISBN 04-152-8239-X.
- [9] Katalog - lineární vedení. *Hiwin* [online]. 2014 [cit. 2014-05-21]. Dostupné z: <http://www.hiwin.cz/download/d400ebdd710ede5087226b5a4811c5ec>
- [10] ElectroPuls E3000 All-Electric Test Instrument. *Instron* [online]. 2014 [cit. 2014-05-22]. Dostupné z: <http://www.instron.us/wa/product/ElectroPuls-E3000-All-Electric-Test-Instrument.aspx>

TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI

Fakulta strojní

Katedra mechaniky, pružnosti a pevnosti



PŘÍLOHA Č. 1

Výpis z programu Maple

-

Přenos soustavy s lineárním materiálovým modelem



```
> restart;
with(plots):
with(DiscreteTransforms):
with(LinearAlgebra):
> n:=2:      #Exponent budící funkce [-]
h:=0.01:    #Krok [s]
T:=240:     #Celková doba buzení [s]
```

Kinematické buzení z(t)

Budící funkce z(t) kinematického buzení

```
> z:=t->za(t)*sin(q(t));
q:=t->c*(t+t0)^n;
omega:=t->diff(q(t),t);
za:=t->Za/((t+t0)^(2*(n-1)));
z:=t->za(t)*sin(q(t));      #výchylka z(t)
vz:=D(z):                  #rychlost vz(t)
az:=(D@@2)(z):              #zrychlení az(t)
```

$$z := t \rightarrow za(t) \sin(q(t))$$

$$q := t \rightarrow c (t + t0)^n$$

$$\omega := t \rightarrow \frac{d}{dt} q(t)$$

$$za := t \rightarrow \frac{Za}{(t + t0)^{2n-2}}$$

Výchylka základu z(t), rychlost vz(t) a zrychlení az(t)

```
> z(t); vz(t); az(t);
```

$$\begin{aligned} & \frac{Za \sin(c (t + t0)^2)}{(t + t0)^2} \\ & - \frac{2 Za \sin(c (t + t0)^2)}{(t + t0)^3} + \frac{2 Za \cos(c (t + t0)^2) c}{t + t0} \\ & \frac{6 Za \sin(c (t + t0)^2)}{(t + t0)^4} - \frac{6 Za \cos(c (t + t0)^2) c}{(t + t0)^2} - 4 Za \sin(c (t + t0)^2) c^2 \end{aligned}$$

Výpočet konstanty amplitudy budící funkce Za [m*s^2]

```
> Za:=0.1*g/(c^2*n^2);
```

Výpočet počátečního času t0 [s]

```
> t0:=(2*Pi*f0)/(n*c)^(1/(n-1));
```

$$Za := \frac{0.025000000000 \text{ g}}{c^2}$$

$$t0 := \frac{\pi f0}{c}$$

Výpočet konstanty c [1/s^2] - např. pro hodnotu konečné frekvence fk a celkové doby T

```
> rov:=2*Pi*fk-n*c*(T+t0)^(n-1):
s:=solve({rov},{c}):
assign(s):
```

Specifikace hodnot



```
> f0:=1: #Počáteční frekvence [Hz]
fk:=11: #Konečná frekvence [Hz]
g:=9.80665: #Gravitační zrychlení [m/s^2]
m:=3: #Zatěžující hmotnost [kg]
b:=30: #Konstanta tlumení [N*s/m]
k:=2837: #Konstanta tuhosti [N/m]
```

Vyčíslení konstant za, t0 a c

```
> evalf(Za);evalf(t0);evalf(c);
14.30814795
24.
0.1308996939
```

Vyčíslení výchylky v čase t=0 (pro počáteční podmínku odezvy systému)

```
> z0:=eval(z(t),t=0):evalf(z0);
0.
```

Převedení zrychlení az(t) na vektor

```
> j:=0:
Z1:=Vector(floor(T/h+1)):
for i from 0 by h to T do
j:=j+1;
Z1[j]:=evalm(az(i));
od:
```

Fourierova transformace

```
> FZ1:=FourierTransform(Z1):
```

▼ Odezva x(t) na kinematické buzení z(t)

Diferenciální rovnice

```
> DR1:='m*diff(x(t),t,t)+b*(diff(x(t),t)-diff(z(t),t))+k*(x(t)-z(t))=-m*g';
DR2:='diff(x(t),t,t)=a(t)';
```

$$DR1 := m \left(\frac{d^2}{dt^2} x(t) \right) + b \left(\frac{d}{dt} x(t) - \left(\frac{d}{dt} z(t) \right) \right) + k (x(t) - z(t)) = -m g$$

$$DR2 := \frac{d^2}{dt^2} x(t) = a(t)$$

Řešení odezvy systému x(t) na budící funkci z(t)

```
> sol1:=dsolve({DR1,DR2,x(0)=z0-m*g/k,D(x)(0)=0},range=0..T,
numeric,output=listprocedure,maxfun=0):
```

Převedení zrychlení odezvy a(t) na vektor

```
> X01:=eval(a(t),sol1):
> j:=0:
X1:=Vector(floor(T/h+1)):
for i from 0 by h to T do
j:=j+1;
X1[j]:=evalm(X01(i));
od:
```

Fourierova transformace

```
> FX1:=FourierTransform(X1):
```

Přenosová funkce

```
> x11:=FX1/~FZ1:
```

TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI

Fakulta strojní

Katedra mechaniky, pružnosti a pevnosti



PŘÍLOHA Č. 2

Výpis z programu Maple

-

**Přenos soustavy s nelineárním materiálovým
modelem**



```
> restart;
with(plots):
with(Optimization):
with(DiscreteTransforms):
with(LinearAlgebra):
> n:=2:      #Exponent [-]
h:=0.01:     #Krok [s]
T:=240:     #Celková doba buzení [s]
```

Kinematické buzení z(t)

Budící funkce z(t) kinematického buzení

```
> z:=t->za(t)*sin(q(t));
q:=t->c*(t+t0)^n;
omega:=t->diff(q(t),t);
za:=t->Za/((t+t0)^(2*(n-1)));
z:=t->za(t)*sin(q(t));      #výchylka z(t)
vz:=D(z):                  #rychlost vz(t)
az:=(D@@2)(z):              #zrychlení az(t)
```

$$z := t \rightarrow za(t) \sin(q(t))$$

$$q := t \rightarrow c (t + t0)^n$$

$$\omega := t \rightarrow \frac{d}{dt} q(t)$$

$$za := t \rightarrow \frac{Za}{(t + t0)^{2n-2}}$$

Výchylka základu z(t), rychlost vz(t) a zrychlení az(t)

```
> z(t); vz(t); az(t);
```

$$\begin{aligned} & \frac{Za \sin(c (t + t0)^2)}{(t + t0)^2} \\ & - \frac{2 Za \sin(c (t + t0)^2)}{(t + t0)^3} + \frac{2 Za \cos(c (t + t0)^2) c}{t + t0} \\ & \frac{6 Za \sin(c (t + t0)^2)}{(t + t0)^4} - \frac{6 Za \cos(c (t + t0)^2) c}{(t + t0)^2} - 4 Za \sin(c (t + t0)^2) c^2 \end{aligned}$$

Výpočet konstanty amplitudy budící funkce Za [m*s^2]

```
> Za:=0.1*g/(c^2*n^2);
```

Výpočet počátečního času t0 [s]

```
> t0:=(2*Pi*f0)/(n*c)^(1/(n-1));
```

$$Za := \frac{0.02500000000 g}{c^2}$$

$$t0 := \frac{\pi f0}{c}$$

Výpočet konstanty c [1/s^2] - např. pro hodnotu konečné frekvence fk a celkové doby T

```
> rov:=2*Pi*fk-n*c*(T+t0)^(n-1):
s:=solve({rov},{c}):
assign(s):
```



Specifikace hodnot

```
> f0:=1: #Počáteční frekvence [Hz]
   fk:=11: #Konečná frekvence [Hz]
   g:=9.80665: #Gravitační zrychlení [m/s^2]
   m:=3: #Zatěžující hmotnost [kg]
```

Vyčíslení konstant Za, t0 a c

```
> evalf(Za);evalf(t0);evalf(c);
14.30814795
24.
0.1308996939
```

Vyčíslení výchylky v čase t=0 (pro počáteční podmínku odezvy systému)

```
> z0:=eval(z(t),t=0):evalf(z0);
```

Převedení zrychlení az(t) na vektor

```
> j:=0:
   Z1:=Vector(floor(T/h+1)):
   for i from 0 by h to T do
     j:=j+1;
     Z1[j]:=evalm(az(i));
   od;
```

Fourierova transformace

```
> FZ1:=FourierTransform(Z1):
```

Odezva na kinematické buzení x(t)

Definice matematického modelu PU pěny

```
> Fv:='Fu+Fp';
   Fu:='mi*(1-exp(-ku*(x(t)-z(t))))';
   Fp:='pp*Sp*((hp/(hp-(x(t)-z(t))))^np-(hp/(hp+(x(t)-z(t))))^np)';
   Ft:='c1*abs(diff(xt1(t),t))^n1*signum(diff(xt1(t),t))+c2*abs(diff(xt2(t),t))^n2*signum(diff(xt2(t),t))+c3*abs(diff(xt3(t),t))^n3*signum(diff(xt3(t),t))';
   fT:='2*fT0/Pi*arctan(k1*(diff(x(t),t)-diff(z(t),t)))+k2*(abs(diff(x(t),t)-diff(z(t),t))^(k3)*signum(diff(x(t),t)-diff(z(t),t)))';
   Fvt:='Fv+Ft';
   FT:='fT*Fvt';
   Fc:='Fvt+FT';
```

$$F_v := F_u + F_p$$

$$F_u := m_i (1 - e^{-k_u (x(t) - z(t))})$$

$$F_p := p_p s_p \left(\left(\frac{h_p}{h_p - x(t) + z(t)} \right)^{n_p} - \left(\frac{h_p}{h_p + x(t) - z(t)} \right)^{n_p} \right)$$

$$F_t := c_1 \left| \frac{d}{dt} x_{t1}(t) \right|^{n_1} \text{signum} \left(\frac{d}{dt} x_{t1}(t) \right) + c_2 \left| \frac{d}{dt} x_{t2}(t) \right|^{n_2} \text{signum} \left(\frac{d}{dt} x_{t2}(t) \right) + c_3 \left| \frac{d}{dt} x_{t3}(t) \right|^{n_3} \text{signum} \left(\frac{d}{dt} x_{t3}(t) \right)$$



$$fT := \frac{2 fT0 \arctan\left(kl \left(\frac{d}{dt} x(t) - \left(\frac{d}{dt} z(t)\right)\right)\right)}{\pi} + k2 \left|\frac{d}{dt} x(t) - \left(\frac{d}{dt} z(t)\right)\right|^{k3} \text{signum}\left(\frac{d}{dt} x(t) - \left(\frac{d}{dt} z(t)\right)\right)$$

$$Fvt := Fv + Ft$$

$$FT := fT Fvt$$

$$Fc := Fvt + FT$$

Specifikace konstant vratné síly PU pěny

```
> mi:=20:
  Sp:=0.03:
  pp:=100:
  np:=3:
  hp:=0.052:
  ku:=500:
```

Specifikace konstant vratné síly PU pěny

```
> p0i:=100:
  hi:=0.05:
  S01:=0.2:
  S02:=0.029:
  S03:=0.00013:
  n01:=1.5:
  n02:=2.2:
  n03:=6:
  c1:=4:
  c2:=90:
  c3:=95:
  n1:=1/7:
  n2:=1/4:
  n3:=1/4:
```

Specifikace konstant třecí síly PU pěny

```
> fT0:=0.028:
  k1:=20000:
  k2:=0.39:
  k3:=1.2:
```

Výpočet statické výchylky

```
> Fk0:=y->mi*(1-exp(-ku*y))+pp*Sp*((hp/(hp-(y)))^np-(hp/(hp+(y)))^np)-m*g:
  xstat:=fsolve(Fk0(y));
  xstat:=0.01791960948
```

Diferenciální rovnice

```
> DR1:='m*diff(x(t),t,t)+Fc-m*g';
  DR2:='diff(x(t),t,t)=a(t)';
  DR3:='diff(xt1(t),t)=(abs((p0i/c1*S01*((hi/(hi-((x(t)-z(t))-xt1(t))))^n01-(hi/(hi+((x(t)-z(t))-xt1(t))))^n01))))^(1/n1)*signum((p0i/c1*S01*((hi/(hi-((x(t)-z(t))-xt1(t))))^n01-(hi/(hi+((x(t)-z(t))-xt1(t))))^n01))))';
  DR4:='diff(xt2(t),t)=(abs((p0i/c2*S02*((hi/(hi-((x(t)-z(t))-xt2(t))))^n02-(hi/(hi+((x(t)-z(t))-xt2(t))))^n02))))^(1/n2)*signum((p0i/c2*S02*((hi/(hi-((x(t)-z(t))-xt2(t))))^n02-(hi/(hi+((x(t)-z(t))-xt2(t))))^n02))))';
  DR5:='diff(xt3(t),t)=(abs((p0i/c3*S03*((hi/(hi-((x(t)-z(t))-xt3(t))))^n03-(hi/(hi+((x(t)-z(t))-xt3(t))))^n03))))^(1/n3)*signum((p0i/c3*S03*((hi/(hi-((x(t)-z(t))-xt3(t))))^n03-(hi/(hi+((x(t)-z(t))-xt3(t))))^n03))))';
```



```

xt3(t)))^n03-(hi/(hi+((x(t)-z(t))-xt3(t))))^n03))))^(1/n3)*
signum((p0i/c3*S03*((hi/(hi-((x(t)-z(t))-xt3(t))))^n03-(hi/
(hi+((x(t)-z(t))-xt3(t))))^n03))))';
DR6:='diff(xt1(t),t)=vt1(t)';
DR7:='diff(xt2(t),t)=vt2(t)';
DR8:='diff(xt3(t),t)=vt3(t)';

```

$$DR1 := m \left(\frac{d^2}{dt^2} x(t) \right) + Fc - mg$$

$$DR2 := \frac{d^2}{dt^2} x(t) = a(t)$$

$$DR3 := \frac{d}{dt} xt1(t)$$

$$= \left| \frac{p0i S01 \left(\left(\frac{hi}{hi - x(t) + z(t) + xt1(t)} \right)^{n01} - \left(\frac{hi}{hi + x(t) - z(t) - xt1(t)} \right)^{n01} \right)}{c1} \right|^{\frac{1}{n1}}$$

$$\text{signum} \left(\frac{1}{c1} \left(p0i S01 \left(\left(\frac{hi}{hi - x(t) + z(t) + xt1(t)} \right)^{n01} - \left(\frac{hi}{hi + x(t) - z(t) - xt1(t)} \right)^{n01} \right) \right) \right)$$

$$DR4 := \frac{d}{dt} xt2(t)$$

$$= \left| \frac{p0i S02 \left(\left(\frac{hi}{hi - x(t) + z(t) + xt2(t)} \right)^{n02} - \left(\frac{hi}{hi + x(t) - z(t) - xt2(t)} \right)^{n02} \right)}{c2} \right|^{\frac{1}{n2}}$$

$$\text{signum} \left(\frac{1}{c2} \left(p0i S02 \left(\left(\frac{hi}{hi - x(t) + z(t) + xt2(t)} \right)^{n02} - \left(\frac{hi}{hi + x(t) - z(t) - xt2(t)} \right)^{n02} \right) \right) \right)$$

$$DR5 := \frac{d}{dt} xt3(t)$$

$$= \left| \frac{p0i S03 \left(\left(\frac{hi}{hi - x(t) + z(t) + xt3(t)} \right)^{n03} - \left(\frac{hi}{hi + x(t) - z(t) - xt3(t)} \right)^{n03} \right)}{c3} \right|^{\frac{1}{n3}}$$

$$\text{signum} \left(\frac{1}{c3} \left(p0i S03 \left(\left(\frac{hi}{hi - x(t) + z(t) + xt3(t)} \right)^{n03} - \left(\frac{hi}{hi + x(t) - z(t) - xt3(t)} \right)^{n03} \right) \right) \right)$$

$$DR6 := \frac{d}{dt} xt1(t) = vt1(t)$$



$$DR7 := \frac{d}{dt} x_2(t) = v_2(t)$$

$$DR8 := \frac{d}{dt} x_3(t) = v_3(t)$$

Počáteční podmínky

```
> ICs:=x(0)=z0+xstat,D(x)(0)=0,xt1(0)=z0+xstat,xt2(0)=z0+xstat,  
xt3(0)=z0+xstat:
```

Řešení odezvy systému x(t) na budící funkci z(t)

```
> sol1:=dsolve({DR1,DR2,DR3,DR4,DR5,DR6,DR7,DR8,ICs},type=  
numeric,range=0..T,output=listprocedure,maxfun=0,stepsize=  
0.001):
```

Převod zrychlení odezvy a(t) na vektor

```
> X01:=eval(a(t),sol1):  
> j:=0:  
X1:=Vector(floor(T/h+1)):   
for i from 0 by h to T do  
j:=j+1;  
X1[j]:=evalm(X01(i));  
od:
```

Fourierova transformace

```
> FX1:=FourierTransform(X1):
```

▼ Přenos systému - zvyšující se frekvence

Přenosová funkce

```
> x11:=zip(`/`,``,FX1,FZ1):
```

▼ Přenos systému - snižující se frekvence

Specifikace hodnot pro frekvence

```
> f0:=11: #Počáteční frekvence [Hz]  
fk:=1: #Konečná frekvence [Hz]
```

Vyčíslení konstant Za, t0 a c

```
> evalf(Za);evalf(t0);evalf(c);  
14.30814795  
-264.  
-0.1308996939
```

Vyčíslení výchylky v čase t=0 (pro počáteční podmínku odezvy systému)

```
> z0:=eval(z(t),t=0):evalf(z0);
```

Převod zrychlení az(t) na vektor

```
> j:=0:  
Z2:=Vector(floor(T/h+1)):   
for i from 0 by h to T do  
j:=j+1;  
Z2[j]:=evalm(az(i));  
od:
```



Fourierova transformace

```
> FZ2:=FourierTransform(Z2):
```

Počáteční podmínky

```
> ICs:=x(0)=z0+xstat,D(x)(0)=vz0,xt1(0)=z0+xstat,xt2(0)=z0+  
xstat,xt3(0)=z0+xstat:
```

```
> sol2:=dsolve({DR1,DR2,DR3,DR4,DR5,DR6,DR7,DR8,ICs},type=  
numeric,range=0..T,output=listprocedure,maxfun=0,stepsize=  
0.001):
```

Převedení zrychlení odezvy $a(t)$ na vektor

```
> X02:=eval(a(t),sol2):
```

```
> j:=0:  
X2:=Vector(floor(T/h+1)):  
for i from 0 by h to T do  
j:=j+1;  
X2[j]:=evalm(X02(i));  
od:
```

Fourierova transformace

```
> FX2:=FourierTransform(X2):
```

Přenosová funkce

```
> xi2:=zip(`/`,FX2,FZ2):
```

TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI

Fakulta strojní

Katedra mechaniky, pružnosti a pevnosti

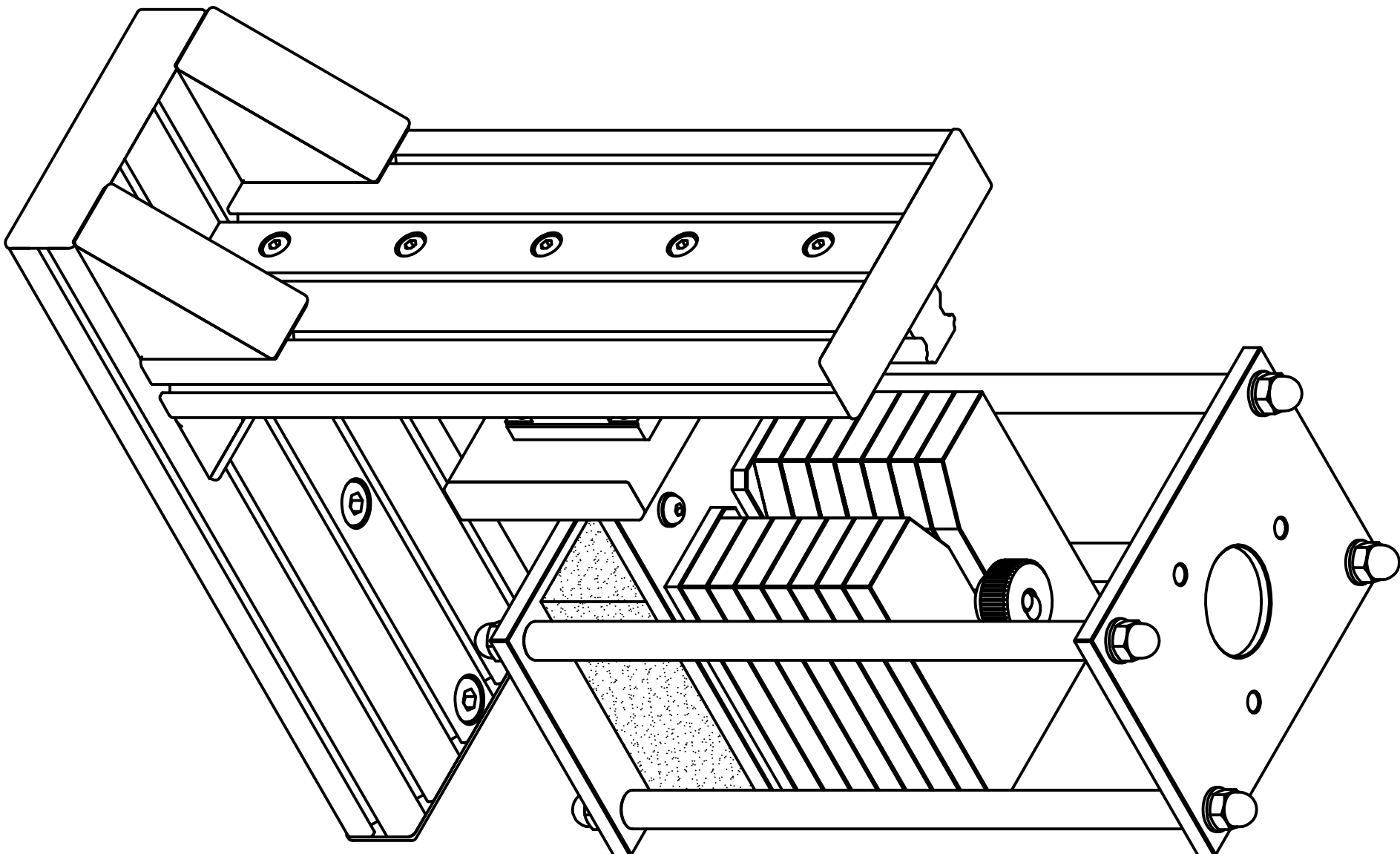
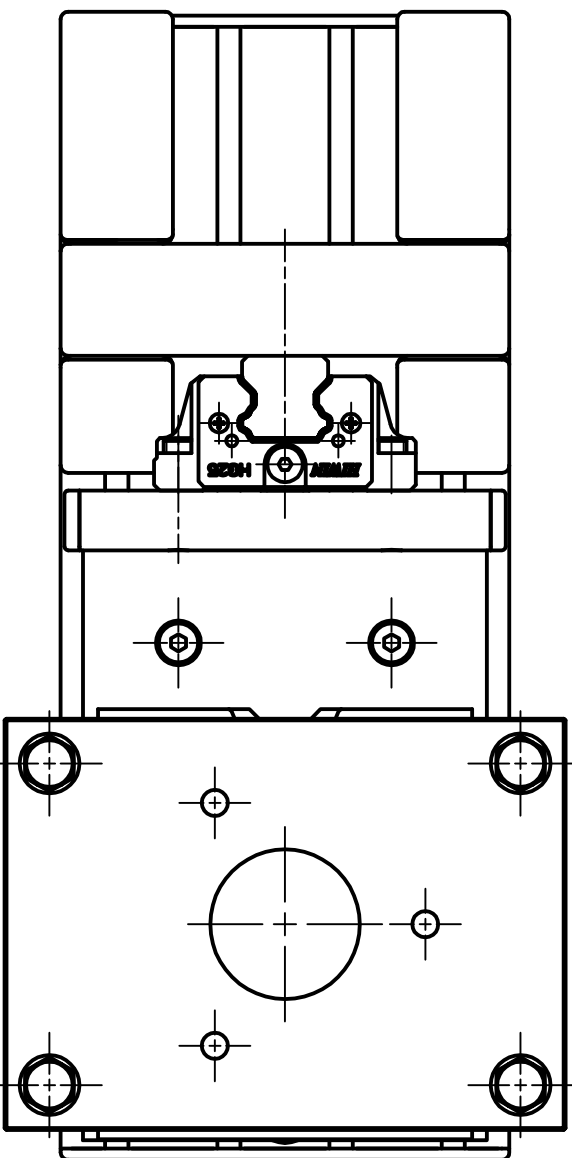
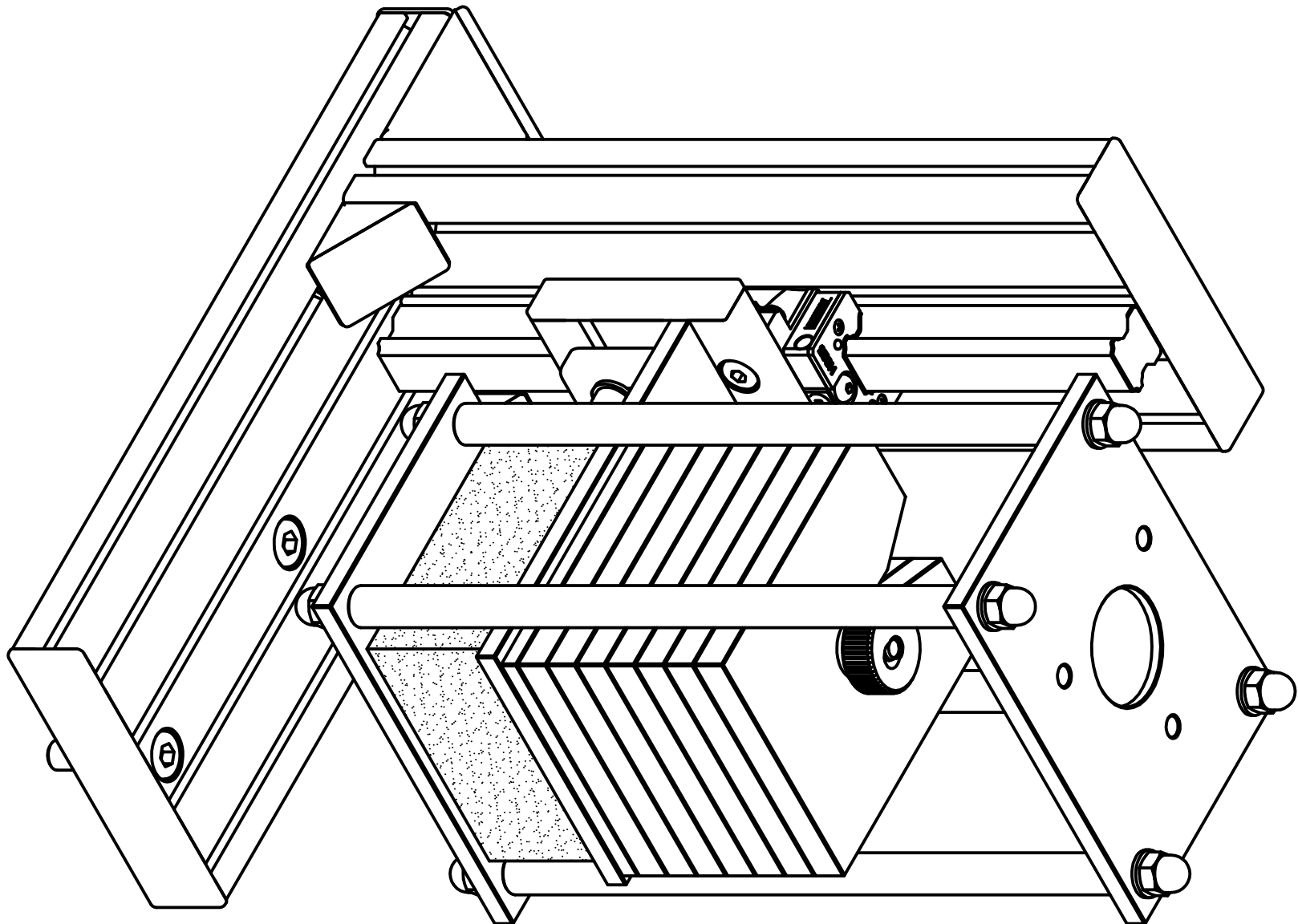
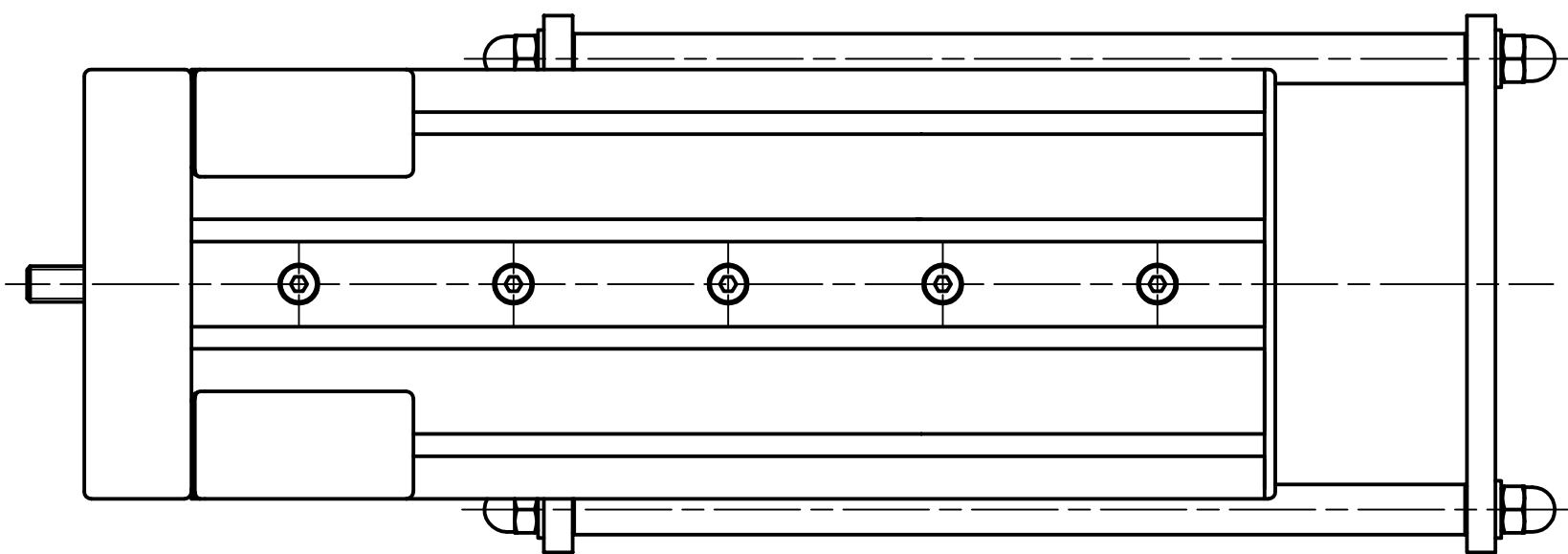
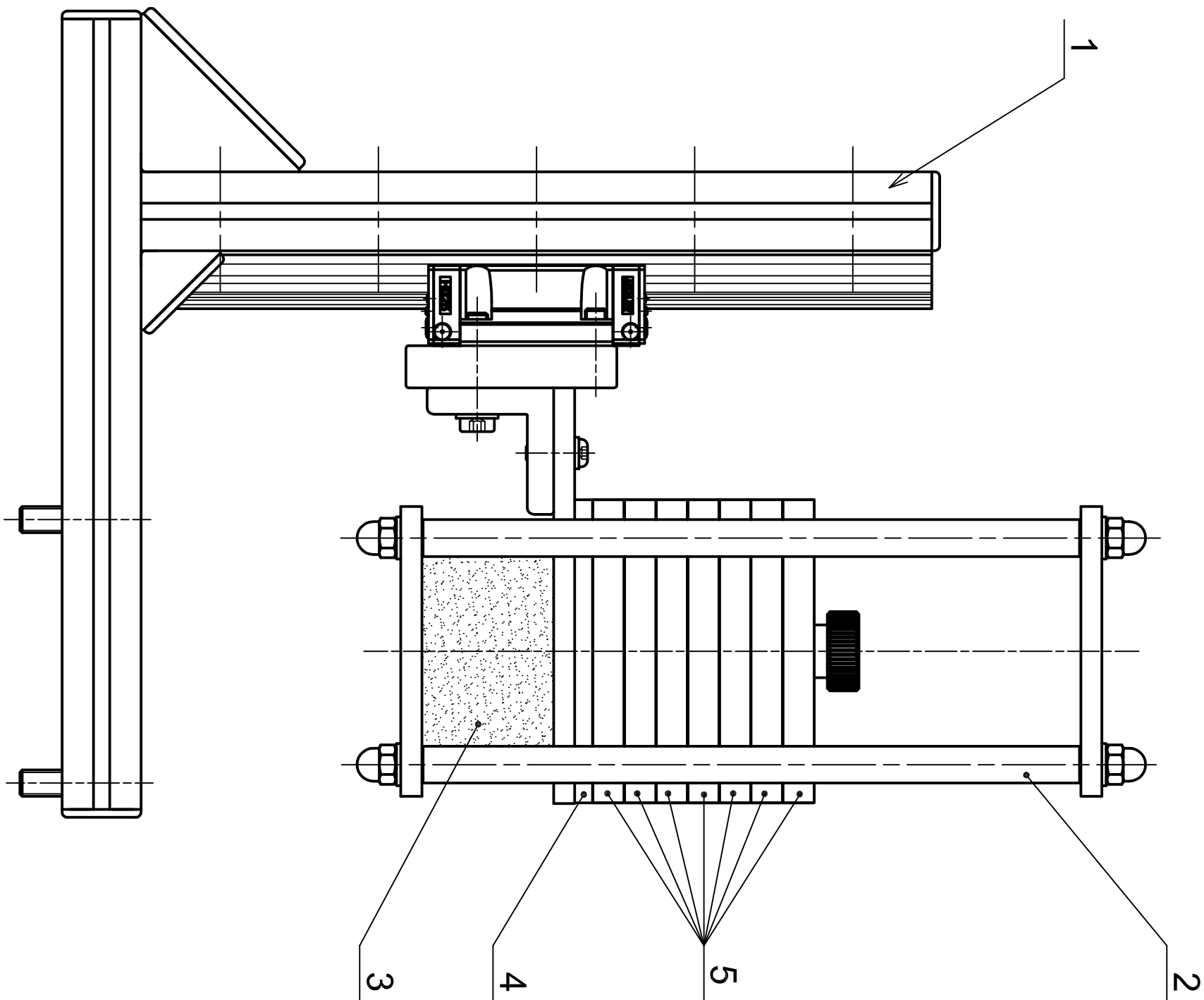
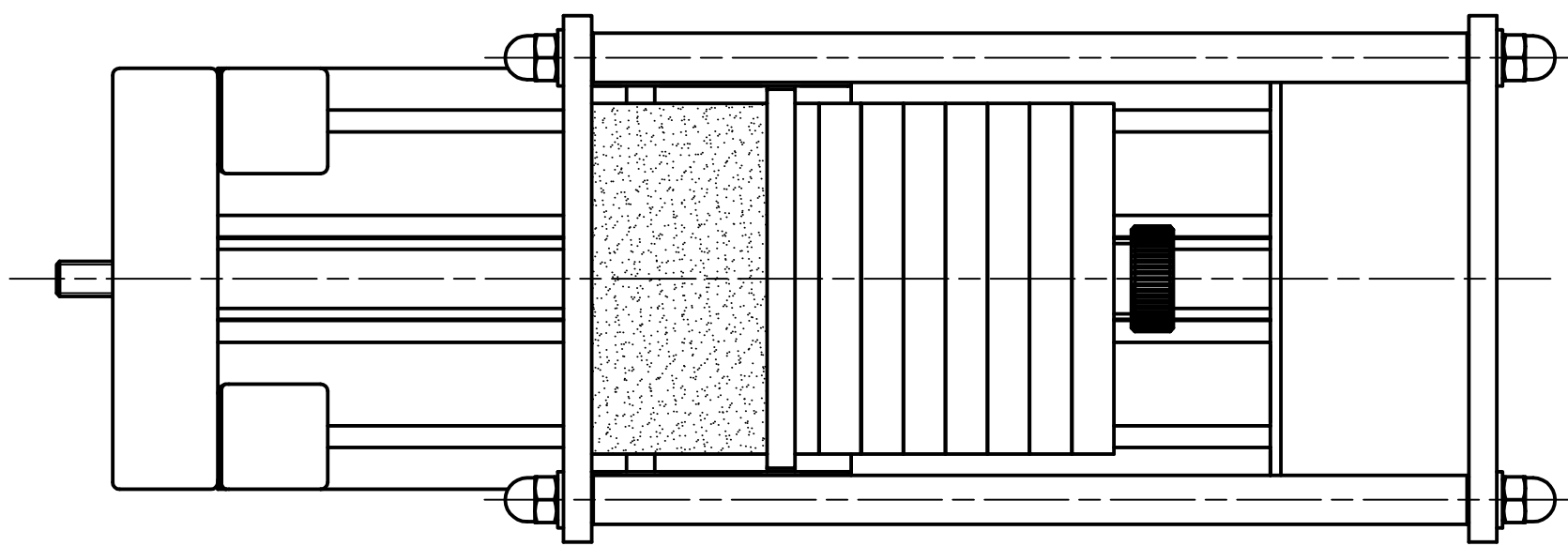


PŘÍLOHA Č. 3

Výkresová dokumentace

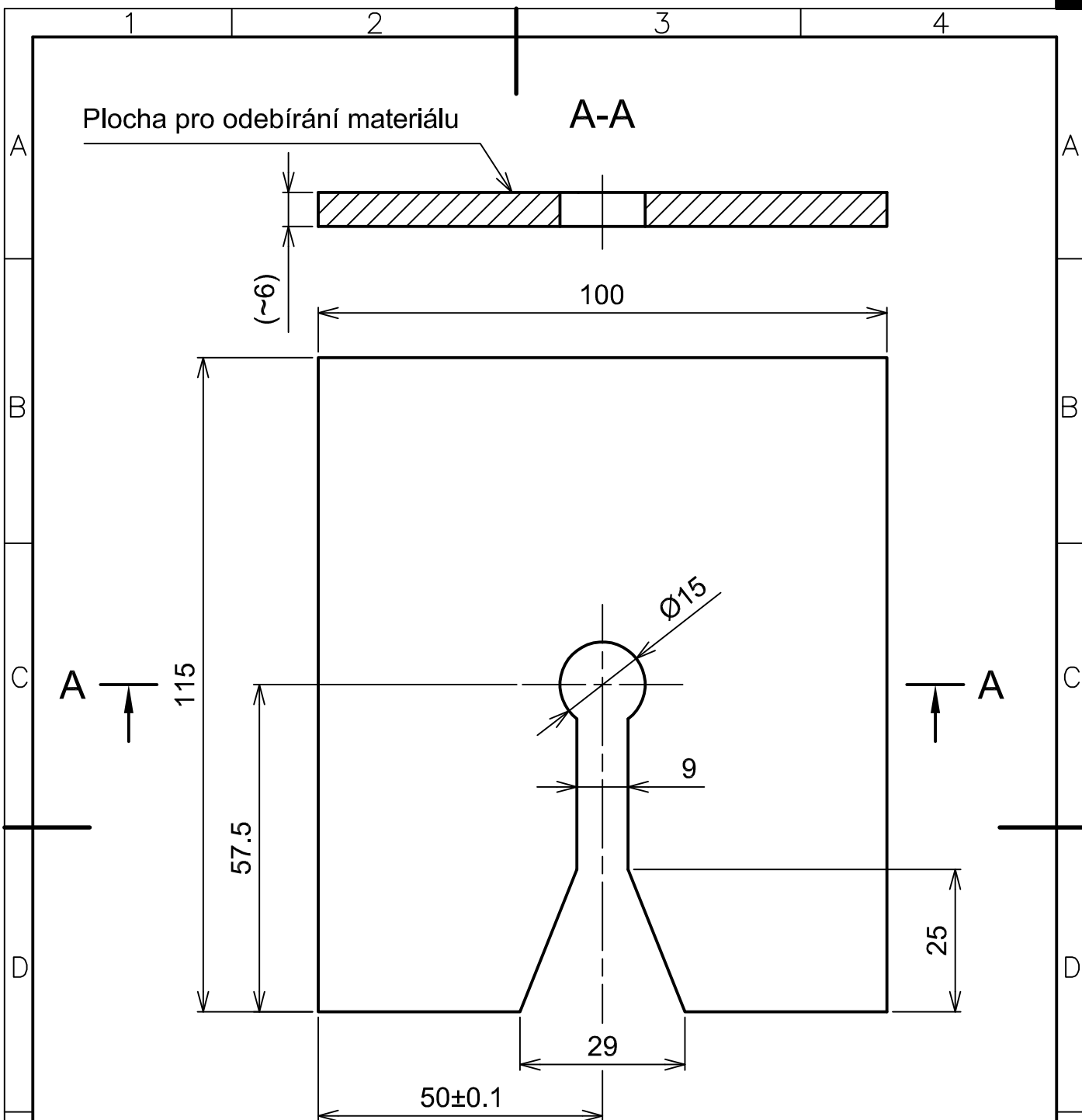
-

Zkušební zařízení



5	Závaží / DP-PV-00.00.02	☐ 100x12-115 ČSN 42 5522.11	S275	7
4	Závaží 0 / DP-PV-00.00.01	☐ 100x6-115 ČSN 42 5522.11	S275	1
3	PU vzorek / DP-PV-00.00.03	100x100x50	PU	1
2	Nosná konstrukce / DP-PV-02.00.00			1
1	Posuvná konstrukce / DP-PV-01.00.00			1
Poz	Označení / Vyřes	Poloovar	Materiál	Ks

Rozm.-Přod.		c)		Mater.		PŘESNOST ISO 2768-mK	
		b)		Tř. odp.		TOLEROVÁNÍ ISO 8015	
		a)		kg Htr. mm.		PROJEKT	
		Index		kg		PROJEKT	
		Podpis					
Změna							
Pozn.							
		Doplnění					
		Kreslil					
		Kontrola					
		Přezkoušel					
		Č. seznamu					
		Normativ.					
		Stav účt.					
		Schválil					
		Číslo					
		Datum					
		1.9.2013					

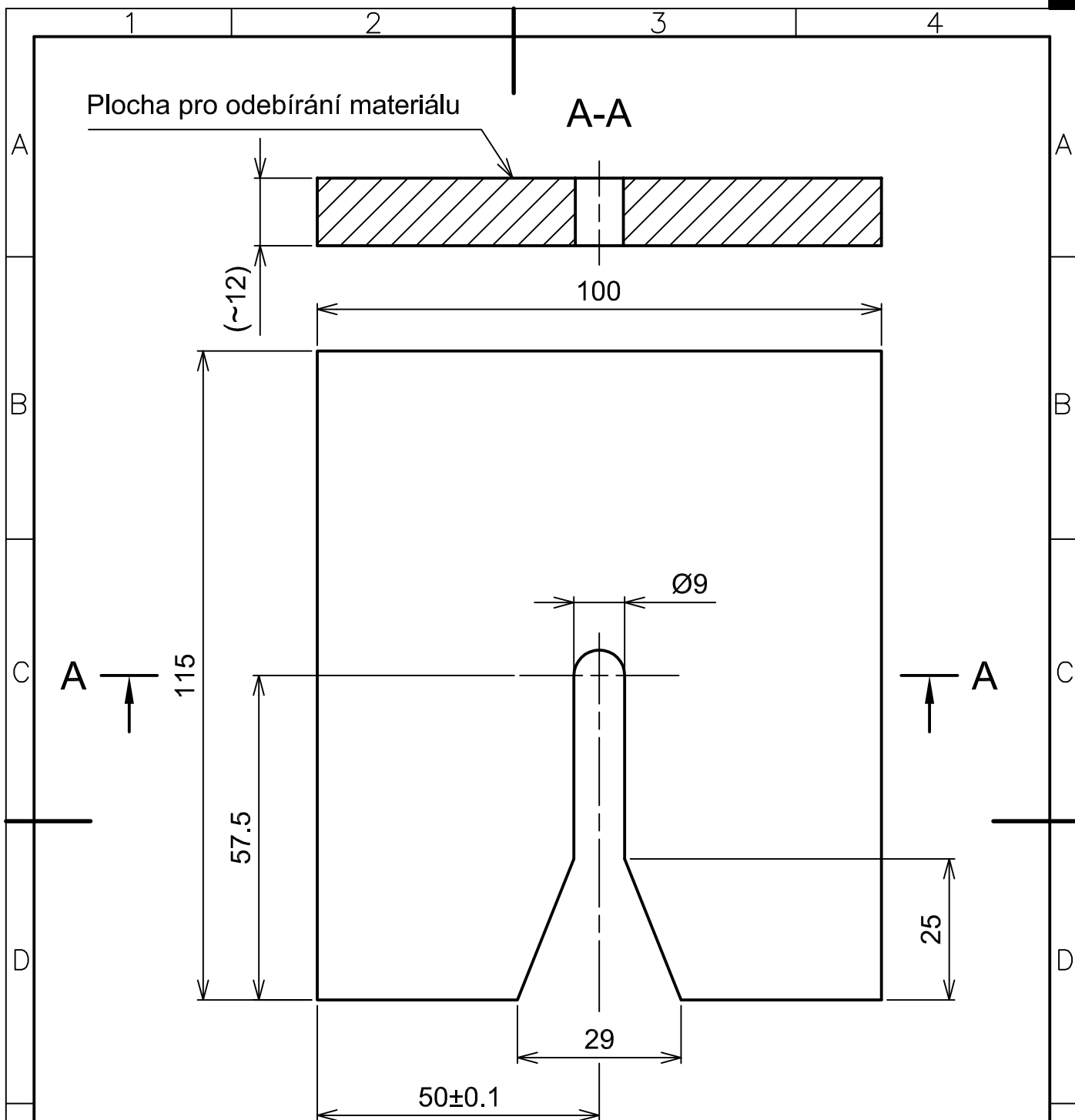


Hrany srazit max. na $2 \times 45^\circ$

Dodržet požadovanou hmotnost $0.37 \text{ kg} \pm 1 \text{ g}$

∇ Ra 1.6

Rozm.-Polot.		100x6-115		ČSN 42 5522.01				PŘESNOST ISO 2768-mK	
				c)				TOLEROVÁNÍ ISO 8015	
				b)				PROMÍTÁNÍ	
				a)					
Změna		Datum		Index		Podpisy		 TU v Liberci ZÁVAŽÍ 0 DP-PV-00.00.01 List	
Měřítka	Pozn.	Navrhl		Kovács		Název			
1:1		Kreslil		Kovács					
		Přezkoušel							
Č.seznamu		Technolog				Typ			
Č.sestavy		Normaliz.				Čís.výkresu			
Starý výkr.		Schválil		Čirkl					
Nový výkr.		Datum		3.7.2013					



Hrany srazit max. na 2x45°

Dodržet požadovanou hmotnost 1 kg ± 1 g

Ra 1.6

Rozm.-Polot.		□100x14-115		ČSN 42 5522.01				PŘESNOST ISO 2768-mK		
			c)	Mater.	S275	Tř. odp.		TOLEROVÁNÍ ISO 8015		
			b)	Č. hm.	1,00 kg	Hr. hm.	kg	PROMÍTÁNÍ 		
			a)	 TU v Liberci ZÁVAŽÍ DP-PV-00.00.02 List						
Změna		Datum	Index							Podpisy
Měřítka 1:1	Pozn.	Navrhl	Kovács							
		Kreslil	Kovács							
		Přezkoušel								
Č.seznamu		Technolog	Typ							
Č.sestavy		Normaliz.	Čís.výkresu							
Starý výkr.		Schválil	Církl							
Nový výkr.		Datum	3.7.2013							

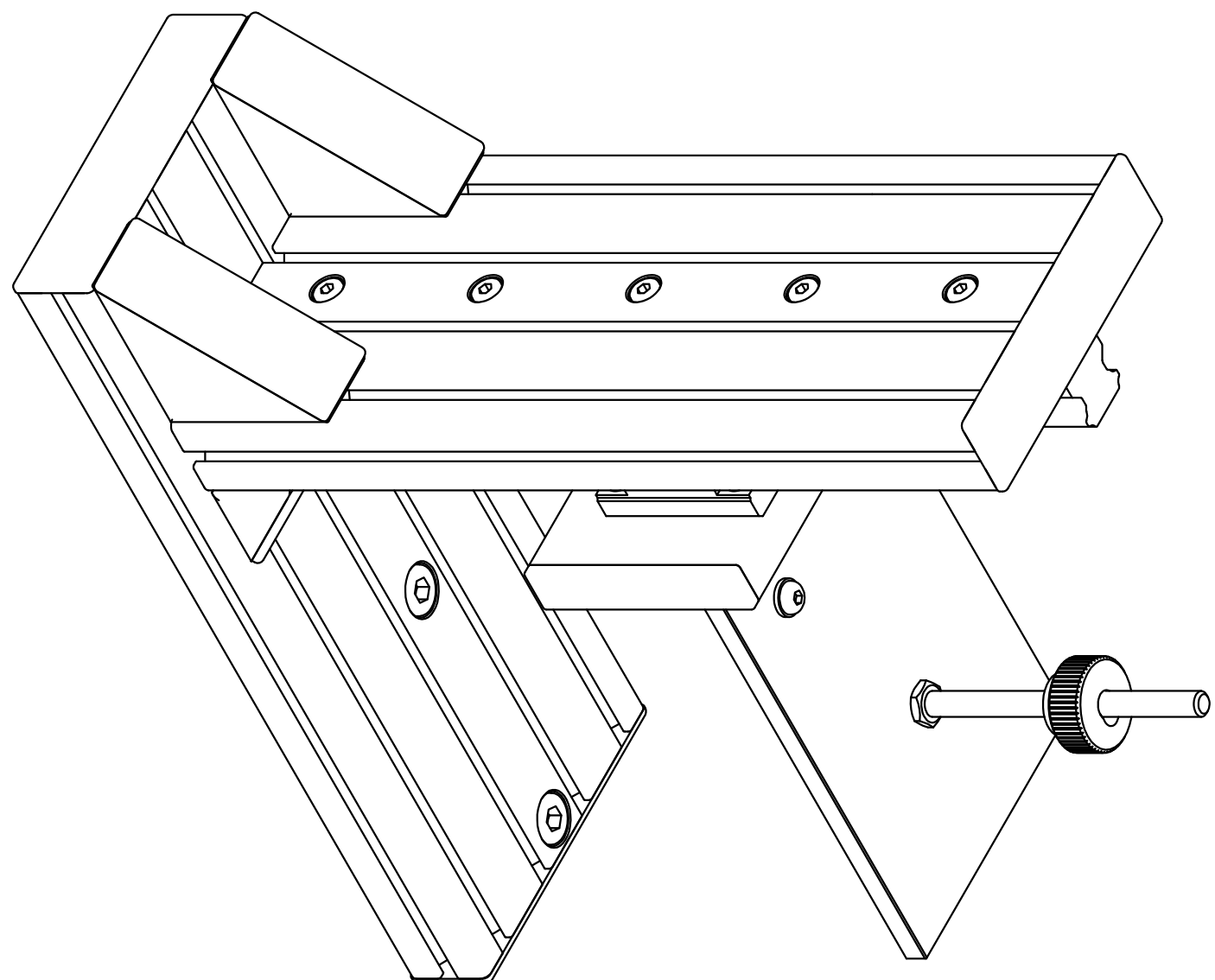
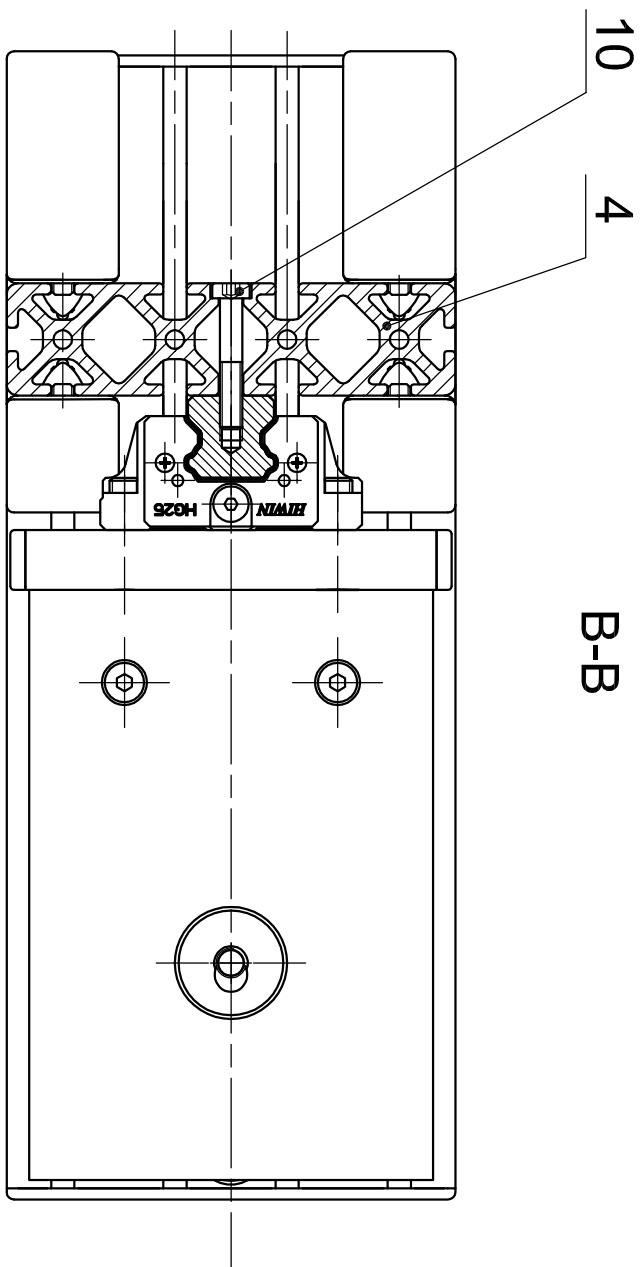
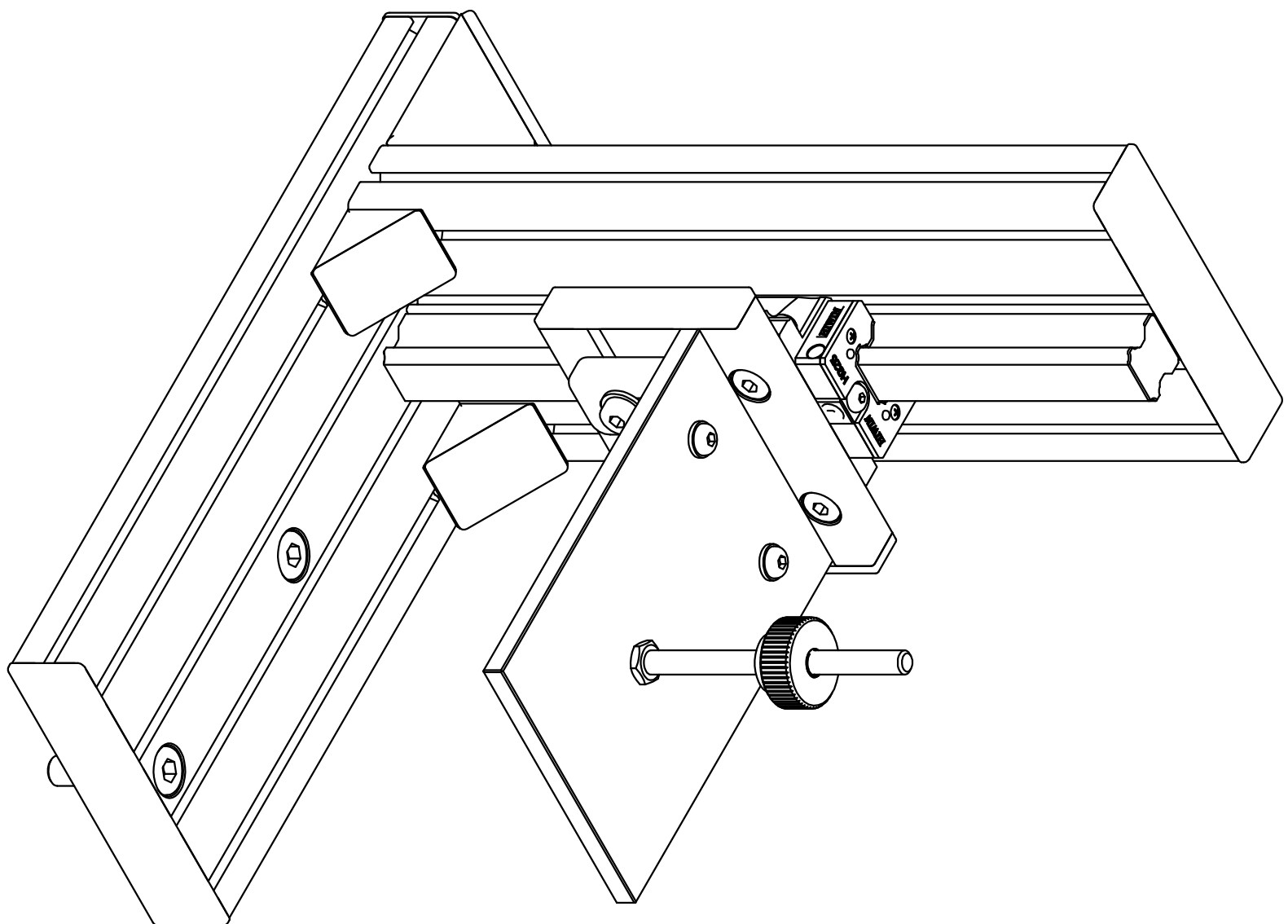
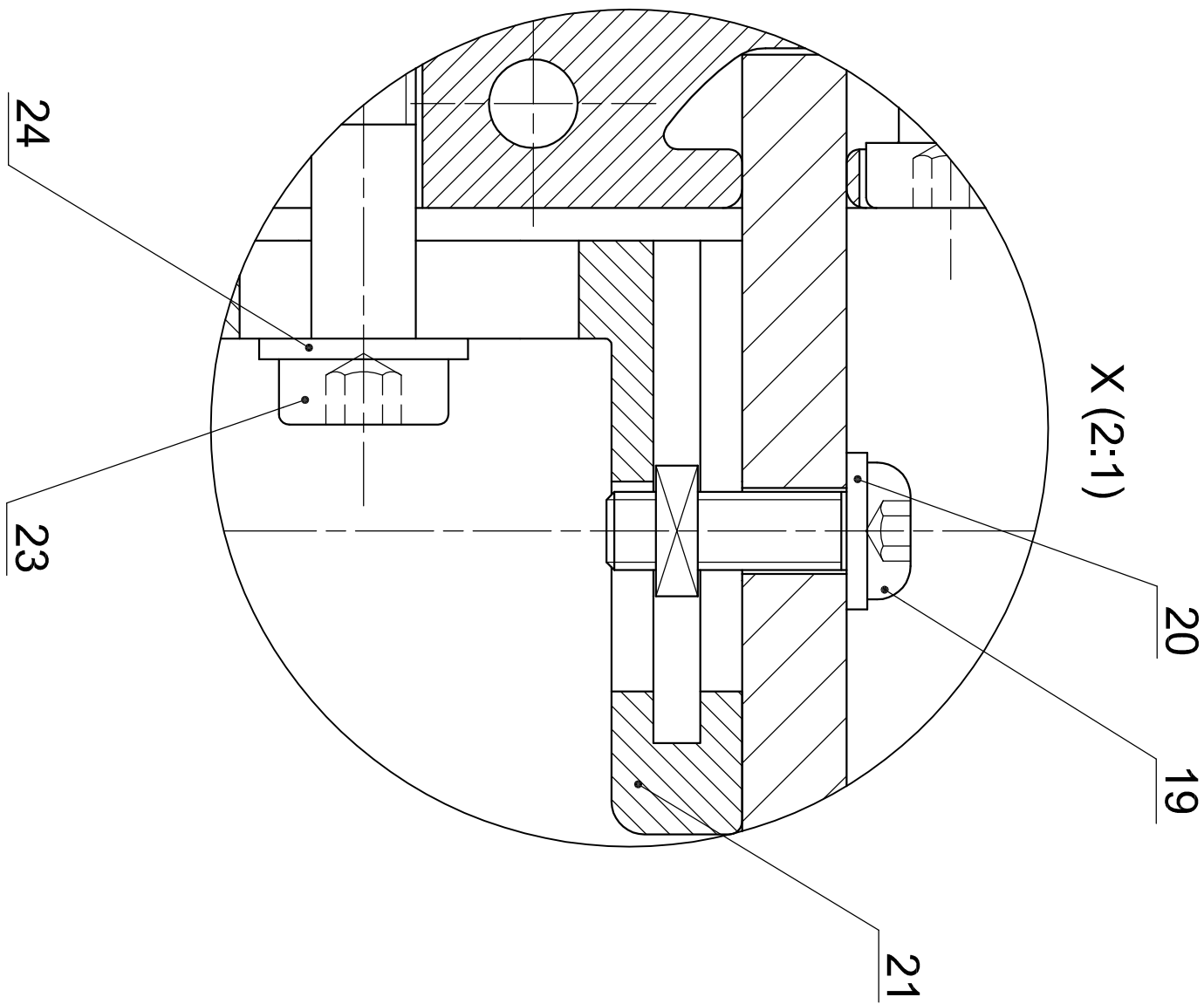
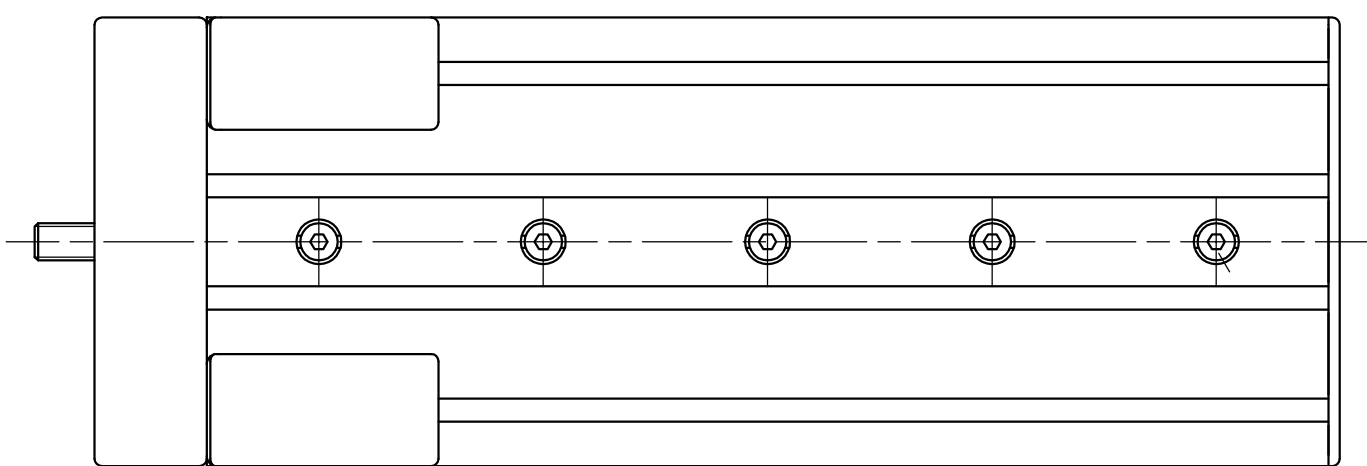
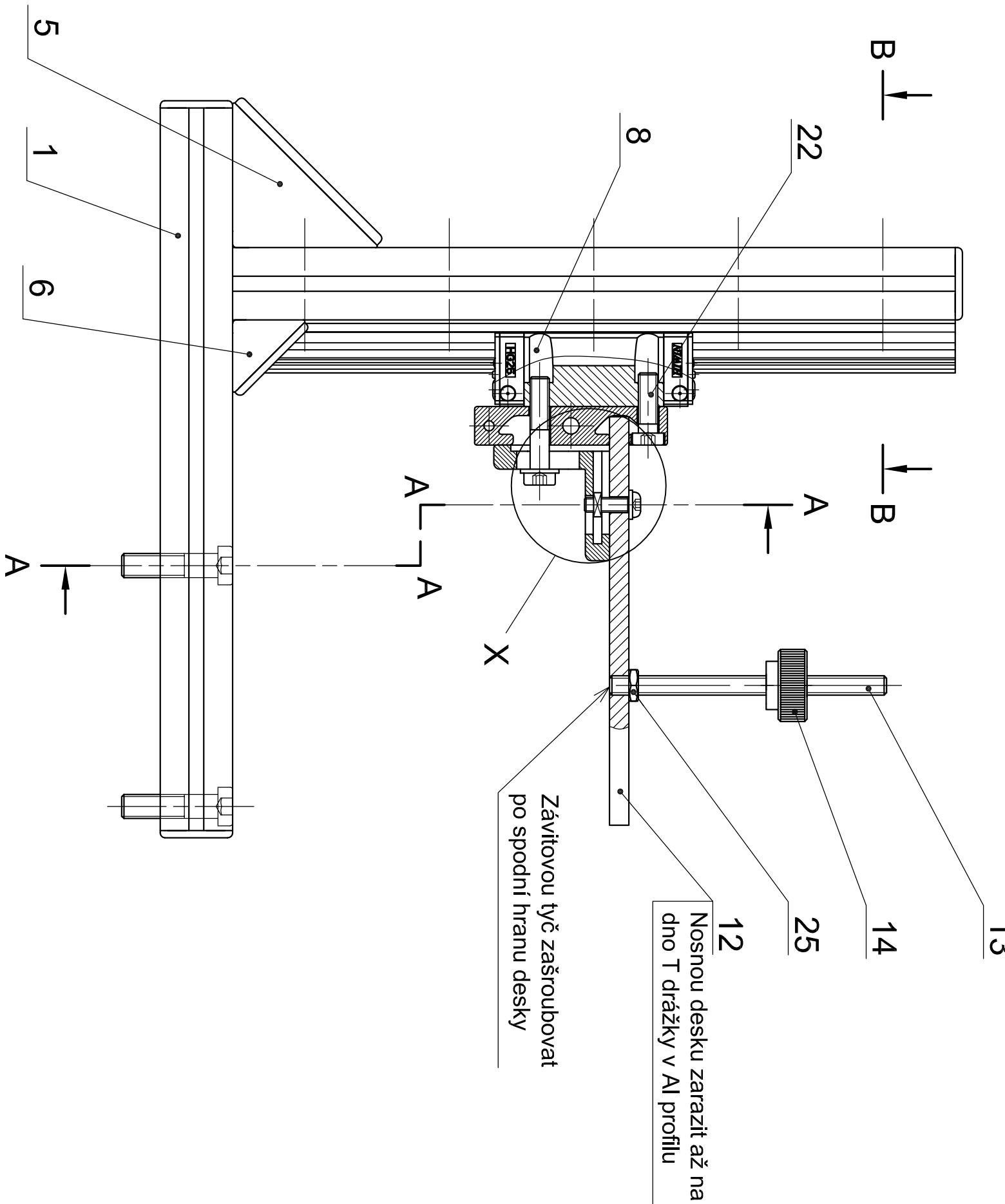
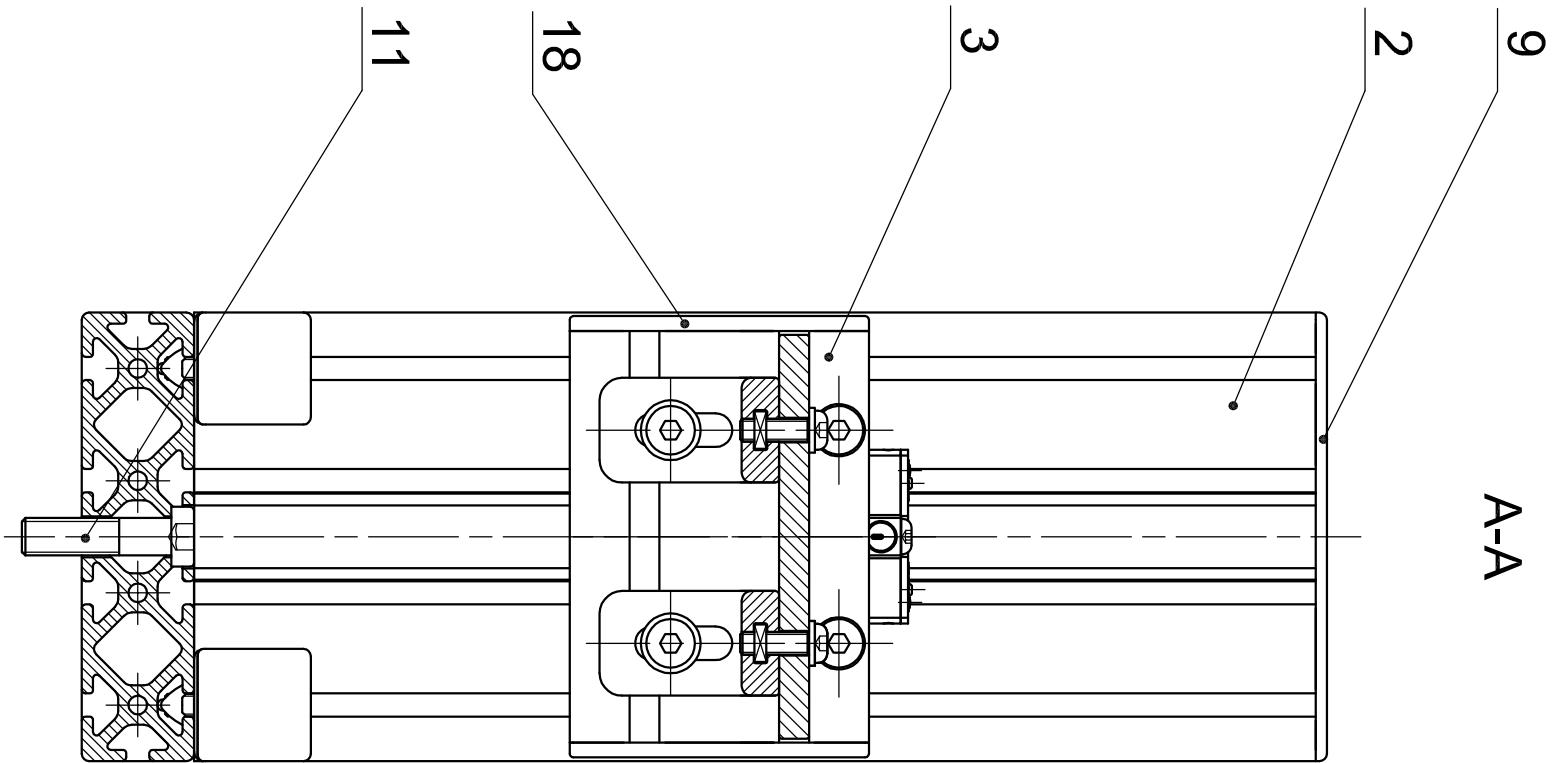


TU v Liberci

ZÁVAŽÍ

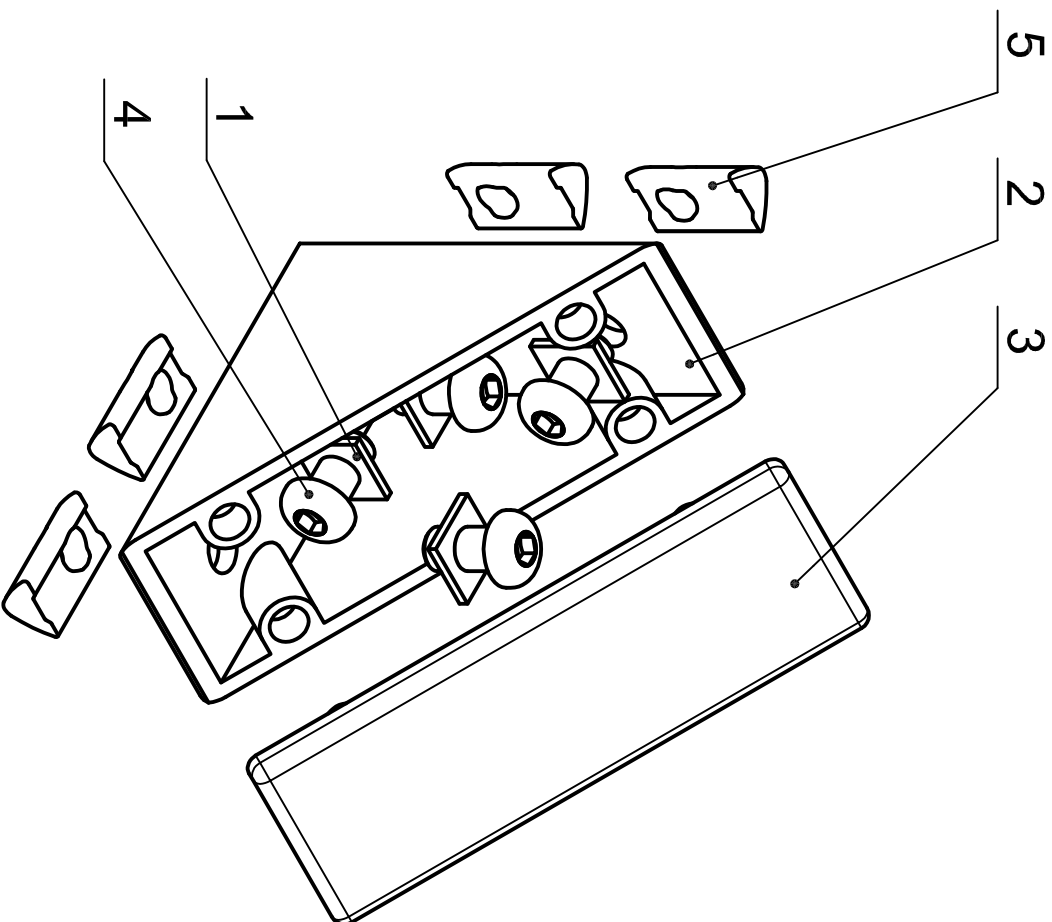
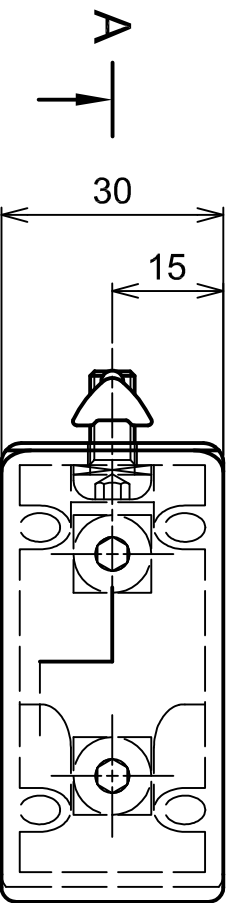
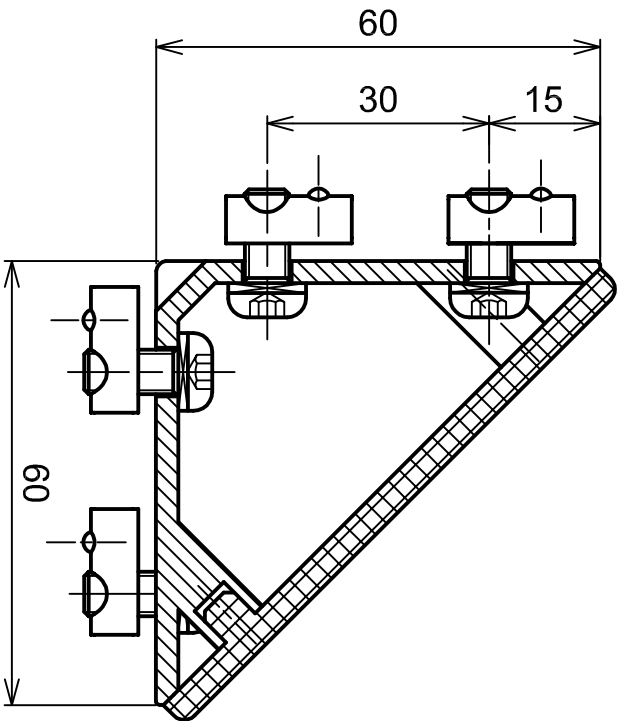
DP-PV-00.00.02

List



25	Matice M8	DIN 439B	1
24	Podložka 8,4	DIN 125	2
23	Šroub M8x40	DIN 7984	2
22	Šroub M8x25	DIN 7984	2
21	Úhelník 48 Zn /	Art. No.: 0.0.007.18 (www.item24.cz)	1
20	Podložka 6,4	DIN 125	2
19	Šroub M6x20	ISO 7380	2
18	Kryčka 80x16	Art. No.: 0.0.609.28 (www.item24.cz)	2
14	Rychloupínací matice /	OCN30 (www.misumi-ec.com)	1
13	Závrtová tyč B /	DIN 975	1
12	Nosná deska /	DIN EN 485	1
11	Šroub M10x40	DIN 7984	2
10	Šroub M6x35	DIN 7984	5
9	Kryčka 120x30	Art. No.: 0.0.419.25 (www.item24.cz)	3
8	Vozík s přírubou /	HGW 25CC ZFH (www.hiwin.cz)	1
6	Úhelník 30 Zn /	Art. No.: 0.0.419.67 (www.item24.cz)	2
5	Úhelník 60 Zn /	Art. No.: 0.0.419.68 (www.item24.cz)	2
4	Kolejnice /	HGR25TH-0300 (www.hiwin.cz)	1
3	Nosný Al profil /	Art. No.: 0.0.609.34 (www.item24.cz)	1
2	Al profil B /	Art. No.: 0.0.419.04 (www.item24.cz)	1
1	Al profil A /	Art. No.: 0.0.419.04 (www.item24.cz)	1
Poz	Označení / Vyřes	Potovar	Materiál
			Ks

Form.-Prost.		Mater.		Tř. odp.		PŘESNOST ISO 2768-mK	
c)		b)		a)		TOLEROVÁNÍ ISO 8015	
Změna		Datum		Index		Projevy	
1.2		Kresl		Kovové		Kovové	
Č. sestavy		Technolog		Normáliz.		Čís. výřezu	
Stav. výř.		Savěl		DIN 1		DIN 1	
Nový výř.		Datum		25.7.2013		DP-PV-01.00.00	
14		15		16		17	



5	Drážková matice 6 M6		4
4	Šroub M6x14		4
3	Krytka úhelníku 60x60	PA6-GF30	1
2	Úhelník 60x60	ZnAl4Cu3	1
1	Podložka 10,5x10,5x1,3		4
Poz	Označení / Výkres	Polotovár	Material
			Ks

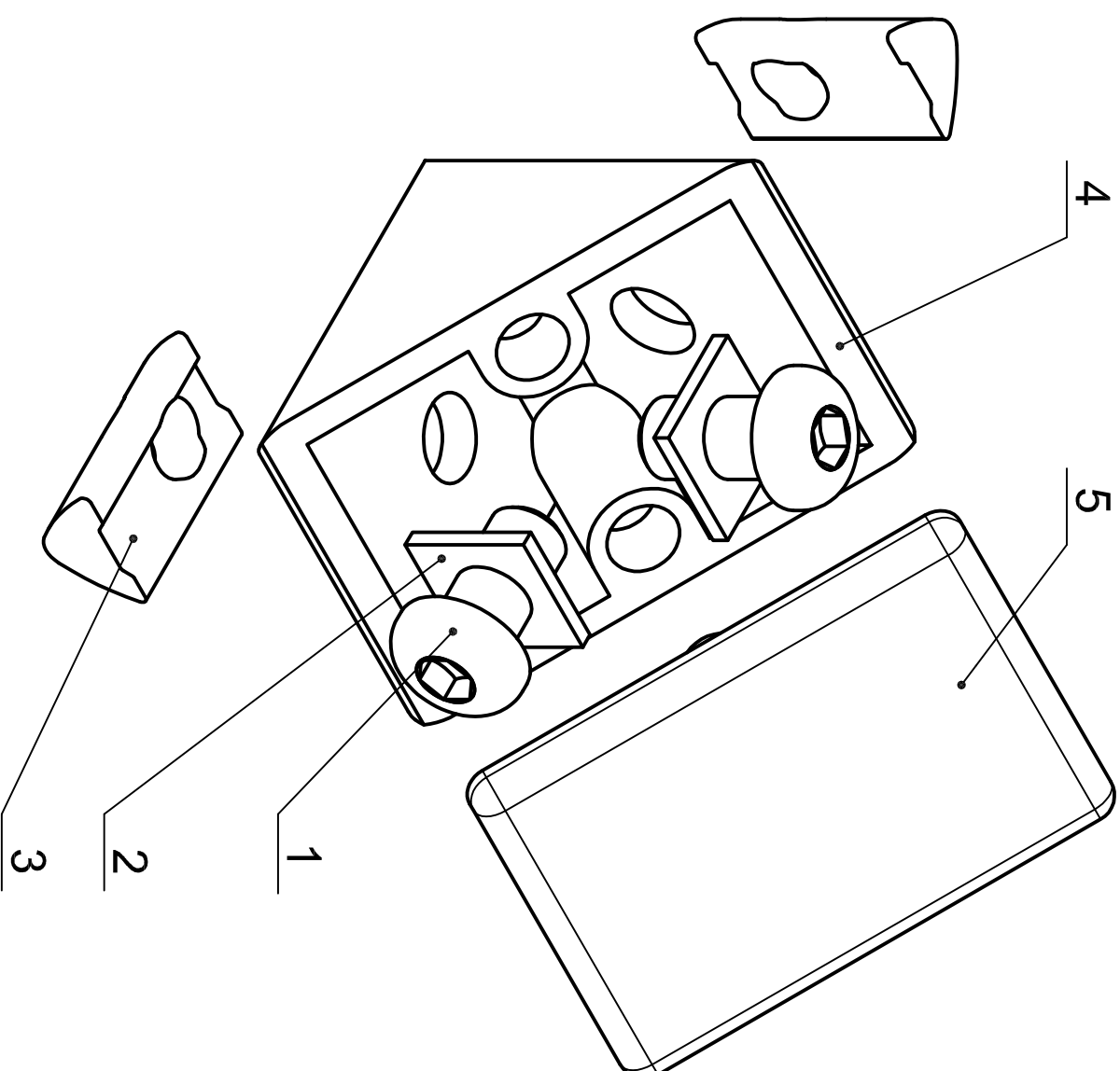
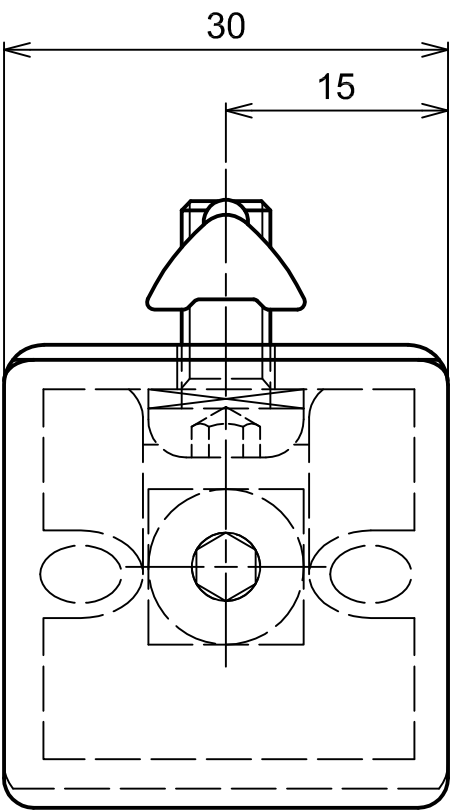
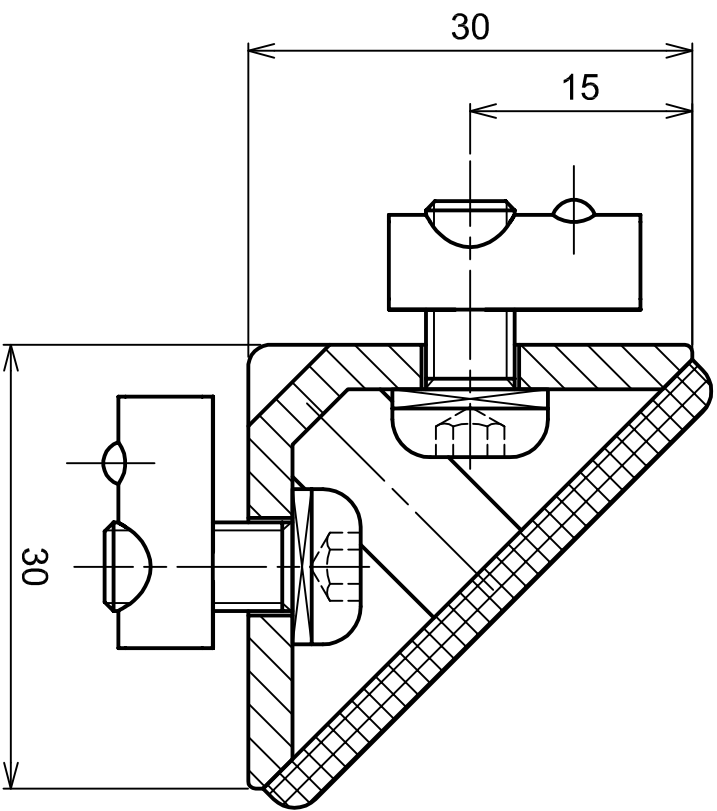
Rozn.-Počet		Úhelník 6 60x60 Zn		Č. pol.: 0.0.419.68 (www.item24.cz)		PŘESNOST ISO 2768 mK	
				Mater.		TOLEROVÁNÍ ISO 8015	
				c)		Tř. odp.	
				b)		Tř. odp.	
				a)		Tř. odp.	
Změna		Datum		Index		Podpisy	
Měřtko		Navrh		Kreslil		Kvalif.	
1:1		Kreslil		Kvalif.		Kvalif.	
Č. seznamu		Č. seřadění		Č. seřadění		Č. seřadění	
Č. seřadění		Č. seřadění		Č. seřadění		Č. seřadění	
Stavby		Schválil		Ctir-Kl		Čís výkresu	
Nový výkr.		Datum		11.7.2013		DP-PV-01.01.00	

POUŽÍTE PRO INFORMACE

ÚHELNÍK 60 ZN

DP-PV-01.01.00

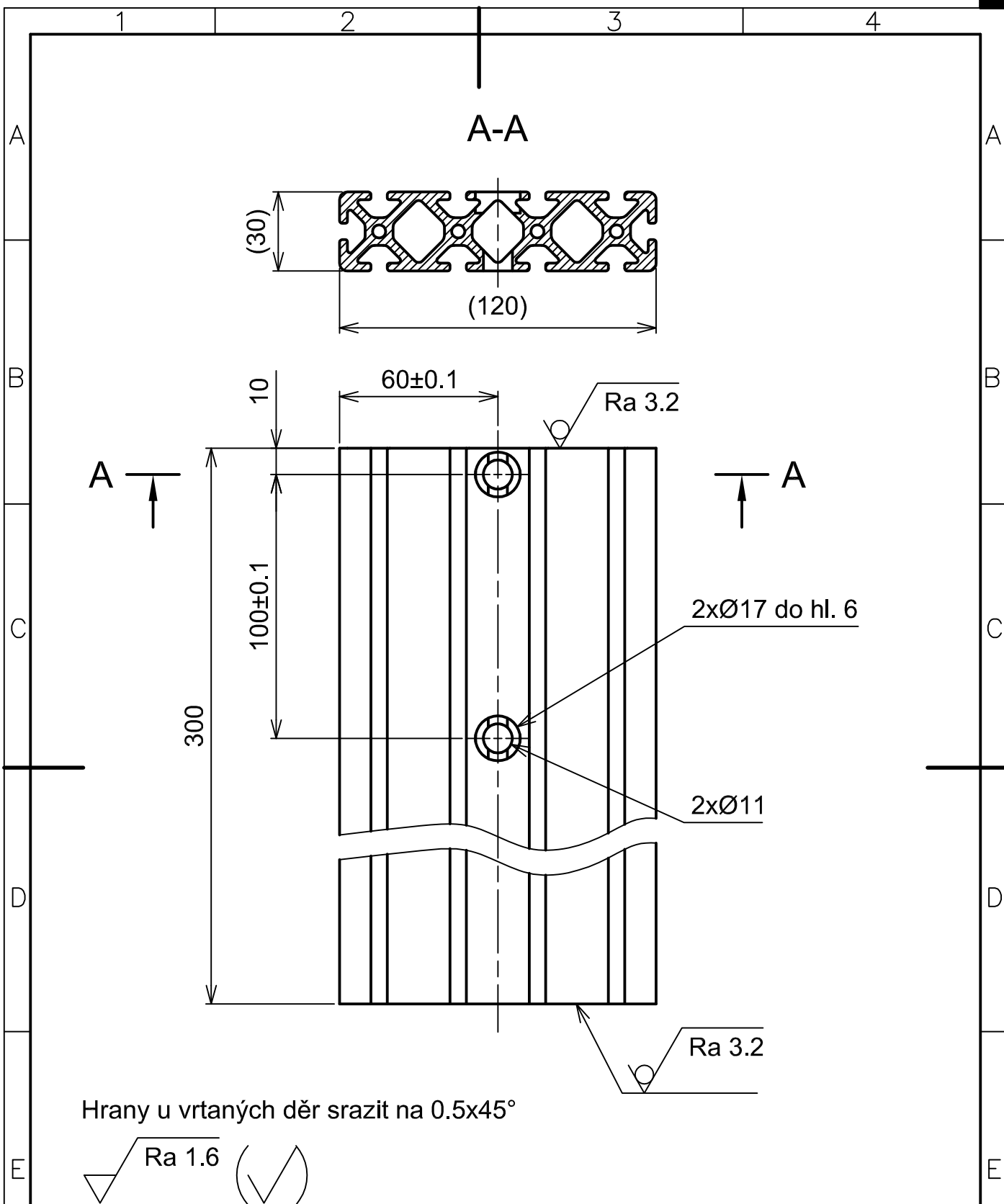
Liberci



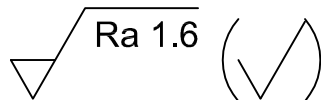
5	Krytka úhelníku 30x30		PA6-GF30	1
4	Úhelník 30x30		ZnAl4Cu3	1
3	Drážková matice 6 M6			2
2	Podložka 10,5x10,5x1,3			2
1	Šroub M6x14			2
Poz	Označení / Výkres	Polotovar	Material	Ks

Rozn.-Počet		Úhelník 6 30x30 Zn		Č. pol.: 0.0.419.67 (www.item24.cz)		PŘESNOST ISO 2768 mk	
				Mater.		TOLEROVÁNÍ ISO 8015	
				c)		Tř. odp.	
				b)		hm.	
				a)		kg	
				Datum		Index	
				Podpisy			
				Navrh		Kreslil	
				Změna		Kontrola	
				Pozn.		Kontrola	
				Měřítko		Úhelník 30 Zn	
				2:1		Úhelník 30 Zn	
				Č. seznamu		Číslo výkresu	
				Č. sestavy		DP-PV-01.02.00	
				Starý výkr.		List	
				Nový výkr.			

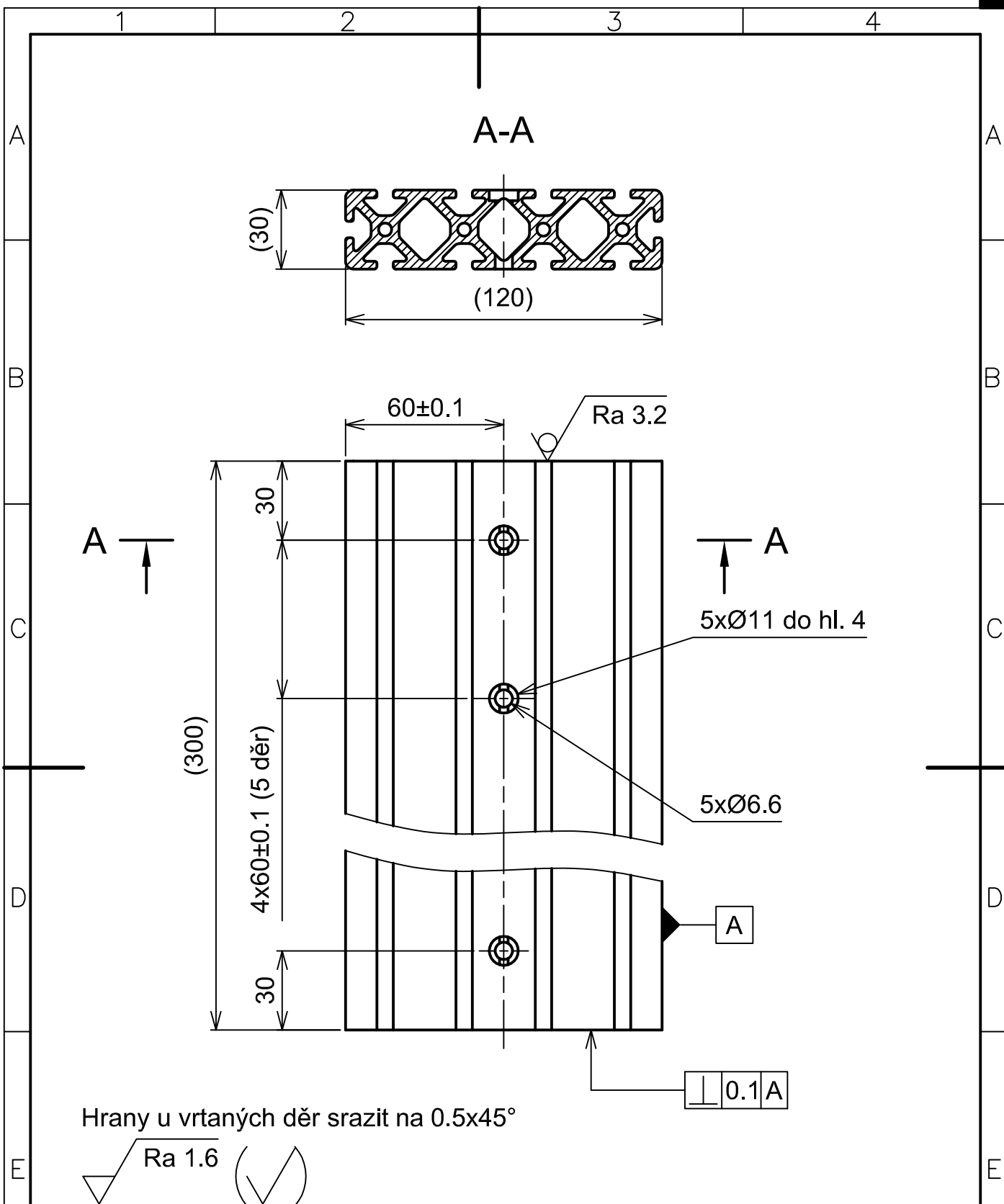
Rozm.-Polot.		Úhelník 12 48x48 Zn		Č. pol.: 0.0.007.18 (www.item24.cz)		PŘESNOST ISO 2768-mK	
		c)		Mater.		Tř. odp.	
		b)		Č. hm. 0,19 kg		Hr. hm.	
		a)				PRŮMĚRNÍ	
Změna		Datum		Index		Podpisy	
Měřítko		Pozn.		Navrhl		Název	
1:1				Kreslil		Úhelník 48 ZN	
Č.seznamu		Překoušel		Typ		DP-PV-01.03.00	
Č.sestav.		Technolog		Čis.výkresu		List	
Star.výkr.		Schválil		Círk			
Nový.výkr.		Datum		10.8.2013			



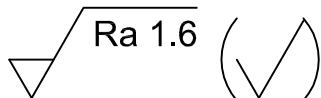
Hrany u vrtaných děr srazit na 0.5x45°



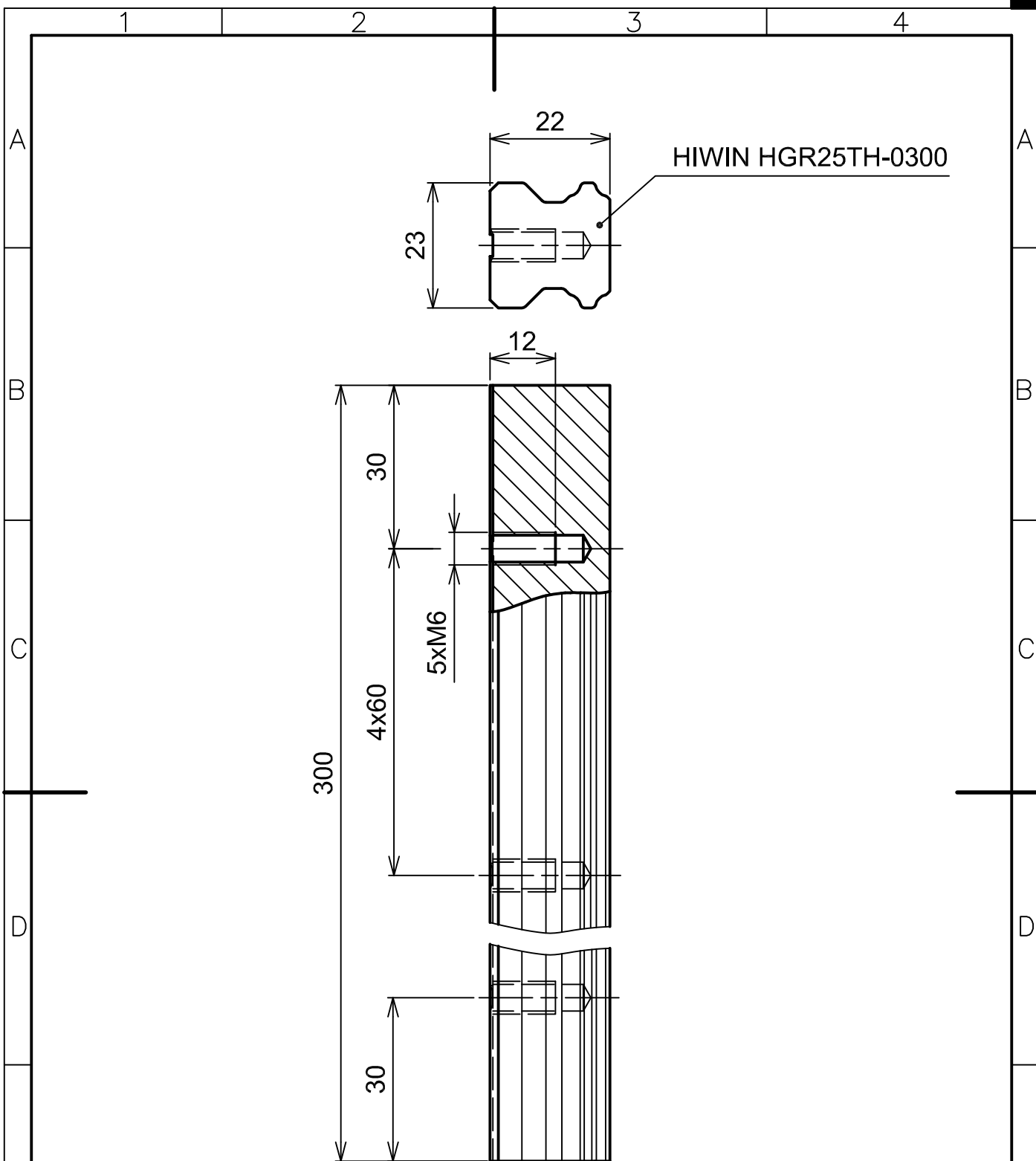
Rozm.-Polot. Al profil 6 - 120x30				PŘESNOST ISO 2768-mk			
				TOLEROVÁNÍ ISO 8015			
				PROMÍTÁNÍ			
		c)		Mater.	EN AW-6063 T66	Tř. odp.	
		b)		Č. hm.	1,30	kg	Hr. hm.
		a)					kg
Změna		Datum	Index				
			Podpisy				
Měřítka	Pozn.	Navrhl	Kovács	NÁZEV AL PROFIL A			
1:2		Kreslil	Kovács				
Č.seznamu		Přezkoušel		Typ Čís.výkresu			
Č.sestavy		Technolog					
Starý výkr.		Normaliz.		DP-PV-01.00.01			
Nový výkr.		Schválil	Církli				
		Datum	28.9.2013	List			



Hrany u vrtaných děr srazit na 0.5x45°



Rozm.-Polot.				Al profil 6 — 120x30				PŘESNOST ISO 2768—mK					
								TOLEROVÁNÍ ISO 8015					
								PROMÍTÁNÍ 					
				c)									
				b)									
				a)									
Změna				Datum		Index		Podpisy		 TU v Liberci			
Měřítka		Pozn.		Navrhl		Kovács		Název					
1:2				Kreslil		Kovács							
				Přezkoušel				AL PROFIL B					
Č.seznamu				Technolog									
Č.sestavy				Normaliz.				Typ					
Starý výkr.				Schválil		Cirkl							
Nový výkr.				Datum		28.9.2013		Čís.výkresu					
								DP—PV—01.00.02					
								List					

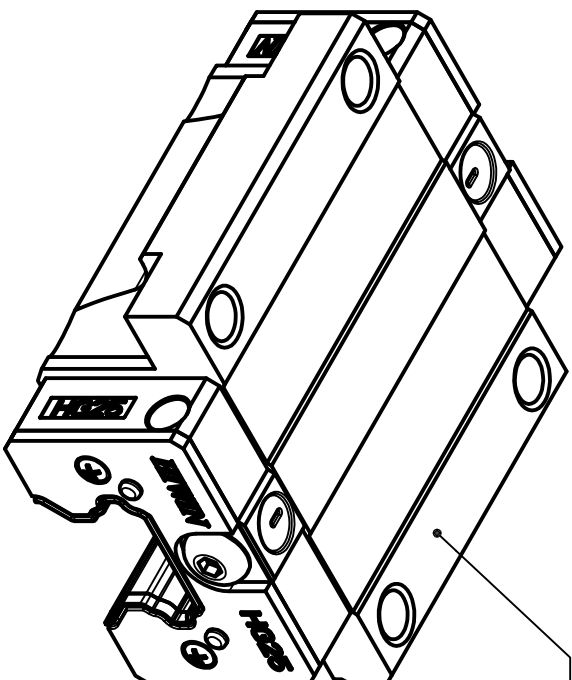
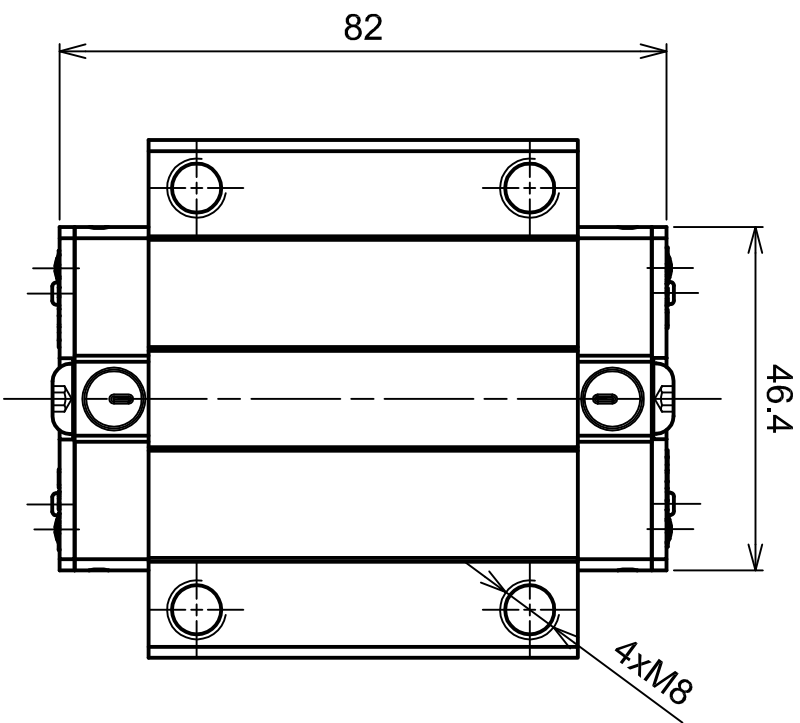
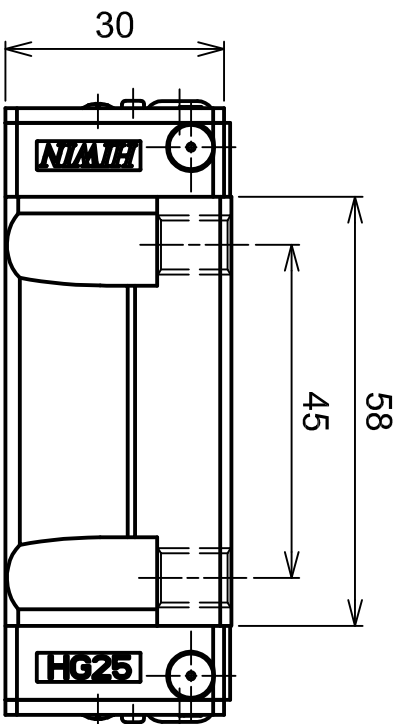
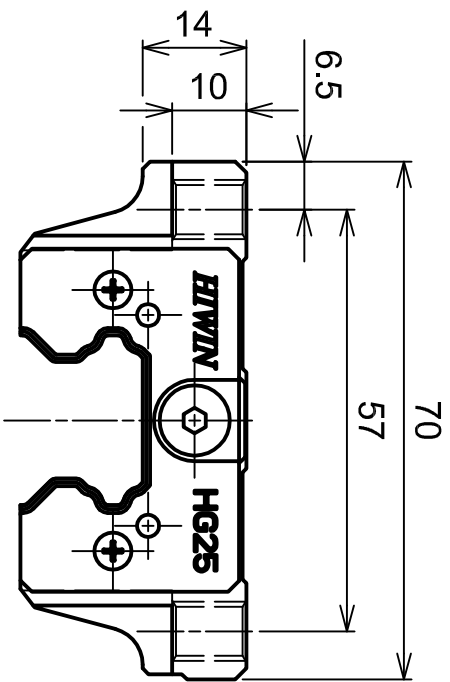


Tolerance rozměrů, tvaru a polohy, jakosti povrchů dle výrobce HIWIN s.r.o. (www.hiwin.cz) - lineární vedení

Rozm.-Polot.						PŘESNOST ISO 2768 mK	
		c)		Mater.	C55	Tř. odp.	TOLEROVÁNÍ ISO 8015
		b)		Č. hm.	1,07 kg	Hr. hm.	LIST BRÁNY
		a)					
Změna		Datum	Index	Podpisy			
Měřítko	Pozn.	Navrhl	Kreslil	Kovác			
1:1							
Č.seznamu		Technolog					
Č.seznamu		Normaliz.					
Starý výkr.		Schválil	Církil				
Nový výkr.		Datum	28.9.2013				

DP-PV-01.00.03

List



HIWIN HGW 25CC ZFH

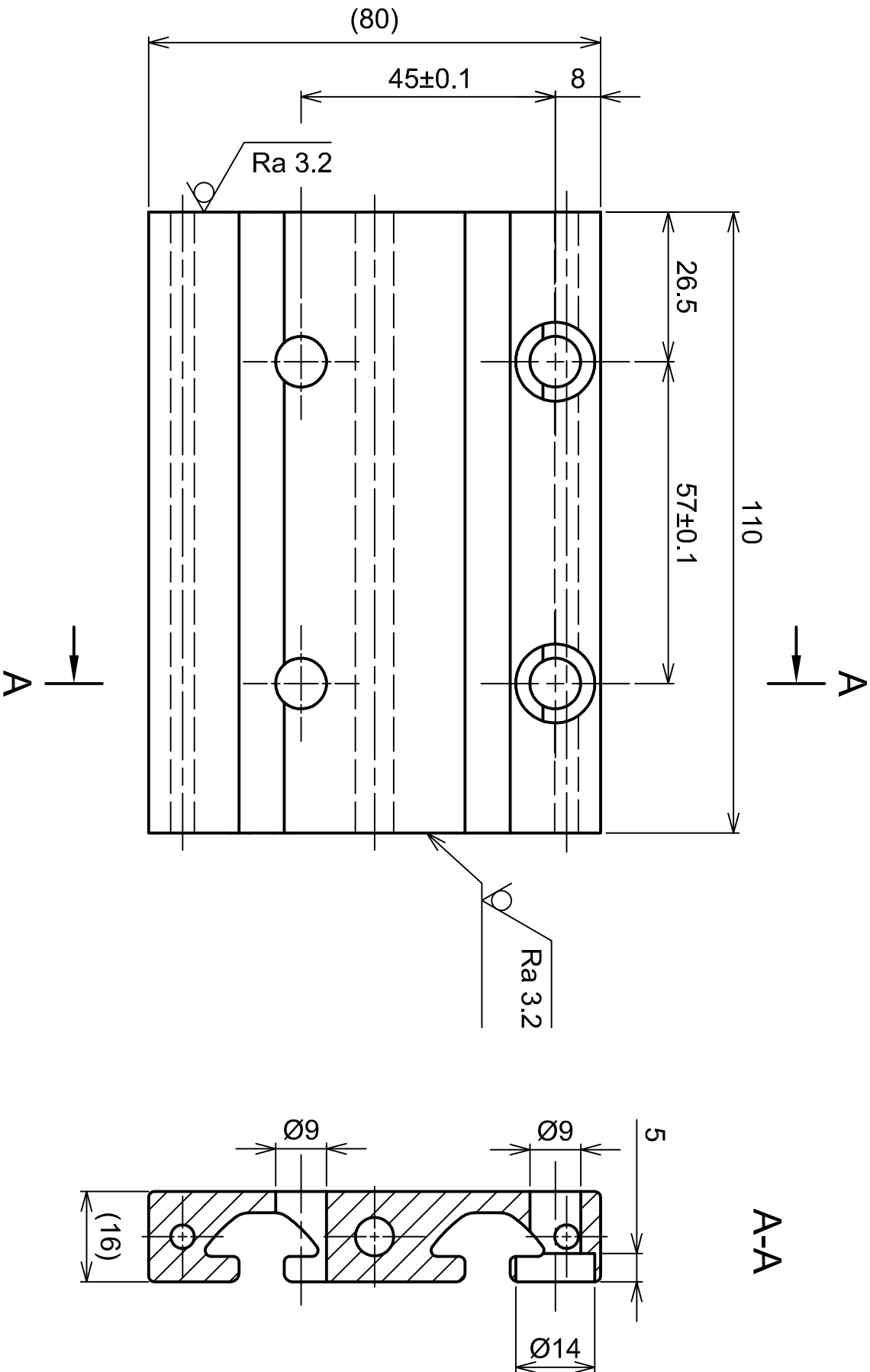
Podrobný přehled a mechanické vlastnosti vozíku na www.hiwin.cz

Rozm.-Polot.				PŘESNOST ISO 2768-mK			
		c)		Mat.		Tř. odp.	TOLEROVANÉ ISO 8015
		b)		č. hm.	0,60	kg/Hr. hm.	PMI/NI
		a)					Liberci
Změna				Datum	Index	Podpisy	
Měřtko	Pozn.	Navhl	Kreslil				
1:1			Průzkoušel				
Č. seznamu			Technolog				
Č. stav			Modifik.				
Stav		Schválil	Čís. kř.				
Nový		Datum	28.9.2013				

VOZÍK S PŘÍRUBOU

DP-PV-01.00.04

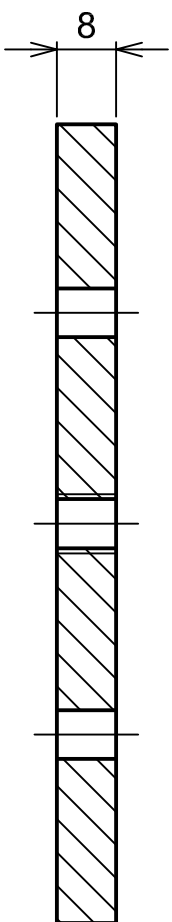
1. List



Hrany u vtaných děr srazit na 0.5x45°

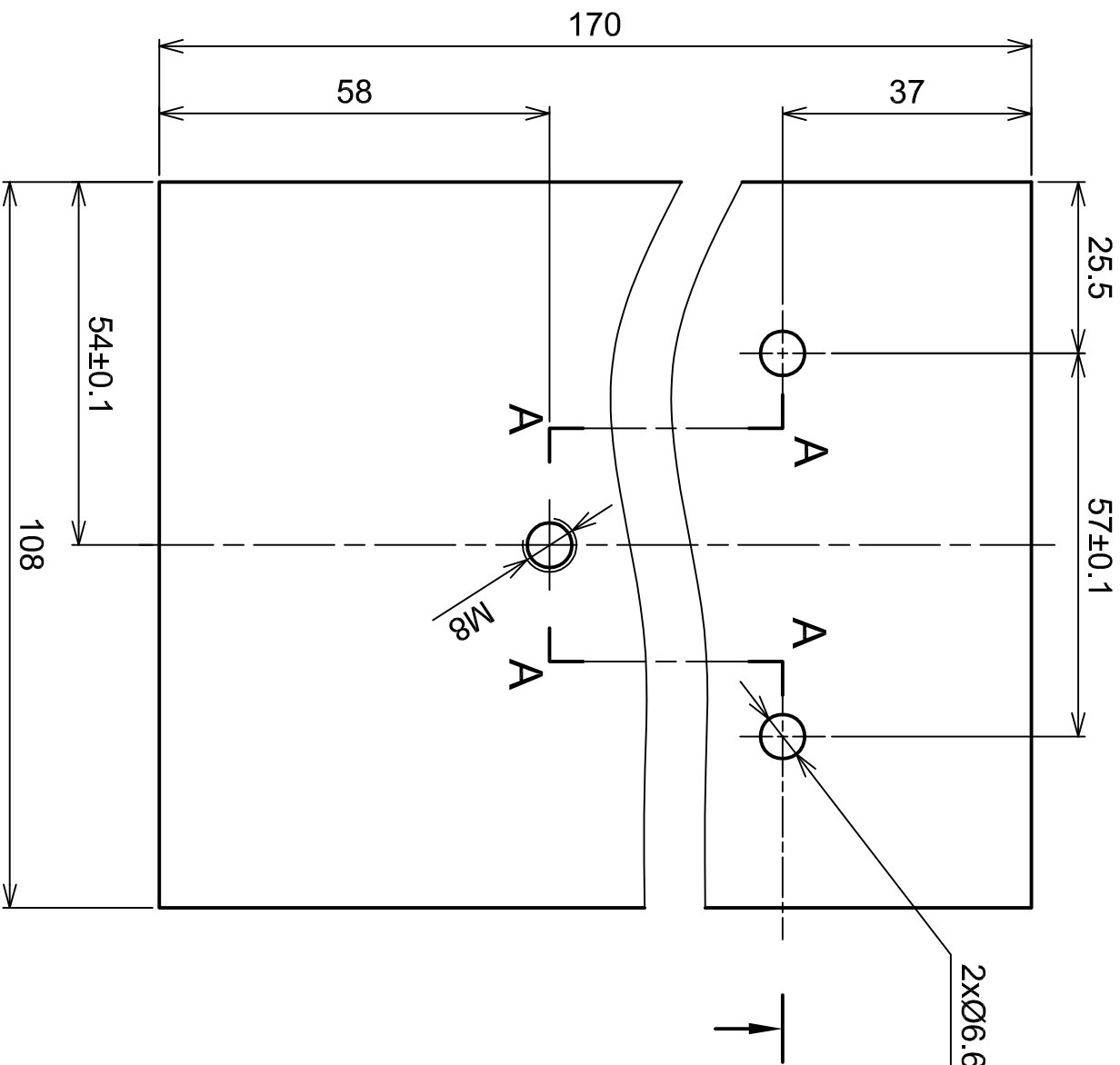
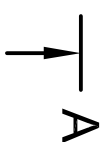
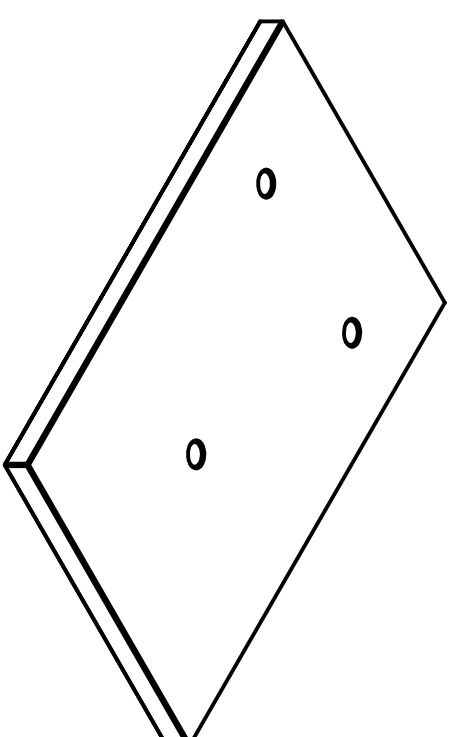
✓ Ra 1.6 (✓)

Rozn.-Počet. Al profil X 8 80x16				PŘESNOST ISO 2768-mK			
		c)		Mater.	EN AW-6063 T6	Tr. odp.	TOLEROVANÍ ISO 8015
		b)		Č. hm.	0,26	kg	PROMÍTANÍ
		d)		Hr. hm.		kg	
Změna				Podpisy			
Měřítko	Pozn.	Datum	Index	Navhl	Kovács	Název  NOSNÝ AL PROFIL	
1:1		Kreslil		Přezkoušel	Kovács		
Č. seznamu		Technolog					
Č. sestavy		Normáliz.					
Starý výkr.		Schválil		Čir-Kl			
Nový výkr.		Datum		30.6.2013		Čís výkresu DP-PV-01.00.05	

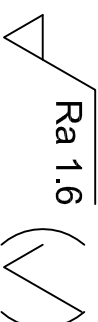


A-A

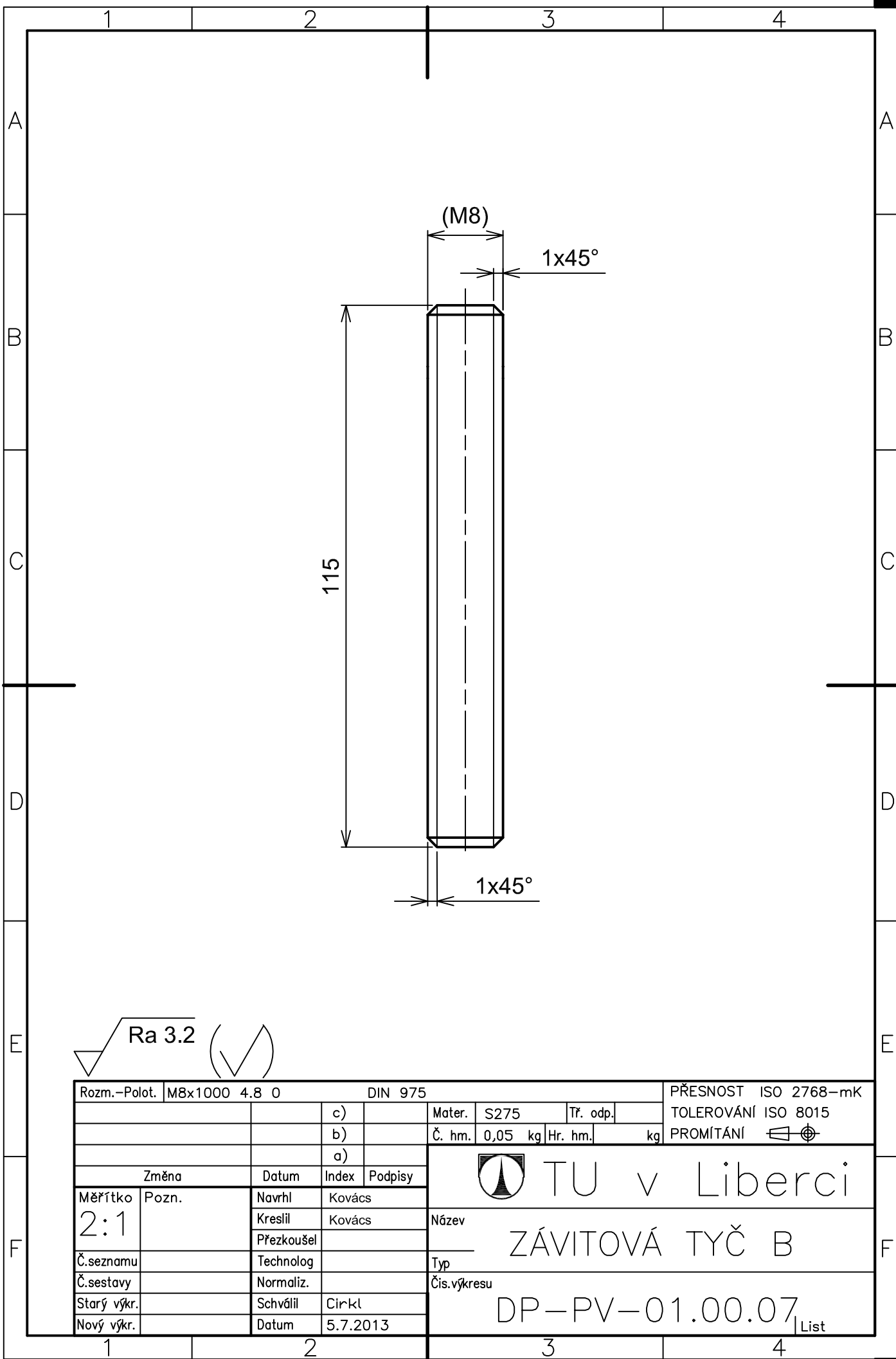
M 1:2

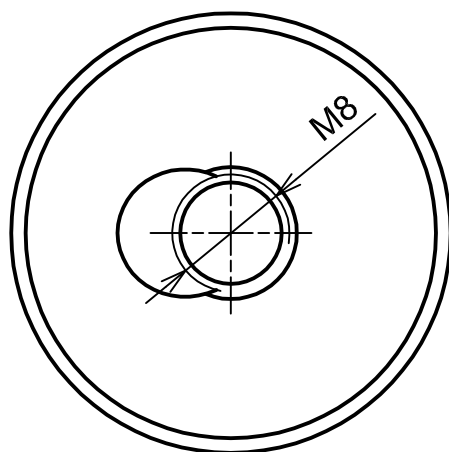
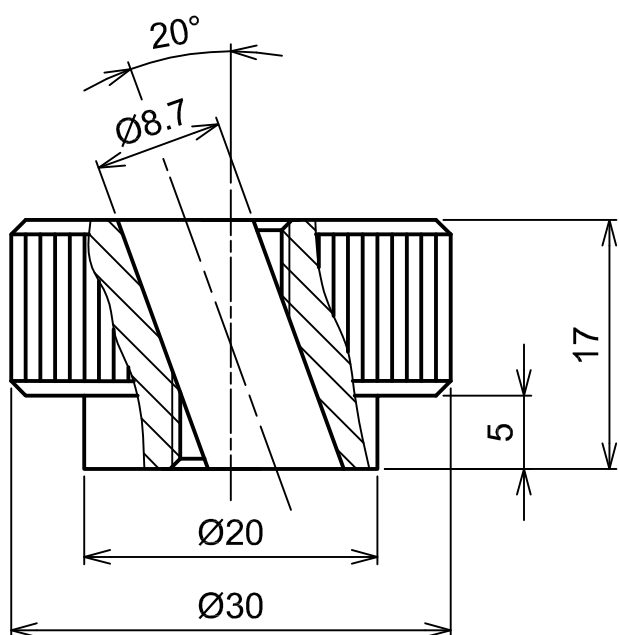


Hrany sražit na 0.5x45°

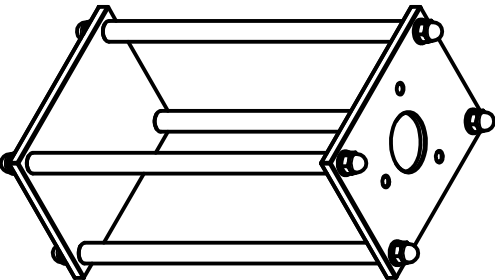
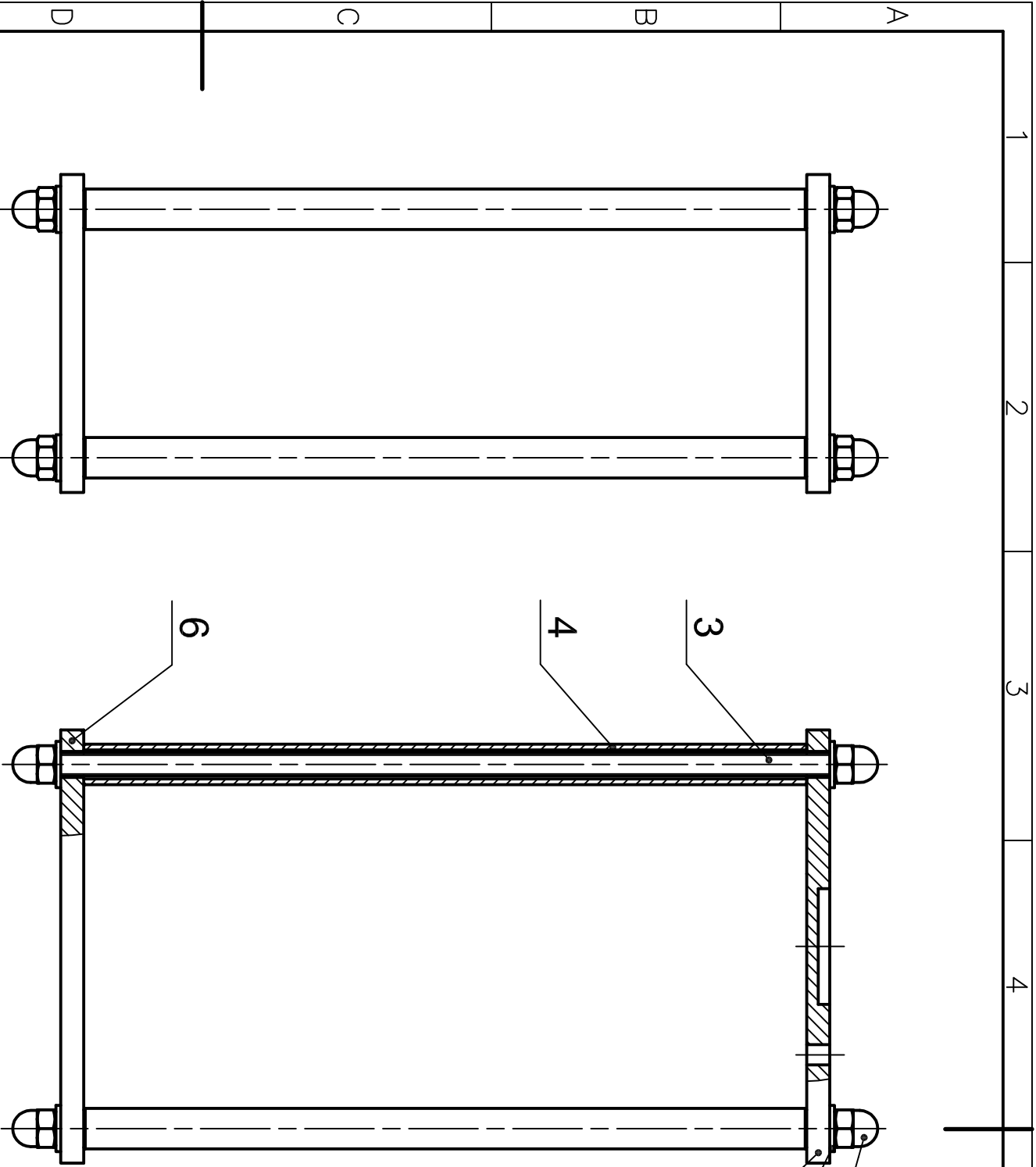


Rozn.-Polot.		170x108x8		DIN EN 485				PŘESNOST ISO 2768-mK				
				c)		Matér.	EN AV-5063	h11	Tř. odp.	TOLEROVANÍ ISO 8015		
				b)		Č. hm.	0,39	kg	Hr. hm.		kg	PROMÍTANÍ
				d)								
Změna		Datum	Index	Podpisy	 TU v Liberci NOSNÁ DESKA Čís.výkresu DP-PV-01.00.06 List							
Měřtko	Pozn.	Navhl	Kovács									
1:1		Kreslil	Kovács	Název								
		Přezkoušel		Typ								
Č.seznamu		Technolog										
Č.sestavy		Normaliz.										
Starý výkr.		Schválil	Člr-Kl									
Nový výkr.		Datum	3.7.2013									





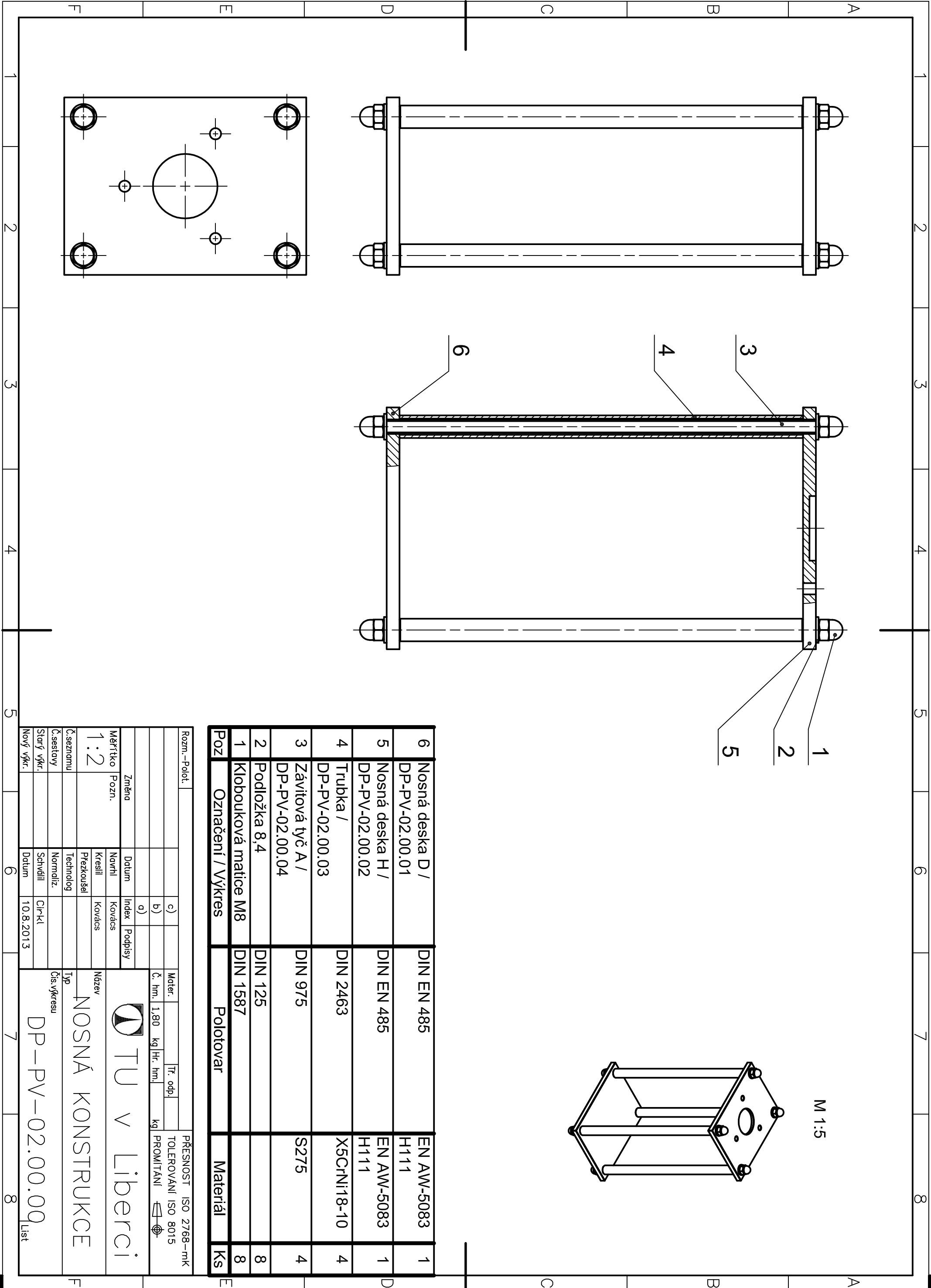
Rozm.-Polot. RM M8		Č. pol.: QCN30 (www.misumi-ec.com)				PŘESNOST ISO 2768-mK	
		c)		Mater.	C35E	Tř. odp.	002
		b)		Č. hm.	0,07 kg	Hr. hm.	kg
		a)					
Změna		Datum	Index	Podpisy	 Tř. odp. Liberci RYCHLOUPÍNACÍ MATICE Typ Čís.výkresu		
Měřítko	Pozn.	Navrhl		Kreslil			
2:1		Kreslil		Překoušel			
Č.seznamu		Technolog		Normatiz.			
Č.seznamu		Normatiz.					
Starý výkr.		Schválil	Čírk		DP-PV-01.00.09		
Nový výkr.		Datum	10.8.2013				
					List		

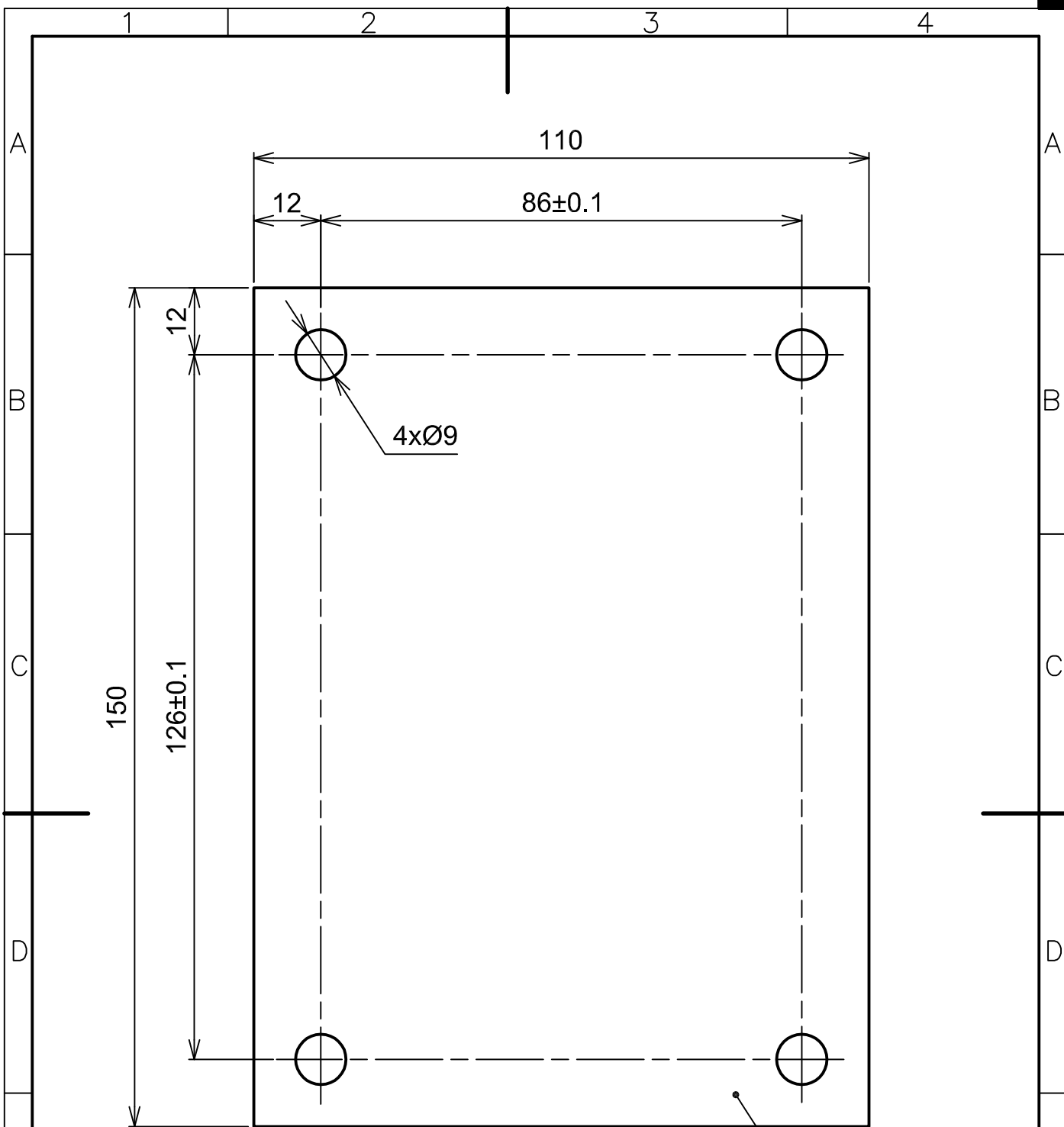


M 1:5

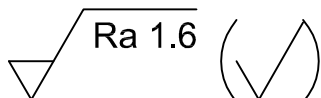
6	Nosná deska D / DP-PV-02.00.01	DIN EN 485	EN AW-5083 H111	1
5	Nosná deska H / DP-PV-02.00.02	DIN EN 485	EN AW-5083 H111	1
4	Trubka / DP-PV-02.00.03	DIN 2463	X5CrNi18-10	4
3	Závitová tyč A / DP-PV-02.00.04	DIN 975	S275	4
2	Podložka 8,4	DIN 125		8
1	Klobouková matice M8	DIN 1587		8
Poz	Označení / Výkres	Polotovar	Materiál	Ks

Rozm.-Polot.						PŘESNOST ISO 2768-mK	
		c)		Mater.		Tř. odp.	
		b)		Č. hm. 1,80 kg		Hr. hm. kg	
		a)				TOLEROVÁNÍ ISO 8015	
						PROMÍTÁNÍ	
							
Změna		Datum		Index		Podpisy	
Měřítko	Pozn.	Navhl		Kovács		 TU v Liberci	
1:2		Kreslil		Kovács			
		Přezkoušel					
Č. seznamu		Technolog					
Č. sestavy		Normaliz.					
Starý výkr.		Schválil		Ctir-Kl		Čís. výkresu	
Nový výkr.		Datum		10.8.2013			
						DP-PV-02.00.00	
						List	

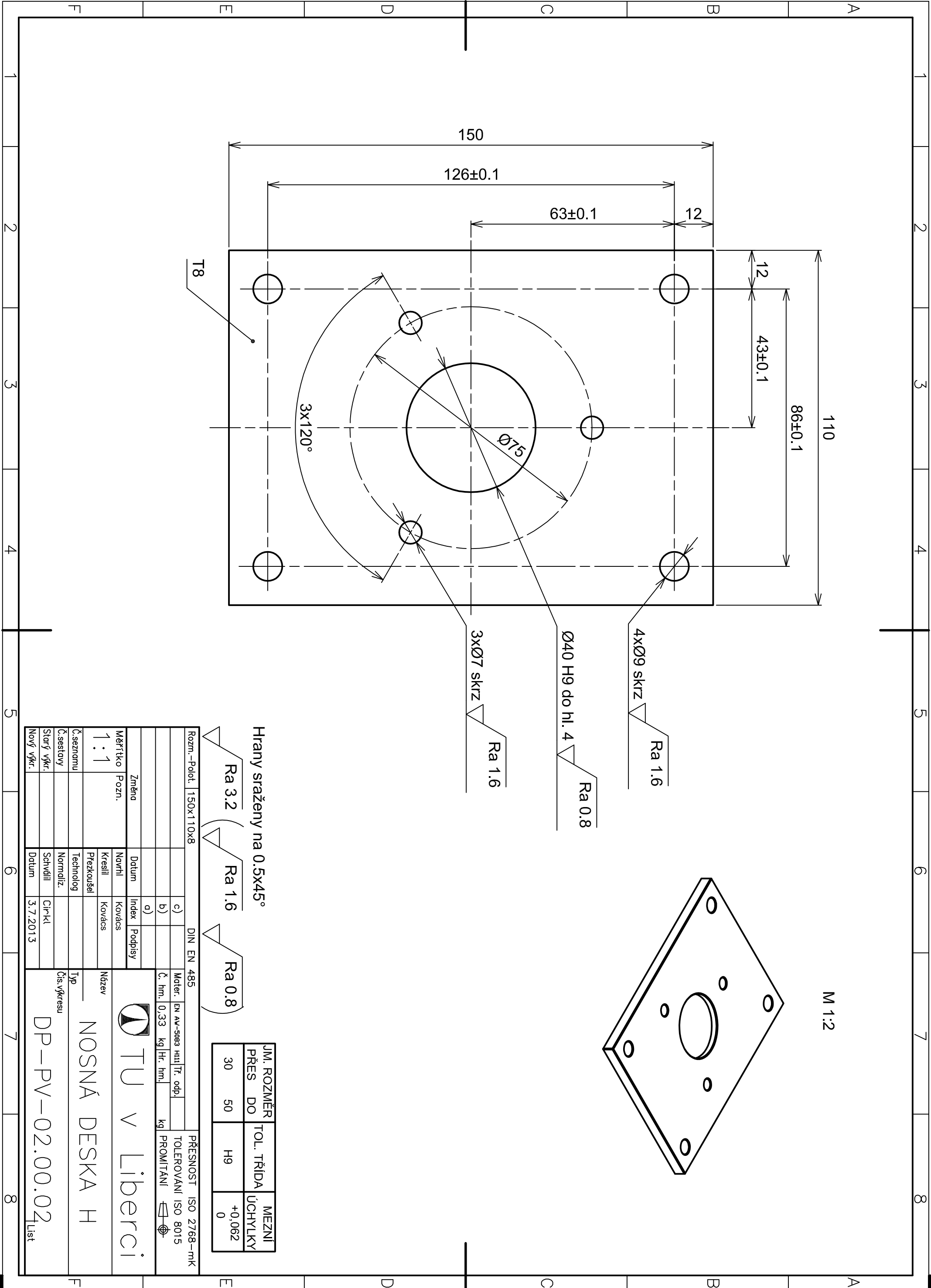




Hrany sražené na 0.5x45°



Rozm.-Polot.		150x110x8		DIN EN 485		PŘESNOST ISO 2768-mK	
				Mater.		TOLEROVÁNÍ ISO 8015	
				Č. hm.		PROMÍTÁNÍ	
				0,35 kg			
				Hr. hm.			
Změna		Datum		Index		Podpisy	
Měřítka		Navrhl		Kovács		Název	
1:1		Kreslil		Kovács		TU v Liberci	
Č.seznamu		Přezkoušel				NOSNÁ DESKA D	
Č.sestavy		Technolog				Typ	
Starý výkr.		Normaliz.				Čís.výkresu	
Nový výkr.		Schválil		Církl		DP-PV-02.00.01	
		Datum		3.7.2013		List	



Hrany sražené na 0.5x45°

Ra 3.2 Ra 1.6 Ra 0.8

JM. ROZMĚR	TOL. TŘÍDA	MEZNI
PŘES DO	H9	ÚCHYLKY
30 50		+0,062 0

Rozn.–Poloť. 150x110x8		DIN EN 485		PŘESNOST ISO 2768–mK	
	c)		Matér. EN AW-5083 H111	Tř. odp.	TOLEROVANÍ ISO 8015
	b)		Č. hm. 0,33 kg	Hr. hm.	PROMÍTANÍ
	a)				
Změna		Datum	Index	Podpisy	
Měřtko Pozn.		Novhl	Kovács		
1:1		Kreslil	Kovács		
Č. seznamu		Přezkoušel			
Č. sestavy		Technolog			
Starý výkr.		Normlitz			
Nový výkr.		Schvdlil	Clr-Kl		
		Datum	3.7.2013		
		Název			
		TU v Liberci			
		NOSNÁ DESKA H			
		Typ			
		DP–PV–02.00.02			
		Čís. výkresu			
		List			

